

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA Y LA CONSTRUCCIÓN DE LA COVARIACIÓN
LINEAL

JORGE EDUARDO GONZÁLEZ VARGAS

gonzalezj.o@javeriana.edu.co

JOAN MANUEL FLÓREZ VÁSQUEZ

joan.florez@javeriana.edu.co

Director

JORGE CASTAÑO GARCÍA PhD



PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

ÉNFASIS DE MATEMÁTICA

BOGOTÁ, D. C. 2018

LA MODELACIÓN MATEMÁTICA Y LA CONSTRUCCIÓN DE LA COVARIACIÓN
LINEAL

JORGE EDUARDO GONZÁLEZ VARGAS

gonzalezj.o@javeriana.edu.co

JOAN MANUEL FLÓREZ VÁSQUEZ

joan.florez@javeriana.edu.co

Director

JORGE CASTAÑO GARCÍA PhD



PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

ÉNFASIS DE MATEMÁTICA

BOGOTÁ, D. C. 2018

NOTA DE ADVERTENCIA

“La universidad no se hace responsable por los conceptos emitidos por sus alumnos en sus trabajos de tesis. Sólo velará porque no se publique nada contrario al dogma y a la moral católica y porque las tesis no contengan ataques personales contra persona alguna, antes bien se vean en ellas el anhelo de buscar la verdad y la justicia.”

Artículo 23, resolución No 13 del 6 de Julio de 1946,
por la cual se reglamenta lo concerniente a Tesis y Exámenes de Grado en la Pontificia
Universidad Javeriana.

Contenido

1. Antecedentes	11
1.1. La Modelación en la educación matemática	11
1.1.1. Perspectiva internacional	12
1.1.2. Algunas investigaciones de modelación en Colombia	20
2. Planteamiento del problema	25
3. Objetivos	27
3.1. Objetivo general:.....	27
3.2. Objetivos específicos:	27
4. Justificación	28
5. Marco teórico.....	32
5.1. Historia de la construcción del pensamiento variacional.....	32
5.2. Función.....	35
5.2.1. Proporcionalidad Directa.	36
5.2.2. Función Lineal.	37
5.2.3. Razón de cambio.....	38
5.3. Algunos fundamentos sobre la construcción del pensamiento covariacional	39
5.4. Imagen	42
5.5. Algunas aproximaciones sobre modelación matemática	44
5.6. Modelación y Modelización	50
5.7. Modelación como proceso cíclico.....	54
5.8. Sistemas desde las TGPS.....	55
5.9. El registro semiótico como sistema de representación.....	56
5.10. Tipos de Registros	59
5.10.1. Registro Algebraico o simbólico.....	60
5.10.2. Representación gráfica.	62
5.10.3. Registro tabular.....	62
5.10.4. Lenguaje Natural.....	63
5.11. Elementos didácticos: La modelación como herramienta didáctica	63
Situaciones dinámicas de covariación	64
6. Metodología	65

6.1. Fases del trabajo de investigación	67
6.2. Descripción global de la secuencia	69
6.2.1. Descripción de cada sesión de la secuencia didáctica.....	70
7. Análisis e Interpretación de Datos	86
7.1. Momento de captación de la variación	86
7.1.1. Indicador uno	86
7.1.2. Indicador dos.....	87
7.1.3. Indicador tres	88
7.1.4. Indicador Cuatro.	90
7.2. Momento de recolección de datos.....	92
7.2.1. Indicador uno.....	92
7.2.2. Indicador dos.....	93
7.3. Momento de representación y creación de un modelo.....	93
7.3.1. Indicador uno	93
7.3.2. Indicador dos.	95
7.3.3. Indicador tres	97
7.3.4. Indicador cuatro.....	98
7.3.5. Indicador cinco.....	99
7.3.6. Indicador seis.	101
7.4. Momento de uso del modelo, de validación y comprobación del modelo.....	103
7.4.1. Indicador uno	103
7.4.2. Indicador dos.....	104
8. Conclusiones	108
8.1. Momento de captación de la variación	108
8.2. Momento de recolección de datos.....	109
8.3. Momento de representación y creación de un modelo	109
8.4. Momento de uso del modelo, de validación y comprobación del modelo.....	110
8.5. De las generalidades durante el proceso de modelación.....	110
Bibliografía	113
ANEXOS... ..	115

Índice de Tablas

Tabla 1. Informe por colegios.	29
Tabla 2. Acciones mentales.	40
Tabla 3. Niveles de razonamiento.	41
Tabla 4. Modelización y Modelación.	50
Tabla 5. Modelo como producto.	61
Tabla 6. Descripción general de la secuencia didáctica.....	69
Tabla 7. Sesión prueba inicial.....	70
Tabla 8. Sesión No 1.....	71
Tabla 9. Sesión No 2.....	72
Tabla 10. Sesión No 3.....	74
Tabla 11. Criterios de la modelación.....	78
Tabla 12. Etapas del contenido programático.	79
Tabla 13. Etapas de modelación.....	80
Tabla 14. Sistema de categorización.....	82
Tabla 15. Evidencia segundo indicador captaciisecuencia didáctica.....	87
Tabla 16. Evidencia tercer indicador captaciisecuencia didácti.....	89
Tabla 17. Evidencia cuarto indicador captaciisecuencia didácti.....	90
Tabla 18. Evidencia sujeto 3 planes de celular y cala variac.....	91
Tabla 19. Evidencia del indicador uno, momento de recoleccictican del.....	93
Tabla 20. Evidencia del indicador dos, momento de recoleccictican del.....	95
Tabla 21. Evidencia del indicador tres, momento de recoleccin de datosm.....	97
Tabla 22. Evidencia del indicador cuatro, momento de recolección de datos.....	98
Tabla 23. Evidencia del indicador cinco, momento de recolecciión de dato.....	99
Tabla 24. Evidencia del indicador seis, momento de recolecciiiión de dat.....	101
Tabla 25. Evidencia del indicador uno, Recoleccide recolecciiiión d.....	103
Tabla 26. Evidencia del indicador dos, Recoleccide recolecciiiión d.....	105

Índice de Figuras

<i>Figura 1.</i> Representación cartesiana de distancia s y tiempo t	38
<i>Figura 2.</i> Momentos del proceso de modelización según Villa (2007)	49
<i>Figura 3.</i> Conversión de un sistema a otro.	56
<i>Figura 4.</i> Representación gráfica de una función.	62
<i>Figura 5.</i> Representación de un registro tabular.	62
<i>Figura 6.</i> Evidencia S3	99

Índice de Anexos

Anexo A	115
Anexo B	150
Anexo C	151

Resumen

El presente trabajo de investigación describe los procesos de modelación matemática en situaciones de covariación lineal, que siguen los estudiantes de ciclo V de la Institución Educativa Distrital -Quiroga Alianza cuando se enfrentan a situaciones de covariación. Ante las dificultades identificadas en dicho entorno referente al desarrollo del pensamiento variacional, proponemos la implementación de una estrategia didáctica para un grupo de estudiantes pertenecientes al ámbito de la educación básica secundaria y la media vocacional colombiana. Este trabajo toma como referencia los trabajos de Duval (1999), Vasco (2002), Villa (2007) Biembengut y Hein (2004) sobre modelación matemática, modelos matemáticos y sistemas de representación entre otros.

El trabajo se centró en la exploración de las características de los procesos de modelación de los estudiantes, a partir de la aplicación de una secuencia didáctica encaminada a generar una modelación matemática, que a su vez permiten, una aproximación hacia algunos atributos de la función lineal.

A partir de los resultados vinculados a tres actividades específicas de modelación, se categorizan los procesos de tres estudiantes a partir de los registros de lenguaje: natural, tabular y gráfico, como también de los hallazgos provenientes del lenguaje simbólico.

Finalmente, se analiza cómo se dan los procesos de modelación en situaciones de covariación lineal a partir de un sistema de categorías basado en los momentos y fases de la modelación de Vasco (2002) y, a la vez, se da cuenta sobre la manera en la que la modelación matemática se constituye como una estrategia didáctica para la enseñanza, que permite la construcción de un modelo, la construcción de una covariación lineal y una posible aproximación al concepto de función lineal.

Palabras clave: *modelación matemática, modelo matemático, función lineal, covariación lineal, pensamiento variacional.*

Abstract

This research describes mathematical modeling processes in linear covariation situations, developed by the students of Cycle V of the *Institución Educativa Distrital -Quiroga Alianza* when they deal with covariation situations. Given the difficulties identified in the regarding development of variational thinking, we put forward the implementation of an educational strategy which is addressed to a group of secondary and high school students in Colombia. This research takes as reference previous papers from Duval (1999), Vasco (2002), Villa (2007) Biembengut and Hein (2004) concerning mathematical modeling, mathematical models and representation systems, among othes.

This work is centered on the examination of the modeling processes features of students from the application of a didactic sequence, aimed to create a mathematic modeling that permits an approach towards linear function generalities.

From the results binded to three specific modeling activities, the students processes are categorized from the language register: natural, tabular and graphic, as well as the discoveries coming from the symbolic language.

Finally, it is analised how do modeling processes are given in lineal covariational situations from a system of categories based on moments and stages taken from the modeling of Vasco (2002) and at the same time, it accounts for the way in which mathematical modeling is constituted as a educational strategy for learning, that allows the construction of a model, a linear covariation, and a possible approach to the concept of linear function.

Keywords: *mathematical modeling, mathematical model, linear function, linear covariation, variational thinking.*

Introducción

El tema de la presente investigación es la modelación matemática como estrategia didáctica para la construcción de la covariación lineal, considerando el bajo rendimiento a nivel nacional con respecto a la media de la OCDE, es observable de manera general la dificultad que existe en el pensamiento matemático para este caso el pensamiento variacional de los estudiantes cuando abordan situaciones de la vida real y estos requieren un proceso de matematización para ser interpretados.

Por otra parte, algunos referentes han trabajado esta problemática, así como lo declara Biembengut y Hein (2004) la necesidad de plantear la modelación matemática en las aulas de clase como un método de enseñanza y como método de investigación, el cual permite al estudiante acceder al conocimiento desde el descubrimiento, la indagación y el obtener conclusiones a partir de un mundo real, que, para efectos de este trabajo de investigación, enfoca dicho proceso en la construcción de la covariación lineal.

Respecto a la revisión literaria de investigaciones previas acerca de la modelación matemática, en las últimas tres décadas la modelación como proceso de enseñanza ha despertado interés por la comunidad académica en diferentes niveles de escolaridad a nivel mundial, dado que la modelación como proceso de enseñanza puede ser una herramienta que posibilita en el estudiante leer, entender, interpretar y formular a partir de fenómenos o situaciones problema en diversos contextos o áreas del conocimiento, en términos de D´Ambrosio, (2009) ese mismo posible recorrido hecho por un estudiante tendría similitud con el recorrido histórico de la

ciencia, cuando mejora las teorías basadas en modelos que intentan representar la realidad y estas mejoras se dan debido al desarrollo de nuevos instrumentos intelectuales proporcionados en gran medida por procesos de modelación en la matemática.

En cuanto a la modelación matemática en el ámbito curricular y desde nuestra experiencia docente, se evidencia que, pese a las propuestas desde los estándares y lineamientos respecto al uso de la modelación en el aula, es una herramienta aún sesgada y carente de desarrollo y uso al interior del aula, y a partir de la sugerencia de indagar sobre las acciones y operaciones involucradas en un proceso de modelación matemática en Hitt, F., y Quiroz, S. (2017), consideramos pertinente centrar nuestro interés por conocer cómo el proceso de modelación contribuye en la comprensión de conceptos relacionados con el pensamiento covariacional cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones dinámicas que contienen dos variables que cambian simultáneamente de manera lineal, por este motivo planteamos la siguiente pregunta de investigación.

¿Cómo se dan los procesos de modelación de situaciones que involucran variables que covarían de forma lineal en estudiantes de ciclo V?

Con respecto a lo anterior, este trabajo de investigación tiene como propósito indagar en procesos de modelación en situaciones de covariación lineal y describir la manera en cómo esta metodología de enseñanza aporta en la construcción de la covariación lineal por medio de los atributos del concepto de función lineal, y a partir de los resultados encontrados identificar cómo se desarrollan estos procesos y qué dificultades se presentan en las diferentes etapas de un proceso de modelación.

Referente a la estructura del documento y desarrollo del proceso de investigación, en primer lugar, se realiza una descripción acerca de la justificación del proceso de investigación, el cual

contiene resultados a nivel institucional de los colegios el Uval IED y Quiroga Alianza I.E.D respecto a las competencias comunicación, razonamiento y resolución, los cuales nos evidencian las dificultades relacionadas con el pensamiento variacional de los estudiantes. En segundo lugar, se encuentran los antecedentes en el que se presenta una revisión literaria referente a la modelación desde un panorama a nivel mundial y desde lo emanado a nivel nacional como lineamientos y estándares curriculares. En tercer lugar, se encuentran los objetivos, general y específicos, seguido de los fundamentos teóricos que sustentan conceptos como modelación, modelo, función lineal y razón de cambio. En cuanto al desarrollo metodológico, el enfoque del proyecto es la investigación cualitativa y el tipo de investigación es el estudio de caso, en este apartado se encuentran los instrumentos de indagación y el desarrollo del trabajo de campo. Por último, se presenta la estructura del análisis y conclusiones del proceso de investigación.

Pretendemos con este trabajo de investigación invitar a la comunidad académica a implementar los procesos de modelación como una herramienta del aula de clase para el desarrollo de algunas habilidades y competencias propias del pensamiento covariacional. Por otro lado, se espera que los resultados den claridad sobre los procesos de modelación a partir de las representaciones semióticas institucionales o teóricas.

1. Antecedentes

Como formadores de la educación básica y de la media vocacional y maestrantes de la Pontificia Universidad Javeriana del programa maestría en educación, nace el interés por realizar un estudio sobre la modelación matemática que nos lleve a entender o tener una aproximación acerca del por qué las dificultades que tienen los estudiantes de secundaria de ciclo V al abordar el concepto de función lineal; desde una postura hipotética consideramos que a partir de registros escritos y procesos cognitivos es posible lograr identificar como mínimo los procesos de los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones enmarcadas dentro del pensamiento variacional para la enseñanza del concepto de función lineal.

A partir del interés propuesto en el párrafo anterior, identificamos como variables intervinientes para el trabajo de investigación la modelación en la educación matemática, la trayectoria de la modelación matemática, la modelación como metodología de enseñanza y el concepto de función en relación al modelo matemático.

1.1. La Modelación en la educación matemática

Durante las últimas tres décadas la modelación como proceso de enseñanza ha despertado interés en la comunidad académica en los diferentes niveles de escolaridad a nivel mundial, dado que este proceso puede ser una herramienta que posibilita en el estudiante leer, entender, interpretar, comprender y elaborar sus propias representaciones mentales, a partir de fenómenos o situaciones problema en diversos contextos o áreas del conocimiento; es a partir de este interés, que surgen conceptos modelo matemático, visualización, conversión, imagen, variación y covariación.

A continuación, abordamos las variables intervinientes a partir de la modelación matemática desde un panorama externo al currículo nacional y posteriormente desde una perspectiva nacional.

1.1.1. Perspectiva internacional

Desde un análisis epistémico D`Ambrosio (2009) estructura de manera ordenada lo que denomina el proceso de modelado matemático como la práctica de implementar instrumentos matemáticos para la creación de un modelo. En primer lugar, el autor parte de la idea de considerar el modelamiento matemático como la metodología o estrategia por excelencia para generar conocimiento y para aprender, lo cual, argumenta mediante el análisis de los siguientes conceptos y planteamientos:

- Conocimiento.
- Modelación matemática.
- Educación matemática.
- La modelación de situaciones ficticias puede conducir a problemas matemáticos.
- La solución de problemas y modelación matemática y la práctica equivocada de las pruebas.

Respecto al conocimiento, el autor considera dos tipos, el conocimiento individual y el conocimiento compartido, en ambos la comunicación juega un papel importante ya que al compartir conocimiento individual estaríamos haciendo referencia a un conocimiento común. Esto genera en principio un simbolismo y el intento de dar respuesta a lo inexplicable, que posiblemente sea un logro de compatibilidad, entrando la especie humana en un desarrollo de

percepciones en cuanto al pasado, presente y futuro. Lo cual, se vincula con la explicación de hechos y fenómenos que pueden estar en un entorno natural o imaginario. A partir de las percepciones mencionadas, se deriva el manejo y posible dominio de uno o varios sistemas mediante un modelo con el fin de realizar predicción y validar el sistema que el ser humano intentaría controlar. Uno de los principales sustentos referente al manejo de un sistema, es la elección de variables que según el autor determinan la precisión de un modelo, respecto a lo anterior, D`Ambrosio (2009) asegura que éste ha sido precisamente el recorrido histórico de la ciencia, cuando mejoran las teorías basadas en modelos que intentan representar la realidad y estas mejoras se dan debido al desarrollo de nuevos instrumentos intelectuales proporcionados en gran medida por la matemática.

Uno de los puntos que pretende sustentar el autor al considerar la estructura epistémica de la génesis del proceso de modelación, es considerar los modelos como la representación de lo real y la modelación como el proceso de elaboración de esas representaciones.

La modelación matemática, originalmente como metodología de enseñanza parte de un tema y sobre él desarrolla cuestiones o preguntas que quiere comprender, resolver o inferir. Esas preguntas deberán ser respondidas mediante el uso del conjunto de herramientas matemáticas y de la investigación sobre el tema (Biembengut y Hein, 2004a, p.107).

Por otro lado, por parte de la comunidad académica dirigida por la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) con la formación de grupos de investigadores de diferentes continentes, movimiento que se fortalece a partir del 2000, se identifica la trayectoria acerca de los trabajos de investigación desarrollados desde 1986 con los que se busca legitimar el proceso de modelación como un método para la enseñanza de las matemáticas (Biembengut y Hein,

2004). Es a partir de los resultados de estas investigaciones que el autor identifica dos abordajes en los que actúa el profesor: el primero, que a partir de modelos matemáticos aplicados se desarrolla un contenido programático y el segundo es aquel que orienta al estudiante para la construcción de un modelo, además se hace la observación, que el tema que se desea abordar sea lo suficiente para poder desarrollar el contenido programático y se vincule con el interés de los estudiantes. A continuación, se realiza una breve descripción de los dos abordajes propuestos por Biembengut y Hein (2004) como la idea sintética acerca de la legitimidad del proceso de modelación como un método de enseñanza.

Abordaje 1: Desarrollo del contenido programático

El contenido programático se desarrolla mediante la elección del tema por parte del profesor, de tal manera que genere interés en los alumnos y sean ellos mismos quienes lleguen a la construcción de un modelo matemático. O, parte de un modelo matemático aplicado del conocimiento y este está adaptado al desarrollo del contenido programático de tal forma que el modelo sea una orientación. Las etapas de desarrollo que propone el autor para este tipo de abordaje son: exposición del tema, delimitación del problema, formulación del problema, desarrollo del contenido programático, formulación de un modelo matemático y la resolución del problema a partir del modelo, interpretación y validación.

Abordaje 2: Orientar los alumnos para que hagan un trabajo de modelación

Para este abordaje se deben crear condiciones para que los estudiantes aprendan a investigar y logren la elaboración de modelos matemáticos, dichas condiciones se deben desarrollar paralelamente con el contenido programático. Las etapas de desarrollo para este abordaje son: elección del tema, familiarización con el tema que va hacer modelado, delimitación del problema y formulación, elaboración de un modelo matemático, Resolución y validación, finalmente se

encuentra la organización del trabajo escrito y exposición oral. Esta segunda forma de abordaje podrá ser un referente a tener en cuenta en este trabajo considerando que tiene como uno de los posibles objetivos la construcción de un modelo a partir de condiciones dadas.

Christiansen (1999) desarrolla un análisis entorno a la función de la educación matemática en la educación para la democracia a partir del estudio de modelos implementados en un contexto próximo a los estudiantes. A continuación, se describirá tres grupos que el autor denomina educadores que realizan conexiones entre la educación matemática y la democracia.

Grupo 1: Genera la posibilidad que los estudiantes puedan usar la matemática como una herramienta del pensamiento para participar activamente de la democracia, un ejemplo, propuesto por el autor es el uso de la estadística.

Grupo 2: Proporciona en los estudiantes la habilidad para analizar y lograr una posición crítica frente a modelos matemáticos, particularmente si los modelos corresponden a situaciones que tienen consecuencias para la realidad del estudiante a nivel social.

Grupo 3: Es el grupo de educadores que poco se centran en los contenidos de la matemática, pero en cambio resaltan el desarrollo de situaciones de comunicación ideal e incrementar la organización de la instrucción en los estudiantes.

Respecto a los tres grupos mencionados, Christiansen (1999) destaca que su interés se centra en el segundo grupo, hecho que para efectos de éste trabajo de investigación puede contribuir en cuanto el autor se refiere a la reflexión crítica sobre los modelos y sus aplicaciones, considerando que las matemáticas juegan un papel importante en el subsuelo de la cultura y la sociedad.

Aunque el trabajo de este autor tiene mayor conexión con su interés de una educación matemática y su dimensión política, relación que no se abordará en nuestro estudio, el trabajo

desarrollado por Christiansen (1999), resulta interesante en tanto que liga el proceso de modelación a un proyecto de intervención, implementa el modelaje del flujo del agua a través de Oresund, una vía de conexión entre Malmo en Suecia y Copenhague en Dinamarca. Del proyecto mencionado, el autor propone el análisis de las consecuencias de la construcción del megaproyecto respecto a efectos ambientales, modelos avanzados del flujo de agua, consecuencias económicas y sociales. De los aspectos mencionados, el autor presupone que los cálculos de un modelo pueden contribuir solo a algunos de los aspectos, pero difícilmente pueden tomar lugar a los que corresponden a una decisión política. Sin embargo, el desarrollo del trabajo de investigación en estudiantes daneses de educación superior aporta los siguientes aspectos referente al trabajo con modelos matemáticos:

- La correspondencia de los modelos con la realidad depende de las bases teóricas, considerando que los modelos son construcciones teóricas no siempre confiables y que el modelado parte de supuestos, esto genera la necesidad de mejorar y ajustar el modelo.
- Una cualidad del modelo es su aplicabilidad en el razonamiento hipotético.
- A partir de la construcción de un modelo para abordar una situación tecnológica, se logra abordar el aspecto ético o político social con argumentos mejor sustentados. Referente a la situación de la construcción de la vía conexión Oresund, Christiansen (1999) menciona “Varios estudiantes usaron diligentemente el hecho de que los cálculos son inciertos. Sobre esta base argumentaron que la construcción de la vía podría tener consecuencias ambientales impredecibles; por consiguiente, no debería ser construida. Otros estudiantes argumentaron sobre correr esos riesgos” (p.44).

- El incluir un contexto con el que los estudiantes estén familiarizados, tendrá efecto sobre la manera como abordan la situación.

Referente al trabajo expuesto en Christiansen (1999) se identifica que la actividad reflexiva es necesaria para percibir posibles modos que al implementar la matemática influyan en las decisiones para una sociedad.

Como lo hemos identificado a partir de las afirmaciones de Christiansen (1999) los modelos matemáticos pueden llegar a ser aproximaciones a los resultados reales más no exactos, desde la postura de Brito, Alemán, Fraga, Para & Arias-de Tapia (2011) se considera que un modelo matemático es también una idealización que al ser un buen modelo simplifica la realidad lo suficiente para llegar a permitir la elaboración de cálculos matemáticos. Brito et al, (2011) proponen una estrategia metodológica que denominan modelación, ésta posibilita estructurar sistemáticamente el proceso requerido para el desarrollo de la habilidad de modelar, en este trabajo se implementa a manera de ejemplo una situación física el cual sugieren debe ser ilustrativo y corresponde al estudio del drenaje de un tanque lleno de líquido que tiene un orificio en el fondo. Tanto la situación como la estrategia metodológica se enmarcan dentro de la formación de ingenieros en la educación matemática a nivel superior en Cuba. En primer lugar, los autores proponen los pasos que debe seguir la modelación matemática como estrategia general, los cuales son:

1. Definición del problema y sus objetivos.
2. Definición de la teoría que gobierna el problema.
3. Descripción de la situación física en términos matemáticos.
4. Solución matemática del modelo.

5. Comparación del modelo con la situación real.
6. Estudio de las limitaciones del modelo.
7. Aplicación del modelo e interpretación de los resultados que ofrece.

En cada uno de los pasos se describen puntualmente lo que denominan los desarrollos necesarios que contribuyen a la construcción, comparación y validación del modelo, lo cual consideran un proceso cíclico no terminado hasta que se logre el objetivo que consiste en lograr un modelo matemático el cual pueda ser utilizado en diferentes situaciones hasta donde sus limitaciones lo permitan.

Referente al proceso de formación de los estudiantes de ingeniería en lo propuesto por Brito et al, (2011), consideran el proceso de modelación matemática como una estrategia que permite integrar las matemáticas con otras áreas del conocimiento, generar interés por las matemáticas frente a la aplicabilidad de estas, mejorar o incluso desarrollar la capacidad para leer, entender, interpretar, comprender y que los estudiantes elaboren sus propias representaciones mentales leer, interpretar, formular y resolver situaciones, la oportunidad del uso de nuevas tecnologías y mejorar en la aprehensión de los conceptos matemáticos. Es posible interpretar que se encuentran dificultades similares con la educación a nivel superior en Colombia específicamente en la formación de ingenieros que, a la luz de revisiones anteriores, se mantiene presente la brecha entre el concepto matemático y su aplicabilidad, como una constante dificultad que aún no se ha logrado solucionar al interior del aula, y que implica la responsabilidad de la comunidad educativa como maestros e investigadores del campo de la educación.

Por otra parte, Oziegbe (2014) aborda en su trabajo algunas variables dentro del proceso del aprendizaje de la matemática, una problemática aún más profunda que de manera implícita afecta

la modelación matemática y redirecciona tanto el propósito como el objetivo de su implementación en la aulas de clase de secundaria; sin embargo, encuentra puntos clave dentro de las bondades que ofrece la implementación de actividades en la matemática que requieran de la modelación como proceso en el entendimiento de situaciones de la vida real. Este trabajo centra su estudio de investigación, en aplicaciones del mundo real dentro de las matemáticas con el objeto de cambiar el enfoque de las matemáticas y generar una actitud diferente en cuanto al aprendizaje de la matemática.

La metodología del trabajo mencionado en el párrafo anterior se basa en una investigación descriptivo-cualitativa, basada en cuatro diferentes procedimientos para recoger información, etnografías, entrevistas, observaciones y diarios de campo. Todo esto con el objeto de evidenciar los avances dentro de las diferentes situaciones planteadas y como punto interesante tratar de describir como se sienten los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de las mismas.

Según Oziegbe (2014), los estudiantes encuentran las matemáticas como algo complejo, difícil de entender, una asignatura que requiere de mucha memorización y carente de conexión o relación con las competencias necesarias en contextos de la vida diaria. También afirma que a pesar de los esfuerzos de los estudiantes en muchas ocasiones los resultados en el aprendizaje no son peores que la relación que genera entre los estudiantes y las matemáticas.

Esta situación planteada en el trabajo de Oziegbe (2014), y a pesar de presentarse en un contexto diferente al de Colombia, no dista de la realidad y el sentir de los estudiantes colombianos respecto a la brecha entre las matemáticas escolares y las necesidades y percepción de la realidad, dejando claro que la modelación matemática presenta una ruta de trabajo en donde los estudiantes pueden percibir su progreso y desarrollar habilidades que le causen un sentimiento de agrado hacia el espacio de formación escolar.

1.1.2. Algunas investigaciones de modelación en Colombia

Montoya, Didier y Sánchez (2014) afirman que “La matematización en el proceso de modelación, supone el desarrollo de unas nociones matemáticas que permean la construcción de modelos”. Así bien, los modelos permiten al estudiante dar respuesta a determinado problema empleando diversas maneras de representar el problema o plantearlo; bajo esta mirada el MEN (2006), expresa que: “La modelación puede hacerse de formas diferentes, que simplifican la situación y seleccionan una manera de representarla mentalmente, gestualmente, gráficamente o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos, para poder formular y resolver los problemas relacionados con ella” (p.53).

Desde 1998 el Ministerio de Educación de Colombia apuesta al desarrollo de la matemática desde un enfoque basado en el desarrollo de habilidades especiales centrando la enseñanza de la misma en cinco tipos de pensamiento matemático con el fin de afianzar y desarrollar habilidades en los estudiantes centradas en estos diferentes tipos de pensamiento, como lo menciona Vasco (2010) “el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas y su utilización socialmente más poderosa: la modelación, sin limitar las matemáticas escolares a la mera aplicación de algoritmos ya conocidos para resolver problemas”, genera un cambio profundo en la manera en que se abordan las matemáticas y la forma en la que se enseñan ampliando las herramientas necesarias para dicho fin.

Para Villa y Ruiz (2009), La modelación en las matemáticas escolares tiene sus fundamentos en la actividad científica del matemático que se encarga de aplicar y construir modelos para explicar fenómenos, resolver problemas de otras ciencias o para avanzar en una teoría o ciencia (generalmente llamado matemático aplicado).

Es aquí, donde el contexto del trabajo realizado cobra sentido sobre todo en las herramientas empleadas (modelación matemática), y más allá de la simple replicación de fórmulas y algoritmos, el proceso como tal consolida el modelo sujeto a validación y el objeto matemático encuentra su sentido como el elemento clave en la comprensión, explicación de determinado fenómeno.

Así bien, en el proceso de modelación como en el de planteamiento y resolución de problemas, se abordan problemas con el fin de posibilitar en los estudiantes un aprendizaje con significado de los conceptos matemáticos y generar un acercamiento para abordar el “problema” de contextualizar las actividades de aprendizaje.

A su vez Villa y Ruiz (2009) afirma que la diferencia entre la modelación y la resolución de problemas es más un asunto de tipo teórico y académico que de efectos prácticos en el contexto del aula de clase, por lo cual plantea diferenciar con mucho cuidado en el momento del diseño de las situaciones aplicadas los propósitos de las mismas.

Posada y Villa (2006) resaltan las dificultades propias del álgebra escolar desarrollando su trabajo de investigación en el eje temático de la aritmética al álgebra, hacen referencia que conceptos como variable, constante, el cambio de lenguaje natural al lenguaje simbólico, función entre otros conceptos propios del álgebra que no han adquirido un sentido propio ni como herramienta para el desarrollo del pensamiento matemático ni como objeto matemático, indican que posiblemente se alcanza la solución de ecuaciones por lo general algebraicas, reduciendo el aprendizaje a las técnicas algorítmicas de la solución de ecuaciones. Sin embargo, en lo que corresponde concretamente al concepto de función afirman que las actuales estrategias de enseñanza no son suficientes para que los estudiantes visualicen este concepto como una herramienta en la modelación de fenómenos que implican la covariación entre dos magnitudes.

Mediante la aplicación de una unidad didáctica propuesta bajo la estructura de ingeniería didáctica como metodología de investigación, que involucró tres situaciones enmarcadas en el pensamiento covariacional y construidas en principio con el propósito de superar dificultades identificadas en la fase diagnóstica y posteriormente caracterizar los procesos realizados por la unidad de estudio, Posada y Villa (2006) indagan por el proceso de modelación y los sistemas semióticos de representación como variables macro-didácticas de aproximación al concepto de función lineal, de tal manera que este concepto parte del principio de la conversión de situaciones presentadas en un lenguaje natural a un registro simbólico matemático, considerando este último como el concepto de función que se concibe como modelo matemático que atrapa la covariación entre dos magnitudes de la misma o de diferente naturaleza.

A partir de los resultados obtenidos en la implementación de la unidad didáctica, los autores llegan a las siguientes afirmaciones, en primer lugar, que el análisis histórico epistemológico de los conceptos matemáticos se deben considerar una base importante para la construcción y conceptualización por parte de los estudiantes. Específicamente sobre el concepto de función, resaltan que éste ha evolucionado históricamente y que por ejemplo para el caso de la función lineal, es el recorrido histórico el eje central en la identificación del concepto lo cual denominan modelo matemático. No obstante, se debe considerar que los procesos de modelación en la escuela deben ser una actividad emprendida desde los primeros años de escolaridad considerando que elementos como errores y aciertos en la experimentación, la determinación de los tipos de magnitud involucradas en una situación, la observación y cuantificación de las relaciones entre magnitudes, la simplificación de factores externos, la generalidad de los resultados, el papel que juegan los diferentes tipos de representación en la construcción del modelo y la validez de éste, requieren de largos periodos de tiempo. Desde los resultados de este trabajo también

consideramos importante abordar la razón de cambio como elemento fundamental en la interpretación del concepto de función desde la perspectiva covariacional, el cual es evidenciado en el trabajo de los autores particularmente en el paso del lenguaje natural de una situación a la fase de formulación de un proceso de modelación.

En cuanto al registro gráfico los autores resaltan que no se logró avanzar en la comprensión de éste debido al conocimiento muy limitado por parte de los estudiantes, lo cual no permitió reconocer una variación a través del registro gráfico y la conversión a los demás tipos de registro.

Por último, Hitt, F., y Quiroz, S. (2017) es un trabajo de investigación enmarcado en un estudio de caso, en torno a la modelación matemática que tiene como propósito comprender cómo los procesos de comunicación apoyan el aprendizaje de las matemáticas en la resolución de situaciones problema a través de representaciones no institucionales o espontáneas (que surgen de herramientas teóricas como la noción de representación de Duval y visualización matemática de Zimmerman & Cuningham), este trabajo se fundamenta en el constructivismo social, lo cual considera que se debe conocer a fondo al individuo y la manera en que construye conocimiento. Hitt, F., y Quiroz, S. (2017) afirman que las investigaciones acerca del constructivismo social, produjo la aparición de investigaciones relacionadas sobre los procesos de modelación, asumiendo la modelación matemática como una estrategia didáctica y un proceso cíclico con el propósito de promover la resolución de un problema enmarcado en la vida cotidiana del estudiante con la creación, solución y validación de un modelo.

El desarrollo metodológico en el trabajo de investigación de Hitt, F., y Quiroz, S. (2017), se da a partir de cinco situaciones problema que pretenden promover la evolución de significados para la co-construcción cognitiva sobre conceptos de covariación como variables y función, por

medio de la metodológica Acodesa el cual combina el trabajo en colaboración, con el debate científico y la autorreflexión. Respecto a los resultados obtenidos, los autores afirman en primer lugar que las representaciones funcionales espontaneas de los estudiantes no lograrían evolucionar si no estuviera presente el proceso de comunicación, en segundo lugar, que las representaciones intuitivas e iniciales son de gran importancia y además estas deben ser incluidas y estudiadas para comprender el proceso de aprendizaje, finalmente, para investigaciones posteriores consideran necesario profundizar respecto al estudio de las acciones y operaciones en la formación de conceptos matemáticos.

A partir de la revisión realizada identificamos que la modelación matemática es considerada como un proceso o una herramienta didáctica para la enseñanza, pero también es analógico a un proceso de investigación, posición que no se asumirá en el presente trabajo de investigación. Por otro lado, el modelo matemático para algunos autores se considera como el medio por el cual se justifica la implementación de un proceso de modelación y que, a su vez, éste corresponde al concepto de función considerando la estructura algebraica y relación de dependencia entre las magnitudes de un determinado fenómeno en estudio.

2. Planteamiento del problema

A partir de la revisión literaria realizada en el campo de la modelación matemática, la investigación sobre los procesos de comprensión del concepto función y considerando nuestra experiencia docente, identificamos que la modelación matemática pese al extenso periodo de tiempo que ha sido investigada y desarrollada por algunas comunidades académicas, es una estrategia no reconocida por la mayoría de los maestros que se dedican a la formación en matemáticas, bien lo mencionan algunos autores en el apartado anterior que una de las grandes dificultades en la implementación de la modelación matemática está en la formación de profesores, dado que no se orienta en cómo utilizar la modelación matemática en la enseñanza formal, lo cual se refleja de manera directa en la apatía por la investigación y la interpretación del contexto por parte de los estudiantes, generando una brecha entre el objeto matemático y una posible comprensión de los fenómenos que lo rodean.

Ahora bien, en algunos resultados logramos identificar que ciertas experiencias centran el objetivo en el diseño y validación didáctica o en la construcción de relaciones funcionales entre magnitudes, y a partir de la sugerencia de indagar sobre las acciones y operaciones involucradas en un proceso de modelación matemática en Hitt, F., y Quiroz, S. (2017), consideramos pertinente centrar nuestro interés por conocer cómo el proceso de modelación contribuye en la comprensión de conceptos relacionados con el pensamiento covariacional cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones dinámicas que contienen dos variables que cambian simultáneamente de manera lineal.

Proponemos analizar los procesos de modelación matemática en estudiantes de ciclo V en el momento que analizan una situación de variación restringida en el concepto de función lineal con la finalidad de describir los procesos de modelación de los estudiantes a la luz de los momentos o

fases de desarrollo de la modelación matemática; desde lo anterior, se define la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo se dan los procesos de modelación de situaciones que involucran variables que covarían de forma lineal en estudiantes de ciclo V?

Considerando la anterior pregunta de investigación, describiremos a continuación el objetivo de este trabajo de investigación.

3. Objetivos

3.1. Objetivo general:

Describir los procesos de modelación matemática en situaciones de covariación lineal que siguen los estudiantes de ciclo V a partir de la implementación de una secuencia didáctica.

3.2. Objetivos específicos:

- Diseñar y desarrollar una secuencia didáctica que promueva procesos de modelación de situaciones que involucren variables que covarían en forma lineal.
- Describir y analizar las producciones de los tres casos de estudio cuando enfrentan tareas de modelación de situaciones de covariación lineal.

4. Justificación

Este trabajo tiene como propósito estudiar los procesos de modelación matemática en situaciones de covariación lineal que siguen los estudiantes de ciclo V de la educación media vocacional, para esto apoyaremos nuestras observaciones desde las representaciones institucionales o teóricas como lo son los registros escritos, gráficos y verbales que realizan los estudiantes de ciclo V en el momento que se enfrentan a procesos de modelación en situaciones de tipo covariacional. Revisando los bajos resultados de las pruebas tanto nacionales como internacionales relacionadas con situaciones que involucran la modelación matemática, consideramos conveniente realizar una aproximación sobre los procesos que realizan los estudiantes al interior del aula cuando abordan situaciones que involucren la modelación como herramienta para resolver los diferentes problemas planteados que requieran del pensamiento variacional en estas situaciones.

Un primer acercamiento a los resultados de los estudiantes cuando abordan situaciones que involucran la modelación y relaciones entre variables son los encontrados en las pruebas PISA, dado que la prueba evalúa la capacidad que tiene el estudiante para identificar y entender el papel que tienen las matemáticas en el mundo, para tal objeto de la prueba, se sitúan en cuatro contextos diferentes, en situación personal, situación educativa o laboral, situación pública y situación científica. De lo anterior y considerando el bajo rendimiento a nivel nacional con respecto a la media de la OCDE, permite observar de manera general la dificultad que existe en el pensamiento matemático para este caso el pensamiento variacional de los estudiantes cuando abordan situaciones de la vida real y estos requieren un proceso de matematización para ser interpretados.

Por otro lado, desde los resultados de informe por colegio de las pruebas saber grado noveno de la institución educativa distrital Colegio Rural el Uval y la institución educativa Quiroga Alianza, en el 2016¹, instituciones educativas distritales donde laboran los autores del presente trabajo de investigación, se puede observar de manera puntual la dificultad que tienen los estudiantes en los aprendizajes relacionados al pensamiento variacional, específicamente cuando el estudiante se enfrenta a situaciones de covariación y modelación.

Tabla 1. Informe por colegios

Competencia	Colegio El Uval I.E.D	Colegio Quiroga Alianza I.E.D
Comunicación.	<ul style="list-style-type: none"> • El 63% de los estudiantes no usa ni relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación. • El 55% de los estudiantes no establece relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. 	<ul style="list-style-type: none"> • El 75% de los estudiantes no usa ni relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación. • El 67% de los estudiantes no establece relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
Razonamiento	<ul style="list-style-type: none"> • El 77% de los estudiantes no usa representaciones ni procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa. • El 32% de los estudiantes no interpreta tendencias que se presentan en una situación de variación. 	<ul style="list-style-type: none"> • El 77% de los estudiantes no usa representaciones ni procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa. • El 34% de los estudiantes no interpreta tendencias que se presentan en una situación de variación.
Resolución	<ul style="list-style-type: none"> • El 60% de los estudiantes no resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos. 	<ul style="list-style-type: none"> • El 79% de los estudiantes no resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.

¹ Informe por colegio 2016 resultados pruebas saber 3º, 5º y 9º obtenidos de la página web Colombia aprende, Siempre día e (<http://aprende.colombiaprende.edu.co/siemprediae/86438>)

La tabla 1 muestra los resultados de informe por colegio 2016 pruebas saber 3°, 5° y 9° del Colegio El Uval IED y Colegio Quiroga Alianza IED. Fuente: Autoría propia.

Un poco más allá de la escuela secundaria en Arrieta y Diaz (2015), se discute acerca de la brecha o separación existente entre la escuela y la vida real, problemática que se evidencia no solamente en la educación básica y media sino también a nivel superior profesional, por tal razón, es pertinente considerar la dificultad que tienen los estudiantes en llegar a la construcción del objeto matemático en su fundamento de establecer relaciones para este caso variacionales, y el vínculo entre el modelar situaciones de la “vida real” y la construcción del concepto de función lineal, vínculos entendidos como acciones mentales o modelos imaginarios que se desean describir a partir de los procesos que realizan los estudiantes en los diferentes tipos de registros semióticos.

Teniendo en cuenta, que es la descripción de los procesos de los estudiantes el punto de categorización y análisis para cumplir los objetivos del presente trabajo, esto se va a desarrollar mediante el intento de describir los procesos que siguen tres estudiantes seleccionados como nivel bajo, nivel medio y nivel alto, en el instante que realicen conversiones entre distintas representaciones a lo largo del proceso de la implementación de la secuencia didáctica.

Considerando lo anterior, se espera que los resultados expuestos en este trabajo de investigación sean de utilidad para la elaboración y planteamiento del currículo de matemáticas específicamente para el desarrollo del pensamiento covariacional, lo cual permita identificar unidades significantes en los procesos de los estudiantes que contribuyan en la aprehensión de un concepto matemático como el que pretendemos indagar en este trabajo de investigación como lo es la función lineal, por otro lado, que la modelación matemática como proceso de enseñanza sea una herramienta útil para la construcción de significado por parte del estudiante desarrollando un

proceso de aprendizaje a partir de la modelación de fenómenos reales como una actividad científica, esto involucra que el entorno cultural, la experiencia propia del estudiante, las nuevas experiencias y conocimientos científicamente aceptados sean complementos en el aula e implementados desde un proceso de modelación.

Para llevar al interior del aula fenómenos de una manera tangible y de fácil comprensión para el estudiante, se aportan instrumentos de experimentación con la finalidad de apoyar por medio de la implementación de las TICS como por ejemplo, hojas dinámicas como geogebra, el lograr superar las dificultades que tienen los estudiantes al momento de realizar procesos para la construcción, validación y asimilación de un objeto matemático (función lineal), sobre todo al tratar de comprender las relaciones existentes entre las magnitudes empleadas correlacionadas.

5. Marco teórico

En este apartado definiremos los elementos que soportan el desarrollo del presente trabajo de investigación que, a partir de nuestro eje problematizador que implica los procesos de modelación que se encuentran involucrados en el momento de analizar una situación de variación restringida al concepto de función lineal, se establecen consideraciones teóricas que en un primer momento hacen referencia al pensamiento variacional y el concepto de función lineal desde la epistemología de dichos conceptos, continuamente se retoman los elementos mencionados anteriormente y se contextualizan desde el marco de la práctica de los procesos de enseñanza. Respecto a la modelación del aula de clase el cual difiere de la modelización como proceso de la actividad científica, se describen algunas aproximaciones que en cuanto a su significado desde la revisión literaria no identificamos una comprensión homogénea, que en palabras de Kaiser y Sriraman (citados por Londoño y Muñoz, 2011a, p.45) “no existe una comprensión homogénea sobre lo que significa la modelación matemática, ni de las maneras como puede implementarse y desarrollarse”, no obstante, el propósito del presente trabajo de investigación no tiene como fin identificar un proceso de modelación en términos óptimos, sino describir los procesos de modelación a partir de unas fases que correspondan a los momentos necesarios para la elaboración de una representación mental de función lineal.

5.1. Historia de la construcción del pensamiento variacional y el concepto de función

Los principios e ideas relacionados al pensamiento variacional se pueden indagar desde el mundo antiguo, aunque en esta edad no se encuentran registros que den cuenta sobre cantidades variables y estructuras como funciones, si hay mención por parte de los babilónicos acerca

estudios sobre fenómenos de cambio y algunas leyes cuantitativas a partir del análisis de tablas. (Azcárete y Deulofeu 1996a, p.38)

En cuanto al recorrido histórico de los principios e ideas relacionados al pensamiento variacional descritos por Azcárete y Deulofeu (1996) al referirse a los orígenes del concepto de función, encontramos que es a mediados de la edad Antigua específicamente en las civilizaciones como Babilonia y Egipto, instante en el que los conocimientos adquiridos sobre astronomía ligado a la astrología se observan prácticas de observación y de profecías que de alguna manera les llevo a estas antiguas civilizaciones a realizar tareas relacionadas a la predicción de determinados acontecimientos analizando y sistematizando fenómenos que tenían un comportamiento periódico, bien lo afirman los autores, es posible que lo anterior corresponda al germen más remoto de los inicios de la función. Con esto, inferimos que al ser la función un concepto ligado al pensamiento variacional, es posible deducir que también corresponde a los orígenes del pensamiento variacional.

Continuando en la línea de tiempo, a pesar de la dificultad que tuvieron los griegos de entender como un mismo objeto el termino razón debido a la ausencia del número racional, se atribuye a esta civilización el lograr buscar relaciones de dependencia, como lo son las variables físicas al intentar buscar dependencia entre la longitud de una cuerda y los tonos emitidos al pulsar dicha cuerda. También se puede visualizar que los avances aritméticos y geométricos por parte de la civilización griega al implementar la proporción como una herramienta eficaz para identificar patrones aritméticos y geométricos, son nociones relacionadas al pensamiento variacional aun cuando estas proporciones comparaban magnitudes de la misma naturaleza

Ubicados en el mundo occidental en la edad Media, de acuerdo al marco conceptual de Azcárete y Deulofeu (1996) el pensamiento variacional y el concepto de función propiamente,

adquieren una aproximación a las ciencias de la naturaleza desde los principales núcleos de desarrollo de las ciencias como lo son las llamadas escuelas de la filosofía natural de Oxford y París, dado que a partir del siglo XIII se inicia una etapa de análisis de cualidades y formas de fenómenos como calor, luz, velocidad, y a partir de estos estudios se derivan conceptos fundamentales como cantidad variable, lo que reconocemos como velocidad instantánea y aceleración entre otros.

Por último, en la edad moderna Azcárete y Deulofeu (1996) hacen referencia a un periodo de estancamiento en el avance y desarrollo de algunos elementos referente al pensamiento variacional y al concepto de función, por un lado, está “el obstáculo de la falta de simbolismo matemático y por otro, los desplazamientos de carácter socio-político” (Azcárete y Deulofeu, 1996, p.46). No obstante, en esta edad iniciando por las contribuciones de Galileo (1564 - 1642) respecto a los avances en el estudio del movimiento en forma cuantitativa estableciendo leyes entre magnitudes como relaciones funcionales, seguidamente Leibnitz y Bernoulli elaboran las primeras aproximaciones al concepto de función, desde ese instante matemáticos como Euler, D'Alembert y Fourier entre otros, inician un proceso que no solamente se centra en la búsqueda de la generalidad del concepto sino que éste sea operativo y aplicable a problemas más complejos, es a partir de coincidencias en cierto modo de Cauchy, Riemann, Weierstrass, Lagrange y Fourier que se llega a una definición en términos conjuntistas de función de la siguiente manera:

Dados dos conjuntos arbitrarios A y B una función (o aplicación) de A en B es una ley que a cada elemento x de A hace corresponder un solo elemento y de B; o si se prefiere, una función de A en B es un subconjunto F del producto cartesiano $A \times B$ tal que si (x, y) y (x, z) pertenecen a F entonces $y = z$ (Azcárete y Deulofeu, 1996, p.53).

Como bien se puede observar, la definición de función anteriormente descrita carece de los atributos del concepto, como bien lo menciona el autor, son estos atributos precisamente lo que dota de significado y son de gran importancia para el aprendizaje del concepto, el recorrer la historia de los atributos contribuyen al significado del concepto función y por lo tanto un mejor desarrollo del pensamiento variacional desde la comprensión de los desarrollos de los atributos elementales del concepto aplicados al análisis de fenómenos próximos a las necesidades del estudiante, esto nos ayuda a comprender la razón por el cual el proceso de modelación corresponde a una serie de momentos en los cuales se espera que el estudiante identifique y elabore los atributos del concepto de función.

5.2. Función

Para efectos de estudio de este trabajo, vemos pertinente indagar acerca del concepto de función, específicamente la función lineal, debido a la precisión de la pregunta de investigación, la cual hace referencia a situaciones que involucran variables que covarían en una relación de dependencia lineal. Tanto en la literatura como en numerosos estudios en cuanto al concepto de función se evidencia la complejidad del concepto en la génesis y en la construcción, en este último aspecto, por ejemplo, se puede inferir que existe una construcción formal científicamente aceptado y la que puede construir cada individuo bajo su propio entendimiento.

Desde el punto de vista de Posada y Villa, (2006) se entiende el concepto de función lineal desde una característica principal, la cual, es la razón de cambio constante de dos cantidades que corresponde a dos magnitudes, característica que ellos mismos aseguran dista de la perspectiva de Duval, (1996; 2004) quien considera la representación cartesiana de la función lineal como una correspondencia punto a punto entre dos conjuntos. Sin embargo, desde el marco conceptual

de Duval, se identifican las herramientas necesarias para el análisis de registros y de conversión de un registro a otro.

Para el presente trabajo, como bien se puntualiza en la pregunta de investigación, el interés se encuentra sobre el estudio de aquellas situaciones que presentan una razón de cambio constante entre dos magnitudes. Para efectos de este trabajo de investigación, aceptamos como la interpretación más próxima a las necesidades del presente trabajo la definición desde (Posada y Villa, 2006, p.96) “Interpretación del concepto de función lineal: Se llama función lineal a la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio es constante.”

Para mayor comprensión de los atributos del concepto de función lineal y afín, se desarrollará a continuación la conceptualización de proporcionalidad directa, razón de cambio y la caracterización diferencial entre función lineal y función afín, que en palabras de Fiol y Fortunuy (2000) estos términos adquieren un significado unificado con la noción de función lineal.

5.2.1. Proporcionalidad Directa.

A partir de la relación entre dos magnitudes M y N, de manera general estas se consideran proporcionales si al establecer una relación $F: M \rightarrow N$, se tiene que $a < b = f(a) < f(b)$, que al considerar $M = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ siendo estas cantidades de M con medidas correspondientes respecto de una unidad e de la magnitud N, $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n)$ definidas con orden $r_1 < r_2 < r_3 < \dots < r_n$, a la vez, tenemos medidas $(r_1', r_2', r_3', \dots, r_n')$ definidas con orden $r_1' < r_2' < r_3' < \dots < r_n'$, cantidades homólogas de la de una unidad u de la magnitud M, se cumple que:

$$\frac{r_1}{r_1'} = \frac{r_2}{r_2'} = \frac{r_3}{r_3'} = \dots = \frac{r_n}{r_n'} = k \text{ constante de proporcionalidad (Fiol y Fortunuy, 2000, p.34-35)}$$

Entenderemos que una vez definida la constante de proporcionalidad entre las magnitudes M y N y el orden entre los elementos de cada magnitud, por un lado, que las medidas de las unidades en ambas magnitudes aumenten o ambas disminuyan, se entenderá que las magnitudes M y N guardan una proporcionalidad directa.

5.2.2. Función Lineal.

Como bien lo afirman Fiol y Fortunuy, (2000) la proporcionalidad entre dos magnitudes se puede interpretar como un concepto de función al depender una magnitud de la otra, definición dada por Leonhard Euler en 1749, lo cual permite vincular los aspectos como variación, dependencia y la variable constante que desde la definición de proporcionalidad directa, por el momento la entenderemos como constante de proporcionalidad que se relaciona con la noción de razón de cambio concepto que será definido posteriormente.

Específicamente la función lineal desde una estructura matemática simbólica se entenderá como $f(x) = kx$, donde $f(x)$ es directamente proporcional a x y k corresponde a la constante de proporcionalidad o variable constante. Las características de la función lineal son:

- Su gráfica pasa por el origen $(0, 0)$
- La constante k corresponde al grado de crecimiento o decrecimiento de la recta gráfica correspondiente a la función, si $0 < k$ la función lineal es creciente y si $k < 0$ la función lineal es decreciente.
- Se comprende que el crecimiento o decrecimiento k mide el ángulo θ que forma la recta gráfica de la función con el eje x

$$k = \tan \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

5.2.3. Razón de cambio.

Es común en los textos de pre-cálculo y cálculo identificar la razón de cambio como la rapidez de cambio, considerando como un ejemplo de fácil interpretación comparar dos magnitudes que covarían como lo son la distancia y el tiempo, de tal manera que una se encuentra en función de la otra como se expresa a continuación.

$s(t)$ =distancia s recorrida en un tiempo t

Razón de cambio promedio.

De acuerdo con Stewart, Redlin y Watson (2012) entenderemos la rapidez de cambio o razón de cambio promedio como el cociente o razón entre los cambios de las magnitudes correspondientes a un intervalo definido en la función.

$$\text{razón de cambio promedio} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Por ejemplo, consideremos un vehículo que describe una trayectoria lineal y la figura muestra la posición del vehículo con respecto a tiempo, al cabo de una hora según la representación cartesiana el vehículo ha recorrido 100 km, a las dos horas he recorrido 150 km, a las tres horas 175 km y así sucesivamente.

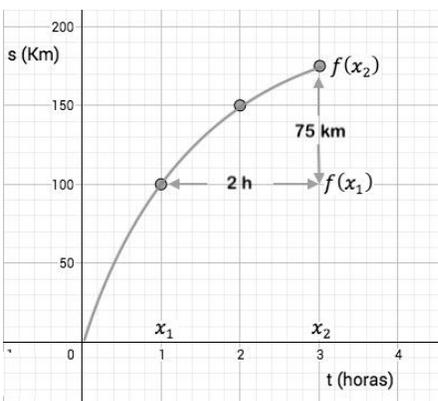


Figura 1. Representación cartesiana de distancia s y tiempo t sobre un plano cartesiano.

Para calcular la razón de cambio promedio entre la 1:00 pm y las 3:00 pm, el tiempo transcurrido es $3 - 1 = 2$ horas. Respecto a la distancia recorrida, hallamos el cambio en la distancia con los valores $s(t)$ para la 1:00 pm y las 3:00 pm, es decir, $175 - 100 = 75$ km. Por lo tanto, la razón de cambio promedio es:

$$\text{razón de cambio promedio} = \frac{\text{cambio en } s}{\text{cambio en } t} = \frac{175 - 100}{3 - 1} = \frac{75}{2} = 37.5 \text{ km/h}$$

Al ser $s(t)$ una función no lineal, la razón de cambio promedio podrá ser diferente para distintos intervalos sobre el eje x , caso contrario para una función lineal la razón de cambio promedio para cualesquiera dos valores de la magnitud independiente será siempre la misma. Como lo afirma (Stewart et al. 2012, p.176) “Si la razón de cambio promedio e instantánea es siempre la misma, entonces debe ser una función lineal”.

5.3. Algunos fundamentos sobre la construcción del pensamiento covariacional y el concepto de función lineal

A partir de Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu (2003) argumentamos la dificultad que presentan los estudiantes para interpretar o dotar de significado en el contexto de situaciones que se relacionan con la covariación entre magnitudes en fenómenos o contextos reales. Específicamente, referente al concepto de función este se considera esencial dentro del pensamiento covariacional para la comprensión de conceptos de cálculo. Entre otras dificultades, sobre el concepto de función por parte de los estudiantes, la idea operatoria, el manejo de la ecuación, fórmula y gráfica son atributos y registros involucrados en el pensamiento covariacional que carecen de la concepción de dos variables o magnitudes que cambian al unísono, al ser una dependiente de la otra. Referente a los atributos del concepto de función lineal que se abordarán en el presente trabajo de investigación, identificamos la razón de cambio

como uno de los diferentes atributos que permite involucrar los modos analítico y conceptual por parte de los estudiantes.

Es desde las dificultades anteriormente mencionadas que adoptamos las acciones mentales del razonamiento covariacional desde la postura de Carlson et al. (2003) y lo que el autor denomina como comportamientos asociados como un referente de los comportamientos de los estudiantes en el momento de realizar un proceso de modelación cuando se enfrentan a situaciones que involucran la coordinación de dos magnitudes que covarían de manera lineal.

Tabla 2. Acciones mentales

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamientos
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios de la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/ construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón del cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad.

 Continuidad de la tabla 2

función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.

Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión Y la dirección de las concavidades son correctos).

La tabla 2 muestra las acciones mentales. Fuente: Carlson et al. (2003, p.128).

A partir de las anteriores acciones mentales que un estudiante puede exhibir en el momento de abordar una situación de covariación lineal, Carlson et al. (2003) desde un marco conceptual de covariación describe cinco niveles de razonamiento covariacional, de tal manera que las acciones mentales correspondan a diferentes niveles de razonamiento covariacional, cada vez más sofisticado.

Tabla 3. Niveles de razonamiento

Nivel	Descripción
Nivel 1 (N1). Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa	En el nivel de coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio de una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4). Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable entrada. Las acciones mentales científicas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5). Razón instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos

Continuidad de la tabla 3

más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la conciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

La tabla 3 muestra los niveles del razonamiento covariacional. Fuente: Carlson et al. (2003, p.129).

5.4. Imagen

Considerando que para efectos del trabajo de investigación implementamos definiciones y conceptos del marco conceptual de Carlson et al. (2003), a continuación, describiremos el concepto de imagen desde una postura piagetiana.

La raíz de la caracterización de la imagen se remonta a las ideas de Piaget de praxis, operación y esquema, y puntualmente en la matemática la imagen se relaciona con una operación mental.

Piaget comentó sobre cómo la imagen depende de las acciones de razonamiento asociadas a ella. Las imágenes más tempranas formadas en los niños son a partir de la interiorización de actos de imitación, como respuestas motoras o esquemas de acción. Para Piaget estos esquemas tienen el propósito de asociar la imagen con la creación de objetos e interiorizar los objetos con las acciones asociados a ellos.

Posteriormente, otro tipo de imagen es el creado por las personas cuando realizan primitivas formas de experimentos mentales. Si a las acciones les incluimos la atribución de significado, entonces se puede hablar de imágenes que contribuyen a la construcción del entendimiento y comprensión, además se dice que en la construcción de la comprensión se contribuye en la utilización de imágenes más estables.

La imagen es una representación mental de las operaciones que se presentan de acuerdo a las diferentes situaciones, así pues, la imagen puede ser un emergente del pensamiento buscando una articulación entre las experiencias pasadas y la comprensión sobre las diferentes soluciones que deben abordarse; además la imagen puede darse como una expresión del grado de entendimiento y familiarización con las variables relacionadas en el estudio a fin de construir una imagen más robusta y así cada vez enfrentar nuevas concepciones dentro de la cuantificación y la conceptualización del objeto.

Entre razón y proporción hay una serie de imágenes y operaciones; hay cuatro niveles de desarrollo de los esquemas de razón y proporción en los niños.

Primer nivel, la proporción: es caracterizada por los niños como una comparación entre dos magnitudes tomadas como invariables y de acuerdo al criterio “tantas veces como...”

Segundo nivel, proporción asimilada: es caracterizada por los niños como la construcción de una covariación acumulada de magnitudes.

Tercer nivel, proporción asimilada: está caracterizada por la construcción de co-variaciones entre cantidades de magnitudes, donde las cantidades varían, pero la proporción de las acumulaciones no cambian.

Cuarto nivel, razón: está caracterizada por la concepción en los niños de una proporción de variación constante, también como una variación multiplicativa de una de magnitudes como una medida de simple atributo.

De acuerdo con Carlson et al. (2003) una imagen madura de razón involucra lo siguiente: la construcción de una imagen de cambio en alguna cantidad, la coordinación de imágenes de dos cantidades y la formación de una imagen de la covariación simultánea de dos cantidades,

abordando directamente la relación existente o que se desea realizar entre las magnitudes o cantidades dentro de la caracterización de la construcción de la imagen de covariación.

“Es así que las teorías del desarrollo del pensamiento están ligadas a la forma en la que las imágenes se estructuran y forman otras estructuras mentales más elaboradas” (Carlson et al., 2003, p.123) En esta teoría, las imágenes de covariación se consideran como algo que se desarrolla y tal desarrollo pasa de la coordinación de dos cantidades a las imágenes de la coordinación continua de ambas cantidades para un lapso determinado.

5.5. Algunas aproximaciones sobre modelación matemática

Como se ha mencionado con anterioridad la modelación matemática es un proceso que ha adquirido relevancia dentro del proceso de investigación en educación a nivel global, Como bien lo declara Biembengut y Hein (2004) en su publicación Modelación matemática y los Desafíos para enseñar matemática, son cerca de doce investigadores de países como Alemania, Australia, Bélgica, Brasil, Canadá, China, Dinamarca, España, Estados Unidos, Francia y Japón, quienes a partir del 2000 vienen indagando en pro del proceso de modelación matemática como un grupo promovido por la ICMI “International Commission on Mathematical Instruction”. El compromiso por incorporar la modelación matemática en el aula de clase se fortalece a medida que los defensores consideran que el aprendizaje se enriquece, considerando que el estudiante no solamente aprende matemática sobre un contexto de un área diferente, sino que, además, despierta un sentido crítico y creativo que posibilita una manera placentera de construir conocimiento que tiene significado para el mismo estudiante.

Dentro del marco nacional en los estándares básicos en competencia también se identifica un compromiso referente a la modelación matemática, lo cual, se entiende como una construcción material o mental, a veces considerada también como una estructura que se implementa como

referencia de aquello que se trata de comprender, permitiendo la apropiación y manejo de un concepto en estudio por medio de una imagen analógica. Por otro lado, es notoria la insistencia en la indagación sobre la modelación matemática como parte del proceso de formación en el alumno desde la postura de los lineamientos curriculares por el Ministerio de Educación Nacional MEN, (1998). En estos lineamientos desde la percepción del ideal que debe ser el trabajo del alumno, la actividad de éste debe ser comparable a una actividad científica. Donde el saber matemáticas no implica únicamente la memorización de teoremas y conceptos, sino que el proceso de aprendizaje sea la oportunidad para que el alumno actúe, formule, construya modelos, lenguajes, intercambie con otros y tome lo que le es útil y reconozca lo que está conforme con la cultura.

Desde la visión de los lineamientos MEN, (1998) en la actividad ideal por parte del alumno, el rol del docente juega un papel primordial, por lo cual debe imaginar y proponer situaciones en las que el alumno logre vivir y descubrir los conocimientos como solución a los problemas planteados por parte del docente, que para efectos de este trabajo de investigación, no solo se considerarán problemas sino situaciones que permitan en el alumno redescubrir el objeto matemático. Con lo anterior, considerando la importancia del aprender y enseñar matemáticas, los procesos de aprendizaje y las relaciones de la matemática con la cultura, son elementos que se deben considerar en la estructura curricular y la interdisciplinaridad de la matemática con otras disciplinas, que según los lineamientos curriculares MEN, (1998) estos elementos conforman una visión global de lo cual la modelación matemática forma parte de los procesos generales, por lo tanto la modelación se relaciona directamente con los conocimientos básicos y el contexto como los aspectos generales que estructuran el currículo en un todo armonioso.

Desde los diferentes referentes teóricos sobre modelación matemática en el marco educativo, a continuación, serán discutidas bajo la dirección conceptual de la literatura, las nociones de modelación matemática como proceso, modelo y sistema.

Continuando en el marco nacional, desde los lineamientos curriculares MEN (1998), la modelación matemática considerada como uno de los procesos generales tiene como punto de partida una situación problemática real, situación que debe despertar ciertos intereses en quien pretende abordar la situación. Con lo cual, el alumno identifica datos, conceptos, relaciones y supuestos para poder ser matematizados y concretar un modelo matemático, el cual es validado por medio de la resolución de problemas.

Puntualmente la modelación matemática según MEN (1998), es “el proceso completo que conduce desde la situación problemática real original hasta un modelo matemático”, proceso el cual, además de poder llegar a producir una imagen simplificada, también logra una imagen de un proceso preexistente. Treffers y Groffe citados en MEN (1998) describen la modelación como la manera de descubrir relaciones, estructuras nuevas y regularidades por medio de la actividad organizada y estructurante. Los autores mencionados proponen que para transferir la situación problemática real a un problema planteado matemáticamente se pueden considerar las siguientes actividades:

- Identificar las matemáticas específicas en un contexto general.
- Esquematizar.
- Formular y visualizar un problema en diferentes formas.
- Descubrir relaciones.
- Descubrir regularidades.

- Reconocer aspectos isomorfos en diferentes problemas.
- Transferir un problema de la vida real a un problema matemático.
- Transferir un problema del mundo real a un modelo matemático conocido.
- Representar una relación en una fórmula.
- Probar o demostrar regularidades.
- Refinar y ajustar modelos.
- Utilizar diferentes modelos.
- Combinar e integrar modelos.
- Formular un concepto matemático nuevo.
- Generalizar.

Esta última actividad es considerada en MEN (1998) como el nivel más alto de la modelación.

Por su parte Londoño y Muñoz (2011), hacen referencia al asumir la modelación matemática en un contexto escolar desde la siguiente manera

Como el proceso de estudio de fenómenos o situaciones que pueden surgir tanto desde los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes como de otras ciencias o disciplinas académicas. Dicho proceso de estudio involucra el uso y la construcción de modelos y otras herramientas matemáticas con las cuales puede ofrecerse una comprensión del fenómeno y resolver el problema (Villa (2010), como se citó en Londoño y Muñoz, 2011, p.50).

Considerando los elementos anteriores, la postura de los lineamientos curriculares y el concepto de modelación matemática por parte de Londoño y Muñoz (2011), resaltamos que la modelación matemática corresponde a un proceso que involucra diferentes actividades que se relacionan a partir de un fenómeno dentro de una situación real, con lo cual se pretende reconocer regularidades, relaciones y lograr supuestos predictivos por medio de un modelo matemático, y con esto transferir una estructura mental de un sistema a otro isomorfo. Para efectos de la comprensión acerca de las situaciones reales sobre las cuales se pretende desarrollar el proceso de modelación, más adelante se retomará el concepto de sistema isomorfo y monomórfico.

Biembengut y Hein (2004) determinan la modelación matemática como método de enseñanza y como método de investigación. El primero, es entendido como la metodología que parte de un tema o asunto de interés que se pretende indagar, comprender, cuestionar o resolver por medio de herramientas matemáticas y en el cual el maestro juega un papel de orientador, proceso que le permite al alumno la construcción de un modelo matemático a partir de sistemas análogos. La modelación matemática como método de investigación hace referencia a enseñar al alumno a hacer modelación sin necesidad de partir de un modelo ya construido, la modelación matemática como método de investigación, se sugiere que el profesor conduzca a los alumnos desde el desarrollo del contenido programático tratado de forma tradicional. Es importante recordar que el desarrollo del contenido programático es considerado como el concepto, la propiedad o la definición que se desea abordar en el proceso de modelación.

Desde la postura de Villa y Ruiz (2009) la modelación matemática como actividad científica se puede considerar como una herramienta de representación que permite obtener conclusiones de un fenómeno o una situación inmersa en el “mundo real” el cual se convierte en un sistema,

éste último, como objeto de estudio se somete a la observación con el propósito de identificar factores involucrados, desde la perspectiva anterior, la modelación matemática es considerada como un ciclo. A continuación, se describen las etapas del ciclo de modelación matemática propuesto por el autor:

- Determinar un fenómeno o problema del mundo real.
- Observación y experimentación.
- Proceso de simplificación.
- Construcción del modelo.
- Interpretación del modelo.
- Evaluación y validación.

Si en la etapa de evaluación y validación se verifica la concordancia entre el modelo y el fenómeno del problema se da por finalizado el ciclo.

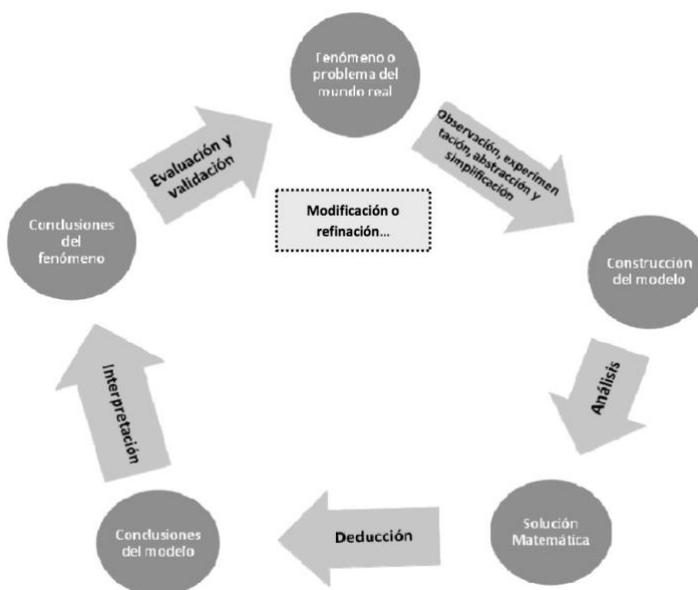


Figura 2. Momentos del proceso de modelización según Villa y Ruiz (2009)

Considerando los anteriores elementos de la modelación matemática como actividad científica (Modelización), para Villa (2007) en el contexto escolar la modelación matemática es una estrategia que da la posibilidad de entender un concepto matemático inmerso en un micromundo, el cual, es entendido por el autor como un contexto que está dotado de relaciones y significado. Referente a lo anterior, valdría la pena encontrar la similitud o diferenciación entre los términos micromundo y sistema, sin embargo, cabe aclarar que no es el objeto de este trabajo.

5.6. Modelación y Modelización

Ante lo anterior, es pertinente aclarar la diferenciación entre modelación y modelización, la primera corresponde al proceso de modelación matemática en el aula de clase y la segunda a la modelación como actividad científica, tal diferencia, es verificable desde la postura de Biembengut y Hein (2004) cuando hacen referencia a que factores como el currículo, los horarios de clases, cantidad de estudiantes por curso, el tiempo disponible por parte del maestro para el acompañamiento y seguimiento del trabajo realizado por los alumnos, han llevado a la adaptación de la modelización como un método de enseñanza en el aula de clase que se denominará modelación matemática. Por ejemplo, Villa (2007) plantea la diferencia entre modelación como actividad científica y modelización por medio de cuatro criterios como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 4. Modelización y modelación

Criterio	Como actividad científica	Como herramienta en el aula
Propósito del modelo	El modelo se construye para solucionar un problema de otras ciencias (naturales, sociales, humanas...) o para	El modelo se elabora para construir un concepto matemático dotado de un significado y con la intención de despertar una motivación

Continuidad de la tabla 4		
	avanzar en una teoría científica.	e interés por las matemáticas debido a su carácter aplicativo.
Los conceptos matemáticos	Emergen de la situación a través de un proceso de abstracción y simplificación del fenómeno.	Deben haber sido considerados a priori con base en la preparación y selección del contexto por parte del maestro y de acuerdo con los propósitos de la clase.
Contextos	Obedecen a problemas que comúnmente no han sido abordados o se abordan de una manera diferente al interior de la ciencia.	Deben obedecer a problemas abordados previamente por el docente de la clase con el objeto de evaluar su pertinencia con los propósitos educativos.
Otros factores	Se presenta generalmente en un ambiente propio de la ciencia en la cual se aplica y generalmente es extremo a factores educativos.	Se presenta regularmente en el aula de clase bajo una motivación propia de contextos cotidianos y de otras ciencias.

La tabla 4 muestra las diferencias entre procesos de modelización y modelación. Fuente: Villa (2007)

El papel del docente se destaca en la modelación matemática como orientador y organizador del proceso de modelación que se pretende debe ser realizado por el estudiante, de esta manera, existe un precedente que justifica la pre-elaboración de un problema que sea evidente a la percepción del estudiante en el instante que se ve involucrado en un contexto o situación específica, situación que debe generar interés por parte del estudiante, dado que la motivación puede ser un factor importante durante el desarrollo de las diferentes etapas o fases del proceso de modelación.

Desde varios autores la definición de modelo matemático debe referir a un vínculo entre la construcción del concepto de objeto matemático y su relación con el mundo real.

Según Villa (2007) el concepto de modelo matemático está presente en muchos de los campos de las ciencias en las cuales las matemáticas tienen una amplia aplicación para la resolución de problemas, es por eso que recibe varias definiciones.

- Según Maki e Thompson (1973) “Es un sistema axiomático constituido por términos indefinidos que son obtenidos por la abstracción y la cualificación de ideas del mundo real” (p.14).
- El modelo matemático es una construcción matemática dirigida a estudiar un sistema o fenómeno particular del mundo real, en el cual se incluyen gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales.
- Según Rutherford (1978) “Es un sistema prototipo que es formulado para expresar las leyes y su solución intenta representar algún aspecto de su comportamiento a partir de un consistente sistema de ecuaciones” (p.5).

La construcción de un modelo no se hace de manera automática ni inmediata, por el contrario, este proceso requiere de cierto tiempo en el que el modelador pone en juego sus conocimientos matemáticos, el conocimiento del contexto y sus habilidades para describir, establecer y representar las relaciones existentes entre las cantidades de tal manera que se pueda construir un nuevo objeto matemático; así bien, el proceso de obtener un modelo matemático se le llama modelización matemática.

La modelización matemática es un proceso de refinamiento y ajuste de un modelo matemático, que continua y sistemáticamente debe evolucionar a medida que es enriquecido con los análisis, el ajuste de las variables y la validación del modelo en el momento de la construcción del objeto matemático. Por otra parte, la modelización matemática se puede dar

como una actividad científica o bien como herramienta en el aula de clase a partir de condiciones muy bien establecidas.

La pregunta es si las matemáticas que todos, incluimos los matemáticos puros, necesitamos en nuestro desempeño profesional, ciudadano y personal, no son esas matemáticas puras, estáticas y majestuosas, sino más bien las matemáticas dinámicas y fluidas de una tradición ahora desvalorizada en la que se manejan e inventan modelos mentales y se ejercita el pensamiento variacional (Vasco, 2010)

Cabe resaltar que existen múltiples enfoques de la modelación matemática o matematización, así que para efectos de este trabajo es pertinente y necesario dejar claro que dicho enfoque es el de una herramienta en el aula para construir el concepto matemático elegido.

Como se había mencionado en el apartado de la distinción entre modelización y modelo, según Villa y Ruiz (2009), la modelación matemática, vista como proceso, implica una serie de acciones o fases que hacen que la construcción o interpretación de un modelo no se efectúe de manera instantánea en el aula de clase; así pues, es importante tener en cuenta los criterios abordados en cada una de dichas fases en la construcción y validación del modelo matemático.

El primer criterio a tener en cuenta es el “propósito del modelo”, donde el modelo se elabora para construir un concepto matemático, el segundo es “los conceptos matemáticos”, estos deben ser considerados con anticipación por el docente para la preparación y selección del contexto y sobre todo se encuentren de acuerdo a los propósitos de la clase; el tercero es “los contextos”, deben estar relacionados a problemas abordados con anterioridad por el docente con el objeto de evaluar su pertinencia con los propósitos educativos; y por último “otros factores”, que son aquellos que se presentan en el aula como un forma de motivación e interdisciplinariedad.

5.7. Modelación como proceso cíclico

Partiendo de la idea de modelación como un proceso cíclico, desde la postura de Villa (2007) y Erbas, Kertil, Çetinkaya, Çakiroglu, Alacaci y Bas (2014) comparten el mismo principio, al considerar que no existe una manera de proceder estricta en la modelación matemática para alcanzar la solución de una situación determinada, proceso en el cual los problemas de una situación real y las diferentes relaciones son traducidos a un lenguaje simbólico matemático, perspectiva que pretende examinar las características estructurales de una situación de la vida real a través de las matemáticas al ir más allá de las características físicas.

En la literatura se evidencia una gran variedad de referencias que describen las etapas que corresponden a un proceso cíclico en la modelación matemática, por ejemplo, NCTM (1989, P.138) citado por Erbas et al. (2014) define la modelación matemática como un proceso no lineal que incluye e interrelaciona los siguientes pasos:

1. Identificar y simplificar la situación del problema del mundo real.
2. Construir un modelo matemático.
3. Transformar y resolver el modelo.
4. Interpretar el modelo.
5. Validar y usar el modelo.

Son considerados este tipo de diagramas como una ayuda para que los docentes identifiquen las diferentes posibles etapas que los estudiantes podrían llegar a experimentar en el momento de abordar un proceso de modelación matemática, sin embargo, es necesario aclarar que el proceso de modelación puede partir de un modelo predeterminado y construir uno propio a partir de una

reinterpretación, como también construir el modelo a partir de asociar fenómenos de una determinada situación con conceptos matemáticos.

5.8. Sistemas desde las TGPS

La modelación matemática o matematización es considerado como una detección de esquemas que se repiten en diferentes situaciones que pueden ser cotidianas o relacionarse con las diferentes áreas del conocimiento, esta posible detección de esquemas permite el desarrollo de un modelo, el cual es un sistema que permite la formulación de conjeturas y razonamientos para avanzar hacia la demostración y comprensión del objeto que se desea estudiar. Vasco, (1995) desde la teoría general de procesos y sistemas (TGPS) define sistema como “un conjunto de partes o elementos relacionados entre sí de tal forma que unos modifican a los otros”, a partir de esta definición, para efectos del trabajo de investigación constituiremos sistema como el fenómeno en el cual se involucran variables que covarían en una relación lineal. Sobre un conjunto de sistemas, se desarrollará el proceso de modelación que permita asimilar y definir un modelo por medio de la relación de modelación entre dos o más sistemas.

Erbas et al. (2014) también hace referencia al concepto de sistema dentro del proceso de modelación matemática, considerando dos tipos de sistemas, uno de ellos refiere a los sistemas conceptuales que se encuentran en la mente del estudiante y el otro refiere a los sistemas de notación externa, quiere decir, por ejemplo, aquellos sistemas complejos que se encuentran en la naturaleza, entendiendo el modelo como el intento de construir una analogía entre un sistema desconocido y otro previamente conocido, ésta última perspectiva de sistema tiene una aproximación desde la postura de Vasco (1995) quien afirma que:

Cuando se hace explícito el proceso de construir modelos y de contrastarlos con lo real, la modelación del mundo se hace sobre la base de modelamientos previos que el mundo

natural y cultural ha hecho sobre el sujeto modelador, y sobre la base de una colección enciclopédica de modelos que el sujeto va reconstruyendo (Vasco, 1995, p.400)

La modelación matemática para efectos de esta investigación educativa se entenderá como un proceso de enseñanza y una herramienta didáctica no lineal para la construcción de conceptos matemáticos y una aproximación al objeto matemático.

5.9. El registro semiótico como sistema de representación

Una parte fundamental tanto en el análisis como en el entendimiento de las producciones hechas por los estudiantes cuando se enfrentan a las diferentes situaciones, son los tipos de registros y las formas en las que dichos registros hacen transferencia; según Duval (1999), no puede haber comprensión matemática si no se distingue un objeto de su representación. Específicamente una representación semiótica hace referencia a un sistema particular de signos como el caso de las representaciones propias del concepto de función, puede ser el lenguaje, la escritura y los gráficos cartesianos, que a pesar de ser representaciones diferentes son equivalentes en el sentido que representan el mismo objeto. En términos de Duval (1999) es una operación cognitiva de conversión el cambiar de un sistema de representación a otro.



Figura 3. Conversión de un sistema a otro.

No obstante, para efectos de esta investigación, más allá de las representaciones semióticas, bien Duval (1999) hace un llamado a la importancia de indagar en la operación cognitiva entre sistemas de representación, lo cual se puede volver un desconocimiento que el autor identifica de dos maneras:

1. La representación semiótica cumple un papel de comunicación, dejando de lado el tratamiento de la información y la toma de consciencia.

2. La representación semiótica es un soporte para las representaciones mentales y el considerar que el paso de la forma de representación al contenido es algo espontáneo, dejando en un plano secundario el cambio de forma o la operación cognitiva. Respecto a este desconocimiento, Duval (1999) afirma que “si el contenido es separable de su forma, es decir, si hay noesis sin semiosis, entonces la operación de conversión no puede ser más que una operación cognitivamente neutra, y de un valor nulo o mínimo.” (p.28)

A partir de los desconocimientos alusivos a las operaciones cognitivas, es pertinente considerar que las operaciones cognitivas implícitas en los cambios de un sistema de representación a otro, como bien lo menciona Duval (1999) no es algo trivial y tampoco es una operación neutra, en otros términos, el contenido no es separable de los diferentes sistemas de representación. Por el contrario, desde el mismo marco conceptual de Duval (1999) algunas aproximaciones a los sistemas semióticos, son la correspondencia entre los sistemas semióticos con el lenguaje natural, pero considerando la diversidad de los sistemas semióticos en el funcionamiento del pensamiento y también las conversiones de un sistema a otro.

Para tener una aproximación a la interpretación de los sistemas semióticos a partir de los registros semióticos de los estudiantes, recurriremos a una de las dos oposiciones clásicas fundamentadas por Le Ny, 1985; Paivo, 1986; Larkin & Simon, 1987 citado por Duval (1999),

las cuales son la oposición consciente/no-consciente y la oposición externo/interno, que para efectos de los objetivos de esta investigación la oposición externo/interno corresponderán a los sistemas directamente visibles y observables y los que no lo son. Las representaciones externas son entendidas como las representaciones semióticas y las internas son aquellas que un sujeto no logra comunicar, como por ejemplo las emociones.

Tanto Duval (1999) como Carlson et al. (2003) llegan al punto de pretender indagar sobre las acciones mentales, las cuales se pueden encontrar de una manera consciente o no consciente dentro de los sistemas de representación.

En razón de la diversidad de los sistemas semióticos, las representaciones semióticas permiten tener una variedad de representaciones para un mismo objeto; esta variedad es decisiva tanto desde el punto de vista de la función de tratamiento como desde el punto de vista de la conceptualización. (Duval, 1999, p.37)

Por lo tanto, inferimos desde lo anterior, que no es posible separar la conceptualización de los diferentes registros semióticos, ya que el observar los diferentes cambios, transformaciones u operaciones cognitivas, da la posibilidad de analizar la congruencia o no congruencia de los diferentes registros semióticos e identificar o aproximarnos a las acciones mentales de los sujetos.

Para efectos del desarrollo de este trabajo de investigación, considerando los diversos puntos de vista y fundamentos del significado de modelación matemática, asumimos las posturas de Villa y Ruiz (2009) y Biembengut y Hein (2004) frente a este concepto como un proceso cíclico que parte de un tema o asunto de interés que implica una serie de fases que contribuyen a la interpretación y/o construcción de un modelo a partir de sistemas análogos, concretos o similares a la realidad. Proceso que debe ir acompañado bajo la orientación de quien pretende o bien sea

enseñar por medio del proceso de la modelación matemática, validar el modelo o como en nuestro caso indagar sobre los procesos de modelación a partir de las operaciones cognitivas de conversión entre los diferentes tipos de registros.

5.10. Tipos de Registros

Los registros que harán parte del análisis de estudio serán el lenguaje natural, el registro tabular, el lenguaje simbólico y el gráfico. Lo anterior, considerado como la manera de expresarse de los estudiantes a medida que abordan una situación o un fenómeno que implique un proceso de modelación, con el objetivo principal de manejar un lenguaje simbólico que les permita construir un modelo matemático como la matematización del fenómeno o situación y que éste le permita comprender el comportamiento covariacional en otros sistemas con estructuras similares.

Posada y Villa (2006) organizan los cuatro registros en dos grupos, El lenguaje natural y el lenguaje simbólico como los registros principales, entendiendo que el lenguaje natural es el punto de partida y el lenguaje simbólico se entenderá como el producto modelo del fenómeno o situación; por otro lado, se entenderán como registros auxiliares el lenguaje tabular y gráfico, estos tendrán como función brindar la posibilidad de identificar elementos que permitan la organización de la información, como por ejemplo, patrones de secuencia, el cuantificar la variación de una magnitud y la relación con la variación de una segunda magnitud.

Considerando que, para efectos de este trabajo de investigación, los cuatro tipos de registro son parte de lo observable dentro del proceso de modelación, a continuación, se desarrollara una breve descripción y análisis de cada uno de los registros.

5.10.1. Registro Algebraico o simbólico.

De acuerdo con Posada y Villa (2006) en este registro se emplean todos los símbolos correspondientes a distintos alfabetos, bien sea nuestro propio alfabeto o alfabetos antiguos, como, por ejemplo, los provenientes de la antigua Grecia e indu-arábigos. Por otro lado, se consideran las reglas lógicas matemáticas y relaciones de equivalencia entre otros elementos.

Específicamente, cuando hacemos referencia al concepto de función identificamos la necesidad de representar una magnitud dentro de una relación de función, por ejemplo, la magnitud x como variable independiente en una relación funcional $f(x)$ de tal manera que $f(x)$ corresponde a la representación simbólica o algebraica de la magnitud dependiente.

Dentro de los supuestos enmarcados en este trabajo de investigación, consideramos que el registro algebraico o simbólico permite tener una visualización amplia del comportamiento del fenómeno o situación estudiada bajo una función definida.

En el proceso de modelación, podría decirse que, en la fase de formulación, es el momento fundamental para enseñar el concepto de función y el tipo de relación que se pretende abordar, como una aproximación al pensamiento algebraico, en términos de Posada y Villa, (2006) se considera lo siguiente:

- Las expresiones simbólicas que se derivan de la situación, contienen elementos que hacen pertenecer el modelo a una relación específica entre variables como, por ejemplo, un modelo lineal, cuadrático o exponencial.

- Considerar el doble status del llamado modelo como producto de un proceso de modelación pertenecer el modelo a una relación específica entre variables como, por ejemplo, un modelo lineal, cuadrático o exponencial bajo una función definida del fenómeno.

Tabla 5. Modelo como producto

modelo abstracto	modelo concreto
La idea de variable radica en que un número varía en relación con otros números.	La idea de variable radica en que una magnitud varía en relación con otras magnitudes.

La tabla 5 muestra las características del modelo abstracto y del modelo concreto. Fuente: Autoría propia.

Sin embargo, Posada y Villa, (2006) consideran que la aproximación al algebra de la noción de función como un modelo matemático no debe agotar las posibilidades respecto a las características del objeto en estudio, el de función. Por el contrario, debe contribuir al proceso de modelación para el desarrollo del pensamiento variacional. Esta misma idea se puede interpretar de manera explícita desde la postura de Vasco (2002) cuando hace referencia a la reformulación del modelo, el cual consideramos como una etapa del proceso cíclico de la modelación, respecto a la reformulación, el autor afirma:

El objeto del pensamiento variacional es pues la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad. Vasco (2002, 104)

Es la modelación matemática el proceso que permite dar sentido a las diferentes situaciones que involucren fenómenos o diversas ciencias del conocimiento, y dar significado al concepto de función.

5.10.2. Representación gráfica.

De acuerdo con Azcárete y Deulofeu (1996) cuando hacemos referencia a la gráfica cartesiana de una función, se está definiendo la función desde una visión geométrica, esto corresponde a un sistema de coordenadas rectangulares generado sobre dos rectas, el eje x que corresponde a las abscisas y el eje y que corresponde a las ordenadas, de tal manera que se corten perpendicularmente. Cada punto o coordenada está definido como $P(x, y)$ y la gráfica está formada por el conjunto de puntos sobre el plano cartesiano.

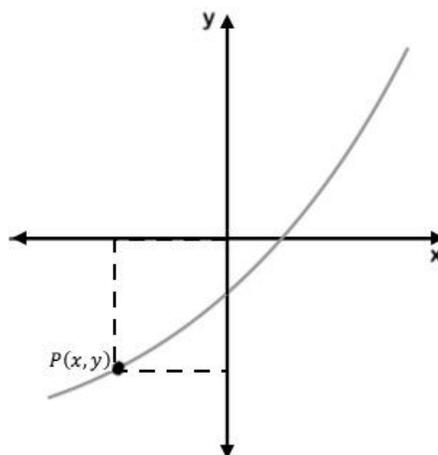


Figura 4. Representación gráfica de una función.

5.10.3. Registro tabular.

Según Azcárete y Deulofeu (1996) el registro tabular de una función definida $f(x)$ consta de dos columnas o filas, donde una de ellas corresponde al conjunto del dominio de la función y la otra corresponde a los elementos de llegada, la información muestra de manera explícita los elementos de x y y .

x	2	4	6	8	10
y	23	22	29	32	45

Figura 5. Representación de un registro tabular.

El registro tabular pese a las posibles limitaciones, permite identificar las características en una regla de correspondencia, analizar el comportamiento de dos variables a partir de un ejercicio experimental e identificar elementos variantes y constantes.

Para el análisis del concepto de función lineal se considerarán los siguientes supuestos:

- El registro tabular permite identificar los cambios entre cada magnitud.
- Es posible identificar regularidades a partir del producto o cocientes entre los valores de las magnitudes.

5.10.4. Lenguaje Natural.

El registro de lenguaje natural corresponde al discurso oral o escrito que en términos de Duval (1999) corresponde a “la espontaneidad discursiva que sirve de punto de anclaje de todo aprendizaje ligado a una enseñanza” (p.80). Su complejidad radica en la organización sintáctica y la representación de lo que se pretende entender o expresar cuando se desarrollan conversiones de registro que involucra el registro lenguaje natural con representaciones no discursivas.

5.11. Elementos didácticos: La modelación como herramienta didáctica

En conformidad con las afirmaciones de Vasco (2002) la modelación matemática se concreta como una herramienta didáctica que permite en los estudiantes el paso de elementos familiares y sistemas concretos a sistemas conceptuales y simbólicos. Dicho de otro modo, en el pensamiento variacional el propósito principal es la modelación como una herramienta para abordar situaciones o problemas que generen el reto de modelar algún proceso.

Desde el anterior marco conceptual, la modelación como herramienta didáctica implica el desarrollo de unos momentos secuenciales, los cuales son: la captación de patrones de variación, la creación de un modelo mental, la implementación del modelo, comparación de resultados y revisión del modelo (Vasco, 2002, p.105), como veremos más adelante, a partir de los momentos mencionados definiremos los sistemas de categorías del presente trabajo de investigación.

Consideramos como aporte sustancial, el uso de nuevas tecnologías en la implementación de la modelación matemática como herramienta didáctica, como una de las múltiples maneras de contribuir al desarrollo del pensamiento covariacional, ya que una vez formulado un modelo o una situación de covariación es posible programarlo bajo simulaciones electrónicas y dinámicas que permitan la ejecución, parametrización y visualización del cambio de una o más variables, incluso identificar la forma en cómo se pueden relacionar dos magnitudes.

Situaciones dinámicas de covariación

Considerando que para efectos de la observación del proceso de modelación en situaciones que involucran dos variables que cambian simultáneamente, Carlson, et. al, (2003) en su trabajo de investigación hace referencia al razonamiento covariacional, el cual se desarrolla a partir de la capacidad de los estudiantes para analizar patrones de cambio en diferentes situaciones usando funciones matemáticas para la deducción de anomalías o regularidades de los datos obtenidos de una determinada situación. Cabe aclarar que las situaciones consideradas para el desarrollo del presente trabajo de investigación corresponden a situaciones que involucran funciones dinámicas, es decir, la coordinación de dos magnitudes que, al seguir la cantidad de una magnitud, identifica que la otra también tiene un valor en cada momento, que en coherencia con (Kaput, 1994; Rasmussen, 2000) esta habilidad es esencial en cuanto a la interpretación de modelos en eventos dinámicos.

6. Metodología

En este capítulo se realiza una descripción de cada una de las fases seguidas para el desarrollo del presente trabajo de investigación, en primer lugar, una vez definido el tema, planteamiento del problema, objetivos de investigación y la estructura teórica a partir de una revisión literaria, se procede al diseño de la secuencia didáctica la cual consta de cuatro actividades, una prueba diagnóstica denominada prueba inicial y tres situaciones enmarcadas en el pensamiento variacional. En segundo lugar, se realiza la aplicación de los instrumentos a 25 estudiantes de ciclo V del Colegio Quiroga Alianza I.E.D. en la ciudad de Bogotá para posteriormente analizar los procesos a nivel intrasujeto e intersujeto de tres estudiantes con diferente nivel de desempeño académico, seguidamente, a partir de las evidencias de los procesos de los estudiantes y de los supuestos teóricos de las fases de un proceso de modelación se establecen los momentos e indicadores del sistema de categorización con la finalidad de identificar y describir tales procesos, lo anterior considerando que el trabajo de investigación se centró en la exploración de las características del pensamiento variacional y plantear problemas que pudiesen ser empleados en una secuencia didáctica encaminada a que el estudiante se viera en la necesidad de abordar una modelación matemática y así llegar a una aproximación sobre las generalidades de la función lineal. Como última fase del proceso metodológico se redacta el informe final a partir de las evidencias y conclusiones del trabajo de investigación.

Como se ha mencionado con anterioridad, el presente trabajo de investigación desarrolla el proceso metodológico como un conjunto de aspectos operativos que se denominan fases. El enfoque de la metodología del proyecto es la investigación cualitativa desde el marco conceptual de Bernal (2010), que desde la postura de Bonilla y Rodríguez (como se citó en Bernal, 2010) este tipo de investigación está orientado en profundizar casos específicos y no en la

generalización. La prioridad de este enfoque de investigación no es el medir sino describir el fenómeno de estudio y conceptualizar sobre la realidad a partir de unos parámetros y límites determinados como, por ejemplo, el cuerpo teórico aceptado por la comunidad científica referente al concepto de función lineal y la modelación matemática.

El tipo de investigación adoptado para este trabajo de investigación es el estudio de caso que, desde el marco conceptual del autor mencionado en el apartado anterior, este tipo de investigación tiene como objetivo profundizar en una unidad de análisis específica tomada de un universo poblacional. En el caso particular de este trabajo de investigación, la unidad de análisis son 3 estudiantes seleccionados como nivel bajo, nivel medio y nivel alto que pertenecen a una preselección de 25 estudiantes de grado 1003 del Colegio Quiroga Alianza I.E.D. en la ciudad de Bogotá. La elección de la muestra poblacional inicial de los 25 estudiantes obedece al vínculo laboral del grupo de investigación con la muestra poblacional, considerando que uno de los dos investigadores del presente trabajo es docente de matemáticas de la muestra poblacional y segundo porque la muestra poblacional corresponde al ciclo V de la educación media vocacional. A partir de la aplicación de la actividad denominada prueba inicial y de los resultados obtenidos en ella, seleccionamos 3 sujetos de la muestra poblacional de tal manera que las respuestas, procesos y argumentos puedan reflejar algunas de las características de las categorías establecidas y así poder clasificar a los estudiantes en tres niveles que sirvieron de referencia para realizar el seguimiento y dar curso al objetivo de la presente investigación; con relación a la prueba inicial se determinó que el criterio para ubicar los estudiantes en los distintos niveles corresponde a la siguiente caracterización de las repuestas así:

Nivel bajo:

- No identifica el comportamiento de variación de una o varias variables en una

situación de covariación.

- No identifica si una variable es constante o no.

Nivel medio:

- Identifica que una variable cambia.

Nivel alto:

- Interpreta los cambios de una variable con respecto a los cambios de una segunda variable cuando una depende de la otra.
- Identifica si la variación de una o más variables es constante o no.
- Representa gráficamente la covariación entre dos magnitudes.

El tema y definición del estudio de caso son los procesos de modelación en situaciones que involucran magnitudes que covarían bajo una relación de modelo lineal.

A partir de la modelación matemática como proceso cíclico ya mencionado en apartados anteriores, y desde la postura de Bernal (2010) se encuentra un punto de coherencia al describir el estudio de caso como un procedimiento que se desarrolla como un proceso cíclico y progresivo, por lo tanto, el proceso de modelación y el desarrollo de la metodología se desarrollan en uno solo, con la diferencia que el primero es una estrategia de enseñanza-aprendizaje y el segundo un procedimiento metodológico de investigación.

6.1. Fases del trabajo de investigación

Para el desarrollo de las fases del trabajo de investigación y trabajo de campo se proporcionará información respecto a los siguientes aspectos: Elaboración de un marco teórico formal, descripción general de la unidad de análisis (población de estudio), diseño y validación

de los instrumentos de recolección de información, proceso de la información recolectada, análisis de la información y redacción de las conclusiones y recomendaciones. A continuación, se describen cada una de las fases de desarrollo del trabajo de investigación.

Fase 1: En esta fase se realiza la revisión literaria enmarcada en la modelación matemática desde referentes a nivel nacional e internacional, el desarrollo del pensamiento variacional en el currículo nacional y el concepto de función lineal desde los sistemas de representación semiótica y razonamientos covariacionales.

Fase 2: En esta fase se proponen cuatro situaciones o actividades, La primera es la actividad que corresponde al proceso diagnóstico de la unidad de análisis, instrumento construido por el profesor Jorge Castaño junto con el grupo de maestría en educación cohorte 2018-1 de la Pontificia Universidad Javeriana, la segunda, tercera y cuarta sesión son situaciones diseñadas bajo la estructura de problemas relacionados con el desarrollo del pensamiento variacional.

Mediante la siguiente secuencia didáctica se busca identificar y caracterizar las diferentes representaciones semióticas que aparecen en el desarrollo de situaciones de modelación que abordan situaciones en las magnitudes estudiadas covarían en relaciones de dependencia.

Propósito de aprendizaje de los estudiantes.

La secuencia didáctica que se realizará tiene como fin identificar las diferentes características de las funciones lineales empleadas por los estudiantes cuando pasan de un tipo de registro semiótico a otro (transferencia), y así describir cómo las situaciones de modelación aportan a este fin.

6.2. Descripción global de la secuencia

A continuación, se realiza una breve descripción de las cuatro sesiones diseñadas para poder recoger la información necesaria en la visualización de las características identificadas por los estudiantes de una función lineal a partir de la transferencia de registros semióticos realizados en cada sesión.

Tabla 6. Descripción general de la secuencia didáctica

Sesión	Nombre de la sesión	Descripción global de la sesión.
(Prueba Inicial)	Identificación de relaciones de covariación entre magnitudes y la transferencia entre representaciones semióticas mediante tabulación y graficación.	Es la sesión donde el estudiante analiza y comenta la relación existente entre magnitudes expuestas en tablas de manera que esta labor le permita identificar la relación de covariación entre las magnitudes, además de permitirle al estudiante realizar la transferencia entre diferentes representaciones emergentes con las preguntas realizadas.
1	Comparación entre dos planes de celular que emplean diferentes características de las funciones lineales para determinar los registros analíticos y algebraicos que describen cada situación expuesta.	En esta sesión se espera que los estudiantes mediante la comparación y caracterización entre dos planes de celular establezca la relación de covariación entre magnitudes y logren describir las funciones desde representaciones gráficas y tabulares.
2	Estudio de la relación de covariación entre las magnitudes expuestas en el momento que se deja caer una pelota desde una altura determinada.	En esta sesión se espera que a partir de la identificación de las magnitudes y su relación de covariación, el estudiante sea capaz de replicar el proceso realizado en la situación de los planes de celular y que, al obtener los valores necesarios desde una simulación en GeoGebra, pueda establecer las similitudes y diferencias existentes al comparar las situaciones anteriores y la actual con el fin de evidenciar que no todas las situaciones de covariación son lineales.
3	Estudio de covariación entre los componentes de un circuito eléctrico simple.	En esta sesión tiene como propósito que los estudiantes determinen el tipo de covariación existente entre las variables estudiadas y logren

Continuidad de la tabla 6

validar su modelo a partir de condiciones homomórficas y una comparación con las situaciones estudiadas con anterioridad.

La tabla 6 muestra las descripciones generales de la secuencia didáctica, Autoría propia.

6.2.1. Descripción de cada sesión de la secuencia didáctica.

Tabla 7. Sesión prueba inicial

Sesión Prueba Inicial	
1. Nombre de la sesión	Identificación de relaciones de covariación entre magnitudes y la transferencia entre representaciones semióticas mediante tabulación y graficación.
2. Fecha de implementación	Febrero 12 de 2018
3. Descripción global de la sesión	En la sesión el estudiante tendrá que analizar y comentar la relación existente entre magnitudes expuestas en tablas de manera que esta labor le permita identificar la relación de covariación entre las magnitudes además de permitirle al estudiante realizar la transferencia entre diferentes representaciones emergentes con las preguntas realizadas.
4. objetivos de aprendizaje de los estudiantes	Esta sesión tiene como fin identificar las diferentes características de las funciones lineales empleadas por los estudiantes cuando pasan de un tipo de registro semiótico a otro (transferencia), y así describir cómo las situaciones de modelación aportan a este fin.
5. Preguntas de investigación	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Qué nociones de magnitud tienen los estudiantes? • ¿Cómo registran las relaciones de covariación? • ¿Qué registros semióticos emplean los estudiantes para describir relaciones de covariación? • ¿Cómo reconocen en un registro gráfico cartesiano la relación covariación propuesta?
6. Momentos	<p>Momento 1: Introductorio. En este momento se pretende ubicar a los estudiantes en la actividad que se desarrollará.</p> <p>Momento 2: Presentación de la actividad. En este momento se presenta la actividad que se realizará buscando problematizar a los</p>

 Continuidad Tabla 7.

estudiantes, buscando construir una actitud de trabajo centrada en las habilidades y conocimientos previos de los estudiantes y dejando claro que existirán diferentes maneras de abordar la situación pues la forma de pensar de cada individuo es diferente.

Momento 3: De manera individual los estudiantes abordarán la situación presentada y registrarán en las guías sus respuestas, apreciaciones y diferentes registros gráficos que empleen para empezar a dar solución al problema planteado.

Momento 4: Los estudiantes se reunirán en grupos de 3 o 4 para socializar sus respuestas con los compañeros del grupo y lograr construir un consenso entre sus respuestas, lo anterior mostrándole a los estudiantes que sin importar el enfoque se puede construir una respuesta que satisfaga a los diferentes miembros del grupo.

-
- | | |
|---------------|---|
| 7. Materiales | <p>Guías que les permitan a los estudiantes realizar un registro organizado de sus construcciones tanto individuales como grupales. (ver anexo 1).</p> <p>Presentación en Power point o en cualquier medio audiovisual, puesto que es posible que los estudiantes requieran de explicaciones adicionales que necesiten de ser socializadas a todo el grupo.</p> |
|---------------|---|
-

La tabla 7 muestra la descripción de la sesión prueba inicial. Fuente: Autoría propia.

 Tabla 8. Sesión No 1

 Sesión No 1

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. Nombre de la sesión | Comparación entre dos planes de celular que emplean diferentes características de las funciones lineales para determinar los registros analíticos y algebraicos que describen cada situación expuesta. |
| 2. Fecha de implementación | Febrero 27 de 2018 |
| 3. Descripción global de la sesión | En la sesión se pretende que el estudiante mediante la comparación y caracterización entre dos planes de celular establezca la relación de covariación entre magnitudes, logren describir las funciones desde representaciones analíticas, gráficas y algebraicas. |
-

Continuidad de la tabla 8

4. objetivos de aprendizaje de los estudiantes	Esta sesión tiene como fin identificar las diferentes características de las funciones lineales empleadas por los estudiantes cuando pasan de un tipo de registro semiótico a otro (transferencia), y así describir cómo las situaciones de modelación aportan a este fin.
5. Preguntas de investigación	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cómo registran las relaciones de covariación? • ¿Qué registros semióticos emplean los estudiantes para describir relaciones de covariación? • ¿Cómo reconocen en un registro gráfico cartesiano la relación covariación propuesta? • ¿Los registros semióticos aportan en la consolidación de un modelo matemático?
6. Momentos	<p>Momento 1: Los estudiantes de manera individual analizan los tres planes de celular con el objetivo de escoger un plan a partir de criterios propios.</p> <p>Momento 2: Se realiza una puesta en común, grupos conformados de tres a cuatro estudiantes, de las respuestas del primer momento. Con el objetivo de elegir un plan según un criterio grupal.</p> <p>Momento 3: Se realizar una puesta en común a nivel de todo el grupo de clase.</p> <p>Momento 4: Desarrollo de la guía de la comprensión.</p>
7. Materiales	<ol style="list-style-type: none"> 1. Guías que les permitan a los estudiantes realizar un registro organizado de sus construcciones tanto individuales como grupales. (ver anexo 1). 2. Presentación en Power point o en cualquier medio audiovisual, puesto que es posible que los estudiantes requieran de explicaciones adicionales que necesiten de ser socializadas a todo el grupo.

La tabla 8 muestra la descripción de la sesión No 1. Fuente: Autoría propia.

Tabla 9. Sesión No 2

Sesión No 2	
1. Nombre de la sesión	Estudio de la relación de covariación entre las magnitudes expuestas en el momento que se deja caer una pelota desde una altura determinada.

 Continuidad de la tabla 9

2. Fecha de implementación	Marzo 9 del 2018
3. Descripción global de la sesión	<p>En la sesión se pretende que, a partir de la identificación de las magnitudes y su relación de covariación, el estudiante sea capaz de replicar el proceso realizado en la situación de los planes de celular y que, al obtener los valores necesarios desde una simulación en GeoGebra, pueda establecer las similitudes y diferencias existentes al comparar las situaciones anteriores y la actual con el fin de evidenciar que no todas las situaciones de covariación son lineales.</p>
4. objetivos de aprendizaje de los estudiantes	<p>Esta sesión tiene como fin establecer puntos de comparación entre una situación de covariación lineal con una situación que no es de covariación lineal, así identificar elementos como razón de cambio, puntos de corte y si corresponde o no a un modelo lineal.</p>
5. Preguntas de investigación	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuál es el comportamiento de la razón de cambio en una situación de covariación no lineal? • ¿Qué registros semióticos emplean los estudiantes para describir relaciones de covariación? • ¿Cómo reconocen en un registro gráfico cartesiano la relación covariación propuesta? • ¿Los registros semióticos permiten identificar si una situación de covariación tiene o no un modelo matemático lineal?
6. Momentos	<p>Momento 1: Consolidación y análisis de lo observado hasta el momento con la situación anterior planes de celular.</p> <p>Momento 2: Los estudiantes de manera individual analizan el comportamiento de caída libre de una pelota desde lo alto de un edificio por medio de un simulador en geogebra.</p> <p>Momento 3: Se realiza una puesta en común, grupos conformados de tres a cuatro estudiantes, de las respuestas del primer momento. Con el objetivo de comparar las gráficas y tablas descritas por los estudiantes.</p> <p>Momento 4: Se analiza el comportamiento de los valores de la razón de cambio.</p> <p>Momento 5: Se realiza una comparación entre lo observado en la situación de planes de celular y esta situación de caída libre de una pelota.</p>

 Continuidad de la tabla 9

- | | |
|---------------|---|
| 7. Materiales | <ol style="list-style-type: none"> 1. Guías que les permitan a los estudiantes realizar un registro organizado de sus construcciones tanto individuales como grupales. (ver anexo 2). 2. Cada estudiante debe tener mínimo una hoja de papel milimetrado y reglas o escuadras. 3. Simulador de geogebra (objeto en caída libre). |
|---------------|---|
-

La tabla 9 muestra la descripción de la sesión No 2. Fuente: Autoría propia.

 Tabla 10. Sesión No 3

 Sesión No 3

1. Nombre de la sesión	Estudio de covariación entre los componentes de un circuito eléctrico simple.
2. Fecha de implementación	Marzo 12 del 2018
3. Descripción global de la sesión	En la sesión se pretende que los estudiantes determinen el tipo de covariación existente entre las variables estudiadas y logren validar su modelo a partir de condiciones homomórficas y una comparación con las situaciones estudiadas con anterioridad.
4. objetivos de aprendizaje de los estudiantes	La sesión tiene como fin que el estudiante identifique el tipo de covariación y de ser lineal, llegar a la construcción y validación del modelo matemático correspondiente a la situación.
5. Preguntas de investigación	<ul style="list-style-type: none"> • ¿Cuál es el comportamiento de la razón de cambio en una situación de covariación lineal y no lineal? • ¿Qué registros semióticos emplean los estudiantes para describir relaciones de covariación? • ¿Cómo reconocen en un registro gráfico cartesiano, tabular y analítico o algebraico la relación covariación lineal? • ¿Los registros semióticos permiten identificar si una situación de covariación tiene o no un modelo matemático lineal? • ¿Qué características del modelo matemático permite establecer sistemas homomórficos?

 Continuidad de la tabla 10

6. Momentos
- Momento 1: Consolidación y análisis de lo observado hasta el momento con las situaciones anteriores planes de celular y caída libre de un objeto.
- Momento 2: Los estudiantes de manera individual analizan el comportamiento de circuito eléctrico simple por medio de un simulador tomado de Phet Interactive Simulations de la Universidad de Colorado.
- Momento 3: De manera individual los estudiantes abordarán la situación presentada y registrarán en las guías sus respuestas, apreciaciones y diferentes registros semióticos que empleen para empezar a identificar el comportamiento de las variables involucradas en la situación.
- Momento 4: Se analiza el comportamiento de los valores de la razón de cambio, los puntos de corte de la gráfica.
- Momento 5: Se desarrolla la construcción de un modelo matemático que sirva para modelar la situación abordada.
- Momento 6: Se estudia el modelo por medio de cambios en la estructura del sistema abordado.
-

7. Materiales
1. Guías que les permitan a los estudiantes realizar un registro organizado de sus construcciones tanto individuales como grupales. (ver anexo __).
 2. Simulador tomado de Phet Interactive Simulations de la Universidad de Colorado (Circuito eléctrico simple).
 3. Cada estudiante debe tener mínimo una hoja de papel milimetrado y reglas o escuadras.
-

La tabla 10 muestra la descripción de la sesión No 3. Fuente: Autoría propia.

Considerando que la información se obtiene de manera directa al recolectarla por medio de la observación y la entrevista, de acuerdo con Cerda (como se citó en Bernal (2010) esto se denomina como fuentes primarias. Los instrumentos utilizados para la recolección de la información en la implementación de las cuatro situaciones fueron guías escritas, simuladores con el apoyo de recursos software y el registro en audio y video de entrevistas semiestructuradas. Desde el marco conceptual de Bernal (2010), a continuación, se describen cada uno de los instrumentos empleados.

- Observación: Este instrumento requiere de la participación del investigador en la mayor parte del tiempo durante el desarrollo de la aplicación de la situación, los elementos que conforman el proceso de observación del presente trabajo de investigación son: el grupo de investigación, la unidad de análisis definida con anterioridad, los medios implementados, los recursos como guías y dispositivos electrónicos y el marco teórico del trabajo de investigación.

- Cuestionario o guías escritas: Este instrumento consiste en un conjunto de preguntas con el fin de generar los datos suficientes para lograr los propósitos del proyecto de investigación, por lo tanto, como etapa previa al diseño de este instrumento se debe tener claridad sobre el objetivo, la pregunta de investigación y las posibles hipótesis relacionadas con la naturaleza de la información que se busca. Las preguntas diseñadas son de tipo abiertas y cerradas, las preguntas abiertas permiten que el estudiante responda con sus propias palabras proporcionando información abundante y no se encuentran limitadas por opciones de respuesta, por el contrario, las preguntas cerradas son aquellas que solicitan la elección de una respuesta a partir de diferentes opciones planteadas. Se debe considerar que la codificación de las preguntas cerradas puede ser una tarea más sencilla que en las preguntas abiertas.

- Entrevista semiestructurada: Este tipo de entrevista tiene la particularidad de tener un grado de flexibilidad tanto en la estructura, en las preguntas empleadas y el orden en cómo se desarrolla la entrevista. Para el desarrollo de la entrevista, previamente se realiza una revisión de la información obtenida en los registros escritos con la finalidad de establecer las preguntas de indagación. Seguidamente se realiza la entrevista presentando al entrevistado la razón por la cual se está llevando a cabo dicho proceso y la manera en

cómo se registrará la información, que en este caso es por medio de video grabación.

Finalmente se agradece la participación a los entrevistados y se procede al análisis de la información obtenida.

Fase 3: A partir de los niveles de razonamiento covariacional de Carlson et al. (2003) y los momentos o etapas del proceso de modelación de Biembengut y Hein (2004), Villa (2007) y Vasco (2002) se procede a la construcción de la estructura de categorías para el análisis de la información, es importante resaltar que durante el proceso de observación, análisis y descripción surge la necesidad de la incorporación de categorías emergentes.

A partir del esquema de fases y momentos del proceso de modelación de Vasco (2002) se definen cuatro momentos o etapas del proceso de modelación para el análisis de información.

- Momento de captación de la variación.
- Momento de recolección de datos.
- Momento de representación y creación de un modelo.
- Momento de uso del modelo, de validación y comprobación del modelo.

Por otro lado, de las acciones mentales y niveles de razonamiento desde la postura de Carlson et al. (2003), esto se implementa como fundamento para la descripción de los indicadores de los procesos que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones de covariación lineal.

En primer lugar, Villa (2007) referente a las etapas del ciclo de modelación matemática establece

- Determinar un fenómeno o problema del mundo real.
- Observación y experimentación.

- Proceso de simplificación.
- Construcción del modelo.
- Interpretación del modelo.
- Evaluación y validación.

Villa y Ruiz (2009) describen los elementos que caracterizan los procesos de modelación en cuatro criterios.

Tabla 11. Criterios de la modelación

CRITERIOS	MODELACIÓN MATEMÁTICA
Contextos	Son “contextos reales”, los cuales dependen del entorno sociocultural de los estudiantes y de las demás ciencias. Son contextos extra-matemáticos
Propósitos	El estudiante es sometido a procesos de experimentación, indagación, búsqueda de datos, abstracción y simplificación, entre otros.
El proceso	Como proceso, la modelación matemática es recursiva y cíclica. Se desarrolla a través de una serie de fases en donde el estudiante debe interpretar, abstraer, simplificar, construir el modelo, interpretar matemáticamente dicho modelo y luego, a la luz del problema inicial, debe darse una evaluación del modelo, y de acuerdo con esto puede darse una reformulación del modelo. La validación es interna y/o externa
Argumentos	Al abordar problemas cotidianos y del entorno social y cultural de los estudiantes, permite una (re)significación de la realidad objetiva por parte del estudiante, de manera tal que le posibilite asumir una actitud crítica frente a las situaciones de la cotidianidad. Aporta elementos para responder a la pregunta clásica ¿para qué sirven las matemáticas?

La tabla 11 muestra los elementos de los criterios de modelación. Fuente: Villa y Ruiz (2009)

Por otro lado, desde la postura de Biembengut y Hein (2004), como bien se mencionó con

anterioridad propone dos abordajes para el proceso de modelación como método de enseñanza.

Para el primer abordaje el cual denomina “Desarrollo del Contenido Programático” involucra las siguientes etapas:

Tabla 12. Etapas del contenido programático

Etapa	Descripción
1. Exposición del tema.	Comienza la clase haciendo una breve explicación sobre el asunto a los alumnos, instigándolos para que formulen preguntas sobre el tema abordado.
2. Delimitación del problema.	Selecciona una o más preguntas que le permitan desarrollar el contenido programático. Si fuera posible y/o conveniente, se puede proponer a los alumnos que hagan una investigación sobre el asunto por medio de bibliografía o entrevista a algún especialista en el asunto.
3. Formulación del problema.	Plantea el problema, construyendo hipótesis, planteando ecuaciones u organizando los datos de la manera en que el contenido matemático lo requiera para la resolución.
4. Desarrollo del contenido programático.	En este momento, presenta el contenido programático (concepto, definición, propiedad, etc.) y establece una conexión con la pregunta que generó el proceso.
5. Presentación de ejemplos análogos.	A continuación, presenta ejemplos análogos, ampliando el abanico de aplicaciones y evitando, así, que el contenido se restrinja al tema o problema presentado. Además, el estímulo y la orientación para el uso de la tecnología, que es parte de la práctica diaria, tales como calculadoras o computadoras, es importante.
6. Formulación de un modelo matemático y resolución del problema a partir del modelo.	Propone a los alumnos que regresen al problema que generó el proceso y lo resuelvan.
7. Interpretación de la solución y	Al finalizar esta etapa, es importante que el

 Continuidad de la tabla 12

validación del modelo.	alumno evalúe el resultado (validación). Esto permite al alumno una mejor comprensión o discernimiento de los resultados obtenidos.
------------------------	---

La tabla 12 muestra las etapas del contenido programático del primer abordaje. Fuente: Biembengut y Hein (2004).

Para el segundo abordaje denominado “Orientar a Los Alumnos Para Que Hagan Un Trabajo De Modelación” el autor aclara que éste se desarrolla de manera parcial con el contenido programático y el que considera las condiciones para que los estudiantes aprendan a investigar y elaboren modelos matemáticos aplicados en las diferentes áreas del conocimiento.

 Tabla 13. Etapas de modelación

Etapa	Descripción
1. Elección del tema.	Se forman grupos, como máximo de cuatro alumnos, y cada grupo elige un tema/asunto de acuerdo con su interés. El grupo de alumnos, con orientación del profesor, debe ser responsable por la elección y dirección de su propio trabajo. Una vez elegido el tema/asunto, el profesor propone que obtengan datos mediante bibliografía especializada o especialistas.
2. Familiarización con el tema que va a ser modelado.	En esta segunda etapa, los alumnos ya deben estar familiarizados con el tema y disponer de muchos datos. Así, el profesor propone que elaboren una serie de preguntas y una síntesis de la investigación para ser entregada. Esta síntesis le permite al profesor enterarse del tema y seleccionar, como sugerencia, alrededor de tres preguntas para cada grupo.
3. Delimitación del problema y formulación.	Delimitado el problema o las preguntas seleccionadas, se pasa a formularlo a partir de la pregunta que requiere la matemática más elemental. Cuando el grupo tenga una buena

 Continuidad de la tabla 13

	base sobre el tema con el que está trabajando, una entrevista con un especialista puede contribuir mucho para el trabajo.
4. Elaboración de un modelo matemático, resolución y validación.	Una vez formulado el problema, se busca elaborar un modelo que permita no sólo la solución de la cuestión en particular, sino también encontrar otras soluciones o efectuar previsiones.
5. Organización del trabajo escrito y exposición oral.	Es de importancia esencial que el trabajo sea divulgado. Así, en esta etapa, los grupos deben presentar el trabajo desarrollado por escrito y oralmente, por medio de un seminario, a los demás alumnos o a quien le pueda interesar.

La tabla 13 muestra las condiciones necesarias para la elaboración de un modelo desde cualquier área del conocimiento. Fuente: Biembengut y Hein (2004).

Finalmente, desde Vasco (2002) se describe esquemáticamente los siguientes momentos o fases no necesariamente secuenciales.

- Momento de captación de patrones de variación: lo que cambia y lo que permanece.
- Momento de creación de un modelo mental.
- Momento de echar a andar el modelo.
- Momento de comparar los resultados con el proceso modelado.
- Momento de revisión del modelo.

El autor aclara que si se dispone de una tecnología socialmente disponible se abordan los siguientes momentos:

- Momento de formulación simbólica.

- Momento de calcular con esa formulación.
- Momento de comparar los resultados con el proceso modelado.
- Momento de reformulación del modelo.

Para los alcances del trabajo de investigación describiremos los indicadores a partir de cuatro momentos de modelación considerando las fases o momentos propuestos desde Vasco (2002).

Tabla 14. Sistema de categorización

Momento del proceso de modelación	Indicadores de desarrollo
Momento 1: de familiarización y problematización	No será estudiada.
Momento 2: de captación de la variación	<p>2.1 Identifica las magnitudes de la situación que varían y las que permanecen constantes.</p> <p>2.2 De acuerdo con la situación, necesidades e intereses identifica las variables de las que resulta pertinente estudiar su covariación.</p> <p>2.3 Identifica cuál es la magnitud que va a tomar como variable independiente y cuál como dependiente.</p> <p>2.4 Cuantifica cualitativamente relaciones de covariación entre las dos magnitudes (directa: si una aumenta la otra también o inversa: si una disminuye la otra aumenta)</p>
Momento 3: de recolección de datos	<p>3.1 Diseña un experimento o un procedimiento para obtener datos (los valores correspondientes de las variables independiente y dependiente).</p> <p>3.2 Determina y extrae los valores de las variables que se estudian en una relación de covariación.</p>

Continuidad de la tabla 14	
Momento 4: de representación y creación de un modelo	<p>4.1 Realiza representaciones tabulares y cartesianas de los valores obtenidos.</p> <p>4.2 Relaciona la forma de covariación de los valores estudiados con modelos de covariación conocidos y reconoce sus semejanzas y sus diferencias.</p> <p>4.3 Crea un modelo mental de la forma de covariación de cualquier par de valores de las dos variables que tengan sentido para la situación estudiada.</p> <p>4.4 Utiliza las representaciones tabulares y cartesianas para obtener valores nuevos</p> <p>4.5 En el caso de una covariación lineal reconoce la constancia de la razón del cambio y hace cálculo de ésta.</p> <p>4.6 Obtiene representaciones algebraicas que relaciona las variaciones de la variable independiente con la variable dependiente.</p>
Momento 5: de uso del modelo, de validación y comprobación del modelo	<p>5.1 Recolección de nuevos datos en situaciones homomórficas y verificación del modelo</p> <p>5.2 Uso del modelo para obtener información nueva sobre los datos.</p>

La tabla 14 muestra la propuesta de los momentos e indicadores de categorización desde las fases y momentos propuestos por Vasco (2002), Fuente: Autoría propia.

Como lo afirma Vasco (2002) tanto el proceso como los momentos de modelación no corresponden a una lógica de producir modelos, pero si puede llegar a ponerlos a prueba, ajustarlos, compararlos y refinarlos. Por lo tanto, los momentos propuestos en este trabajo de investigación incluyendo los indicadores se implementan como recursos de observación sobre los procesos de los estudiantes a lo largo de las sesiones o actividades de la secuencia didáctica.

Fase 4: Esta fase corresponde a la implementación de los instrumentos para la recolección de datos, información recolectada y organizada con instrumentos software de la siguiente manera.

- Registros escritos: transcritos en tablas Excel y algunas evidencias escritas recolectadas como imagen.
- Registros gráficos: evidencias recolectadas como imagen.
- Registros de audio y video: evidencias recolectadas desde las entrevistas y grabaciones de sesiones de clase transcritas a texto en formato dialogo.

Fase 5: En esta fase se realiza el análisis e interpretación de los datos recopilados, en primera instancia se realizó la transcripción de las entrevistas de acuerdo a los segmentos relacionados en la tabla de categorización que permitió encontrar dentro del desarrollo de la situación puntualmente cuándo los sujetos lograban o no cumplir con los indicadores bajo los cuales se diseñaron las preguntas.

Seguidamente, en el análisis se cruzó la información registrada por los estudiantes con las respuestas de los mismos en las entrevistas, evidenciando dentro de los diferentes momentos establecidos para visualizar la manera en que los estudiantes relacionan las magnitudes estudiadas en las diferentes situaciones de covariación expuestas, además de observar si se hacían presentes o no las estructuras mentales que fueran usadas en la solución de las diferentes preguntas realizadas y la secuencia de acciones abordadas en la modelación de cada situación propuesta.

Finalmente, cabe resaltar la necesidad de comparar las respuestas dadas por los estudiantes de los niveles alto, medio y bajo, con el propósito de registrar las diferencias y similitudes en las respuestas.

Estructura del análisis.

La estructura empleada se basó en:

1. La caracterización, indicador por indicador de cada una de las respuestas de los estudiantes de los diferentes niveles.
2. Un análisis desde la teoría de sistemas de Carlos Vasco, buscando que sucedía con las respuestas al modificar el sistema dentro de la situación expuesta.
3. Un comparativo de las respuestas en búsqueda de similitudes y diferencias entre ellas.

7. Análisis e Interpretación de Datos

En esta sección se presenta el análisis de los datos recolectados. Tal como se explicó en el capítulo anterior, la metodología es cualitativa y corresponde a la de un estudio de casos múltiples, para este análisis se empieza por el estudio de las producciones (lo que se dice y se hace) de los tres casos en la guía correspondiente a la sesión última (situación referida a la ley de Ohm). Posteriormente, este análisis se cruza con las producciones de los tres casos en las otras dos situaciones estudiadas a lo largo de la secuencia didáctica (planes de telefonía y caída libre), en aspectos relevantes encontrados, que se considere permiten ampliar, precisar y profundizar el análisis. Adicionalmente, se ampliará el análisis con la información de guías y de pruebas que se desarrollaron en diferentes momentos de la secuencia didáctica, en particular, con datos de la prueba inicial.

El análisis correspondiente a las producciones de la situación a la ley de Ohm se realizará para cada una de las categorías e indicadores de análisis definidas en el capítulo anterior, excepto en la categoría uno dado que por las condiciones de desarrollo de la experiencia de aula no se inicia con un problema abierto para que los estudiantes formulen el problema, más bien, de partida, cuando se formula el problema, se dan a los estudiantes de forma explícita las variables involucradas y que van a ser estudiadas.

7.1. Momento de captación de la variación

7.1.1. Indicador uno: Identifica las magnitudes de la situación que varían y las que permanecen constantes.

Como se dijo arriba, debido a la naturaleza del simulador empleado para el estudio de los circuitos eléctricos las magnitudes fueron expuestas por el docente en el momento de la

socialización inicial del caso a trabajar, por eso en este estudio no se tiene información sobre el indicador que corresponde a este momento.

7.1.2. Indicador dos: De acuerdo con la situación, necesidades e intereses identifica las variables de las que resulta pertinente estudiar su covariación.

Los tres casos muestran que reconocen las variables que se estudiarán en la covariación. Aunque se puede observar que el sujeto S1, no da una respuesta explícita sobre las variables estudiadas posiblemente pues en la socialización del simulador, el docente le dice claramente cuáles son las magnitudes que se están trabajando en la situación.

Tabla 15. Evidencia segundo indicador captación de la variación

Sujeto nivel alto	Sujeto nivel medio	Sujeto nivel bajo
<p>“El voltaje y la corriente.”</p> <p>S1: las variables son ... ¿voltaje? ¿Y los amperios? (*)</p> <p>D: Si, voltaje, intensidad de corriente que se mide en amperios muy bien.</p> <p>D: ¿Qué hay en el bombillo? ¿una qué?</p> <p>S1: Una ... resistencia.</p> <p>D: Muy bien, son las tres que estamos... resistencia muy bien. Pero ¿y la resistencia cambia? (Anexo C. Sujeto 1 ley de Ohm evidencia 1_)</p>	<p>“Voltios y amperios”</p> <p>D: ¿Cuáles son las variables que vamos a estudiar en esta situación?</p> <p>S2: Los voltios.</p> <p>D: Los voltios sí señor.</p> <p>S2: Los amperios.</p> <p>D: Los amperios que hablan de la ...</p> <p>S2: Corriente.</p> <p>(Anexo C. Sujeto 2 ley de Ohm evidencia 1_)</p>	<p>Evidencia:</p> <p>D: Yo quiero saber a medida que vamos cambiando los valores de voltaje ¿qué pasa con los valores de la corriente? ¿Qué sucede con las cargas eléctricas?</p> <p>S3: Cambian.</p> <p>D: Van a cambiar, listo.</p> <p>(Anexo C. Sujeto 3 ley de Ohm evidencia 1_)</p>

(*) La letra D indica el docente y S1, S2, S3 los estudiantes caso de estudio, de los niveles alto, medio y bajo respectivamente. Fuente: Autoría propia.

Los tres sujetos logran identificar las variables, aunque S3 no lo haga de una manera explícita. En la prueba inicial se encontraron varios estudiantes que no logran identificar las variables que son pertinentes para el estudio planteado, sus respuestas se basan principalmente en simples apreciaciones y características ajenas a las magnitudes estudiadas.

Es posible que la forma como se presenta la simulación del circuito eléctrico facilite la identificación, pues en éste se encuentran los instrumentos de medición que permiten ver que los valores de una magnitud cambia a medida que se manipula otra de las variables, sin embargo, a pesar de esta “bondad” otorgada por el simulador, S3 no expresa directamente cuales son las variables estudiadas, simplemente se observa que trabaja directamente con los valores que le otorga el simulador, este dispositivo permite apreciar que los valores de una variable cambian ante la manipulación de la otra magnitud. En la primera sesión (Planes de celular), S3 da muestras de lograr identificar las variables intervinientes al decidir el plan más beneficioso, él dice “el plan dos, porque una persona que usa muchos minutos, pero no las redes sociales”. Aunque parece ser que en este punto particular se pudo observar algún progreso, puesto que en la prueba inicial, el sujeto S3 no identifica las magnitudes para las cuales resulta pertinente estudiar su covariación, este caso ilustra que para algunos estudiantes no es tan simple identificar las variables que han de ser objeto de estudio para resolver una situación determinada.

7.1.3. Indicador tres: Identifica cuál es la magnitud que va a tomar como variable independiente y cuál como dependiente.

Los sujetos S1 y S2 señalan alguna dependencia entre las variables e identifican correctamente cuál es la variable dependiente y la variable independiente, sin embargo, el sujeto S3 —y a pesar de su avance en el reconocimiento de las variables con las cuales es pertinente trabajar—, no logra establecer de primera intención alguna relación de dependencia de un variable con relación a la otra.

Tabla 16. Evidencia tercer indicador captación de la variación

Sujeto nivel alto	Sujeto nivel medio	Sujeto nivel bajo
<p><i>"La corriente depende del voltaje".</i></p> <p>S1: <i>¿Entonces diríamos que la corriente depende del voltaje?</i> (Anexo C. Sujeto 1 ley de ohm evidencia 2_)</p>	<p><i>"La corriente depende de los voltios"</i></p> <p>D: <i>¿Hay alguna dependencia entre esas dos magnitudes? [después que el S2 ha expresado que las dos variables a estudiar son los voltios y los amperios]</i></p> <p>S2: <i>O sea sí, la corriente depende de los voltios.</i></p> <p>D: <i>Es correcto...</i> (Anexo C. Sujeto 2 ley de ohm evidencia 2_)</p>	<p>El estudiante señala la corriente a partir de la manipulación del voltaje.</p> <p>D: <i>¿Cómo cambia una variable cuando a la otra le estamos generando cambios?</i></p> <p>S3: <i>Acá (señala la batería) o ... no ...</i></p> <p>D: <i>¿Qué variable es la que tu manipulas?</i></p> <p>S3: <i>Aquí (señala la corriente)</i></p> <p>D: <i>¿Tu manipulas la corriente?</i></p> <p>S3: <i>sí.</i></p> <p>D: <i>cambíame la corriente.</i></p> <p>S3: <i>mmm entonces sería ... el ... no, no sé.</i></p> <p>D: <i>¿cómo cambias la corriente?</i></p> <p>S3: <i>A medida que aumentas (señala la batería) ...</i></p> <p>D: <i>¿Aumento qué?</i></p> <p>S3: <i>El voltaje.</i></p> <p>D: <i>A bueno, entonces ¿cuál es la variable que tu manipulas?</i></p> <p>S3: <i>El voltaje.</i> (Anexo C. Sujeto 3 ley de ohm evidencia 2_)</p>

La tabla 16 muestra la comparación entre los tres niveles respecto al indicador mencionado, Fuente: Autoría propia.

Es claro que los dos primeros sujetos encuentran que a medida que un valor cambia el otro también, producto de la covariación que se da entre las dos magnitudes; aunque S2 no utiliza los términos que identifican las magnitudes (corriente y voltaje) sino los que hacen referencia a sus unidades de medida (amperios y voltios), como si confundiera la unidad de medición con las magnitudes estudiadas. En cambio, el S3 al parecer no es capaz de relacionar los valores que

obtiene de la corriente con los cambios que está realizando al manipular los valores del voltaje.

La dificultad es recurrente en el sujeto S3, pues en la situación de los planes de celular, en lugar de decir la conveniencia o no de un plan por la relación entre el costo y número de minutos, argumenta que tampoco logra determinar la dependencia entre el costo del plan y el consumo de minutos, cuando contesta al mismo indicador de la siguiente manera.

D: :... Mmm, ¿tu no me hiciste algún procedimiento matemático, algún cálculo matemático?, ¿solamente te basaste en las redes sociales?

S2: sí.

D: listo.

(Anexo C. Sujeto 3 Planes de celular evidencia 4).

7.1.4. Indicador Cuatro: Cuantifica cualitativamente relaciones de covariación entre las dos magnitudes (directa: si una aumenta la otra también o inversa: si una disminuye la otra aumenta).

Los sujetos S1 y S2 establecen relaciones cualitativas en las relaciones de covariación entre las magnitudes expuestas para la situación, mientras que S3 no.

Tabla 17. Evidencia cuarto indicador captación de la variación

Sujeto nivel alto	Sujeto nivel medio	Sujeto nivel bajo
<i>"A menor voltaje menos corriente".</i>	<i>"Entre mayor voltaje, mayor corriente".</i>	<i>S3: Entonces yo puse, a medida que la velocidad de los voltios vaya cambiando su velocidad aumenta cada vez (el sujeto muestra las fechas que se mueven en el simulador del circuito), puede llegar un punto límite, pero aun así puede seguir transcurriendo.</i>
<i>D: Mira qué pasa ahí (señalando el simulador).</i>	<i>D: ¿Qué relación podemos tener entre corriente y voltaje?</i>	
<i>S1: Que a menor voltaje menos corriente.</i>	<i>S2: Entre mayor voltaje mayor corriente.</i>	
<i>D: Bueno, entonces esas son tus conclusiones.</i>	<i>D: listo, entonces ahí podemos hablar de una relación ... ¿de qué tipo?</i>	<i>(Anexo C. Sujeto 3 Ley de Ohm evidencia 3_)</i>
<i>S1: si.</i>		
<i>(Anexo C. Sujeto 1 Ley de Ohm evidencia 3_)</i>	<i>S2: Eh ... una relación de tipo ...</i>	

Continuidad tabla 17

D: Inversa, directa ...

S2: ¡Directa no?!

D: Directa.

(Anexo C. Sujeto 2 Ley de Ohm evidencia 3_)

La tabla 17 muestra la comparación entre los tres niveles respecto al indicador mencionado, Fuente: Autoría propia.

En los diálogos transcritos de los sujetos S1 y S2 se observa que no hay que realizar ninguna aclaración sobre las características de la relación de covariación que se obtiene a partir de los datos tomados del simulador, como sí hay que hacerlo con el sujeto S3 y así pueda identificar la relación de covariación, puede observarse que en la respuesta otorgada por el sujeto S3 no es explícita la relación directa entre las dos variables. Podría decirse que para S3 no es posible cuantificar cualitativamente la relación directa entre corriente y el voltaje por las dificultades que se ha mostrado que posee para identificar estas magnitudes como variables y cuál de ellas es la variable dependiente y cuál es la variable independiente, en este fenómeno.

El sujeto S3 presenta en las otras dos tareas abordadas (planes de celular y caída libre) dificultades semejantes. Las respuestas que muestra la tabla son ilustrativas, en el caso de la situación de caída libre se ve que logra identificarlas a partir de la gráfica seleccionada, sin embargo, la gráfica poseía los ejes marcados con las variables estudiadas y es sólo hasta ese momento que puede identificar con qué variables trabajar.

Tabla 18. Evidencia sujeto 3 planes de celular y caída libre

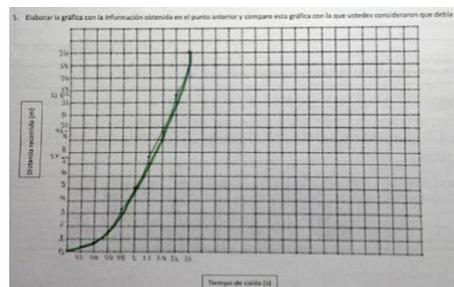
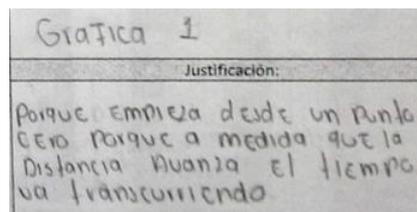
	<i>Planes de celular</i>	<i>Caída libre</i>
<i>¿Cuáles son las variables de las que resulta pertinente estudiar su</i>	<i>S3: El plan 2. D: El plan 2 ¿Por qué? S3: Porque son más baratos los minutos.</i>	

Continuidad tabla 18

covariación?

D: *A bueno listo.*

S3: *Entonces para una persona que habla mucho por celular entonces le saldría mucho más económico éste, igual de pronto no utilizará tanto, pues digamos las redes sociales sino más bien los minutos.*

D: *ok.*

La tabla 18 muestra las evidencias acerca de la dificultad de S3 respecto a cuantificación cualitativa de las variables, Fuente: Autoría propia.

Las repuestas dadas por el sujeto S3 inicialmente se argumentaban desde las características de cada situación, incluso en la situación de caída libre el sujeto S3 basa su respuesta por lo que puede ver en la representación cartesiana en el punto en el que inicia la misma, pero no desde la cuantificación cualitativa entre las variables estudiadas.

7.2. Momento de recolección de datos

7.2.1. Indicador uno. Diseña un experimento o un procedimiento para obtener datos

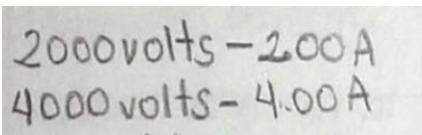
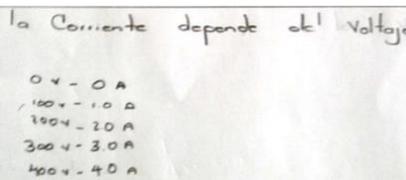
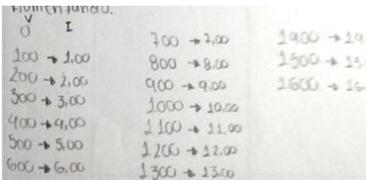
(los valores correspondientes de las variables independiente y dependiente).

En este indicador la naturaleza de la situación y los requerimientos hechos en la guía de trabajo no permitía al estudiante diseñar un procedimiento o experimento, el simulador definía la forma de recoger los datos, razón por la cual no se ofrece información para este indicador.

7.2.2. Indicador dos. Determina y extrae los valores de las variables que se estudian en una relación de covariación.

Los tres sujetos logran obtener de manera exitosa los valores correspondientes a las variables.

Tabla 19. Evidencia del indicador dos, momento de recolección de datos

Sujeto nivel alto	Sujeto nivel medio	Sujeto nivel bajo
<p>“Voy a subirle los voltios para mirar cómo se comporta la corriente.”</p>  <p>(Anexo C. Sujeto 1 Ley de Ohm evidencia 5 y 6_)</p>	 <p>(Anexo C. Sujeto 2 Ley de Ohm evidencia 3_)</p>	 <p>(Anexo C. Sujeto 3 Ley de Ohm evidencia 3_)</p>

La tabla 19 muestra la comparación entre los tres niveles respecto al indicador mencionado, Fuente: Autoría propia.

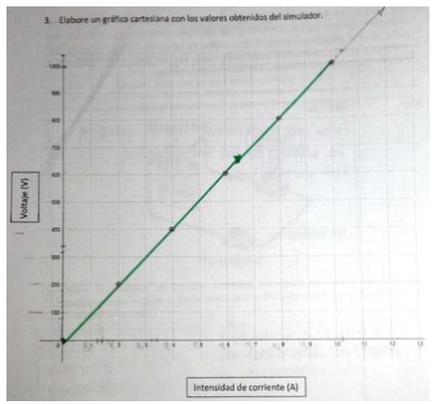
En el momento de tomar datos se observa facilidad por parte de los sujetos para determinar valores los cuales les permitirá continuar con el proceso (modelación), e incluso el organizar los valores no les presentó ninguna complicación, aunque no sigan la forma estándar de las tablas, claramente hacen registros que muestran las correspondencias de valores

7.3. Momento de representación y creación de un modelo

7.3.1. Indicador uno. Realiza representaciones tabulares y cartesianas de los valores obtenidos.

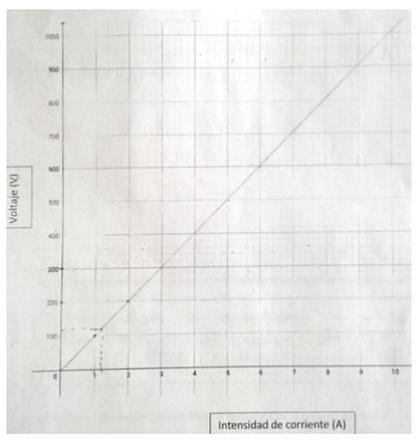
Los tres sujetos pueden realizar la representación cartesiana de la situación estudiada, se observa a continuación:

SUJETO 1.



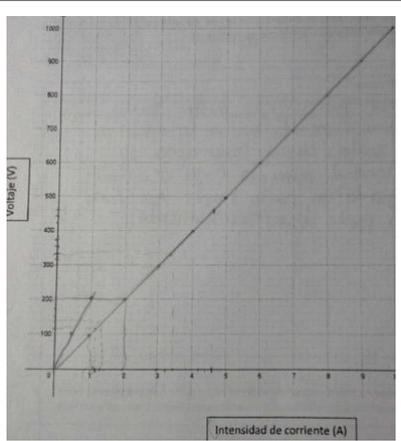
(Anexo C. Sujeto 1 Ley de Ohm evidencia 6_)

SUJETO 2.



(Anexo C. Sujeto 2 Ley de Ohm evidencia 5b_)

SUJETO 3.



(Anexo C. Sujeto 3 ley de ohm evidencia 6_)

La característica fundamental observada en este indicador fue la tendencia a generalizar la respuesta con respecto a procesos anteriores, cada vez que se abordó una situación los estudiantes se inclinaban a emplear la representación cartesiana de la situación abordada inmediatamente anterior. Para esa situación las escalas de las gráficas fueron entregadas, y aquí los valores del voltaje están de 100 en 100 voltios mientras que la intensidad de la corriente aumentaba en la escala de a un amperio, sin embargo, el simulador utilizado por el sujeto S1 otorgó valores que hicieron necesario que el sujeto realizara un ajuste de la escala a incrementos de 0,1 amperios, aun así, dicho ajuste no representó ninguna dificultad al momento de realizar la representación cartesiana.

7.3.2. Indicador dos. Relaciona la forma de covariación de los valores estudiados con modelos de covariación conocidos y reconoce sus semejanzas y sus diferencias.

En este indicador los tres sujetos no tienen dificultad para entender lo que pide la tarea, logran relacionar la forma de covariación de las variables involucradas en la situación -corriente y voltaje- con otras situaciones ya conocidas -plan de telefonía y caída libre- y, sus formas de comprender, identifican similitudes y diferencias.

La tabla muestra las respuestas otorgadas por los sujetos cuando se les pregunta ¿a cual de las dos situaciones estudiadas anteriormente (Plan de telefonía celular o caída libre) se parece más?:

Tabla 20. Evidencia del indicador dos, momento de representación y creación de un modelo

Sujeto nivel alto	Sujeto nivel medio	Sujeto nivel bajo
D: <i>¿Cómo cuál de los dos [plan de telefonía y caída libre] se comporta?</i>	D: <i>Se parece más a como covarían en el plan de celular o a cómo funcionaba, como estudiamos la caída libre ¿a cuál de los dos se parece más?</i>	D: <i>¿A cuál se parece más al de planes de celular o al de caída libre? ¿qué escribiste?</i>
S1: <i>como el de plan de celulares.</i>		S3: <i>En lo que yo quería expresar, pero no sabía cómo escribirlo, es que en una... se parecen mucho.</i>
D: <i>¿Sí?</i>		D: <i>¿Con cuál?</i>

S1: <i>Si, con una covariación lineal.</i>	S2: <i>Al de los planes de celular.</i>	S3: <i>Se parece a las dos.</i>
D: <i>O sea, se comporta como una covariación de qué tipo</i>	D: <i>¿Por qué?</i>	D: <i>A la dos.</i>
S1: <i>eh ... lineal.</i>	S2: <i>Porque en el de planes de celular la razón de cambio era uno nada más o sea no variaba.</i>	S3: <i>Sí, se parece a las dos porque ambas parten de un punto cero.</i>
D: <i>Entonces tiene una covariación lineal.</i>	D: <i>Era constante.</i>	D: <i>Pero tú me dijiste que los planes de celulares no parten de cero.</i>
<i>(Anexo C. Sujeto 1 ley de ohm evidencia 9_)</i>	S2: <i>Era constante, o sea, por ejemplo, cuando decían lo de 15, aumento 15, aumento 15. En el de caída libre aumentaba de diferentes formas.</i>	S3: <i>mmm si, entonces ...</i>
	<i>(Anexo C. Sujeto 2 ley de ohm evidencia 6_)</i>	D: <i>bueno, en ese caso no se parece al de celular porque este parte de cero y el de celulares no parte de cero, ¿pero si no hay cargo básico?</i>
		S3: <i>Entonces si partiría de cero.</i>
		D: <i>bueno, ¿entonces en ese caso? [el de caída libre]</i>
		S3: <i>De pronto si, si se parecerían, pero igual no.</i>
		<i>(Anexo C. Sujeto 3 ley de ohm evidencia 7_)</i>

La tabla 20 muestra la comparación entre los tres niveles respecto al indicador mencionado, Fuente: Autoría propia.

Se puede ver que tanto el sujeto S1 como el S2, relacionan la forma de covariación con el estudio de los planes de celular a partir de la forma en la que covarían las magnitudes para dar respuesta ¿a cual de las dos situaciones estudiadas anteriormente (Plan de telefonía celular o caída libre) se parece más?, mientras que el sujeto S3 basa su respuesta en el punto de partida de la gráfica, al preguntarle directamente sobre el punto de partida en la primera situación y un supuesto inicio sin cargo básico hace al sujeto S3 dudar de su respuesta inicial.

Es claro que para el sujeto S1 y S2 la covariación existente entre la primera situación (planes de celular) y la última (Ley de Ohm) mantienen características similares relacionadas con los cambios observados ante los incrementos de una variable a partir de los cambios de la otra magnitud. En cambio el sujeto S3 realiza la comparación a partir de un punto particular, en este caso el punto de corte con el eje vertical (el punto (0,y)) y no sobre una característica de cuenta de la forma de covariación.

7.3.3. Indicador tres. Crea un modelo mental de la forma de covariación de cualquier par de valores de las dos variables que tengan sentido para la situación estudiada.

Los sujetos S1 y S2 dan muestra de hacerse a un modelo mental de la forma de covariación para ello relacionan una razón de cambio a partir de los valores obtenidos del simulador por los sujetos, también se puede ver que el sujeto S3 reconoce la forma de covariación, pero éste la deduce a partir de la representación cartesiana.

Tabla 21. Evidencia del indicador tres, momento de representación y creación de un modelo

Sujeto nivel alto	Sujeto nivel medio	Sujeto nivel bajo
<p>D: <i>O sea, sí se comporta como la de los celulares.</i></p> <p>S1: <i>sí.</i></p> <p>D: <i>¿Bueno y por qué?</i></p> <p>S1: <i>eh ... porque podemos ver la relación, podemos ver la relación entre el voltaje y la corriente y vemos que si aumento uno el otro aumentará, pero aumenta constantemente, o sea como vimos anteriormente si aumento 2000 voltios aumento dos amperios, si aumento 4000 voltios aumento pues los 4 amperios.</i></p> <p><i>(Anexo C. Sujeto 1 ley de ohm evidencia 10_)</i></p>	<p>S2: <i>Cada 100 [voltios] aumenta 1.0 [Amperios]</i></p> <p>D: <i>A bueno ¿y con eso tú puedes encontrar la razón de cambio?</i></p> <p>S2: <i>sí.</i></p> <p><i>(Anexo C. Sujeto 2 ley de ohm evidencia 7_)</i></p>	<p>S3: <i>O sea, de pronto esta parte desde cero, pero es una covariación lineal.</i></p> <p>D: <i>ah o sea juega como para lo de la covariación lineal ¿por qué?</i></p> <p>S3: <i>porque es una línea recta.</i></p> <p>D: <i>A bueno, entonces ya no se parece a esta (a la de caída libre), ¿ésta (ley de ohm) se podrá modelar como hicimos con la de planes de celular?</i></p> <p>S3: <i>Sí.</i></p> <p><i>(Anexo C. Sujeto 3 ley de ohm evidencia 8_)</i></p>

La tabla 21 muestra la comparación entre los tres niveles respecto al indicador mencionado, Fuente: Autoría propia.

En este caso se observa que tanto el sujeto S1 y el S2 coinciden en que reconoce alguna similitud de la forma en la que covarían las magnitudes de esta situación con la de los planes de celulares. Se puede ver en la respuesta del sujeto S2 que sin necesidad de realizar ningún procedimiento adicional a la afirmación entregada, reconoce en el incremento de una variable a

partir del cambio de la otra magnitud la posibilidad de determinar la razón de cambio en la situación estudiada. De la misma forma y de manera más explícita el sujeto S1 muestra adicionalmente una forma de covariación entre las magnitudes. Al sujeto S3 no le es posible determinar la forma de covariación a partir de los valores correspondientes de las variables, pero sí la reconoce a partir de la gráfica obtenida en la representación cartesiana.

7.3.4. Indicador cuatro. Utiliza las representaciones tabulares y cartesianas para obtener valores nuevos.

Los sujetos S1 y S2 encuentran los nuevos valores solicitados a partir de la representación cartesiana realizada, mientras que el sujeto S3 no logra interpolar los valores.

Tabla 22. Evidencia del indicador cuatro, momento de recolección de datos

Sujeto nivel alto	Sujeto nivel medio	Sujeto nivel bajo
<p>S1: <i>Entonces si decimos que aquí tenemos 1.25 amperios que serían como más o menos por acá ehm... tendríamos que primero acabar de hacer la gráfica para mirar, entonces estamos relacionando 800 con 0.8 y 1000 con ...</i></p> <p>D: <i>¿Para 340 voltios?</i></p> <p>S1: <i>Ehm .. tendríamos 0,34 y para 4,6 amperios tocaría sacarla mucho (mostrando la representación cartesiana).</i> (Anexo C. Sujeto 1 ley de ohm evidencia 11_)</p>	<p>D: <i>Aquí usted está diciendo que para 100 tengo 1 amperio. Para 100 dos amperios, pusiste acá 120 ¿sí o no? ¿por qué 1.2?</i></p> <p>S2: <i>1.12</i></p> <p>D: <i>No no ..., no lo borres, me gustaría saber por qué pones 1.2 y no otro valor.</i></p> <p>S2: <i>Porque ya me acorde que era equivalente, o sea es constante ¿no?</i></p> <p>D: <i>Bueno entonces ...</i></p> <p>S2: <i>100 voltios 1 amperio, pues si son 120 entonces 1.2 amperios.</i></p> <p>D: <i>A bueno ¿y entonces 1.25 amperios?</i></p> <p>S2: <i>Pues 125 voltios. Entonces 3.4 y 460 (completa la tabla).</i> (Anexo C. Sujeto 2 ley de ohm evidencia 8_)</p>	<p>No hay respuesta.</p>

La tabla 22 muestra la comparación entre los tres niveles respecto al indicador mencionado, Fuente: Autoría propia.

Para los sujetos S1 y S2 no hubo ningún inconveniente para encontrar nuevos valores a partir de la representación cartesiana pues reconocen claramente la forma en la que covarían las magnitudes y además evidencian que saben de la razón de cambio para la situación, es claro esto por sus respuestas en apartados anteriores, para el sujeto S3 el proceso fue un poco más lento, pues fue necesario comprobar los valores de manera directa en el simulador y utilizar muchos valores más antes de solicitar la tabla nuevamente, tabla que finalmente logra completar.

Voltaje (V)	120	125	340	460	1200
Intensidad de corriente (A)	1,20	1.25	3,40	4.6	

Figura 6. Evidencia S3.

7.3.5. Indicador cinco. En el caso de una covariación lineal reconoce la constancia de la razón del cambio y hace cálculo de ésta.

Para S1 y S2 reconocer que para la situación de cambio es constante no hay ninguna dificultad, por otra parte, S3 a pesar de identificar que hay una covariación lineal le es muy complicado decir que la razón de cambio es constante, el sujeto S3 debe recurrir al simulador y realizar varias estimaciones desde lo numérico.

Tabla 23. Evidencia del indicador cinco, momento de recolección de datos

Sujeto nivel alto	Sujeto nivel medio	Sujeto nivel bajo
<p>S1: ehm ... aquí nos damos cuenta que, cada 100 voltios aumentamos 0,1 amperios.</p> <p>S1: Pues ahí podríamos utilizar una ecuación.</p> <p>D: Si una ecuación. ¿Cómo es la razón de</p>	<p>S2: Cada 100 aumenta 1.0</p> <p>D: A bueno ¿y con eso tú puedes encontrar la razón de cambio?</p> <p>S2: sí.</p>	<p>D: ¿Qué sucede con los incrementos de corriente ante incrementos de voltaje? Que por cada ...</p> <p>S3: ¿Voltaje?</p> <p>D: No, ¿qué incrementos estoy haciendo en el voltaje?, si yo hago un incremento de 100 voltios ¿cuánto se incrementa la corriente?</p>

Continuidad tabla 23

cambio? ¿la razón de cambio a qué es igual?

S1: Es igual al cambio de ... sería igual pues a la, la razón de cambio es igual al incremento del voltaje o sea

al cambio del voltaje sobre el incremento o el cambio de la corriente.

D: ¿Y ya tienes esos valores verdad? ¿entonces puedes determinar la razón de cambio?

S1: Sí, entonces ahí estaríamos diciendo que 1000, que la razón de cambio es igual a 100 voltios sobre los 0,1 amperios, entonces ahí estaríamos diciendo que la razón de cambio es igual ... (escribe un resultado).

(Anexo C. Sujeto 1 Ley de Ohm evidencia 14_)

(Anexo C. Sujeto 2 Ley de Ohm evidencia 7)

D: Póngale cuidado a lo que le estoy preguntando. Con esos valores que teníamos inicialmente, encontramos que la covariación entre el voltaje y la intensidad de

corriente era una covariación de ¿qué tipo?

S2: Constante, lineal.

D: Muy bien, listo y a partir de todo esto encontramos el valor de la razón de cambio que fue ...

S2: 100

(Anexo C. Sujeto 2 Ley de Ohm evidencia 11a_)

S3: 200.

D: La corriente, los amperios.

S3: 1

D: ¿y eso sucede siempre?

S3: Sí.

D: Muestrame, demuéstramelo.

(Sujeto 3 hace uso del simulador)

D: cuéntame.

S3: Va aumentando.

D: por ejemplo, Cuéntamelo, narrame.

S3: O sea porque si tienes aquí (señala la batería del simulador), aquí también sube (señala el amperímetro en el simulador).

D: O sea, si tengo cuánto? Si tengo ...

S3: Ay no!, no cambia.

D: No cambia, haber miremos, tu me estas diciendo que si incremento el voltaje en 100 los amperios incrementan en cuánto.

S3: En 1.

D: En un amperio.

S3: ah, o si sube porque digamos de 200 a 300.

D: ¿y la corriente subió?

S3: Sí

D: ¿Cuánto subió?

S3: 1.

D: 1 también. Para cualquier valor sube de a uno si yo voy subiendo de a 100.

(Anexo C. Sujeto 3 Ley de Ohm evidencia 10c.)

100V	200V	$\Delta V = 100$		$\Delta V = 200V$
↓	↓			$\Delta I = 2A$
2A	2A	$\Delta I = 2A$		

(Anexo C. Sujeto 3 Ley de Ohm evidencia 10b.)

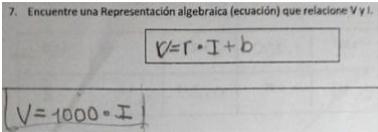
La tabla 23 muestra la comparación entre los tres niveles respecto al indicador mencionado, Fuente: Autoría propia.

En las respuestas de los sujetos S1 y S2 se puede ver que relacionan directamente una covariación lineal con una razón de cambio constante y para la situación estudiada (Ley de Ohm), logran estimar el valor de cambio a partir de los valores encontrados en el simulador sin necesidad de realizar ningún procedimiento adicional.

7.3.6. Indicador seis. Obtiene representaciones algebraicas que relaciona las variaciones de la variable independiente con la variable dependiente.

El sujeto S1 y S2 logran realizar la representación algebraica, el sujeto S3 no logra la representación algebraica de primer intento.

Tabla 24. Evidencia del indicador seis, momento de recolección de datos

Sujeto nivel alto	Sujeto nivel medio	Sujeto nivel bajo
<p>S1: Entonces el voltio, voltaje es igual a la razón de cambio por el incremento de la corriente eh ... pues más, más el valor inicial que serían ...</p> <p>D: ¿En ese caso hay valor inicial? ¿la gráfica parte de algún valor inicial?</p> <p>S1: Parte de c ... la gráfica parte de cero de un valor inicial cero.</p>	<p>D: Ahora qué vamos a hacer, hazme el favor de escribirme una ecuación que represente al voltaje y a la corriente, así como la que hicimos en el plan de celulares. ¿cómo quedaría?</p> <p>S2: Hallar el voltaje es igual a la relación de cambio que equivale a 100 por la corriente y eso es igual a ...</p> <p>D: El voltaje que vamos a hallar. Perfecto (docente lee lo que el estudiante escribe) Esta está escrita de manera general ¿sí o no? Aquí la razón de cambio ¿quién es?</p> <p>S2: 100</p> <p>D: Y en el circuito eléctrico, esa razón de cambio ¿a qué hace relación?</p> <p>S2: A la bombilla.</p> <p>D: A la bombilla muy bien, o sea escribe acá por favor.</p>	<p>D: Entonces, podrías tu encontrar una expresión algebraica o una ecuación para ese ...</p> <p>S3: Sí, la razón de cambio.</p> <p>D: Usando la razón de cambio, entonces ¿sería qué? ¿cómo sería la ecuación? La ecuación tiene que tener las variables que estudiamos ¿sí o no? Entonces sería el ... ¿qué?</p> <p>S3: el voltaje.</p> <p>D: el voltaje ¿entonces el voltaje a qué es igual? Voltaje (docente lee lo que la estudiante describe), No porque ese es el incremento, con los incrementos ¿determinamos qué?</p> <p>S3: Entonces sería v, sólo v.</p> <p>D: sólo v.</p> <p>S3: que esto vale 100</p> <p>D: que es la razón de cambio que encontramos, por ... (docente lee lo que la estudiante describe) la</p>
<p>7. Encuentre una Representación algebraica (ecuación) que relacione V y I:</p>  <p>(Anexo C. Sujeto 1 ley de ohm evidencia 12_)</p>		

Continuidad tabla 24

S2: *La resistencia de la bombilla es 100.*

otra variable que estamos estudiando que ¿cuál es?

D: *Muy bien, escíbeme la ecuación acá de este circuito. Es igual a qué (Sujeto escribe) a ¿100 por? Corriente (docente lee la ecuación escrita)*

D: *Muy bien, esa es la ecuación.*

7. Encuentre una Representación algebraica (ecuación) que relacione V y I.

$$V = r \cdot I = V$$

$$V = 100 \cdot I =$$

(Anexo C. Sujeto 2 ley de ohm evidencia 9_)

S3: *¿cero?*

D: *No ¿cuál es la otra variable que estamos estudiando?*

S3: *¡Ah! la intensidad.*

D: *La intensidad de la corriente, por i ¿y más cero? (docente lee lo que la estudiante describe) bueno, coloquemos más cero, que más cero es el punto de inicio de la gráfica, mira aquí vemos que tu gráfica inicio en cero y por eso ponemos este más cero.*

D: *O sea que, yo puedo ahora determinar cualquier de voltaje a partir de cualquier valor de corriente.*

S3: *y da igual.*

D: *y da igual, da lo mismo y mira (docente señala sobre el simulador) esto depende es por la resistencia, entonces si yo cambiara este valor de la resistencia, que pena no te lo había mostrado, pero yo puedo cambiar la resistencia (hace referencia a las posibilidades del simulador), entonces si yo cambiara el valor de la resistencia ¿cambia la forma en la que covarían?*

S3: *No.*

D: *No?, ¿sigue siendo lineal?*

S3: *Si.*

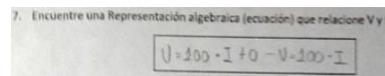
D: *¿Por qué?*

S3: *Porque empiezan desde un punto cero.*

D: *Empiezan desde un punto cero, listo ¿podrías determinar una razón de cambio?*

Continuidad tabla 24

S3: Sería la misma.



(Anexo C. Sujeto 3 ley de ohm evidencia 10 a.)

La tabla 24 muestra la comparación entre los tres niveles respecto al indicador mencionado, Fuente: Autoría propia.

En el desarrollo de este apartado se puede observar la importancia de reconocer las magnitudes que se encuentran relacionadas en la covariación, pues lograr identificar la correlación entre variables le permitió a los sujetos S1 y S2 encontrar la representación algebraica, es claro que el sujeto S3 logra encontrar la representación algebraica una vez comprende cómo se relacionan las magnitudes, eso se puede observar cuando encuentra el valor de la razón de cambio.

7.4.Momento de uso del modelo, de validación y comprobación del modelo

7.4.1. Indicador uno. Recolección de nuevos datos en situaciones homomórficas y verificación del modelo.

Los sujetos S2 y S3 logran identificar el modelo trabajado y determinan que la forma de covariación sigue siendo la misma pues relacionan el cambio planteado al valor de la razón de cambio mas no a la forma de covariación. El sujeto S1 de primera intención no logra encontrar la forma de covariación y requiere de nuevos datos para validar el modelo.

Tabla 25. Evidencia del indicador uno, Recolección de nuevos datos en situaciones homomórficas y verificación del modelo

Sujeto nivel alto	Sujeto nivel medio	Sujeto nivel bajo
D: Y entonces ahora si se cambia el valor de la resistencia ¿va a	D: 100 muy bien, sí yo cambio el valor de la resistencia.	D: sí yo cambio el valor de la resistencia.

 Continuidad tabla 25

cambiar la forma en que la covariación de I con respecto a V?

S1: Eh ... pues si porque si estamos diciendo que los voltios eh ... son pues iguales a la resistencia, o sea la razón de cambio, eh por la electricidad, entonces estaríamos diciendo que este valor cambia y si cambia estaríamos cambiando todo también tendríamos que cambiar la gráfica.

(Anexo C. Sujeto 1 Ley de Ohm evidencia 15_)

O sea de la bombilla, le pongo una bombilla más grande o más pequeña con una mayor o menor

resistencia, la forma en la que covaria el voltaje y la corriente serían iguales o serían distintas.

S2: iguales.

D: ¿Iguales? A bueno, entonces eso es lo que te estoy preguntando acá ¿y por qué?

S2: Pues porque de todas formas para hallar V es la razón por la corriente, no tiene nada que ver.

D: A bueno, o sea tú me estás diciendo que lo único que yo estaría cambiando es el valor de ...

S2: Sí de la ... de la ¿qué?, de la razón.

D: Es correcto.

(Anexo C. Sujeto 2 Ley de Ohm evidencia 11b_)

O sea de la bombilla, le pongo una bombilla más grande o más pequeña con una mayor o menor

resistencia, la forma en la que covaria el voltaje y la corriente, cambiaría o no cambiaría.

S3: O sea que si cambia!

D: Sí?, o sea ¿deja de ser una línea recta?

S3: No.

D: ¿sigue siendo una covariación lineal?

S3: Sí...

D: Pero ...

S3: va más inclinada.

(El sujeto traza una línea más inclinada al suponer que la resistencia de 100 cambia por una de 200)

(Anexo C. Sujeto 3 ley de ohm evidencia 11._)

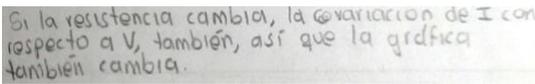
La tabla 25 muestra la comparación entre los tres niveles respecto al indicador mencionado, Fuente: Autoría propia.

Para el sujeto S1 fue necesario recolectar nuevos datos que le permitieran por lo menos realizar una representación cartesiana para así validar el modelo de la situación de Ley de Ohm, pero concluye que el valor que fue cambiado al plantear la variación del ejercicio (cambio en el valor de la resistencia), se refiere al valor de la razón de cambio y por ende la inclinación de la representación cartesiana.

7.4.2. Indicador dos. Uso del modelo para obtener información nueva sobre los datos.

Para los tres sujetos, el modelo es suficiente para obtener nuevos datos.

Tabla 26. Evidencia del indicador dos, Recolección de nuevos datos en situaciones homomórficas y verificación del modelo

Sujeto nivel alto	Sujeto nivel medio	Sujeto nivel bajo
<p>“si la resistencia cambia, la covariación de I con respecto a V, también, así que la gráfica también cambia”.</p>  <p>(Anexo C. Sujeto 1 Ley de Ohm evidencia 16_)</p>	<p>D: 100 muy bien, sí yo cambio el valor de la resistencia.</p> <p>O sea de la bombilla, le pongo una bombilla más grande o más pequeña con una mayor o menor resistencia, la forma en la que covaria el voltaje y la corriente serían iguales o serían distintas.</p> <p>S2: iguales.</p> <p>D: ¿Iguales? A bueno, entonces eso es lo que te estoy preguntando acá ¿y por qué?</p> <p>S2: Pues porque de todas formas para hallar V es la razón por la corriente, no tiene nada que ver.</p> <p>D: A bueno, o sea tú me estás diciendo que lo único que yo estaría cambiando es el valor de ...</p> <p>S2: Sí de la ... de la ¿qué?, de la razón.</p> <p>D: Es correcto.</p> <p>(Anexo C. Sujeto 2 Ley de Ohm evidencia 11b_)</p>	<p>D: Le voy a aumentar 100 más. ¿en cuánto me va a quedar la corriente?</p> <p>S3: En 150.</p> <p>D: Muy bien. Para este caso ¿cuándo la resistencia era de 200, cuando la resistencia era de 100 ¿la razón de cambio de cuánto era?</p> <p>S3: 100</p> <p>D: 100, o sea que por cada 100 aumentos, 100 voltios que yo aumento en el voltaje, la corriente se aumentaba cuánto...</p> <p>S3: 1.</p> <p>D: 1, y esa es la forma en la que covaria las dos magnitudes.</p> <p>(Anexo C. Sujeto 3 Ley de Ohm evidencia 12_)</p>

La tabla 26 muestra la comparación entre los tres niveles respecto al indicador mencionado, Fuente: Autoría propia.

Se puede observar que los sujetos no poseen ningún inconveniente a la hora de usar el modelo establecido para la situación estudiada, se evidencian representaciones estáticas en el momento de relacionar la covariación a partir de representaciones cartesianas y algebraicas.

A partir de lo que se pudo evidenciar con respecto a las diferentes representaciones hechas

por los estudiantes a medida que daban cuenta tanto de la forma en la que covarían las variables intervinientes para cada situación, como de las representaciones semióticas empleadas en cada caso, es importante resaltar la importancia de la identificación de las magnitudes para dar cuenta de la correlación existente entre ellas y que generó dificultades en una de los sujetos para tal fin.

Cuando el sujeto S1 abordó las diferentes situaciones, sus representaciones y respuestas con respecto a la forma en la que covarían las magnitudes estudiadas las respuestas se caracterizaron por el uso de los criterios fundamentados en cada representación semiótica descubierta en el desarrollo de las guías trabajadas, constantemente sus respuestas usaban expresiones como: “Como en el caso del plan de celulares” o como “se parece a...”, y nuevamente la correlación entre las magnitudes estudiadas argumentaban las respuestas otorgadas.

Así bien, para el sujeto S1 el trabajo previo de situaciones de covariación ayudaban con las respuestas a situaciones nuevas, para el sujeto S2 sus avances mostraban similitudes tanto en el uso de las representaciones cartesianas como en el uso del criterio de la razón de cambio en el momento de mostrar la forma en la que covarían las magnitudes estudiadas.

Por otra parte, el sujeto S3, mostró dificultades asociadas a la imposibilidad de identificar la relación existente entre las magnitudes y más aún cuando debía realizar la cuantificación cualitativa entre las variables, situación que dictaminó la naturaleza de sus respuestas y la manera de encontrar la forma de covariación estudiada en cada caso.

Es importante resaltar que para las tres sujetos y en general los estudiantes, encuentran una facilidad para usar representaciones cartesianas para encontrar la forma en la que covarían las magnitudes estudiadas, situación que se hace muy evidente sobretodo en el sujeto S3.

Cuando los sujetos enfrentaron tareas que requerían tomar datos, una particularidad

consistente en los tres mostró la organización de los datos, en donde inicialmente en las primeras situaciones estudiadas no tenían en cuenta los incrementos de una variable y su relación con la otra magnitud como un elemento propio de la tarea a realizar, situación que cambió en los sujetos S1 y S2 cuando para situaciones homomórficas la forma en que los nuevos datos eran organizados daban cuenta de la importancia para ellos la forma en que los incrementos de una variables “afectaban” la otra, razón por la cual no muestran dificultades asociadas en el cálculo de la razón de cambio y por ende las representaciones algebraicas determinadas en cada situación no presentaron dificultades más allá del análisis necesario en el momento de la captación de la variación.

8. Conclusiones

La presente investigación planteó como objetivo: “Describir los procesos de modelación matemática en situaciones de covariación lineal que siguen los estudiantes de ciclo V a partir de la implementación de una secuencia didáctica”, y a partir de los análisis realizados para las situaciones propuestas en cada uno de los indicadores de la categorización planteada, en el presente capítulo se enunciarán las conclusiones que surgen del proceso de desarrollo de la investigación.

8.1. Momento de captación de la variación

En el primer momento del proceso de modelación, los sujetos fueron remitidos directamente a estudiar situaciones donde la naturaleza de la forma en que eran presentadas o trabajadas dichas situaciones, el docente debía exponer las magnitudes con las cuales el estudio tenía caso. Sin embargo, en el momento de determinar que magnitudes estudiadas permanecían constantes y cuales variaban, los tres sujetos lograron encontrar las magnitudes intervinientes en el estudio.

En el momento de identificar la correlación entre las magnitudes estudiadas los sujetos de nivel alto y medio (S1 y S2), logran establecer cuál de las magnitudes es la variable dependiente y cuál es la independiente, sin embargo, el sujeto de nivel bajo (S3), presenta dificultades en las diferentes pruebas para poder realizar dicha identificación, situación que no es ajena a los demás estudiantes del salón de clases, que de la misma forma y de primera intención no les es posible realizar dicha tarea sino hasta la socialización de cada pregunta. Esta manera de establecer la correlación entre las magnitudes surge desde factores que influyen su entorno y no desde análisis propios de las matemáticas sino más bien desde una lógica que rige desde lo cotidiano, lo

cultural y lo social.

Otro indicador clave empleado fue identificar si los estudiantes lograban cuantificar cualitativamente la correlación entre las magnitudes estudiadas, lo que presentó una obvia dificultad en el sujeto S3, que, durante las diferentes situaciones abordadas, su insuficiencia en una respuesta explícita en determinar cuál magnitud dependía de cuál, conlleva a su respuesta a situaciones fuera de estudio incluso a emplear magnitudes que no están relacionadas con la situación.

8.2. Momento de recolección de datos

En esta parte del proceso de modelación, puede decirse que fue la que menor dificultad que se presentó en los estudiantes fue encontrar valores y organizarlos, son tareas que les resultan “fáciles”, adicionalmente la representación tabular de las magnitudes además de permitir cuantificar el fenómeno estudiado, le permite a los estudiantes evidenciar las correlaciones existentes y lograr cuantificar cualitativamente las magnitudes estudiadas, situación que sucedió en las diferentes actividades propuestas y sobre todo en estudiantes con un nivel similar al S3.

8.3. Momento de representación y creación de un modelo

En el momento de la recreación de un modelo los estudiantes tanto de nivel alto medio y bajo logran identificar la forma en la que covarían las magnitudes estudiadas, sin embargo, las representaciones empleadas para determinar dicha covariación se adhieren a las estructuras mentales desarrolladas a partir de la forma en la que captan la variación, es así que los estudiantes de nivel bajo emplean las representaciones cartesianas como su herramienta principal en el momento de determinar la forma en la que se correlacionan las magnitudes estudiadas, por otro lado, los estudiantes de nivel medio y bajo emplean el análisis realizado ante los valores

obtenidos en la razón de cambio y es así que las representaciones dinámicas evidentes en el proceso de los dos niveles tan altos como el bajo les permiten enfrentarse en situaciones homomórficas para validar el modelo y encontrar nuevos valores ante las diferentes variaciones planteadas.

8.4. Momento de uso del modelo, de validación y comprobación del modelo

Durante el momento en que el estudiante debió realizar representaciones a partir de la modificación de las condiciones entregadas para el estudio de la situación, fue evidente que empleaba las representaciones que se le facilitaron durante el análisis inicial, nuevamente se hacen presentes los tipos de imágenes usadas por los estudiantes para concluir dando una representación algebraica y así validar el modelo con el cual estuvo describiendo la correlación existente entre las magnitudes en estudio.

8.5. De las generalidades durante el proceso de modelación

Cabe resaltar que la forma en la que un estudiante aborda un estudio de una situación determinada depende de las estructuras mentales existentes y cómo logra articular las diferentes representaciones tanto, tabulares, cartesianas y algebraicas para convalidar la correlación existente entre las variables estudiadas y lograr evidenciar en esta investigación cómo una covariación lineal es construida; como hallazgo clave en la presente investigación fue lograr encontrar que aquellos estudiantes que encontraron dificultades en cuantificar cualitativamente la correlación existente entre las magnitudes, solamente lograban describir la covariación lineal desde las representaciones cartesianas, además de mostrar una dificultad en relacionar la razón de cambio como determinante para encontrar la forma de covariación.

Principalmente los estudiantes usaron la representación cartesiana para describir la

covariación lineal, sin embargo, al profundizar en la determinación de la razón de cambio y su relación directa con las características de cada situación, no todos los estudiantes lograron realizar dicha caracterización.

A partir del análisis de las respuestas otorgadas por los estudiantes, se puede observar que dichas respuestas encuentran su génesis en las ventajas otorgadas por los simuladores usados en el planteamiento de las situaciones de covariación, esta ventaja subyace en la forma en que se manipulan los datos hacen más clara la dependencia entre las magnitudes, cabe resaltar que hallazgos similares son mencionados en otras investigaciones cuyas secuencias didácticas guardan similitudes a las del presente trabajo de investigación y así, de acuerdo con Gómez (2015) “El planteamiento de tareas y el uso de las simulaciones permitieron lograr el desarrollo del pensamiento variacional” (p. 84), ahora bien, cabe mencionar que las 3 tareas propuestas en este trabajo de profundización permitieron describir, analizar e interpretar posibles características de este pensamiento.

Como resultado particularmente interesante dentro de la investigación y la comparación de las respuestas obtenidas por los estudiantes en las diferentes tareas, el generar una caracterización de la categorización de las situaciones consideradas para el desarrollo del presente trabajo de investigación y que se relaciona con situaciones que involucran funciones dinámicas, es decir, la coordinación de dos magnitudes que covarían, se logran encontrar puntualmente en los estudiantes en qué momento del proceso de modelación sus dificultades les impide consolidar el objeto matemático estudiado.

Durante el desarrollo de la presente investigación, las dinámicas grupales en el momento de abordar las situaciones planteadas, mostraron una manera de validar sus argumentos individuales y afinar las diferentes representaciones tanto tabulares, cartesianas y algebraicas que los

estudiantes emplearon al momento de construir la forma de covariación existente entre las magnitudes estudiadas en cada situación, resultado y apreciación coincidente que según Londoño y Muñoz (2011), en los resultados de su investigación resalta: “En definitiva, la modelación matemática como alternativa para construir nociones y definiciones con sentido, requiere de un conjunto de condiciones a nivel personal, social y curricular para su desarrollo o implementación en el aula de clase” (p. 187).

Uno de los hallazgos particulares de la investigación es la aceptación por parte del grupo en las tareas propuestas para cada situación, las ventajas otorgadas en el momento de utilizar simuladores y sobretodo casos enmarcados en situaciones de un contexto tangible como en caso de los planes de celular, favoreció la manera en que los estudiantes planteaban sus ideas y respuestas, generando formas de contestar a las preguntas que les permitieran identificar sus aciertos y dificultades con relativa facilidad y poca intervención por parte de profesor.

En contraparte, una de la limitantes más recurrentes en las situaciones estudiadas se encontraron cuando los estudiantes debían identificar las variables e incluso la cuantificación cualitativa de ellas, puesto que en el momento de socializar la naturaleza de la situación o el funcionamiento del simulador, era necesario la intervención del profesor en donde se les decía de forma explícita cuales eran las magnitudes estudiadas y el funcionamiento del simulador que mostraba la correlación existente entre ellas.

Bibliografía

- Arrieta, Jaime y Diaz, Leonora. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 19-48.
- Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1996). *Funciones y Gráficas*. (Vol. 26). Madrid, España: Síntesis.
- Bernal, César A. (2010). *Metodología de la Investigación*. Tercera edición. Pearson Educación: Colombia.
- Biembengut, María, y Hein, Nelson. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Redalyc: Santillana*, 16(2), 105-125.
- Brito-Vallina, María Lucía, Alemán-Romero, Isidro, Fraga-Guerra, Elena, Paragarcía, José Luís, & Arias-de Tapia, Ruth Irene. (2011). Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería Mecánica*, 14(2), 129-139. Recuperado en 28 de marzo de 2018, de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1815-59442011000200005&lng=es&tlng=es.
- Carlson, M. Jacobs, S. Coe, E. Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista Ema*. 8(2), 121-156.
- Christiansen, Iben. (1999). Reflexiones críticas sobre modelos matemáticos en la clase: ¿sueño o realidad?. *Revista Ema*. 5(1), 29-50.
- Duval, Raymon. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Universidad de Valle, Santiago de Cali Colombia.
- D'Ambrosio, Ubitaran. (2009) Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, Historical And Political Dimensions. *Journal of Mathematical Modelling and Application* (Maria Salett Biembengut) 1(1), 89-98.
- Erbas, Ayhan Kürsat, Mahmut Kertil, Bülent Çetinkaya, Erdinç Çakiroglu, Cengiz Alacaci, y Sinem Bas. (2014). Mathematical Modeling in Mathematics Education: Basic Concepts and Approaches. *Educational Sciences: Theory & Practice*. edam (Educational Consultancy and Research Center), 14(4), 1621-1627.
- Fiol, Luisa y Fortunuy Josep M. (2000). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. (Vol. 26). Madrid, España: Síntesis.
- Gómez Ospina, Oscar Mauricio (2015). *Desarrollo de Pensamiento Variacional en estudiantes de grado noveno*. Bogotá Colombia, Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

- Hitt, F., y Quiroz, S. (2017). Aprendizaje de la modelación matemática en un medio sociocultural. *Revista Colombia de Educación*, (73), 153-177.
- Londoño, Sandra y Muñoz, Lina. (2011). *La modelación matemática: un proceso para la construcción de relaciones lineales entre dos variables* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín.
- MEN, Colombia. (2004). Pensamiento variacional y tecnologías computacionales. Ministerio de Educación Nacional.
- MEN, Colombia. (2006). Estándares Básicos de Competencias. Ministerio de Educación Nacional, Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, 184.
- Montoya, Obando, Didier, Jorge, y Sánchez, Jhon Fredy. (2014). *Construcción de un modelo matemático en un contexto cafetero* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Oziegbe, Eric. (2014). *Leraning mathematics through mathematical modelling: A study of secondary school students in Nigeria* (master`s thesis). University of Agder, Kristiansand y Grimstad, Noruega.
- Posada Balvin, F. A., & Villa Ochoa, J. A. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva Variacional* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Stewart, James, Lothar Redlin y Saleem Watson. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*. Sexta Edición. México: Cengage Learning.
- Vasco, Carlos E. (1995). *La teoría general de proceso y sistemas: Una propuesta semiológica, ontológica, y gnoseológica para la ciencia, la educación y el desarrollo*. Bogotá, Colombia: Misión ciencia, educación y desarrollo.
- Vasco, Carlos E. (2002). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías*. Tecnologías Computacionales En El Currículo De Matemáticas, Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, Colombia.
- Vasco, Carlos E. (2010). Pensamiento variacional y modelación matemática. Editado por Universidad del valle. Cali, Valle.
- Villa Ochoa, Jhony A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, (19), 63-85.
- Villa Ochoa, Jhony A. y Ruiz Vahos, Héctor M. (2009) Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (27), 1-21.

ANEXOS

ANEXO A: PRUEBA INICIAL

La figura muestra un recipiente que se está llenando. El líquido cae de una llave que se abre según se desee, pero durante el llenado no se modifica la abertura de la llave esto con el fin de permitir pasar la misma cantidad de líquido cada segundo.



A	Altura del nivel de agua a medida que se va llenando el recipiente
B	Longitud del chorro de agua (la medida que va desde la boca del grifo o la llave hasta que desaparece porque hace contacto con el líquido que ya está en el recipiente)
C	Diámetro del recipiente
D	Cantidad de agua a medida que se va llenando el recipiente
E	Altura del recipiente
F	Tiempo transcurrido mientras va cayendo el líquido en el recipiente

Utilice la información proporcionada para contestar las preguntas que se formulan a continuación.

NOMBRE _____ CURSO _____

1. En la tabla aparecen las letras A, B, C, D, E, F. En cada caso diga si los valores que representa cada letra varían o permanecen constantes mientras el llenado del recipiente. Justifique cada respuesta dada.

Valores representados por	Escriba si cambian o no los valores de la medida	Justifique su respuesta
A (la altura del nivel de agua)		
B (longitud del chorro de agua)		
C (diámetro del recipiente)		
D (cantidad de agua)		
E (la altura del recipiente)		
F (El tiempo transcurrido durante el llenado)		

2. A continuación, se dan algunos pares de medidas, para cada caso diga si los valores de alguna de las medidas cambian a medida que cambian los valores de la otra medida, o si por el contrario los valores de estas medidas no se relacionan entre sí. Justifique la respuesta.

Valores representados por	Escriba si una medida cambia o no con los cambios de la otra medida	Justifique su respuesta
A (altura del nivel de agua) y F (tiempo transcurrido)		
A (altura del nivel de agua) y C (diámetro del recipiente)		
A (altura del nivel de agua y E (altura del recipiente)		
D (cantidad de agua) y C (diámetro del recipiente)		
C (diámetro del recipiente) y E (altura del recipiente)		
B (longitud del chorro) y D (cantidad de agua)		
E (altura del recipiente) y F tiempo transcurrido)		

3. A continuación se presentan tres tablas en las que se escriben valores de **A** (altura del nivel de agua) y **F** (tiempo transcurrido), escoja la tabla que representa los valores de A y F que corresponden a una posible experiencia de llenado de un recipiente que tiene la misma forma del que se mostró en la figura inicial. En cada caso escriba Si o No según corresponda y justifique su respuesta.

3.1.

Valores de A (dado en cm)	1,2	2,5	3,9	5,4	7,0
Valores de F (dado en Segundos)	1	2	3	4	5

Justifique su respuesta:

3.2.

Valores de A (dado en cm)	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0
Valores de F (dado en Segundos)	2	4	6	8	10

Justifique su respuesta:

3.3

Valores de D (dado en ml)	1,8	1,6	1,4	1,2	1,0
Valores de F (dado en Seg)	1	2	3	4	5

Justifique su respuesta:

4. En un experimento que no tiene nada que ver con la situación de llenado que se viene estudiando se toman los datos que aparecen en las tablas, a partir de estos datos observe cómo varían las medidas y complete la tabla con los valores que considera toman las medidas a partir de los valores que se dan.

4.1.

Valores de W (dado en cm)	4	8	12		
Valores de M (dado en cm)	56	52	48		

4.2.

Valores de X (dado en cm)	36	72			
Valores de Y (dado en Segundos)	4	8			

5. Si se sabe que la medida **B** (la longitud del chorro de agua) en un momento dado mide 26 cm y que el valor de **A** (altura de nivel del agua) correspondiente es 34 cm, ¿cuánto medirá el valor de **A** cuando se reduce a la mitad el valor de **B**? Justifique su respuesta

6. Juana realiza dos observaciones en dos momentos diferentes del proceso de llenado, las medidas que reporta en cada caso son:
 Observación 1. La medida **A** (la altura del nivel de agua) es 15 cm
 Observación 2. El tiempo transcurrido es 3 veces la cantidad de segundos que habían transcurrido al hacer la primera observación.
 ¿Cuánto medirá la altura del agua en la segunda observación? Justifique su respuesta

7. Utilice la tabla para contestar las preguntas 7.1 y 7.2

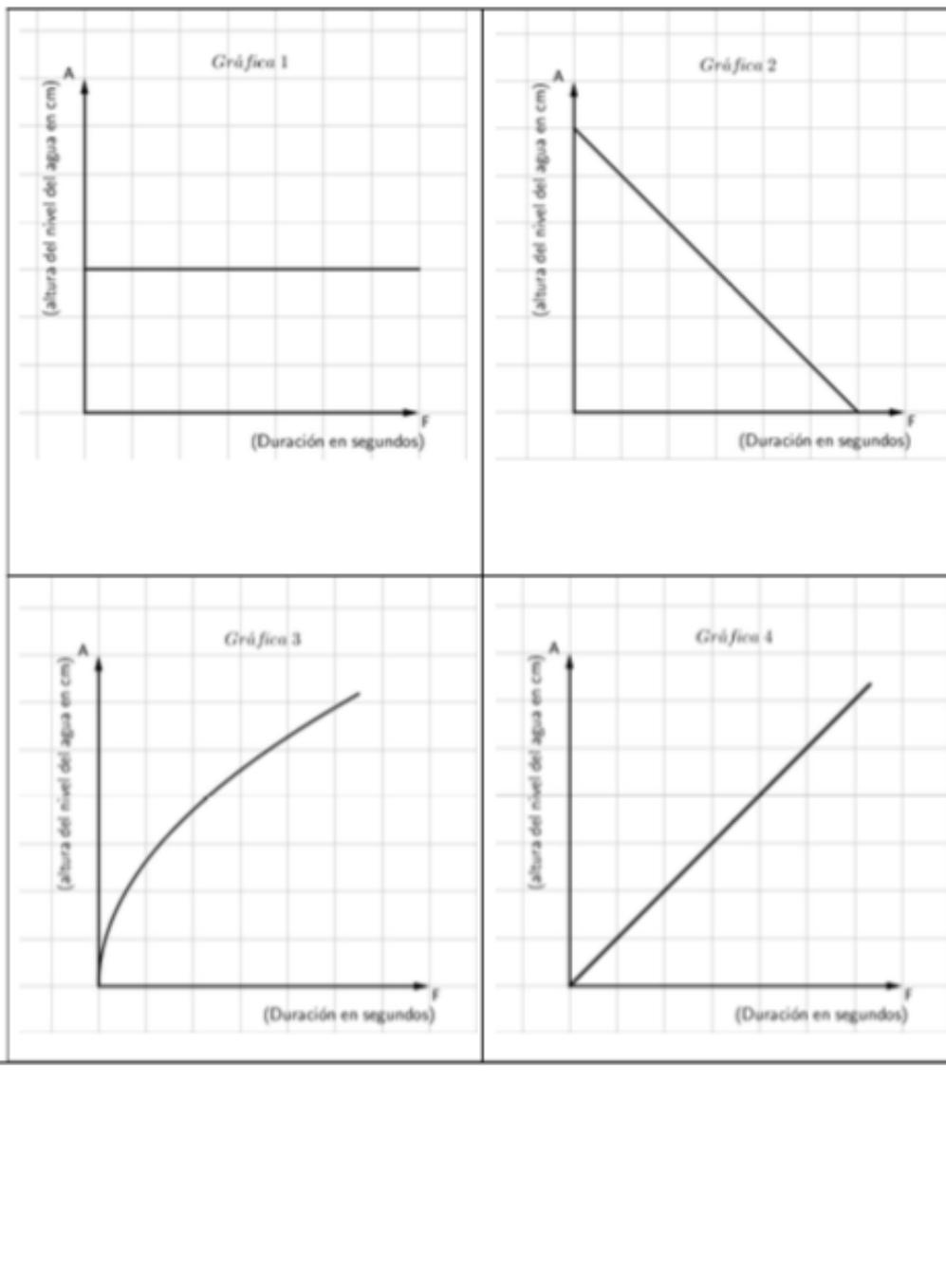
Valores de A (dado en cm)	2,2	4,4	6,6	8,8	11,0
Valores de F (dado en Seg)	2	4	6	8	10

7.1. ¿Qué altura alcanza el nivel del agua cuando han transcurrido 4 segundos de llenado?

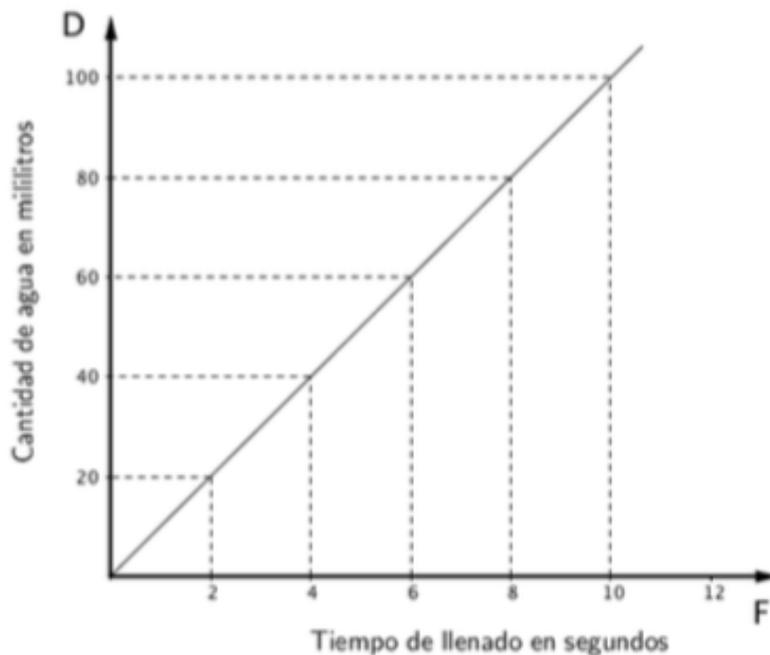
7.2. ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que el nivel del agua alcance 5,5 cm de altura? Escriba el procedimiento seguido

8. De las cuatro gráficas, seleccione la que considera que representa correctamente la forma como cambian los valores de la medida **A** (altura del nivel del líquido) a medida que cambia **F** (el tiempo de llenado). Justifique su

r
e
s
p
u
e
s
t
a



9. La gráfica representa los valores que va tomando **D** (cantidad de agua) a medida que cambian los valores de **F** (al tiempo de llenado). Utilice la gráfica para contestar las preguntas 9.1 y 9.2

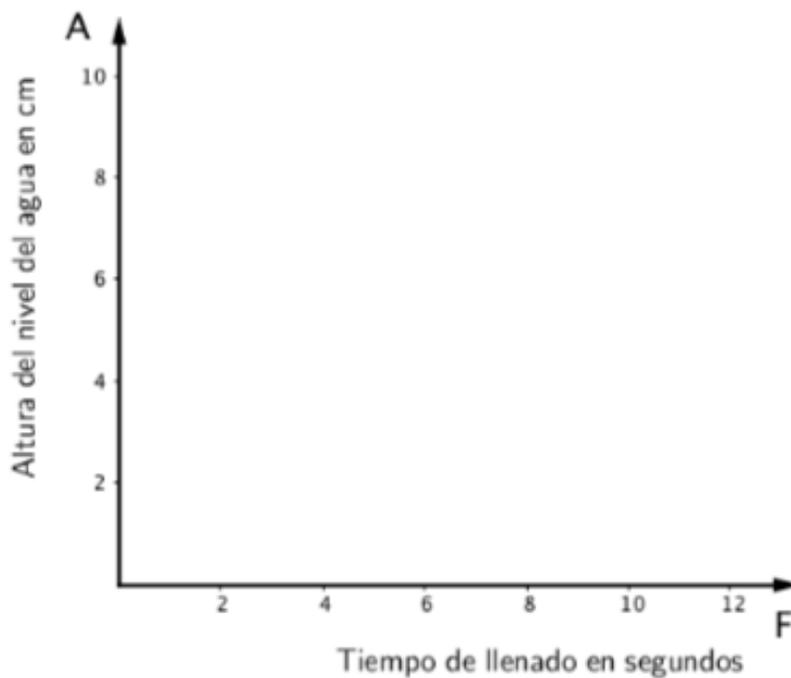


- 9.1. ¿Qué cantidad de agua hay en el recipiente cuando han transcurrido 4 segundos de llenado?

- 9.2. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para en el recipiente haya 70 mililitros de agua?

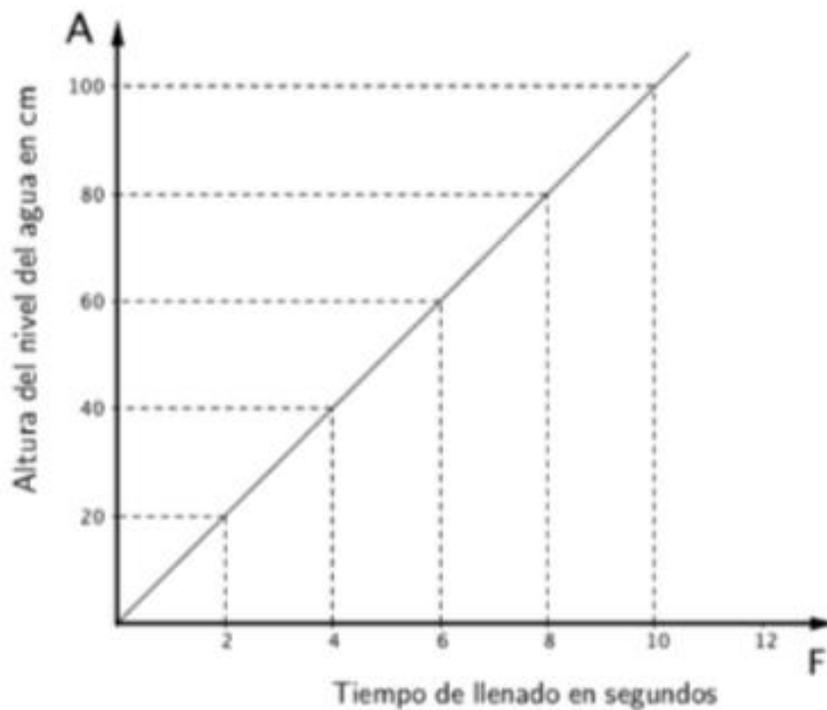
10. Represente en la gráfica los valores de la tabla y trace la gráfica

Valores de A (dado en cm)	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0
Valores de F (dado en Segundos)	2	4	6	8	10



11. ¿Qué pasa con la forma como cambia **A (Altura del nivel del agua)** a medida que cambia **F (tiempo de llenado)** si se utilizan recipientes más delgados o más gruesos?

12. La gráfica muestra la forma como van cambiando los valores de **A** (Nivel del agua) a medida que cambian los valores de **F** (el tiempo de llenado), en ese mismo dibujo trace otra gráfica que represente la misma variación de los valores de **A** con relación a **F** pero si se trata de llenar un recipiente más delgado que el que se ha venido utilizando. Justifique su respuesta.



Situación 1

GUIA No 1 INDIVIDUAL

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

SESIÓN Nº 2

La compañía de telefonía **Hello Colombia** tiene la siguiente publicidad para los nuevos planes telefónicos.

PLAN 1	PLAN 2
Plan 2.0 : Cargo básico mensual: \$2000 Valor por minuto de voz: \$100 Redes sociales ilimitadas.	Plan 6.0 : Cargo básico mensual: \$6000 Valor por minuto de voz: \$50 Redes sociales ilimitadas.

- 1) Si usted estima que su consumo mensual es más o menos de 60 minutos, ¿cuál de los dos planes escogería? : Justifique su respuesta.

- 2) Si usted estima que su consumo mensual es más o menos de 100 minutos, ¿cuál de los dos planes escogería? : Justifique su respuesta.

- 3) Habrá algún valor de la cantidad de minutos mensuales de consumo en el que se pueda decirse que si se consumen menos minutos que ese valor conviene un plan y si se consume más que es valor conviene el otro plan. Justifique su respuesta.

GUIA No 1 GRUPAL

Compartan las respuestas que dieron a las preguntas de la guía anterior, llenen las tablas que se presentan en cada caso, describan las semejanzas y diferencias de su respuestas. Y escriban el espacio correspondiente la respuesta y el que acuerdan entre ustedes y justifiquen

1) Relativo a la pregunta 1 De la guía individual

ESTUDIANTE 1.	ESTUDIANTE 2.	ESTUDIANTE 3.	ESTUDIANTE 4.
Plan seleccionado			
Justificación			
Respuesta Unificada:			

2) Relativo a la pregunta 2 De la guía individual

ESTUDIANTE 1.	ESTUDIANTE 2.	ESTUDIANTE 3.	ESTUDIANTE 4.
Plan seleccionado			
Justificación			
Respuesta Unificada:			

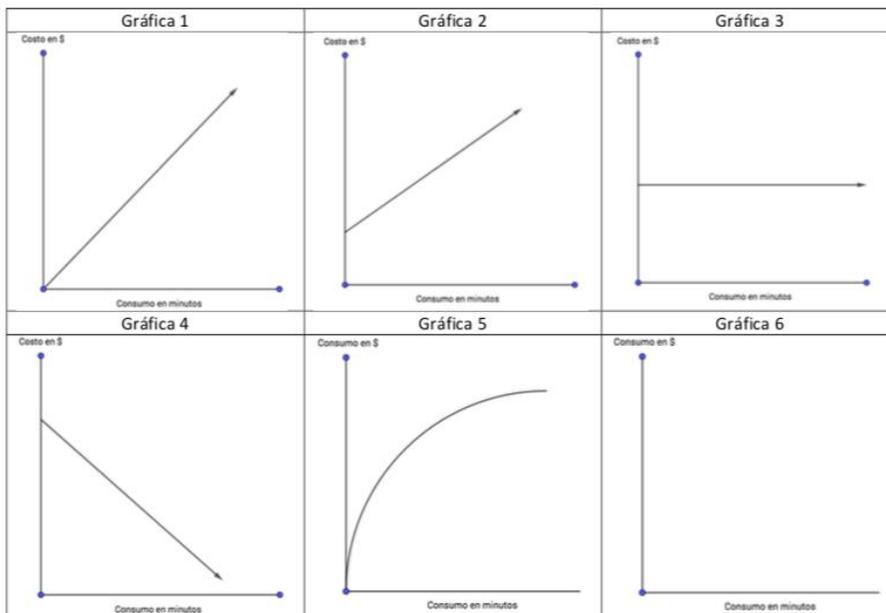
3) Relativo a la pregunta 1 De la guía individual

ESTUDIANTE 1.	ESTUDIANTE 2.	ESTUDIANTE 3.	ESTUDIANTE 4.
Plan seleccionado			
Justificación			
Respuesta Unificada:			

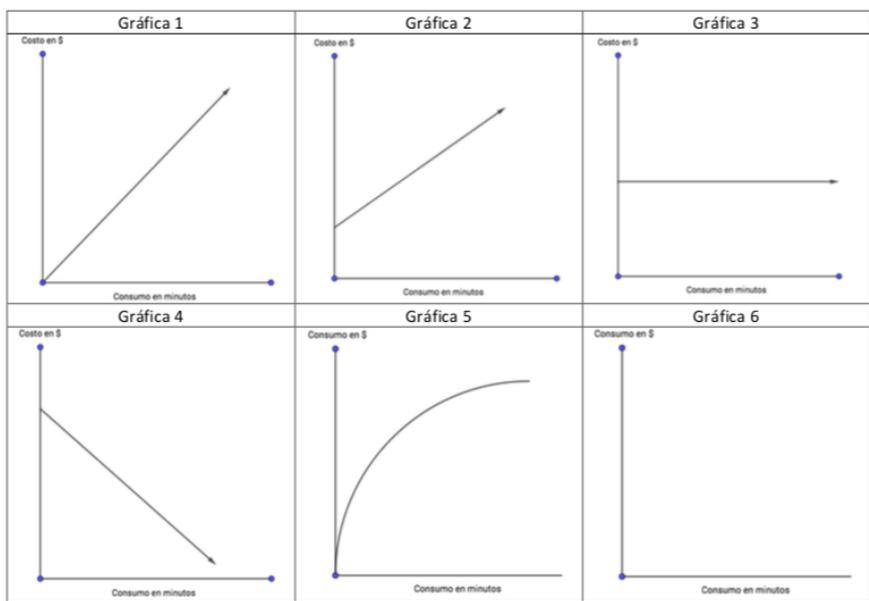
GUIA No 2 INDIVIDUAL

1. Cuáles de las siguientes gráficas representa la forma como varía el costo en \$ con relación al consumo en \$ de cada uno de los planes. Si considera que ninguna de las gráficas representa correctamente estas formas de variación, en el espacio de la gráfica número 6 realice la gráfica que considere pertinente.

GRAFICAS DE LA VARIACIÓN DEL COSTO EN \$ CON RELACIÓN A LA CANTIDAD DE MINUTOS CONSUMIDOS. PLAN No 1



GRAFICAS DE LA VARIACIÓN DEL COSTO EN \$ CON RELACIÓN A LA CANTIDAD DE MINUTOS CONSUMIDOS. PLAN No 2.



¡UIA No 2 GRUPAL

- 1) Compartan las respuestas dadas a las dos preguntas del trabajo individual y llene la tabla

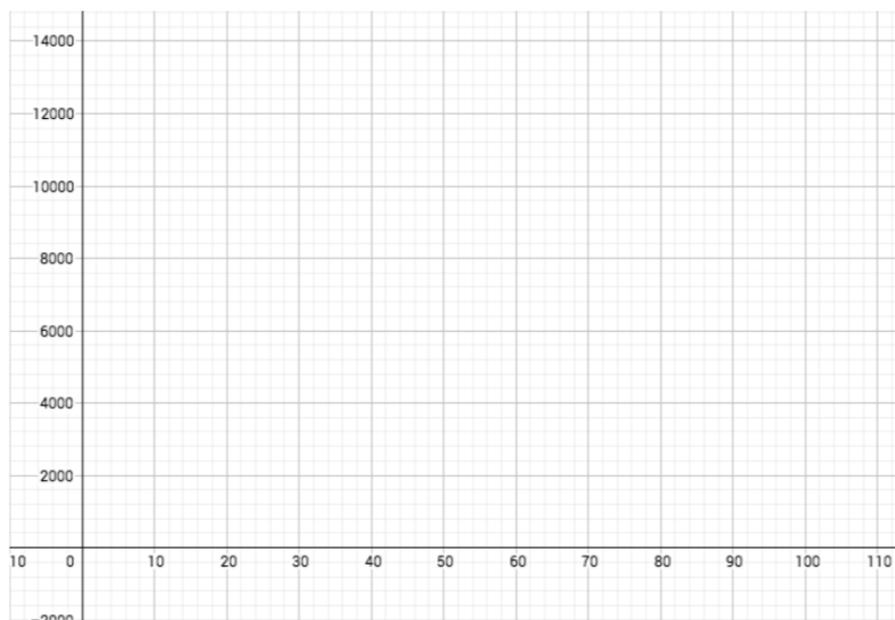
Relativo a la selección de la gráfica correcta de la representación de la variación del costo con relación al consumo en minutos en el PLAN No 1

ESTUDIANTE 1.	ESTUDIANTE 2.	ESTUDIANTE 3.	ESTUDIANTE 4.
Plan seleccionado			
Justificación			
Respuesta Unificada:			

2. Relativo a la selección de la gráfica correcta de la representación de la variación del costo con relación al consumo en minutos en el PLAN No 2

ESTUDIANTE 1.	ESTUDIANTE 2.	ESTUDIANTE 3.	ESTUDIANTE 4.
Plan seleccionado			
Justificación			
Respuesta Unificada:			

Elaboren en un mismo sistema de coordenadas las gráficas que representan las variaciones del costo vs la cantidad de minutos consumidos



- 4 El gráfico les da información para contestar la pregunta que se hizo al iniciar la sesión anterior

Habrá algún valor de la cantidad de minutos mensuales de consumo en el que se pueda decirse que si se consumen menos minutos que ese valor conviene un plan y si se consume más que es valor conviene el otro plan. Justifique su respuesta.

SESION No 3. GRUPAL

PLAN 1 (Plan 2.0)

1. Use la gráfica del plan No 1 y conteste la preguntas

- 1.1. ¿Cuánto será el costo en pesos de un consumo de 50 minutos?

- 1.2. ¿Cuánto será el costo en pesos de un consumo de 35 minutos?

- 1.3. ¿Cuánto será el costo en pesos de un consumo de 41 minutos?

- 1.4. En la siguiente tabla se analizan los incrementos que se producen en los valores del consumo en \$ para incrementos en los valores de minutos T. Completar la tabla según el ejemplo dado.

Valor inicial T	Valor final T	Incremento en el consumo de minutos T (ΔT)	Valor inicial \$	Valor final \$	Incremento en \$ (ΔS)	Razón de cambio ($\Delta S / \Delta T$)
0	10	10	2000	3000	1000	
10	20					
20	30					
30	40					

1.5. Completar la tabla para la misma situación para los siguientes valores.

Valor inicial T	Valor final T	Incremento en el consumo de minutos T (ΔT)	Valor inicial \$	Valor final \$	Incremento en \$ ($\Delta \$$)	Razón de cambio ($\Delta \$$) / (ΔT)
0	15	15	2000	3500	1500	
15	30					
30	45					
45	60					

1.6. ¿Qué puede decir con respecto a los valores de la razón de cambio en cada una de las dos tablas anteriores?

1.7. ¿Establecen alguna relación en la razón de cambio en ambas tablas como alguna característica del plan .?

PLAN 2 (Plan 6.0)

1. Use la gráfica del plan No 2 y conteste las preguntas

1.1. ¿Cuánto será el costo en pesos de un consumo de 50 minutos?

1.2. ¿Cuánto será el costo en pesos de un consumo de 35 minutos?

1.3. ¿Cuánto será el costo en pesos de un consumo de 41 minutos?

1.4. En la siguiente tabla se analizan los incrementos que se producen en los valores del consumo en \$ para incrementos en los valores de minutos T. Completar la tabla según el ejemplo dado.

Valor inicial T	Valor final T	Incremento en el consumo de minutos T (ΔT)	Valor inicial \$	Valor final \$	Incremento en \$ ($\Delta \$$)	Razón de cambio ($\Delta \$$) / (ΔT)
0	10	10	6000	6500	500	
10	20					
20	30					
30	40					

1.5. Completar la tabla para la misma situación para los siguientes valores.

Valor inicial T	Valor final T	Incremento en el consumo de minutos T (ΔT)	Valor inicial \$	Valor final \$	Incremento en \$ ($\Delta \$$)	Razón de cambio ($\Delta \$$) / (ΔT)
0	15	15	6000	6750	750	
15	30					
30	45					
45	60					

1.6. ¿Qué puede decir con respecto a los valores de la razón de cambio en cada una de las dos tablas anteriores?

1.7. ¿Establecen alguna relación en la razón de cambio en ambas tablas como alguna característica del plan .?

Guía 4. REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA. (Individual)

Teniendo en cuenta los valores encontrados en las tablas 1.4 y 1.5 para los planes de celular, se puede decir entonces que la razón de cambio entre las variables relacionadas es:

$$\frac{\Delta \$}{\Delta T} = \frac{\$_{Final} - \$_{Inicial}}{T_{Final} - T_{Inicial}}$$

Donde ($\Delta \$$) es el incremento en costo en pesos y (ΔT) es el incremento en el consumo de minutos.

1. Usando la expresión que representa la razón de cambio, complete las tablas según sea el caso:

1.1. Complete la siguiente tabla para una persona que está suscrita al Plan 1. Anexe los procedimientos realizados para completar los valores de la tabla.

$\$_{Final}$	$\$_{Inicial}$	T_{Final}	$T_{Inicial}$
4500	3000		10
7800		58	7
5000	2300	30	

2. Usando la expresión que representa la razón de cambio, conteste las siguientes preguntas colocando en frente el procedimiento realizado para llegar a la respuesta:

2.1. Complete la siguiente tabla para una persona que está suscrita al Plan 2. Anexe los procedimientos realizados para completar los valores de la tabla.

$\$_{Final}$	$\$_{Inicial}$	T_{Final}	$T_{Inicial}$
18500	8000		40
7800		36	7
8900	7150	58	

3. Una persona que usa el plan 1, debe llenar la siguiente tabla de valores con respecto a las características y condiciones que tiene su plan al momento de cobrar por su uso.

Minutos	Operación realizada	Resultado (\$)
0		
1		
2		
3		

4. Escriba una expresión que le permita relacionar todas las operaciones hechas en la tabla anterior y en la cual pueda determinar el valor del costo para cualquier consumo de minutos, para una persona que está suscrita al Plan1.

Expresión:	Justificación:
------------	----------------

5. Una persona que usa el Plan 2, debe llenar la siguiente tabla de valores con respecto a las características y condiciones que tiene su plan al momento de cobrar por su uso.

Minutos	Operación realizada	Resultado (\$)
0		
1		
2		
3		

6. Escriba una expresión que le permita relacionar todas las operaciones hechas en la tabla anterior y en la cual pueda determinar el valor del costo para cualquier consumo de minutos, para una persona que está suscrita al Plan 2.

Expresión:	Justificación:
------------	----------------

REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA. (grupal).

7. Compartan las respuestas a las que llegaron al encontrar una expresión en la cual pueda determinar el valor del costo para cualquier consumo de minutos, para una persona que está suscrita tanto al Plan 1 y al Plan 2.

Plan 1	Plan 2
Expresión	Expresión
Justificación	Justificación

Guía 4. REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA. (guía Individual)

¿QUE HEMOS APRENDIDO?

Hemos aprendido que en situaciones como estas de los planes de telefonía se tiene:

- Que el valor pagado depende la cantidad de minutos consumido.
- Que el valor pagado aumenta el mismo valor cada vez que aumenta la misma cantidad de minutos consumidos, es decir, a incrementos iguales de minutos consumidos hay incrementos iguales del valor pagado
- Que la gráfica cartesiana en la que se represente el valor pagado en función de los minutos consumidos es una línea recta.
- Que la razón de cambio es:

$$r = \frac{\Delta\$}{\Delta T} = \frac{\$_{Final} - \$_{Inicial}}{T_{Final} - T_{Inicial}}$$

$$r = \frac{\$_{Final} - \$_{Inicial}}{T_{Final} - T_{Inicial}}$$

permanece constante. $\Delta\$$ es el incremento del costo en pesos y ΔT es el incremento en el consumo de minutos.

EN SITUACIONES COMO ESTAS EN LAS QUE A INCREMENTOS IGUALES DE UNA VARIABLES (p. ej. $\Delta\$$) SE PRODUCEN INCREMENTOS IGUALES DE LA OTRA (p. ej. ΔT). SE DICE QUE LAS VARIABLES **COVARIAN DE FORMA LINEAL**, O SIMPLEMENTE **QUE UNA DE LAS VARIABLES VARÍA EN FORMA LINEAL CON RESPECTO A LA OTRA**. El nombre de lineal hace referencia al forma de línea recta que toma la gráfica cartesiana en estos casos.

Use la expresión de la razón de cambio para completar los valores de la tabla, teniendo en cuenta que la razón de cambio para los planes están descritos de la siguiente manera:

Plan	Razón de cambio "r"
Plan A	100
Plan B	50

- Tabla siguiente corresponde al **PLAN A**. Escriba los procedimientos que sigue para encontrar la respuesta.

	$\$_{Final}$	$\$_{Inicial}$	T_{Final}	$T_{Inicial}$
Caso 1	4500	3000		10
Caso 2	7800		58	7
Caso 3	5000	2300	30	

Procedimientos

Caso 1	Caso 2	Caso 3

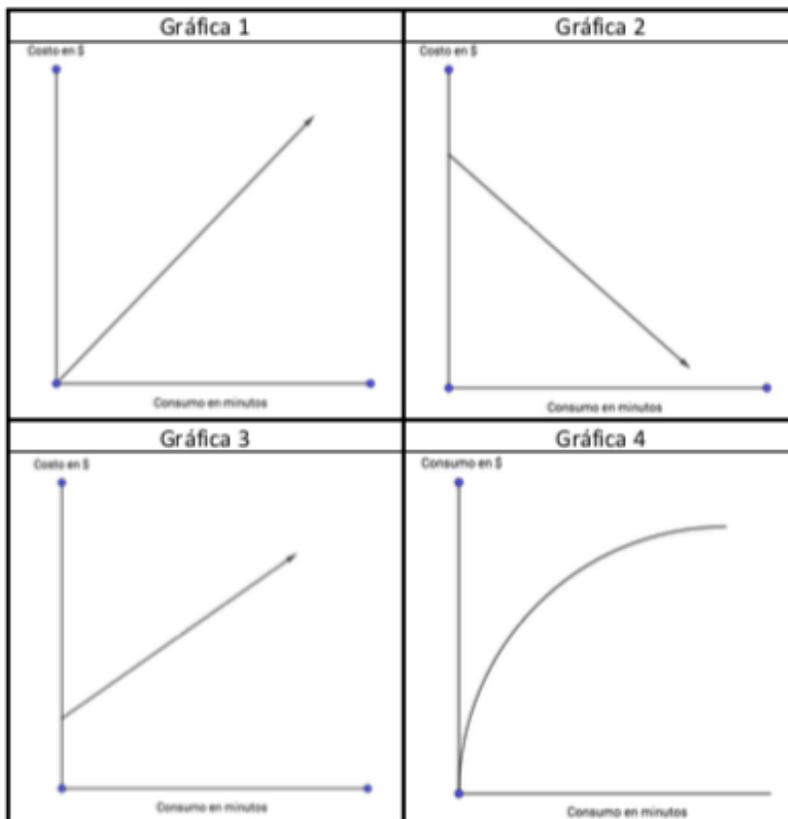
2. Para una persona que usa el plan B, calcula el valor pagado para la cantidad de minutos utilice siguiente tabla de valores con respecto a las características y condiciones que tiene su plan al momento de cobrar por su uso.

Minutos	Resultado (\$)	Procedimiento seguido
12		
63		
121		

Se sabe que en un plan de telefonía Premium el valor pagado con relación a la cantidad de minutos consumidos se relaciona según la ecuación:

$$\text{Valor} = 45\left(\frac{\$}{\text{min}}\right) \cdot T + 125$$

1. A partir de la información que se conoce, para este caso la ecuación, escoja entre las cuatro opciones la gráfica que para usted mejor represente la variación del costo en \$ con relación al consumo de minutos del Plan Premium.



Justifique su respuesta.

2. A continuación se presentan 3 tablas de valores, de los cuales a partir de las características del Plan Premium usted de elegir el que corresponda a los valores de costo en \$ con respecto al consumo en minutos para el plan Premium.

Costo en \$	0	10	20	30	40	50	60
Consumo en minutos (T)	125	250	500	1000	1250	1500	1750

Si, No.	justificación
---------	---------------

Costo en \$	0	5	15	20	25	30	35
Consumo en minutos (T)	125	350	800	1025	1250	1475	1700

Si, No.	justificación
---------	---------------

Costo en \$	0	5	15	20	25	30	35
Consumo en minutos (T)	125	350	425	470	525	575	625

Si, No.	justificación
---------	---------------

3. Teniendo en cuenta la ecuación bajo la cual es cobrado el consumo de minutos en el plan Premium, el plan Premium está cobrando u cargo básico mensual?Cuál es?

4. Podría usted determinar el valor que se cobrará a una persona que está suscrito al Plan Premium y que ha realizado un consumo al mes de 528 minutos? Qué valor tendrá que pagar? Escriba el procedimiento empleado para obtener el valor.

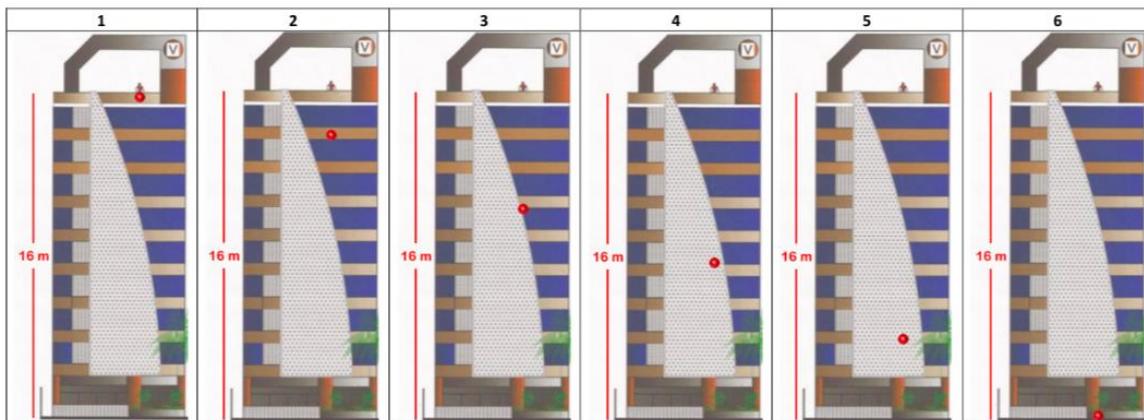
Situación 2:

GUIA No 1

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

SESIÓN N° 3

Una pelota es lanzada desde la azotea de un edificio de 16 metros de altura, tal cual como se muestra en la siguiente secuencia.



GUIA INDIVIDUAL

- Estudie las gráficas y escoja la que considera que representa correctamente la forma como varía la distancia recorrida por la pelota a medida que transcurre el tiempo a partir del momento en que se suelta. Para la gráfica seleccionada escriba porque considera que representa de forma correcta esta forma de covariación o por qué no.

Gráfica 1	Gráfica 2	Gráfica 3
Gráfica 4	Gráfica 5	Gráfica elegida
		Justificación:

2. Suponga que la pelota ha recorrido aproximadamente 5 m al primer segundo de estar cayendo, llene la tabla con algunos valores aproximados

Tiempo de caída (s)	0	1	2	3	4	5
Distancia recorrida (m)	0	5				

Justifique su respuesta.

GRUPAL

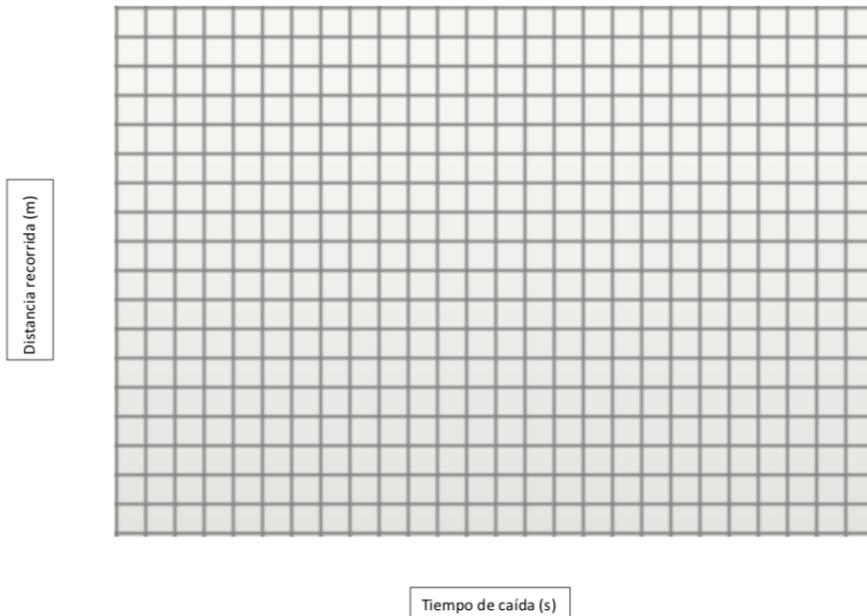
3. Comparen las respuestas de los apartados 1 y 2.

ESTUDIANTE 1.	ESTUDIANTE 2.	ESTUDIANTE 3.	ESTUDIANTE 4.
Gráfica seleccionada			
Justificación			
Respuesta Unificada:			

4. Utilice el simulador de la distancia recorrida y el tiempo de caída de una pelota que cae en forma vertical. Compare esta tabla con la que ustedes consideraron que debía ser.

Distancia recorrida (m)										
Tiempo de caída (s)	0	0,2	0,4							

5. Elaborar la gráfica con la información obtenida en el punto anterior y compare esta gráfica con la que ustedes consideraron que debía ser.



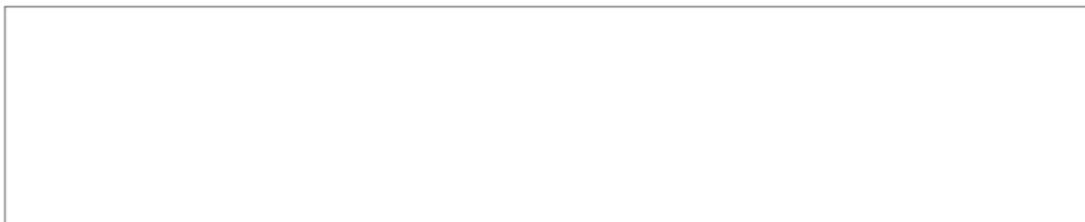
6. Expliquen por qué la gráfica no tiene forma recta.

7. Explique porque la gráfica parte de (0,0)

8. Teniendo en cuenta los valores colocados en la tabla, complete los valores de la distancia según la simulación y determine la razón de cambio entre las variables.

Distancia Inicial D	Distancia Final D	Incremento en la distancia. (ΔD)	Tiempo Inicial T	Tiempo Final T	Incremento en T (ΔT)	Razón de cambio (ΔD) / (ΔT)
0	0.2	0.2	0	0.2	0.2	1
			0.2	0.4		
			0.4	0.6		
			0.6	0.8		

9. ¿Qué puede decir acerca de los valores de la razón de cambio entre la distancia recorrida por la pelota y el tiempo empleado en caer?



10. Al comparar las características de la razón de cambio y la gráfica entre la situación anterior (planes de celular) y la segunda situación (lanzamiento de la pelota), mencione las similitudes o diferencias que encuentra entre las dos situaciones.



Situación 3:

GUIA Final.

NOMBRE: _____ CURSO: _____ FECHA: _____

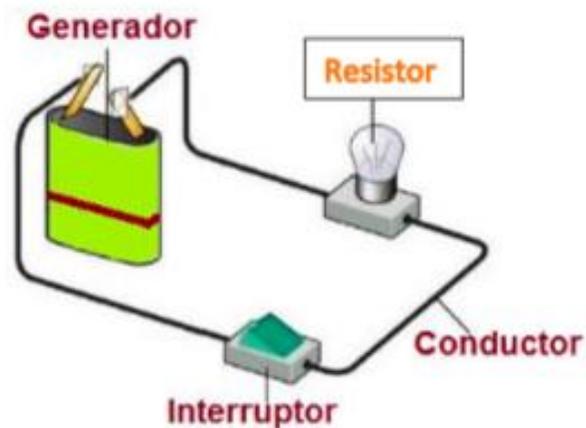
SESIÓN Nº 4

¿Qué hemos aprendido?

Planes de celular	Caída Libre

EL CIRCUITO ELÉCTRICO

Un circuito eléctrico es un camino de lazo cerrado por el cual circulan cargas eléctricas que fluyen a través de un conductor con un determinado nivel de energía (voltaje) proveniente de una batería, pila o generador, que es empleado para realizar un trabajo (eléctrico) ya bien sea empleando dicha energía para transformarla en luz, calor o en ambas, dicho proceso sucede cuando las cargas eléctricas encuentran un obstáculo para circular por el circuito, este obstáculo se presenta en un elemento llamado resistencia o resistor.



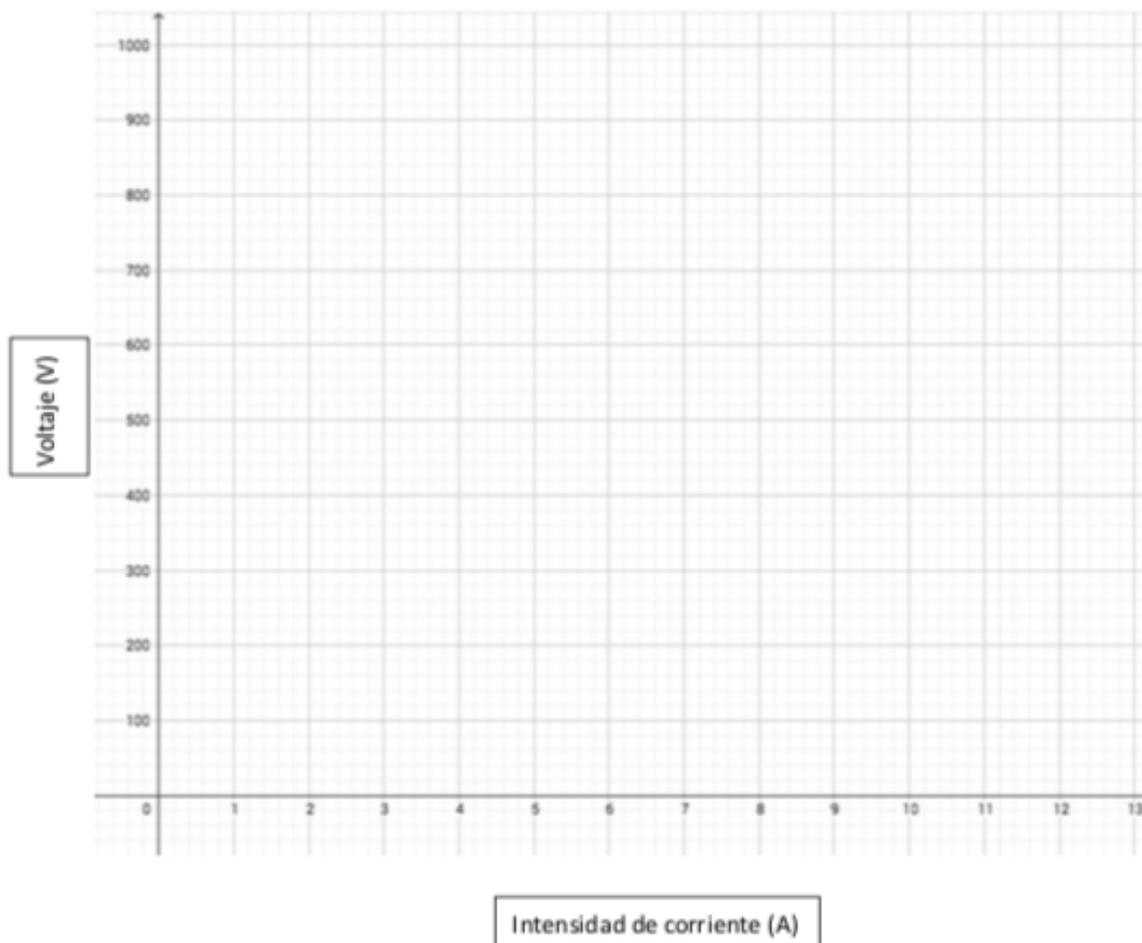
1. Utilice el simulador de circuitos eléctricos y obtenga los valores que considera necesarios para estudiar la forma como varía la intensidad de la corriente con respecto a valores del voltaje.



2. Con base en los valores obtenidos diga si la forma de covariación del Voltaje (V) respecto a la Intensidad de corriente (I), se comporta como la forma de covariación entre el valor pagado y la cantidad de minutos en los planes de telefonía o es más parecida a la forma como varía la distancia recorrida por una pelota en caída libre a medida que transcurre el tiempo. Justifique su respuesta.

Sí, No.	Justificación

3. Elabore un gráfica cartesiana con los valores obtenidos del simulador.



4. Con base en la gráfica obtenida determine los siguientes valores:

Voltaje (V)	120		340		1200
Intensidad de corriente (A)		1.25		4.6	

5. A partir de lo hasta ahora estudiado, ¿Qué sucede con los incrementos que se producen en la intensidad de corriente (I) para incrementos iguales de Voltaje (V)? Justifique su respuesta

6. Cómo considera que es el valor de la razón de cambio entre incrementos de Voltaje (V) con respecto a los incrementos respectivos de la intensidad de la corriente (I)

7. Encuentre una Representación algebraica (ecuación) que relacione V y I .

8. Si se cambia el valor de la resistencia cambia la forma de la covariación de I respecto a V ?

9. Utilice el simulador para justificar la respuesta de la pregunta anterior.

ANEXO B

Ejemplo de sistematización de información Situación ley de Ohm

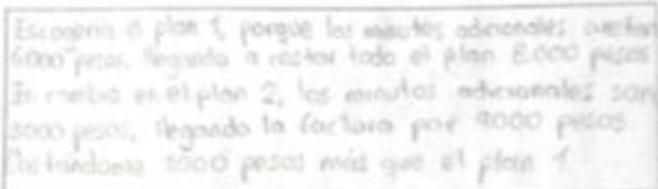
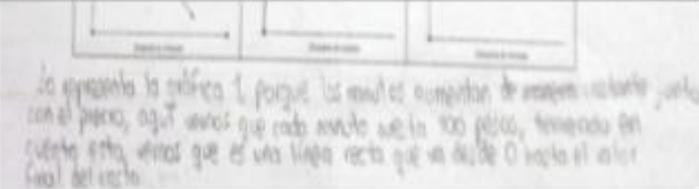
	Indicadores	S1- Estudiante Nivel Alto		S2- Estudiante Nivel medio		S3- Estudiante Nivel Bajo	
		respuesta	descripción	respuesta	descripción	respuesta	descripción
Momento de recolección de datos	Diseña un experimento o un procedimiento para obtener datos (los valores correspondientes de las variables independiente y dependiente)	Vamos a aumentar los voltios para encontrar los valores de la corriente.	(Si) Determina que debe empezar a realizar cambios en los valores de una magnitud para obtener valores de la otra magnitud que está en estudio.	Ver hoja de trabajo pregunta 1.	(Si) Determina que debe empezar a realizar cambios en los valores de una magnitud para obtener valores de la otra magnitud que está en estudio.	Empieza desde 200 voltios al finalizar llega a sus 1600 voltios y se quema la batería.	(Si) organiza un registro tabular voltios vs corriente en amperios.
	Determina y extrae los valores de las variables que se estudian en una relación de covariación.	Para 2000 voltios hay una corriente de 2 amperios. ver hoja de trabajo.	(Si) Obtiene valores desde el simulador y los consigna en la hoja de trabajo.	Ver hoja de trabajo pregunta 1.	(Si) Obtiene valores desde el simulador y los consigna en la hoja de trabajo.		
	Realiza representaciones tabulares y cartesianas de los valores obtenidos.	Ver hoja de trabajo pregunta 3.	(Si) Construye la representación cartesiana a partir de los valores que obtiene del simulador.	Ver hoja de trabajo pregunta 1 y 3.	(Si) Construye la representación Cartesiana a partir de los datos obtenidos del simulador.	Ver imagen	(Si) Ubica las coordenadas de manera correcta al relacionar las magnitudes voltaje e intensidad de corriente.
	Relaciona la forma de covariación de los valores estudiados con modelos de covariación conocidos y reconoce sus semejanzas y sus diferencias.	Tiene una Covariación lineal, porque los valores de los incrementos son constantes.	(Si) Determina la forma de covariación a partir de su similitud con la situación estudiada en los planes de celular.	Se parece al de los planes de celular porque el incremento el voltios es el mismo incremento de amperios.	(Si) Logra identificar la similitud con otra situación estudiada y la relaciona con los planes celular.	Se parece a las dos porque los dos parten de un punto cero.	

	Indicadores	S1- Estudiante Nivel Alto		S2- Estudiante Nivel medio		S3- Estudiante Nivel Bajo	
		respuesta	descripción	respuesta	descripción	respuesta	descripción
Momento de captación de la variación	Identifica las magnitudes de la situación que varían y las que permanecen constantes.	Volts, Amperios y resistencia	(No) cuando en la situación de las variables las realiza el profesor a partir de la socialización de la situación, donde puntualmente dice cuales son las variables que se van a trabajar en el ejercicio.	Volts, Amperios y resistencia	(Si) La identificación de las variables las realiza a partir de la socialización de la situación, donde puntualmente dice cuales son las variables que se van a trabajar en el ejercicio.	Voltios y Amperios.	(No) Identifica que el valor de las variables cambian pero no hace mención de la resistencia.
	De acuerdo con la situación, necesidades e intereses identifica las variables de las que resulta pertinente estudiar su covariación.	El voltaje y la corriente, en cuanto al incremento.	(Si) Al observar los componentes del circuito eléctrico representado en el simulador, encuentra las variables que utilizará en el proceso.	Voltios y amperios	(Si) Identifica las magnitudes de las cuales requiere valores para estudiar la covariación de la situación expuesta.	No hay respuesta explícita.	(NO) identifica el comportamiento entre las variables voltios y amperios de la corriente, al desconectar el circuito deduce que al tener 0 voltios se tienen 0 amperios y a medida que aumentan los voltios aumenta corriente.
	Identifica cuál es la magnitud que va a tomar como variable independiente y cuál como dependiente.	La corriente depende del voltaje	(Si) Al observar como en el simulador un valor que se manipula y ver que el otro cambiaba, determina la dependencia entre magnitudes.	"La corriente depende de los voltios"	(Si) Identifica claramente qué variable depende de cuál.	Estudiante indica que manipula la corriente.	(No) identifica que al aumentar los voltios en el circuito la intensidad de la corriente también aumenta, más no verbaliza o escribe cuál es dependiente o independiente.
	Cuantifica cualitativamente relaciones de covariación entre las dos magnitudes (directa: si una aumenta la otra también o inversa: si una disminuye la otra aumenta)	Cuando aumenta el voltaje, la corriente también aumenta.	(Si) Además de identificar las magnitudes, realiza una relación entre ellas.	Pues, entre mayor voltaje, mayor corriente.	(Si) Realiza comentarios acerca del aumento de la corriente cuando aumenta el voltaje	A medida que la velocidad de los voltios vayan cambiando su velocidad aumenta cada vez, puede llegar a un punto límite pero aún así puede seguir transcurriendo.	(Si) Identifica que la manera en como varían las magnitudes es de forma directa.

ANEXO C

REGISTRO DE EVIDENCIAS SITUACIÓN PLANES DE CELULAR

Sujeto 1 Nivel Alto

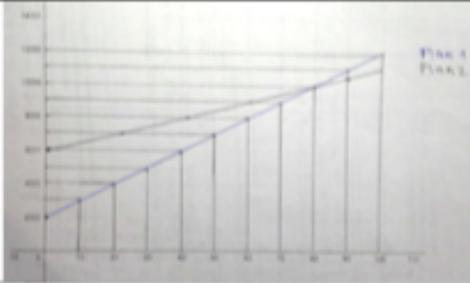
Número y tipo de evidencia	Tiempo inicial tiempo final	Descripción-observaciones- interpretaciones-preguntas-cualquier otro comentario
1. imagen		<p>Si la ciudad estima que su servicio mensual es más o menos de 60 minutos, cuál de los dos planes escogería? Justifique su respuesta.</p>  <p>Escogí el plan 1, porque los minutos adicionales cuestan 6000 pesos, llegando a costar todo el plan 8.000 pesos. En cambio en el plan 2, los minutos adicionales son 2000 pesos, llegando la factura por 4000 pesos. Resultando 4000 pesos más que el plan 1.</p>
2. Grabación audio y video.	Entrevista final 1, Minuto 1:30 al 2:10	<p>D: <i>¿Qué variables estamos estudiando ahí?</i> S1: <i>eh... costo que dependía de los minutos.</i> D: <i>Listo, costo y minutos. Muy importante lo que acabas de decir, que uno depende del otro a eso lo llamamos dependencia entre variables, ósea miramos cual depende de cual, listo entonces ahí qué significara, ¿cuál es la que depende de quién? ¿qué variable depende de quién?</i> S1: <i>El costo depende de los minutos porque al construir pues minutos vamos a saber cuál es el costo.</i></p>
3. imagen		 <p>Lo represento la gráfica 1, porque los minutos cuentan de manera constante, junto con el precio, así como que cada minuto vale 100 pesos, llegando en cuanto esto, vemos que es una línea recta que va desde 0 hasta el valor final del costo.</p>
4. Grabación audio y video.	Entrevista final 1, Minuto 3:50 al 4:02	<p>D: <i>En la representación gráfica ¿qué necesitas?</i> S1: <i>eh... Necesito los valores.</i> D: <i>A bueno entonces ¿qué tengo que ir a buscar?</i> S1: <i>eh... los valores que me dan del plan.</i></p>

<p>5. Imagen</p>																																					
<p>6. Imagen</p>		<p>1.1. ¿Cuál será el costo en pesos de un consumo de 50 minutos?</p> <p>Costará 5000 pesos, porque el costo base del segundo plan es de 6000 pesos y por cada minuto que se consume se cobra 100 pesos del plan, por eso entre la diferencia de 6000 y 50 minutos se cobra 5000 pesos que esto es el cobrado.</p> <p>1.2. ¿Cuál será el costo en pesos de un consumo de 25 minutos?</p> <p>Costará 3000 pesos, porque si 10 minutos por cada 1000 adicionales se cobra, ya cada minuto cobra 100 pesos y así multiplicando 3 minutos.</p> <p>1.3. ¿Cuál será el costo en pesos de un consumo de 41 minutos?</p> <p>Costará 6000 pesos, porque el costo base es de 20 minutos, y así 40 minutos en cada hora cobra 100 pesos, y a eso se le suma el costo que es 6000 pesos.</p>																																			
<p>7. Imagen</p>		<table border="1"> <thead> <tr> <th>Valor inicial T</th> <th>Valor final T</th> <th>Incremento en el consumo de minutos (ΔT)</th> <th>Valor inicial I</th> <th>Valor final I</th> <th>Incremento en I (ΔI)</th> <th>Costo de cambio (ΔI/ΔT)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>10</td> <td>10</td> <td>2000</td> <td>3000</td> <td>1000</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>20</td> <td>10</td> <td>3000</td> <td>4000</td> <td>1000</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>20</td> <td>30</td> <td>10</td> <td>4000</td> <td>5000</td> <td>1000</td> <td>100</td> </tr> <tr> <td>30</td> <td>40</td> <td>10</td> <td>5000</td> <td>6000</td> <td>1000</td> <td>100</td> </tr> </tbody> </table> <p>1.4. ¿Cuál será el costo en pesos de un consumo de 41 minutos?</p>	Valor inicial T	Valor final T	Incremento en el consumo de minutos (ΔT)	Valor inicial I	Valor final I	Incremento en I (ΔI)	Costo de cambio (ΔI/ΔT)	0	10	10	2000	3000	1000	100	10	20	10	3000	4000	1000	100	20	30	10	4000	5000	1000	100	30	40	10	5000	6000	1000	100
Valor inicial T	Valor final T	Incremento en el consumo de minutos (ΔT)	Valor inicial I	Valor final I	Incremento en I (ΔI)	Costo de cambio (ΔI/ΔT)																															
0	10	10	2000	3000	1000	100																															
10	20	10	3000	4000	1000	100																															
20	30	10	4000	5000	1000	100																															
30	40	10	5000	6000	1000	100																															

		<table border="1"> <thead> <tr> <th>Valor en T</th> <th>Valor en S</th> <th>Incremento en el consumo de minutos T (ΔT)</th> <th>Valor en S</th> <th>Valor en S</th> <th>Incremento en S (ΔS)</th> <th>Razón de cambio ($\Delta S/\Delta T$)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>10</td> <td>10</td> <td>6000</td> <td>6500</td> <td>500</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>20</td> <td>10</td> <td>6500</td> <td>7000</td> <td>500</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>20</td> <td>30</td> <td>10</td> <td>7000</td> <td>7500</td> <td>500</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>30</td> <td>40</td> <td>10</td> <td>7500</td> <td>8000</td> <td>500</td> <td>50</td> </tr> </tbody> </table>	Valor en T	Valor en S	Incremento en el consumo de minutos T (ΔT)	Valor en S	Valor en S	Incremento en S (ΔS)	Razón de cambio ($\Delta S/\Delta T$)	0	10	10	6000	6500	500	50	10	20	10	6500	7000	500	50	20	30	10	7000	7500	500	50	30	40	10	7500	8000	500	50
Valor en T	Valor en S	Incremento en el consumo de minutos T (ΔT)	Valor en S	Valor en S	Incremento en S (ΔS)	Razón de cambio ($\Delta S/\Delta T$)																															
0	10	10	6000	6500	500	50																															
10	20	10	6500	7000	500	50																															
20	30	10	7000	7500	500	50																															
30	40	10	7500	8000	500	50																															
8. Imagen		<p>Se puede decir que así sea diferente el consumo de minutos, el valor de cada minuto seguirá siendo el mismo.</p>																																			
9. Imagen		<p>Si, el plan está cobrando una tarifa de 125 pesos como cargo básico mensual.</p> $45 = \frac{\$f - 125}{528 - 0}$ $45 \cdot 528 = \$f - 125$ $23760 + 125 = \$f$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $\\$f = 23885$ </div>																																			

Sujeto 2 Nivel Medio.

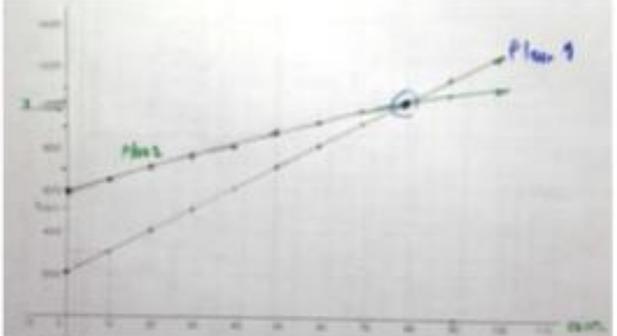
Número y tipo de evidencia	Tiempo inicial tiempo final	Observaciones- interpretaciones-preguntas-cualquier otro comentario
1. Grabación audio y video	Minuto 1:02 al 1:40 Entrevista 1	<p>D: Bueno, entonces me gustaría que me contaras ¿cómo hiciste para resolver la primera pregunta?</p> <p>S2: Pues la primera pregunta yo la resolví haciendo la comparación del precio del precio mensual y o sea... esta es la del plan 1 ¿sí?</p> <p>D: Sí.</p>

		<p>S2: <i>hace la comparación del precio inicial que son \$2000, eh... y haciendo... la suma de, ... si tengo..., o sea el valor de los minutos son \$100, ¿60 minutos cuánto sería? Entonces, a mí me salió que serían \$8000 pesos más o menos. Y más \$2000 (el estudiante se detiene a realizar lectura de la pregunta).</i></p>
2. Grabación audio y video	<p>Minuto 10:36 al 11:53 Entre vista 1.</p>	<p>D: <i>¿Este costo a qué hace referencia?</i> S2: <i>A que gaste más minutos.</i> D: <i>Gaste minutos ¿qué haría falta?</i> S2: <i>Eh ... no, pues lo del cargo básico mensual.</i> D: <i>A bueno y ¿en el plan 1 cuánto vale?</i> S2: <i>En el plan 1 el cargo básico mensual vale \$2000, entonces ¿serían 10000? ¿sí? (escribe) listo.</i> D: <i>¿y en el plan 2?</i> S2: <i>En el plan 2 si el usuario decide gastar más minutos, eh ... no ósea como cargo básico mensual tiene \$6000, si el usuario decide gastar más minutos a esos \$6000 se lo van a aumentar lo que, pues el usuario vaya a gastar, entonces los \$4000 son los minutos que el usuario gasto más los \$6000 que es el cargo básico mensual, entonces serían \$10000. Ahí entonces sí eran los minutos 80 que hace equivalencia en los dos.</i></p>
3. Imagen Hoja de trabajo.		
4. Grabación audio y video.	<p>Minuto 3:34 al 4:21 Entrevista a Sebastián sesión 1.1</p>	<p>D: <i>¿Cómo quedaría la gráfica?</i> S2: <i>Eh ...</i> D: <i>¿Empezaría en dónde?</i> S2: <i>Empezaría desde el punto 3000.</i> D: <i>¿Empezaría desde 3000?</i> S2: <i>No, desde 2000.</i> D: <i>A bueno ahí empiezo y a medida que voy consumiendo minutos ¿qué va pasando con el valor?</i> S2: <i>Va aumentando.</i> D: <i>A bueno y entonces ¿cómo quedaría la gráfica?</i> S2: <i>(Traza una línea con inclinación positiva y con flecha en la punta)</i> D: <i>¿Por qué le colocaste esa flecha?</i></p>

		S2: Porque el valor iría aumentando si el usuario decide seguir usando los minutos.																																																																						
5. Imagen Hoja de trabajo.		<p>1.6. En la siguiente tabla se analizan los incrementos que se producen en los valores del consumo en \$ para incrementos en los valores de minutos T. Completar la tabla según el ejemplo dado.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Valor inicial T</th> <th>Valor final T</th> <th>Incremento en el consumo de minutos T (x%)</th> <th>Valor inicial S</th> <th>Valor final S</th> <th>Incremento en S (y%)</th> <th>Razón de cambio (y/x) (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>10</td> <td>10</td> <td>2000</td> <td>3000</td> <td>1000</td> <td>100%</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>20</td> <td>10</td> <td>3000</td> <td>4000</td> <td>1000</td> <td>100%</td> </tr> <tr> <td>20</td> <td>30</td> <td>10</td> <td>4000</td> <td>5000</td> <td>1000</td> <td>100%</td> </tr> <tr> <td>30</td> <td>40</td> <td>10</td> <td>5000</td> <td>6000</td> <td>1000</td> <td>100%</td> </tr> </tbody> </table> <p>1.6. En la siguiente tabla se analizan los incrementos que se producen en los valores del consumo en \$ para incrementos en los valores de minutos T. Completar la tabla según el ejemplo dado.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Valor inicial T</th> <th>Valor final T</th> <th>Incremento en el consumo de minutos T (x%)</th> <th>Valor inicial S</th> <th>Valor final S</th> <th>Incremento en S (y%)</th> <th>Razón de cambio (y/x) (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>10</td> <td>10</td> <td>2000</td> <td>3000</td> <td>1000</td> <td>100%</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>20</td> <td>10</td> <td>3000</td> <td>4000</td> <td>1000</td> <td>100%</td> </tr> <tr> <td>20</td> <td>30</td> <td>10</td> <td>4000</td> <td>5000</td> <td>1000</td> <td>100%</td> </tr> <tr> <td>30</td> <td>40</td> <td>10</td> <td>5000</td> <td>6000</td> <td>1000</td> <td>100%</td> </tr> </tbody> </table>	Valor inicial T	Valor final T	Incremento en el consumo de minutos T (x%)	Valor inicial S	Valor final S	Incremento en S (y%)	Razón de cambio (y/x) (%)	0	10	10	2000	3000	1000	100%	10	20	10	3000	4000	1000	100%	20	30	10	4000	5000	1000	100%	30	40	10	5000	6000	1000	100%	Valor inicial T	Valor final T	Incremento en el consumo de minutos T (x%)	Valor inicial S	Valor final S	Incremento en S (y%)	Razón de cambio (y/x) (%)	0	10	10	2000	3000	1000	100%	10	20	10	3000	4000	1000	100%	20	30	10	4000	5000	1000	100%	30	40	10	5000	6000	1000	100%
Valor inicial T	Valor final T	Incremento en el consumo de minutos T (x%)	Valor inicial S	Valor final S	Incremento en S (y%)	Razón de cambio (y/x) (%)																																																																		
0	10	10	2000	3000	1000	100%																																																																		
10	20	10	3000	4000	1000	100%																																																																		
20	30	10	4000	5000	1000	100%																																																																		
30	40	10	5000	6000	1000	100%																																																																		
Valor inicial T	Valor final T	Incremento en el consumo de minutos T (x%)	Valor inicial S	Valor final S	Incremento en S (y%)	Razón de cambio (y/x) (%)																																																																		
0	10	10	2000	3000	1000	100%																																																																		
10	20	10	3000	4000	1000	100%																																																																		
20	30	10	4000	5000	1000	100%																																																																		
30	40	10	5000	6000	1000	100%																																																																		
6. Imagen Hoja de trabajo.		<p>1.6. ¿Qué puede decir con respecto a los valores de la razón de cambio en cada una de las dos tablas anteriores?</p> <p>En ambas las razones no son iguales, el resultado va a ser el mismo en los dos casos.</p> <p>1.7. ¿Establecen alguna relación en la razón de cambio en ambas tablas como alguna característica del plan?</p> <p>Las tablas muestran valores diferentes, pero la razón de cambio es igual.</p>																																																																						
7. Imagen		<p>El cargo básico mensual es 125</p> <p>El minuto vale \$45 y lo multiplicamos por 528 minutos y eso da: \$23,760 y sumando este resultado con el cargo básico mensual, esta daría = 23,885</p>																																																																						

Sujeto 3 Nivel Bajo.

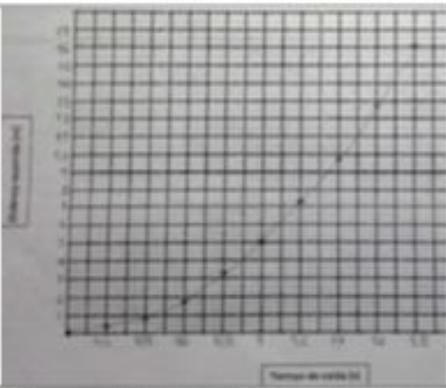
Número y tipo de evidencia	Tiempo inicial tiempo final	Observaciones- interpretaciones-preguntas-cualquier otro comentario
1. Grabación audio y video.	Minuto 0:45 al 1:04 Entrevista Paula Beltrán sesión 1.	<p>S3: El plan 2.</p> <p>D: El plan 2 ¿Por qué?</p> <p>S3: Porque son más barato los minutos.</p> <p>D: A bueno listo.</p> <p>S3: Entonces para una persona que habla mucho por celular entonces le saldría mucho más económico este, igual de pronto no utilizara tanto pues digamos las redes sociales sino más bien los minutos.</p> <p>D: ok.</p>

2. Grabación audio y video.	Minuto 4:25 al 4:32 Entrevista Paula Beltrán sesión 1.	S3: <i>Puse la 1, porque a medida que el costo aumenta entonces el consumo del plan también sube.</i>
3. Grabación audio y video.	Minuto 4:25 al 4:32 Entrevista Paula Beltrán sesión 1.	S3: <i>Puse la 1, porque a medida que el costo aumenta entonces el consumo del plan también sube.</i>
4. Grabación audio y video.	Minuto 3:22 al 3:37 Entrevista Paula Beltrán sesión 1	D: <i>Tú me estás diciendo que en 1 el plan 1 y en 2 el plan 2. vale! Mmm, tu no me hiciste algún procedimiento matemático, algún cálculo matemática, ¿solamente te basaste en las redes sociales?</i> S2: <i>sí.</i> D: <i>listo.</i>
5. Imagen, Hoja de trabajo		
6. Imagen, Hoja de trabajo		<p>1. ¿Cuál será el costo en pesos de un consumo de 10 minutos?</p> <p>3 300</p> <p>2. ¿Cuál será el costo en pesos de un consumo de 20 minutos?</p> <p>3 500</p> <p>3. ¿Cuál será el costo en pesos de un consumo de 45 minutos?</p> <p>3 528</p>
7. Imagen, Hoja de trabajo		<p>1.6. ¿Qué puede decir con respecto a los valores de la razón de cambio en cada uno de los dos planos anteriores?</p> <p>Los valores de la razón de cambio son iguales y no cambian.</p> <p>1.7. ¿Existen alguna relación en la razón de cambio en estos planos como alguna característica del plan 1 (Plan) con respecto al valor de consumo?</p>
8. Imagen, Hoja de trabajo		<p>4. Podría usted determinar el valor que se cobrará a una persona que está suscrita al Plan Premium y que ha realizado un consumo al mes de 528 minutos? ¿Qué valor tendrá que pagar? Escriba el procedimiento empleado para obtener el valor.</p> $P = 45$ $T = 528$ $C = 2528 \text{ (} = 225 \text{ pesos)}$ $528 \cdot 45 = 23760$ $3254 + 23760 = 25014$

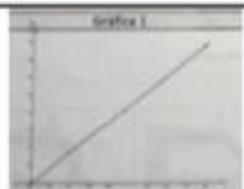
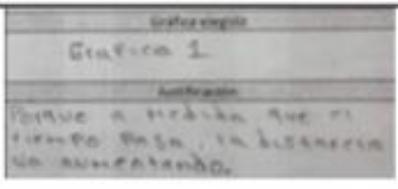
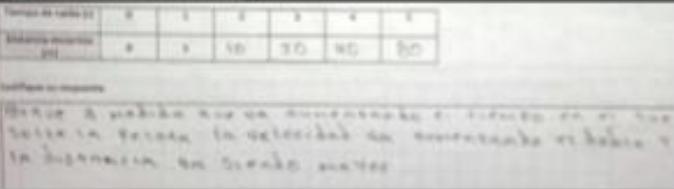
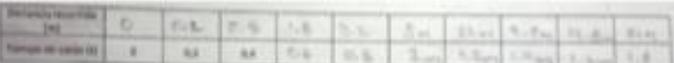
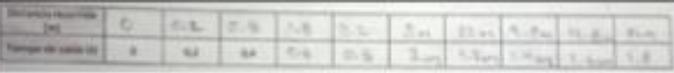
REGISTRO DE EVIDENCIAS SITUACIÓN CAIDA LIBRE

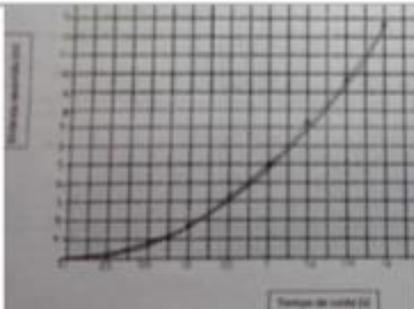
Sujeto 1 Nivel Alto,

Número y tipo de evidencia	Tiempo inicial tiempo final	Observaciones- interpretaciones-preguntas-cualquier otro comentario																						
1. imagen		<p>Gráfica elegida</p> <p>Gráfica 4</p> <p>Justificación:</p> <p>Porque cuando soltamos el objeto, inicia con una velocidad 0, luego esta velocidad empieza a aumentar, creando este tipo de línea: variable.</p>																						
2. imagen		<table border="1"> <thead> <tr> <th>Tiempo de caída (s)</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Distancia recorrida (m)</td> <td>0</td> <td>4</td> <td>16</td> <td>36</td> <td>64</td> <td>100</td> </tr> </tbody> </table> <p>Explica tu respuesta:</p> <p>Según la distancia recorrida entre los 5 segundos, se leen los intervalos entre los 5 y esto va aumentando ya que la velocidad aumenta cada 50 cm.</p> <p>Responde oralmente:</p> <p>*Elige la gráfica 4 porque la pelota inicia con una velocidad 0, después la medida que va, la velocidad va aumentando para la física. O mejor este gráfico de esta forma, es que al igual que la velocidad comienza con una velocidad y una distancia 0, y esto va aumentando con una distancia en la distancia.</p>	Tiempo de caída (s)	0	1	2	3	4	5	Distancia recorrida (m)	0	4	16	36	64	100								
Tiempo de caída (s)	0	1	2	3	4	5																		
Distancia recorrida (m)	0	4	16	36	64	100																		
3. imagen		<table border="1"> <thead> <tr> <th>Tiempo de caída (s)</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Distancia recorrida (m)</td> <td>0</td> <td>4</td> <td>16</td> <td>36</td> <td>64</td> <td>100</td> </tr> </tbody> </table> <p>Explica tu respuesta:</p> <p>Según la distancia recorrida entre los 5 segundos, se leen los intervalos entre los 5 y esto va aumentando ya que la velocidad aumenta cada 50 cm.</p>	Tiempo de caída (s)	0	1	2	3	4	5	Distancia recorrida (m)	0	4	16	36	64	100								
Tiempo de caída (s)	0	1	2	3	4	5																		
Distancia recorrida (m)	0	4	16	36	64	100																		
4. imagen		<table border="1"> <thead> <tr> <th>Distancia recorrida (m)</th> <th>0</th> <th>0,3</th> <th>0,8</th> <th>1,6</th> <th>2,2</th> <th>3</th> <th>4,2</th> <th>4,8</th> <th>10,8</th> <th>16</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <th>Tiempo de caída (s)</th> <th>0</th> <th>0,2</th> <th>0,4</th> <th>0,6</th> <th>0,8</th> <th>1</th> <th>1,2</th> <th>1,4</th> <th>1,6</th> <th>1,8</th> </tr> </tbody> </table>	Distancia recorrida (m)	0	0,3	0,8	1,6	2,2	3	4,2	4,8	10,8	16	Tiempo de caída (s)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8
Distancia recorrida (m)	0	0,3	0,8	1,6	2,2	3	4,2	4,8	10,8	16														
Tiempo de caída (s)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8														

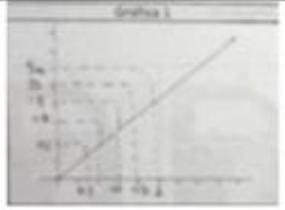
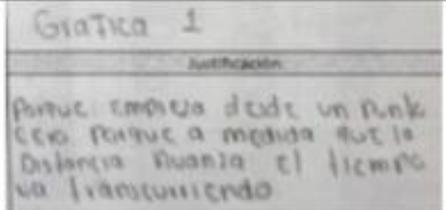
		
5. imagen		Con estos datos de tiempo se sabe que el movimiento pertenece a un tipo de movimiento que es el movimiento con velocidad constante. Diferente porque en el caso anterior los valores son de número constante, demost que en este los valores varian.
6. imagen		Podemos decir que el aumento de estos valores, es constante ya que el aumento es de 2.

Sujeto 2

Número y tipo de evidencia	Tiempo inicial tiempo final	Observaciones- interpretaciones-preguntas-cualquier otro comentario
1. imagen		 
2. imagen		
3. imagen		
4. imagen		

		
5. imagen		Observamos que en los tiempos de caída la velocidad cambia por constante, mientras que en este caso la velocidad cambia de cero por el estado de reposo a la caída.
6. imagen		El incremento del tiempo en los segundos, mientras que el incremento en la distancia es a mayor velocidad del tiempo que transcurre.

Sujeto 3

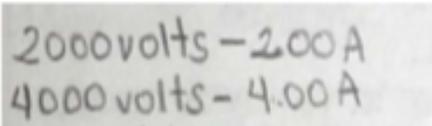
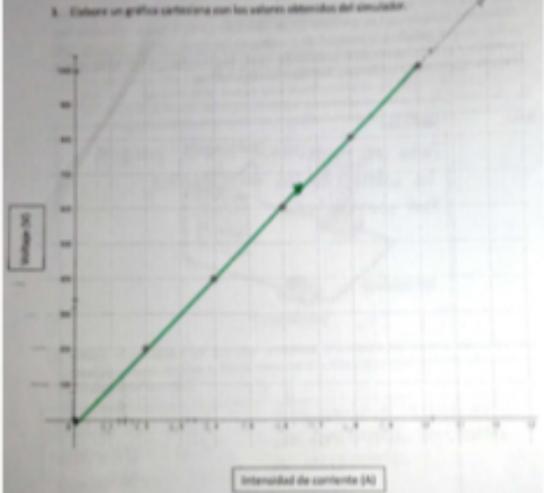
Número y tipo de evidencia	Tiempo inicial tiempo final	Observaciones- interpretaciones-preguntas-cualquier otro comentario																						
1. imagen		 																						
2. imagen		<table border="1" data-bbox="592 1218 1079 1281"> <tr> <td>Tiempo de caída (s)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>Distancia recorrida (m)</td> <td>1.5</td> <td>3</td> <td>4.5</td> <td>6</td> <td>7.5</td> <td>9</td> </tr> </table> <p>Justifique su respuesta:</p> <p>A medida que la pelota suena a una distancia recorrida 9.0 segundos cambia dependiendo de la distancia</p>	Tiempo de caída (s)	1	2	3	4	5	6	Distancia recorrida (m)	1.5	3	4.5	6	7.5	9								
Tiempo de caída (s)	1	2	3	4	5	6																		
Distancia recorrida (m)	1.5	3	4.5	6	7.5	9																		
3. imagen		<table border="1" data-bbox="592 1396 1079 1459"> <tr> <td>Tiempo de caída (s)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>Distancia recorrida (m)</td> <td>1.5</td> <td>3</td> <td>4.5</td> <td>6</td> <td>7.5</td> <td>9</td> </tr> </table> <p>Justifique su respuesta:</p> <p>A medida que la pelota suena a una distancia recorrida 9.0 segundos cambia dependiendo de la distancia</p>	Tiempo de caída (s)	1	2	3	4	5	6	Distancia recorrida (m)	1.5	3	4.5	6	7.5	9								
Tiempo de caída (s)	1	2	3	4	5	6																		
Distancia recorrida (m)	1.5	3	4.5	6	7.5	9																		
4. imagen	Hoja de trabajo Ley de Ohm,	<table border="1" data-bbox="592 1617 1356 1680"> <tr> <td>Distancia recorrida (m)</td> <td>0</td> <td>0.2</td> <td>0.5</td> <td>1.0</td> <td>1.5</td> <td>2</td> <td>2.5</td> <td>3</td> <td>3.5</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>Tiempo de caída (s)</td> <td>0</td> <td>0.2</td> <td>0.4</td> <td>0.6</td> <td>0.8</td> <td>1</td> <td>1.2</td> <td>1.4</td> <td>1.6</td> <td>1.8</td> </tr> </table>	Distancia recorrida (m)	0	0.2	0.5	1.0	1.5	2	2.5	3	3.5	4	Tiempo de caída (s)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8
Distancia recorrida (m)	0	0.2	0.5	1.0	1.5	2	2.5	3	3.5	4														
Tiempo de caída (s)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8														

	pregunta 5.	
5. imagen		En los casos de cables, el plano 1 y el plano 2 se hacen de cambio de voltaje por 150 y 200 de minutos después de que se el lanzamiento de la Píñon de acción de cambio es diferente por 2 cables. En estos casos por los diferentes valores de las situaciones de cada valor y cables de la corriente.
6. imagen		La diferencia de la tasa de cambio de uno a la otra es diferente a 2 cables.

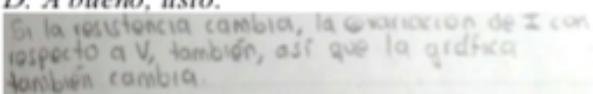
REGISTRO DE EVIDENCIAS SITUACIÓN LEY DE OHM

Sujeto 1 Nivel Alto,

Número y tipo de evidencia	Tiempo inicial tiempo final	Observaciones- interpretaciones-preguntas-cualquier otro comentario
1. imagen		
2. Grabación audio y video.	entrevista final 3, Minuto 8:39 - 9:30	S1: <i>las variables son ... ¿voltaje? Y los amperios?</i> D: <i>Si, voltaje, intensidad de corriente que se mide en amperios muy bien.</i> D: <i>¿Qué hay en el bombillo? ¿una qué?</i> S1: <i>Una ... resistencia.</i> D: <i>Muy bien, son las tres que estamos... resistencia muy bien. Pero ¿y la resistencia cambia?</i>
3. Grabación audio y video.	Entrevista final 3, Minuto 5:02 - 5:12	S1: <i>¿Entonces diríamos que la corriente depende del voltaje?</i>
4. Grabación audio y video.	Entrevista final 3, Minuto 5:14 - 5:26	D: <i>Mira qué pasa ahí (señalando el simulador).</i> S1: <i>Que a menor voltaje menos corriente.</i> D: <i>Bueno, entonces esas son tus conclusiones.</i> S1: <i>si.</i>

5. Grabación audio y video. 6. Imagen.	Entrevista final 3, Minuto 6:47 - 6:57 Hoja de trabajo pregunta 1.	S1: <i>Voy a subirle los voltios para mirar cómo se comporta la corriente.</i> 
7. Imagen	Hoja de trabajo guía final pregunta 3.	
8. Grabación audio y video.	Entrevista final 3, Minuto 7:07 - 7:18	S1: <i>Ahí podríamos tener una relación, que a 2000 voltios habría dos amperios de corriente.</i>
9. Grabación audio y video.	Entrevista final 4, Minuto 2:05 - 2:39	D: <i>El simulado es todo tuyo y tienes la gráfica.</i> S1: <i>Me puedo bajar (no se entiende)</i> D: <i>Si claro ¿cuándo lo puedo bajar acá? Cuando no está encendido ni valores de cero voltios ¿sí? ¿por qué necesitas el valor de cero de voltios?</i> S1: <i>para saber si inicio la gráfica desde cero o desde algún valor como el de plan de celular como el de cargo básico mensual.</i>
10. Grabación audio y video.	Entrevista final 4, Minuto 0:20 - 0:37	D: <i>¿Cómo cuál de los dos se comporta?</i> S1: <i>como el de plan de celulares.</i> D: <i>¿SÍ?</i> S1: <i>Sí, con una covariación lineal.</i> D: <i>ósea, se comporta como una covariación ¿de qué tipo?</i> S1: <i>eh ... lineal.</i> D: <i>Entonces tiene una covariación lineal.</i>
11. Grabación audio y video.	Entrevista final 4, Minuto 0:38 - 1:22	D: <i>O sea si se comporta como la de los celulares.</i> S1: <i>sí.</i> D: <i>¿Bueno y por qué?</i> S1: <i>eh ... porque podemos ver la relación, podemos ver la relación entre el voltaje y la</i>

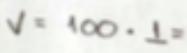
		<p>corriente y vemos que si aumento uno el otro aumentara, pero aumenta constantemente, ósea como vimos anteriormente si aumento 2000 voltios aumento dos amperios, si aumento 4000 voltios aumento pues los 4 amperios.</p>
12. Grabación audio y video.	Entrevista final 4, Minuto 6:35 - 7:05; 8:10 - 8:26	<p>S1: Entonces si decimos que aquí tenemos 1.25 amperios que serian como más o menos por acá ehm... tendríamos que primero acabar de hacer la gráfica para mirar, entonces estamos relacionando 800 con 0.8 y 1000 con ...</p> <p>D: ¿Para 340 voltios?</p> <p>S1: Ehm .. tendríamos 0,34 y para 4,6 amperios tocaría sacarla mucho.</p>
13. Grabación audio y video.	Entrevista final 5, Minuto 0:00 - 0:29	<p>S1: Entonces el voltio, voltaje es igual a la razón de cambio por el incremento de la corriente eh ... pues más, más el valor inicial que serian ...</p> <p>D: ¿En ese caso hay valor inicial? ¿la gráfica parte de algún valor inicial?</p> <p>S1: Parte de c ... la gráfica parte de cero de un valor inicial cero.</p> <p>7. Encuentre una Representación algebraica (ecuación) que relacione V y I.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 5px auto;"> $V = r \cdot I + b$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 5px auto;"> $V = 1000 \cdot I$ </div>
14. Grabación audio y video.	Entrevista final 4, Minuto 11:00 - 11:15 y también Minuto 12:10 - 13:40	<p>S1: ehm ... aquí nos damos cuenta que, cada 100 voltios aumentamos 0,1 amperios.</p> <p>S1: Pues ahí podríamos utilizar una ecuación.</p> <p>D: Si una ecuación. ¿Cómo es la razón de cambio? ¿la razón de cambio a qué es igual?</p> <p>S1: Es igual al cambio de ... sería igual pues a la, la razón de cambio es igual al incremento del voltaje ósea al cambio del voltaje sobre el incremento o el cambio de la corriente.</p> <p>D: ¿Y ya tienes esos valores verdad? ¿entonces puedes determinar la razón de cambio?</p> <p>S1: Sí, entonces ahí estaríamos diciendo que 1000, que la razón de cambio es igual a 100 voltios sobre los 0,1 amperios, entonces ahí estaríamos diciendo que la razón de cambio es igual ... (escribe un resultado).</p>

15. Grabación audio y video.	Entrevista Final 6, Minuto 0:00 - 0:28	D: <i>Y entonces ahora si se cambia el valor de la resistencia ¿va a cambiar la forma en que la covariación de I con respecto a V?</i> S1: <i>Eh ... pues si porque si estamos diciendo que los voltios eh ... son pues iguales a la resistencia, ósea la razón de cambio eh por la electricidad, entonces estaríamos diciendo que este valor cambia y si cambia estaríamos cambiando todo también tendríamos que cambiar la gráfica.</i>
16. Grabación audio y video.	Entrevista final 6, Minuto 0:28 - 0:32	S1: <i>Tendríamos que cambiar muchas cosas.</i> D: <i>A bueno, listo.</i> 

Sujeto 2

Número y tipo de evidencia	Tiempo inicial tiempo final	Observaciones- interpretaciones-preguntas-cualquier otro comentario
1. Grabación audio y video.	Minuto 0:09 al 0:25 Entrevista Final 2.	D: <i>¿Cuáles son las variables que vamos a estudiar en esta situación?</i> S2: <i>Los voltios.</i> D: <i>Los voltios sí señor.</i> S2: <i>Los amperios.</i> D: <i>Los amperios que hablan de la ...</i> S2: <i>Corriente.</i>
2. Grabación audio y video.	Minuto 0:09 al 0:25 Entrevista Final 2.	D: <i>¿Cuáles son las variables que vamos a estudiar en esta situación?</i> S2: <i>Los voltios.</i> D: <i>Los voltios sí señor.</i> S2: <i>Los amperios.</i> D: <i>Los amperios que hablan de la ...</i> S2: <i>Corriente.</i>
3. Grabación audio y video.	Minuto 1:05 al 1:15 Entrevista final 2.	D: <i>¿Hay alguna dependencia entre esas dos magnitudes?</i> S2: <i>Ósea si, la corriente depende de los voltios.</i> D: <i>Es correcto.</i>
4. Grabación audio y video.	Minuto 0:25 al 0:50 Entrevista final 3.	D: <i>¿Qué relación podemos tener entre corriente y voltaje?</i> S2: <i>Entre mayor voltaje mayor corriente.</i> D: <i>listo, entonces ahí podemos hablar de una relación ... ¿de qué tipo?</i>

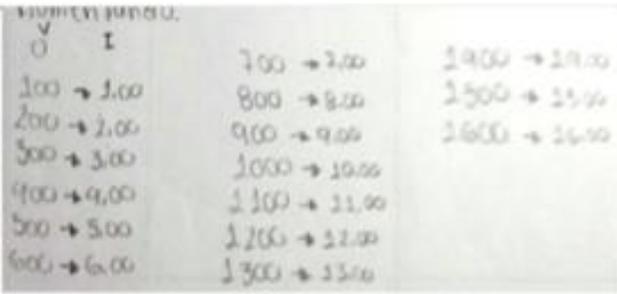
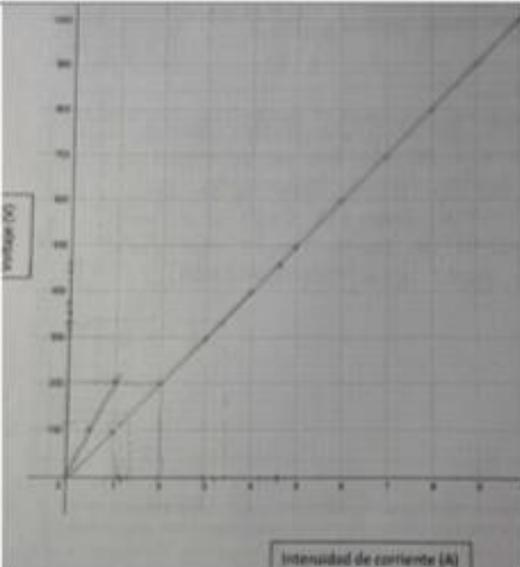
		<p>S2: Eh ... una relación de tipo ...</p> <p>D: Inversa, directa ...</p> <p>S2: ¡Directa no?!</p> <p>D: Directa.</p>
5. Imagen		<p>la Corriente depende del voltaje!</p> <p>0 V - 0 A 100 V - 10 A 200 V - 20 A 300 V - 30 A 400 V - 40 A</p>
6. Grabación audio y video.	<p>Minuto 1:27 al 2:27</p> <p>Entrevista final 4.</p>	<p>D: Se parece más a como covaria el plan de celular o a cómo funcionaba, como estudiamos la caída libre ¿a cuál de los dos se parece más?</p> <p>S2: Al de los planes de celular.</p> <p>D: ¿Por qué?</p> <p>S2: Porque en el de planes de celular la razón de cambio era una nada más o sea no variaba.</p> <p>D: Era constante.</p> <p>S2: Era constante, o sea, por ejemplo, cuando decían lo de 15, aumento 15, aumento 15. En el de caída libre aumentaba de diferentes formas.</p> <p>D: pero tú no has hallado la razón de cambio en este ¿sí o no? En este no has hallado la razón de cambio.</p> <p>S2: No.</p> <p>D: Y me estás diciendo que la razón de cambio en este es ... también como el de plan de celulares.</p> <p>S2: 1.0 en amperios 1.0.</p>

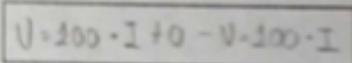
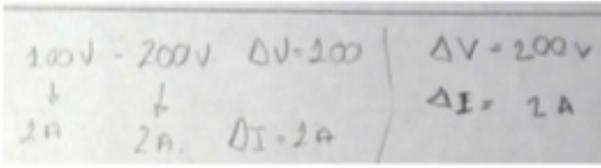
7. Grabación audio y video.	Minuto 2:30 al 2:36 Entrevista final 4.	S2: Cada 100 aumenta 1.0 D: A bueno ¿y con eso tú puedes encontrar la razón de cambio? S2: sí.
8. Grabación audio y video.	Minuto 0:00 al 1:00 Entrevista final 5.	D: Aquí usted está diciendo que para 100 tengo un amperio. Para 1.2 amperios, pusiste acá 120 ¿sí o no? ¿por qué 1.2? S2: 1.12 D: No no ..., no lo borres, me gustaría saber por qué pones 1.2 y no otro valor. S2: Porque ya me acorde que era equivalente, ósea es constante ¿no? D: Bueno entonces ... S2: 100 voltios 1 amperio, pues si son 120 entonces 1.2 amperios. D: A bueno ¿y entonces 1.25 amperios? S2: Pues 125 voltios. Entonces 3.4 y 460 (completa la tabla).
9. Grabación audio y video.	Minuto 0:00 al 1:22 Entrevista final 8.	D: Ahora qué vamos a hacer, hazme el favor de escribirme una ecuación que represente al voltaje y a la corriente, así como la que hicimos en el plan de celulares. ¿cómo quedaría? S2: Hallar el voltaje es igual a la relación de cambio que equivale a 100 por la corriente y eso es igual a ... D: El voltaje que vamos a hallar. Perfecto (docente lee lo que el estudiante escribe) Esta está escrita de manera general ¿sí o no? Aquí la razón de cambio ¿quién es? S2: 100 D: Y en el circuito eléctrico esa razón de cambio ¿a qué hace relación? S2: A la bombilla. D: A la bombilla muy bien, ósea escribe acá por favor. S2: La resistencia de la bombilla es 100. D: Muy bien, escríbeme la ecuación acá de este circuito. Es igual a qué (Sujeto escribe) a ¿100 por? Corriente (docente lee la ecuación escrita) D: Muy bien, esa es la ecuación. 7. Encuentre una Representación algebraica (ecuación) que relacione V y I.  

<p>10. Grabación audio y video.</p>	<p>Minuto 0:20 al 0:32 y Minuto 1:30 al 2:02 Entrevista final 6.</p>	<p>S2: <i>Pues sigue siendo lo mismo.</i> D: <i>Sí ¿Por qué?</i> S2: <i>O sea, cambia obviamente el voltaje y los amperios.</i> D: <i>¿y cómo es ese cambio?</i> S2: <i>constante.</i></p> <p>S2: <i>Ah pues no hay necesidad de hacerlo, pues para incrementar los voltios serían de a 100.</i> D: <i>Bueno de a 100 voltios.</i> S2: <i>sí, Incremento en voltios son de a 100.</i> D: <i>ajá</i> S2: <i>Y los incrementos en ...</i> D: <i>Corriente.</i> S2: <i>De corriente sí, en corriente es de 1.0.</i> D: <i>Bueno ¿cuánto da esa división?</i> S2: <i>100</i> D: <i>o sea que la razón de cambio ¿cuánto vale?</i> S2: <i>100.</i></p>
<p>11. Grabación audio y video.</p>	<p>Minuto 1:36 al 2:53 Entrevista final 8.</p>	<p>a. D: <i>Póngale cuidado a lo que le estoy preguntando. Con esos valores que teníamos inicialmente, encontramos que la covariación entre el voltaje y la intensidad de corriente era una covariación de ¿qué tipo?</i> S2: <i>Constante, lineal.</i> D: <i>Muy bien, listo y a partir de todo esto encontramos el valor de la razón de cambio que fue ...</i> S2: <i>100</i></p> <p>b. D: <i>100 muy bien, si yo cambio el valor de la resistencia. O sea de la bombilla, le pongo una bombilla más grande o más pequeña con una mayor o menor resistencia, la forma en la que covaria el voltaje y la corriente serían iguales o serían distintas.</i> S2: <i>iguales.</i> D: <i>¿Iguales? A bueno, entonces eso es lo que te estoy preguntando acá ¿y por qué?</i> S2: <i>Pues porque de todas formas para hallar V es la razón por la corriente, no tiene nada que ver.</i> D: <i>A bueno, o sea tú me estás diciendo que lo único que yo estaría cambiando es el valor de ...</i> S2: <i>Sí de la ... de la ¿qué?, de la razón.</i> D: <i>Es correcto.</i></p>

Sujeto 3 Nivel Bajo

Número y tipo de evidencia	Tiempo inicial tiempo final	Observaciones- interpretaciones-preguntas-cualquier otro comentario
1. Grabación audio y video.	Entrevista final Paula Beltrán 1. Min 5:34- Min 5:48	D: <i>Yo quiero saber a medida que vamos cambiando los valores de voltaje ¿qué pasa con los valores de la corriente? ¿Qué sucede con las cargas eléctricas?</i> S3: <i>Cambian.</i> D: <i>Van a cambiar, listo.</i>
2. Grabación audio y video.	Entrevista final Paula Beltrán 1. Min 6:14- Min 7:04	D: <i>Léeme lo que escribiste.</i> S3: <i>Empieza desde eh ..., es que, en sí, ahí me equivoque porque empieza desde cero.</i> D: <i>¿Por qué empieza desde cero?</i> S3: <i>Porque antes de que esto se mueva esto está arriba.</i> D: <i>Ah ósea el circuito está abierto ¿sí o no?.</i> S3: <i>sí.</i> D: <i>Mira, así lo abrimos.</i> S3: <i>Y ahí empieza desde cero.</i> D: <i>muy bien, excelente, ósea ¿cuánto voltaje hay en el resistor, en la resistencia?</i> S3: <i>nada.</i> D: <i>Nada, entonces si no hay voltaje.</i> S3: <i>Esta en cero.</i> D: <i>Esta en cero la corriente, muy bien. Entonces para el primer valor cero?</i> S3: <i>Entonces empieza desde cero.</i> D: <i>Si perfecto muy bien, luego ¿qué hiciste?</i> S3: <i>Bueno, entonces aquí sería cero, al final llega a sus 160 voltios y se quema la batería.</i> D: <i>¡1600!</i> S3: <i>sí, 1600.</i>
3. Grabación audio y video.	Entrevista final Paula Beltrán 1. Min 9:03- Min 9:40	D: <i>¿Cómo cambia una variable cuando a la otra le estamos generando cambios? ¿sí? ¿a quién estamos cambiando aquí? ¿a quién podemos cambiar(variable)?</i> S3: <i>Acá o ... no ...</i> D: <i>¿Qué variable es la que tu manipulas?</i> S3: <i>Aquí (señala la corriente)</i> D: <i>¿Tu manipulas la corriente?</i> S3: <i>sí.</i> D: <i>cambíame la corriente.</i>

		<p>S3: <i>mmm entonces sería ... el ... no, no sé.</i></p> <p>D: <i>¿cómo cambias la corriente?</i></p> <p>S3: <i>A medida que aumentas ...</i></p> <p>D: <i>¿Aumento qué?</i></p> <p>S3: <i>El voltaje.</i></p> <p>D: <i>A bueno, entonces ¿cuál es la variable tu manipulas?</i></p> <p>S3: <i>El voltaje.</i></p>																																				
4. Grabación audio y video.	Entrevista final Paula Beltran 1. Min 8:43- Min 8:53	S3: <i>Entonces yo puse, a medida que la velocidad de los voltios vayan cambiando su velocidad aumenta cada vez, puede llegar un punto límite, pero aún así puede seguir transcurriendo.</i>																																				
5. Imagen.		 <table border="1"> <thead> <tr> <th>V</th> <th>I</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>100</td><td>1.00</td></tr> <tr><td>200</td><td>2.00</td></tr> <tr><td>300</td><td>3.00</td></tr> <tr><td>400</td><td>4.00</td></tr> <tr><td>500</td><td>5.00</td></tr> <tr><td>600</td><td>6.00</td></tr> <tr><td>700</td><td>7.00</td></tr> <tr><td>800</td><td>8.00</td></tr> <tr><td>900</td><td>9.00</td></tr> <tr><td>1000</td><td>10.00</td></tr> <tr><td>1100</td><td>11.00</td></tr> <tr><td>1200</td><td>12.00</td></tr> <tr><td>1300</td><td>13.00</td></tr> <tr><td>1400</td><td>14.00</td></tr> <tr><td>1500</td><td>15.00</td></tr> <tr><td>1600</td><td>16.00</td></tr> </tbody> </table>	V	I	0	0	100	1.00	200	2.00	300	3.00	400	4.00	500	5.00	600	6.00	700	7.00	800	8.00	900	9.00	1000	10.00	1100	11.00	1200	12.00	1300	13.00	1400	14.00	1500	15.00	1600	16.00
V	I																																					
0	0																																					
100	1.00																																					
200	2.00																																					
300	3.00																																					
400	4.00																																					
500	5.00																																					
600	6.00																																					
700	7.00																																					
800	8.00																																					
900	9.00																																					
1000	10.00																																					
1100	11.00																																					
1200	12.00																																					
1300	13.00																																					
1400	14.00																																					
1500	15.00																																					
1600	16.00																																					
6. Imagen.																																						
7. Grabación audio y video.	Entrevista final Paula Beltran 1. Min 7:50- Min 8:53	<p>D: <i>¿A cuál se parece más al de planes de celular o al de caída libre? ¿qué escribiste?</i></p> <p>S3: <i>En lo que yo quería expresar pero no sabía como escribirlo, es que en una... se parecen mucho.</i></p> <p>D: <i>¿Con cuál?</i></p> <p>S3: <i>Se parece a las dos.</i></p> <p>D: <i>A la dos.</i></p> <p>S3: <i>Sí, se parece a las dos porque ambas parten de un punto cero.</i></p>																																				

		<p>D: Pero tu me dijiste que los planes de celulares no parten de cero.</p> <p>S3: mmm si, entonces ...</p> <p>D: bueno, en ese caso no se parece al de celular porque este parte de cero y el de celulares no parte de cero, ¿pero si no hay cargo básico?</p> <p>S3: Entonces si partiría de cero.</p> <p>D: bueno, ¿entonces en ese caso?</p> <p>S3: Depronto si, si se parecerían pero igual no.</p> <p>S3: Entonces yo puse, a medida que la velocidad de los voltios vayan cambiando su velocidad aumenta cada vez, puede llegar un punto limite, pero aún así puede seguir transcurriendo.</p>												
8. Grabación audio y video.	Entrevista final Paula Beltran 1. Min 11:40 - Min 12:10	<p>S3: O sea, de pronto esta parte desde cero pero es una covariación lineal.</p> <p>D: ah o sea juega como para lo de la covariación lineal ¿por qué?</p> <p>S3: porque es una línea recta.</p> <p>D: A bueno, entonces ya no se parece a esta (a la de caída libre), ¿ésta (ley de ohm) se podrá modelar como hicimos con la de planes de celular?</p> <p>S3: Sí.</p>												
9. Imagen.	Hoja de trabajo Ley de Ohm pregunta 4.	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>Voltaje (V)</td> <td>120</td> <td>125</td> <td>340</td> <td>460</td> <td>1200</td> </tr> <tr> <td>Intensidad de corriente (A)</td> <td>1,20</td> <td>1,25</td> <td>3,80</td> <td>4,6</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Voltaje (V)	120	125	340	460	1200	Intensidad de corriente (A)	1,20	1,25	3,80	4,6	
Voltaje (V)	120	125	340	460	1200									
Intensidad de corriente (A)	1,20	1,25	3,80	4,6										
10. Imagen, grabación audio y video.	<p>Hoja de trabajo Ley de Ohm preguntas 5 y 7.</p> <p>Entrevista final Paula Beltran 2. Min 13:34 - Min 14:26</p>	<p>a.</p> <p>7. Encuentre una Representación algebraica [ecuación] que relacione V y I.</p>  <p>b.</p>  <p>c.</p> <p>D: ¿Qué sucede con los incrementos de corriente ante incrementos de voltaje? Que por cada ...</p> <p>S3: ¿Voltaje?</p>												

		<p>D: No, ¿qué incrementos estoy haciendo en el voltaje?, si yo hago un incremento de 100 voltios ¿cuánto se incrementa la corriente?</p> <p>S3: 200.</p> <p>D: La corriente, los amperios.</p> <p>S3: 1</p> <p>D: ¿y eso sucede siempre?</p> <p>S3: Sí.</p> <p>D: Muéstrame, demuéstramelo. (Sujeto 3 hace uso del simulador)</p> <p>D: cuéntame.</p> <p>S3: Va aumentando.</p> <p>D: por ejemplo, Cuéntamelo, narrame.</p> <p>S3: O sea porque si tienes aquí (señala la batería del simulador), aquí también sube (señala el amperímetro en el simulador).</p> <p>D: O sea, si tengo cuánto? Si tengo ...</p> <p>S3: Ayno!, no cambia.</p> <p>D: No cambia, haber miremos, tu me estas diciendo que si incremento el voltaje en 100 los amperios incrementan en cuánto.</p> <p>S3: En 1.</p> <p>D: En un amperio.</p> <p>S3: ah, o si sube porque digamos de 200 a 300.</p> <p>D: ¿y la corriente subió?</p> <p>S3: Sí</p> <p>D: ¿Cuánto subió?</p> <p>S3: 1.</p> <p>D: 1 también. Para cualquier valor sube de a uno si yo voy subiendo de a 100.</p>
11. Grabación audio y video.	Entrevista final Paula Beltran 3. Min 6:30- Min 6:47	<p>D: si yo cambio el valor de la resistencia. O sea de la bombilla, le pongo una bombilla más grande o más pequeña con una mayor o menor resistencia, la forma en la que covaria el voltaje y la corriente, cambiaría o no cambiaría.</p> <p>S3: O sea que si cambia!</p> <p>D: Sí?, o sea ¿deja de ser una línea recta?</p> <p>S3: No.</p> <p>D: ¿sigue siendo una covariación lineal?</p> <p>S3: Sí...</p> <p>D: Pero ...</p> <p>S3: va más inclinada. (El sujeto traza una línea más inclinada al suponer que la resistencia de 100 cambia por una de 200)</p>

<p>12. Grabación audio y video.</p>	<p>Entrevista final Paula Beltran 3. Min 9:48- Min 10:20</p>	<p>D: <i>Le voy a aumentar 100 más. ¿en cuánto me va a quedar la corriente?</i> S3: <i>En 150.</i> D: <i>Muy bien. Para este caso ¿cuándo la resistencia era de 200, cuando la resistencia era de 100 ¿la razón de cambio de cuánto era?</i> S3: <i>100</i> D: <i>100, o sea que por cada 100 aumentos, 100 voltios que yo aumento en el voltaje, la corriente se aumentaba cuánto...</i> S3: <i>1.</i> D: <i>1, y esa es la forma en la que covaria las dos magnitudes.</i></p>
-------------------------------------	--	--