CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL A PARTIR DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO

HENRY GEOVANNY CARDOZO ROZO
LEONOR ANDREA ESPINEL ESPINEL

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN –ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C., MAYO DE 2018

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN LINEAL A PARTIR DEL RAZONAMIENTO COVARIACIONAL EN ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO

HENRY GEOVANNY CARDOZO ROZO
LEONOR ANDREA ESPINEL ESPINEL

Trabajo de Grado presentado como requisito
Para optar al título de Magister en educación

DIRECTOR: MARTHA ALBA BONILLA ESTÉVEZ

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN –ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C., MAYO DE 2018

RECTOR:	JORGE HUMBERTO PELÁEZ PIEDRAHITA. S.J.
DECANO ACADÉMICO:	FÉLIX ANTONIO GÓMEZ HERNÁNDEZ, PhD.
DIRECTOR DE POSTGRADOS:	RICARDO MAURICIO DELGADO SALAZAR, PhD.
DIRECTORA DE LA LÍNEA:	JORGE NICASIO CASTAÑO GARCIA
DIRECTOR DE TESIS:	MARTHA ALBA BONILLA ESTÉVEZ

NOTA DE ADVERTENCIA

"La universidad no se hace responsable por los conceptos emitidos por sus alumnos en sus trabajos de tesis. Sólo velará porque no se publique nada contrario al dogma y a la moral católica y porque las tesis no contengan ataques personales contra persona alguna, antes bien se vean en ellas el anhelo de buscar la verdad y la justicia."

Artículo 23, resolución No 13 del 6 de Julio de 1946,

por la cual se reglamenta lo concerniente a Tesis y Exámenes de Grado

en la Pontificia Universidad Javeriana.

AGRADECIMIENTOS

A Dios, padre celestial que en su infinito amor siempre nos ha guiado y nos brindó la oportunidad de formación académica, en donde día a día nos llenó de fuerza y sabiduría para afrontar los buenos y malos momentos.

A Martha Bonilla, por su paciencia, entrega y total colaboración, su experiencia y oportuna ayuda enriquecieron esta investigación.

A los estudiantes de grado noveno 2017 jornada tarde del colegio Néstor Forero Alcalá IED, por su permanente participación durante el proceso.

A los docentes que nos acompañaron en todo este proceso de formación, ya que con sus enseñanzas nos permitieron profundizar en nuestros conocimientos pedagógicos, didácticos y humanos, aspectos esenciales para cambiar y mejorar nuestras prácticas educativas en la escuela.

A todas las personas que de alguna manera permitieron que esta investigación se realizará con éxito.

DEDICATORIA

De Henry:

A Dios, que siempre ha estado presente en mi andar, pensar y actuar, ya que ha forjado mi destino con todas las oportunidades que me ha brindado.

A mis padres, Carmen y Julián, que con su infinita confianza, amor y comprensión siempre fueron el motor que impulso este gran proyecto en mi vida.

A Johana, quien, con su paciencia y amor, siempre estuvo pendiente de mi y me permitió desarrollar de la mejor manera cada trabajo que la maestría exigió.

A Andrea, que con su valioso apoyo y comprensión en todo este camino me enseñó a no darme por vencido, además de ayudarme a hacer de este proceso algo ameno y divertido.

De Andrea:

A mis padres, que con su ejemplo de fortaleza y lucha constante me han guiado por el camino, llenando mi vida de amor, consejos y enseñanzas, para ser quien soy.

A mi inspiración, mis mejores amigos, la luz de mi vida Tommy, Matilda y Chiquito, quienes con sus travesuras llenan mis días de alegría.

Siempre juntos, los amo.

Tabla de contenido

Índice de tablas

Índice de figuras

Resumen

Este trabajo presenta un análisis de la construcción que hacen los estudiantes de grado noveno del colegio Néstor Forero Alcalá del concepto función lineal, a partir del razonamiento covariacional entre magnitudes que describen situaciones que refieren fenómenos de variación, y mediante la conversión de representaciones a partir del trabajo con una secuencia de actividades en las que se propone la comparación entre la longitud del lado de un cubo elaborado en origami vs el perímetro y el área de una cara y total.

En esta investigación se seleccionó como temas de estudio las propiedades del cubo como elementos invariantes y la modelación de situaciones que involucren relaciones entre magnitudes como longitud de la arista, perímetro y área, para encontrar relaciones entre variables que se comportan mediante una razón de cambio constante de aumento, descritas a partir de los diferentes niveles de razonamiento covariacional y los descriptores definidos para dar cuenta de la habilidad para hacer conversiones entre los diferentes representaciones semióticas.

Del trabajo de investigación realizado es posible afirmar que las situaciones dinámicas que involucran el pensamiento variacional en diferentes contextos aportan al desarrollo de este en los estudiantes, del mismo modo, se evidencia que el reconocimiento de coordinación entre dos magnitudes aporta a la construcción del concepto de función lineal desde la dependencia de variables al igual que la conversión entre representaciones aporta mayores herramientas para esta construcción del concepto. Por medio de la aplicación y análisis de la propuesta anterior se evidencia que los estudiantes participantes avanzaron en relación con la construcción del concepto de concepto de función lineal en su significado de relación constante entre magnitudes.

Palabras clave: Función lineal, razonamiento covariacional y representaciones.

Abstract

This document is an analysis about the shaping of the linear function concept made by the students of ninth grade of Nestor Forero Alcalá School through the co variational reasoning, between the magnitudes that describe situations of variation phenomena and the uses of different systems of representation. The established activities propose the comparison between the length of a side of an origami cube and the perimeter, lateral and total area of it.

The properties of cube were selected in this research like invariant elements, likewise the modeling of situations that involve relations among magnitudes such as length of the edge, perimeter and area. It helps us to find variables that behave for a rate of constant change of increase, descriptions of the different levels of co variational reasoning and the descriptors defined to see the ability to use the systems of representation among the different semiotic representations

The research Project carried out, allows us to state that dynamic situations that involve variational thinking in different contexts provide its development in the students, at the same way, the recognition of coordination among two magnitudes from the dependence variables as well as the use of systems of representation also provide more tools in the shaping of linear function concept. The application and analysis of this proposal highlight that students proceeded in relation to the shaping of linear function concept in its meaning of constant relation among magnitudes.

Key words: Linear function, Covariational reasoning and Representations

Introducción

A partir de las distintas propuestas curriculares que se abordan en el aula actualmente, se considera la inclusión de un enfoque dinámico para el desarrollo de las distintas habilidades del pensamiento matemático, específicamente el concepto de función lineal, considerando la tensión que existe, por un lado, entre lo formulado por los diferentes referentes legales en educación de Colombia, así como las diversas evaluaciones nacionales e internacionales. En medio, lo que plantean las didácticas y educadores matemáticos para la enseñanza y, en el otro extremo, lo que realmente se transmite y sucede en las prácticas educativas del aula convencional, ya que como lo evidencian los diferentes resultados de las pruebas, los estudiantes en general tienen gran dificultad con el desarrollo y avance del concepto de función lineal, que hace parte del pensamiento variacional, puesto que la presentación de este concepto en el aula regular es estática.

Es por esto que se propone el análisis de la construcción del concepto de función lineal por parte de los estudiantes de grado noveno del colegio Néstor Forero Alcalá I.E.D. desde la teoría de razonamiento covariacional propuesta por Carlson, Jacobs, Coe, , Larsen, y Hsu (2003) y la teoría de las representaciones semióticas de Duval (2016), quienes a partir de sus investigaciones consideran que la adquisición del concepto de función lineal desde un enfoque dinámico requiere la modelación de situaciones que propongan fenómenos de variación usando la covariación entre las magnitudes consideradas, además de la conversión entre representaciones semióticas, que facilitan la construcción del concepto, teniendo en cuenta que Vasco (2006), menciona que una de las mejores formas de desarrollar el pensamiento variacional, es a partir de experiencias educativas que permitan resaltar el papel dinámico de la variación en contraposición de este como algo estático.

De igual manera, la investigación aporta diferentes experiencias de aula que giran en torno al estudio (perímetro y área de una de las caras) de cubos de diferentes tamaños que los estudiantes hicieron en origami, con diferentes hojas de papel de forma cuadrada, explorando el concepto de función desde el pensamiento variacional, apoyados en el pensamiento métrico y sistemas geométricos, tal como lo sugiere Vasco (2006).

Por ello, el objetivo principal de este trabajo es analizar la construcción del concepto de función lineal que alcanzan los estudiantes de grado noveno a partir del razonamiento covariacional y de la conversión entre sus diferentes representaciones semióticas a partir de una serie de sesiones que integran un marco conceptual elaborado sobre elementos de la función lineal y pensamiento variacional.

Para conseguir este propósito se desarrolló una investigación que se consolida en el siguiente informe, se presenta un documento que consta básicamente de cuatro capítulos, el primer capítulo, denominado “Aspectos generales”, presenta los antecedentes desde la revisión de distintos artículos y monografías que tienen relación con la temática de este trabajo se hace una presentación del problema de investigación, la justificación del mismo y los objetivos del mismo

El segundo capítulo, denominado “Marco teórico”, describe el desarrollo de la función a través de la historia y menciona la definición que sea eje fundamental en esta investigación, se realiza una caracterización de la función lineal, y por último los dos ejes teóricos centrales de este trabajo: la teoría de razonamiento covariacional propuesta por Carlson et. al (2003) y la propuesta por Duval (2016) que describe la conversión entre representaciones semióticas

En el tercer capítulo denominado "Metodología" se presenta el tipo de investigación y los criterios de construcción y análisis de las situaciones diseñadas para la experiencia, tanto de diagnóstico como de intervención, además de los instrumentos usados a lo largo de la investigación y las categorías de análisis adaptadas.

En el capítulo cuatro "Análisis", se describen los resultados obtenidos en la aplicación de las anteriores situaciones y se hacen las respectivas interpretaciones a partir de los niveles adaptados para este trabajo, con el fin de dar respuesta a la pregunta que originó la investigación. Por último, se presentan las conclusiones, considerando los aportes de este trabajo frente a las prácticas en el aula regular y los anexos.

1. Capítulo I: Aspectos Generales

1.1. Antecedentes

El pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos han sido incluidos en los distintos referentes de calidad, planteados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), como son los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) y el documento de fortalecimiento curricular Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA-v2) (MEN, 2016), que además de orientar los procesos curriculares de los establecimientos educativos en Colombia, pretenden favorecer prácticas de aula en las que se aborden los diferentes tipos de pensamiento matemático, para este trabajo nos centraremos específicamente en el pensamiento variacional.

De igual manera, en las distintas pruebas nacionales (SABER 3°, 5°, 9° y 11°) y en las pruebas externas (PISA, TIMSS o TERCE, entre otras), los pensamientos son evaluados a partir de sus contenidos. Para el pensamiento variacional, se espera que desde el aula se proponga el desarrollo desde un enfoque dinámico, es por esto que desde los referentes descritos anteriormente, se promueve en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares el desarrollo de los diferentes pensamientos y las competencias matemáticas, respecto al pensamiento variacional, el estudio de conceptos como constante, variable, función, razón o tasa de cambio, dependencia e independencia de una variable con respecto a otra, y de los distintos tipos de modelos funcionales asociados a ciertas familias de funciones, como las lineales y las afines (o de gráfica lineal), las polinómicas y las exponenciales, así como las relaciones de desigualdad y el manejo de ecuaciones e inecuaciones (MEN, 1998, p. 51-52, MEN, 2006, p. 87).

La construcción de la función lineal, como elemento fundamental del pensamiento variacional ha sido estudiada en varias investigaciones y monografías realizadas en el campo de la didáctica de las matemáticas, ya que dicho concepto se considera fundamental para la modelación de fenómenos relacionados con la variación y el cambio. Algunas de las investigaciones que se encontraron respecto al concepto de función lineal, se han realizado con estudiantes de primaria, secundaria y estudiantes de primeros semestres de universidad y analizan las dificultades presentes en la comprensión de función lineal a partir de las teorías de las representaciones y el razonamiento covariacional. Como conclusión general de las investigaciones, se destaca la importancia de asumir una visión dinámica del concepto.

Considerando que esta investigación tiene como ejes centrales las transformaciones entre las representaciones asociadas al concepto de función lineal y su relación con el razonamiento de tipo covariacional, en este apartado se describen algunos trabajos que se inscriben en dichas temáticas. Para su presentación los hemos clasificado en tres grupos: los estudios relacionados con las representaciones asociadas a la función lineal, los estudios asociados con el enfoque variacional de la función (en especial de la covariación y el razonamiento covariacional) y, por último, los estudios sobre las dificultades que presentan los estudiantes cuando resuelven situaciones de variación lineal.

1.1.1 Estudios relacionados con las representaciones asociadas a la función lineal.

Guzmán (2006), apoyada en la teoría de Duval (1998) y Janvier (1978 y 1987), hace una investigación con 73 estudiantes de tercer grado de educación secundaria (grado octavo). En este trabajo, propone un cuestionario para ser aplicado de manera grupal, que está constituido por seis actividades enfocadas en identificar las dificultades que presentan los estudiantes en torno al trabajo con las diferentes representaciones de la función lineal, concluyendo que:

- La conversión entre representaciones es una dificultad provocada por el poco uso de esta en la modelación de situaciones que incluyan fenómenos de variación.
- Los estudiantes presentan dificultades para articular las representaciones algebraicas, tabulares y gráficas.
- En el aula regular se hace evidente la poca preocupación por trabajar procesos de conversión, dando mayor importancia a procesos de mecanización.
- Los estudiantes usan la representación algebraica de preferencia, debido a que esta es la que más se trabaja en las clases tradicionales.

En relación con el trabajo de investigación propuesto, la monografía de Guzmán (2006) nos aporta una caracterización de las dificultades de los estudiantes respecto a la conversión entre representaciones y el uso de estas para la modelación de problemas.

Por otro lado, Ming (2001), en el artículo "Learning to Graph Linear Functions: A Case Study of Conceptual Change", se apoya en la teoría de Moschkovich (1996, 1998, 1999), para hacer un estudio de caso que muestra las estrategias y concepciones emergentes en la resolución de problemas que hace un estudiante, a partir de la implementación de una serie de actividades compuesta por seis tutorías, diseñadas para desarrollar el concepto de función lineal, particularmente de la conversión entre la representación algebraica y gráfica. Respecto a las dificultades que surgen entre las relaciones que existen en las diferentes representaciones de la función, al variar la constante *b* de la representación algebraica y el reconocer lo que varía y permanece constante en la representación gráfica (horizontal y verticalmente), se concluye que:

- El estudiante desarrolló herramientas conceptuales que le permitieron refinar sus concepciones y estrategias para la conversión de una representación a otra sobre el concepto de función, pero no cambió su concepción inicial sobre dicho concepto.
- Los diseñadores de planes de estudio y los docentes deben considerar el papel de los recursos materiales y las formas en que los alumnos pueden usarlos.

En esta investigación también se sugieren cuatro opciones para facilitar la comprensión del concepto de función lineal: aplicación de diferentes tareas, construcción de estrategias generales, comparación de estrategias de resolución y generación de criterios de evaluación de estrategias. También se propone una secuencia que permita superar dificultades en la comprensión de función lineal mediante la conversión entre representaciones, haciendo énfasis en las relaciones entre el registro gráfico y el algebraico. Tomamos específicamente el tratamiento de la función lineal desde la representación algebraica, donde se consideran las partes de la función lineal como la pendiente *(m)* y la constante *(b)*.

Por su parte, Ospina (2012), basada en la teoría de Duval (1999) y D´Amore (2004), hizo un trabajo con 12 estudiantes de grado octavo, en el cual aplicó dos instrumentos, en los que se proponen tareas para que el estudiante haga conversiones entre diferentes representaciones y encuentre la correspondencia entre las unidades significantes de una representación con respecto a las unidades significantes de la otra representación, en situaciones contextualizadas, concluyendo que:

- Las distintas situaciones de contexto presentadas son determinantes al momento de escoger una representación para ser solucionada.
- Los estudiantes identifican las unidades significantes de las representaciones, específicamente la gráfica, haciendo uso de estás para hacer la conversión a otras representaciones.
- Se evidencia dificultad para hacer conversiones de la representación algebraica a otras representaciones que no sean la gráfica, por la falta de congruencia entre las representaciones del objeto matemático.
- Los estudiantes escogieron como primera representación la gráfica, ya que este facilita la conversión a otras representaciones, debido a que permite mejor visualización de la función lineal al hacer evidentes elementos poco visibles en otras representaciones.
- Se reafirma la teoría de Duval, donde se manifiesta que el uso de distintas y múltiples representaciones semióticas facilita la comprensión del concepto de función lineal, a partir de la diferencia entre las representaciones del concepto y el objeto representado.

Este trabajo nos aporta en la importancia de la utilización de unidades significantes (en este trabajo descriptores) de cada representación trabajada y en su manejo para el planteamiento de los instrumentos de investigación y análisis.

Por último, Posada y Villa (2006), en “Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional” utilizan la metodología de investigación ingeniería didáctica y la teoría de representaciones semióticas de Duval (2004), con el objetivo de mostrar que estas representaciones promueven el estudio, objetivación, sistematización y comprensión del concepto de función que se considera modelo matemático. Proponen y aplican una prueba diagnóstica y cinco sesiones para trabajar con 15 estudiantes de grado décimo del programa de media técnica. De este trabajo se concluye que:

- Se encuentra que el concepto de variación ha evolucionado históricamente, al alcanzar diversos niveles en cuanto a sus representaciones, por medio de situaciones de variación.
- Se identifica la función lineal como modelo matemático de los fenómenos que involucran variaciones donde la razón de cambio es constante.
- Para la modelación matemática, vista como herramienta didáctica usada para la construcción de conceptos matemáticos se deben tener en cuenta aspectos como: determinación de los tipos de magnitud implicada en la situación, su papel dentro de la misma y el rol de los sistemas de representación semiótica en la construcción de modelos matemáticos.
- La razón de cambio constante permitió la interpretación del concepto de función desde una visión variacional como modelo matemático, y como única unidad significante pertinente en el proceso de conversión en las diferentes representaciones.
- Para tener una buena comprensión del concepto de función se requiere verlo como modelo matemático de relaciones variacionales, desde los diversos sistemas de representación semióticos.

Se propone que para alcanzar un desarrollo conceptual satisfactorio de la función lineal se requiere trabajar: el reconocimiento de las relaciones de dependencia entre magnitudes, la cuantificación de esta relación usando tablas de valores, el reconocimiento de la razón de cambio constante entre estas, siendo un elemento que identifica las funciones lineales que son vistas como modelo que describen la covariación entre magnitudes, identificando la proporcionalidad simple directa como una particularidad de la función lineal que permite modelar situaciones de variación y reconociendo las características propias de la función lineal desde las diferentes representaciones semióticas.

1.1.2 Estudios asociados con el enfoque variacional de la función.

Camargo y Guzmán (2005) en "Elementos para una didáctica de pensamiento variacional, relaciones entre la pendiente y la razón", presentan el diseño de una propuesta didáctica para estudiantes de grado noveno, aplicada a 38 estudiantes de grado décimo, debido a las condiciones del currículo propuesto en la institución respecto a las temáticas propias del grado. Utilizan la metodología denominada ingeniería didáctica, donde con las actividades propuestas se aproxima a los estudiantes a la comprensión de las relaciones entre la pendiente de la recta y la razón de cambio. De esta experiencia se concluye que:

- Es evidente que las representaciones semióticas permiten una mejor comprensión de ciertos aspectos que otros, la representación gráfica, por ejemplo, permite cuantificar los cambios de las magnitudes que varían, mientras que las representaciones numéricas permiten estimar las razones de cambio existentes entre las magnitudes que varían.
- El trabajo con situaciones de variación que involucren la razón de cambio desde representaciones gráficas y algebraicas permite desarrollar cuatro elementos fundamentales para la comprensión de función lineal: concepción de razón, ver la función desde una perspectiva de dependencia entre variables, una noción de pendiente desde una

representación algebraica y el manejo del lenguaje técnico propio del álgebra de funciones.

Como primera sugerencia, se propone trabajar los conceptos de razón y pendiente desde la conversión de representaciones aplicados en contextos variacionales, dejando de lado el tratamiento formal que se da en el aula desde representaciones algebraicas y numéricas. Como segunda sugerencia, se afirma que la organización propuesta para el currículo de matemática no es propicia para el desarrollo del concepto función lineal, puesto que no hay vinculación de las diferentes representaciones, siendo estas, herramientas que favorecen la comprensión del objeto matemático. De este trabajo es importante el tratamiento de la pendiente como razón de cambio entre las variables, ya que esta permite describir los cambios en las magnitudes que varían, de las situaciones problema planteadas en torno al concepto de función lineal.

Murillo (2013), en “Caracterización de la comprensión del concepto de función en los estudiantes de grados noveno y once” utiliza como enfoque la concepción operacional y estructural propuesta por Sfard (1991), con el objetivo de acercar a los estudiantes al concepto de función; en este trabajo se describe la dificultad de los estudiantes de primeros semestres de ingenierías y tecnologías de algunas de las universidades de Pereira para comprender el concepto de función lineal y usarlo en la modelación de problemas. Propone y aplica dos cuestionarios para trabajar con estudiantes de educación básica de cinco colegios diferentes, además de hacer una entrevista a los docentes de matemáticas de estas instituciones. Luego de este trabajo, el autor concluye que:

- El 50% de los estudiantes de grado noveno y once se encuentra en un nivel operacional (entidad matemática que es concebida como un producto de un cierto proceso o es identificada como el proceso mismo), mientras que el otro 50% se encuentra en un nivel estructural (entidad matemática que es concebida como una estructura estática), según los niveles de Sfard (1991).

- Los estudiantes de esta investigación asocian el concepto de función como una relación entre dos conjuntos, pero no establecen relaciones entre las diferentes representaciones de este, por lo que pocas veces la utilizan como herramienta de solución en situaciones del entorno.
- Los estudiantes tienen dificultad en comprender el concepto de función lineal como una herramienta de transformación que facilita la modelación de situaciones del entorno, evidenciando que no tienen el nivel de abstracción necesario para un desempeño exitoso en la educación superior.
- La propuesta del MEN: estándares y, el P.E.I. de las instituciones, no tienen correspondencia con las metas reales que los estudiantes alcanzan al finalizar sus estudios de secundaria.

Este trabajo de investigación pone en evidencia el trabajo limitado del concepto de función desde una aproximación estática en las aulas de clase investigadas, considerando propuestas alternativas para su enseñanza.

Vergel (2014), a partir de la teoría de la objetivación de Radford (2006, 2013), plantea una serie de tareas sobre generalización de patrones dirigidas a niños de nueve y diez años de grado cuarto y quinto, para reconocer e investigar las formas de pensamiento algebraico temprano que surgieron, encontrando que:

- El planteamiento de tareas y actividades en la clase de matemáticas en ocasiones debe propiciar la generalización de patrones, permitiendo a los estudiantes desarrollar su pensamiento algebraico.
- Se presentan dificultades al convertir representaciones algebraicas en verbales, las cuales se presentan desde los primeros cursos de aritmética, y se hacen más relevantes en los últimos grados de escolaridad.
- Existe un desfase entre expresar verbalmente cierto grado de generalidad y emplear la notación científica, que puede ser entendido por medio de la tipología que propone Radford (2010), acerca de las generalizaciones algebraicas (factual, contextual o simbólica).
- La incursión del álgebra en currículos desde cursos iniciales permite una mejora de los aprendizajes de los estudiantes, ya que se generan situaciones innovadoras que promueven aprendizajes dinámicos y no memorísticos en el aula.

Esta investigación permite ver la conversión de un lenguaje cotidiano a la representación simbólica, a partir de la identificación de patrones en las tareas propuestas, semejante a lo buscado en este trabajo de investigación.

Gómez (2015), en “Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno”, adaptando la teoría y actividades de Carlson et. al (2003) y Villa (2012), trabajó con 12 estudiantes de noveno grado, desde el análisis de las producciones escritas y verbales realizadas por los estudiantes. Estos autores plantearon situaciones problema relacionadas con el pensamiento variacional en 3 actividades y con ayuda del programa Geogebra modelaron las situaciones propuestas. Los resultados fueron categorizados según los cinco niveles de Carlson et. al (2003). Se concluyó que:

- A partir de las actividades planteadas, los estudiantes pudieron visualizar las formas de cambio en las tareas validando sus procesos de razonamiento variacional.
- La herramienta tecnológica debido a sus bondades favoreció la construcción de representaciones tabular y gráfica a partir de los valores numéricos que arrojó.
- El cuestionamiento a estudiantes con preguntas como: ¿cómo cambia?, ¿qué cambia? y ¿cuánto cambia?, les permitió a estos reflexionar sobre su proceso de pensamiento y así validar sus procesos de cambio y variación.
- El planteamiento de tareas y simulaciones relacionadas al pensamiento variacional permite el desarrollo del mismo, por medio de la interpretación, descripción y el análisis de las relaciones entre las variables.
- Los niveles de razonamiento de Carlson et. al (2003) permitieron describir el pensamiento de los estudiantes y clasificarlos.

Este trabajo permite evidenciar la aplicación de herramientas tecnológicas para potenciar el uso de las representaciones tabular y gráfica en el aula y lograr una mejor comprensión de la función lineal.

Sánchez (2016), desde la teoría de Freudenthal (1983), trabajó con un grupo de estudiantes de noveno grado, en donde presentó una adaptación e implementación de un conjunto de tareas contextualizadas, con el fin de identificar la evolución en los niveles de comprensión a partir del uso de matematización horizontal (organización de situaciones reales mediante herramientas matemáticas) y vertical (reorganización dentro de la matemática misma, llevando a momentos de reflexión, abstracción, generalización y esquematización), propuestos por Freudenthal (1983). Se concluye que los estudiantes de la investigación muestran distintas dificultades al trabajar la función lineal, puesto que no evidencian una relación con el concepto de variación, limitándose a la mecanización y aplicación de fórmulas. De este trabajo se concluye que:

- Es evidente la importancia de orientar actividades hacia la construcción de objetos mentales como variable y dependencia, propios del concepto de función lineal.
- Fue posible generar en algunos estudiantes una estructura progresiva para la resolución de las situaciones propuestas, denominada modelos de solución.

Este trabajo contribuyó a ver la función lineal desde un enfoque dinámico, puesto que, en él, la enseñanza los estudiantes son restringidos a trabajar un enfoque estático, quedándose en la representación simbólica.

1.1.3 Estudios sobre las dificultades que manifiestan los estudiantes cuando resuelven situaciones de variación lineal.

López y Sosa (2008), a partir de la metodología ingeniería didáctica, aplicaron a veinte estudiantes de cuarto semestre de bachillerato, dos instrumentos a modo de cuestionario, basados en el análisis de errores reportados en algunas investigaciones sobre las definiciones, nociones e ideas relacionadas con la función, concluyendo que:

- Los estudiantes formulan resultados numéricos sin comprender realmente su significado, es decir, priorizan la ejecución de algoritmos matemáticos que tienen poco sentido para ellos.

- Generalmente en la clase de matemáticas se trabaja la definición de función como una relación entre conjuntos, sin darle importancia al enfoque dinámico de esta.
- Es necesario identificar y clasificar los factores que influyen en las dificultades conceptuales y procedimentales asociadas al aprendizaje de funciones puesto que esto permite diseñar e implementar diferentes actividades para superarlas.
- De los errores evidenciados en los estudiantes se resaltan: el concebir una función como una ecuación y la confusión entre variables dependientes e independientes.
- De lo anterior es importante mencionar que es necesario trabajar situaciones de contexto con las funciones, en donde la representación algebraica no sea la única que se desarrolle y se maneje un enfoque dinámico en el aula.

Pierce (2005), en un estudio realizado con 64 estudiantes de dos escuelas australianas, en el que la función lineal se presentó como herramienta para la modelación de problemas de contexto matemático, en donde, a partir de estas actividades, se identificaron ciertas dificultades como el no encontrar la relación entre el lenguaje natural y la representación simbólica al hacer conversiones entre estos, concluye que:

- El estudio de las funciones lineales proporciona a los estudiantes mayores y mejores experiencias para identificar e interpretar la relación entre dos variables.
- La forma como se presente el concepto de función le permitirá al estudiante mayor comprensión del mismo.

Como sugerencia se proponen tres enfoques para la enseñanza de la función lineal en el aula: el uso de situaciones con contexto real (cercanas al estudiante), funcional (que permitan su aplicación en la vida cotidiana de los estudiantes) u operacional (ejercitación numérica). Este trabajo permite ver la dificultad que tienen los estudiantes en la modelación de problemas relacionados con la función lineal, así como la posibilidad de usar herramientas innovadoras para suplir esta dificultad.

Del planteamiento de las propuestas durante la revisión de los distintos artículos y monografías, estas apuntan a que es necesario que se aborde el concepto de función lineal a partir de una mirada covariacional, desarrollando el razonamiento covariacional y facilitando la conversión entre representaciones como ejes fundamentales de su construcción desde la modelación de situaciones de contexto que incluyan fenómenos de variación, con el fin de superar las dificultades que se presentan en el aula regular, algunas de ellas consideradas en los artículos y monografías revisados, pues estas sirven de fundamento para el planteamiento de las actividades que se construyeron para este trabajo.

1.2 Planteamiento del Problema

Autores como Thompson (1994), Azcarate y Deulofeu (1996), Carlson et. al (2003), Cantoral (2013) y Vasco (2006), entre muchos otros investigadores de la didáctica de las matemáticas, concuerdan en afirmar que los estudiantes deben aprender conceptos como el de función desde un enfoque variacional, es decir, ligado a conceptos como variable, constante, variación, relación, entre otros, usados en la solución de situaciones problemáticas, que modelan fenómenos referidos al análisis y cuantificación del cambio y la variación, por lo que se hace imprescindible su enseñanza y desarrollo durante la escuela primaria y secundaria.

De igual manera, algunos de estos autores afirman en concordancia con sus investigaciones, que hay varias dificultades que se generan en el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función porque en la mayoría de las propuestas curriculares y en los textos escolares, este concepto continúa siendo enseñado bajo un enfoque estático y descontextualizado, dando privilegio a la representación algebraica (Vasco, 2006; Guzmán, 2006; Villa, 2008).

Vasco (2006), aclara que algunas de las dificultades en la enseñanza, están en entender el pensamiento variacional como un simple aprendizaje de la definición de función, o la repetición de fórmulas de área, volumen, leyes de la física, y el poder realizar representaciones gráficas ya que, para él, el pensamiento variacional tiene que ver con la idea dinámica de la covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes. También afirma que el desarrollo de este pensamiento se puede apoyar en los demás pensamientos, teniendo en cuenta unas directrices específicas, para ello propone trabajar a partir de la modelación de situaciones abiertas y retadoras.

Cantoral (2013), menciona que aún en la actualidad, las clases en torno al concepto de función siguen siendo tradicionales y memorísticas. "*Se imparten las clases, enseñando los conceptos de manera explícita o tacita, y se enseñan los algoritmos centrales; posteriormente se ejercita hasta consolidar un nivel de logro básico*" (Cantoral, 2013, p.25). Por esta situación, propone la visualización como recurso para la enseñanza del pensamiento y lenguaje variacional, para comprender la variación como la cuantificación del cambio, por medio del análisis de situaciones problema que se propongan a los estudiantes, haciendo la aclaración de que la construcción de este concepto es lenta y difícil.

Respecto a los errores de los estudiantes en relación con la interpretación del lenguaje gráfico en torno al concepto de función, Azcárate y Deulofeu (1996), mencionan que los estudiantes presentan dificultad al graficar usando escalas enteras y racionales, al leer y representar coordenadas, también para comprender la concepción de continuidad en los puntos de una recta.

Estas dificultades pueden ser superadas a partir de plantear a los estudiantes actividades que involucren explícitamente conversiones entre las diferentes representaciones que ellos proponen (modelo físico o simulación, descripción verbal, tabla de valores, gráfica y fórmula o ecuación), en torno a situaciones problema reales y cotidianas, en las que sea posible observar la dependencia entre variables.

Desde la experiencia de los investigadores de este trabajo de investigación, se puede afirmar que el tipo de tareas propuestas en el aula actualmente es repetitivo, ya que se busca la mecanización de algoritmos, generando un tratamiento estático de la función lineal y el pensamiento variacional.

Frente a la experiencia profesional directa de los docentes investigadores de este trabajo en el aula, en torno al desarrollo del pensamiento variacional y con base en los resultados arrojados por las últimas pruebas SABER 2017 para grado 9°, (Ver Anexo A), en el Colegio Néstor Forero Alcalá respecto a la competencia de razonamiento, se puede afirmar que entre un 60% y 80% de estudiantes no establecen relaciones entre magnitudes o no relacionan distintos tipos de representación, no identifican razones de cambio (si las hay) y no encuentran patrones para resolver problemas de variación. En relación con la competencia de la resolución de problemas, entre el 70% y el 80% de los estudiantes, no resuelven situaciones que involucran variación o proporcionalidad, que sean matemáticas o de otros contextos. Así mismo, se puede asentir que por lo menos un 60% de los estudiantes tienen dificultades asociadas al pensamiento variacional, ya que no reconocen magnitudes que pueden variar a partir de un patrón y no comprenden la función como una relación entre magnitudes ni lo asocian a la idea de la covariación. Es notable también, el bajo porcentaje de éxito en actividades que involucren la variación y la razón de cambio.

De todo lo anterior, es posible concluir que existe una tensión entre las habilidades de pensamiento que se deberían desarrollar en los estudiantes acerca del pensamiento variacional, particularmente del concepto de función lineal y las dificultades que surgen y se desarrollan durante el proceso de enseñanza y aprendizaje en la escuela, lo que lleva a considerar la posibilidad de construir secuencias didácticas cuyo propósito sea potenciar, en los estudiantes, la construcción de este concepto matemático, como modelo de situaciones - problema de variación y cambio, involucrándoles en actividades matemáticas en las que desarrollen tanto su razonamiento covariacional como su habilidad para realizar conversiones entre los distintos registros de representación considerados para la función lineal (verbal, tabular, gráfico, simbólico).

De otro lado y retomando lo dicho por Vasco (2006) debido a que el pensamiento variacional es transversal a toda la actividad matemática en nuestro trabajo se proponen experiencias de construcción conceptual acerca del concepto de función, en particular sobre la función lineal, tomando como contexto específico, algunas situaciones geométricas que se derivan de la construcción de cubos de diferente tamaño, el estudio y la modelación de la variación del perímetro y el área con respecto a las medidas de las hojas de papel con las cuales se construyeron dichos cubos.

Dadas las consideraciones anteriores la pregunta de investigación que orienta el presente trabajo es:

¿Cómo construyen los estudiantes de grado noveno del colegio Néstor Forero Alcalá I. E. D. el concepto de función lineal, a partir de situaciones problemáticas de modelación de relaciones entre tamaño de la hoja, propiedades y perímetro de cubos elaborados en origami, en las que se articulan la covariación y las conversiones entre las diferentes representaciones semióticas?

1.3. Justificación de la investigación

La enseñanza de las matemáticas que se dirija a promover aprendizajes significativos en los estudiantes, requiere una metodología dinámica que permita construir conocimiento, por ello, es trabajo del docente contribuir con estrategias que permitan reflexionar y fortalecer el proceso de aprendizaje en el aula, además de suplir las dificultades que se describen en las investigaciones hechas por autores como Vasco (2006) y Villa (2008), quienes manifiestan que los estudiantes de secundaria presentan dificultades que giran en torno a la comprensión del concepto de variación y están asociadas a las prácticas de enseñanza predominantes, en las que aprender el concepto de función se reduce a la simple repetición de la definición, el aprendizaje de fórmulas y procedimientos algebraicos en desmedro de la comprensión de todos los aspectos conceptuales ligados a la función, que se pueden generar mediante el uso de procesos de modelación de la variación y el cambio, mediante las diferentes representaciones de la función.

En Carlson et. al (2003) a partir de investigaciones acerca de la comprensión que tienen los estudiantes universitarios sobre el tema de funciones, se ha documentado que hay dificultad para modelar situaciones que involucran la razón de cambio de una variable cuando varía continuamente en una relación dependiente con otra variable (Carlson, 1998; Monk y Nemirovsky, 1994; Thompson, 1994)

Posada y Villa (2006), concluyen que, desde la perspectiva dinámica para el aprendizaje de la función, se requiere favorecer el desarrollo del razonamiento covariacional para mejorar la comprensión del concepto de función lineal, ya que permite encontrar la razón de cambio entre los valores de entrada y salida de una situación problema, permitiendo un tratamiento dinámico del concepto.

Duval (2006, 2016) desde un enfoque cognitivo del aprendizaje de matemáticas afirma que es necesario el uso de diversas representaciones semióticas para comprender un objeto matemático, específicamente la función lineal, puesto que la actividad matemática se realiza inevitablemente dentro de un contexto de cambios de representación y que "la raíz de los problemas que muchos estudiantes tienen con el pensamiento matemático reside en la especificidad matemática y la complejidad cognitiva de la conversión y del cambio de representación" (Duval, 2016, p. 90). También señala que en el aula regular, las representaciones son vistas como productos, mostrando un nivel superficial o siendo el estado final del proceso, que denotan procesos externos, completamente lejanos de la comprensión matemática, por ello, concluye la necesidad de enfrentar al estudiante a tareas cuyo propósito sea desarrollar la capacidad de cambiar de representación y el uso simultáneo de por lo menos dos representaciones.

De otro lado, en los referentes de calidad nacionales se afirma que:

> *Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel*

> *preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas.* (MEN, 2006, p. 66).

Dichos propósitos se reafirman más recientemente, en los DBA-V2, donde se incluye como un aprendizaje fundamental el siguiente: "*identificar y analizar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de expresiones algebraicas y relacionar la variación y covariación con los comportamientos gráficos, numéricos y características de las expresiones algebraicas en situaciones de modelación*". (MEN, 2016, DBA -v2 p. 63), para lo cual una de las evidencias de aprendizaje tiene que ver con la coordinación de las diferentes representaciones del objeto matemático a tratar (verbal, gráfico, tabular y algebraico o simbólico).

Por lo anterior se puede concluir que en los planes de área y aula que se implementan en las instituciones educativas se debe poner el énfasis en el estudio de la variación y el cambio, en el que interviene el razonamiento covariacional en el sentido propuesto por Carlson et. al (2003) y las actividades de conversión entre las diferentes representaciones semióticas (Duval, 2016).

La importancia del desarrollo del pensamiento variacional, también se afirma en su inclusión en las pruebas nacionales e internacionales. A nivel internacional, pruebas como las PISA (Programme for International Student Assessment), TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) o TERCE (Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo), también evalúan el nivel de competencia de los estudiantes para la resolución de problemas asociados al concepto de variación, razón de cambio y proporcionalidad y a nivel nacional en las pruebas Saber.

En cuanto a los resultados de Colombia en las pruebas PISA[1] del año 2006, 2009 y 2012 (Anexo B), es posible evidenciar que el 72% nuestro se encontraba por debajo del nivel 2 de desempeño, el cual según esta prueba es insuficiente para acceder a estudios superiores y para desenvolverse en las actividades que exige la vida; el 19% se clasificó en el nivel 2, el cual es propuesto como el mínimo adecuado para desempeñarse en la sociedad contemporánea y tan sólo el 9% se clasificó por encima del nivel 2, en los cuales se manifiesta que son bastante buenos (nivel 3 y 4) u óptimos para desarrollar actividades de alta complejidad cognitiva o científica (niveles 5 y6).

Frente a las pruebas TIMSS[2], que se aplican a niños de cuarto y octavo grado, en donde se da relevancia a la evaluación del pensamiento numérico y algebraico por un lado y a los dominios cognitivos de aplicar y conocer por el otro, Colombia ocupó en el año 2007 el segundo puntaje más bajo con respecto a otros los otros países evaluados ese año, obteniendo un promedio de 380 puntos en comparación a Taipéi con 598 puntos y El Salvador con 340 puntos (Ver anexo C).

Respecto a las pruebas TERCE[3] del año 2016, el 85% de los estudiantes que presentaron la prueba en Colombia ocuparon los niveles I y II (Ver anexo D), en donde se establece que la mitad son competentes para identificar regularidades y patrones numéricos y geométricos en representaciones diversas y la otra mitad puede identificar variables. Los estudiantes que se clasifican en el segundo nivel también pueden describir fenómenos de cambio y dependencia,

---

[1] OCDE (2006). El programa pisa de la OCDE – qué es y para qué sirve. OCDE, Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. Paris, Francia.

[2] TIMSS (2011). Trends in international mathematics and science study – Marcos de la evaluación. Ministerio de educación, cultura y deportes. Madrid, España

[3] UNESCO (2016). Informe de resultados TERCE, tercer estudio regional comparativo explicativo- Logros de aprendizaje, laboratorio latinoamericano de evaluación de la calidad de la educación. Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Paris, Francia.

considerando la resolución de problemas y la valoración de la pertinencia del proceso seguido. Sin embargo, sólo el 15% del total de la muestra de estudiantes que presentó la prueba, tiene una noción de función, en la que usa conceptos y procedimientos asociados a la variación directa, a la proporcionalidad y a la variación inversa en contextos aritméticos y geométricos en la resolución de problemas. Finalmente, de este 15%, sólo el 3% hace uso pertinente de las diversas representaciones de relaciones matemáticas y sus variaciones. Justificando sus procedimientos y validando sus soluciones.

El presente trabajo pretende aportar desde el estudio de cuerpos geométricos y sus características, a partir del análisis de un conjunto de situaciones en el aula y el uso del origami como un recurso, elementos que promuevan la comprensión de la función lineal mediante el uso de situaciones de modelación que requieran razonamiento covariacional y la conversión entre las representaciones semióticas para su resolución.

1.4 Objetivo general

Analizar la construcción del concepto de función lineal que hacen los estudiantes de grado noveno a partir de la modelación de situaciones que involucren relaciones entre el tamaño de la hoja y el perímetro del cubo donde sean vinculados el razonamiento covariacional y las representaciones semióticas

1.5 Objetivos específicos

- Clasificar por niveles de covariación la construcción que hacen los estudiantes de grado noveno del concepto función lineal.

- Describir el uso de representaciones semióticas que hacen los estudiantes cuando resuelven las situaciones propuestas a partir de acciones mentales que involucren el reconocimiento de descriptores.
- Promover el razonamiento covariacional y la conversión entre diferentes representaciones a partir de la modelación de situaciones que involucren fenómenos de variación

2. Capítulo II: Marco teórico

En el presente capítulo se expone el marco teórico que es referente en el diseño de las situaciones que integran este trabajo, así como, en el análisis de las producciones del grupo de estudiantes participantes, para analizar la construcción del concepto función lineal a partir del razonamiento covariacional y las conversiones que efectúan entre las diferentes representaciones semióticas. Como nuestro interés radica en la comprensión que los estudiantes desarrollan cuando modelan situaciones que "involucren la razón de cambio constante entre dos cantidades de magnitud, de tal manera que la función lineal pueda aparecer como *"la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio es constante"* (Posada y Villa, 2006, p. 96), partimos de tres premisas teóricas fundamentales, una primera, la conceptualización de la función lineal como objeto matemático y como objeto didáctico, en la segunda se aborda el estudio de la covariación en tanto que para lograr la comprensión del concepto de función es necesario que el estudiante desarrolle habilidades de razonamiento covariacional entendido como "*las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra*" (Carlson et. al, 2003, p. 124) y, el tercero se expone lo propuesto por Duval (1999) en el sentido de que una condición necesaria para comprender un objeto matemático es que el estudiante puede hacer "*la coordinación de las diferentes representaciones semióticas*". (p.61).

Es por ello que el marco teórico se organiza en cuatro apartados, el primero muestra una visión de la función lineal a través de la historia, en tres diferentes épocas, terminando con la definición que orientará esta investigación, el segundo describe algunos referentes conceptuales sobre la función lineal, que son fundamentales en el desarrollo de este trabajo desde la premisa uno, el tercero la teoría de razonamiento covariacional propuesta por Carlson et. al (2003) como primer eje central para el análisis de las producciones de los estudiantes desde la premisa dos, el cuarto la teoría de las representaciones semióticas propuesta por Duval (2016) como segundo eje fundamental para el análisis de las producciones de los estudiantes desde la premisa tres.

2.1 Desarrollo histórico de la función lineal

Hacer una revisión histórica del concepto de función lineal es importante porque posibilita identificar aspectos relacionados con su evolución, las diversas interpretaciones y los principales obstáculos que afrontaron diferentes matemáticos hasta llegar a consolidar las definiciones que hoy se conocen, es por esto por lo que presentamos un cuadro (ver tabla 1), donde sintetizamos el desarrollo histórico del concepto de función lineal entre tres edades específicas.

Tabla 1
Aspectos históricos relevantes respecto al desarrollo del concepto de función.

Aportes en la Edad antigua	Aportes en la Edad media	Aportes en la Edad moderna
-Aportes de civilizaciones, babilónica y griega. -Los astrónomos babilónicos buscaron regularidades para poder predecir fenómenos repetitivos respecto a los movimientos de la luna y los planetas. -La civilización griega explorando el campo de la física, buscó relaciones cuantitativas de dependencia entre variables, como lo son las leyes simples de la acústica. Hicieron uso de las proporciones numéricas,	-Vieta contribuye a formalizar el concepto de función, pues aporta la escritura simbólica para las variables - Oresme, a partir del uso de segmentos rectilíneos genera aproximaciones entre fenómenos que cambian, asemejándose a la representación gráfica actual de una función. -Descartes desarrolló una idea de función de forma analítica, afirmando que "*una ecuación en x e y es una forma de mostrar una dependencia entre cantidades variables, de modo que los valores de una de ellas pudieran calcularse a partir de los correspondientes valores en la otra variable*" (Jaimes, 2012, p.6).	-Dirichlet, da una definición muy general en los siguientes términos: "*Si una variable y, está relacionada con otra x, de tal manera que, siempre que se atribuya un valor numérico a x, hay una regla según la cual, queda determinado un único valor de y, entonces, se dice que y es una función de la variable independiente x*" (Ariza, 2010 p. 303.) -Azcárate y Deulofeu afirman que el concepto de función está ligado con la palabra variable, clasificada en variable independiente y variable dependiente. De esta forma, generalmente se expresa la variable independiente con la letra *x* la cual representa un valor arbitrario del dominio, se dice que cuando a cada valor de la variable *x* está asociado un determinado valor de otra variable *y*, esta se denomina variable dependiente

mediante el uso de razones, acercándose al concepto de dependencia entre variables y a su vez al concepto de función.	-Euler propone como definición formal la expresión analítica que es usada en la actualidad ($f(x)$) enunciada como "*Si x es una cantidad variable, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que esté determinada por aquél, se llama una función de dicha variable*" (Ariza, 2010 p. 303.)	de x, determinando una función de y en x la cual se expresa matemáticamente como $y = f(x)$. - Apóstol (2001) propone una nueva definición afirmando que, "*para todo número real x se define la función lineal mediante la expresión g (x)= a x + b, en donde b es la ordenada en el origen, es decir, la coordenada y del punto (0, b), en donde la recta de la función lineal corta al eje y del plano cartesiano, a es la pendiente de la recta y x es la variable independiente"* (p. 66-67). -El grupo Bourbaki, que, a partir del uso de la teoría de conjuntos define el concepto de función como: *Una relación entre un elemento variable x de E y un elemento variable y de F se llama una relación funcional, si para todo x∈ E, existe un único y ∈ F que está relacionado con x en la relación dada. (Lacasta y Pascual, p.52 1998).*

Diferentes aportes al concepto de función en tres periodos históricos diferentes (Fuente: elaboración propia)

Durante este paso por la historia es indispensable resaltar todos los aportes al uso de las representaciones tabular, gráfica y simbólica que los diferentes matemáticos mencionados anteriormente hicieron al concepto de función, ya que muchos de estos son los que actualmente empleamos en nuestras aulas de clase.

Así podemos concluir que el concepto de función ha variado durante las distintas épocas históricas y que hoy encontramos por lo menos tres definiciones distintas: como correspondencia, como relación entre dos variables y como correspondencia entre los elementos de dos conjuntos. Dichas definiciones dan lugar a dos perspectivas para considerar la función: la estática y la dinámica. Para Vasco (2006), la perspectiva estática propone la función "*como conjuntos de parejas ordenadas que no se mueven ni hacen nada*" (p.108), en la cual no es visible el manejo de elementos como variable, variación, entre otros, mientras que, la perspectiva dinámica "*intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad*". (p.104), introduciendo como requerimiento el tratamiento de la variable, las gráficas y los símbolos.

Duval citado por Villa (2008), también propone una definición de función lineal en la perspectiva dinámica:

> *"Para el concepto de función lineal, las unidades determinantes serán determinadas a partir de la noción de variación y razón de cambio. Esto debido a que es la razón de cambio constante la que permite determinar el concepto de función lineal desde el punto de vista variacional".* (p.247).

Esta definición destaca la importancia de la función lineal como una herramienta de modelación de situaciones matemáticas que consideran fenómenos de variación, donde dependiendo del punto de corte con el eje y, cuando la función no pasa por el punto (0,0), se nombra función lineal y cuando pasa por un punto (0, b), se denomina función lineal afín, esta es la perspectiva que se utiliza como referente para el presente trabajo de investigación.

2.2 Caracterización de la función lineal.

Desde la definición de la función lineal adoptada para este trabajo, mencionada en el apartado anterior, y tomando en consideración lo expuesto en los referentes curriculares de calidad propuestos por el MEN a saber, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), Estándares de Competencias Básicas en Matemáticas (MEN, 2006) y los Derechos Básicos de aprendizaje-V2 (MEN, 2016), además de las consideraciones de otros investigadores, se definen los elementos principales que nos permiten caracterizar didácticamente la función lineal, estos son: pensamiento variacional, así como las nociones propias de este pensamiento: variación, variable y constante, dependencia e independencia, pendiente, función lineal y afín, algunas de las cuales se tratarán más adelante.

2.2.1 Pensamiento variacional

En los Lineamientos Curriculares se propone como logro de la educación matemática el inicio y desarrollo del pensamiento variacional, ubicándolo en "*el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos interestructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas*". (MEN, 1998, p.49), por ello, es claro que a partir de la modelación de situaciones de la actividad práctica se considera un enfoque dinámico en el aula regular.

De otro lado, en los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2002) se presenta el pensamiento variacional ligado al reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en contextos diversos y, a la modelación y resolución de situaciones problema en las que se emplean diferentes representaciones, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos, así como a la comprensión de distintos elementos de la función como las variables, las constantes, la inclinación y la razón de cambio constante.

Por su parte, Vasco (2006) lo define en los siguientes términos:

> "*El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionan sus variables internas, de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad".* (p. 70).

Y propone que se trabaje en el aula regular a partir de la modelación, con privilegio de una visión dinámica relacionada con los demás pensamientos: numérico, geométrico y métrico, con el fin de poder modelar fenómenos de variación desde situaciones de variados contextos matemáticos y de otras áreas.

Para Cantoral, Molina, y Sánchez (2005) el pensamiento variacional "*trata sobre las relaciones entre la matemática de la variación y el cambio, por un lado, y de los procesos complejos del pensamiento por otro*" (p. 185), y señalan que en este pensamiento se incluye el estudio de conceptos como variable, función, derivada e integral y algunos de las comportamientos como el crecimiento o decrecimiento, los intervalos en los cuales las funciones son positivas o negativas, la razón de cambio, entre otras. De otro lado, Carlson et. al (2003) afirma que, para lograr el desarrollo del pensamiento variacional, es necesario que se den ciertas actividades mentales en el estudiante a partir de la resolución de actividades que impliquen relaciones de covariación entre magnitudes.

Según las anteriores consideraciones podemos afirmar que una persona piensa variacionalmente, cuando en situaciones de variación no solo identifica cambios sino cuando puede describirlos, predecir su comportamiento, cuantificarlo, modelarlo; características que deseamos promover en la secuencia didáctica aplicada.

2.2.2 Variación y cambio.

Cantoral, Molina, y Sánchez (2005) diferencian las nociones de cambio y variación:

"La noción de cambio denota la modificación de estado, de apariencia, de comportamiento o de condición de un cuerpo, de un sistema o de un objeto (o situación); mientras que la variación, (...) (se entiende) como una cuantificación del cambio; es decir, estudiar la variación de un sistema o cuerpo significa ejercer nuestro entendimiento para conocer (qué,) cómo y cuánto cambia el sistema o cuerpo dado. (... Se dice que) una persona utiliza o comunica argumentos y estrategias de tipo variacional cuando hace uso de maniobras, ideas, técnicas, o explicaciones que de alguna manera reflejan y expresan el reconocimiento cuantitativo y cualitativo del cambio en el sistema u objeto que se está estudiando". (p. 464).

Tal diferencia permite afirmar que cuando en una situación se analiza el cambio centrándose en los cambios entre los valores de cada una de las variables, por ejemplo, en la siguiente tabla (ver tabla 2), se deduce que x cambia de 1 a 2 e, y, cambia de 2 a 4 (cambios en las filas), este análisis enfatiza una mirada estática ya que se tiene en cuenta sólo el cambio absoluto que corresponde a la diferencia entre los valores de x ($\Delta(x) = x_j - x_i$) o la diferencia entre los valores correspondientes de y ($\Delta(y) = y_j - y_i$), sin establecer una relación entre ellos, mientras si el interés está en examinar la forma como varía una de las variables cuando cambian los valores de la otra, se está tratando la situación de manera dinámica, variacional, en el ejemplo anterior, se determina en la relación entre fila-fila, fila-columna, columna-columna y columna-fila, encontrando la razón constante en cada caso, es decir, se estudia el cociente de diferencia $\frac{\Delta(y)}{\Delta(x)}$ llamada razón de cambio promedio.

Tabla 2
Registro tabular de una función lineal

x	1	2
y	2	4

Datos del cambio de valores en las variables x e y. (Fuente: Elaboración propia)

De modo que el estudio de la variación requiere según Camargo (2000), precisar sus aspectos cualitativos y cuantitativos, lo que implica identificar y diferenciar en una situación particular, lo que cambia, como cambia y cuánto cambia, es decir, estudiar el cambio y su medición y conceptos como las variables y las funciones. El aspecto cualitativo tiene que ver con identificar las variables y describir, verbal u oralmente, relaciones entre ellas tales como aumentos, disminuciones o invarianzas, por ejemplo, expresar que, si una variable aumenta la otra también, si una variable disminuye la otra aumenta o si una variable aumenta la otra permanece constante o, expresiones como la variable x aumenta más rápido que la variable y, la variable x aumenta tanto como la variable y, entre otros.

El aspecto cuantitativo está asociado con la medición del cambio, incluye el uso de patrones aditivos y multiplicativos, representados a partir de representaciones verbales, tabulares, gráficos de tipo cartesiano o sagital, pictórico e icónico, fórmulas y expresiones analíticas, representaciones que permiten evidenciar patrones de cambio entre las magnitudes. Para Camargo (2000), el modelo matemático básico para medir la variación es la diferencia, a partir de la cual es posible predecir el comportamiento variacional de las funciones y el modelo matemático básico para medir la relación del cambio de una variable con el cambio en la otra es la razón entre cambios, llamada razón de cambio.

2.2.3 Variable

La variable es el nombre que recibe la magnitud cuando evidencia cambios numéricos durante la modelación de una situación que describa fenómenos de variación, mientras que la denominación de “constante” se aplica a magnitudes que no presentan cambios numéricos durante la modelación.

Para autores como Rojas, Rodríguez, Romero, Castillo y Mora (1999) la variable, a partir de su interpretación en diversos contextos, presenta las siguientes características:

- Se le asigna el significado de variar, puesto que es una representación indistinta y simultánea del universo al que pertenece.
- Es parte de una expresión, donde se destaca una relación de dependencia entre las magnitudes del universo del que hace parte.

A partir de dichas interpretaciones concluyen que la variable como objeto matemático es una representación que encuentra sentido y significado del universo al que pertenece, y que puede ser entendida como incógnita, número indeterminado y relación funcional. Como incógnita, representa una cantidad numérica específica pero desconocida, que puede ser encontrada bajo ciertas restricciones específicas. Simbólicamente, la variable representa un número indeterminado que se encuentra dentro de un intervalo de valores. La variable vista como una relación funcional, representa cantidades numéricas que toma valores en un rango determinado y están ligadas por una relación (Rojas et. al, 1999, p. 79).

De tal manera que la variable permite generar patrones que se usan en la modelación de situaciones que presenten fenómenos de variación y cambio, además, a partir de sus diversos significados, permite la contextualización de diversos modelos de dependencia, siendo éstos fundamentales en el desarrollo del pensamiento variacional.

En contraste con la definición de variable, se define constante a una magnitud en la que la medida del cambio es cero, es decir, cuando la diferencia entre dos medidas consecutivas es cero ($x_j - x_i = 0$). En términos variacionales podemos decir que cuando el cambio entre dos valores de la variable es cero entonces dichas magnitudes se considera una constante.

2.2.4 Razón de cambio

Como se mencionó en párrafos anteriores la razón de cambio es el cociente entre las diferencias $\frac{\Delta(y)}{\Delta(x)}$, el cual recibe el nombre técnico de razón promedio de cambio, o cuando se desea subrayar la relación de variación, se expresa como la razón promedio de cambio de f(x) con respecto a x e indica la rapidez o lentitud con la cual cambia la función entre los dos extremos del intervalo considerado ($x_j - x_i$) y es relativa al tamaño del intervalo.

En la representación gráfica la razón de cambio para una función lineal se representa en dos construcciones (Ver figura 1): una variable y una constante, en las que se evidencia la razón de cambio para la variable.

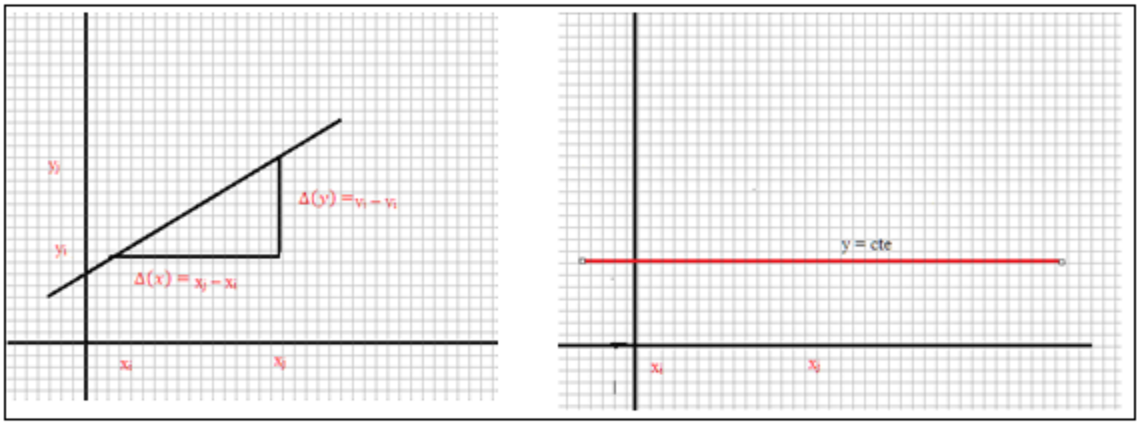


Figura 1 Representación gráfica de variable y constante (Fuente: Elaboración propia)

Como se mencionó en un apartado anterior Una función de la forma *f(x) = mx,* donde *m* es una constante recibe el nombre de función lineal, y su representación gráfica corresponde a una línea recta que pasa por *(0,0)*. La pendiente *m* se considera como la inclinación de la recta respecto al eje horizontal en el sistema de representación gráfico. Matemáticamente, la pendiente de una recta se define como:

- La razón de cambio promedio (Algebraica)
- La Inclinación de una línea recta respecto a la horizontal. (Geométrica)
- Un caso particular de una recta tangente de una curva en un punto dado. (Cálculo)

Para el caso de la función lineal y afín la pendiente es una constante, es decir, la razón de cambio entre dos puntos cualquiera siempre es la misma y se denota por:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, siendo $m = k$

Cuando en la razón de cambio promedio, los intervalos de variación $\Delta x = x_2 - x_1$ se hacen cada vez más pequeños, se define la razón de cambio instantánea como la rapidez de cambio de *f* en a como la derivada de *f*, *f'(a)*.

2.2.5 Dependencia e independencia entre variables

La dependencia entre variables se da cuando una variable cambia numéricamente respecto a la otra, determinando una relación de aumento o disminución, mientras que la independencia se determina cuando la variable cambia sin afectar a otras magnitudes de la situación modelada. En general, la variable dependiente se llama *x*, la variable independiente es conocida como *y*, estas se articulan mediante una relación de covariación.

En MEN (1998) se menciona *"La identificación de la variable independiente y dependiente es más significativa cuando se inicia desde la representación de situaciones concretas*". (p.50), donde es posible determinar la noción de función como dependencia entre variables, puesto que es requerida en la modelación de situaciones. Por su parte, en MEN (2006) se plantea que la coordinación entre magnitudes que varían permite aproximarse a una noción de función que describa la dependencia funcional entre magnitudes variables.

2.2.6 Función lineal y afín

Como un concepto característico del pensamiento variacional se encuentra el concepto de función, que es visto como una herramienta que permite modelar y resolver problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio de fenómenos provenientes de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas.

Tal como fue enunciado en apartados anteriores, el concepto de función tiene varias definiciones, como correspondencia, como expresión analítica y como relación entre elementos de dos conjuntos, sin embargo, para este trabajo, se asumirá la definición mencionada en el apartado 1.3, donde se menciona la definición adoptada por Posada y Villa (2006) *"se llama función lineal a la relación entre dos cantidades de magnitud cuya razón de cambio es constante*" (p. 96*).*

Para la función lineal y afín, en MEN (1998) se dice que ellas son determinantes para relacionar patrones de variación entre variables, además de controlar cambios entre estas, pues recoge modelos de variación como la proporcionalidad. La función asocia conceptos como dominio, rango, intervalos, que son usados en modelos elementales como el lineal y el afín, prevaleciendo el estudio de los patrones que los caracterizan (crecientes, decrecientes).

2.3 Razonamiento covariacional

Carlson et. al (2003) plantean la necesidad de incluir en los currículos la noción de función junto con la de razón de cambio, debido a que, según Thompson, citado por Carlson et. al (2003), en el estudio de la comprensión de relaciones funcionales dinámicas se necesita introducir el concepto de razón de cambio como un elemento fundamental para cuantificar el cambio y la variación. La razón de cambio, según estos autores, requiere que se evidencie el cambio en las cantidades, la coordinación entre los cambios entre las dos cantidades variables y su covariación simultánea y, que un escaso desarrollo del razonamiento covariacional en los estudiantes puede ser la razón para que algunos consideren como diferentes e inconexos conceptos como función lineal y razón de cambio, ya que según Cottrill et al., citado por Carlson et. al (2003) "*La visión de función como covariación es esencial para la comprensión de conceptos del cálculo*" (p. 123).

Confrey y Smith, citados por Carlson et. al (2003), afirman que la acción de coordinar es esencial para el razonamiento de las relaciones funcionales dinámicas, por ello, es posible afirmar que la coordinación entre variables que, de manera general es presentada como razonamiento variacional definido como "*Las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían, mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra*" Carlson et. al (p.125, 2003), el cual resulta ser determinante en el desarrollo de la comprensión del concepto función lineal.

De igual manera La covariación en términos de una función, y en general en el contexto de las magnitudes físicas, se establece como la dependencia que existe entre dos variables y el cambio que se genera al mismo tiempo entre ellas (Carlson et. al, 2003). Para evaluar el desarrollo del razonamiento covariacional, estos autores proponen cinco niveles en una sucesión ordenada, donde se usa el término razón para mencionar el cambio promedio (Ver anexo E). Estos niveles a su vez determinan cinco acciones mentales de razonamiento covariacional y sus comportamientos asociados (Ver anexo F).

Estos niveles y acciones mentales permiten reconocer la covariación entre el registro de entrada y el de salida en una situación específica. Asumimos los niveles para la clasificación de las producciones de los estudiantes, que se obtuvieron tanto en las pruebas escritas como en las entrevistas, como un indicador de la comprensión que tienen de función lineal en su perspectiva covariacional.

2.4 Teoría de las representaciones semióticas

En el contexto de la teoría de Duval (2016) se atribuye un papel importante al tratamiento de los sistemas de representación como medios que ayudan a que los estudiantes en la comprensión de los conceptos matemáticos. Se afirma que las representaciones semióticas son el único medio de acceso a los objetos matemáticos, por lo que se concluye que se incluyan distintos registros de representación y su articulación, para lograr el desarrollo del pensamiento matemático y en particular la comprensión de un objeto matemático determinado, como es la función lineal. Duval (1999) propone dos preguntas que son importantes en el proceso de aprendizaje: ¿Cómo aprender a no confundir un objeto con la representación que se hace de él? y ¿Cómo aprender a cambiar de registro?

Para dar respuesta a estas preguntas, parte del hecho de que las representaciones semióticas tienen un rol fundamental en toda actividad matemática, ya que son estas las que dan acceso a los objetos matemáticos "La actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación" (Duval, 2006), por tanto en los procesos de aprendizaje se requiere el análisis de proceso cognitivos como la conceptualización, donde es necesario el uso de sistemas de representación distintos a los que proporciona el lenguaje natural, esto con el fin de expresar las relaciones y operaciones.

Duval (2016) propone tres actividades cognitivas que son esenciales en toda representación:

- Las representaciones de un registro semiótico se consideran como marcas perceptibles e identificables, que expresan un objeto como una representación de alguna cosa en un sistema determinado.

- Las transformaciones de la representación de un mismo registro que son construidas de acuerdo a las normas propias del sistema, para obtener otras representaciones que sean un logro de conocimiento, comparadas con las iniciales, se denominan *tratamientos*, que hace referencia a la transformación de una representación en el mismo registro donde ha sido producida (interna).
- Las transformaciones de representaciones de un registro dado a otro registro diferente, conservando el significado y adjudicando otros diferentes a partir del registro, se denominan *conversiones,* donde se evidencia el cambio de registro, siendo explícitas las unidades significantes de cada registro.

Debido a que Duval (1999), afirma que "*La comprensión de algo, sea un texto o una imagen, moviliza ya sea actividades de conversión y de formación, o bien las tres actividades cognitivas"* y que la conversión de representaciones semióticas es la actividad que genera mayor dificultad en los estudiantes, podemos concluir que es necesario que en el aula regular se favorezcan los procesos de enseñanza que involucran la conversión entre diferentes registros de representación de la función lineal.

Este trabajo de investigación tiene uno de sus intereses describir el uso de representaciones semióticas para lograr la comprensión de la función lineal, privilegiando procesos de conversión, aunque este es considerado como uno de los que representa mayor obstáculo para el estudiante.

"La conversión requiere que se perciba la diferencia entre lo que Frege llamaba el sentido y la referencia de los símbolos o de los signos, o entre el contenido de una representación y lo que

esta representa" (Duval, 2006, p. 15), si esta diferencia no se logra, la conversión es incomprensible para el estudiante.

Debido a que la conversión requiere de registros de representación, se hace necesario realizar una caracterización de cada uno de los cuatro registros de representación utilizados en este trabajo de grado.

2.4.1 Diferentes registros de representación de la función

2.4.1.1 El registro gráfico

Para este registro, los ejes ortogonales y los puntos definidos por las parejas ordenadas son considerados como elementos principales, se identifican dos reglas de tratamiento: las escalas y las unidades para graduar los ejes, siendo estas las reglas propias del sistema para efectuar un tratamiento y de vital importancia para conversión con otros registros.

Según los lineamientos curriculares, "*las gráficas cartesianas hacen posible el estudio dinámico de la variación. La relación explícita entre las variables que determinan una gráfica puede ser iniciada con situaciones de variación cualitativa y con la identificación de nombres para los ejes coordenados*". (MEN, p.50, 1998). Lo anterior quiere decir que este tipo de registro permite identificar la relación entre las variables de manera más explícita que en otros registros.

2.4.1.2 El registro tabular

Para este registro, se trabaja un arreglo de filas y columnas, donde como regla primordial se encuentra la *correspondencia* entre los valores de una pareja ordenada, las unidades significantes de este registro de representación son: las cantidades de magnitud de la situación que se asociarán a una de las columnas (o filas), estableciendo una representación discreta de cada una de dichas cantidades.

A partir de los lineamientos curriculares, "*la tabla se constituye en un elemento para iniciar el estudio de la función, pues es un ejemplo concreto de función presentada numéricamente. Y aunque en algunas ocasiones enfatiza la variación numérica discreta, es necesario ir construyendo la variación numérica continua*". (MEN, 1998, p.50). Esto quiere decir que este registro permite cierto nivel de menor complejidad para la representación de la función, teniendo en cuenta que se debe hacer énfasis en el contexto continuo de esta y no sólo en el discreto.

2.4.1.3 El registro simbólico

En este registro los objetos son símbolos que generalmente pertenecen al alfabeto, los números indo-arábigos, los símbolos de las operaciones y relaciones aritméticas, y los signos de agrupación.

Las reglas de conformidad son las reglas de las operaciones (lógico-aritméticas), relaciones (de orden y de equivalencia) y los axiomas de la lógica; salvo algunas diferencias convencionales. Para el tratamiento se requieren las propiedades de estructuras algebraicas, y todas aquellas que permiten comparar dos registros mediante la relación de igualdad como relación de equivalencia. Las unidades significantes se asocian símbolos a cada cantidad de magnitud, denominándola variable.

2.4.1.4 El registro lenguaje natural

En este registro se usan palabras del lenguaje común, donde las expresiones que se manejan dependen de las reglas gramaticales propias del lenguaje, la morfología, el uso de la semántica y la sintaxis, reglas de cohesión. Para el tratamiento se consideran las reglas de la paráfrasis.

Esta teoría permitió la construcción de dos acciones mentales que clasificaron a los estudiantes a partir de sus producciones, para determinar la comprensión que tienen de función lineal usando como indicador la conversión de registros de representación semiótica.

3. Capítulo III: Metodología

Teniendo en cuenta el propósito de investigación determinado en los objetivos llevado a cabo en el contexto educativo, la metodología seleccionada fue de carácter mixto ya que está inscrita en la definición dada por Sampieri (2006), quien afirma que se combina la perspectiva cuantitativa y cualitativa en un mismo estudio, donde a partir de las dos perspectivas se puede dar cuenta de la construcción que hacen los estudiantes del concepto de función lineal. Dichos métodos de investigación son descritos por Creswell (2009, 18) citado por Castro y Godino (2011) como:

> "El investigador basa la indagación sobre el supuesto de que la recogida de diversos tipos de datos proporciona una mejor comprensión del problema de investigación. El estudio comienza con una amplia encuesta con el fin de generalizar los resultados a

> una población y después, en una segunda fase, se centra en entrevistas abiertas y cualitativas para conocer los puntos de vista detallados de los participantes" (p. 101).

De acuerdo con este enfoque, en este estudio se ha definido que el componente cuantitativo es de tipo descriptivo y el componente cualitativo es de tipo descriptivo-interpretativo (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). En el primer componente se describen las producciones escritas de los 26 estudiantes de grado noveno del colegio Néstor Forero Alcalá I.E.D., acerca de la comprensión del objeto función lineal, analizadas desde las respuestas a la prueba diagnóstica y a la secuencia didáctica, en el segundo componente de tipo cualitativo se utiliza el método de estudio de caso (Stake, 2007) para el examen de las producciones de tres estudiantes, correspondientes a la prueba diagnóstica (Ver anexo G), la secuencia didáctica (Ver anexo H, I y J) y las respuestas a dos entrevistas semi-estructuradas utilizadas para profundizar en las explicaciones y razonamientos que emergen en el proceso de solución (Ver anexos K, L, M, N, O y P).

El análisis del estudio de casos se estructuró a partir del análisis de los niveles y las acciones mentales en los que fueron clasificados las situaciones propuestas en los instrumentos, permitiendo clasificar al estudiante en un nivel según las acciones que realizaba para resolver el problema, estas acciones comparadas con de los niveles de covariación adaptados de la teoría de Carlson et. al (2003), como evidencia de esta clasificación se presentan fragmentos de las producciones escritas y las entrevistas hechas a los estudiantes, con el fin de argumentar su clasificación en tal o cual nivel, de igual manera con las acciones mentales para las conversiones entre representaciones.

Cada sujeto fue analizado a partir de cinco categorías diseñadas para establecer el nivel alcanzado respecto al razonamiento covariacional, y dos categorías para analizar las diferentes conversiones que hacen entre las distintas representaciones semióticas. Esto permitió comparar las diferentes respuestas de los sujetos a las tareas propuestas y de otro lado, describir los avances que cada sujeto demuestra en la construcción del concepto de función lineal.

3.1 Descripción global del proceso

3.1.1 Población estudiada

El trabajo de investigación se realizó con 26 estudiantes de grado noveno del colegio Néstor Forero Alcalá I.E.D, jornada tarde, de Bogotá, en Colombia, entre el 13 y el 24 de noviembre del año 2017, fueron aplicados los distintos instrumentos para esta investigación que son la prueba diagnóstica y la experiencia de aula en 4 sesiones de una hora cada una. El colegio se caracteriza por su buen nivel académico, ya que durante los últimos diez años se ha posesionado entre los 100 primeros puestos a nivel nacional en las pruebas SABER ICFES. Así mismo, en el año 2017 la jornada tarde ocupó el quinto puesto en estas pruebas.

Es una institución con baja densidad de estudiantes, ya que hay un curso por cada grado, los estudiantes pertenecen a un estrato bajo-medio del sector noroccidental de Bogotá, llevan en su mayoría cursando toda su educación primaria y secundaria en la misma institución, sus edades se encontraban entre los 13 y 18 años. Durante el estudio, en clase regular se abordaron temáticas referentes a la función lineal, debido a la estructura curricular del colegio[4], además de otras

[4] Espinel, L. (2017). Malla curricular colegio Néstor Forero Alcalá I.E.D. Documento elaborado en el colegio para trabajo interno.

temáticas para no interrumpir el proceso de la investigación, por parte del maestro titular, quien es uno de los investigadores. Como cualidades, a partir de la experiencia del maestro titular es posible afirmar que fueron receptivos, tienen gran sentido de responsabilidad y presentan gran interés en la investigación, son muy comprometidos con su formación académica, ávidos de adquirir nuevos conocimientos y estrategias de aprendizaje.

3.1.1.1 Criterios de selección de los casos de estudio

Los estudiantes seleccionados como caso de estudio fueron elegidos con el criterio emitido por el profesor del curso en el cual se desarrolló la intervención, con base en el desempeño escolar y los resultados obtenidos en la prueba diagnóstica. A continuación, se describe cada uno de los estudiantes que fueron seleccionados:

Estudiante de desempeño bajo: Es un estudiante que no tiene una formación académica continua, ha sido retirado de distintos colegios. Respecto a sus conocimientos, está atrasado en las temáticas propias del curso, tiene dificultades para elaborar conjeturas, visualizar y explorar en las tareas claves que le permitan llegar a la solución del problema, presenta dificultades conceptuales, no usa las distintas representaciones del objeto función lineal y no reconoce la relación entre los registros de entrada y salida de una situación problema.

Respecto a su desempeño en la prueba diagnóstica, no la desarrolla en su totalidad, refiere dificultades para identificar las magnitudes de una situación como variables, pues las reconoce como cantidades numéricas, no reconoce la coordinación entre dos variables, pues no realiza afirmaciones que permitan inferir que reconoce la variación de una magnitud respecto a la otra, por estas razones, fue tomado para esta investigación, con el fin de ver su punto de partida y avance durante el proceso de investigación .

Estudiante de desempeño medio: Es un estudiante que se ha mantenido durante su formación con el mismo docente. Respecto a sus conocimientos, se encuentra a la par con las temáticas propias del curso, elabora conjeturas, visualiza y explora en las tareas claves que le permitan llegar a la solución del problema, realiza conversiones entre representaciones verbal, tabular y gráfico y reconoce la relación entre los registros de entrada y salida de una situación problema.

Respecto a su desempeño en la prueba diagnóstica, la desarrolla en su totalidad, refiere dificultades para plantear expresiones que permitan describir una situación, sin embargo, identifica las magnitudes de una situación como variables, reconoce la coordinación entre dos variables, pues realiza afirmaciones que permitan inferir que reconoce la variación de una magnitud respecto a la otra, identifica si esta coordinación es una relación de aumento o disminución y considera cantidades numéricas para esta relación, por estas razones, fue tomado para esta investigación, con el fin de ver su punto de partida y avance durante el proceso de investigación .

Estudiante de desempeño alto: Es un estudiante que se ha mantenido durante su formación con el mismo docente. Respecto a sus conocimientos, se encuentra más avanzado a las temáticas propias del curso, elabora conjeturas, visualiza y explora en las tareas claves que le permitan llegar a la solución del problema, realiza conversiones entre las cuatro representaciones del objeto función lineal, reconoce la relación entre los registros de entrada y salida de una situación problema, identificando la razón constante entre ellas.

Respecto a su desempeño en la prueba diagnóstica, la desarrolla en su totalidad, durante la prueba identifica las magnitudes de una situación como variables, reconoce la coordinación entre dos variables, pues realiza afirmaciones que permitan inferir que reconoce la variación de una magnitud respecto a la otra, identifica si esta coordinación es una relación de aumento o disminución y considera cantidades numéricas para esta relación, que usa después en el planteamiento de expresiones que describan la situación, por estas razones, fue tomado para esta investigación, con el fin de ver su punto de partida y avance durante el proceso de investigación.

3.1.2 Descripción y diseño de los instrumentos de investigación

Se utilizaron varios instrumentos para recolectar los datos. Un cuestionario correspondiente a la prueba diagnóstica, la secuencia didáctica y las entrevistas semi-estructuradas. La prueba diagnóstica es un instrumento que permite identificar el desarrollo de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, su objetivo es identificar los diferentes niveles de desempeño de los estudiantes en cada grado, generar hipótesis de dificultades en la comprensión de algunos saberes y proporcionar un material educativo para el aula y la formación de los docentes[5].

La noción de secuencias didácticas es formulada inicialmente por Taba (1974) y posteriormente se realiza una serie de desarrollos específicos en los trabajos de Díaz (1984, 1996), constituyen una organización de las actividades de aprendizaje que se realizarán con los

---

[5] MEN (2009). Evaluación diagnóstica. Recuperado de:. *https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-246644.html*.

alumnos y para los alumnos con la finalidad de crear situaciones que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo. Es un instrumento que demanda el conocimiento de la asignatura, la comprensión del programa de estudio y la experiencia y visión pedagógica del docente, así como sus posibilidades de concebir actividades “para” el aprendizaje de los alumnos[6].

La entrevista clínico-crítica emplea una interpretación más sofisticada que la entrevista común, al centrar su atención no sólo en lo verbal, sino también en las acciones de los sujetos, por medio de la observación, las hipótesis, y las variaciones sistemáticas en el tipo de preguntas formuladas o en la situación problema formulada (Tau y Gómez, 2016). En este sentido, para analizar las entrevistas no sólo se tuvo en cuenta las afirmaciones de cada uno de los tres estudiantes entrevistados, sino también las acciones que iban realizando con el transcurrir de cada una de las sesiones y actividades propuestas, en donde ellos debían justificar su proceder y así poder tener más recursos para la clasificación por niveles de cada uno de ellos.

Cada instrumento fue aplicado con una duración de cincuenta y cinco (55) minutos aproximadamente. El primero (prueba diagnóstica) fue resuelto de manera individual, las sesiones en torno a la construcción y estudio de los cubos fueron trabajadas en grupos de 2, 3 y 4 estudiantes. En estos instrumentos se hizo énfasis en preguntas que le exigieran al estudiante verbalizar sus acciones mentales, ya que se buscaba mayor confiabilidad en la información recogida para el análisis y como elemento decisivo en la evaluación y formulación de juicios (Förster y Rojas, 2008).

A continuación, se describen en detalle cada uno de los instrumentos utilizados.

---

[6] Barriga, A. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. Universidad Nacional Autónoma de México. P. 1. UNAM

3.1.2.1 La prueba diagnóstica.

La prueba diagnóstica (Ver anexo Q), estuvo compuesta por cuatro problemas, que buscaban evaluar el nivel en el que los estudiantes se encontraban con respecto a la comprensión del concepto de función lineal.

3.1.2.2 La secuencia didáctica.

Los otros instrumentos se condensan en una secuencia de actividades conformada por cuatro sesiones en las cuales se propuso a los estudiantes un conjunto de problemas que pedían el análisis y estudio de las propiedades y relaciones de distintas magnitudes de cuatro cubos de diferentes tamaños, elaborados en origami. Las actividades buscaron que el estudiante se aproximara a la comprensión del objeto función lineal por medio de la covariación y la coordinación de diferentes representaciones, puesto que las situaciones propuestas requieren de modelación y a su vez, esta modelación se logra a partir de las transformaciones de representaciones semióticas, además de las acciones mentales propias del razonamiento covariacional para identificar relaciones entre registros de entrada y salida; las actividades planteadas fueron elaboradas de tal forma que el estudiante pudiera cambiar de representación semiótica en el siguiente orden: lenguaje natural, tabular, gráfico y simbólico.

En la primera sesión, (Ver anexo R) se planteó una situación en la que se debía seleccionar un empaque adecuado para guardar frutas, después, se pidió a cada grupo de estudiantes construir cuatro cubos en origami de diferente tamaño (con hojas de forma cuadrada con lados de 16cm, 20cm, 24cm y 28 cm cada una). Luego de construir todos los cubos, las preguntas hacían referencia a contar el número de caras, aristas, vértices y diagonales de cada uno de estos (datos que debían ser consignados en la tabla del instrumento de esta sesión. Seguidamente debían escoger dos magnitudes de las encontrados anteriormente y construir su gráfica en el plano cartesiano, intentando encontrar una expresión simbólica que represente la función que relaciona el lado de la hoja o la medida del lado del cubo y la otra medida seleccionada. Se finalizaba con una tarea en la que debían responder preguntas acerca de los elementos invariantes y constantes en la tabla.

En la segunda sesión (Ver anexo S), los estudiantes usaban las cajas ya construidas (los cubos) para determinar áreas, perímetros (perímetro total considerado como el desarrollo plano del cubo) y se les solicitó que fueran consignadas en la tabla de la guía de trabajo utilizada para esta sesión. Luego escogían una de las anteriores medidas para construir la gráfica en el plano cartesiano, que relacione el área con la medida seleccionada. Finalizaban esta sesión encontrando una expresión algebraica que represente la gráfica hecha y a partir de ella responder preguntas acerca de la relación entre las variables seleccionadas.

La tercera sesión (Ver anexo T), permitía la comparación entre los resultados obtenidos en las sesiones uno y dos, ya que exigía la comparación de la representación tabular, la gráfica y las expresiones algebraicas o simbólicas, para determinar similitudes y diferencias entre las pendientes, la forma de las gráficas, las representaciones simbólicas, entre otros.

La cuarta sesión permitía un acercamiento a la función cuadrática (Ver anexo U), ya que el estudiante debía realizar la gráfica correspondiente a las áreas de los cubos, y responder preguntas acerca de las variables analizadas, aunque es importante mencionar que, debido a la falta de tiempo prevista para esta sesión, no fue posible concluirla.

3.1.2.3 Las entrevistas individuales.

Después de elaborar estos instrumentos, los estudiantes seleccionados fueron entrevistados individualmente para tener una visión más amplia de sus comprensiones. Cada interrogante fue elaborado tomando como base las respuestas específicas de cada pregunta de un problema con el fin de profundizar en sus comprensiones y tener más evidencias para clasificarlos según las categorías de nivel desarrolladas.

En la investigación, se hicieron preguntas específicas sobre respuestas dadas por los estudiantes (ver figura 2).

Nivel 1- Sesión 2-Estudiante #1P	
Respuesta del estudiante: Problema # 2: Preguntas 1, 2, 3, 4 *Situación de la llamada* **1.** ¿Qué variables aparecen en la gráfica? **RTA:** Tiempo y cobro de cada llamada. Costo: Variable Tiempo: Variable	Pregunta de la entrevista P**1.** ¿Por qué el tiempo y el costo son variables en la situación de las llamadas? **RTA:** porque son elementos que toman distintos valores pues están ubicados en distintos sitios del plano, por lo que no tienen el mismo valor, si lo tuvieran, o sea, si estuviera especificado el valor, si la gráfica tuviera números.

Figura 2 Ejemplo de entrevista clínico-crítica, sesión 2 (Fuente: Elaboración propia).

3.2 Categorías de análisis

Se construyeron apriori dos grupos de categorías. El primer grupo corresponde a los niveles de razonamiento covariacional y el segundo a las conversiones entre las diferentes representaciones semióticas utilizadas.

3.2.1 Categorías de razonamiento covariacional.

Para este grupo de categorías se adaptaron tanto los niveles como las acciones mentales propuestas por Carlson et. al (2003).

Los Niveles (N) permiten clasificar las respuestas de los individuos estudiados al analizar todos los comportamientos que manifiestan al responder las tareas propuestas (Carlson et. al , 2003, p. 7). Los niveles adaptados y utilizados en nuestro trabajo son No reconocimiento de variables (N0), el de coordinación (N1), el de dirección (N2), el de coordinación cuantitativa (N3) y, el de razón promedio (N4), los cuales explicitamos a continuación.

Nivel 0 (N0): No reconocimiento de variables

En el nivel de No reconocimiento de variables, se clasifican las producciones de los estudiantes que muestran que no se asocian acciones mentales (AM) que se relacionen con la covariación, pues el estudiante no llega a reconocer las variables que intervienen en una situación específica. Hay ausencia de razonamiento covariacional.

Nivel 1 (N1): Coordinación

En el nivel de coordinación, se espera que el estudiante verbalice la coordinación de las dos variables, es decir, identifique las magnitudes que varían en la situación, por ejemplo, en la sesión 1: medida del lado del cubo y arista y en la sesión 2: medida del lado del cubo y área, haciendo una descripción de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables. En tal sentido se espera que el estudiante describa una relación entre las variables en estudio.

Nivel 2 (N2): Dirección

En el nivel de dirección, se espera que el estudiante identifique de manera escrita y verbal cómo es la variación entre las magnitudes, por ejemplo, afirmando que a medida que aumenta una la otra también, es decir que reconozca una dirección para el crecimiento. En la sesión 1 que exprese que la medida del lado del cubo aumenta y las aristas también y, en la sesión 2 note que la medida del lado del cubo aumenta y el área también o que cuando la medida del lado disminuye el área también. De la misma manera sino varían.

Nivel 3 (N3): Coordinación cuantitativa

En el nivel de la coordinación cuantitativa, el estudiante verbaliza si la medida los aumentos o disminuciones se dan en igual cantidad, por ejemplo, en la sesión 1 puede afirmar que la medida del lado del cubo aumenta en igual cantidad que las aristas y en la sesión 2 que la medida del lado del cubo aumenta en igual cantidad que el área, o, si es el caso, que son diferentes.

Nivel 4 (N4): Razón promedio

En el nivel de la razón promedio, se espera que el estudiante identifique que la razón de cambio entre la medida del lado del cubo y las aristas es constante, es decir, que existen incrementos constantes entre esas magnitudes.

3.2.2 Categorías para las conversiones entre las representaciones semióticas

Se usaron cuatro representaciones semióticas en las actividades propuestas en los instrumentos: lenguaje natural, tabular, gráfico y simbólico, en este orden, a cada una le fueron asignados descriptores propios de cada representación (reglas), que permitieron la caracterización de cada representación y el reconocimiento de la coordinación entre las distintas representaciones utilizadas. Se proponen dos acciones mentales (AM), la primera, plantea el reconocimiento de cada representación, y la segunda describe las conversiones entre las representaciones (ver tabla 3).

Tabla 3

Relación de las acciones mentales formuladas con las operaciones cognitivas de cambios de representación.

Objetivo principal	**Acción Mental (AM)**	**Comportamientos**
Convertir un registro de representación semiótica a otra (lenguaje natural, tabular, gráfica y simbólica) para expresar la relación general encontrada e identificar la covariación entre dos magnitudes lineales.	**AM1:** Reconoce los distintos registros de representación semiótica y sus características sin realizar conversiones entre estos	- Representación Tabular. El estudiante debe reconocer: a) Relación fila- fila. b) Relación columna –columna. c) Relación columna- fila /fila- columna. d) Aumento o disminución de la relación según una cantidad numérica específica o constante. - Representación Gráfica. El estudiante debe reconocer: a) Puntos como parejas ordenadas en el plano. b) Ubicación de los ejes x como horizontal e y como vertical. - Representación Verbal. El estudiante debe reconocer: a) La relación entre los valores de la variable. b) Expresarla por medio de palabras que se ajusten al contexto. - Representación Simbólica. El estudiante debe reconocer: a) La cantidad de aumento o disminución entre fila-columna que denominará pendiente. b) A partir de la gráfica o de la tabla, ubicará la coordenada desde la cual inicia y le llamará punto de corte con el eje Y. c) Una expresión general que le permitirá encontrar cualquier valor que se necesite dentro de la situación
	AM2: Realiza conversiones entre registros de representación semiótica	- Realiza conversión de registro verbal a tabular - Realiza conversión de registro tabular a gráfico - Realiza conversión de registro gráfico a simbólico

Acciones mentales propuestas para la conversión y comportamientos asociados a cada una de ellas. (Fuente: elaboración propia).

En la siguiente tabla, se presentan el instrumento diagnóstico y las cuatro sesiones de la unidad didáctica clasificadas según el nivel que se evalúa. En total son siete niveles, cuatro corresponden al razonamiento covariacional que fueron evaluados en su mayoría con el instrumento diagnóstico, dos acciones mentales que apuntaban a las representaciones semióticas y un nivel en el que se clasifican los estudiantes que no llegaron a ninguna relación (Ver tabla 4).

Tabla 4
Niveles de covariación y Acciones Mentales a los que apuntó cada pregunta de los instrumentos implementados.

NIVEL-AM	PRUEBA DIAGNÓSTICO	UNIDAD DIDÁCTICA SESIÓN 2	SESIÓN 3	SESIÓN 4	SESIÓN 5
N1	Problema # 2: Pregunta 1 Problema # 4: Pregunta 1				
N2	Problema #2: pregunta 2, 3, 4, Problema # 4: Pregunta 2	Problema 3	Problema 2		Problema 2
N3	Problema # 4: pregunta 4	Problema 2	Problema 1		Problema1
N4	Problema 2: pregunta 5	Problema 4c)	Problema3 c)	Problema 1c)	Problema 3, 5
AM1	Problema 1: pregunta1,2,3,4 Problema 4: pregunta 5	Problema 4a), 4b)	Problema 3a), b)	Problema 1 a), b), d), f), g)	
AM2	Problema # 3 Problema # 4: preguntas 3, 5	Problema 4	Problema 3	Problema 1 h), i)	Problema 4

Problemas propuestos según los niveles de razonamiento covariacional y acciones mentales de conversión (Fuente: Elaboración propia)

Esta distribución fue pensada a partir de los niveles, cada nivel fue cubierto por los instrumentos, el nivel uno y dos fueron trabajados en la prueba diagnóstica, a partir de los resultados obtenidos, se consideró que no era necesario incluirlos en la secuencia, debido a que, en sus producciones, los estudiantes seleccionados demostraron alcanzar los dos niveles. Para las sesiones 2 y 3, se consideró proponer situaciones que cubrieran a partir del nivel 3, con el fin de permitir al estudiante demostrar si encontraba cantidades numéricas constantes entre las relaciones de aumento de las situaciones planteadas, para la sesión cuatro, al ser comparaciones entre las sesiones 2 y 3, se pide al estudiante construir expresiones que representen las situaciones de las sesiones mencionadas, todas las sesiones tienen las acciones mentales puesto que durante el desarrollo se pide al estudiante que realice conversiones entre las distintas representaciones en este orden: verbal, tabular, gráfico y simbólico.

3.2.3 Técnicas de recolección de la información

En el proceso de recolección de la información se emplearon dos técnicas, las producciones escritas de los estudiantes y las grabaciones de audio realizadas durante las sesiones de resolución de los problemas planteados y las grabaciones de video realizadas durante la entrevista.

Las producciones escritas de los estudiantes corresponden a las soluciones individuales de la prueba diagnóstica y a las soluciones grupales de la secuencia didáctica. Las grabaciones de video se hicieron después de la aplicación en la totalidad de los instrumentos, de manera individual y luego fueron transcritas (Ver anexo K, L y M). Es de aclarar que para las entrevistas se solicitó el permiso informado a cada uno de los padres.

3.3 3.3 Descripción general del procedimiento de análisis.

3.3.1 Prueba diagnóstica

Se compone de cuatro problemas específicos que permitieron identificar el nivel de comprensión que tenían los estudiantes sobre la función lineal. De todos los instrumentos de la investigación es el único que consolida los cuatro niveles y las dos acciones mentales; su validación se hizo por medio de los Niveles de covariación (N) y las Acciones Mentales (AM) para la conversión entre los registros de representación semiótica, para analizar si el estudiante alcanzó el nivel por el que se indagaba en cada situación. Por ejemplo, para el problema 2 (Ver anexo Q), se esperaba que los estudiantes hallaran la relación entre las variables del gráfico presentado (tiempo vs costo), y a partir de estos, respondieran las preguntas, identificando quién llamó más lejos o quién duró más. También se esperaba que el estudiante planteara en la situación un nuevo punto F, que mostrara la llamada más larga y más costosa, entonces cada problema requería que los estudiante establecieran variables y encontraran relaciones entre ellas, además de usar las representaciones semióticas para analizar la situación.

3.3.2 Secuencia de actividades

Su principal propósito fue describir el nivel de comprensión que alcanzan los estudiantes acerca de la función lineal por medio la covariación y el uso de las conversiones entre las representaciones semióticas utilizadas (Ver anexo V). La secuencia de actividades se compone de cuatro sesiones que establecieron situaciones de conversión en el siguiente orden: verbal, tabular, gráfico y simbólico, buscando que el estudiante pudiera establecer una relación entre las magnitudes de cada situación.

3.3.3 Entrevistas clínico-críticas

Esta herramienta fue utilizada para reunir más información que permitiera responder nuestra pregunta de investigación, por medio de las respuestas de los estudiantes analizados y con esto, hacer un mejor análisis a profundidad, que permita identificar el nivel de razonamiento covariacional del estudiante y las posibilidades que le brindaba el transitar por las diferentes representaciones de la función lineal.

Las preguntas fueron elaboradas con base en las respuestas de los estudiantes para tener una mejor comprensión de los procesos de solución y las justificaciones que dieron cuando resolvían los problemas. Se buscó convertir la entrevista en una herramienta para recolectar más información, que al ser analizada con base en los niveles y acciones mentales diera más herramientas para generar una conclusión del nivel de construcción que tiene cada estudiante. Así, por ejemplo, en la prueba diagnóstica, en el problema #2, en relación a la entrevista clínico-crítica, se esperaba que los estudiantes pudiesen argumentar sus respuestas, cuestionándolos acerca de los puntos que no respondieron, en los que se equivocaron, o sobre algunos que ellos quisieran explicar con más detalle, para esto, se proponen preguntas específicas para determinar si el estudiante reconocía en la situación presentada variables, entre otras, se cuestionó su producción en la entrevista donde tuvo oportunidad de argumentar sus producciones, se construyó una tabla cuya estructura permitió comparar las producciones escritas de los estudiantes, la entrevista orientada a esta pregunta y un análisis que lo clasificara en un nivel a partir de estas.

4. Capítulo IV: análisis

Las producciones de los estudiantes se analizan de dos maneras diferentes, la primera corresponde a un análisis de tipo cuantitativo, que se hace a la prueba diagnóstica, la cual se aplicó a los estudiantes en su totalidad de manera individual, haciendo un análisis de todas las respuestas de esta, la segunda corresponde al análisis de cada uno de los estudiantes seleccionados como estudios de caso, a partir de sus respuestas en las sesiones de la unidad didáctica y las entrevistas.

4.1 Análisis cuantitativo

El análisis cuantitativo se hizo con los resultados que se obtuvieron de aplicar la prueba diagnóstico a los 26 estudiantes del grado noveno con el que se trabajó. Este instrumento, como ya se mencionó en el marco metodológico, se compone de cuatro problemas que permitieron identificar el nivel de comprensión inicial que tenían los estudiantes sobre la función lineal. Además, es el único instrumento que consolida los cuatro niveles de razonamiento covariacional (N1 – N4) y las dos acciones mentales para la conversión entre las representaciones semióticas

(AM1 y AM2). La revisión de este instrumento permitió evidenciar si cada estudiante alcanzó el nivel o la acción mental por la que se indagaba en cada situación. En cuanto a los niveles de razonamiento covariacional, estos fueron evaluados en el segundo y cuarto problema, mientras que las acciones mentales de conversión de representaciones semióticas en el primer, tercer y cuarto problema principalmente (ver tabla 5).

Tabla 5
Clasificación de preguntas de la prueba diagnóstico según la Acción Mental de conversión entre representaciones y Niveles de razonamiento covariacional.

PROBLEMA 1	**Acción Mental de conversión entre representaciones**	**Mostró acciones acordes con la Acción Mental de conversión**	**No mostró acciones suficientes, acordes con la Acción Mental**
Ítem a Ítem b	AM1	18	8
Ítem c Ítem d	AM1	17	9
PROBLEMA 2	**Nivel de razonamiento covariacional**	**Mostró acciones acordes con el nivel de covariación esperado (N1, N2 o N4)**	**No mostró acciones acordes con el nivel de covariación esperado (N1, N2 o N4)**
Ítem a	N1	10	16
Item b			
Item c	N2	10	16
Item d			
Ítem e	N4	5	21
PROBLEMA 3	**Acción Mental de conversión entre representaciones**	**Mostró acciones acordes con la Acción Mental de conversión**	**No mostró acciones suficientes, acordes con la Acción Mental**
Ítem único	AM2	24	2
PROBLEMA 4	**Acción Mental de conversión o Nivel de razonamiento covariacional**	**Mostró acciones acordes a la Acción Mental de conversión o nivel de**	**No mostró acciones acordes a la Acción Mental de conversión o nivel de**

		razonamiento covariacional esperado	razonamiento covariacional esperado
Ítem a	N1	10	16
Ítem b	N2	12	14
Ítem c	AM2	11	15
Ítem d	N3	10	16
Ítem e	AM1 y AM2	11	15

Resultados obtenidos luego de la aplicación del instrumento en el aula (Fuente: Elaboración propia)

Con base en la frecuencia absoluta de estudiantes que mostraron las acciones esperadas en cada uno de los niveles de razonamiento covariacional y las acciones mentales de conversión entre representaciones semióticas (ver tabla 9), se pudo establecer el porcentaje de estudiantes que mostraban las acciones acordes y los que no, lo cual se describe a continuación.

En el primer problema (Ver anexo Q), en donde a partir de la descripción de una situación en donde se debía llenar con agua dos recipientes de formas particulares (una cilíndrica y otra esférica), los estudiantes debían hacer la conversión de la representación verbal (enunciado dado) a la gráfica, se observó que en los ítems a) y b) (Ver anexo W), coincidieron las respuestas ,el 69% de los estudiantes reconoce los descriptores asociados a la acción mental 1 (AM1), de acuerdo con las características particulares de los recipientes dados, mientras que el 31% de los estudiantes no. Frente a los ítems b) y c) de este problema, en donde se les solicitaba por un lado, que compararan ambas gráficas y determinaran diferencias o similitudes entre lo que variaba y no en cada una y, por el otro, que propusieran otra forma de recipiente con su respectiva representación gráfica, para determinar si reconocían los puntos como parejas ordenadas en el plano y si establecían la ubicación de los ejes x como horizontal e y como vertical, se evidenció que el 65% de los estudiantes hicieron lo solicitado, mientras que el 35% no, dando a entender que este 65% hace conversiones entre representaciones semióticas.

En el segundo problema (Ver anexo X), a partir de una representación gráfica se formulaban preguntas en donde los estudiantes debían hacer uso del razonamiento covariacional para determinar diferentes relaciones entre las variables que se daban (duración de las llamadas y costo de las mismas). Se esperaba que los estudiantes identificaran las magnitudes que varían (N1: coordinación) en el ítem a), pero tan sólo el 38% de los estudiantes pudo hacerlo, mientras que el 62% no. Además, en las preguntas posteriores, que indagaban sobre cómo se daba la variación entre las magnitudes (N2: dirección) en los ítems b), c) y d), en los resultados se observó que el 38% pudo dar cuenta de la dirección de la variación de las magnitudes y el 62% no estableció que la variable dependiente aumentaba si la variable independiente también lo hacía, es decir, que el costo de la llamada aumentaría si el tiempo de duración de la misma se prolongaba. Por último, en el ítem e) se quería evidenciar si los estudiantes reconocían que los aumentos o disminuciones en los costos de las llamadas eran constantes (N3: Coordinación cuantitativa). Con base en los resultados, se estableció que tan sólo el 19% de los estudiantes reconocieron dicha constancia, mientras que el 81% no, lo que ubica a este 19% en un nivel tres, reconociendo una cantidad numérica para relaciones de aumento entre variables.

En el tercer problema (Ver anexo Y), se les dio a los estudiantes 4 representaciones gráficas y un enunciado en donde se describían cuatro ritmos de trote de atletas diferentes en un mismo tramo de una carrera, para que determinarán la relación entre ambas representaciones, es decir, que pudiesen hacer una conversión de representación verbal a gráfica (AM2) para establecer qué gráfico correspondía con el ritmo de cada atleta durante un tramo de la carrera señalada en la situación, según la descripción verbal que se hizo de cada uno. En cuanto a los resultados, tan sólo el 8% de los estudiantes no pudo establecer correctamente las relaciones entre ambas representaciones, mientras que el 92% si, lo que permite indicar que la presentación de la representación gráfica favorece el proceso de conversión, pues la visualización de la situación le permite identificar características propias de la representación gráfica e identificarlas en el lenguaje natural para poder asociarlas.

Finalmente, en el cuarto problema (Ver anexo Z), se les dio a los estudiantes la representación gráfica del costo vs. La cantidad de empanadas que había en un negocio, para que por medio de este los estudiantes hicieran uso del razonamiento covariacional y dieran respuesta a cada una de las preguntas de este problema (ítems a), b) y d)), así como la conversión entre representaciones para tener mayor claridad conceptual sobre la situación planteada (ítems c) y e)).

Frente a los resultados que se obtuvieron sobre razonamiento covariacional, en la primera pregunta, que hace alusión al primer nivel (N1: coordinación), ya que debían expresar de manera verbal la relación existente entre el costo de empanadas por cada una de estas que se consuma, se obtuvo que el 38% de los estudiantes manifestó correctamente dicha relación, mientras que el 62% no. En cuanto a la segunda pregunta, que hace énfasis en el segundo nivel (N2: dirección), ya que los estudiantes debían establecer si la función era continua o discreta, además de reconocer si la relación de costo por empanada hace que el aumento de una variable también hace que la otra variable aumente, se evidenció que el 46% de los estudiantes determinaron la no continuidad de la función, así como el aumento entre ambas magnitudes debido a la relación dada entre ellas, mientras que el 54% no. Frente al ítem d), que indagaba por el tercer nivel de razonamiento covariacional (N3: coordinación cuantitativa), ya que los estudiantes tenían que darse cuenta de que el aumento en la cantidad de empandas que se piden hace que el costo de estas también vaya aumentando, fue posible ver que el 38% mostro las acciones acordes a este nivel, mientras que el 62% no logro hacerlo, de este se concluye que la conversión entre representaciones es una dificultad latente en los estudiantes, pues no identifican descriptores que les permitan realizar conversiones con éxito.

En relación con la conversión entre representaciones, en el ítem c), los estudiantes debían hacer la conversión de la representación gráfica a la tabular, reconociendo y diferenciando la relación columna – columna como número de empanadas y costo por empanada, se encontró que el 42% de los estudiantes pudo hacer esta conversión, mientras que el 58% no. Por último, al final de este problema se les pidió a los estudiantes que hicieran la conversión de las representaciones ya hechas (gráfica y tabular) a la simbólica, usando la variable n, como ayuda para expresar la variable independiente, de los resultados, se obtuvo que el 42% pudo hacer la conversión mientras que el 58% de los estudiantes no, lo que demuestra que la representación simbólica es la más difícil de representar por el estudiante, a pesar de ser la más trabajada en el aula regular.

De todo el análisis cuantitativo que se describió anteriormente, es posible mencionar que aunque hay estudiantes que muestran acciones acordes con el último nivel de razonamiento covariacional evaluado (N4), más del 50% de estudiantes mostraron acciones relacionadas con niveles inferiores a este. De igual modo, aunque hubo estudiantes que mostraron hacer la conversión entre representaciones, entre el 30% y el 40% de los mismos no reconocía los aspectos más relevantes de cada representación, por lo cual eran capaces de hacer la conversión entre una y otra.

Teniendo en cuenta lo anterior, se tuvo en cuenta el proceso llevado a cabo en el aula de clase, así como los resultados obtenidos de la aplicación del instrumento diagnóstico, para seleccionar a tres estudiantes y poder analizarlos más detalladamente en cada una de las sesiones posteriores. Estos tres estudiantes fueron clasificados inicialmente, uno como de nivel bajo, otro como de nivel medio y el último como de nivel alto y posteriormente se hará énfasis en el proceso que realizó cada uno, de forma cualitativa en relación a las categorías de análisis seleccionadas (razonamiento covariacional y conversión entre representaciones semióticas), para finalmente dar cuenta de la construcción que estos hicieron del concepto función lineal.

4.2 Análisis cualitativo

En este apartado se presenta el análisis a los tres estudiantes seleccionados a partir de sus producciones escritas y orales.

4.2.1 Análisis de resultados estudiante # 1 – Desempeño bajo

A continuación, se presenta un análisis de las producciones escritas y orales del primer estudiante, para lo que se seleccionaron las respuestas a cada una de las preguntas de la secuencia didáctica, y a partir de estas, se identificó la acción mental que realizó y por tanto el nivel en el que se ubica.

Inicialmente para la *sesión 2,* el estudiante debe construir cuatro cubos en origami con hojas cuadradas, cuyas medidas son 16cm, 20cm, 24cm y 28cm, con los cubos ya construidos, debe contar: número de vértices, número de aristas, número de caras y número de diagonales de cada cubo, consignando los datos en una tabla dispuesta para ello, después, se formularon una serie de preguntas para que fueran respondidas por el estudiante.

A la primera pregunta formulada "*¿Qué permanece constante y qué varía entre las magnitudes consideradas en la tabla anterior?"*, cuyo objetivo era que el estudiante reconociera lo que cambia y lo que permanece invariante en la tabla que previamente fue diligenciada, en diálogo con el compañero de grupo responde: (E1: estudiante analizado-E2: compañero de grupo)

<u>*Sesión 2: Problema 2*</u>

Construir los cubos y completar la tabla de las relaciones del cubo

E1: Pues siempre es lo mismo, entonces, ¿Para qué llenar toda la tabla?

E2: Pero si siempre es lo mismo no tiene sentido, entonces sería para todos un punto ¿no?

E1: Pues ponemos un punto y todos en la misma ¿no?

Es decir, toca poner solo un punto en el plano que represente todas las medidas

Figura 3 Diálogo del estudiante analizado con su compañero de grupo (Fuente: Elaboración del estudiante)

Así, el estudiante, al construir la tabla, encuentra los valores para el número de aristas, vértices, diagonales, y caras, luego no ve la necesidad de completarla puesto que, según afirma, siempre se obtendrán los mismos valores, esta afirmación la complementa cuando responde las preguntas del entrevistador, como se muestra a continuación.

P3. ¿De qué manera completó la tabla de la primera actividad?
RTA. Pues no la llené porque me pareció inútil, la primera fila iba a ser igual que todas, entonces sólo completé la primera y listo, dejé el resto sin llenar porque era lo mismo siempre.

Figura 4 Diálogo del estudiante analizado con su compañero de grupo (Fuente: Elaboración del estudiante).

La inclusión de la expresión "dejé el resto sin llenar porque era lo mismo siempre", permite afirmar que identifica los valores obtenidos como cantidades numéricas constantes, que corresponden a las propiedades geométricas invariantes en un cubo, sin embargo, frente a la magnitud longitud de lado de la hoja, no expresa si reconoce que es una variable reconociendo las magnitudes como cantidades numéricas.

No responde a las preguntas en las que se le pide encontrar la relación entre distintas magnitudes (Sesión 2, Problema 3, literales b), c) y d)), para las que tenía que definir la variable de entrada *(x)*, la variable de salida *(y)*, y decidir sobre las posibles relaciones de dependencia o independencia entre estas. Además, tampoco responde las preguntas siguientes (Sesión 2, Problema 4), solamente afirma que la gráfica que construye es un punto, en la que representa dos magnitudes de la tabla, en este caso, escoge medida del lado del cubo vs. número de aristas de una cara del cubo, puesto que, para cualquier longitud del lado del cubo, el número de aristas de una cara del cubo no cambia y lo representó así:

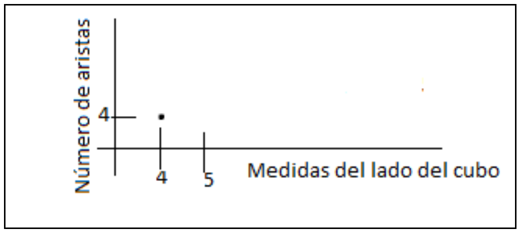


Figura 5 Producción del estudiante (Fuente: Elaboración del estudiante).

Para la *sesión 3*, a partir de los cubos ya construidos, debe determinar el área y el perímetro de cada una de las caras del cubo y del total de cada cubo, consignando los datos en una tabla dispuesta para ello, después, se formulan una serie de preguntas referidas a que identifique lo que cambia, lo que permanece constante y las posibles relaciones entre las magnitudes involucradas.

Las preguntas del problema 2, en el que, a partir de las medidas perímetro y área de una cara del cubo y volumen del cubo, además de los totales de todas las caras del cubo, se esperaba que identificara lo que cambia y lo que permanece invariante, no las responde explícitamente. De los procesos que usa para llenar la tabla se puede inferir que reconoce como variables las distintas magnitudes involucradas, porque usa una fórmula para encontrar los valores correspondientes a área de una cara del cubo y perímetro de una cara del cubo, debido a que usa fórmulas incorrectas, encuentra valores que considera son muy grandes. Se puede asumir que implícitamente identifica las dos magnitudes como variables, sin llegar a establecer una relación entre estas (coordinación), como se muestra en la figura siguiente, que corresponde a la producción del estudiante al resolver el problema (Ver figura 6).

Sesión 3:
E1: ¿y cómo hallamos el área?
E2: toca multiplicar los cuatro lados
E2: pero en el perímetro toca sumarlos
E1: uy, pero da un número muy grande ¿no?
E2: si, eso no se puede graficar, da una cantidad grandísima, entonces es mejor llenar las, tablas y decir que no hay una gráfica posible para este punto
E1: en este caso, ¿el área del primero sería 256, porque 4x4x4x4 cierto?
E2: si claro, toca usar calculadora porque para multiplicar todos esos valores no alcanzamos y de pronto nos queda mal.
¿Y para el perímetro?
E2: ese si es sólo la suma 4+4+4+4= 16, pero no podemos relacionar área y perímetro por lo grande de los valores.

Figura 6 Diálogo del estudiante analizado con su compañero de grupo (Fuente: Elaboración del estudiante).

Para las preguntas siguientes, que buscan que determine las relaciones entre las magnitudes involucradas, el estudiante reconoce que la longitud de lado del cubo vs. el área de una cara del cubo y, la longitud del lado del cubo vs el perímetro de una cara del cubo, toman diferentes valores, sin mencionar de manera explícita que esos valores están relacionados, los consignan en las tablas de tal manera que el área de una cara del cubo depende de la longitud del lado del cubo, de igual manera, el perímetro de una cara del cubo depende de la longitud del lado del cubo, en sus justificaciones no incluye expresiones como que: “a mayor longitud del lado del cubo, mayor área y mayor perímetro”, solamente determina los valores numéricos y los consigna en las tablas, aunque los obtiene al aplicar las fórmulas incorrectas correspondientes (Fórmulas correctas: Para perímetro de una cara del cubo: suma de los cuatro lados del cubo= 4*L; perímetro total sería= 12*L- para área de una cara del cubo: multiplica los cuatro lados del cubo: Área de una cara del cubo=L^2 ; Área total= 6*L^2 (Ver figura 7).

Longitud de un lado de la hoja en (cm)	Longitud de un lado del cubo en (cm)	Perímetro		Área		Volumen en Cm^3
		De una cara del cubo en (cm)	total en (cm)	De una cara en cm^2	de la superficie completa en	
16 cm	4cm	16cm	96cm	256 cm^2	1536 cm^2	
20cm	5cm	20cm	120cm	625 cm^2	3750 cm^2	

Figura 7 Áreas y perímetros calculados por el estudiante para la sesión 3 (Fuente: Elaboración del estudiante).

A partir de lo que afirma sobre la construcción de esta tabla es posible determinar que reconoce que las magnitudes varían, sin llegar a determinar una relación entre estas, tampoco hay una afirmación que permita asumir que implícitamente a partir de sus producciones considera que a medida que una cambia (Longitud del lado de la hoja, por consiguiente, del lado del cubo) la otra también (área o perímetro de una cara del cubo, según sea el caso), más claramente para este caso específico, que si una aumenta, la otra también.

Para la sesión 4, el estudiante debía comparar los registros:

- Tabular: tabla de longitud del lado del cubo vs aristas, vértices, diagonales y caras (tabla construida en la sesión 2)- tabla de longitud del lado del cubo vs área y perímetro de una cara del cubo (tabla construida en la sesión tres), donde tiene ambos insumos, pues construyó para ambos casos las tablas.
- Gráfico: Gráfica de longitud del lado del cubo vs aristas, vértices, diagonales o caras (gráfico construido en la sesión 2)- gráfico de longitud del lado del cubo vs área o perímetro (gráfico construido en la sesión 3), no tiene ambos insumos, tiene la construcción hecha para la sesión2, pero la gráfica de la sesión tres consideró que no era posible hacerla, puesto que los valores son muy grandes.
- Simbólico: expresión algebraica para relacionar longitud del lado del cubo vs aristas, vértices, diagonales o caras (expresión construida en la sesión2)- expresión algebraica para relacionar longitud del lado del cubo vs área o perímetro de una cara del cubo (expresión construida en la sesión3), no tiene insumos, pues en ninguna de las dos sesiones determinó una expresión para las situaciones descritas.

A continuación, se refiere la respuesta general que emitió:

E1: Pues sí, y en el cuadro que está allí no escribimos nada porque no hay ninguna comparación y no podemos hacer representación general, la única que quedaría es la de las tablas, y esa tiene números muy desiguales, pues unos son muy grandes y los otros son muy pequeños, entonces no se puede comparar, lo único que se podría decir es que hay mucha diferencia entre las cantidades.

Figura 8 Producciones del estudiante para la sesión 4 (Fuente: Elaboración del estudiante).

A partir de sus producciones en las sesiones anteriores no tiene los insumos suficientes para comparar y responder las preguntas formuladas, de la única construcción de una representación gráfica que hizo, que corresponde a la sesión dos, donde relaciona la longitud del lado de la hoja, por ende, del cubo y el número de aristas de una cara, usando un punto en el plano cartesiano (Ver figura 7), es posible afirmar que implícitamente identifica estas magnitudes como constantes, pues recalca que siempre se obtiene el mismo valor, y por ello, solamente ubica una pareja ordenada (ver figura 9).

4. ¿Por qué pone solo un punto en el plano?
RTA. Es que siempre es lo mismo, entonces siempre será el mismo punto para todos los valores que tengamos, incluso si no están en la tabla que nos dieron, porque las caras del cubo siempre son las mismas o deja de ser cubo.

Figura 9 Entrevista clínico crítica, respuesta del estudiante (Fuente: Elaboración del estudiante).

Con esto, se concluye que debido a que este estudiante no pudo dar respuesta a las preguntas de la sesión cuatro, a pesar de haber demostrado reconocer que identificaba magnitudes invariantes y variantes de manera implícita en las sesiones anteriores. En la entrevista se cuestionó si consideraba que al hacer la comparación entre los registros tabulares, gráficos y simbólicos descritos con anterioridad era posible encontrar alguna relación (ver figura 10).

P6. En la comparación no afirmó que hubiera relación entre las gráficas ¿Hay alguna relación?
RTA. Yo creo que no, la una es un punto y la otra no se puede hacer porque son valores gigantes, entonces para que hubiera relación debería ser parecidas, dos líneas o dos ruedas, o algo así

Figura 10 Diálogo del estudiante analizado con su compañero de grupo (Fuente: Elaboración del estudiante).

Las respuestas del estudiante resultaron insuficientes para determinar su construcción del concepto de función lineal a partir de la clasificación según los niveles de covariación adaptados para este trabajo, por lo que, se realizó una segunda entrevista en la que dio razón de sus producciones; se plantearon tres enunciados, el primero hace referencia a la relación entre la longitud del lado del cubo y el número de aristas de una cara del cubo, en esta, se hacen preguntas acerca de las magnitudes que varían y si existe alguna relación entre estos, realizando la gráfica entre las dos magnitudes y determinando una expresión para esta. El segundo hace referencia a la relación entre la longitud del lado del cubo y el perímetro de una cara del cubo, determinando las variaciones (Δx y Δy) que se calculan como la diferencia entre las longitudes (fila-fila) entre los perímetros (fila-fila), entre longitud y perímetro (fila -columna) de tal manera que determinara el cociente (razón de cambio promedio; relación columna- columna) entre las magnitudes, realizando la gráfica entre estos y determinando una expresión para esta, se plantea al estudiante una tabla auxiliar en la que se comparan la longitud del lado del cubo, el perímetro de una cara del cubo, el perímetro total (entendido como el desarrollo plano del cubo) y el área de una cara del cubo, con el fin de determinar variaciones (Δx y Δy). El tercero hace referencia a la comparación entre las gráficas que corresponden a la longitud del lado del cubo y el perímetro de una cara del cubo, la longitud del lado del cubo y el perímetro total del cubo y la longitud del lado del cubo y el área de una cara del cubo se pide que relacione cada gráfica con su expresión simbólica y que enuncie similitudes y diferencias entre estas.

En la primera situación se presenta la tabla que relaciona la longitud del lado del cubo y el número de aristas en una cara de este, el estudiante la completó usando la fórmula y = x*2, pues afirma suponer que las magnitudes deben ir aumentando, como se observa en la figura 11, las respuestas del estudiante están en color rojo:

Se presenta la tabla que relaciona dos magnitudes: longitud del lado del cubo vs número de aristas de una cara del cubo

x (Longitud del lado del cubo en cm)	y (número de aristas de una cara del cubo)
4	4
5	4
6	4
7	4
8	16
9	18
8	4
…	Tengo que calcular cada uno
100	200

Complete los valores de la tabla, justifique tus respuestas

-Los que están vacíos usé: y=x*2

1. ¿Por qué llenó la tabla con estos valores? Porque supongo que van aumentando, entonces multipliqué por dos siempre.
2. ¿Pero en los valores del ejemplo da lo mismo? Aaaaa, entonces siempre será 4, ¿no? Ah, entonces será el mismo… como una plana

Entonces, ¿Cómo quedaría la expresión o ecuación? Mmmmm sería siempre igual a 4, y = 4, porque siempre es 4.

Figura 11 Tabla entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Al cuestionarle acerca de las operaciones que usó para completarla, responde que la magnitud número de aristas de una cara del cubo debe aumentar, por lo que es posible afirmar que al completar la tabla no tiene en cuenta los valores de referencia que se le dan, y al señalarle que siempre se obtiene el mismo valor, hace la afirmación "*Sera igual, porque siempre es 4*", y construye la ecuación que relaciona las dos magnitudes: $y = 4$, determina que una de las magnitudes es constante (figura 12).

1. ¿Por qué tiene el doble de aristas? Porqueeeee… aaaahh no, siempre es 4, entonces el número de aristas siempre es 4, siempre es la misma.
2. ¿Entonces, depende de la longitud del lado del cubo? No, siempre es 4
3. ¿Para cualquier cubo? si, en todos daría 4

Figura 12 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

El estudiante reconoce que la magnitud que corresponde al número de aristas que tiene cualquier cubo en una cara es constante, siempre será cuatro, dando a entender que implícitamente identifica que no existirá dependencia entre los valores de las magnitudes consideradas. Dentro de la actividad se le pide que realice la gráfica correspondiente a las magnitudes, para identificar si realiza conversiones entre representaciones tabulares y gráficas, el estudiante realiza la gráfica con los valores que encontró para la tabla, sin embargo, como los valores que encontró inicialmente no son los adecuados, la gráfica también es incorrecta, como se observa en la figura 13.

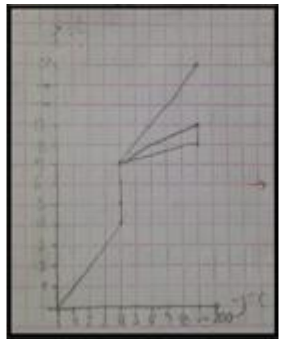


Figura 13 Gráfico relación longitud del lado del cubo vs. Número de aristas de una cara del cubo (Fuente: Elaboración del estudiante).

Cuando se le pregunta el por qué construyó esta gráfica, responde que ubicó los valores que encontró en la tabla que relaciona las magnitudes, sin embargo, después reconoce que no corresponde porque los valores son constantes, y propone incorrectamente una representación gráfica de una recta paralela al eje y, como lo menciona en la entrevista (figura 14).

1. ¿Por qué hizo esta gráfica? Pues ubiqué siempre 4, 4, 4, luego los otros valores, pero en realidad sería siempre 4, una raya, una recta vertical

Figura 14 Entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Se pide al estudiante que describa la gráfica que elaboró y responde que unió las cantidades numéricas formando parejas ordenadas, determinando que para cualquier cubo el número de aristas en una cara siempre será cuatro, implícitamente, que la magnitud número de aristas de una cara del cubo no depende de la longitud de sus lados, como se desprende de las respuestas a la entrevista

1. ¿Qué significa L=C? Pues, lado igual a arista, lado 4 igual a 4 aristas, lado 5 igual a 4 aristas y así.
2. ¿Por qué unió los puntos? Porque siempre deben formar una figura
3. ¿Eso quiere decir que para un lado que mida 2.5 cm también el número de aristas sería 4? Pues sí, para todos los cubos sería 4

Figura 15 Entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

En una segunda intervención, se solicita al estudiante encontrar el perímetro de una cara del cubo, para cada longitud del lado del cubo señalada en la tabla, a lo que responde usando la fórmula $y=y^2*2$, que según lo afirma fue vista durante las clases (ver figura 16).

x (Longitud del lado del cubo en cm)	y (perímetro de una cara del cubo en cm)
4	16
5	20
6	24
7	28
8	128
9	162
5	40
…	$y=y^2*2$
100	2000

Figura 16 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Esta ecuación no es la correcta, se le cuestiona por esta elección, el estudiante responde que no está seguro de su respuesta, luego reconoce, según reza en la figura 17, que el perímetro no se encuentra de esta manera, requiere usar otra fórmula, donde se suman los cuatro lados de la cara del cubo, y se da cuenta que al usar esta fórmula los valores si coinciden con los que se dan de referencia en la tabla.

1. ¿Qué operación matemática considera que se usa para que 4 se convierta en 16, y 5 en 20? Pues…yo pensaría que…. No, no sé.
2. ¿Entonces para la cara de un cubo, cómo se halla el perímetro? Se suman los lados
3. Entonces, ¿Para el primer cubo? Sería 4+4+4+4=16, ahahahahah, de ahí sale el 16, para 5 sería 5+5+5+5= 20 y así
4. ¿Y la fórmula? Suma de los lados: l + l + l + l =total

Figura 17 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Sin embargo, se pregunta acerca de la fórmula que debería usar siempre para encontrar el perímetro, el estudiante responde que sería la suma de todos los lados, cambiando su respuesta inicial, y reconociendo que las magnitudes varían, sin embargo, cuando se le cuestiona acerca de la dependencia entre estas, el estudiante responde que no existe ninguna relación entre ellas, puesto que siempre se suma para encontrar el perímetro, como lo menciona en la figura 18.

1. ¿Cree que el perímetro de una cara del cubo depende de la longitud del lado del cubo? ¿Por qué? No, porque solo se usa el lado, o sea para hallar el perímetro de una cara del cubo
2. ¿Por qué dice que no depende la longitud de la cara del cubo del perímetro? Pues porque no importa el lado siempre se suma
3. ¿Y si se suman los lados? Mmm, pues igual siempre se suma

Figura 18 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Dentro de la tabla que relaciona la longitud del lado del cubo y el perímetro de la cara del cubo se encuentran espacios que denominaremos variaciones, se pide al estudiante que complete estos espacios a partir de las diferencias (restas), representadas con la letra Δ (delta) entre las longitudes de los lados de los cubos (Δx) y los perímetros de una de las caras de los cubos (Δy), el estudiante no realiza las restas para Δx, y completa la tabla usando los números impares, para Δy, repite el número cuatro, afirmando que cada valor aumenta cuatro unidades como se observa en la figura 1, donde completa los valores (color rojo).

Figura 19 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

x (longitud del lado en cm)	**y (perímetro de una cara del cubo en cm)**	**Variación en longitud: Δx**	**Variación en perímetro: Δy**	**$\Delta x / \Delta y$ (Cociente)**
4	16	0	4	0/4
5	20	1	4	1/4
7	28	3	4	3/3
9	162	5	4	5/4
10	200	6	4	6/4
11	242	7	4	7/4
13	336	9	4	9/4
…	…	-	-	-
100	2000	1996	4	1996/4

Cuando se le cuestiona acerca de la forma en que completó la tabla, el estudiante responde que en la variación de longitud del lado del cubo, donde debía señalar que esta variación se da por unidades (de uno en uno), el estudiante usó los números impares, pues consideró que estos si presentaban cambio, para la columna de la variación del perímetro, siempre ubicó el número cuatro, afirmando que este número era el adecuado a partir de la situación anterior donde la constante que se obtuvo para cuantificar la relación entre la longitud del lado del cubo y el número de aristas de la cara del cubo era este, como se observa en la figura 20, el estudiante no tuvo en cuenta hacer las restas y cuando se le pregunta acerca de esta, no cambia su forma de razonar, afirmando que no existe ninguna dependencia entre estos valores.

3. ¿De qué manera completa la tabla que presenta las variaciones? Pues, el perímetro siempre aumenta en 4, en la longitud puse los números impares la idea era determinar variación, es decir, poner número que cambian, también habría podido poner los pares
4. ¿A qué llama usted variación? Al cambio, a la diferencia entre los números
5. ¿Si observamos la variación entre las longitudes, dice que es la diferencia, entre 4 y 5 cuánto hay de diferencia? Pues uno
6. ¿y entre 5 y 7? Pues dos
7. Entonces, ¿En vez de ubicar los pares o impares, podríamos poner estos valores en la columna de variación de la longitud? Mmm, pues sí, pero entonces no hay variación, porque siempre las restas dan uno o dos, y eso sería como lo del cuatro que siempre es cuatro y variación es cambio, entonces tiene que haber cambio
8. ¿Y por qué los impares? No sé, porque cambian.

Figura 20 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Con esto es posible afirmar que el estudiante reconoce relaciones de tipo aditivo, puesto que expresa el perímetro como la suma de los cuatro lados de una cara del cubo, además sabe que aumenta de cuatro en cuatro, sin embargo no encuentra una relación entre esta magnitud y la longitud del lado del cubo, a pesar que se le sugiere tener en cuenta que los lados que se suman son los considerados en la tabla, él afirma que siempre se suma, pero no determina una coordinación entre las magnitudes, para la longitud de los lados del cubo, determina la variación como afirma en la entrevista, sin embargo al ver que no cambia, considera que no cumple con la condición de la columna Δy (variación), por lo que prefiere ubicar otros números en los que se vea cambio, como lo son los números impares, afirma que también hubiera podido usar los pares, pues estos también evidencian cambio, con esto, podemos concluir que el estudiante reconoce que las magnitudes varían, por lo que alcanza el nivel cero, sin embargo, cuando se le cuestiona acerca de una relación (coordinación) entre ellas, no la verbaliza y afirma que no hay relación entre estas magnitudes, por tanto, no alcanza el nivel 1 (N1) de coordinación.

Para la tabla que compara longitud del lado del cubo con perímetro de una cara del cubo, con el perímetro total (desarrollo plano del cubo) y el área de una cara del cubo, el estudiante planteó las siguientes respuestas que se observan en la figura 21 (Datos en rojo)

Longitud del lado del cubo en cm	**Perímetro de una cara del cubo en cm**	**Perímetro total en cm Sugerencia: desarrollo plano del cubo**	**Área total en cm^2**
0,5	0,20	0,60	00,25
1	4	1	1
2,5	8,20	24,60	4,25
4	16	48	16
5	20	60	25
6	24	72	36
7	28	84	49
8	32	96	64
9	36	108	81
10	40	120	100

11	44	132	121
12	48	144	144
…	…	…	…
100	400	1200	1000

Figura 21 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Al cuestionarle acerca del método que usó para completar la tabla, responde que para el perímetro usó la regularidad que ofrece la tabla del cuatro, en la del perímetro total, usó la tabla del doce, mientras que para el área afirma haber hallado el área al cuadrado, con una fórmula aditiva, como se determina en la figura 22.

1. ¿De qué manera encontró los valores de la tabla? Pues, vi que en la primera columna está el lado, luego puse la tabla del cuatro porque es 16, 24, 28 y así, luego la tabla del 12, porque coinciden con los de la tabla, luego el área que es el lado al cuadrado, eso ya lo vimos en clase.
2. Si es la tabla del cuatro y del doce, es posible decir que para hallar el perímetro de una cara del cubo se multiplica el lado por cuatro y para hallar el perímetro total del cubo, ¿multiplico el lado por doce? Pues yo arriba dije que la del perímetro era l + l + l + l = total, entonces yo creo que ponen la tabla del cuatro y la del doce porque siempre y trabajamos con cuatro y doce porque está en la tabla del cuatro.
3. ¿Entonces no es cierta la afirmación anterior? No creo, la fórmula para perímetro es suma siempre, y para área es multiplicar.

Figura 22 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

De esta manera, determina que trabaja con la tabla del cuatro pues los valores "*coinciden*" con los de la tabla, y los del doce porque este número se encuentra en la tabla del cuatro, se insinúa que la relación se da por la suma de los lados y el perímetro de desarrollo total del cubo, a lo que responde que igual, considera su elección acertada, pues los números coinciden y se ajustan a lo pedido, determinando que para perímetro se suma y para área se resta.

A continuación, se le presentaron las gráficas correspondientes a las relaciones determinadas en la tabla, y se pidió que mencionara la ecuación correspondiente, apareando gráfica con ecuación, a lo que responde (ver figura 23).

4. ¿Cuál expresión (ecuación) corresponde a cada gráfica?
-y = 12x rojo
-x^2 verde
-y = 4x azul

Figura 23 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Cuando se le pregunta acerca de las relaciones que realiza para dar estas respuestas, el estudiante responde que observa los números que le dan, determinando que la más inclinada corresponde a *4x*, mientras que la más cercana al eje y, que él llama la que está más arriba es *12x,* indicando que los números son los que determinan sus inclinaciones como se indica en la figura 24.

1. Explique su respuesta. Pues las gráficas se van más hacia la derecha, entonces como diferencia es resta, es el número que están inclinadas, unas más que las otras, y la de 12 va más hacia arriba que las otras.
2. Entonces, ¿La que tiene el doce es la más grande? Si, definitivamente es la que tiene más diferencia hacia arriba que las otras, por el doce, es la mayor

Figura 24 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Al preguntarle al estudiante si reconoce cambio entre las magnitudes, él explicó como reza en la figura 25.

1. ¿De qué manera se combinan? Pues en la tabla, se combinan y cambian las dos al tiempo.
2. ¿Cambia una con respecto a la otra? No creo, una tiene unos valores y la otra otros, no hay nada igual, además del cuatro que sale en todo
3. ¿Y si el cuatro sale en todo podemos decir que el cuatro es un cambio uniforme, es decir, se da siempre? No porque si fuera un cambio, sería siempre diferente de cuatro, otros números, cinco, ocho, no sé.

Figura 25 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Respecto a las acciones mentales que el estudiante realiza, es posible afirmar que:

- El estudiante no identifica que las magnitudes están coordinadas en las situaciones que se plantearon en las sesiones consideradas (AM1), en algunas ocasiones, utiliza expresiones que dan a entender que implícitamente reconoce magnitudes variantes e invariantes como es el caso de las magnitudes constantes, puesto que, determina que siempre se obtienen los mismos valores, en la situación de área y perímetro de una cara del cubo, completa las tablas sin afirmar explícitamente o dar referencias de reconocer relaciones entre estas. Esto nos permite afirmar que el estudiante no alcanza el nivel 1 (N1) de coordinación.

- Para la sesión 2, el estudiante reconoce que los valores obtenidos son constantes, pues afirma que siempre se obtienen los mismos, en la sesión tres, las situaciones planteadas permiten determinar si es posible saber si las variables que se relacionan aumentan o disminuyen una con respecto a la otra, en este caso, el estudiante completa la tabla indicada y afirma que encuentra valores muy grandes, sin embargo, no es posible determinar que reconoce una relación de aumento entre las variables que se relacionan, (AM2) donde a mayor longitud del lado de la hoja, por ende, del cubo, mayor área y mayor perímetro en un cara del cubo se obtendrá. Esto nos permite afirmar que el estudiante no alcanza el nivel 2 (N2) de dirección.

- El estudiante no verbaliza en ninguna de las situaciones planteadas, una cantidad determinada para los aumentos entre las variables, en el caso de la sesión dos, donde se obtiene un valor constante, "no escribe de manera explícita el valor *c* constante entre las magnitudes" es decir, escribe el número de aristas en la tabla, pero no identifica este valor como constante dentro de una relación entre las magnitudes de esta situación, para la sesión 3, donde las magnitudes presentan una relación de aumento una con respecto a la otra, no lo considera en ningún momento, por lo que es posible afirmar que no determina una coordinación en la cantidad de cambio entre las variables (AM3), por lo que, el estudiante no alcanza el nivel 3 (N3) de coordinación cuantitativa.

- Al no determinar una cantidad determinada para los aumentos, en la sesión 3 por ejemplo, no verbaliza una razón de cambio del área o perímetro de una cara del cubo respecto a la longitud del lado de este, no considera incrementos uniformes de la longitud del lado de los cubos considerados. (AM4), por lo que, el estudiante no alcanza el nivel 4 (N4) de razón promedio.

A partir de esta descripción detallada y las distintas producciones del estudiante, es posible concluir que el estudiante alcanza el nivel 2 durante todo el desarrollo de las sesiones, donde a partir del reconocimiento de las variables de cada situación presentada, puede determinar lo que varía y lo invariante en estas, verbalizar una relación entre magnitudes y reconocer implícitamente si esta relación es de aumento.

Respecto a las conversiones entre representaciones, donde el objetivo general es que el estudiante pueda realizar conversiones entre cuatro representaciones semióticas (lenguaje verbal, tabular, gráfico y simbólico), para la acción mental 1 (AM1), en la que se requiere que el estudiante logre reconocer algunos descriptores propios de cada registro, en las producciones del estudiante para la sesión 2, lee el enunciado y lo interpreta, completando la tabla haciendo el conteo de aristas, vértices, diagonales y caras de cada cubo, y registrar estos valores según el cubo que se considera, al hacer este proceso, no es posible afirmar que el estudiante reconoce que existe una relación entre los valores registrados en la tabla, pues no hay una evidencia que permita determinar si utiliza un patrón o sigue una secuencia en la obtención de los valores (Descriptor registro verbal). Al completar la tabla, durante el proceso, se dio cuenta que los valores eran iguales, y consideró que no era necesario completarla, ya que siempre obtuvo lo mismo, encontrado implícitamente que las magnitudes no varían, lo que le permite realizar un gráfico, tomar una pareja ordenada de la tabla y representarla en el plano, por lo que es posible afirmar que realiza conversiones de registro tabular a gráfico. Aunque como no completa la tabla solo traslada un punto a la gráfica. La siguiente pregunta estaba orientada a solicitar que el estudiante realizara una conversión del registro gráfico al simbólico, pero no hay respuesta por lo que no se reconocen los descriptores determinados en este trabajo para este registro.

Para la sesión tres, para la acción mental 1 (AM1), lee el enunciado y lo interpreta, completando la tabla haciendo uso de fórmulas para determinar el área de cada cara del cubo, el perímetro de cada cara del cubo y el volumen de cada cubo, registrando estos valores según el cubo que se considera, al hacer este proceso, no es posible afirmar que el estudiante reconoce que existe una relación entre los valores registrados en la tabla (Descriptor registro verbal), durante el proceso encontró que los valores obtenidos eran muy grandes, entonces, completó parcialmente la tabla y consideró imposible realizar una representación gráfica para esta situación, se asume por las respuestas que se muestran en la figura 4 que no reconoce escalas para graficar, por lo que es posible afirmar que no realiza conversiones de registro tabular a gráfico, después el estudiante debía realizar una conversión del registro gráfico al simbólico, pero no hay respuesta para esta.

En la comparación, que corresponde a la sesión 4, al no tener registro gráfico, y considerar que los registros tabulares son completamente diferentes, no puede establecer paralelos entre estos, pues no contesta ninguna pregunta y realiza una afirmación general (Ver figura 9), de igual manera para la sesión 5, no hay una producción que permita ser analizada.

A partir de esta descripción detallada y las distintas producciones del estudiante, es posible concluir que el estudiante realiza conversiones entre la representación verbal a la tabular con éxito, puesto que es la única tarea que completa durante todo el desarrollo de las sesiones, aunque el hecho de que las completara parcialmente se le convierte en un obstáculo para hacer la conversión.

En conclusión, el estudiante alcanza el nivel dos (N2) de razonamiento covariacional, reconociendo una relación entre magnitudes variantes, además de realizar conversiones entre representaciones verbales y tabulares.

4.2.2 Análisis de resultados estudiante #2 – Desempeño Medio

A la primera pregunta formulada "*¿Qué permanece constante y qué varía entre las magnitudes consideradas en la tabla anterior?"*, cuyo objetivo era que el estudiante reconociera lo que cambia y lo que permanece invariante en la tabla que previamente fue diligenciada, responde como se observa en la figura 26, considerando que siempre se obtendrán los mismos valores.

E1: Aquí hemos respondido en su totalidad este cuadro respectivo a los cubos, dándonos cuenta que siempre a pesar que cambian las medidas de los lados del cubo el número de aristas, diagonales, caras y vértices siempre es el mismo E1: permanece constante el número de aristas, de vértices, de diagonales y de caras, a pesar de que cambian los tamaños de los cubos, y supongo que así será para todos los cubos

Figura 26 Diálogo del estudiante analizado con su compañero de grupo (Fuente: Elaboración de los estudiantes).

El estudiante al construir la tabla en su totalidad, determina los valores para el número de aristas, vértices, diagonales, manifestando que siempre serán los mismos, para los cubos considerados y en general para cualquier cubo, ante esto, es posible afirmar que identifica los valores obtenidos como cantidades numéricas constantes, además, cuando afirma que "*a pesar* *que cambian las medidas de los lados del cubo, el número de aristas, diagonales, caras y vértices siempre es el mismo*", cuando se pregunta en la entrevista de qué manera completó la tabla, el estudiante responde que siempre hicieron el conteo de las propiedades, y al darse cuenta que obtenía los mismos valores, replicaron en las filas llamando este proceso "hacer plana de valores" (ver figura 27).

P3. ¿De qué manera completó la tabla? RTA. Siempre contamos, con mis compañeros, nos pedían el número de caras, el número de aristas, y nosotros contamos para encontrar los valores que nos pedían, con el primer cubo, al ver que en el segundo cubo los valores eran los mismos, entonces hicimos plana de valores (Risas).

Figura 27 Entrevista al estudiante (Fuente: Elaboración del estudiante).

Determinando que el número de aristas de una cara del cubo siempre es igual, y a esto le llama "Constante", cuando se le cuestiona acerca de la dependencia entre los valores, menciona que el número de aristas de una cara del cubo no depende de la longitud de los lados de este, determinando que no hay dependencia entre estas magnitudes (ver figura 28).

P6. ¿Podemos afirmar que existen dos magnitudes que corresponden a x e y? RTA: claro, x es el lado del cubo, y es arista, o vértice o las otras, depende de la que tomemos, esto es más para ponerlos en el plano.

Figura 28 Entrevista al estudiante (Fuente: Elaboración del estudiante).

Cuando se le cuestiona acerca de la relación que existe entre las magnitudes consideradas, no refiere una expresión, sin embargo, menciona que la variable de entrada *(x)* corresponde a la longitud del lado del cubo, y la variable de salida *(y)* corresponde al número de aristas, vértices, diagonales o caras del cubo. A partir de la gráfica que construye, en la que representa dos magnitudes de la tabla, en este caso, escoge medida del lado de la hoja con la que se construye el cubo vs. número total de diagonales, ubicando en el plano las parejas, como se muestra en la figura 29, donde ubica 12 (diagonales del cubo) en el eje y, en el eje x escribe los valores del lado de la hoja, graficando una recta paralela al eje x, esto implica que reconoce que la magnitud determinada para el eje y tiene un valor constante y que no depende de los lados de la hoja con las que se construye el cubo.

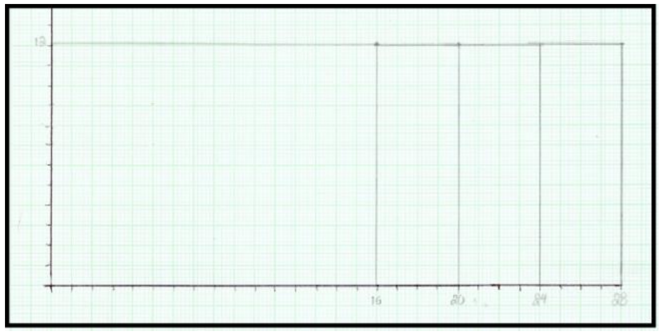


Figura 29 Gráfica para la sesión 2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Esta gráfica nos da indicios de que ha definido dos variables, medida de la hoja con la que se construye el cubo lado del cubo *(x)* y número total de diagonales *(y),* que identifica que la primera toma diferentes valores y la segunda es constante, construyendo los puntos *(x, y)*, ej. *(12, 16), (12, 20), (12, 24),* que posibilitan identificar una función constante *y=12,* es decir, afirmar que el número total de diagonales no depende de las medidas de las hojas con las que se construyen los cubos, aunque no verbaliza esta expresión.

Para la *sesión 3*, a partir de los cubos ya construidos, debe determinar el área y el perímetro de cada una de las caras y del total de cada cubo, consignando los datos en una tabla dispuesta para ello, después, se formulan una serie de preguntas referidas a que identifique lo que cambia, lo que permanece constante y las posibles relaciones entre las magnitudes involucradas.

En las preguntas del problema 2, en el que, a partir de las medidas perímetro, área de una cara del cubo y volumen del cubo además de los totales, se esperaba que identificara lo que cambia y lo que permanece invariante, reconoce que las magnitudes consideradas cambian, calculando cada valor con fórmulas, para el área multiplica lado por lado y para perímetro suma los cuatro lados de cada cara consignándolos en la tabla. Al preguntarle explícitamente acerca de la variación y dependencia entre magnitudes, responde que permanece constante el número de caras del cubo, aunque esta magnitud no se pida en la tabla, pero afirma que "*las medidas de los lados cambian y esto hace que cambien las áreas*" (ver figura 30) determinando que las magnitudes varían y que existe una relación de dependencia entre las variables donde el área depende de la longitud del lado del cubo, al igual que el perímetro.

RTA. E1: podemos decir que permanece constante solamente el número de caras, pues las medidas de los lados cambian y eso hace que cambien las áreas, a mayor medida, mayor área, es igual con el perímetro, pero entre ellos no hay ninguna relación numérica.

Figura 30 Entrevista sesión3 (Fuente: Elaboración del estudiante).

De los procesos que usa para llenar la tabla se puede inferir que reconoce como variables las distintas magnitudes involucradas, porque usa una fórmula para encontrar los valores correspondientes al área de una cara del cubo y al perímetro de una cara del cubo, a continuación, se presenta la tabla que completó, (ver figura 31) con medidas no exactas de los lados de cada cubo, aunque los recursos proporcionados estuvieran diseñados de tal manera que las medidas lo fueran.

Longitud de un lado de la hoja en (cm)	Longitud de un lado del cubo en (cm)	Perímetro		Área		Volumen en ( )s
		De un lado del cubo en (cm)	total en (cm)	de una cara en (cm^2)	de la superficie completa en (cm^2)	
16 cm	4,3	17,2	[illegible]	18,49	110,94	79,507.
20cm	5,1	20,4	122,4	26,01	156,06	[illegible]
24cm	6,2	24,8	148,8	38,44	230,64	238,328
28cm	7,3	29,2	175,2	53,29	319,74	389,017

Figura 31 Áreas y perímetros calculados por el estudiante para la sesión 3 (Fuente: Elaboración del estudiante).

A partir de lo que afirma sobre la construcción de esta tabla es posible determinar que reconoce que las variables covarían, pues a partir de sus producciones es posible determinar que considera que a medida que una cambia (Longitud del lado de la hoja, por consiguiente, del cubo) la otra también (área o perímetro de una cara del cubo, según sea el caso). (Figura 32)

P6. En la tabla de las propiedades del cubo, afirmó que varían los valores porque los lados también varían, ¿Hay alguna relación entre esas variaciones?
RTA. Pues no sé si hay relación, pero lo que si hay es una fórmula para encontrar los que me piden, en este caso área y perímetro, el área es la multiplicación de los lados, sólo dos, y el perímetro la suma de cuatro lados, en este caso, si habría una relación pues siempre se usa la misma fórmula para completar la tabla tanto para área como para perímetro, esa sería la relación, aunque nosotros dijimos que no había relación…, mmm, si, si debe haber, y se maneja con la fórmula.

Figura 32 Entrevista sesión3 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Con esto, es posible afirmar que de manera implícita reconoce que: tiene dos magnitudes que varían, una depende de la otra, una aumenta a medida que la otra lo hace, aunque no menciona que existe una cantidad constante que determina la variación entre las magnitudes, afirma que la fórmula es el medio para encontrar los valores, por lo tanto, es la que determina la relación entre las variables, aunque no lo verbaliza.

Para la gráfica de esta relación, relaciona la medida de las hojas con las que se hacen los cubos con las áreas de este, no maneja una escala adecuada, pues en el eje *x* va de 4 en 4, y en el eje *y* va de 100 en 100, ubica los puntos en el plano, para el perímetro no realiza gráfica, justificando que solamente escogió el área (ver figura 33).

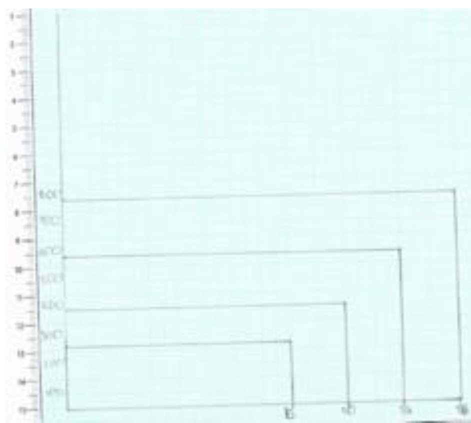


Figura 33 Gráfico 1. Sesión 3 (Fuente: Elaboración del estudiante).

En la sesión 4 el estudiante debía comparar los registros:

- Tabular: tabla de longitud del lado del cubo vs aristas, vértices, diagonales y caras (tabla construida en la sesión 2)- tabla de longitud del lado del cubo vs área y perímetro de una cara del cubo (tabla construida en la sesión tres), tiene ambos insumos.
- Gráfico: Gráfica de longitud del lado del cubo vs aristas, vértices, diagonales o caras (gráfico construido en la sesión 2)- gráfico de longitud del lado del cubo vs área o perímetro (gráfico construido en la sesión 3), tiene ambos insumos.

- Simbólico: expresión algebraica para relacionar longitud del lado del cubo vs aristas, vértices, diagonales o caras (expresión construida en la sesión2)- expresión algebraica para relacionar longitud del lado del cubo vs área o perímetro de una cara del cubo (expresión construida en la sesión3), no tiene insumos, pues en ninguna de las dos sesiones determinó una expresión general para las situaciones descritas.

A continuación, se transcriben las respuestas dadas (ver figura 34).

RTA. E1: Lo primero es decir que las gráficas no son similares pues una tiene una inclinación, mientras la otra es completamente plana, lo que las hace diferentes en su esencia, por eso decimos que la plana es constante y la otra es variable.

E2: Cuando se habla de pendientes, sabemos por lo que nos han explicado en clase que la pendiente es un número que determina la inclinación de la recta, entonces sabemos que la línea inclinada tiene una pendiente, la plana no debe tener pues es plana, por los que en una hay pendiente y en la otra no.

E1. Pues al cambiar la longitud del lado de la hoja varía todo, el perímetro, el área, lo que no varía es el número de aristas, vértices, diagonales y caras.
E2: eso depende qué tan grande quiero el cubo

Actividad- tipo de representación	Actividad 1	Actividad 2	Conclusión
Gráfica	Constante	Variable	En una son multiplos y en los otros no
Tabular	contar lo que se ve en el anterior	Medir las partes del cubo	Nos piden hallar las medidas y caras
Verbal	Sumar y contar	Medir y multiplicar	En uno da resultados enteros y en el otro no
Simbólica	Contar	Multiplicar	cambian los resultados

Figura 34 Diálogo del estudiante analizado con su compañero de grupo (Fuente: Elaboración del estudiante).

En las sesiones anteriores determina que las gráficas son diferentes, pues afirma que una de ellas es plana y la otra tiene inclinación, indicando que la plana es constante y la que tiene inclinación es variable, asocia inclinación con pendiente diciendo que al tener inclinación tiene pendiente y, que la constante no la tiene pues no tiene inclinación (ver figura 31). De tal manera que se puede asumir que define pendiente como la inclinación que tiene una recta, en la entrevista hace referencia a que la fórmula determina esta inclinación, (ver figura 32) pues es allí donde se encuentra la pendiente

P7. Al analizar las gráficas, ¿Es posible que sean similares sólo por ser rectas?
RTA. Pues no porque se necesita que tengan la misma forma para decir que se parecen, si, ambas son rectas, pero una tiene inclinación y la otra es horizontal, es plana, luego no tienen ni la misma fórmula ni la misma relación, entonces no es posible decir que se parecen, las que si se parecen aunque sus valores cambian, son las de área y perímetro, ambas son rectas, ambas tienen inclinación, pero no tienen los mismos valores, pues al hallar el área y el perímetro se dan valores diferentes porque las fórmulas para encontrarlas son distintas, por lo que se parecen pero jamás serán iguales.

Figura 35 Entrevista sesión 4 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Las respuestas del estudiante fueron complementadas con una entrevista # 2, con el fin de obtener más evidencias sobre su nivel de construcción del concepto de función lineal.

En la primera situación se presenta la tabla que relaciona la longitud del lado del cubo y el número de aristas en una cara de este, el estudiante la completó, como se observa en la figura 36 (las respuestas del estudiante están en color rojo).

Se presenta la tabla que relaciona dos magnitudes: longitud del lado del cubo vs número de aristas de una cara del cubo

x (Longitud del lado del cubo en cm)	y (número de aristas de una cara del cubo)
4	4
5	4
6	4
7	4
8	4
9	4
10	4
…	-
100	4

Complete los valores de la tabla, justifique tus respuestas
3. ¿Por qué llenó la tabla con estos valores? Como se presentan varias aristas de un cubo por una de sus caras, lo que varía son la longitud de cada una de ellas, aunque tenga el mismo número de aristas, varia la medida de cada uno
4. ¿Pero en los valores del ejemplo da lo mismo? No depende, porque siempre tendría el mismo número de aristas, lo que hace que varíe es la medida del cubo en su arista, cambiaría la longitud de la misma.

Figura 36 Tabla entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Al cuestionarle acerca de las estrategias que usó para completarla, responde que la magnitud número de aristas de una cara del cubo es constante, que lo variable es la longitud del lado del cubo, y que el número de aristas siempre será el mismo, por lo que no depende de la longitud del lado del cubo, en la entrevista dice que la expresión que relaciona las dos magnitudes es $y = 4$, y que el número constante es 4 y no depende de nada.

4. ¿cuál sería la fórmula para determinar el número de aristas de cualquier cubo? Sería y = 4, porque siempre es 4 el valor, nunca cambia siempre es la misma.
5. ¿Y este depende de la longitud del lado del cubo? No, siempre es 4 para cualquier cubo.

Figura 37 Tabla entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

El estudiante reconoce que la magnitud que corresponde al número de aristas que tiene cualquier cubo en una cara es constante, cuatro, dando a entender que implícitamente identifica que no existirá dependencia entre los valores de las magnitudes consideradas. En la actividad se le pide que realice la gráfica correspondiente a las magnitudes, para identificar si realiza conversiones entre representaciones tabulares y gráficas, el estudiante realiza la gráfica con los valores que encontró para la tabla, sin embargo, suponemos que se centra en determinar solamente el punto *(100, 4)* y en el resto no los toma en cuenta, por lo que su gráfica es una recta que une el punto *(0 ,0)* con el *(100, 4)* como se muestra en la figura 38, lo que hace que su conversión del registro tabular al gráfico no sea la correcta.

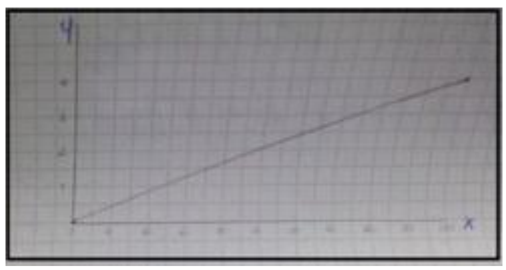


Figura 38 Gráfico relación longitud del lado del cubo vs. Número de aristas de una cara del cubo (Fuente: Elaboración del estudiante).

Se pide al estudiante que describa la gráfica que elaboró y responde: "*En la gráfica se representa la ubicación del punto 100 con respecto al número de aristas de una cara del cubo*", es decir que, aunque reconoce que para cualquier cubo el número de aristas en una cara siempre será cuatro, y que la magnitud número de aristas de una cara del cubo no depende de la longitud de sus lados.

En una segunda intervención, se solicita al estudiante encontrar el perímetro de una cara del cubo, para cada longitud del lado del cubo señalada en la tabla, a lo que responde usando la fórmula $y=4x$, enunciándola en la producción escrita (ver figura 39, datos del estudiante en rojo).

x (Longitud del lado del cubo en cm)	**y (perímetro de una cara del cubo en cm)**
4	16

5	20
6	24
7	28
8	30
9	36
10	40
…	…
100	400

Figura 39 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Al leer dentro de la tabla, hace referencia a que el correspondiente para 8 (longitud del lado del cubo), es 30 (perímetro), se le cuestiona por esta elección, y responde que se equivocó y tomó el par de dos en dos, pero que el valor correcto sería 32, pues va de cuatro en cuatro, según reza en la figura 40 y que el perímetro se encuentra sumando los cuatro lados o multiplicando la longitud del lado por cuatro.

5. ¿Qué operación matemática considera que se usa para que 4 se convierta en 16, y 5 en 20? Se multiplica 4 por 4, luego 4 por 5, porque la cara tiene cuatro lados y así se calcula el perímetro
6. Entonces, ¿La fórmula general sería? $y= 4x$, y esa x es el lado del cubo

Figura 40 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Cuando se le cuestiona acerca de la relación entre las magnitudes responde que efectivamente a mayor medida del lado del cubo, mayor perímetro tendrá la cara, reconociendo una relación de aumento entre estas. (Ver figura 41).

4. ¿Cree que el perímetro de una cara del cubo depende de la longitud del lado del cubo? ¿Por qué? Si, el perímetro aumenta a medida que la longitud del lado del cubo también, lo hace de manera uniforme
5. ¿A qué se refiere con uniforme? Que los cambios siempre son los mismos, siempre aumenta de cuatro en cuatro
6. ¿Podríamos afirmar que hay una razón constante? No sé qué es razón constante, pero si es cierto que hay un valor uniforme para toda la relación

Figura 41 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Por lo que es posible afirmar que determina que las magnitudes varían, que tiene una relación de aumento donde la cantidad para este aumento es 4, esto quiere decir que reconoce el 4 como una razón de cambio constante de manera implícita. Dentro de la tabla que relaciona las variaciones, se pide al estudiante que complete estos espacios, el estudiante realiza las restas para

Δx, y completa la tabla usando las diferencias encontradas, para Δy, realiza las restas, afirmando que cada valor aumenta cuatro unidades como se observa en la figura 42, donde completa los valores (color rojo), de igual manera, realiza los cocientes indicados.

x (longitud del lado en cm)	**y (perímetro de una cara del cubo en cm)**	**Variación en longitud: Δx**	**Variación en perímetro: Δy**	**$\Delta x / \Delta y$ (Cociente)**
4	16	1	4	1/4
5	20	1	4	1/4
7	28	1	4	¼
9	162	1	4	¼
10	200	1	4	¼
11	242	1	4	¼
13	336	1	4	1/4
…	…	-	-	-
100	2000	1	4	¼

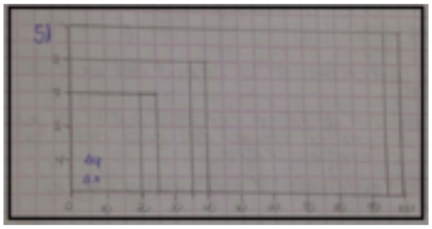
Figura 42 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Cuando se le cuestiona acerca de la forma en que completó la tabla, el estudiante responde que en la variación de longitud del lado del cubo, donde esta variación se da por unidades (de uno en uno), y se da cuenta que algunas no eran de uno en uno, pues había algunas en las que la variación se daba por dos unidades, afirma haber errado por descuido, para la columna de la variación del perímetro, siempre ubicó el número cuatro, pues consideró que la diferencia entre los valores del perímetro siempre es cuatro, como se observa en la figura 43, el estudiante hizo las restas afirmando que la longitud de los lados determina el valor del perímetro.

1. ¿De qué manera completa la tabla que presenta las variaciones? Pues, ahora que me doy cuenta, en la de las longitudes no puse el valor correcto, siempre puse uno, y a veces era dos, mmm fue descuido, bueno, el caso es que siempre hice las restas entre cada valor para determinar los deltas, y luego escribí la división, pero no la hice.
2. ¿A qué llama usted variación? Al cambio, a la diferencia entre los números, la resta entre filas
3. ¿Es decir que existe relación entre los valores? Si claro, las variables x e y cambian sus valores dependiendo la longitud de uno de sus lados, asimismo aumenta de manera que coincide tanto el perímetro como la longitud.

Figura 43 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Al graficar esta relación construye una representación que relaciona el aumento del perímetro con su respectiva longitud, ubicando los deltas en ella (ver figura 44)



Δx: 1

Δx: Delta de x puede ser distancia

Δy: Delta de y puede ser tiempo

Una conlleva a la otra para que se pueda hacer la operación

Figura 44 Gráfico entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

A continuación, se le presentan las gráficas que corresponden a las relaciones determinadas en la tabla, y se le pide que mencione la ecuación correspondiente de entre una lista, apareando gráfica con ecuación, a lo que responde como se observa en la figura 45.

4. ¿Cuál expresión (ecuación) corresponde a cada gráfica?
   - y = 12x rojo
   - x^2 azul
   - y = 4x verde

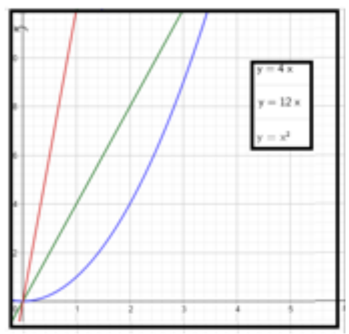


Figura 45 Gráfico entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Cuando se le pregunta acerca de las relaciones que realiza para dar estas respuestas, el estudiante responde que observa los números que le dan, determinando que la curva es la que corresponde a x^2, pues las rectas no están elevadas al cuadrado, además ya había determinado la ecuación para *4x* y sabe qué valores le deben corresponder en el gráfico, indicando que el 12 es menos inclinado que el 4, por eso, la que tiene como implicación 12 está más arriba que la que tiene 4, se le cuestiona acerca de estos valores refiriéndose a ellos como razones de cambio, a lo que responde que no tiene seguridad de afirmar que así sea, como se indica en la figura 46

3. Entonces ¿las rectas son se elevan al cuadrado?, no porque son rectas, además ya habíamos encontrado los valores para las rectas y sabíamos que iban como rectas en el plano.
4. ¿La inclinación de la recta depende del número? Si, a mayor número más "vertical" es
5. ¿Entonces, es posible determinar que 4 y 12 son razones de cambio constantes? Pues 4 es constante pero no sé qué es una razón de cambio, no estoy seguro

Figura 46 Gráfico entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Las gráficas tienen descriptores determinados en las acciones mentales para este trabajo, que buscan considerar los cambios que existen entre las magnitudes, además de la relación entre estas, haciendo evidente la razón de cambio entre las magnitudes, al preguntarle al estudiante si reconoce cambio entre las magnitudes, explica que si ve el cambio, y este es uniforme , donde verbaliza que existe entre ellas una coordinación en ese cambio, determinando la magnitud de variación entre los perímetros siempre es cuatro, y esto es uniforme, como se observa en la figura 47.

4. ¿De qué manera se combinan? Los deltas son variaciones que se complementan y determinan la gráfica
5. ¿Cambia una con respecto a la otra? Si, si una aumenta, la otra también lo hace uniformemente

Figura 47 Gráfico entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Respecto a las acciones mentales que el estudiante realiza, es posible afirmar que:

- Identifica que las magnitudes están coordinadas en las situaciones que se plantearon en las sesiones consideradas (AM1), utiliza expresiones que dan a entender que implícitamente reconoce magnitudes variantes e invariantes como es el caso de las magnitudes constantes, puesto que, determina que siempre se obtienen los mismos valores, en la situación de área y perímetro de una cara del cubo, completa las tablas y afirma explícitamente que una varía con respecto a la otra. Esto nos permite afirmar que el estudiante alcanza el nivel 1 (N1) de coordinación.

- Para la sesión 2, el estudiante reconoce que uno de los valores obtenidos es constante (número de aristas, vértices, diagonales y caras), pues afirma que siempre se obtienen los mismos valores, en la sesión tres, las situaciones planteadas permiten determinar si es posible saber si las variables que se relacionan aumentan o disminuyen una con respecto a la otra, en este caso, el estudiante completa la tabla indicada y afirma que las magnitudes área y perímetro de una cara del cubo dependen de la longitud del lado del cubo, además dice que a mayor longitud del lado del cubo, mayor área y mayor perímetro, reconoce una relación de aumento entre las variables que se relacionan, (AM2). Esto nos permite afirmar que el estudiante alcanza el nivel 2 (N2) de dirección.

- El estudiante no verbaliza en ninguna de las situaciones planteadas, una constante para cuantificar la relación entre los cambios, para la sesión 3, donde las magnitudes presentan una relación de aumento una con respecto a la otra, considera que esto depende de la fórmula, no determina explícitamente una coordinación en la cantidad de cambio entre las variables (AM3), por lo que, el estudiante alcanza el nivel 3 (N3) de coordinación cuantitativa parcialmente, lo reconoce de manera implícita pero no lo enuncia.

- Al no enunciar una constante para cuantificar la relación entre los cambios, en la sesión 3 por ejemplo, no verbaliza una razón de cambio de la relación entre la longitud del lado del cubo respecto a el perímetro de una cara del cubo, no considera incrementos constantes de la longitud del lado de los cubos considerados. (AM4), por lo que, el estudiante no alcanza el nivel 4 (N4).

De este análisis es posible concluir que el estudiante inició en un nivel 2 (N2), donde hacía reconocimiento de las variables, y determinaba una relación de aumento entre ellas, después de solucionar las actividades, logra reconocer que hay una cantidad numérica que determina las variaciones de las magnitudes de manera constante, verbalizando esta cantidad, lo que lo clasifica en un nivel 3(N3) de coordinación cuantitativa, para el nivel cuatro, era necesario que el estudiante verbalizara la relación de cambio entre las dos variables o la razón de cambio, cosa que no realiza, por desconocimiento de la definición, por lo que, es posible decir que plantea las expresiones simbólicas, e implícitamente reconoce estos cambios constantes, pues utiliza la palabra cambios uniformes, por lo que consideramos que alcanza parcialmente el nivel cuatro (N4).

Respecto a las acciones mentales, relacionadas con las conversiones entre representaciones reconoce algunos descriptores que le permiten realizar conversiones de representaciones tabulares a gráficas, como lo realiza en las dos situaciones planteadas para la entrevista #2, realiza conversión de representación verbal a simbólica, pues a partir de las reflexiones plantea la ecuación que determina la relación entre las magnitudes, lo que permite determinar que el estudiante realiza conversiones de representaciones tabulares a gráficas y de gráficas a simbólicas, sin embargo, en ambos casos se centra en un enunciado planteado, así las gráficas que construye solo incluyen un punto señalado, lo que reconoce durante la entrevista, logra hacer conversión de representación tabular a gráfica, determinando que la covariación se interpreta como la "*relación que existe en una relación lineal entre dos variables*", según palabras del estudiante.

En conclusión, el estudiante alcanza el nivel tres (N3) de razonamiento covariacional, reconociendo una cantidad constante en la relación de aumento entre magnitudes variantes, además de realizar conversiones entre representaciones verbales, tabulares y gráficas.

4.2.3 Análisis de resultados estudiante #3 – Desempeño Alto

A la primera pregunta formulada en la sesión 2"*¿Qué permanece constante y qué varía entre las magnitudes consideradas en la tabla anterior?"*, cuyo objetivo era que el estudiante reconociera lo que cambia y lo que permanece invariante, junto con sus compañeros de grupo responden (Ver figura 48):

E3: Permanece contante el número de vértices, número de aristas, número de caras y de diagonales, tanto en una cara como en total. E4: ¿y qué varía? Los centímetros E2: El tamaño de la hoja E3: Este cubo mide 6cm, el cubo tiene 6 caras, este cubo tiene 4cm y también tiene 6 caras, que no importa el tamaño del cubo el número de caras no varía E2: Entonces no importa el tamaño del lado del cubo, siempre tendrá el mismo número de caras

Figura 48 Diálogo del estudiante analizado con su compañero de grupo (Fuente: Elaboración de los estudiantes).

Cuando afirma que el número de aristas, vértices, diagonales y caras del cubo son constantes, explícitamente reconoce la invarianza (Ver figura 49).

P4. ¿Qué significa que son constantes? RTA. Que al hacer el conteo siempre se obtienen las mismas cantidades

Figura 49 Diálogo del estudiante analizado con su compañero de grupo (Fuente: Elaboración de los estudiantes).

Mientras que cuando señala que la longitud de la arista varía de cada cubo varía, reconoce explícitamente lo que cambia (Ver figura 50).

E4: ¿y qué varía? Los centímetros E2: El tamaño de la hoja

Figura 50 Diálogo del estudiante analizado con su compañero de grupo (Fuente: Elaboración de los estudiantes).

Estas expresiones evidencian comportamientos correspondientes a acciones mentales que sustentan el nivel 1 de razonamiento covariacional.

Cuando se le pregunta acerca de la relación que existe entre las magnitudes consideradas, menciona que la variable de entrada *(x)* corresponde a la longitud del lado del cubo, y la variable de salida *(y)* corresponde al número de aristas, vértices, diagonales o caras del cubo, afirma que ninguna de estas depende de la longitud del lado del cubo. A partir de la gráfica que construye (Fig. 46), en la que representa dos magnitudes de la tabla, ubica en el plano las parejas como puntos, sin llegar a unirlos, como se muestra en la figura 46, lo que impide que evidencie en la gráfica la relación entre las magnitudes como una constante.

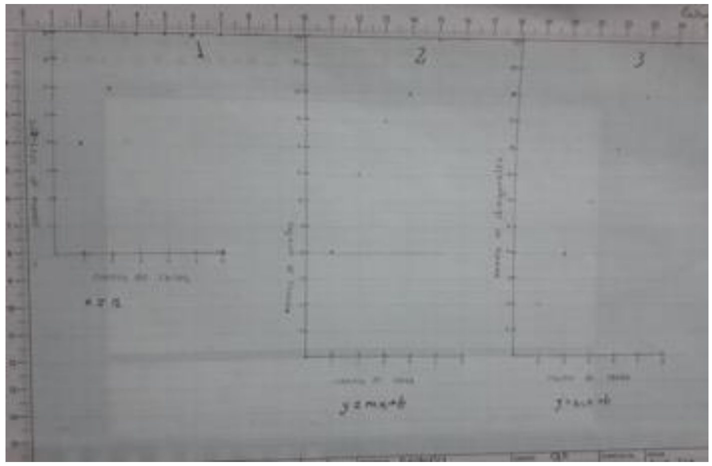


Figura 51 Gráfica para la sesión 2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Esta gráfica nos da indicios de que ha definido dos variables en cada gráfica, que identifica en ellas puntos, que ubica en los ejes *(x)* y *(y),* que construye los puntos *(x, y)*, ej. *(16, 6),* y determina unas ecuaciones en la parte baja de la hoja, que son generales, pues escribe en todas $y = m*x + b$, cuando se le pregunta acerca de esta expresión afirma que la pone más como algo general que porque sea la que corresponde, aclaración hecha en la entrevista cuando afirma que no es posible determinar una ecuación pues los valores varían de distinta manera. El estudiante a partir de las acciones mentales que realiza AM1 y AM2, determina que la relación entre las magnitudes es constante.

Para la *sesión 3*, a partir de los cubos ya construidos, debe determinar el área y el perímetro de cada una de las caras y del total de cada cubo, consignando los datos en una tabla (ver figura 52) dispuesta para ello, después, se formulan una serie de preguntas referidas a que identifique lo que cambia, lo que permanece constante y las posibles relaciones entre las magnitudes involucradas.

E1: Para encontrar una relación entre el lado de la hoja con el lado del cubo sería hacer una fórmula: y=4x, donde x es el número que se multiplica para encontrar el perímetro, y 4 es el lado del cubo de la hoja de 16cm, y para el lado de la hoja de 20 cm sería y= 4x, el de 24 cm sería y= 4x y el de 28 cm sería y=4x, siempre el mismo, para el área es x^2 E1: Entonces, para relacionar el área de una cara en cm cuadrados con la superficie total se hace y= 16 cm^2 (x), donde x es 6 sería el número de caras para encontrar el total de la superficie. Listo E1: La relación es la multiplicación que dijimos anteriormente E1: Para la segunda tabla usamos la fórmula que sabíamos, para área es multiplicar lado por lado y para perímetro el valor de un lado por cuatro, y así completamos la tabla.

Figura 52 Diálogo del estudiante con su compañero de grupo (Fuente: Elaboración del estudiante).

Al preguntarle explícitamente acerca de la variación y dependencia entre magnitudes, responde que la medida del lado del cubo condiciona el área y el perímetro, de manera que a mayor lado mayor perímetro y área (ver figura 53) determinando que las magnitudes varían y que existe una relación de aumento entre las variables donde el área depende de la longitud del lado del cubo, al igual que el perímetro.

¿Existe alguna relación entre la longitud del lado del cubo y el área o perímetro?
E1: podemos decir que a mayor medida de los lados cambian mayor área, mayor perímetro, y la relación numérica es la fórmula.

Figura 53 Entrevista sesión 3 (Fuente: Elaboración propia).

El uso que el estudiante hace de estas expresiones evidencia que establece la dirección del cambio, que corresponde a la acción mental AM2. Es decir que este estudiante puede ser clasificado en el nivel 2 de razonamiento covariacional.

De los procesos que usa para llenar la tabla se puede inferir que reconoce como variables las distintas magnitudes involucradas y en sus justificaciones incluye expresiones como que a mayor medida de los lados del cubo, mayor área y mayor perímetro (Ver figura 54), también determina los valores numéricos y los consigna en las tablas y concluye que entre ellos la relación está determinada por la fórmula. A continuación, se presenta la tabla que completó (ver figura 54).

Longitud de un lado de la hoja en (cm)	Longitud de un lado del cubo en (cm)	Perímetro		Área		Volumen en cm^3
		De una cara del cubo en (cm)	total en (cm)	De una cara en cm^2	de la superficie completa en	
16 cm	4cm	16cm	96cm	16 cm^2	96 cm^2	64 cm^3
20cm	5cm	20cm	120cm	25 cm^2	150 cm^2	125 cm^3

Figura 54 Parte de la tabla áreas y perímetros calculados por el estudiante para la sesión 3 (Fuente: Elaboración del estudiante).

A partir de lo que afirma sobre la construcción de esta tabla (la construye completa, sólo se anexa un aparte) es posible determinar que reconoce que las variables covarían, pues considera que a medida que una cambia (Longitud del lado de la hoja, por consiguiente, del cubo) la otra también (área o perímetro de una cara del cubo, según sea el caso), indicando además que, si una aumenta, la otra también. Numéricamente, afirma que, para determinar los totales del área y el perímetro del cubo, se multiplica el valor del área o perímetro de una cara por la cantidad de caras que tiene el cubo, en este caso, seis, lo que es incorrecto para el caso del perímetro. Respecto a la relación entre las variables, se pregunta al estudiante por qué afirma que la relación es la fórmula, a los que responde que esta tiene los valores que permiten encontrar las magnitudes, como el 4 para el caso del perímetro, pues afirma que este número es el "indicador", ya que con este se hallan todos los valores de la tabla y otros que no están en ella (ver figura 55).

P6. En la tabla de las propiedades del cubo, afirmó que varían los valores porque los lados también varían, ¿Hay alguna relación entre esas variaciones? RTA. Si claro, la fórmula es quien determina los valores, en la fórmula pongo el lado del cubo en número y me da el perímetro, entonces el elemento que relaciona el lado del cubo y el perímetro es la fórmula, igual que para el área, pero es otra fórmula, cada uno tiene su fórmula.

Figura 55 Entrevista sesión3 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Con esto, es posible afirmar que reconoce dos magnitudes que varían, una depende de la otra, una aumenta a medida que la otra lo hace, menciona que existe una cantidad constante que determina la variación entre las magnitudes, y afirma que la fórmula es el medio para encontrar los valores, por lo tanto, es la que determina la relación entre las variables (ver figura 49), determinando el número cuatro como la razón de cambio constante, comportamientos correspondientes a acciones mentales AM1, AM2, AM3 y AM4 para clasificarlo en el nivel 4 de razonamiento covariacional.

Para la gráfica de esta sesión, el estudiante realiza una representación (ver figura 56), en la que relaciona la medida de las hojas con las que se hacen los cubos con los perímetros del mismo, maneja una escala en el eje x que va de 1 en 1, y en el eje y que va de 4 en 4, ubica los puntos en el plano como *(4, 16)*, *(5, 20)* y traza una recta que una estos puntos y por último manifiesta que hay una relación entre los puntos que ubica en el plano, y la identifica como la función $y = 4x$.

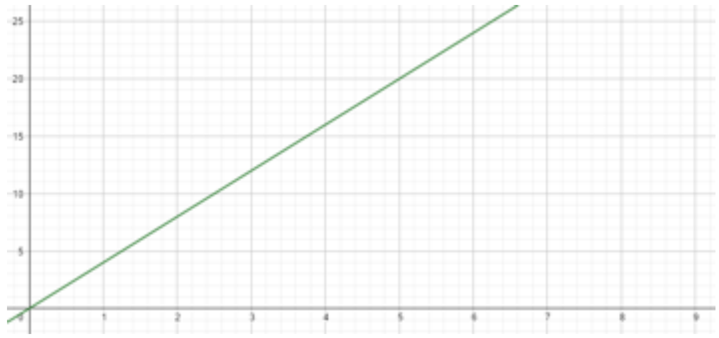


Figura 56 Gráfico 2 - Sesión 3 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Para la sesión 4, el estudiante debía comparar los registros: tabular, gráfico y simbólico, a partir de sus respuestas en las sesiones anteriores determina que las gráficas son diferentes, afirma que una de ellas es discontinua, es una sucesión de puntos y la otra es continua por lo que es una recta, indicando que la sucesión de puntos presenta algunos valores iguales y la que tiene múltiplos de cuatro es variable, asocia esto a las pendientes, indicando que la discontinua no tiene pendiente, la continua tiene pendiente, cuestión que se evidencia en la tabla de la figura 50. De sus respuestas podemos asumir que define pendiente como un valor *m* que determina la inclinación que tiene una recta, en la entrevista hace referencia a ese valor y lo reemplaza por el número 4, pues es este valor la razón de cambio constante entre las magnitudes que determina los incrementos *uniformes* entre estas.

Actividad- tipo de representación	**Actividad 1**	**Actividad 2**	**Conclusión**
Gráfica	Rectas discontinuas (puntos, parejas ordenadas)	Recta con puntos continuos	Cuando se trabajan números enteros da discontinuo
Tabular	Valores iguales (algunos)	Valores múltiplos de cuatro para el perímetro, cuadrados para el área	Los discontinuos son puntos, cuando hay continuidad, hay múltiplos
Verbal	Una varia, la otra es constante	Una varia respecto a la otra y ambas aumentan	Constante y variable
Simbólica	No hay ecuación	$y = 4x$ $y = x^2$	Para valores discontinuos es más difícil determinar una ecuación

Figura 57 Diálogo del estudiante analizado con su compañero de grupo (Fuente: Elaboración de los estudiantes).

P7. Cuando menciona a *m* ¿a qué hace referencia?
RTA. Esta lera representa a la pendiente en la ecuación, es el valor por el que se multiplica siempre el lado para determinar el perímetro.
P8. ¿Es posible decir que, al ser *m* constante, es una razón? Si claro, es 4 sobre 1, entonces es una fracción, que en algún momento nos dijeron que se llamaba razón, en otra clase claro, sería la razón constante, pues siempre es la misma.

Figura 58 Entrevista sesión 4 (Fuente: Elaboración del estudiante).

De esto es posible asumir que el estudiante identifica la pendiente como una razón de cambio, además de ser el elemento que da inclinación a la gráfica lo que complementa con en la tercera sesión al escribir de manera explícita la ecuación para la situación. Comportamiento correspondiente a las Acciones mentales 3, 4 nivel de razonamiento covariacional 3 y 4.

Las respuestas del estudiante fueron complementadas con una segunda entrevista, en la primera situación se presenta la tabla que relaciona la longitud del lado del cubo y el número de aristas en una cara de este, el estudiante la completó, como se observa en la figura 59, las respuestas del estudiante están en color rojo:

Se presenta la tabla que relaciona dos magnitudes: longitud del lado del cubo vs número de aristas de una cara del cubo

x (Longitud del lado del cubo en cm)	y (número de aristas de una cara del cubo)
4	4
5	4
6	4
7	4
8	4
9	4
10	4
…	-
100	4

Complete los valores de la tabla, justifique tus respuestas

3. ¿Por qué llenó la tabla con estos valores? Las aristas del cubo son constantes, siempre son cuatro para una cara quien varía es el lado.
4. Entonces ¿Para cualquier valor es cuatro? Si, a menos que cambie la figura y le ponga más o menos lados

Figura 59 52. Tabla entrevista #2 (Fuente: Elaboración propia).

Al cuestionarle acerca de las operaciones que usó para completarla, responde que la magnitud número de aristas de una cara del cubo es constante, que lo variable es la longitud del lado del cubo, y que el número de aristas siempre será el mismo, por lo que no depende de la longitud del lado del cubo, en la entrevista afirma que la expresión que relaciona las dos magnitudes es $y = 4$, dice que el número constante es 4, y que este valor no depende de nada, entonces es posible afirmar que el estudiante se ubica en el nivel cuatro pues realiza la acción mental de verbalizar que no existe dependencia entre las magnitudes, y que una de ellas es constante, además determina que el valor constante es 4, mencionando que el número de aristas de una cara del cubo no depende de la longitud del lado del cubo, además de encontrar una expresión para representar la relación entre las magnitudes (figura 60).

6. ¿cuál sería la fórmula para determinar el número de aristas de cualquier cubo? Es y = 4, 4 es constante para cualquier cubo
7. ¿Y este depende de la longitud del lado del cubo? No, si dependiera variaría con él y esto no sucede pues es constante

Figura 60 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración propia).

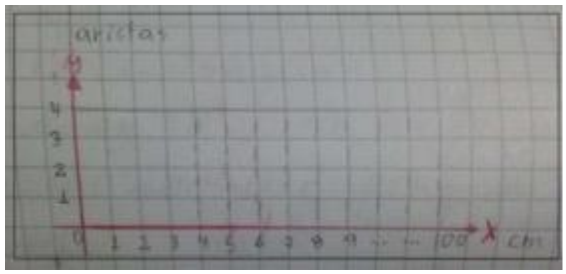


Figura 61 Gráfico relación longitud del lado del cubo vs. Número de aristas de una cara del cubo (Fuente: Elaboración del estudiante).

Cuando se le pregunta el por qué construyó esta gráfica (Figura 61), responde que ubicó las parejas ordenadas de la tabla, determinando una recta donde el valor siempre es 4, siendo la representación gráfica una recta paralela al eje *x*, como lo menciona en la entrevista (figura 62).

1. ¿Por qué hizo esta gráfica? Pues ubiqué los puntos que están en la tabla, como parejas ordenadas

Figura 62 Entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Se pide al estudiante que describa la gráfica que elaboró y responde: "*En la gráfica se representa la ubicación de las parejas ordenadas que se hallaron en la tabla, donde a cada medida del cubo se asigna el valor cuatro pues es el número de aristas que tiene una cara del cubo*", es decir, reconoce que para cualquier cubo el número de aristas en una cara siempre será cuatro, y que la magnitud número de aristas de una cara del cubo no depende de la longitud de sus lados, pues a partir de las afirmaciones que hace en la entrevista, es posible determinar que identifica que las magnitudes no varían.

En una segunda intervención, se solicita al estudiante encontrar el perímetro de una cara del cubo, para cada longitud del lado del cubo señalada en la tabla, para lo que escribe la fórmula *y=4x*. (ver figura 63, datos en rojo).

x (Longitud del lado del cubo en cm)	y (perímetro de una cara del cubo en cm)
4	16
5	20
6	24
7	28
8	32
9	36
10	40
…	…
100	400

Figura 63 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Dentro de la tabla, hace referencia a que usa siempre la fórmula para el perímetro y afirma que se multiplica siempre por cuatro, ya que esta es la cantidad de aristas que tiene un cubo en una cara, como se muestra en la figura 64.

7. ¿Qué operación matemática considera que se usa para que 4 se convierta en 16, y 5 en 20? Se multiplica 4 por cualquier lado, ya que es la cantidad de aristas que tiene una cara del cubo
8. Entonces, ¿La fórmula general sería? *y= 4x,* donde *x* representa el lado del cubo

Figura 64 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Cuando se cuestiona acerca de la variación de las magnitudes de manera coordinada donde una depende de la otra, responde que efectivamente a mayor medida del lado del cubo, mayor perímetro tendrá la cara, reconociendo una relación de aumento entre estas como lo menciona en la figura 65.

5. ¿Cree que el perímetro de una cara del cubo depende de la longitud del lado del cubo? ¿Por qué? Pues claro, si aumentamos el lado del cubo, mayor será el perímetro, siempre aumenta.
6. ¿Y siempre aumenta la misma cantidad? Si, es constante el cambio, es decir, siempre va de cuatro en cuatro, es uniforme
7. ¿Podríamos afirmar que hay una razón constante? Si, hay una razón una fracción que se aplica para todos los casos

Figura 65 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Por lo que es posible afirmar que determina que las magnitudes varían, que tiene una relación de aumento donde la cantidad para este aumento es 4, esto quiere decir que reconoce el 4 como una razón de cambio constante de manera explícita.

Dentro de la tabla que relaciona la longitud del lado del cubo y el perímetro de la cara del cubo se encuentran espacios que denominaremos variaciones, se pide al estudiante que complete estos espacios, quien realiza las restas para Δx, y completa la tabla usando las diferencias encontradas argumentando que aumentan de uno en uno o de dos en dos, según sea el caso, para Δy, realiza las restas, afirmando que cada valor aumenta cuatro unidades como se observa en la figura 66, donde completa los valores (color rojo), de igual manera, realiza los cocientes indicados.

x (longitud del lado en cm)	**y (perímetro de una cara del cubo en cm)**	**Variación en longitud: Δx**	**Variación en perímetro: Δy**	**$\Delta x / \Delta y$ (Cociente)**
4	16	0	0	0
5	20	1	4	¼
7	28	2	4	¼
9	162	2	4	¼
10	200	1	4	¼
11	242	1	4	¼
13	336	2	4	¼
…	…	-	-	-
100	2000	1	4	¼

Figura 66 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Cuando se le cuestiona acerca de la forma en que completó la tabla, el estudiante responde que en la variación de longitud del lado del cubo, donde esta variación se da por unidades (de uno en uno), hay “trampas”, pues hay algunas que aumentan de dos en dos, sin embargo considera que la variación es constante a pesar de esto, para la columna de la variación del perímetro, siempre ubicó el número cuatro, pues consideró que la diferencia entre los valores del perímetro siempre es cuatro, como se observa en la figura 67, el estudiante hizo las restas afirmando que la longitud de los lados determina el valor del perímetro.

4. ¿De qué manera completa la tabla que presenta las variaciones? Pues, aquí hay trampa, nos puso unas de uno en uno y otras de dos en dos, a ver si hacíamos plana jajajajaj, pero a mi no me engaña, igual, siempre la variación es de a uno, pues construimos cubos de todos los tamaños.
5. ¿A qué llama usted variación? A la diferencia que hay entre filas y columnas

6.	¿Es decir que existe relación entre los valores? Si claro, la columna de la longitud se convierte en el perímetro al multiplicar por cuatro, si la longitud es grande el perímetro también lo será.
7.	¿Y las restas son constantes? Si, va de uno en uno o de 4 en 4
8.	Respecto al cociente ¿qué puede afirmar? Que es una fracción, por lo tanto, una razón, que nos muestra que aumenta uno en x y 4 en y

Figura 67 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Con esto es posible afirmar que el estudiante reconoce relaciones de tipo multiplicativo, puesto que expresa el perímetro como la multiplicación de una variable por 4, en la cual la variable es la longitud del lado del cubo, además sabe que aumenta de cuatro en cuatro, de igual manera, sabe que la longitud del lado del cubo varía de uno en uno, encontrando una relación entre el perímetro y la longitud del lado del cubo, determinando una coordinación entre las magnitudes, con esto, podemos concluir que el estudiante reconoce que las magnitudes varían, tienen una relación de aumento (coordinación) entre ellas, la verbaliza y afirma que el valor constante de variación es cuatro, además propone una expresión para esta variación $y = 4x$, determinando la razón de cambio entre las magnitudes que se relacionan, indicando que el cociente determinado en la tabla es la razón promedio en el que se evidencias las variaciones, por tanto, alcanza el nivel 4 (N4) de razón promedio.

Al graficar esta relación construye una representación que relaciona el aumento del perímetro con su respectiva longitud, ubicando en los ejes valores que aparecen en la tabla, sin embargo, no usa una escala adecuada, lo que produce una gráfica que no representa la relación lineal entre los valores, (ver figura 68)

Figura 68 Gráfico entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Cuando se le cuestiona acerca de la elaboración de este gráfico, refiere que ubicó los valores sin tener una escala específica para cada eje, por lo que considera que quedó “chueca” y que debió prestar más atención a la ubicación de los valores en el plano (figura 62). De esto es posible afirmar que el estudiante grafica las longitudes del lado del cubo vs el perímetro, pero la escala no es la adecuada, por lo que, su gráfica no es una representación correcta de la situación (ver figura 69).

1. ¿por qué la gráfica tiene esta forma? Por tacaño, quise usar poco espacio y no tomé los valores adecuado, debió ser una recta y quedó toda chueca, a la próxima toca usar más hoja.
2. ¿Es importante el manejo de escalas? Claro, la profe nos explicaba que es como cuando uno va a la casa de los espejos, se ve desproporcionado porque los espejos ofrecen esta ilusión, es lo mismo con la gráfica, si no uso las escalas adecuadas, tendré una gráfica desproporcionada, anormal, como en este caso
3. ¿De qué manera se ubicarían los deltas en la gráfica? Pues las restas entre los números, sería señalar las distancias en cada eje

Figura 69 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Esto indica que identifica la gráfica como una recta y en ella puede reconocer las variaciones entre los valores señaladas en la tabla, solo que no las ubica porque al no usar una escala correcta, no se ve en ella los valores para ubicar las restas.

Para la tabla que compara longitud del lado del cubo con perímetro de una cara del cubo, con el perímetro total (desarrollo plano del cubo) y el área de una cara del cubo, el estudiante planteó las siguientes respuestas que se observan en la figura 70 (Datos en rojo).

Longitud del lado del cubo en cm	Perímetro de una cara del cubo en cm	Perímetro total en cm Sugerencia: desarrollo plano del cubo	Área total en cm^2
0,5	0,20	1,20	0,025
1	4	24	1
2,5	8,20	49.2	4,25
4	16	48	16
5	20	60	25
6	24	72	36
7	28	84	49
8	32	192	64
9	36	216	81
10	40	120	100
11	44	264	121
12	48	288	144
…	…	…	…
100	400	2400	1000

Figura 70 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Al cuestionarle acerca del método que usó para completar la tabla, responde que para el perímetro usó la fórmula que ya había encontrado, $y = 4x$, para el perímetro total, multiplicó el perímetro individual por seis, que corresponde a las caras del cubo, lo cual no es correcto, mientras que para el área afirma haber hallado el lado al cuadrado, como se determina en la figura 71.

4. ¿De qué manera encontró los valores de la tabla? Para perímetro usé la fórmula *4*x*, donde *x* es el lado del cubo, para el perímetro total, multipliqué los valores de la columna del perímetro por seis porque son seis caras, para área el lado al cuadrado
5. Esta ecuación que usó ¿Es la expresión simbólica para cada situación? Pues es la fórmula general para determinar el perímetro, el perímetro total y el área de cualquier cubo
6. ¿Y cuál es la razón de cambio de cada ecuación? En la de perímetro es 4, en la de perímetro total sería 6, porque teniendo el perímetro se multiplica por seis, y en la del área… no sé, no hay un valor específico, no creo que sea el mismo lado, de pronto no tiene
7. ¿Por qué? Porque es una ecuación diferente, ni siquiera da recta.

Figura 71 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

A continuación, se le presentan las gráficas que corresponden a las relaciones determinadas en la tabla, y se pide que mencione la ecuación correspondiente de entre una lista, apareando gráfica con ecuación, a lo que responde como se observa en la figura 72.

8. ¿Cuál expresión (ecuación) corresponde a cada gráfica?
   - y = 12x rojo
   - x^2 azul
   - y = 4x verde

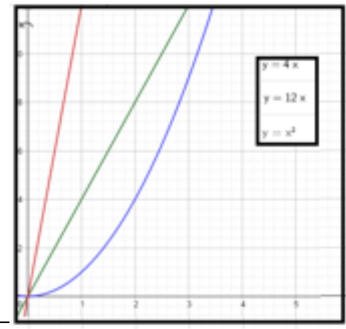


Figura 72 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Cuando se le pregunta acerca de las relaciones que realiza para dar estas respuestas, el estudiante responde que *4x* es la que debería haber hecho en la que le quedó "chueca", la curva es la que corresponde a y=x^2, porque afirma que los valores coinciden con los del área, para la del 12, afirma que es la que sobra, porque esa no está dentro del estudio ni las preguntas anteriores, se le cuestiona acerca de estos valores refiriéndose a ellos como razones de cambio, a lo que responde que el cuatro si lo es, para la curva no hay razón de cambio y el doce, supone que es, pues afirma que el número que acompaña a la *x* es la pendiente, o razón de cambio de una ecuación, como se indica en la figura 73.

6. ¿Por qué la curva no tiene razón de cambio' Porque es multiplicativa por si misma, no hay un número constante, para que sea razón de cambio, debe haber un número constante.
7. Esto quiere decir que la inclinación depende del número. Si, claro, a mayor número, menos inclinada
8. ¿Entonces, es posible determinar que 4 y 12 son razones de cambio constantes? El cuatro si, el 12 supongo porque acompaña a la *x* en la ecuación

Figura 73 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Las gráficas tienen descriptores determinados en las acciones mentales para este trabajo, que buscan considerar los cambios que existen entre las magnitudes, además de la relación entre estas, haciendo evidente la razón de cambio entre las magnitudes, al preguntarle al estudiante si reconoce cambio entre las magnitudes, explica que si ve el cambio, y este es uniforme, donde verbaliza que crecen simultáneamente, por ello, los deltas son iguales, como se observa en la figura 74.

6. ¿Cambia una variable con respecto a la otra? Si, por eso crecen en simultánea, y se ven restas o diferencias iguales

Figura 74 Preguntas entrevista #2 (Fuente: Elaboración del estudiante).

Del análisis presentado anteriormente Respecto a las acciones mentales que el estudiante realiza, es posible afirmar que:

- El estudiante identifica que las magnitudes están coordinadas en las situaciones que se plantearon en las sesiones consideradas (AM1), utiliza expresiones que se pueden asociar con un reconocimiento implícito de las magnitudes variantes e invariantes, como es el caso de las magnitudes constantes, puesto que, determina que siempre se obtienen los mismos valores, a pesar de usar un método distinto, en la situación del perímetro de una cara del cubo, completa las tablas y afirma explícitamente que una varía con respecto a la otra. Esto nos permite afirmar que el estudiante alcanza el nivel 1 (N1) de coordinación.

- Para la sesión 2, el estudiante reconoce que los valores obtenidos son constantes, pues afirma que siempre se obtienen los mismos valores, aunque determina una forma diferente de plasmarlos en la tabla, lo que hace que no sea evidente lo invariante, en la sesión tres, las situaciones planteadas permiten determinar si es posible saber si las variables que se relacionan aumentan o disminuyen una con respecto a la otra, en este caso, el estudiante completa la tabla indicada y afirma las magnitudes área y perímetro de una cara del cubo dependen de la longitud del lado del cubo, diciendo además que a mayor longitud del lado del cubo, mayor área y mayor perímetro, es decir, reconoce una relación de aumento entre las variables que se relacionan, (AM2). Esto nos permite afirmar que el estudiante alcanza el nivel 2 (N2) de dirección.

- El estudiante verbaliza en la situación del perímetro una cantidad determinada para los aumentos entre las variables, siendo este cuatro y lo propone como razón al ser una fracción, en el caso de la sesión dos, donde se obtiene un valor constante, "no explicita el valor *c* constante entre las magnitudes", pues debido al conteo acumulativo de las propiedades no determina valores constantes. Es posible afirmar que determina una coordinación en la cantidad de cambio entre las variables (AM3) y lo hace explícito, por lo que, el estudiante alcanza el nivel 3 (N3) de coordinación cuantitativa.

- Al enunciar una cantidad determinada para los aumentos, por ejemplo, en la sesión 3 identifica que hay incrementos uniformes de la longitud del lado de los cubos relacionados con incrementos uniformes en el perímetro (AM4), justificando la existencia de estas relaciones y estos cambios por la fórmula, por lo que, el estudiante alcanza el nivel 4 (N4).

De este análisis es posible concluir que el estudiante inició en un nivel 3 (N3), donde hacía reconocimiento de las variables, y determinaba una relación de aumento entre ellas, además de reconocer la cantidad que aumentaban, después logra reconocer que esa cantidad es la razón de cambio constante que describe la relación entre los incrementos de las magnitudes consideradas, logrando alcanzar el nivel cuatro (N4).

Respecto a las conversiones entre representaciones, donde el objetivo general es que el estudiante pueda realizar conversiones entre cuatro representaciones (lenguaje verbal, tabular, gráfico y simbólico), para la acción mental 1 (AM1), lee el enunciado y lo interpreta, completando la tabla a partir del uso de fórmulas para determinar el área de cada cara del cubo, el perímetro de cada cara del cubo y el volumen de cada cubo, por lo que es posible afirmar que el estudiante reconoce que existe una relación de aumento entre los valores registrados en la tabla, pues afirma que a mayor lado del cubo, mayor área y mayor perímetro (Descriptor registro verbal), durante el proceso completó la tabla y realizó una representación gráfica para esta situación, sin considerar las escalas adecuadas para las magnitudes que escogió, por lo que es posible afirmar que realiza conversiones de registro tabular a gráfico.

En la comparación de las representaciones, tarea que corresponde a la sesión 4, determina que la pendiente es la razón de cambio constante y es quien determina la inclinación de la gráfica, y afirma que esto indica que la relación entre las magnitudes es variable, exponiendo que la gráfica elaborada en la sesión dos no tiene pendiente, pues es una sucesión de puntos discontinuos, de otro lado, en la sesión cinco determina una fórmula para encontrar el área del cubo y establece una relación entre el cambio de las variables y el área.

A partir de esta descripción detallada y las distintas producciones del estudiante, es posible concluir que el estudiante alcanza a realizar conversiones entre los registros verbal, tabular, gráfico y simbólico en ese orden (sesión 5) con éxito, reconociendo además magnitudes discontinuas.

En conclusión, el estudiante alcanza el nivel cuatro (N4) de razonamiento covariacional, reconociendo una relación entre magnitudes variantes, además de realizar conversiones entre representaciones verbales, tabulares y simbólicas.

Conclusiones

En este trabajo de investigación se adoptó la perspectiva variacional, que algunos autores denominan dinámica, como una forma de acceso de los estudiantes al concepto de función lineal, la cual resultó ser valiosa en tanto los estudiantes participantes en este estudio, lograron desarrollar elementos del razonamiento covariacional vinculados con las diferentes conversiones entre registros de representación en la resolución de situaciones problemáticas de variación constante.

Al ser la función lineal un concepto, que por lo general se expone en el aula desde una perspectiva estática, como correspondencia entre variables, el abordaje como la modelación de situaciones problemáticas que tienen como característica común la razón constante, permite que los estudiantes desarrollen sus procesos de razonamiento covariacional y afinen el uso de diversas representaciones.

En cuanto al desarrollo del razonamiento covariacional encontramos que, en general, los estudiantes lograron el nivel 3, donde primero reconocieron magnitudes como variables referentes a cada situación planteada, después, identificaron una relación de aumento entre estas variables, por último, determinaron una cantidad constante de aumento entre ellas.

Por otro lado, dada la importancia que en este trabajo se le adjudicó al tránsito entre distintas representaciones como un requerimiento para la construcción del concepto de función lineal, se destaca en primer lugar la utilidad de que en los problemas la dirección de las conversiones propuestas partiera del registro verbal, y llegaran al registro simbólico, siendo los registros gráficos y tabular auxiliares o intermedios. Esto les sirvió a los estudiantes para construir el concepto de función lineal desde las distintas representaciones considerando descriptores propios de cada una.

En segundo lugar, el asociar acciones mentales a las posibilidades de utilización o no de conversiones, fue importante en tanto con ello se pudo encontrar que al presentar un orden entre estas conversiones se construye de manera más significativa el concepto de función lineal.

Los problemas que se diseñaron para la prueba diagnóstica tuvieron la característica de modelar fenómenos de variación en involucrar procesos de razonamiento covariacional así como considerar la conversión entre cuatro representaciones, lo que permitió a los estudiantes sustentar acciones mentales que corresponden, en general al nivel 3, esto es la verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.

De manera similar, los problemas que integraron la secuencia didáctica se caracterizaron por ser situaciones de modelación, lo que permitió que los estudiantes usaran la covariación para encontrar relaciones (coordinar) magnitudes y estudiar los comportamientos conjuntos entre las variaciones de una variable con respecto a la otra.

De otro lado, las entrevistas como un instrumento para ahondar en las comprensiones que los estudiantes tienen en el momento de resolver cada pregunta, fueron útiles para identificar en las argumentaciones de los estudiantes la construcción del concepto de función lineal a partir de las acciones mentales que realizaban.

Como dificultades de cada uno de los estudiantes estudiados, podemos destacar que el estudiante de nivel bajo no logra la acción mental de verbalizar la cantidad de cambio de valor entre los registros de entrada y salida mientras que el de nivel medio no logra verbalizar la acción mental de determinar una expresión que representara cada situación. Sin embargo, el estudiantes de nivel alto realiza cada una de las acciones mentales de los niveles adaptados para este trabajo, producto de su conocimiento de las formulas de la linea recta y sus capacidades para realizar conversiones entre las representaciones.

Como una recomendación para futuros trabajos y para nosotros mismos, proponemos ahondar más en el estudio, discriminacion y diferenciación de los distintos tipos de variación, por ejemplo cuadrática o polinomial, paa ampliar el universo de significación tanto de la razón de cambio como de sus procesos de razonamiento covariacional y los usos de distintos tipos de representación.

El concepto de función lineal fue construido por parte de los estudiantes a partir de las teorías que fundamentaron este trabajo, donde se resalta que el desarrollo del razonamiento covariacional es fundamental en la construcción del concepto de función lineal, pues permite ver la coordinación entre variables, asimismo, las distintas representaciones usadas permitieron que el estudiante viera descriptores como la pendiente, las relaciones fila-fila, fila-columna, entre otras, avanzando en la adquisición del concepto, logrando el objetivo principal.

Referencias

Ariza, R. (2010). Publicaciones didácticas. No 4 abril de 2010. Recuperado de: https://www.google.com.co/url?sa=t&source=web&rct=j&url=http://publicacionesdidacticas.com/hemeroteca/articulo/004121/articulo-pdf&ved=2ahUKEwi87oW5mYnbAhXCxVkKHTEyC0EQFjAEegQIAxAB&usg=AOvVaw2zcOFYeSjCtgPM3COMAScH

Azcarate, C., y Deulofeu J. (1996). Funciones y gráficas – matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid, España: Editorial síntesis S.A.

Barriga, A. (2013). Guía para la elaboración de una secuencia didáctica. Universidad Nacional Autónoma de México. P. 1. UNAM.

Camargo, D. (2000). La matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. *Revista Academia de la Universidad Autónoma de Sinaloa 2(20)*, 9-17.

Camargo, L. Guzmán A. (2005) Elementos para una didáctica del pensamiento variacional: Relaciones entre la pendiente y la razón. Bogotá, Colombia. Editorial Magisterio.

Cantoral R. (2013). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Secretaria de educación pública. Distrito Federal, México.

Cantoral, R., Molina, J. y Sánchez, M. (2005). Socioepistemología de la predicción. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (volumen 18, pp. 463–468). México: Clame.

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. En E. Dubinsky, A.H. Schoenfeld y J.J. Kaput (Eds.). research in collegiate mathematics education. 111. Issues in Mathematics Education, 7, 115-162.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. Revista EMA, Vol. 8, N°2, 121-156. Traducción realizada por Patricia Perry y Hernando Alfonso, del original Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002) Applying covariational reasoning while modeling dynamics events: a framework and a study. Journal for Research in Mathematics Education, 33, 5, 352-378.

Castro, W. y Godino, J. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997- 2010). En M. marin et al (Eds). Investigación en Educación Matemática XV (p. 99). Ciudad Real: SEIEM.

Díaz, A (1984). Didáctica y Curriculum. Articulaciones en los programas de estudios. México, Nuevomar. (Ed. en Paidós corregida y aumentada desde 1996).

Duval, R. (1999). Semiosis y Pensamiento Humano, traducido por Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Duval, R. (2006). Un tema Crucial en la Educación Matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La gaceta del RSME, 143-168.

Duval, R. (2016) Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En: Duval, Sáenz (2016) Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Espinel, L. (2017). Malla curricular colegio Néstor Forero Alcalá I.E.D. Documento elaborado en el colegio para trabajo interno.

Förster, C. y Rojas, C. (2008). Evaluación al interior del aula: una mirada desde la validez, confiabilidad y objetividad. Revista Pensamiento Educativo, Vol. 43, 2008. pp. 285-305.

Gómez, O. (2015). Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno (Tesis de maestría). Universidad Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Guzmán, R. (2006). Dificultades que presentan los estudiantes de tercer grado de educación secundaria al trabajar con los diferentes registros de representación de la función lineal (tesis de pregrado). Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). Metodología de la investigación. Distrito Federal, México: Mc Graw Hill. Sexta edición.

Jaimes, N. (2012). La noción de función, un acercamiento a su comprensión. Tesis de maestría Universidad Nacional de Colombia.

Lacasta, E. y Pascual, J (1998). Las funciones en los gráficos cartesianos. Madrid: Editorial Sìntesis SA.

López, J. y Sosa, L. (2008) Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. Comité latinoamericano de matemática educativa. Universidad Autónoma de Yucatán (308-318), México.

Ming, M. (2001) Learning to Graph Linear Functions: A Case Study of Conceptual Change, (Artículo), COGNITION AND INSTRUCTION, 19(2), 215–252, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339975_matematicas.pdf.

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

Ministerio de Educación Nacional (2009). Evaluación diagnóstica. Recuperado de: https://www.mineducacion.gov.co/1759/w3-article-246644.html.

Ministerio de Educación Nacional (2016). Derechos básicos de aprendizaje v2. Recuperado de: http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf.

Monk, S. y Nemirovsky, R. (1994). The case of Dan: Student construction of a funtional situation through visual attributes. CBMS Issues in Mathematics Education. 4,139-168.

Murillo, A. (2013). Caracterización de la comprensión del concepto de función en los estudiantes de grados noveno y once de los colegios públicos de la Virginia (tesis de maestría). Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia.

OCDE (2006). El programa pisa de la OCDE – qué es y para qué sirve. OCDE, Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. Paris, Francia.

Ospina, D. (2012). Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal (tesis de maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Colombia.

Pierce, R (2005). Linear functions and a triple influence of teaching on the development of students' algebraic expectation. University of Ballarat. (editorial - país).

Posada, F. y Villa, J. (2006) Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional (tesis de maestría). Universidad de Antioquia. Colombia.

Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J., Castillo, E. y Mora, L. (1999). La transición aritmética-álgebra. Bogotá, Colombia: Grupo editorial Gaia. Recuperado de: http://edumat.udistrital.edu.co:8080/documents/47902/262723/LibroTransicion+Aritmetica-Algebra_Grupo+MESCUD_U_Distrital_1999.pdf

Sampieri, R. (2006). Metodología de la investigación. Ed. Mc Graw Hill. México

Sánchez, D. (2016) Conceptualización de la función lineal y afín: Una experiencia de aula (tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Colombia.

Stake, R. (2007). Investigación con estudio de casos (4ta Ed.). Madrid: Morata.

Taba, H. (1974). Elaboración del currículum. Buenos Aires: Ed. Troquel.

Tau, R. y Gómez, M. (2016). La entrevista en la investigación del conocimiento infantil. En S. L. Borzi (comp.) El desarrollo infantil del conocimiento sobre la sociedad. Perspectivas, debates e investigaciones actuales (pp. 63-77). La Plata: Edulp. [ISBN 978- 950-34-1322-7].

TIMSS (2011). Trends in international mathematics and science study – Marcos de la evaluación. Ministerio de eduación, cultura y deportes. Madrid, España.

Thompson, P. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. educational studies in mathematics, 26, 229-274.

UNESCO (2016). Informe de resultados TERCE, tercer estudio regional comparativo explicativo- Logros de aprendizaje, laboratorio latinoamericano de evaluación de la calidad de la educación. Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. Paris, Francia.

Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Ruiz et al. (Eds.), Memorias del XVI Encuentro de Geometría y sus aplicaciones - IV Encuentro de Aritmética (Bogotá, junio 23-24-25 de 2005, vol. 1, pp. 101-112). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años) (tesis de doctorado). Universidad Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Villa, J. (2008), el concepto de función lineal: una mirada desde las matemáticas escolares, Acta latinoamericana de matemática educativa (Clame), Ed.: CMM, vol. 2.

Anexos

Anexo A. Resultados pruebas SABER 2017 para el grado noveno del Colegio Néstor Forero Alcalá IED

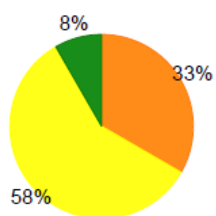
1. Descripción general de la competencia.

Competencia: Razonamiento		
Establecimiento	ETC	Colombia
32%	43%	48%

Interpretación

El **32%** de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas de esta competencia.

2. Descripción general de los aprendizajes.



Interpretación

De los aprendizajes evaluados en esta competencia, su establecimiento educativo tiene el **0%** de aprendizajes en rojo, el **33%** en naranja, el **58%** en amarillo y el **8%** en verde.

3. Aprendizajes.

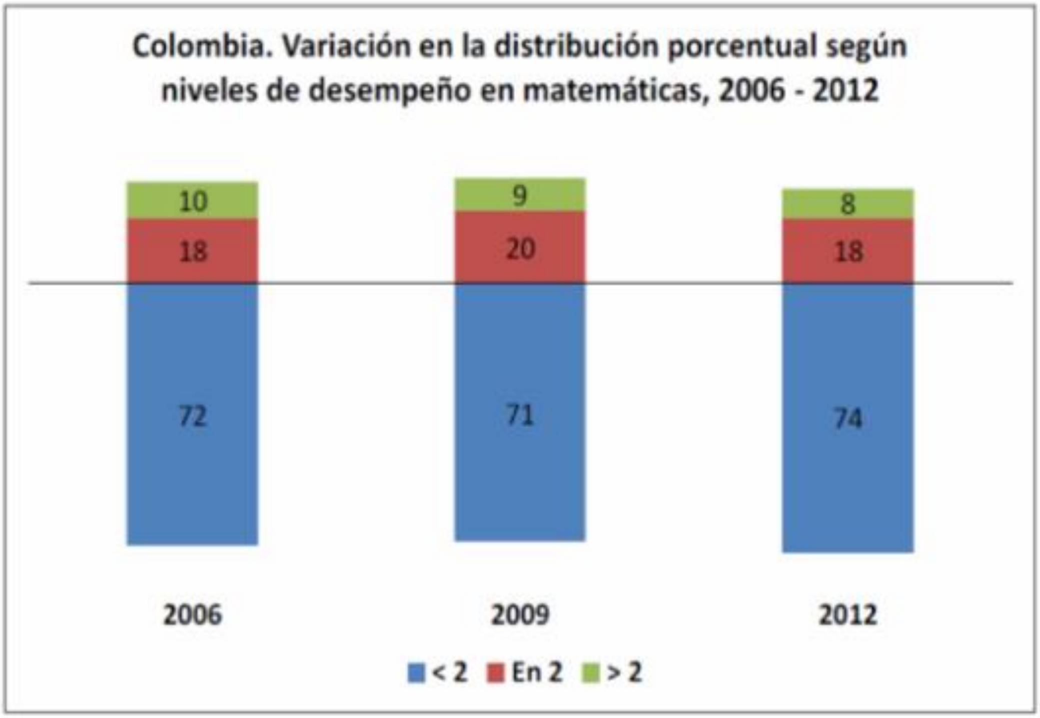
A continuación encontrará el listado de aprendizajes. Ponga especial énfasis en los que están en rojo y naranja para implementar acciones pedagógicas de mejoramiento y siga fortaleciendo los que están en amarillo y verde.

Interpretación

El **48%** de los estudiantes NO contestó correctamente las preguntas correspondientes al primer aprendizaje. Esta interpretación aplica de igual manera para los demás aprendizajes.

El	48%	no formula inferencias ni justifica razonamientos y conclusiones a partir del análisis de información estadística.
El	46%	no generaliza procedimientos de cálculo para encontrar el área de figuras planas y el volumen de algunos sólidos.
El	44%	no interpreta ni usa expresiones algebraicas equivalentes.
El	41%	no fundamenta conclusiones utilizando conceptos de medidas de tendencia central.
El	36%	no interpreta tendencias que se presentan en una situación de variación.
El	33%	no analiza la validez o invalidez de usar procedimientos para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
El	32%	no predice ni explica los efectos de aplicar transformaciones rígidas sobre figuras bidimensionales.
El	26%	no argumenta formal e informalmente sobre propiedades y relaciones de figuras planas y sólidos.
El	26%	no usa modelos para discutir acerca de la probabilidad de un evento aleatorio.
El	25%	no utiliza diferentes métodos ni estrategias para calcular la probabilidad de eventos simples.
El	22%	no identifica ni describe las relaciones (aditivas, multiplicativas, de recurrencia) que se pueden establecer en una secuencia numérica.
El	13%	no establece conjeturas ni verifica hipótesis acerca de los resultados de un experimento aleatorio usando conceptos básicos de probabilidad.

Anexo B. Resultados de Colombia en las pruebas PISA del año 2006, 2009 y 2012 en porcentaje.

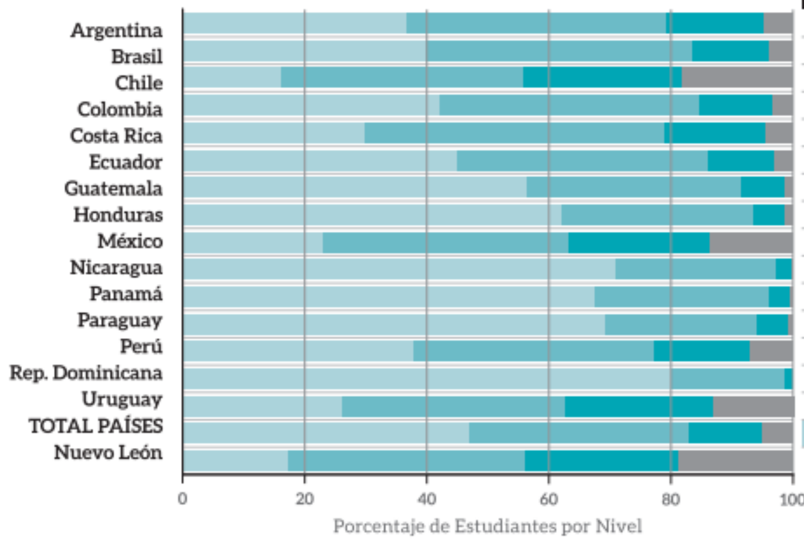


Anexo C. Puesto de Colombia en la prueba TIMSS en grado octavo del año 2007 en relación con otros países.

País	Puntaje promedio	Años de escolaridad formal*	Edad promedio al momento de la evaluación	Índice de Desarrollo Humano**
Taipéi	598 (4,5)	8	14,2	0,932
Corea	597 (2,7)	8	14,3	0,921
Singapur	593 (3,8)	8	14,4	0,922
†Hong Kong	572 (5,8)	8	14,4	0,937
Hungría	517 (3,5)	8	14,6	0,874
†Inglaterra	513 (4,8)	9	14,2	0,946
Rusia	512 (4,1)	7 u 8	14,6	0.802
2†Estados Unidos	508 (2,8)	8	14,3	0,951
Promedio TIMSS	500			
Armenia	499 (3,5)	8	14,9	0,775
Australia	496 (3,9)	8	13,9	0,962
Italia	480 (3,0)	8	13,9	0,941
Ucrania	462 (3,6)	8	14,2	0,788
Turquía	432 (4,8)	8	14,0	0,775
Irán	403 (4,1)	8	14,2	0,759
Argelia	387 (2,1)	8	14,5	0,733
Colombia	380 (3,6)	8	14,5	0,791
El Salvador	340 (2,8)	8	15,0	0,735

Anexo D. Desempeño por niveles de los estudiantes en matemáticas, de las pruebas TERCE en el año 2006.

FIGURA 20:
DISTRIBUCIÓN DE ESTUDIANTES DE SEXTO GRADO DE PRIMARIA POR NIVEL DE DESEMPEÑO EN MATEMÁTICA



	Nivel I	Nivel II	Nivel III	Nivel IV
Argentina	36,8	42,5	15,9	4,8
Brasil	39,8	43,5	12,6	4,0
Chile	16,2	39,5	25,9	18,4
Colombia	42,2	42,4	12,0	3,4
Costa Rica	29,9	48,9	16,7	4,5
Ecuador	44,8	41,1	11,0	3,1
Guatemala	56,4	35,0	7,1	1,6
Honduras	62,1	31,2	5,4	1,3
México	23,0	40,1	23,2	13,7
Nicaragua	71,0	26,1	2,5	0,4
Panamá	67,5	28,3	3,5	0,8
Paraguay	69,3	24,8	5,1	0,8
Perú	37,7	39,6	15,5	7,2
Rep. Dominicana	80,1	18,5	1,3	0,2
Uruguay	26,1	36,5	24,3	13,2
TOTAL PAÍSES	46,9	35,9	12,1	5,1
Nuevo León	17,2	38,8	25,0	19,0

Nivel I Nivel II Nivel III Nivel IV

Anexo E. Niveles de covariación. Tomado de Carlson et. al (2003)

Niveles del razonamiento covariacional El marco conceptual para la covariación describe cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación. Estas imágenes de covariación se presentan en términos de las acciones mentales sustentadas por cada imagen.
Nivel 1 (N1). Coordinación En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2). Dirección En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4). Razón promedio En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.

Nivel 5 (N5). Razón instantánea

En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o, al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5.

Anexo F. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación. Tomado de Carlson et. al (2003)

Acción mental	**Descripción de la acción mental**	**Comportamientos**
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e. g., y cambia con cambios en x).
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos).

Anexo G. Pruebas diagnósticas de los estudiantes analizados

Arias Juan   70

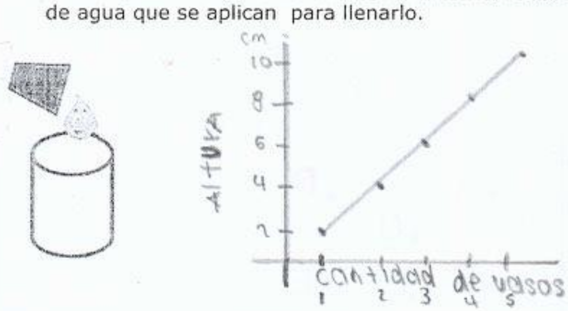
INSTRUMENTO – REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Curso: 9º **Edad:** 15

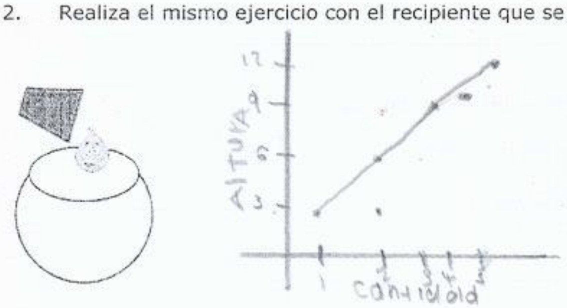
Problema #1: Botellas de agua

Evalúa la siguiente situación: Imagina el siguiente recipiente llenándose de agua:

1. Realiza un bosquejo de una gráfica (en el plano cartesiano) que relacione la altura que va adquiriendo al irse llenando el recipiente, con la cantidad de vasos de agua que se aplican para llenarlo.



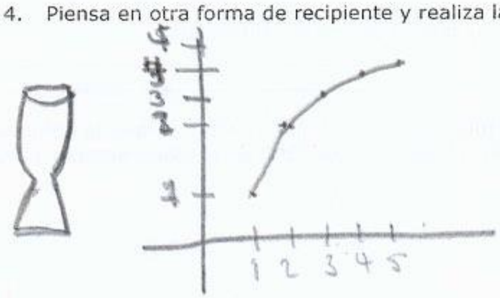
2. Realiza el mismo ejercicio con el recipiente que se presenta a continuación.



3. Compara las dos gráficas. ¿Qué diferencias o similitudes encuentras entre ambas?

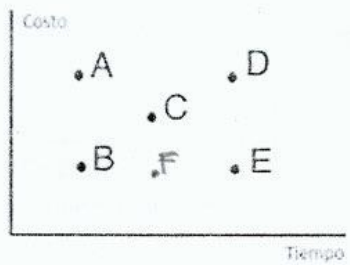
Que la primera se encuentra un resipiente mas pequeño y por lo tanto era menos cantidad y un poco mas de altura que elotro y el segundo era como mas ancho y y le cabe mas cantidad que el otro

4. Piensa en otra forma de recipiente y realiza la gráfica correspondiente.



Problema # 2: El costo de una llamada telefónica

En algunas tarifas telefónicas, el costo de una llamada depende de la duración de la comunicación y la distancia a la que se llama. La siguiente gráfica representa las llamadas de 5 personas.



Observa la gráfica y responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué variables que aparecen en la gráfica?

   apdiecen 5 vanables

2. ¿Quién ha llamado más lejos? ¿Por qué?

   la que a llamado mas lejos es la D y A por que se a demorado en la duracion de la comunicacion

3. ¿Y más cerca? ¿Por qué?

   la B y la E

4. ¿Qué llamadas se han realizado a una misma distancia y duración?

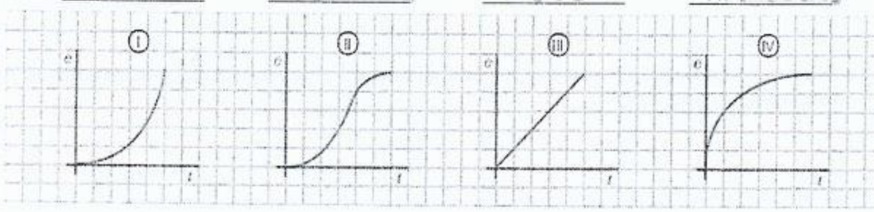
   el A y la D

5. ¿Dónde situarías una llamada efectuada al mismo lugar y distancia que la llamada A, pero del doble de duración de ésta? Coloca el punto F en el plano anterior para indicar tu respuesta.

Problema # 3: La carrera de atletismo

Las siguientes gráficas corresponden al ritmo que han seguido cuatro personas en un determinado tramo de una carrera. Asocia cada persona con su gráfica (escribe el nombre correspondiente encima de la gráfica)

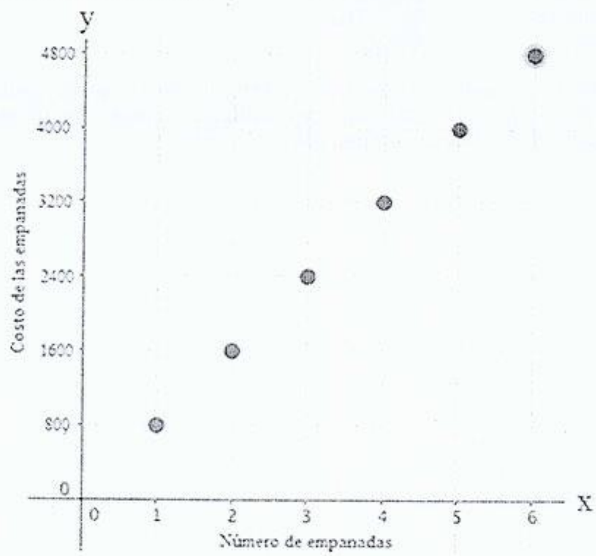
Carlos — carolina — jose — mercedes



- Mercedes: Comenzó con mucha velocidad y luego fue cada vez más despacio.
- Carlos: Empezó lentamente y fue aumentando gradualmente su velocidad.
- Carolina: Empezó lentamente, luego aumentó mucho su velocidad y después fue frenando poco a poco.
- José: Mantuvo un ritmo constante.

Problema #4: Las empanadas de doña Ceci

Doña Ceci decide poner un negocio de empanadas y para ilustrar los precios, presenta la siguiente gráfica a sus clientes:



1. Escribe con tus palabras la relación existente entre ambos ejes de la gráfica (x e y).
   ____
   ____

2. ¿Crees que se deben unir los puntos? ¿Por qué?
   ____
   ____

3. Realiza la tabla que relacione ambos ejes para que doña Ceci pueda cobrar más fácil en el negocio.

4. ¿Cuánto valen 10 empanadas? ¿Cuánto valen 100? ¿cuánto valen 1000? ¿Cuánto valen n?

   10 empanadas= $ 8.810
   100 empanadas= $ 88800
   1000 empanadas= $ 111.000
   n empanadas= $ 800

5. Haz la gráfica, la tabla y construye la fórmula matemática (utilizando n) para calcular el precio de las empanadas más $500 adicionales por un vaso de gaseosa, por si los clientes desean sus empanadas en combo.

Pulgarin Nicolás 70

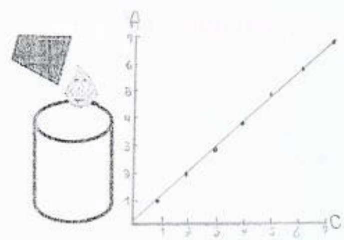
INSTRUMENTO – REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Curso: 901 **Edad:** 17

Problema #1: Botellas de agua

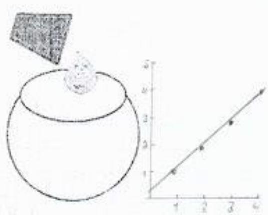
Evalúa la siguiente situación: Imagina el siguiente recipiente llenándose de agua:

1. Realiza un bosquejo de una gráfica (en el plano cartesiano) que relacione la altura que va adquiriendo al irse llenando el recipiente, con la cantidad de vasos de agua que se aplican para llenarlo.



Altura x Cantidad

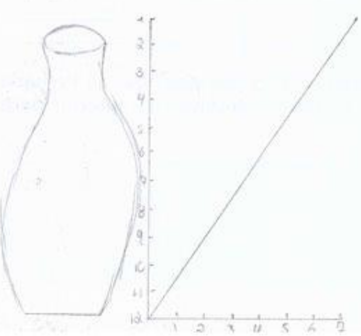
2. Realiza el mismo ejercicio con el recipiente que se presenta a continuación.



3. Compara las dos gráficas. ¿Qué diferencias o similitudes encuentras entre ambas?

- Ambas se desarrollan de igual forma
- Se diferencian por su contextura
- la primera necesita mas cantidad de agua para llenarse.
- la segunda figura necesita menos cantidad de Agua.

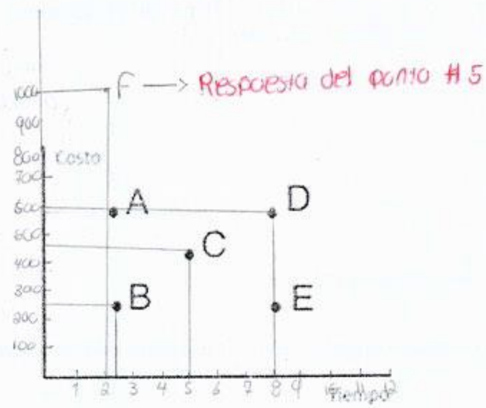
4. Piensa en otra forma de recipiente y realiza la gráfica correspondiente.



Pulgarin Nicolás

Problema # 2: El costo de una llamada telefónica

En algunas tarifas telefónicas, el costo de una llamada depende de la duración de la comunicación y la distancia a la que se llama. La siguiente gráfica representa las llamadas de 5 personas.



Observa la gráfica y responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué variables que aparecen en la gráfica?

   Tiempo y cobro de cada llamada
   Costo: variable
   Tiempo: variable

2. ¿Quién ha llamado más lejos? ¿Por qué?

   La D y la E aparecen en la parte mas alejada del plano cartesiano.

3. ¿Y más cerca? ¿Por qué?

   La A y la B aparecen en la parte mas cerca del plano cartesiano.

4. ¿Qué llamadas se han realizado a una misma distancia y duración?

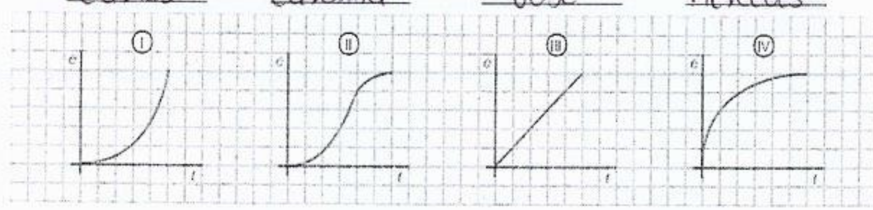
   Las llamadas no concuerdan.

5. ¿Dónde situarías una llamada efectuada al mismo lugar y distancia que la llamada A, pero del doble de duración de ésta? Coloca el punto F en el plano anterior para indicar tu respuesta.

Problema # 3: La carrera de atletismo

Las siguientes gráficas corresponden al ritmo que han seguido cuatro personas en un determinado tramo de una carrera. Asocia cada persona con su gráfica (escribe el nombre correspondiente encima de la gráfica)

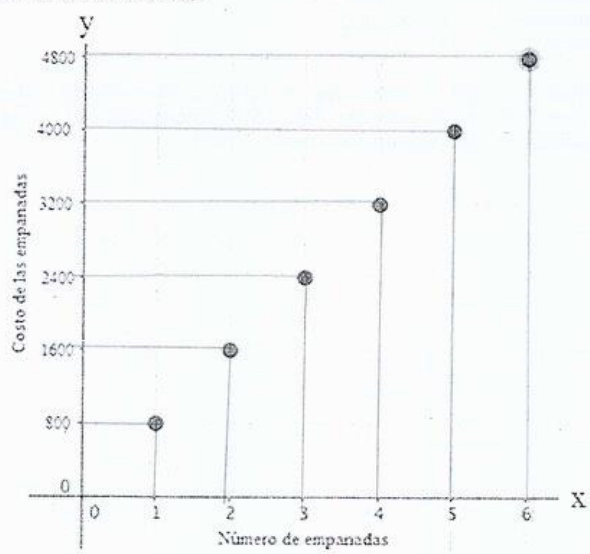
Carlos. Carolina Jose Mercedes



- Mercedes: Comenzó con mucha velocidad y luego fue cada vez más despacio.
- Carlos: Empezó lentamente y fue aumentando gradualmente su velocidad.
- Carolina: Empezó lentamente, luego aumentó mucho su velocidad y después fue frenando poco a poco.
- José: Mantuvo un ritmo constante.

Problema #4: Las empanadas de doña Ceci

Doña Ceci decide poner un negocio de empanadas y para ilustrar los precios, presenta la siguiente gráfica a sus clientes:



1. Escribe con tus palabras la relación existente entre ambos ejes de la gráfica (x e y).
   y= Es el costo de las empanadas de doña ceci
   x= Es el numero de empanadas que vende doña ceci.

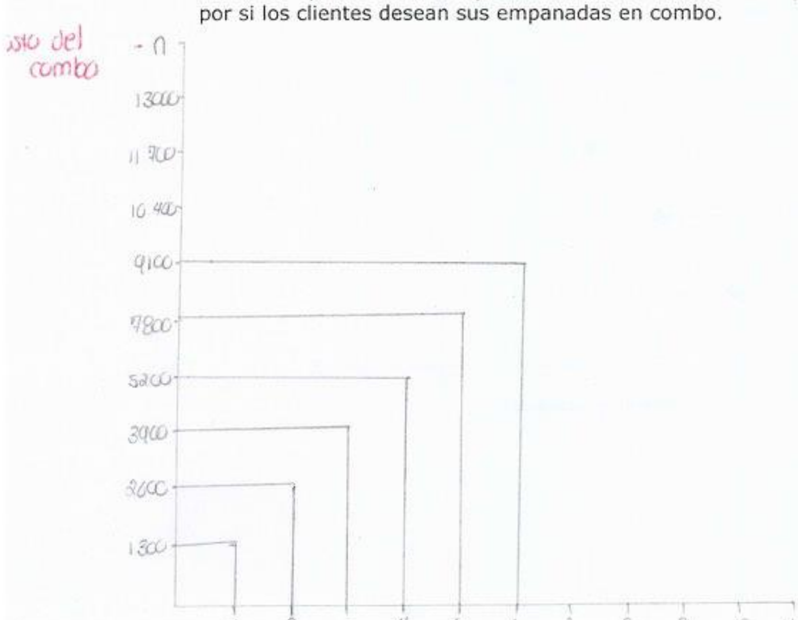
2. ¿Crees que se deben unir los puntos? ¿Por qué?
   para ver el alcance de cuantas empanadas vendio y su totalidad.

3. Realiza la tabla que relacione ambos ejes para que doña Ceci pueda cobrar más fácil en el negocio.

4. ¿Cuánto valen 10 empanadas? ¿Cuánto valen 100? ¿cuánto valen 1000? ¿Cuánto valen n?

   10 empanadas= $ 8000
   100 empanadas= $ 80.000
   1000 empanadas= $ 800.000
   n empanadas= $________

5. Haz la gráfica, la tabla y construye la fórmula matemática (utilizando n) para calcular el precio de las empanadas más $500 adicionales por un vaso de gaseosa, por si los clientes desean sus empanadas en combo.



Mora Santiago 70

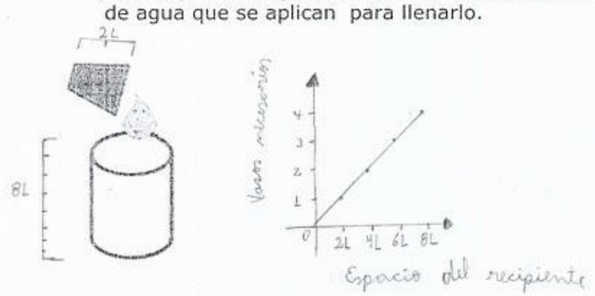
INSTRUMENTO – REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Curso: 9° **Edad:** 14

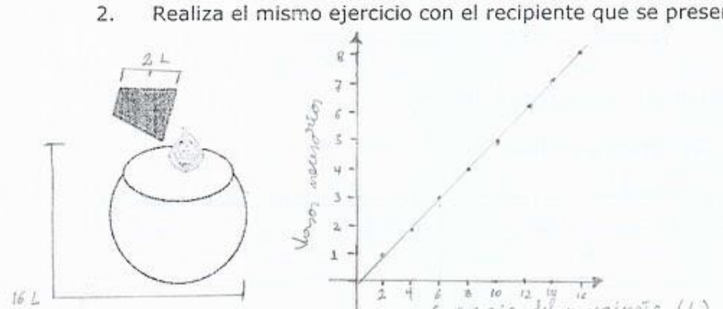
Problema #1: Botellas de agua

Evalúa la siguiente situación: Imagina el siguiente recipiente llenándose de agua:

1. Realiza un bosquejo de una gráfica (en el plano cartesiano) que relacione la altura que va adquiriendo al irse llenando el recipiente, con la cantidad de vasos de agua que se aplican para llenarlo.



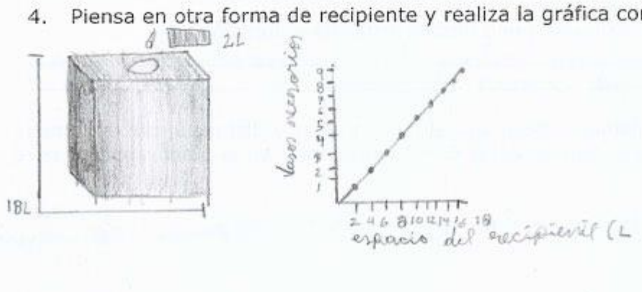
2. Realiza el mismo ejercicio con el recipiente que se presenta a continuación.



3. Compara las dos gráficas. ¿Qué diferencias o similitudes encuentras entre ambas?

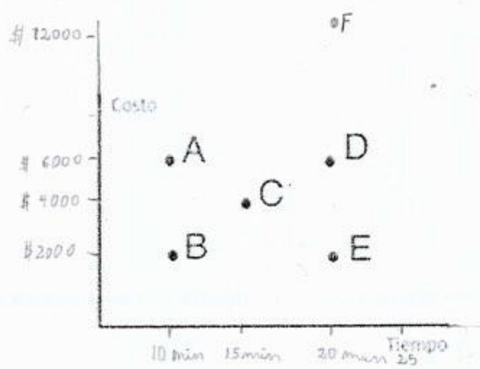
La diferencia que encuentro es que el segundo recipiente tiene más espacio porque su diámetro es como el doble del otro. Y la única similitud es que en ambos se usa el mismo vaso para llenarlos

4. Piensa en otra forma de recipiente y realiza la gráfica correspondiente.



Problema # 2: El costo de una llamada telefónica

En algunas tarifas telefónicas, el costo de una llamada depende de la duración de la comunicación y la distancia a la que se llama. La siguiente gráfica representa las llamadas de 5 personas.



Observa la gráfica y responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué variables que aparecen en la gráfica?

   Aparece las variables de costo y tiempo que sube y de repente baja cada 2 variables

2. ¿Quién ha llamado más lejos? ¿Por qué?

   El "A" porque su costo es el mayor en el menor tiempo

3. ¿Y más cerca? ¿Por qué?

   El "E" porque su costo es el menor en el mayor tiempo

4. ¿Qué llamadas se han realizado a una misma distancia y duración?

   ninguna porque en todas la variable cambia tanto el tiempo como el costo

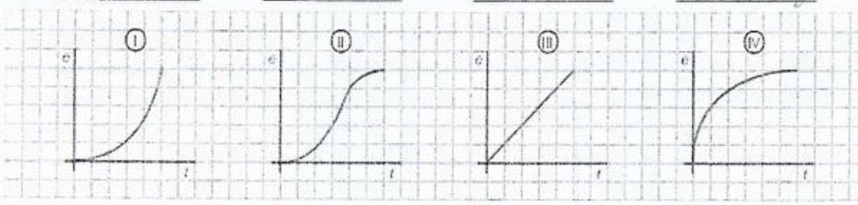
5. ¿Dónde situarías una llamada efectuada al mismo lugar y distancia que la llamada A, pero del doble de duración de ésta? Coloca el punto F en el plano anterior para indicar tu respuesta.

Porque si cada 10 minutos son $6000 entonces 20 minutos son $12,000

Problema # 3: La carrera de atletismo

Las siguientes gráficas corresponden al ritmo que han seguido cuatro personas en un determinado tramo de una carrera. Asocia cada persona con su gráfica (escribe el nombre correspondiente encima de la gráfica)

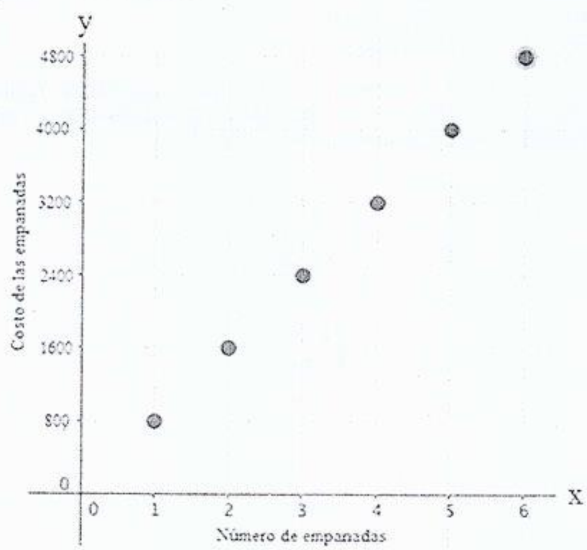
Carlos Carolina Jose Mercedes



- Mercedes: Comenzó con mucha velocidad y luego fue cada vez más despacio.
- Carlos: Empezó lentamente y fue aumentando gradualmente su velocidad.
- Carolina: Empezó lentamente, luego aumentó mucho su velocidad y después fue frenando poco a poco.
- José: Mantuvo un ritmo constante.

Problema #4: Las empanadas de doña Ceci

Doña Ceci decide poner un negocio de empanadas y para ilustrar los precios, presenta la siguiente gráfica a sus clientes:



1. Escribe con tus palabras la relación existente entre ambos ejes de la gráfica (x e y).
Que cada empanada cuesta $800

2. ¿Crees que se deben unir los puntos? ¿Por qué?
No, porque para poder unirlos se debe también poder escribir el producto en numeros decimales

3. Realiza la tabla que relacione ambos ejes para que doña Ceci pueda cobrar más fácil en el negocio.

1	800
2	1600
3	2400
4	3200
5	4000
6	4800
7	5600
8	6400

4. ¿Cuánto valen 10 empanadas? ¿Cuánto valen 100? ¿cuánto valen 1000? ¿Cuánto valen n?

10 empanadas= $ 8000
100 empanadas= $ 80000
1000 empanadas= $ 800000
n empanadas= $ 800n

5. Haz la gráfica, la tabla y construye la fórmula matemática (utilizando n) para calcular el precio de las empanadas más $500 adicionales por un vaso de gaseosa, por si los clientes desean sus empanadas en combo.

1	Combo	1300
2	"	2600
3	"	3900
4	"	5200
5	"	6500
6	"	7800
7	"	9100

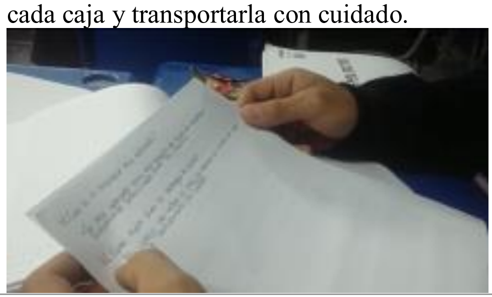
Anexo H. Transcripciones de la secuencia didáctica - Estudiante bajo

PREGUNTA	RESPUESTA
P: Doña Ceci tiene un fruver y en él distribuye ciruelas negras, debe transportarlas en camiones en cajas individuales, teniendo en cuenta que la fruta no se puede magullar. **Con base a lo anterior contesta las siguientes preguntas:** **Primera pregunta: ¿Cuál es el empaque más adecuado?**	E1: Pensaría que debe transportarse en cajas, pero individuales con periódico. E2: ¿Y para qué el periódico? E1: Pues para que se mantengan y no se apichen
Elaboración de los cubos y completar tabla de relaciones de los cubos	E1: Pues siempre es lo mismo, entonces, ¿Para qué llenar toda la tabla? E2: Pero si siempre es lo mismo no tiene sentido, entonces sería para todos un punto ¿no? E1: Pues ponemos un punto y todos en la misma ¿no? Es decir, toca poner solo un punto en el plano que represente todas las medidas E2: en ese caso no varía nada pero sólo queda un punto entonces no se genera gráfica, solamente sería un punto y ya.

PREGUNTA	RESPUESTA
P: Ingeniero a partir de las instrucciones dadas, elabora el cubo en origami con cada uno de los papeles, tomando medidas antes de comenzar y al terminar la construcción de este. Con los datos obtenidos completa la tabla anexa que hace referencia a las relaciones del cubo.	E1: y cómo hallamos el área? E2: toca multiplicar los cuatro lados E2: pero en el perímetro toca sumarlos E1: uy pero da un número muy grande no? E2: sí, eso no se puede graficar, da una cantidad grandísima, entonces es mejor llenar las, tablas y decir que no hay una gráfica posible para este punto E1: en este caso, el área del primero sería 256, porque 4x4x4x4 cierto? E2: si claro, toca usar calculadora porque para multiplicar todos esos valores no alcanzamos y de pronto nos queda mal. Y para el perímetro? E2: ese si es sólo la suma 4+4+4+4= 16, pero no podemos relacionar área y perímetro por lo grande de los valores. E1: Entonces no graficamos? E2: No, mejor no E1: Y entonces para el volumen? E2: Ese toca cada lado por tres no? Porque como es a la tres E1: Aaaa si claro, entonces sería 4x3 12 centímetros cúbicos, ese de pronto si se puede relacionar con el perímetro, pero no tendría sentido porque uno es suma y la otra es multiplicación E2: entonces sin gráfica definitivamente, con eso no nos queda descuadrado, es que si las graficamos eso no da una línea E1: no creo, solamente completemos la tabla y listo

PREGUNTA	RESPUESTA
P: Comparar las gráficas.	E1: no hay gráfica de la segunda actividad pues son muy grandes los valores y no es posible elaborarlo, entonces mejor no hagamos gráfica. E2: entonces qué comparamos? E1: en el primero solo hay un punto, en el segundo no hay nada, entonces podemos decir que no se garantiza ni constante ni variable y que la actividad no da para eso. E2: tendríamos que tener valores más reales. E1: pues si, y en el cuadro que está allí no escribimos nada porque no hay ninguna comparación y no podemos hacer representación general, la única que quedaría es la de las tablas, y esa tiene números muy desiguales, pues unos son muy grandes y los otros son muy pequeños, entonces no se puede comparar, lo único que se podría decir es que hay mucha diferencia entre las cantidades.

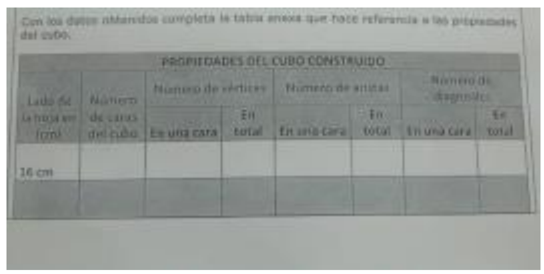
Anexo I. Transcripciones de la secuencia didáctica - Estudiante medio

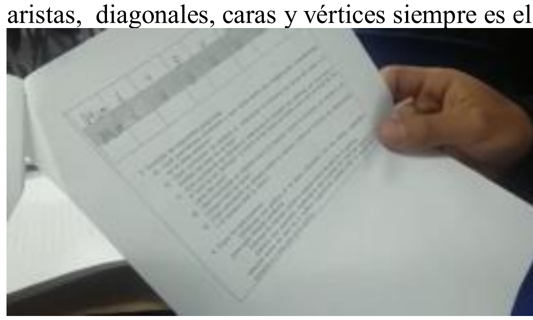
PREGUNTA	RESPUESTA
P: ¿Cuál es el empaque más adecuado? P: ¿Si lo debo poner en cajas para trasportarlo en camiones, ¿cómo lo haría para no magullar la fruta?	E1: Lo más adecuado sería una canasta de fruta en madera brevemente seleccionada para las ciruelas. Segundo, no colocar una sobre la otra, no superar los límites de cada caja y transportarla con cuidado. 
P: A partir de las instrucciones dadas, elabora el cubo en origami con cada uno de los papeles, tomando medidas antes de comenzar y al terminar la construcción del mismo. Con los datos obtenidos completa la tabla anexa que hace referencia a las propiedades del cubo	E1: Vamos a elaborar el cubo de 16 cm E1: Aquí hemos terminado el cubo de 16 cm  E1: Vamos a hacer el cubo de 20 cm E1: Ya terminamos el cubo de 20 cm 

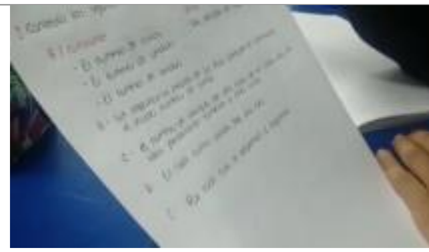
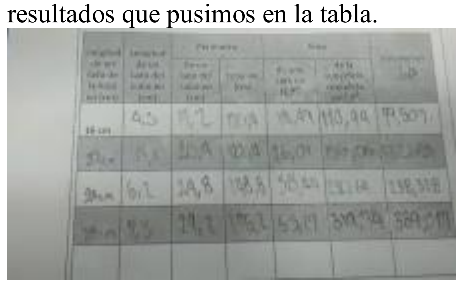
<table>
<tr>
<td>P: Completar el cuadro</td>
<td>E1: Listo ahora seguimos con el cubo de 24 cm
E1: Hemos terminado el cubo de 24 cm y ahora seguimos con el cubo de 28 cm

E13: Hemos realizado el cubo de 28 cm y con esto damos por terminada la relación de todos los cubos

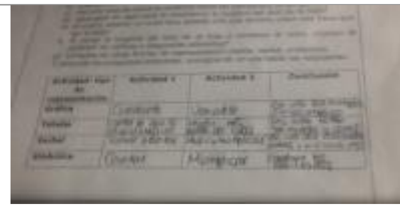
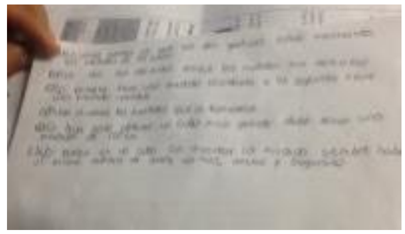
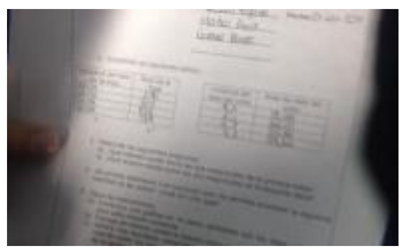
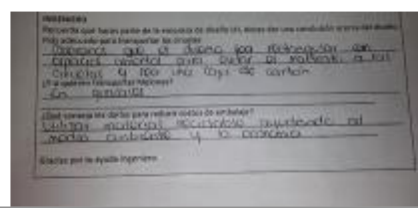

E1: Ahora procederemos a realizar este cuadro.



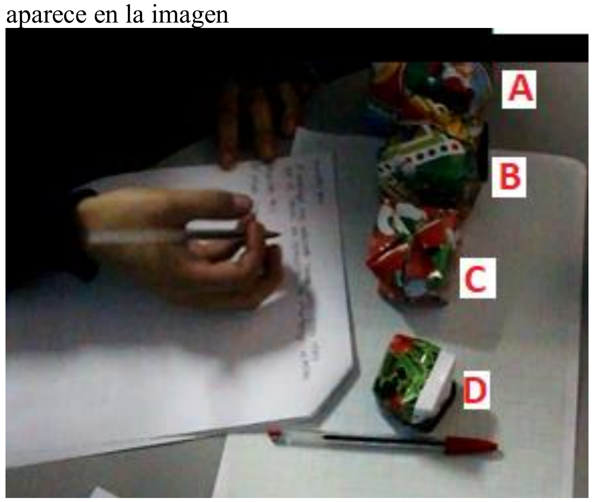
E13: Aquí hemos respondido en su totalidad este cuadro respectivo a los cubos, dándonos cuenta que siempre a pesar que cambian las medidas de los dados de los cubo el número de aristas, diagonales, caras y vértices siempre es el mismo
</td>
</tr>
<tr>
<td>P: Contesta las siguientes preguntas:
- ¿Qué permanece constante y qué varía entre las magnitudes consideradas en la tabla anterior?</td>
<td>E1: permanece constante el número de aristas, de vértices, de diagonales y de caras, a pesar de que cambian los tamaños de los cubos, y supongo que así será para todos los cubos</td>
</tr>
</table>

-¿Qué conclusión se obtiene al relacionar el número de caras del cubo y la medida del lado de la hoja? -¿Qué conclusión se obtiene al relacionar el número de vértices en una cara y el total de los vértices? ¿Y sobre el las caras en cada cubo con el total de las caras del cubo? -¿Qué conclusión se obtiene sobre la relación entre el número de aristas y el número total de caras? -¿Qué conclusión se obtiene sobre la relación entre el número de diagonales y el número total de caras?	 E1: Hemos dado por terminado las medidas de los cubos en este cuadro, ahora vamos a completar el cuadro que se refiere a área y perímetro, para calcular el área multiplicamos lado por lado y para el perímetro sumamos los cuatro lados de cada cara, obteniendo los resultados que pusimos en la tabla.  E1: podemos decir que permanece constante solamente el número de caras, pues las medidas de los lados cambian y eso hace que cambien las áreas, a mayor medida, mayor área el igual con el perímetro, pero entre ellos no hay ninguna relación numérica. Al graficar vemos que se sigue obteniendo una línea recta pero esta tiene inclinación, no como la de las relaciones del cubo, esa era totalmente horizontal. Podemos decir que la fórmula sería: 4 por la medida de los lados, para hallar el perímetro y lado por lado para hallar el área

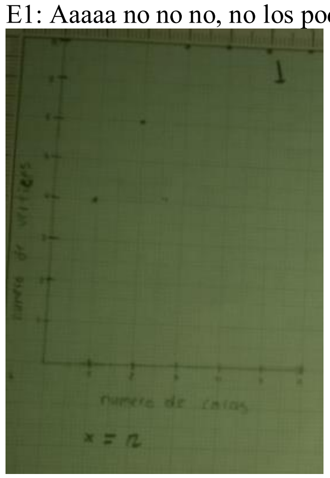
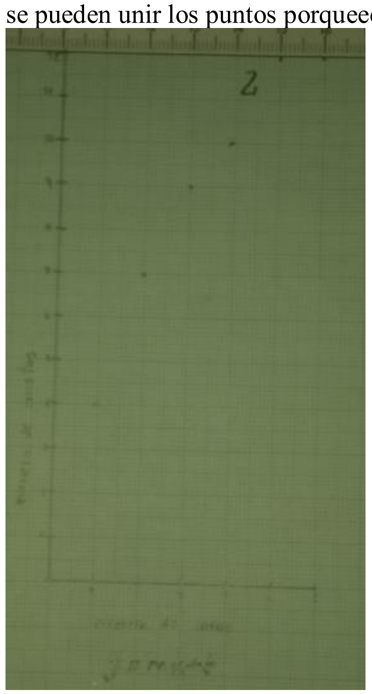
PREGUNTA	RESPUESTA
P: A partir de las gráficas obtenidas en las actividades anteriores responde: -¿Cuáles son similares? ¿Por qué? -¿Cuáles son diferentes? ¿Por qué? -Haz una relación entre la variación entre las pendientes de las gráficas. -¿Qué pasa en cada tabla si cambiamos la longitud del lado de la hoja? -Si quiero obtener un cubo muy grande ¿De qué tamaño crees que tiene que ser la hoja? -Al variar la longitud del lado de la hoja y construir el cubo, ¿Varían la cantidad de vértices y diagonales obtenidos? -Compara las otras formas de representación (tabla, verbal, simbólica)	E1: Lo primero es decir que las gráficas no son similares pues una tiene una inclinación, mientras la otra es completamente plana, lo que las hace diferentes en su esencia, por eso decimos que la plana es constante y la otra es variable. E2: Cuando se habla de pendientes, sabemos por lo que nos han explicado en clase que la pendiente es un número que determina la inclinación de la recta, entonces sabemos que la línea inclinada tiene una pendiente, la plana no debe tener pues es plana, por los que en una hay pendiente y en la otra no. E1. Pues al cambiar la longitud del lado de la hoja varía todo, el perímetro, el área, lo que no varía es el número de aristas, vértices, diagonales y caras. E2: eso depende qué tan grande quiero el cubo

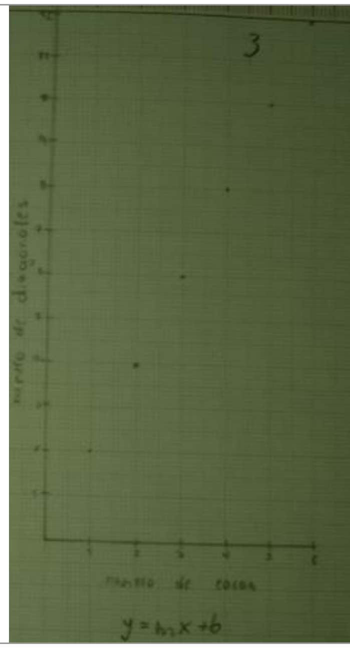
	  
P: Iingeniero, Recuerda que haces parte de la empresa de diseño LH, debes dar una conclusión acerca del diseño más adecuado para transportar las ciruelas. ¿Y si quieren transportar Melones? ¿Qué consejo les darías para reducir costos de embalaje? Gracias por tu ayuda	 E1: vemos que en la última guía se necesitan los mismos valores que usamos en la guía dos, los del área, y que la gráfica queda igual, sin embargo, es difícil hacer esa gráfica porque los valores a comparar son muy grandes 

Anexo J. Transcripciones de la secuencia didáctica - Estudiante alto

Pregunta	Respuesta
- ¿Cómo se transportan en camiones?	E1: ¿Pues digamos que estas son las cajas y… pero entonces cómo sería?, ¿Cuánto diámetro por ejemplo tendría esta? E2: Tendríamos que medir el lado de cada caja E1: (Mide cada caja), 5x5, 7x7, apenas suponiendo que la fruta sea por ahí deee, 3cm? E3: La ciruela E1: digamos que la ciruela, uy no E3: Entre más grande la fruta E1: Si, entre más grande no porque E4: Sin que sea mucho porque no puede quedar ajustada, pero tampoco suelta porque se movería E1: 6cm ni muy grande ni muy pequeña, así se podría transportar para que no se aplaste ni rebote cuando se esté transportando, entonces respuesta #1, (Comienzan a escribir en la guía la respuesta ya redactada) E1:La mejor caja, entonces esta es la A, la B, la C y la D, las nombra como aparece en la imagen  La mejor opción es la C, suponiendo que cada ciruela tenga un diámetro de 3 cm, ya que esta caja tiene un diámetro de 6cm, ni muy pequeño para que se aplaste ni muy grande para que rebote. E3: En esta caja de 6x6 no rebotaría
(Lee la siguiente pregunta que hace referencia a la tabla de las propiedades del cubo)	E4: Lado de la hoja en cm, 16 cm, número de caras E2: seis caras, todos tienen seis E4: 16, 4x4 es 16 (refiriéndose a los lados del cubo más pequeño) E4: Tiene 6 caras E1: Entonces coloque 6 caras E3: Número de vértices en una cara, los vértices son los puntos, son 4, en total… E1: 8, en una cara son 4, en total 8, (Cuenta los vértices) E4: Entonces en una cara 4 cierto, y en total 8 E1:Se contarían sin repetir E3: Número de aristas E1: 4 y 8 E3: No espere E1: Asa no, (Vuelve a contar) son 12 E3: Número de diagonales E1: Cómo así?, cuáles son las diagonales? E4: Son los puntos que no se unen E1: (Comienza a contar), uno, dos, tres cuatro, no espere 10 E2: 12

	E4: 12 porque no contaste unas E1: Otra vez, mira mira (comienza a contar nuevamente) E2: Es 6x2 E1: ¿Por qué? E2: En una cara se pueden 2 y hay 6 caras E3: Entonces el de las aristas está mas, porque 4x6, a no espere, si está bien E4: De diagonales son 12 E1: En una cara son 4 E2: Son dos E1: (Nuevamente vuelve a contar), si son doce, listo E4: Entonces este ya, (Refiriéndose a la cubo hecho con la hoja de 16cm de lado), tenemos que hacerlo con los otros cubos E1:Pues sería lo mismo E2: Si, lo mismo no? E1: Sólo cambiaron los tamaños E4: Si, porque acá preguntan E4: Entonces, este es de cuánto por cuánto? (Tomando el cubo que le sigue en tamaño al de 16cm en su mano) E2: uno es de 16 otro de 20, otro de 24 y otro de 28 E4: entonces el que sigue sería de 20 E1: En el resto lo mismo, todo sería lo mismo, porque son más cubos E4: (Completa la guía usando los mismo números, sólo cambiando los tamaños de las hojas)
Contesta las siguientes preguntas: ¿Qué permanece constante y qué varía?	E3: Permaneces contante el número de vértices, número de aristas, número de caras y de diagonales, tanto en una cara como en total. E4: ¿y qué varía? Los centímetros E2:El tamaño de la hoja E4: (Consigna la respuesta en la hoja)
¿Qué conclusión se obtiene al relacionar el número de caras del cubo y la medida del lado de la hoja?	E3: Este cubo mide 6cm, el cubo tiene 6 caras, este cubo tiene 4cm y también tiene 6 caras, que no importa el tamaño del cubo el número de caras no varía E2: Entonces no importa el tamaño del lado del cubo, siempre tendrá el mismo número de caras
¿Qué conclusión se obtiene al relacionar el número de vértices en una cara y el total de los vértices? ¿Y sobre las caras en cada cubo con el total de las caras del cubo?	E4: No entendí E1: El total de los vértices es el doble de una sola cara y si dicen que no tienen fundamentos? E3: Ya entendí, aquí hay cuatro pero dos vértices pertenecen a dos caras, entonces un vértice pertenece a tres caras E1: Son seis caras y las caras por vértice son tres, luego un vértice conlleva la mitad de caras del cubo.
¿Qué conclusión se obtiene sobre la relación entre el número de aristas y el número total de caras?	E4: Igual, como decías, una arista va para dos caras, entonces sería una arista sería dos de las caras E1: Una arista conlleva a la tercera parte de las caras totales del cubo E4: ¿Qué conclusión se obtiene sobre la relación del número de diagonales y el número total de caras? E1: Diagonales… E4: son dos por cara E1: Cada diagonal conlleva a la quinta parte, entonces una diagonal abarca cinco caras del cubo
Construye una gráfica en el plano cartesiano	Realizan una gráfica relacionando número de caras vrs número de vértices, otra relacionando número de caras con diagonales, otra con número de caras y aristas

Genera una expresión matemática que muestre de manera general la relación entre los ejes de la gráfica	E3: Digamos aquí quedó en el número de caras una cara número de vértices, entonces una cara cuatro vértices E1: Una cara cuatro vértices, dos caras 6 vértices, tres caras constarían de 8 vértices y acabamos con el cubo, por lo que cuatro cinco y seis caras tendrían 8 también E2: No usted no puede coger una cara. No una cara no puede ser tres vértices, no podemos E1: Aaaaa no no no, no los podemos mover, casi la embarro, no los podemos unir  E4: Igual no iba a dar E1: No en este no es necesario unir, ahora una cara por arista, son… una cara son 4 aristas, dos caras serían 7 aristas, porque no se pueden repetir, tres caras serían 9 aristas, 4 caras serían 10 aristas, entonces no son doce aristas, son diez aristas E4: no , 4x3 doce, si son doce E1: contémolas, aaaa si, son doce, luego 5 caras y seis caras son doce aristas, no se pueden unir los puntos porqueee es….si se unen se vuelve continuo.  Ahora el número de diagonales, una cara son dos diagonales, dos caras son 4 diagonales, tres caras serían 6 diagonales, 4 caras 8 diagonales, 5 caras 10 diagonales y 6 caras doce diagonales, esta tampoco se puede unir porque no es continua

Pregunta	Respuesta
Completa las tablas de las propiedades del cubo	E1: ya sabemos cuáles son las medidas: 16, 20, 24 y 28 E1: la longitud de un lado de la hoja es la misma, se repite E3: Vea, longitud de un lado de la hoja, mire la otra hoja de ayer, es de un lado del cubo, hay que corregir. E1: Asa sí, es diferente, hay que medir los lados del cubo (Los mide y comienza a corregir) E3: Ahora el perímetro, es un lado por el otro E1: 4x4 16, multiplicando dos lados, entonces sería 16 cm, multiplicando dos aristas para calcular el perímetro, en total serían seis caras, 6 por 16? Serían 96 El otro sería 25 por 6… E2: Aaaaaa nooo, el perímetro es la suma de todos los lados, entonces sería el de el cubo de 4 cm sería 4 veces 4 eso es 16, el de 5cm sería 4 veces 5 es 20 y así, después si se multiplica por seis para saber el total E1: Entonces toca corregir otra vez E3: En el área si es lado por lado para saber el de una cara y luego por seis para saber el total, entonces sería el primero 4x4 =16 y ese por 6 es 96 (siguen calculando el de cada uno de los cubos). E1: ¿Y el volumen? E3: Ese es lado por lado por lado. E1: Es decir las tres aristas?, entonces 4x4= 16 x4 E2: 64 cm cúbicos (Calculan el resto de medidas y continúan llenando la tabla con los datos que van encontrando)
¿Qué permanece variable y qué permanece contante en la tabla?	E4: Lo que se mantiene constante E1: Es la multiplicación por seis ya que son seis caras, para calcular el total del área y del perímetro del cubo y lo que es variable es que el área es la multiplicación de las aristas, para calcular el perímetro se necesitan sumar las cuatro aristas y para calcular el volumen se multiplican tres aristas, listo.
¿Qué relación se puede encontrar entre la longitud de un lado de la hoja en cm	E2: Que las dos son... múltiplos E1: Que son la cuarta parte, que la longitud de una cara del cubo es una cuarta parte de la cara de la hoja

con respecto a la longitud del lado del cubo en cm? ¿Por qué?	E3: aquí no es una cuarta parte de la cara sino de la hoja E1: Es lo mismo porque si es un lado es un cuarto si es la hoja seria todo
¿Es posible relacionar la longitud del lado de la hoja con la longitud del lado del cubo? ¿De qué manera? ¿Por qué?	E1: Para encontrar una relación entre el lado de la hoja con el lado del cubo sería hacer una fórmula: $y=4x$, donde x es el número que se multiplica para encontrar el área, perímetro y volumen y 4 es el lado del cubo de la hoja de 16cm, y para el lado de la hoja de 20 cm sería $y= 5x$, el de 24 cm sería $y= 6x$ y el de 28 cm sería $y=7x$
¿Es posible relacionar el área de una cara en cm cuadrados y el área de la superficie completa en cm cuadrados? ¿De qué manera? ¿Por qué?	E1: Entonces, para relacionar el área de una cara en cm cuadrados con la superficie total se hace $y= 16\ cm^2 (x)$, donde x es 6 sería el número de caras para encontrar el total de la superficie. Listo
¿Es posible relacionar el volumen en cm cúbicos con algún a magnitud anterior? ¿De qué manera? ¿Por qué?	E1: No se puede hacer una relación porque anteriormente no se está multiplicando por un número, solamente se multiplican las tres aristas de cada cubo. E3: No, no es posible establecer una relación entre ninguno de los números de las columnas consignadas en la tabla
Construye una gráfica en el plano cartesiano con los datos obtenidos para cada relación existente	Proceden a construir el plano cartesiano de la actividad sin hacer ninguna observación de las gráficas obtenidas, tienen en cuenta la continuidad de los puntos y las magnitudes obtenidas en la tabla

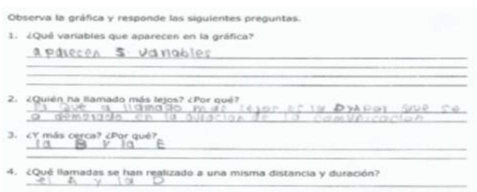
PREGUNTA	RESPUESTA
¿Cuáles de las gráficas de las actividades anteriores son similares? ¿Por qué?	E1: nos toca enumerar las gráficas, la que obtuvimos en la actividad de área es similar a la que obtuvimos en el perímetro pues ambas comienzan en cero y son continuas. E2: al ser continuas podemos tomar cualquier valor de la hoja, ya sea decimal o entero y encontraremos un área o perímetro asignado para esta.
¿Cuáles de las gráficas de las actividades anteriores son Diferentes? ¿Por qué?	E3: las diferentes son la1, 2, 3, 6 y 7 que son las de número de vértice, de lados, de diagonales, el área vrs la longitud pues todas son discontinuas pero inician desde valores distintos E1: Aunque son similares entre ellas, son distintas a las primeras no? E3: Si pero deben tener características parecidas para que sean similares

Haz una comparación entre las pendientes de las gráficas	E2: cuando se refiere a las pendientes es … E1: Yo creo que son los puntos de corte o más bien, desde dónde comienza, entonces podemos decir que todas comienzan desde puntos diferentes y esa sería la variación
¿Qué pasa en cada tabla si cambiamos la longitud de la hoja?	E1: En todos los cubos la cantidad de aristas, las caras, los vértices y las diagonales no cambian entonces sólo cambiaría el área y el perímetro E4: Claro porque esos si dependen de las medidas de la hoja
¿Si quiero obtener un cubo muy grande, de qué tamaño crees que debe ser la hoja?	E1: Jajajajaja, pues más grande, eso depende de lo que quiera profe,… (Risas)
Al variar la longitud de la hoja, varía la cantidad de vértices, ¿y diagonales obtenidos?	E2: No, esa siempre es constante al igual que las caras y las aristas
Compara las otras formas de representación y responde las preguntas	Completaron la tabla llegando a la conclusión que una es constante y la otra se presenta como afín según la fórmula de la recta $y = mx + b$

Anexo K. Entrevista semi-estructurada # 1- Estudiante bajo.

<table>
<tr><th>INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO</th><th>ENTREVISTA
CLÍNICO CRÍTICA</th></tr>
<tr><td><u>Problema # 2: Preguntas 1, 2, 3, 4</u>

Observa la gráfica y responde las siguientes preguntas
1. ¿Qué variables aparecen en la gráfica?
RTA. Aparecen 5 variables
2. ¿Quién ha llamado más lejos? ¿Por qué?
RTA. El que ha llamado más lejos es la Dy A porque se ha demorado en la duración de la comunicación
3. ¿Y más cerca? ¿Por qué?
RTA. La B y la E
4. ¿Qué llamadas se han realizado a una misma distancia y duración?
RTA. El A y la D


Observa la gráfica y responde las siguientes preguntas.
1. ¿Qué variables que aparecen en la gráfica?
apdiecen 5 variables
2. ¿Quién ha llamado más lejos? ¿Por qué?
3. ¿Y más cerca? ¿Por qué?
la B y la E
4. ¿Qué llamadas se han realizado a una misma distancia y duración?
el A y la D</td><td rowspan="2">P1. ¿Por qué tiene cinco variables la situación?

RTA: porque hay cinco letras diferentes y cada una es una variable.

P2. ¿La ubicación de los puntos nos dice que existe una relación entre las llamadas variables, es decir, una depende de la otra para cambiar?

RTA. Pues cada una es diferente, no dependen, son independientes, no tienen ninguna relación

P3. ¿A qué se refiere con que se ha demorado en la duración de la comunicación?

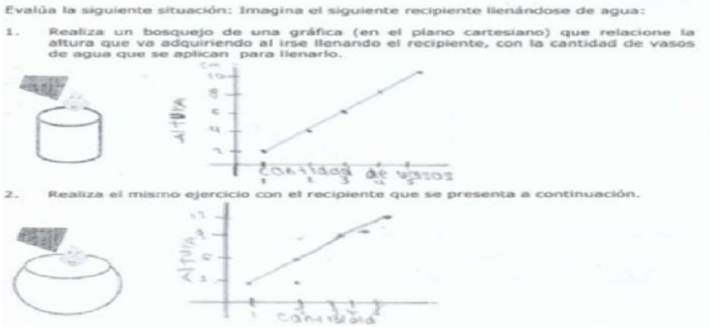
RTA. Pues que son los que están más arriba en la gráfica, entonces son los más lejos, los que han llamado más lejos, en la B y la E son los más cerca por ejemplo a cero entonces son los que han llamado más cerca, por eso la A y la D están iguales, son las que más han durado y más caras son.

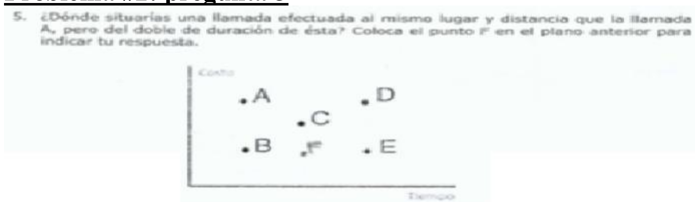
P4. ¿Por qué no enunció la relación existente entre los ejes X e Y en la situación de las empanadas? , si lo hubiese hecho, ¿De qué manera quedaría?

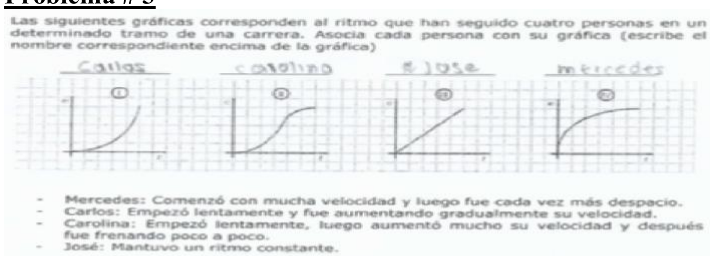
RTA. Mmmm., pues no entiendo eso de relación, sé que a una empanada le toca $800 porque ese es su precio, y que se ubican los puntos de tal manera que cada uno tiene su pareja, por ejemplo $800 con una empanada, $1.600 con dos empanadas y así, pero no entiendo eso de relación.</td></tr>
<tr><td><u>Problema # 4: Pregunta 1</u>
No hay respuesta

1. Escribe con tus palabras la relación existente entre ambos ejes de la gráfica (x e y).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO</th><th>ENTREVISTA
CLÍNICO CRÍTICA</th></tr>
<tr><td><u>Problema #1: preguntas 1, 2</u></td><td>P1. ¿Por qué elaboró esa gráfica para la situación 1 y 2 (llenar recipientes con agua)?</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>


<u>Problema #2: pregunta 5</u>


<u>Problema # 3</u>


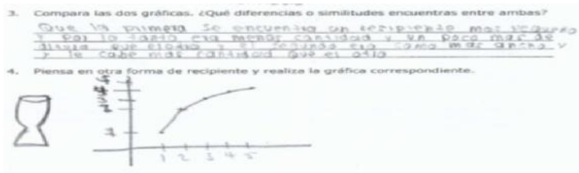
</td>
<td>
RTA. Pues… yo puse valores en ambos ejes y formé parejas, como no dan números dije que en el primer vaso, llega a la altura 2, en la vasija que parece un cilindro, y así, no tuve mucho en cuenta, igual con la otra, pero cogí número impares para esa, para que se vieran diferentes, una con pares y la otra con impares.

P2. ¿Por qué ubicó el punto F en esa posición?
RTA. Pues…Porque dice que el que dure el doble y cueste el doble de A, horizontalmente está como al doble de A, ese sería el doble, entonces F queda al doble de A.

P3. ¿Es decir, que podemos opinar que las variables tienen una dirección de aumento o disminución según las condiciones que se nos presentan en cada situación?
RTA. Pues… aumento todas tienen, a más lejos, más plata, a más tiempo más plata entonces la variable sería el tiempo y lo lejos, porque siempre se usa plata para saber cuál es más lejos o no.

P4. Para las gráficas de la situación de los corredores, ¿Cuál fue el análisis que hizo para asignar cada nombre?
RTA. Pues ahí dice que José es constante, y la gráfica tres es igual siempre, las otras cambian en pedazos, entonces son diferentes, hay cambio en las condiciones, en la velocidad, entonces las otras son donde cambia la velocidad, por ejemplo la de Carolina, dice que arranca rápido y luego despacio, sería la dos, porque sube rápido y después baja despacio.
Y así con las otras.
</td>
</tr>
</table>

INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO	SECUENCIA SESIONES	ENTREVISTA CLÍNICO CRÍTICA
<u>Problema # 1: preguntas 3,4</u> 3. Compara las dos gráficas. ¿Qué diferencias o similitudes encuentras entre ambas? RTA. Que la primera se encuentra un recipiente más pequeño y por tanto era menos cantidad y un poco más de altura que el otro,	*<u>Sesión 2: Problema 2- Problema 3</u>* Problema2: Construir los cubos y completar la tabla de las relaciones del cubo	P1. ¿Por qué dice que el cilindro es más pequeño que el recipiente redondo? RTA. Porque es más cerrado, el redondo es más gordo, necesita más agua.

<table>
<tr>
<td rowspan="2">y el segundo era como más ancho y le cabe más cantidad que el otro.

</td>
<td>E1: Pues siempre es lo mismo, entonces, ¿Para qué llenar toda la tabla?

E2: Pero si siempre es lo mismo no tiene sentido, entonces sería para todos un punto ¿no?

E1: Pues ponemos un punto y todos en la misma ¿no?

Es decir, toca poner solo un punto en el plano que represente todas las medidas</td>
<td rowspan="4">P2. ¿Al hacer la gráfica del recipiente opcional, dibuja una copa, por qué utiliza esa forma?
RTA. Porque es muy común, todos tenemos un vaso en la casa, y ese se llena fácil, usando agua, hasta que se llena y no cabe más, por eso la gráfica deja de subir

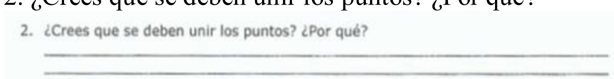
P3. ¿De qué manera completó la tabla de la primera actividad?
RTA. Pues no la llené porque me pareció inútil, la primera fila iba a ser igual que todas, entonces sólo completé la primera y listo, dejé el resto sin llenar porque era lo mismo siempre.

4. ¿Por qué pone solo un punto en el plano?
RTA. Es que siempre es lo mismo, entonces siempre será el mismo punto para todos los valores que tengamos, incluso si no están en la tabla que nos dieron, porque las caras del cubo siempre son las mismas o deja de ser cubo

P5. ¿Y la segunda tabla?
RTA. Usamos las fórmulas que conocemos, pero daban valores muy grandes y eso no se puede graficar en una hoja pequeña

P5. ¿Por qué no contestó si se debían unir los puntos en la gráfica de las empanadas?
RTA. Porque no sé, yo creo que sí, pero no tengo una respuesta que sea matemática para decirlo, yo diría que sí, que toca unirlos para que se vea una recta.

P6. En la comparación no afirmó que hubiera relación entre las gráficas ¿Hay alguna relación?
RTA. Yo creo que no, la una es un punto y la otra no se puede hacer porque son valores gigantes, entonces para que hubiera relación debería ser parecidas, dos líneas o dos ruedas, o algo así

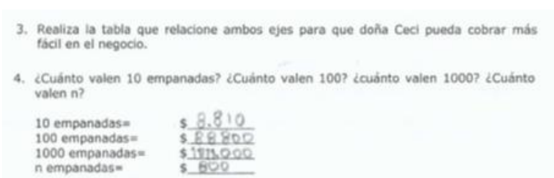
P7. Entonces, ¿Definitivamente es imposible que exista una gráfica para la segunda tabla (áreas y perímetros)?</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2"><u>Sesión 3: Problema 1- Problema 2</u>
E1: y cómo hallamos el área?
E2: toca multiplicar los cuatro lados
E2: pero en el perímetro toca sumarlos
E1: uy pero da un número muy grande no?
E2: si, eso no se puede graficar, da una cantidad grandísima, entonces es mejor llenar las, tablas y decir que no hay una gráfica posible para este punto
E1: en este caso, el área del primero sería 256, porque 4x4x4x4 cierto?
E2: si claro, toca usar calculadora porque para multiplicar todos esos valores no alcanzamos y de pronto nos queda mal.
¿Y para el perímetro?
E2: ese si es sólo la suma 4+4+4+4= 16, pero no podemos relacionar área y perímetro por lo grande de los valores.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2"><u>Problema # 4: Pregunta 2</u>
Situación de las empanadas
2. ¿Crees que se deben unir los puntos? ¿Por qué?

2. ¿Crees que se deben unir los puntos? ¿Por qué?</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Sesión 4: Problema 1</u>
Problema 1: Comparación de las gráficas obtenidas en las relaciones y propiedades del cubo</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>E1: no hay gráfica de la segunda actividad pues son muy grandes los valores y no es posible elaborarlo, entonces mejor no hagamos gráfica
E2: ¿entonces qué comparamos?
E1: en el primero solo hay un punto, en el segundo no hay nada, entonces podemos decir que no se garantiza ni constante ni variable y que la actividad no da para eso.</td>
<td>RTA. Tocaría en una hoja más grande, un pliego o algo así, y de pronto usando uno de esos programas para graficar, los números son muy grandes y no caben en una hoja normal

P8. ¿Por qué no realizó la gráfica de la última guía referente a longitudes y áreas?
RTA. Igual, daba muy grande, y no cabía en la hoja

P9. De haberla hecho, ¿Cómo cree que hubiera quedado?, es decir, ¿Cuál sería su forma?
RTA. Pues una recta larguísima, con puntos por allá en mil y más de mil</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<th>INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO</th>
<th>ENTREVISTA
CLÍNICO CRÍTICA</th>
</tr>
<tr>
<td><u>Problema # 4: preguntas 3, 4</u>
3. Realiza la tabla que relacione ambos ejes para que doña Ceci pueda cobrar más fácil en el negocio
RTA. No hay respuesta
4. ¿Cuánto valen 10 empanadas? ¿Cuánto valen 100? ¿Cuánto valen 1000? ¿Cuánto valen n?
RTA:
10 empanadas: 8810
100 empanadas: 88800
1000 empanadas: 1818000
n empanadas: 800


3. Realiza la tabla que relacione ambos ejes para que doña Ceci pueda cobrar más fácil en el negocio.
4. ¿Cuánto valen 10 empanadas? ¿Cuánto valen 100? ¿cuánto valen 1000? ¿Cuánto valen n?
10 empanadas= $ 8.810
100 empanadas= $ 88800
1000 empanadas= $ 1818.000
n empanadas= $ 800</td>
<td>P1. ¿Por qué no elaboró la tabla correspondiente a relacionar los ejes de la gráfica de la actividad de las empanadas de doña Ceci?
RTA. Pues, para qué, si ya hay gráfica, además no sé cómo hacerla, cuando se habla de distintos valores en cada eje, no sé sabe cómo ubicarlos en una tabla.

P2. ¿Qué tuvo en cuenta para poder hallar el valor de 10, 100 y 1000 empanadas?
RTA. Pues, multipliqué, 8810 es el resultado de 10 por 800, y así sucesivamente, al multiplicar dan esos resultados, usando las tablas.

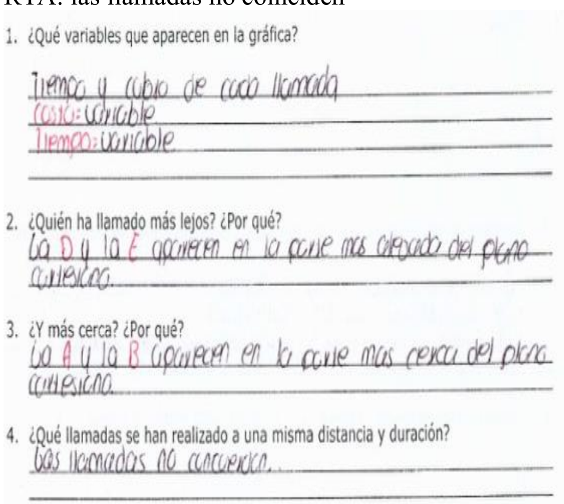
P3. ¿Por qué escribió el valor 800 para n empanadas?
RTA. Pues, para cualquier empanada el valor es 800, porque eso dice el enunciado.</td>
</tr>
</table>

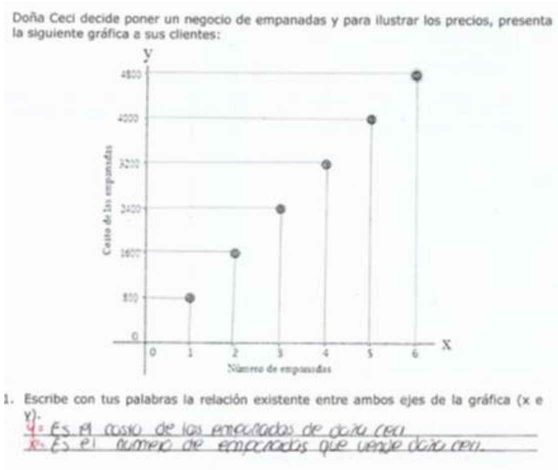
INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO	SECUENCIA SESIONES	ENTREVISTA CLÍNICO CRÍTICA
Problema 4: pregunta 5 RTA. No hay respuesta 5. Haz la gráfica, la tabla y construye la fórmula matemática (utilizando n) para calcular el precio de las empanadas más $500 adicionales por un vaso de gaseosa, por si los clientes desean sus empanadas en combo.	*Sesión 2: problema 4* 4. Realice la gráfica del problema correspondiente (relaciones del cubo). E2: en ese caso no varía nada pero sólo queda un punto entonces no se genera gráfica, solamente sería un punto y ya.	P1. ¿Por qué no elaboró la gráfica correspondiente a las empanadas en combo? RTA. Porque no sé cómo hacerla, es que dice que se suma $500, esos se suman a quién, a cada combo o a cada respuesta?, no hay claridad, quedaría muy grande. P3. ¿Qué tuvo en cuenta para elaborar la gráfica de las relaciones y las propiedades del cubo? RTA. En la de las relaciones como todos eran iguales, solo puse un punto que sería igual para todos los valores, en la de las propiedades, no hice la gráfica porque quedaba muy grande y eso no cabe en la hoja, entonces no era posible realizarla, no hay nada que comparar, no es posible saber de qué manera hacer la gráfica.
	Sesión 3: problema 3 3. Realice la gráfica del problema correspondiente (propiedades del cubo) RTA: E1: no hay gráfica de la segunda actividad pues son muy grandes los valores y no es posible elaborarlo, entonces mejor no hagamos gráfica.	
	Sesión 4: problema 1 E1: pues sí, y en el cuadro que está allí no escribimos nada porque no hay ninguna comparación y no podemos hacer representación general, la única que quedaría es la de las tablas, y esa tiene números muy desiguales, pues unos son muy grandes y los otros son muy pequeños, entonces no se puede comparar, lo único que se podría decir es que hay mucha diferencia entre las cantidades.	
	Sesión 5: Problema 3, 4 ,5 E1: pues sí, y en el cuadro que está allí no escribimos nada porque no hay ninguna comparación y no podemos hacer representación general, la única que quedaría es la de las tablas, y esa tiene números muy desiguales, pues unos son muy grandes y los otros son muy pequeños, entonces no se puede comparar,	

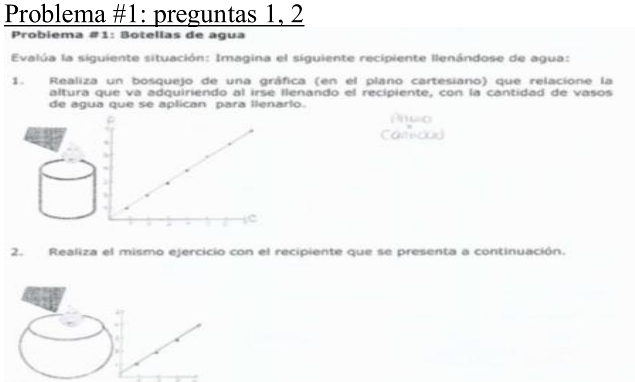
	lo único que se podría decir es que hay mucha diferencia entre las cantidades.	

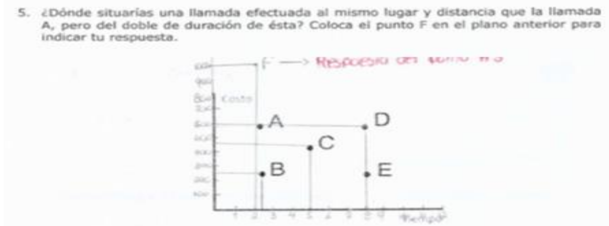
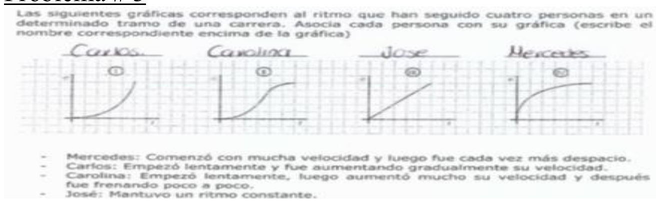
INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO	SECUENCIA SESIONES	ENTREVISTA CLÍNICO CRÍTICA
<u>*Problema # 4: preguntas 3, 5*</u> 3. Realiza la tabla que relacione ambos ejes para que doña Ceci pueda cobrar más fácil en el negocio RTA. No hay respuesta 5. RTA. No hay respuesta 5. Haz la gráfica, la tabla y construye la fórmula matemática (utilizando n) para calcular el precio de las empanadas más $500 adicionales por un vaso de gaseosa, por si los clientes desean sus empanadas en combo.	<u>*Sesión 2: problema 4*</u> 4. Realice la gráfica del problema correspondiente (relaciones del cubo). E2: en ese caso no varía nada pero sólo queda un punto entonces no se genera gráfica, solamente sería un punto y ya. <u>*Sesión 3: problema 3*</u> 3. Realice la gráfica del problema correspondiente (propiedades del cubo) RTA: E1: no hay gráfica de la segunda actividad pues son muy grandes los valores y no es posible elaborarlo, entonces mejor no hagamos gráfica. <u>*Sesión 4: problema 1*</u> E1: pues sí, y en el cuadro que está allí no escribimos nada porque no hay ninguna comparación y no podemos hacer representación general, la única que quedaría es la de las tablas, y esa tiene números muy desiguales, pues unos son muy grandes y los otros son muy pequeños, entonces no se puede comparar, lo único que se podría decir es que hay mucha diferencia entre las cantidades <u>*Sesión 5: problema 3, 4, 5*</u> E1: pues sí, y en el cuadro que está allí no escribimos nada porque no hay ninguna comparación y no podemos hacer representación general, la única que quedaría es la de las tablas, y esa tiene números muy desiguales, pues unos son muy grandes y los otros son muy pequeños, entonces no se puede comparar, lo único que se podría decir es que hay mucha diferencia entre las cantidades.	P1. ¿Por qué no elaboró la gráfica correspondiente a las empanadas en combo? RTA. Porque no sé cómo hacerla, es que dice que se suma $500, esos se suman a quién, a cada combo o a cada respuesta?, no hay claridad, quedaría muy grande. P3. ¿Qué tuvo en cuenta para elaborar la gráfica de las relaciones y las propiedades del cubo? RTA. En la de las relaciones como todos eran iguales, solo puse un punto que sería igual para todos los valores, en la de las propiedades, no hice la gráfica porque quedaba muy grande y eso no cabe en la hoja, entonces no era posible realizarla, no hay nada que comparar, no es posible saber de qué manera hacer la gráfica.

Anexo L. Entrevista semi-estructurada #1 - Estudiante medio.

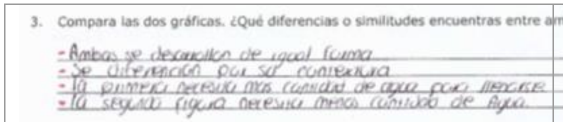
INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO	ENTREVISTA CLÍNICO CRÍTICA
<u>Problema # 2: Preguntas 1, 2, 3, 4</u> *Situación de la llamada* 1. ¿Qué variables aparecen en la gráfica? RTA: Tiempo y cobro de cada llamada. Costo: Variable Tiempo: Variable 2. ¿Quién ha llamado más lejos? ¿Por qué? RTA: La D y la E aparecen en la parte más alejada del plano cartesiano 3. ¿Y más cerca? ¿Por qué? RTA: La A y la B aparecen en la parte más cerca del plano cartesiano 4. ¿Qué llamadas se han realizado a una misma distancia y duración? RTA: las llamadas no coinciden  1. ¿Qué variables que aparecen en la gráfica? Tiempo y cobro de cada llamada Costo: variable Tiempo: variable 2. ¿Quién ha llamado más lejos? ¿Por qué? La D y la E aparecen en la parte mas alejada del plano cartesiano. 3. ¿Y más cerca? ¿Por qué? La A y la B aparecen en la parte mas cerca del plano cartesiano 4. ¿Qué llamadas se han realizado a una misma distancia y duración? Las llamadas no coinciden.	P1. ¿Por qué el tiempo y el costo son variables en la situación de las llamadas? RTA: porque son elementos que toman distintos valores pues están ubicados en distintos sitios del plano, por lo que no tienen el mismo valor, si lo tuvieran, o sea, si estuviera especificado el valor, si la gráfica tuviera números. P2. ¿La ubicación de los puntos nos dice que existe una relación entre las llamadas variables, es decir, una depende de la otra para cambiar? RTA. Claro, lógico, eso es como el recibo de la casa, a mayor distancia mayor costo, y a mayor duración mayor costo de la llamada, tienen una relación de ascendencia, de aumento, si uno no se demora en el teléfono le cobran menos, de igual manera que si llama a una distancia local, por ejemplo si llamo a España es más caro el minuto. P3. ¿Qué tendría que aparecer en el plano para decir que se hicieron dos llamadas iguales? RTA. Dos puntos iguales, o sea, un punto encima de otro con distinta letra, serían dos puntos diferentes pero con la misma duración y costo. P4. ¿Cuándo hace la relación entre el costo de las empanadas y la cantidad, encuentra que siempre hay un incremento constante? RTA. Si porque la empanada siempre vale lo mismo, entonces siempre voy a sumar lo mismo, es la misma situación del costo de las llamadas pero con

Problema # 4: Pregunta 1 *Situación de las empanadas* 1. Escribe con tú palabras la relación existente entre ambos ejes de la gráfica (X e Y) RTA: Y: es el costo de las empanadas de doña Ceci; X: Es el número de empanadas que vende doña Ceci  	números, aquí si podemos determinar una relación numérica entre el costo y la cantidad de empanadas a comprar.

INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO	ENTREVISTA CLÍNICO CRÍTICA
Problema #1: preguntas 1, 2  	P1. ¿Por qué elaboró esa gráfica para la situación 1 y 2 (llenar recipientes con agua)? RTA. Yo considero que la forma más efectiva de comparar es altura por cantidad, en este caso, la altura del recipiente por la cantidad de agua que se debe usar para llenarlo, en el primer recipiente que tiene forma de cilindro a mayor cantidad de agua, mayor altura, yo puse 1 cantidad de agua, 1 altura, 2 cantidades de agua, 2 altura y así, porque como no dan unas cantidades específicas numéricas, entonces no podemos hacer algo más específico. P2. ¿Por qué ubicó el punto F en esa posición? RTA. Pues…Porque nombré el eje horizontal como el tiempo, y el eje vertical como el costo entonces debe estar en el punto más alto y gráficamente sería ese, entonces ese punto garantiza que tiene el mayor costo y la mayor duración.
Problema #2: pregunta 5	

 5. ¿Dónde situarías una llamada efectuada al mismo lugar y distancia que la llamada A, pero del doble de duración de ésta? Coloca el punto F en el plano anterior para indicar tu respuesta. 	P3. ¿Es decir, que podemos opinar que las variables tienen una dirección de aumento o disminución según las condiciones que se nos presentan en cada situación? RTA. Pues claro, a mayor costo, mayor tiempo o al revés y eso quiere decir que al hacer la gráfica va a quedar hacia arriba, si fuera siempre el mismo costo, entonces la gráfica no cambiaría y así. P4. Para las gráficas de la situación de los corredores, ¿Cuál fue el análisis que hizo para asignar cada nombre? RTA. Pues como cada corredor tenía unas especificaciones, donde decía que aumentaba o disminuía su velocidad entonces traté de relacionar la dirección del cambio con la instrucción, si permanece constante entonces la gráfica sería recta, si disminuye su velocidad, se vuelve horizontal, si aumenta la velocidad, sube la gráfica y se vuelve como una flecha inclinada y así, por ejemplo en la de Carlos dice que aumentó gradualmente la velocidad, podría decir que cada vez fue más rápido más rápido, entonces la gráfica número uno se ve que comienza a subir, como si aumentara de a poquitos y cada vez más y más, por eso coincide con lo que se dice de Carlos.
<u>Problema # 3</u>  Las siguientes gráficas corresponden al ritmo que han seguido cuatro personas en un determinado tramo de una carrera. Asocia cada persona con su gráfica (escribe el nombre correspondiente encima de la gráfica) - Mercedes: Comenzó con mucha velocidad y luego fue cada vez más despacio. - Carlos: Empezó lentamente y fue aumentando gradualmente su velocidad. - Carolina: Empezó lentamente, luego aumentó mucho su velocidad y después fue frenando poco a poco. - José: Mantuvo un ritmo constante.	

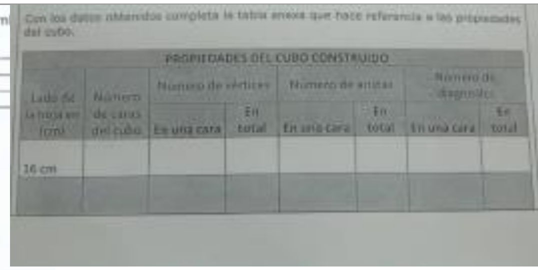
INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO	SECUENCIA SESIONES	ENTREVISTA CLÍNICO CRÍTICA
<u>Problema # 1: preguntas 3,4</u> Situación de las botellas de agua 3. Observa las dos gráficas. ¿Qué diferencias o similitudes encuentras entre ambas? RTA. - Ambas se desarrollan de igual forma. - Se diferencian por su contextura. -La primera necesita más cantidad de agua para llenarse. -La segunda figura necesita menos cantidad de agua.	*<u>Sesión 2: Problema 2- Problema 3</u>* Problema2: Construir los cubos y completar la tabla de las relaciones del cubo RTA: E1: Vamos a elaborar el cubo de 16 cm E1: Vamos a hacer el cubo de 20 cm E1: Listo ahora seguimos con el cubo de 24 cm E1: Hemos realizado el cubo de 28 cm y con esto damos por terminada la relación de todos los cubos E1: Ahora procederemos a realizar este cuadro.	P1. ¿A qué se refiere con que las gráficas se desarrollan de igual forma? RTA. Puedes… a que son dos gráficas que aumentan, que tienen la misma forma, son líneas exactas y rectas, se ´parecen muchísimo. P2. ¿Por qué afirma que el primer recipiente necesita más cantidad de agua para llenarse? RTA. Porque la forma de la primera es más grande que la de la segunda, el cilindro es más grande que ese círculo, tiene como más altura. P3. ¿De qué manera completó la tabla? RTA. Siempre contamos, con mis compañeros, nos pedían el número de caras, el número de aristas, y nosotros contamos para encontrar los valores que nos pedían,



3. Compara las dos gráficas. ¿Qué diferencias o similitudes encuentras entre am

- Ambas se desarrollan de igual forma
- Se diferencian por su contextura
- la primera necesita más cantidad de agua para llenarse
- la segunda figura necesita menos cantidad de agua.

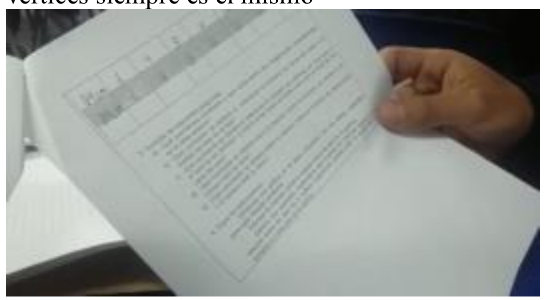
4. Piensa en otra forma de recipiente y realiza la gráfica correspondiente.



Con los datos obtenidos completa la tabla anexa que hace referencia a las propiedades del cubo.

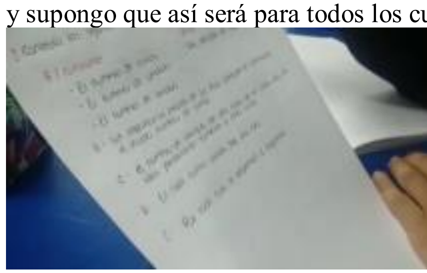
PROPIEDADES DEL CUBO CONSTRUIDO							
Lado de la hoja en (cm)	Número de caras del cubo	Número de vértices		Número de aristas		Número de diagonales	
		En una cara	En total	En una cara	En total	En una cara	En total
16 cm							

E13: Aquí hemos respondido en su totalidad este cuadro respectivo a los cubos, dándonos cuenta que siempre a pesar que cambian las medidas de los dados de los cubo el número de aristas, diagonales, caras y vértices siempre es el mismo



Problema 3: Preguntas de las relaciones del cubo

RTA. E1: permanece constante el número de aristas, de vértices, de diagonales y de caras, a pesar de que cambian los tamaños de los cubos, y supongo que así será para todos los cubos



con el primer cubo, al ver que en el segundo cubo los valores eran los mismos, entonces hicimos plana de valores (Risas).

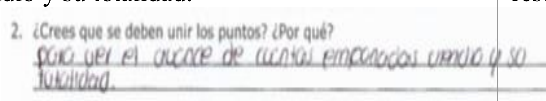
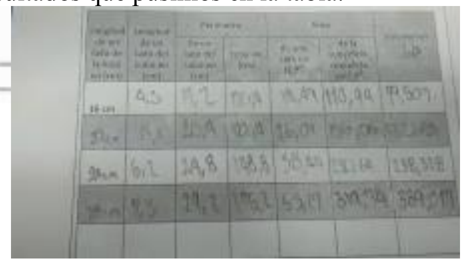
P4. ¿A eso se refieren con constantes?
RTA. Pues que siempre es igual, creemos que la manera de decir que no cambia es que es constante.

P5. ¿Por qué cree que se deben unir los puntos en el problema de las empanadas?
RTA. Porque podemos ver un avance entre las ventas, podemos hacer un estimado de cuántas empanadas vendió y cuánto dinero ganó.

P6. En la tabla de las propiedades del cubo, afirmó que varían los valores porque los lados también varían, ¿Hay alguna relación entre esas variaciones?
RTA. Pues no sé si hay relación, pero lo que si hay es una fórmula para encontrar los que me piden, en este caso área y perímetro, el área es la multiplicación de los lados, sólo dos, y el perímetro la suma de cuatro lados, en este caso, si habría una relación pues siempre se usa la misma fórmula para completar la tabla tanto para área como para perímetro, esa sería la relación, aunque nosotros dijimos que no había relación…, mmm, si, si debe haber, y se maneja con la fórmula.

P7. Al analizar las gráficas, ¿Es posible que sean similares sólo por ser rectas?
RTA. Pues no porque se necesita que tengan la misma forma para decir que se parecen, si, ambas son rectas, pero una tiene inclinación y la otra es horizontal, es plana, luego no tienen ni la misma fórmula ni la misma

		relación, entonces no es posible decir que se parecen, las que si se parecen aunque sus valores cambian, son las de área y perímetro, ambas son rectas, ambas tienen inclinación, pero no tienen los mismos valores, pues al hallar el área y el perímetro se dan valores diferentes porque las fórmulas para encontrarlas son distintas, por los que se parecen pero jamás serán iguales. P8. ¿Por qué no realizó la gráfica de la última guía referente a longitudes y áreas? RTA. (Risas), nooo esa gráfica daba gigante porque teníamos valores de 1000 o más grandes y esa vaina era muy grande para poner en una hoja, es que ni de cien en cien… para eso toca usar un programa de esos que la profe nos dijo una vez que servían para hacer gráficas. P9. De haberla hecho, ¿Cómo cree que hubiera quedado?, es decir, ¿Cuál sería su forma? RTA. Pues como estamos viendo rectas, asumo que sería una recta, un círculo no, porque los valores no se repiten, de pronto sea curva o algo así, (risas) no, no sé, pues diría que es una recta...mmmm, aaa pensándolo bien si es una recta porque esta gráfica usa los mismos valores que la gráfica del área, y en esa nos dio una recta, entonces sí, es una recta, seguro, última palabra, ash, más bobos no haberla hecho.
<u>Problema # 4: Pregunta 2</u> Situación de las empanadas 2. ¿Crees que se deberían unir los puntos? ¿Por qué?	*<u>Sesión 3: Problema 1- Problema 2</u>* Problema 1: Construir los cubos y completar la tabla de las propiedades del cubo **RTA.** E1: Hemos dado por terminado las medidas de los cubos en este cuadro, ahora vamos a completar el cuadro que se refiere a área y perímetro, para calcular el área multiplicamos lado por lado y para el	

<table>
<tr>
<td rowspan="2">RTA. Para ver el avance de cuántas empanadas vendió y su totalidad.

</td>
<td>perímetro sumamos los cuatro lados de cada cara, obteniendo los resultados que pusimos en la tabla.


Problema 2: Preguntas de las propiedades del cubo

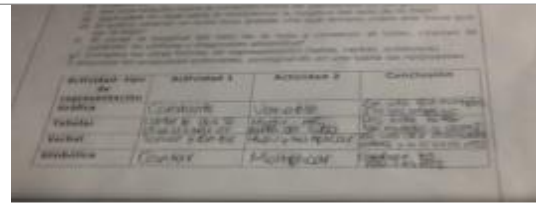
RTA. E1: podemos decir que permanece constante solamente el número de caras, pues las medidas de los lados cambian y eso hace que cambien las áreas, a mayor medida, mayor área el igual con el perímetro, pero entre ellos no hay ninguna relación numérica.</td>
<td rowspan="2"></td>
</tr>
<tr>
<td><u>Sesión 4: Problema 1</u>
Problema 1: Comparación de las gráficas obtenidas en las relaciones y propiedades del cubo

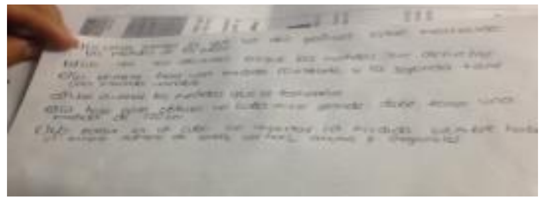
RTA. E1: Lo primero es decir que las gráficas no son similares pues una tiene una inclinación, mientras la otra es completamente plana, lo que las hace diferentes en su esencia, por eso decimos que la plana es constante y la otra es variable.

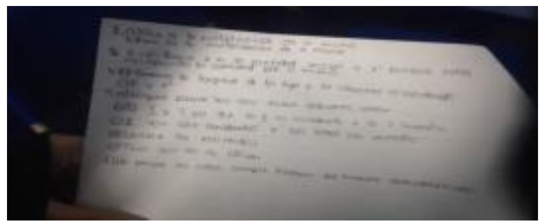
E2: Cuando se habla de pendientes, sabemos por lo que nos han explicado en clase que la pendiente es un número que determina la inclinación de la recta, entonces sabemos que la línea inclinada tiene una pendiente, la plana no debe tener pues es plana, por los que en una hay pendiente y en la otra no.

E1. Pues al cambiar la longitud del lado de la hoja varía todo, el perímetro, el área, lo que no varía es el número de aristas, vértices, diagonales y caras.

E2: eso depende qué tan grande quiero el cubo</td>
</tr>
</table>



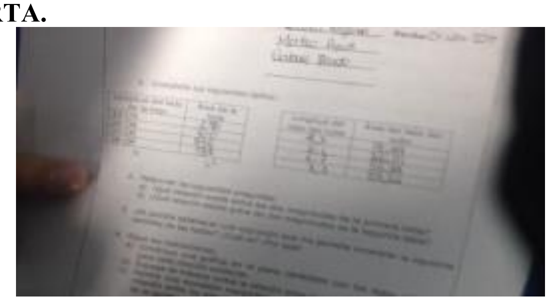


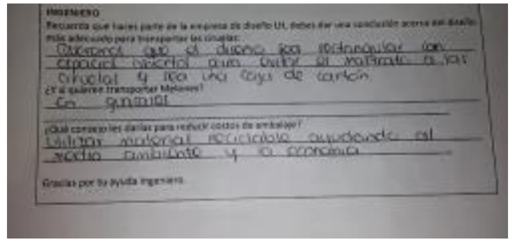


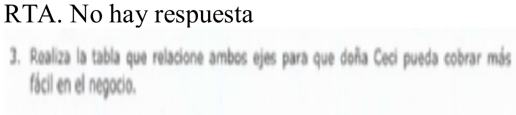
<u>Sesión 5: Problema 1- Problema 2- Problema 5</u>

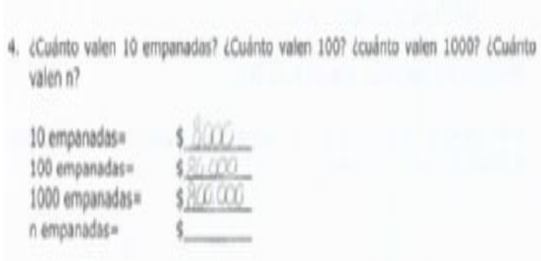
Problema 1: Completar la tabla de áreas.
Problema2: Relaciones entre las tablas.
Problema 5: Comparación de las gráficas obtenidas.

RTA.



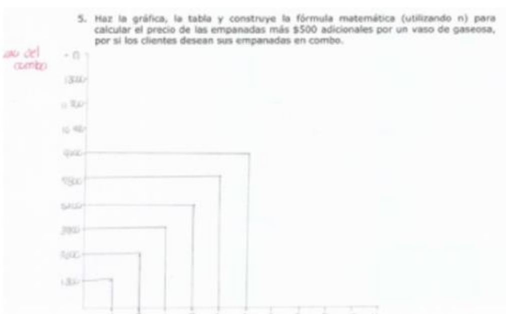
	E1: vemos que en la última guía se necesitan los mismos valores que usamos en la guía dos, los del área, y que la gráfica queda igual, sin embargo, es difícil hacer esa gráfica porque los valores a comparar son muy grandes.  INGENIERO Gracias por tu ayuda ingeniero.	

INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO	ENTREVISTA CLÍNICO CRÍTICA
<u>*Problema # 4: preguntas 3, 4*</u> 3. Realiza la tabla que relaciona ambos ejes para que doña Ceci pueda cobrar más fácil en el negocio. RTA. No hay respuesta  3. Realiza la tabla que relacione ambos ejes para que doña Ceci pueda cobrar más fácil en el negocio. 4. ¿Cuánto valen 10 empanadas? ¿Cuánto valen 100? ¿Cuánto valen 1000? ¿Cuánto valen n? RTA. 10 empanadas: $8.000 100 empanadas: $ 80.000 1000 empanadas: $ 800.000 N empanadas: no hay respuesta	P1. ¿Por qué no elaboró la tabla correspondiente a relacionar los ejes de la gráfica de la actividad de las empanadas de doña Ceci? RTA. Pues, por pereza, porque era fácil, era poner 1 empanada y al frente en el cuadrito $800, abajo, dos empanadas y al frente el valor que sería $1.600, y así con cada valor que aparecía entonces quedaba un atabla de cinco filas donde se ponen cada valor y la cantidad correspondiente, pero… no sé me dio pereza o creo que no me alcanzó el tiempo, pero daba una tabla como las que vimos en clase alguna vez (Risas). P2. ¿Qué tuvo en cuenta para poder hallar el valor de 10, 100 y 1000 empanadas? RTA. Pues así como uno hace cuando va a la tienda, multiplica, si compro bom bom bunes, si uno vale 300, y compro cinco, pues multiplico tres por cinco, eso me da quince, es decir, mil quinientos, y así mismo pasa con las empanadas. P3. ¿Por qué no escribió el valor para n empanadas? ¿De qué manera hubiera quedado? RTA. Pues, si aplico lo que dije anteriormente, habría que multiplicar 800 por n…pero no estoy seguro, por eso no puse la respuesta, pensaría que es así.

<table>
<tr>
<td>
4. ¿Cuánto valen 10 empanadas? ¿Cuánto valen 100? ¿cuánto valen 1000? ¿Cuánto valen n?

10 empanadas= $ 8000
100 empanadas= $ 80.000
1000 empanadas= $ 800.000
n empanadas= $______</td>
<td></td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<th>INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO</th>
<th>SECUENCIA
SESIONES</th>
<th>ENTREVISTA
CLÍNICO CRÍTICA</th>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3"><u>Problema 4: pregunta 5</u>


</td>
<td><u>Sesión 2: problema 4</u>
4. Realice la gráfica del problema correspondiente (relaciones del cubo).

RTA. Al graficar vemos que se sigue obteniendo una línea recta pero esta tiene inclinación, no como la de las relaciones del cubo, esa era totalmente horizontal.</td>
<td rowspan="3">P1. ¿Qué tuvo en cuenta para elaborar la gráfica de las empanadas al anexar el combo?
RTA. Pues como dice que la empanada vale $800, y en combo con gaseosa sube $500, entonces sumé y da $1.300, ese sería el valor de una empanada en combo, el de dos empanadas sería $1.300 x 2 eso es $2.600, el de tres $3.900, entonces en la gráfica ubiqué los puntos tal cual como está en la gráfica que está al principio del problema y con la que comienza todo.

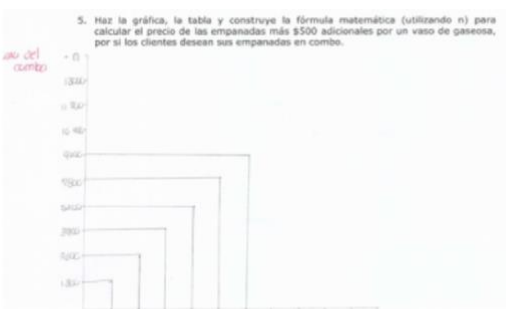
P2. ¿Hizo una tabla o tuvo en cuenta una ecuación para hacer la gráfica?
RTA. No, pues tabla como tal no, supongo que la hice en la mente, es decir, fui calculando
Los valores y los fui poniendo en relación con la cantidad de empanadas que compraba, pues… supongo que sí, pude haber hecho una tabla; fórmula pues cuando uno hace lo mismo, o sea, suma $500 y multiplica por el total de empanadas el valor de un combo, siempre hace lo mismo, pero no es que use una fórmula o lo tenga en cuenta, simplemente lo hace como un proceso, para llegar a la respuesta.

P3. ¿Qué tuvo en cuenta para elaborar la gráfica de las relaciones y las propiedades del cubo?
RTA. En la del cubo, escogí una de las medidas para compararlas con los lados, como siempre daba lo mismo, cogimos las aristas, para un cubo de lado 4 centímetros, siempre tengo 4 aristas en una cara y 12 en total, lo mismo pasa para un cubo de lado 5, un cubo de lado 6 y así, la profe nos dijo que esas se llamaban constantes en clase, entonces siempre da para una cara 4 y para todas 12, da una recta</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Sesión 3: problema 3</u>
3. Realice la gráfica del problema correspondiente (propiedades del cubo)

RTA. Podemos decir que la gráfica sería: 4 por la medida de los lados, para hallar el perímetro y lado por lado para hallar el área</td>
</tr>
<tr>
<td><u>Sesión 4: problema 1</u>

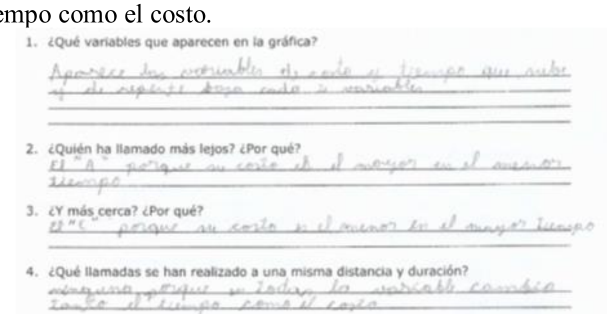
RTA. Cuando se habla de pendientes, sabemos por lo que nos han explicado en clase que la pendiente es un número que determina la inclinación de la recta, entonces sabemos que la línea inclinada tiene una pendiente, la plana no debe tener pues es plana, por los que en una hay pendiente y en la otra no.</td>
</tr>
</table>

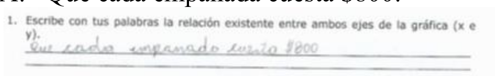
		horizontal, en las propiedades, para el cubo de lado 4, el área es 16 y el perímetro también, luego para el cubo de lado 5 el área es 25 y el perímetro 20, entonces en una gráfica pusimos cada área con su lado, nos daba una recta, y en la del perímetro lo mismo, cada perímetro con su lado, nos daba otra recta, pero a medida que el lado es más grande, también es más grande tanto el área como el perímetro, sobre todo el área, por eso, dan rectas diferentes, aunque inclinadas pero diferentes, porque no consideran los mismos números. En la última vimos valores muy grandes, nos dio pereza hacerla, sin embargo, ahora que lo pienso son los mismos valores del área, menos mal no la hicimos hubiera quedado la misma recta y que bobada (risas)
	<u>*Sesión 5: Problema 3, 4 ,5*</u> **RTA.** E1: vemos que en la última guía se necesitan los mismos valores que usamos en la guía dos, los del área, y que la gráfica queda igual, sin embargo, es difícil hacer esa gráfica porque los valores a comparar son muy grandes	

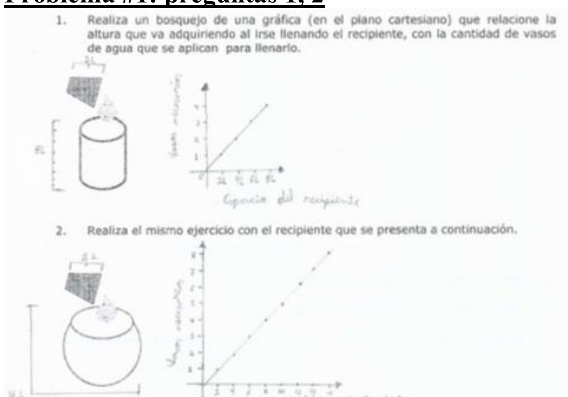
INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO	SECUENCIA SESIONES	ENTREVISTA CLÍNICO CRÍTICA
<u>*Problema # 4: preguntas 3, 5*</u> 3. Realiza la tabla que relaciona ambos ejes para que doña Ceci pueda cobrar más fácil en el negocio. RTA. No hay respuesta 3. Realiza la tabla que relacione ambos ejes para que doña Ceci pueda cobrar más fácil en el negocio. 	<u>*Sesión 2: problema 4*</u> 4. Realice la gráfica del problema correspondiente (relaciones del cubo). *RTA.* Al graficar vemos que se sigue obteniendo una línea recta pero esta tiene inclinación, no como la de las relaciones del cubo, esa era totalmente horizontal.	P1. Cuando realiza las gráficas ¿Tiene en cuenta las tablas?, ¿De qué manera estas determinan la gráfica? RTA. pues es que cuando uno gráfica, tiene que tener valores para ubicar en el plano, y los valores que ubica son precisamente los de las tablas, en todas las gráficas, es como pasar de una escritura a otra, de inglés a español o algo así, hablar el idioma gráfico, luego el de la tabla, luego le piden a uno una fórmula para saber qué fue lo que hizo, para mí, esa es la más difícil, es como el punto de llenar los recipientes de agua, como no tenemos números no sabemos qué hay que contestar, en el caso de las fórmulas es igual, uno sabe que tiene que hacer, uno sabe cómo hacerlo pero es más difícil construir una fórmula para saber siempre cuál es el número siguiente en la tabla, digamos que lo máximo que uno hace es pasar de la tabla al plano, seguir sacando valores para la tabla, escribir si aumentan o disminuyen y cuánto, y si acaso mencionar con palabras cuál es la relación
	<u>*Sesión 3: problema 3*</u> 3. Realice la gráfica del problema correspondiente (propiedades del cubo) RTA. Podemos decir que la gráfica sería: 4 por la medida de los lados, para hallar el perímetro y lado por lado para hallar el área	
	<u>*Sesión 4: problema 1*</u> RTA. Cuando se habla de pendientes, sabemos por lo que nos han explicado en clase que la pendiente es un número que determina la inclinación de la recta, entonces sabemos que la línea inclinada tiene una pendiente, la plana no debe tener pues es plana, por los que en una hay pendiente y en la otra no.	

	Sesión 5: problema 3, 4, 5 RTA. E1: vemos que en la última guía se necesitan los mismos valores que usamos en la guía dos, los del área, y que la gráfica queda igual, sin embargo, es difícil hacer esa gráfica porque los valores a comparar son muy grandes	entre los valores de la tabla o de la gráfica, a veces se llega a la fórmula.

Anexo M. Entrevista semi-estructurada # 1- Estudiante alto.

INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO	SECUENCIA SESIONES	ENTREVISTA CLÍNICO CRÍTICA
Problema # 2: Preguntas 1, 2, 3, 4 *Situación de la llamada* 1. ¿Qué variables aparecen en la gráfica? RTA: Aparece la variable de costo y tiempo que sube y de repente baja cada dos valores. 2. ¿Quién ha llamado más lejos? ¿Por qué? RTA: La "A" porque su costo es el mayor en el menor tiempo. 3. ¿Y más cerca? ¿Por qué? RTA: El "E" porque su costo es el menor en el mayor tiempo 4. ¿Qué llamadas se han realizado a una misma distancia y duración? RTA: Ninguna porque en todas, la variable cambió tanto el tiempo como el costo.  	No hay preguntas que refieran este nivel, es decir, no hay preguntas en las que el estudiante requiera describir si existe una relación entre variables sin saber, cuál es, siempre debe saber tanto la cantidad como la dirección del cambio entre los valores de entrada y salida.	P1. ¿Por qué el tiempo y el costo son variables en la situación de las llamadas? RTA: Porque ambas cambian a partir de los distintos valores que toma, además parece que bajara siempre dos valores, como si la escala fuera de a dos. P2. ¿La ubicación de los puntos nos dice que existe una relación entre las llamadas variables, es decir, una depende de la otra para cambiar? RTA. Pues al estar en el mismo plano, requiere que los dos valores se muevan, aumenten o disminuyan, como son costo y valor, aumentan, a mayor costo, es porque duró más tiempo hablando, igual con la distancia, si llamó más lejos, pues es más caro, entonces cambian al tiempo. P3. ¿Qué tendría que aparecer en el plano para decir que se hicieron dos llamadas iguales? RTA. Pues los más lógico es que dijera algo así como que A es igual a F, siendo esos dos puntos, serían dos puntos iguales. P4. ¿Cuándo hace la relación entre el costo de las empanadas y la cantidad, encuentra que siempre hay un incremento constante?

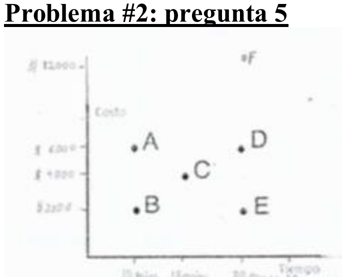
<table>
<tr>
<td>Problema # 4: Pregunta 1
Situación de las empanadas
1. Escribe con tú palabras la relación existente entre ambos ejes de la gráfica (X e Y)
RTA: Que cada empanada cuesta $800.
</td>
<td></td>
<td>RTA. Pues siempre vale ochocientos, eso quiere decir, que siempre aumenta lo mismo, eso sería un incremento constante como la profe dice.</td>
</tr>
</table>

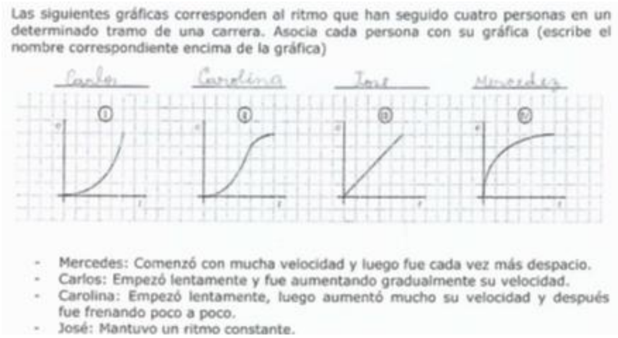
<table>
<tr>
<th>INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO</th>
<th>ENTREVISTA
CLÍNICO CRÍTICA</th>
</tr>
<tr>
<td>Problema #1: preguntas 1, 2
</td>
<td rowspan="2">P1. ¿Por qué elaboró esa gráfica para la situación 1 y 2 (llenar recipientes con agua)?
RTA. Tomé las medidas del recipiente, en el papel, e hice un estimado a escala mayor, con eso, determiné cuánta agua se necesita para llenar cada recipiente
Entonces es más sencillo si tienen valores específicos.

P2. ¿Por qué ubicó el punto F en esa posición?
RTA. Es que como dije antes, se necesita tener valores para saber cuál es el mayor y cuál es el menor, tanto en costo como en duración, entonces el que está más arriba y más a la derecha es el que se considera como mayor en costo y duración, y ese punto que puse allí cumple esa condición.

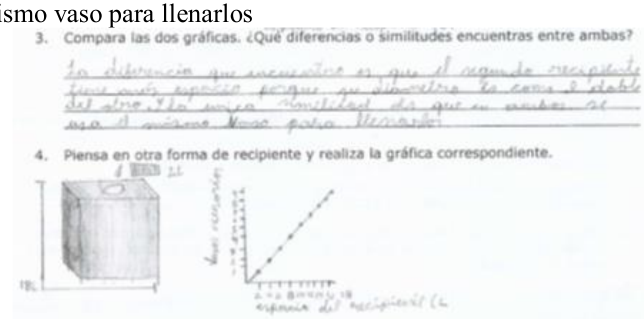
P3. ¿Es decir, que podemos opinar que las variables tienen una dirección de aumento o disminución según las condiciones que se nos presentan en cada situación?

RTA. En este caso si, a mayor costo, más duración a menor costo, menor duración, puede haber una en la que no pase nada.

P4. ¿Si no se asignan valores en las actividades de los recipientes y en la de las llamadas, no es posible responder las preguntas?
RTA. Probablemente sí, pero es más sencillo con números, pues estos nos permiten comparar y determinar si crece, o decrece, además de cuánto sube o cuánto baja, para saber si existe una relación entre los valores.</td>
</tr>
<tr>
<td>Problema #2: pregunta 5
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Problema # 3
</td>
<td>P5. Para las gráficas de la situación de los corredores, ¿Cuál fue el análisis que hizo para asignar cada nombre?

RTA. Es que como abajo decía las características de cada corredor, era tener eso en cuenta, si decía que corría rápido, la gráfica sube en Y, si decía que se mantenía estable no era curva, porque estable quiere decir que tiene un ritmo específico, que avanza pero siempre a la misma cantidad, entonces no había curvas que mostraran cambios de velocidad o que el señor se detuviera.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<th>INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO</th>
<th>SECUENCIA SESIONES</th>
<th>ENTREVISTA CLÍNICO CRÍTICA</th>
</tr>
<tr>
<td><u>Problema # 1: preguntas 3,4</u>
Situación de las botellas de agua
3. Observa las dos gráficas. ¿Qué diferencias o similitudes encuentras entre ambas?
RTA. –La diferencia que encuentro es que el segundo recipiente tiene más espacio porque su diámetro es como el doble del otro y la única similitud es que en ambos se usa el mismo vaso para llenarlos
</td>
<td><u>Sesión 4: Problema 1</u>
Problema 1: Comparación de las gráficas obtenidas en las relaciones y propiedades del cubo

RTA. E1: nos toca enumerar las gráficas, la que obtuvimos en la actividad de área es similar a la que obtuvimos en el perímetro pues ambas comienzan en cero y son continuas.

E2: al ser continuas podemos tomar cualquier valor de la hoja, ya sea decimal o entero y encontraremos un área o perímetro asignado para esta.

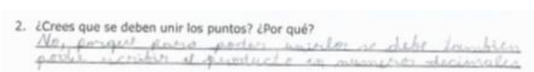
E3: las diferentes son la1, 2, 3, 6 y 7 que son las de número de vértice, de lados, de diagonales, el área vrs la longitud pues todas son discontinuas pero inician desde valores distintos

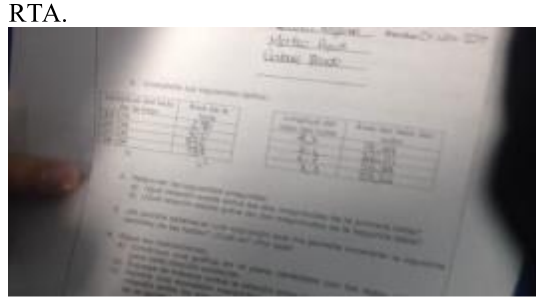
E1: Aunque son similares entre ellas, son distintas a las primeras no?

E3: Si pero deben tener características parecidas para que sean similares</td>
<td>P1. ¿De qué manera llega a la conclusión que el recipiente dos tiene mayor diámetro que el recipiente uno?
RTA. Porque tomé medidas con la regla y el dos es más grande que el uno, o sea, tiene más diámetro.

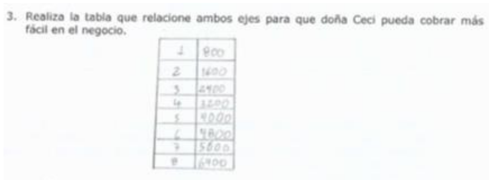
P2. ¿Por qué afirma que el primer recipiente necesita más cantidad de agua para llenarse?
RTA. Por lo mismo del diámetro, al tener un diámetro mayor, necesita más agua para ser llenado.

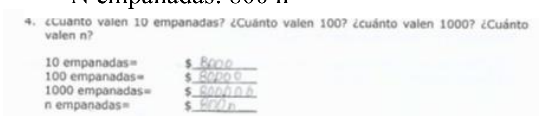
P3. ¿De qué manera completó las tablas?
RTA. La primera, contamos los valores que nos pedía, por ejemplo para las aristas, contamos cuántas había en la primera cara, luego fuimos acumulando, en la primera cara hay 4, más dos de la segunda cara 6, más dos de la tercera cara 8, haciendo un crecimiento de tipo constante, mostrando que varía, sin embargo, siempre la cantidad de caras es la misma sin importar las medidas del cubo, igual que los otros valores: aristas, diagonales..., en eso si son constantes, para la</td>
</tr>
</table>

Problema # 4: Pregunta 2 Situación de las empanadas 2. ¿Crees que se deberían unir los puntos? ¿Por qué? RTA. No, porque para poder unirlos se debe también poder escribir el producto en números decimales  2. ¿Crees que se deben unir los puntos? ¿Por qué? No, porque para poder unirlos se debe también poder escribir el producto en números decimales	E2: cuando se refiere a las pendientes es … E1: Yo creo que son los puntos de corte o más bien, desde dónde comienza, entonces podemos decir que todas comienzan desde puntos diferentes y esa sería la variación E1: En todos los cubos la cantidad de aristas, las caras, los vértices y las diagonales no cambian entonces sólo cambiaría el área y el perímetro E4: Claro porque esos si dependen de las medidas de la hoja E1: Jajajajaja, pues más grande, eso depende de lo que quiera profe,… (Risas) E2: No, esa siempre es constante al igual que las caras y las aristas	segunda tabla usamos la fórmula que sabíamos, para área es multiplicar lado por lado y para perímetro el valor de un lado por cuatro, y así completamos la tabla. P4. ¿Es decir, que no son constantes los valores en las tablas? RTA. Pues no, son constantes para cualquier medida de cubo, pero no siempre es el mismo número porque es acumulativo P5. ¿Por qué es acumulativo? RTA. Porque va a aumentando a medida que añadimos otra cara para contar, si se añaden caras, también se deben añadir lados, en este caso, aristas, vértices, diagonales y así, hasta contarlas todas. P6. ¿Por qué no cree que se deban unir los puntos en el problema de las empanadas? RTA. Porque no podemos pedir dos empanadas y media, no hay paso a número decimales, entonces no se deben unir, si los unimos, estamos diciendo que existen tres empanadas punto 2, y eso no es lógico. P7. En la tabla de las propiedades del cubo, afirmó que varían los valores porque los lados también varían, ¿Hay alguna relación entre esas variaciones? RTA. Pues la relación es la fórmula que se usa para encontrarlos, en el caso del área, lado por lado es la relación, en el caso del perímetro, lado por cuatro es la relación. P8. Al analizar las gráficas, ¿Es posible que sean similares sólo por ser rectas? RTA. No, deberían tener los mismos valores, aunque esto no va a pasar, de pronto si analizamos un cubo con otro cubo, pues

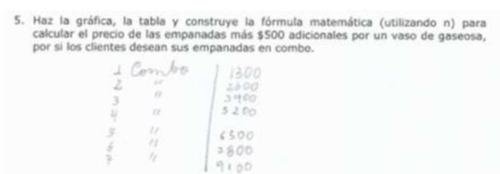
		tienen las mismas caras, los mismos vértices, pero un cubo analizado desde su área y su perímetro varía respecto a otro, tienen que ser iguales en sus lados para que exista relación. P8. ¿Por qué no realizó la gráfica de la última guía referente a longitudes y áreas? RTA. Es que era la misma de la guía dos, entonces es perder el tiempo.
	<u>*Sesión 5: Problema 1- Problema 2- Problema 5*</u> Problema 1: Completar la tabla de áreas. Problema2: Relaciones entre las tablas. Problema 5: Comparación de las gráficas obtenidas. RTA.  E1: En esta guía se necesitan los valores de la guía del área y del volumen del cubo, pues nosotros creemos que al ser los mimos valores, la gráfica es la misma, y al comparar, pues quedan las mismas descripciones de la comparación que hicimos en la guía dos.	

<table>
<tr><th>INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO</th><th>ENTREVISTA CLÍNICO CRÍTICA</th></tr>
<tr><td>
<u>Problema # 4: preguntas 3, 4</u>

3. Realiza la tabla que relaciona ambos ejes para que doña Ceci pueda cobrar más fácil en el negocio.
RTA.

3. Realiza la tabla que relacione ambos ejes para que doña Ceci pueda cobrar más fácil en el negocio.
1 | 800
2 | 1600
3 | 2400
4 | 3200
5 | 4000
6 | 4800
7 | 5600
8 | 6400

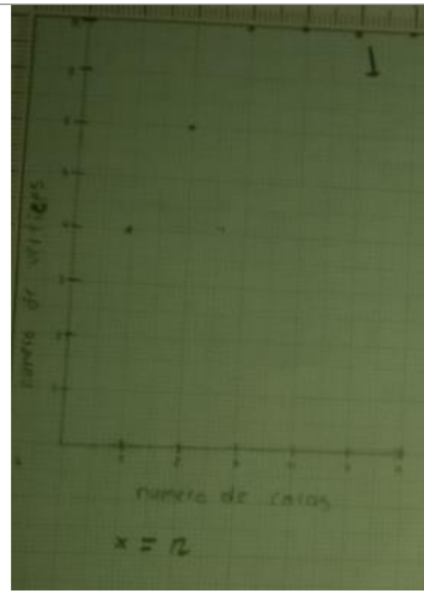
4. ¿Cuánto valen 10 empanadas? ¿Cuánto valen 100? ¿Cuánto valen 1000? ¿Cuánto valen n?
RTA. 10 empanadas: $8.000
100 empanadas: $ 80.000
1000 empanadas: $ 800.000
N empanadas: 800 n

4. ¿Cuánto valen 10 empanadas? ¿Cuánto valen 100? ¿cuánto valen 1000? ¿Cuánto valen n?
10 empanadas= $ 8000
100 empanadas= $ 80000
1000 empanadas= $ 800000
n empanadas= $ 800 n
</td><td>
P1. ¿Qué tuvo en cuenta para elaborar la tabla correspondiente a relacionar los ejes de la gráfica de la actividad de las empanadas de doña Ceci?
RTA. Es que es fácil, solamente era escribir en dos columnas los valores que tenía la gráfica, en X, que corresponde a la cantidad de empanadas, se ponen los números, y en Y que corresponden al costo de las empanadas, se pone el valor según la cantidad, multiplicando siempre por 800, si uno no se los supiera, pero como están en la gráfica solamente es transcribir

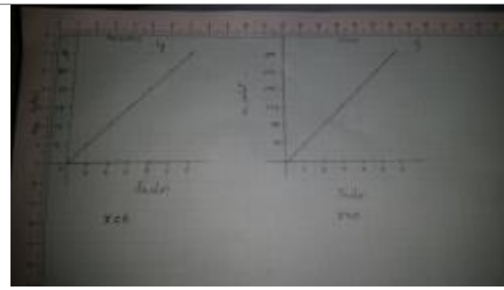
P2. ¿Qué tuvo en cuenta para poder hallar el valor de 10, 100 y 1000 empanadas?
RTA. Se multiplica el valor de las empanadas, en este caso 800, por las que nos dicen en la hoja, para n empanadas será multiplicar el valor por 800, sin importar que número sea representado por n, es como la fórmula general.
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO</th><th>SECUENCIA
SESIONES</th><th>ENTREVISTA
CLÍNICO CRÍTICA</th></tr>
<tr><td>
<u>Problema 4: pregunta 5</u>

5. Haz la gráfica, la tabla y construye la fórmula matemática (utilizando n) para calcular el precio de las empanadas más $500 adicionales por un vaso de gaseosa, por si los clientes desean sus empanadas en combo.
1 Combo | 1300
2 " | 2600
3 " | 3900
4 " | 5200
5 " | 6500
6 " | 7800
7 " | 9100
</td><td>
<u>Sesión 2: problema 4</u>
4. Realice la gráfica del problema correspondiente (relaciones del cubo).

RTA. Realizan una gráfica relacionando número de caras vrs número de vértices, otra relacionando número de caras con diagonales, otra con número de caras y aristas
</td><td>
P1. ¿Qué tuvo en cuenta para elaborar la tabla de las empanadas al anexar el combo?
RTA. Siempre al valor de una empanada se suma $500, que es el valor de una gaseosa, creando un combo, y esto equivale a $1.300, entonces, puse en la tabla, un combo $ 1.300, dos combos $ 2.600, y así, siempre cumpliendo la condición de sumar $500 y multiplicar por la cantidad de combos.

P2. ¿Por qué no realizó la gráfica para esta nueva tabla? ¿Cómo hubiera quedado?
</td></tr>
</table>

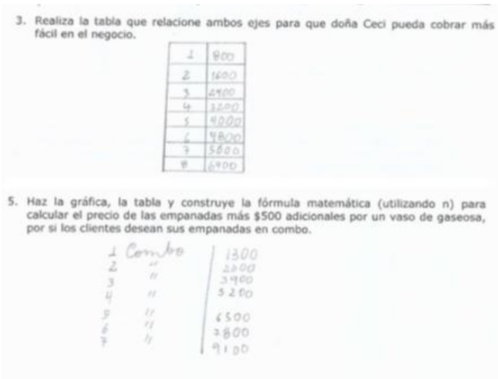
		**RTA.** No alcancé, pero sería parecida a la primera, pero con los números alterados, es decir, siempre los mismos números más 500, pues esta es la condición **P3.** ¿Qué tuvo en cuenta para elaborar la gráfica de las relaciones y las propiedades del cubo? **RTA.** En la de las relaciones, tomamos una de las medidas, por ejemplo las aristas, como eran acumulativas, siempre me daba una recta que iba subiendo, hasta ser constante pues ya había contado todas las aristas, quedaba un pedacito como una recta igual, claro que sin unir los puntos, porque no se puede decir que hay seis aristas y media o algo así; para la de las propiedades, comparé el valor de cada lado con el de su área y su perímetro, nos dio una recta en ambos casos, que también serviría para la de la quinta sesión, a pesar que eran valores grandes. **P4.** ¿Podemos decir que las rectas son similares? **RTA.** De pronto la segunda y la tercera en su forma, más no en su numeración porque no es lo mismo el área que el perímetro, la primera no, porque no es una recta, son puntos que se parecen a una recta, pero no se pueden unir por lo que ya dije.
	<u>*Sesión 3: problema 3*</u> 3. Realice la gráfica del problema correspondiente (propiedades del cubo) **RTA.** Proceden a construir el plano cartesiano de la actividad sin hacer ninguna observación de las gráficas obtenidas, tienen en cuenta la continuidad de los puntos y las magnitudes obtenidas en la tabla	

		
	<u>Sesión 4: problema 1</u> **RTA. E2:** cuando se refiere a las pendientes es … **E1:** Yo creo que son los puntos de corte o más bien, desde dónde comienza**,** entonces podemos decir que todas comienzan desde puntos diferentes y esa sería la variación Completaron la tabla llegando a la conclusión que una es constante y la otra se presenta como afín según la fórmula de la recta y = mx +b	
	<u>Sesión 5: Problema 3, 4 ,5</u> **RTA.** E1: En esta guía se necesitan los valores de la guía del área y del volumen del cubo, pues nosotros creemos que al ser los mimos valores, la gráfica es la misma, y al comparar, pues quedan las mismas descripciones de la comparación que hicimos en la guía dos.	

<table>
<tr><th>INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO</th><th>SECUENCIA
SESIONES</th><th>ENTREVISTA
CLÍNICO CRÍTICA</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">

Problema # 4: preguntas 3, 5

3. Realiza la tabla que relaciona ambos ejes para que doña Ceci pueda cobrar más fácil en el negocio.
RTA.



3. Realiza la tabla que relacione ambos ejes para que doña Ceci pueda cobrar más fácil en el negocio.

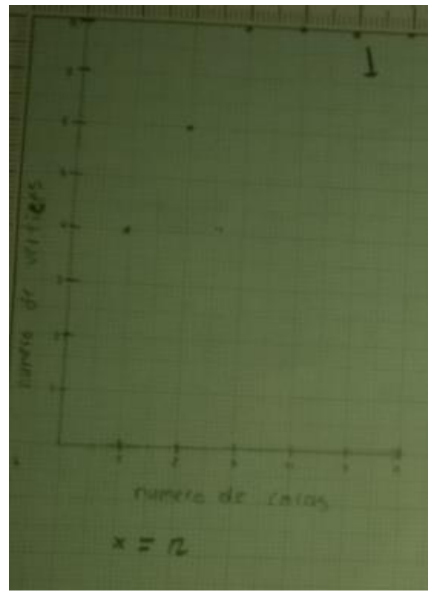
<table>
<tr><td>1</td><td>800</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1600</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2400</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3200</td></tr>
<tr><td>5</td><td>4000</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4800</td></tr>
<tr><td>7</td><td>5600</td></tr>
<tr><td>8</td><td>6400</td></tr>
</table>

5. Haz la gráfica, la tabla y construye la fórmula matemática (utilizando n) para calcular el precio de las empanadas más $500 adicionales por un vaso de gaseosa, por si los clientes desean sus empanadas en combo.

<table>
<tr><td>1 Combo</td><td>1300</td></tr>
<tr><td>2 "</td><td>2600</td></tr>
<tr><td>3 "</td><td>3900</td></tr>
<tr><td>4 "</td><td>5200</td></tr>
<tr><td>5 "</td><td>6500</td></tr>
<tr><td>6 "</td><td>7800</td></tr>
<tr><td>7 "</td><td>9100</td></tr>
</table>

</td>
<td>

Sesión 2: problema 4
4. Realice la gráfica del problema correspondiente (relaciones del cubo).
RTA.
Realizan una gráfica relacionando número de caras vrs número de vértices, otra relacionando número de caras con diagonales, otra con número de caras y aristas



</td>
<td rowspan="2">

P1. Cuando realiza las gráficas ¿Tiene en cuenta las tablas?, ¿De qué manera estas determinan la gráfica?

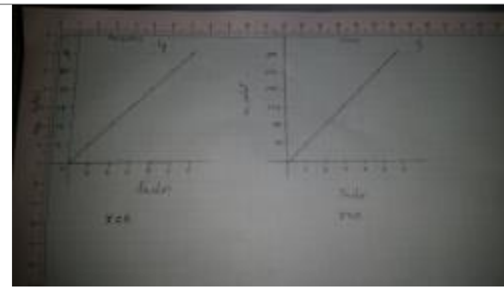
RTA. Es como transcribir todo a otra forma de representación, pero es lo mismo, es como cuando nos dicen que hagamos un dibujo de un escrito, lo mismo pero en otro tipo de comunicación, otra forma de verlo, entonces es como pasar de un medio a otro, de igual manera que si uno halla la fórmula, es lo mismo, pero escrito de distinta manera.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Sesión 3: problema 3
3. Realice la gráfica del problema correspondiente (propiedades del cubo)

RTA. Proceden a construir el plano cartesiano de la actividad sin hacer ninguna observación de las gráficas obtenidas, tienen en cuenta la continuidad de los puntos y las magnitudes obtenidas en la tabla

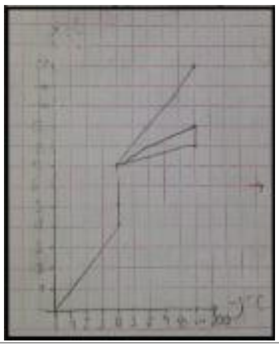
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td><u>Sesión 4: problema 1</u>

RTA.
E2: cuando se refiere a las pendientes es …
E1: Yo creo que son los puntos de corte o más bien, desde dónde comienza, entonces podemos decir que todas comienzan desde puntos diferentes y esa sería la variación
Completaron la tabla llegando a la conclusión que una es constante y la otra se presenta como afín según la fórmula de la recta y = mx +b</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td><u>Sesión 5: problema 3, 4, 5</u>
RTA. E1: En esta guía se necesitan los valores de la guía del área y del volumen del cubo, pues nosotros creemos que al ser los mimos valores, la gráfica es la misma, y al comparar, pues quedan las mismas descripciones de la comparación que hicimos en la guía dos.</td><td></td></tr>
</table>

Anexo N. Entrevista semi-estructurada #2 - Estudiante bajo.

<table>
<tr><th>PREGUNTA-RESPUESTA</th><th>ENTREVISTA</th></tr>
<tr><td>- Se presenta la tabla que relaciona dos magnitudes: longitud del lado del cubo vs número de aristas de una cara del cubo
<table>
<tr><th>x (Longitud del lado del cubo en cm)</th><th>y(número de aristas de una cara del cubo)</th></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td></tr>
</table>
</td><td>5. ¿Por qué llenó la tabla con estos valores? Porque supongo que van aumentando, entonces multipliqué por dos siempre.
6. ¿Pero en los valores del ejemplo da lo mismo? Aaaaa, entonces siempre será 4, no? Ash, entonces será el mismo… como una plana</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4</td></tr>
<tr><td>7</td><td>4</td></tr>
<tr><td>8</td><td>16</td></tr>
<tr><td>9</td><td>18</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4</td></tr>
<tr><td>…</td><td>Tengo que calcular cada uno</td></tr>
<tr><td>100</td><td>200</td></tr>
</table>
1. Complete los valores de la tabla, justifique tus respuestas
-Los que están vacíos usé: y=x*2
</td>
<td>7. Entonces, ¿Cómo quedaría la expresión o ecuación? Mmmmm sería siempre igual a 4, y = 4, porque siempre es 4.</td>
</tr>
<tr>
<td>2. ¿Cree que el número de aristas depende de la longitud del lado del cubo? ¿Por qué?
- Si porque si es más grande, tiene el doble de aristas</td>
<td>8. ¿Por qué tiene el doble de aristas? Porqueeeee… aaaa no, siempre es 4, entonces el número de aristas siempre es 4, siempre es la misma.
9. ¿Entonces, depende de la longitud del lado del cubo? No, siempre es 4
10. ¿Para cualquier cubo? si, en todos daría 4</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Haga una gráfica que relacione las dos magnitudes, ¿dónde quedaría el punto 100?
</td>
<td>11. ¿Por qué hizo esta gráfica? Pues ubiqué siempre 4, 4, 4, luego los otros valores, pero en realidad sería siempre 4, una raya, una recta vertical</td>
</tr>
<tr>
<td>4. Describa la gráfica que hizo.
Usé L=C y los puse concorde al número que les correspondía y uní los ´puntos para formar una figura</td>
<td>12. ¿Qué significa L=C? pues, lado igual a arista, lado 4 igual a 4 aristas, lado 5 igual a 4 aristas y así.
13. ¿Por qué unió los puntos? Porque siempre deben formar una figura
14. ¿Eso quiere decir que para un lado que mida 2.5 cm también el número de aristas sería 4? Pues sí, para todos los cubos sería 4</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Si debe enunciar una expresión (ecuación) para esta gráfica, ¿cuál sería? L=c ó y=x</td>
<td>15. ¿Por qué considera que esta es la ecuación que relaciona las variables? Porque, sería la ecuación para hallar los valores.
16. ¿y la ecuación que me dijo en la pregunta 3? Aaa no, sería esa, sería y=4 porque siempre es 4</td>
</tr>
</table>

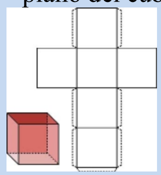
A partir de la tabla responda las siguientes preguntas:

<table>
<tr><th>PREGUNTA-RESPUESTA</th><th>ENTREVISTA</th></tr>
<tr><td>Se presenta la tabla que relaciona dos magnitudes: longitud del lado del cubo vs perímetro de una cara del cubo.
<table>
<tr><th>x (Longitud del lado del cubo en cm)</th><th>y(perímetro de una cara del cubo en cm)</th></tr>
<tr><td>4</td><td>16</td></tr>
<tr><td>5</td><td>20</td></tr>
<tr><td>6</td><td>24</td></tr>
<tr><td>7</td><td>28</td></tr>
<tr><td>8</td><td>128</td></tr>
<tr><td>9</td><td>162</td></tr>
<tr><td>5</td><td>40</td></tr>
<tr><td>…</td><td>$y=y^2*2$</td></tr>
<tr><td>100</td><td>2000</td></tr>
</table>
9. Complete los valores de la tabla, justifique tus respuestas.</td>
<td>7. ¿Por qué puso esta expresión? Creo que esa la vimos en clase… pero no estoy seguro.
8. ¿De operación matemática considera que se usa para que 4 se convierta en 16, y 5 en 20? Pues…yo pensaría que…. No, no sé.
9. ¿Cómo se halla el perímetro de una figura? Se suman los lados
10. ¿Entonces para la cara de un cubo, cómo se halla el perímetro? Se suman los lados
11. Entonces, ¿Para el primer cubo? Sería 4+4+4+4=16, aaaaa, de ahí sale el 16, para 5 sería 5+5+5+5= 20 y así
12. ¿Y la fórmula? Suma de los lados: l + l + l + l =total</td></tr>
<tr><td>10. ¿Cree que el perímetro de una cara del cubo depende de la longitud del lado del cubo? ¿Por qué? No, porque solo se usa el lado, o sea para hallar el perímetro de una cara del cubo.</td>
<td>13. ¿Por qué dice que no depende la longitud de la cara del cubo del perímetro? Pues porque no importa el lado siempre se suma
14. ¿Y si se suman los lados? Mmm, pues igual siempre se suma</td></tr>
<tr><td>11. ¿Cómo cambian los valores en la tabla? Por ejemplo, la relación que existe entre la columna de las longitudes y los perímetros (numéricamente), con la información que detectó de la pregunta anterior complete la siguiente tabla siguiendo el ejemplo que se le presenta
- Cambian gracias a la ecuación</td>
<td>15. Entonces, ¿Considera que esa ecuación es la correcta para encontrar el perímetro? No, sería l + l + l + l = total
16. ¿Y esa ecuación hace que cambien los valores? Sí, todos cambian cuando se usa la ecuación
17. ¿De qué manera completa la tabla que presenta las variaciones?
Pues, el perímetro siempre aumenta en 4, en la longitud puse los números impares la idea era determinar variación, es decir, poner número que cambian, también habría podido poner los pares

18. ¿A qué llama usted variación? Al cambio, a la diferencia entre los números
19. ¿Si observamos la variación entre las longitudes, dice que es la diferencia, entre 4 y 5 cuánto hay de diferencia? pues uno
20. ¿y entre 5 y 7? Pues dos
21. Entonces, ¿En vez de ubicar los pares o impares, podríamos poner estos valores en la columna de variación de la longitud? Mmm, pues si, pero entonces no hay variación, porque siempre las restas dan uno o dos, y eso sería como lo del cuatro que siempre es cuatro y variación es cambio, entonces tiene que haber cambio
22. ¿y por qué los impares? No sé, porque cambian.</td></tr>
</table>

x(longitud del lado en cm)	y(perímetro de una cara del cubo en cm)	Variación en longitud: Δx	Variación en perímetro: Δy	$\Delta x / \Delta y$ (Cociente)
4	16	0	4	0/4
5	20	1	4	1/4
7	28	3	4	3/3
9	162	5	4	5/4
10	200	6	4	6/4
11	242	7	4	7/4
13	336	9	4	9/4
…	…	-	-	-
100	2000	1996	4	1996/4

12. ¿Qué puede decir de la forma como cambian los valores de las variables x e y? - Cambia en base a la ecuación $y=y^2*2$	23. Entonces, ¿Definitivamente esa es la ecuación que determina el perímetro? No, es l +l + l +l, pero esa otra es la del área
13. Haga una gráfica que relacione las dos magnitudes, ¿dónde quedaría el punto 100?	24. ¿Por qué trazó esa gráfica?, porque en esa gráfica pongo los puntos 4 con 16, 5 con 20 y así. 25. ¿qué forma tiene esa gráfica? Curva porque los valores son muy grandes y para que coincida toca curvarla
14. Describa la gráfica que hizo, explique en ella dónde se encuentra Δx y dónde Δy. (Δ: Delta, es una letra griega designada para enunciar diferencia entre valores: resta) - No entendí la pregunta	26. Anteriormente dijimos que delta indicaba diferencia, con esto, ¿Dónde ubicaría Δx y dónde Δy? pues…. Los espacios que hay entre los valores, uno pone en las rectas 4, luego5, luego 6, esa diferencia es la resta, igual de 16 a 20, y las restas no son iguales, entonces por eso queda curva
15. Si debe enunciar una expresión (ecuación) para esta gráfica, ¿cuál sería? ¿Cuál es la relación entre Δx y Δy? $y=y^2*2$	27. Entonces, ¿La ecuación no es esta, es l+ l + l + l= total? Pues sí, supongo que es más adecuada que la otra, pero esa no queda con y 28. Entonces ¿no sirve? Sí, pero es mejor la otra, porque tiene y
16. Si le preguntaran ¿cuánto crece el perímetro cuando la longitud del lado aumenta en 2 centímetros, ¿qué respondería? ¿Cuánto cambia el perímetro cuando la longitud cambia en 3 cm, en 4c, y en 1 cm? ¿Qué puede decir sobre el valor que encuentra? - No entiendo la pregunta	29. Si por ejemplo, vemos en la tabla que cada vez que aumenta uno la longitud de los lados del cubo, el perímetro aumenta 4, ¿qué pasaría si aumentamos en dos el lado? Pues que el perímetro es otro, ya no es cuatro. 30. ¿Aumenta o disminuye? Mmm yo creo que aumenta, porque al usar la fórmula los valores son grandísimos
17. ¿Qué significa el número 4? ¿Dónde lo ubica en las tablas, en la gráfica y en la ecuación? -Cuatro es un número, lo ubico donde me digan	31. ¿Es posible decir que cuatro es un número que determina la variación? No porque los lados no cambian de cuatro en cuatro, esos van de dos a uno o al revés
18. Complete la siguiente tabla. Justifique sus respuestas	32. ¿De qué manera encontró los valores de la tabla? Pues, vi que en la primera columna está el lado, luego puse la tabla del cuatro porque es 16, 24, 28 y así,

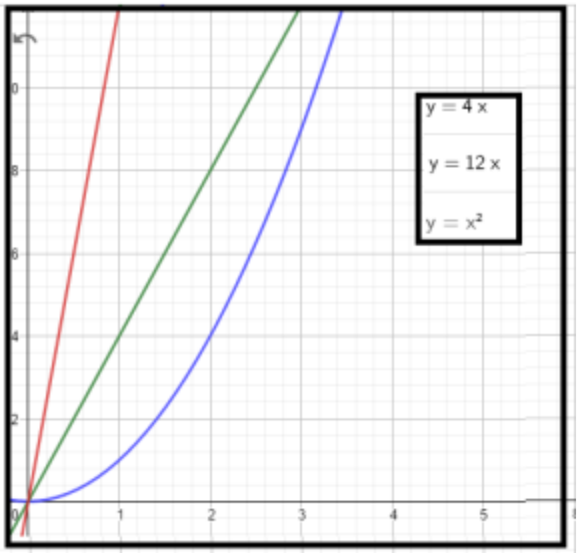
Longitud del lado del cubo en cm	Perímetro de una cara del cubo en cm	Perímetro total en cm Sugerencia : desarrollo plano del cubo 	Área total en cm^2
0,5	0,20	0,60	00,25
1	4	1	1
2,5	8,20	24,60	4,25
4	16	48	16
5	20	60	25
6	24	72	36
7	28	84	49
8	32	96	64
9	36	108	81
10	40	120	100
11	44	132	121
12	48	144	144
…	…	…	…
100	400	1200	1000

luego la tabla del 12, luego el área que es el lado al cuadrado, eso ya lo vimos en clase.

33. Si es la tabla del cuatro y del doce, es posible decir que para hallar el perímetro de una cara del cubo se multiplica el lado por cuatro y para hallar el perímetro total del cubo, multiplico el lado por doce? Pues yo arriba dije que la del perímetro era l + l + l + l = total, entonces yo creo que ponen la tabla del cuatro y la del doce porque siempre y trabajamos con cuatro y doce porque está en la tabla del cuatro.
34. ¿Entonces no es cierta la afirmación anterior? No creo, la fórmula para perímetro es suma siempre, y para área es multiplicar.

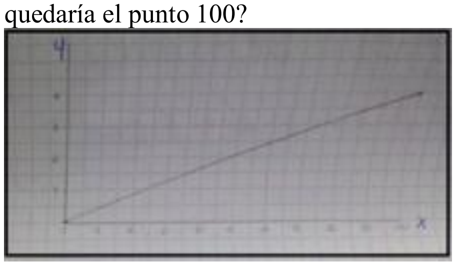
19. Para cada una de las siguientes gráficas, indique qué variables de la tabla se están relacionando.

35. ¿Qué variables se relacionan en la gráfica? Pues, los números horizontales se ponen en pareja con los verticales y esos son los puntos de cada gráfica.
36. ¿Es decir que si hay una relación? Pues, se ubican juntos en el plano, si eso es una relación, entonces si.

	
20. ¿Cuál expresión (ecuación) corresponde a cada gráfica? - y = 12x rojo - x^2 verde - y = 4x azul	37. ¿por qué relaciona las gráficas con estas ecuaciones? Porque 4x es la más pequeña, luego es la más inclinada, 12x es la más grande, debe ser la más alta y x al cuadrado va en medio
~~21.~~ ¿Qué encuentra similar y qué encuentra diferente entre estas? - El color	38. Explique su respuesta. Pues es que no hay nada igual o parecido, son tres rayas una más curva que otra, pero… aaa bueno, que todas comienzan en cero. 39. ¿y eso qué significa matemáticamente? Pues que todas parten del origen, pero de más no se cortan ni nada, no hay nada común, más que se usan colorcitos para ponerlas en el plano (risas)
22. ¿Cómo son las diferencias en los cambios? Δx y Δy -Hacia la derecha y hacia arriba	40. Explique su respuesta. Pues las gráficas se van más hacia la derecha, entonces como diferencia es resta, es el número que están inclinadas, unas más que las otras, y la de 12 va más hacia arriba que las otras.
23. Si observa las dos gráficas que son rectas, ¿por qué cree que una es más inclinada que la otra? -Porque es más grande el número	41. ¿Entonces la que tiene el doce es la más grande? Si, definitivamente es la que tiene más diferencia hacia arriba que las otras, por el doce, es la mayor
24. Puede describir con sus propias palabras, ¿Cuándo una gráfica de la relación entre dos variables es una recta? -No sabría explicarme	42. ¿De qué manera podría explicar la pregunta? No sé, porque las ecuaciones son diferentes, será recta cuando el número es grande como la de doce.

25. Qué significa para usted la afirmación "*las variables que se relacionan están coordinadas*" Porque se combinan para variar	43. ¿De qué manera se combinan? Pues en la tabla, se combinan y cambian las dos al tiempo. 44. ¿Cambia una con respecto a la otra? No creo, una tiene unos valores y la otra otros, no hay nada igual, además del cuatro que sale en todo 45. ¿Y si el cuatro sale en todo podemos decir que el cuatro es un cambio uniforme, es decir, se da siempre? No porque si fuera un cambio, sería siempre diferente de cuatro, otros números, cinco, ocho, no sé.
26. Defina partir de la afirmación anterior "*Covariación*". Enuncie un ejemplo en la vida real. -Que se coordinan para covariar, mis papás para regañarme	46. ¿Esta definición cómo surgió? Jajaja, la verdad, uní las palabra anterior y la que me dieron, pero no sé qué es covariar, es como que hartos varían, mis papás cuando me regañan lo hacen ambos al tiempo, los dos me regañan, es como ponerse de acuerdo para hacer una cosa

Anexo O. Entrevista semi-estructurada #2 - Estudiante medio.

<table>
<tr><th>PREGUNTA-RESPUESTA</th><th>ENTREVISTA</th></tr>
<tr><td>Se presenta la tabla que relaciona dos magnitudes: longitud del lado del cubo vs número de aristas de una cara del cubo
<table>
<tr><th>x (Longitud del lado del cubo en cm)</th><th>y(número de aristas de una cara del cubo)</th></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4</td></tr>
<tr><td>7</td><td>4</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4</td></tr>
<tr><td>9</td><td>4</td></tr>
<tr><td>10</td><td>4</td></tr>
<tr><td>…</td><td>-</td></tr>
<tr><td>100</td><td>4</td></tr>
</table>
Complete los valores de la tabla, justifique tus respuestas</td>
<td>1. ¿Por qué llenó la tabla con estos valores? Como se presentan varias aristas de un cubo por una de sus caras, lo que varía son la longitud de cada una de ellas, aunque tenga el mismo número de aristas, varia la medida de cada uno
2. ¿Pero en los valores del ejemplo da lo mismo? No depende, porque siempre tendría el mismo número de aristas, lo que hace que varíe es la medida del cubo en sus arista, cambiaría la longitud de las mismas.</td></tr>
<tr><td>6. ¿Cree que el número de aristas depende de la longitud del lado del cubo? ¿Por qué?
- No, siempre es 4</td>
<td>1. ¿Cuál sería la fórmula para determinar el número de aristas de cualquier cubo? Sería y = 4, porque siempre es 4 el valor, nunca cambia siempre es la misma.
2. ¿Y este depende de la longitud del lado del cubo? No, siempre es 4 para cualquier cubo</td></tr>
<tr><td>7. Haga una gráfica que relacione las dos magnitudes, ¿dónde quedaría el punto 100?

</td>
<td>3. ¿Por qué hizo esta gráfica? Pues ubiqué solamente el punto (100, 4), debí tener los otros en cuenta cierto</td></tr>
<tr><td>8. Describa la gráfica que hizo.
Sólo ubiqué el punto 100, debí ubicar los otros</td>
<td>17. ¿Eso quiere decir que para un lado que mida 2.5 cm también el número de aristas sería 4? Pues sí, para todos los cubos sería 4</td></tr>
<tr><td>9. Si debe enunciar una expresión (ecuación) para esta gráfica, ¿cuál sería? Y = 4</td>
<td>18. ¿Por qué considera que esta es la ecuación que relaciona las variables? Porque, sería la ecuación para hallar los valores.</td></tr>
</table>

A partir de la tabla responda las siguientes preguntas:

<table>
<tr><th>PREGUNTA-RESPUESTA</th><th>ENTREVISTA</th></tr>
<tr><td>Se presenta la tabla que relaciona dos magnitudes: longitud del lado del cubo vs perímetro de una cara del cubo.
<table>
<tr><th>x (Longitud del lado del cubo en cm)</th><th>y (perímetro de una cara del cubo en cm)</th></tr>
<tr><td>4</td><td>16</td></tr>
<tr><td>5</td><td>20</td></tr>
<tr><td>6</td><td>24</td></tr>
<tr><td>7</td><td>28</td></tr>
<tr><td>8</td><td>30</td></tr>
<tr><td>9</td><td>36</td></tr>
<tr><td>10</td><td>40</td></tr>
<tr><td>…</td><td>…</td></tr>
<tr><td>100</td><td>400</td></tr>
</table>
27. Complete los valores de la tabla, justifique tus respuestas.</td>
<td>47. ¿Qué operación matemática considera que se usa para que 4 se convierta en 16, y 5 en 20? Se multiplica 4 por 4, luego 4 por 5, porque la cara tiene cuatro lados y así se calcula el perímetro
48. Entonces, ¿La fórmula general sería? $y= 4x$, y esa x es el lado del cubo</td></tr>
<tr><td>28. ¿Cree que el perímetro de una cara del cubo depende de la longitud del lado del cubo? ¿Por qué? Claro, a mayor longitud del cubo, mayor perímetro</td>
<td>4. ¿Cree que el perímetro de una cara del cubo depende de la longitud del lado del cubo? ¿Por qué? Si, el perímetro aumenta a medida que la longitud del lado del cubo también, lo hace de manera uniforme
5. ¿A qué se refiere con uniforme? Que los cambios siempre son los mismos, siempre aumenta de cuatro en cuatro
6. ¿Podríamos afirmar que hay una razón constante? No sé qué es razón constante, pero si es cierto que hay un valor uniforme para toda la relación</td></tr>
<tr><td>29. ¿Cómo cambian los valores en la tabla? Por ejemplo, la relación que existe entre la columna de las longitudes y los perímetros (numéricamente), con la información que detectó de la pregunta anterior complete la siguiente tabla siguiendo el ejemplo que se le presenta
- Cambian debido a la multiplicación de 4 por el lado</td>
<td>9. De qué manera completa la tabla que presenta las variaciones? Pues, ahora que me doy cuenta, en la de las longitudes no puse el valor correcto, siempre puse uno, y a veces era dos, mmm fue descuido, bueno, el caso es que siempre hice las restas entre cada valor para determinar los deltas, y luego escribí la división pero no la hice.
10. ¿A qué llama usted variación? Al cambio, a la diferencia entre los números, la resta entre filas</td></tr>
</table>

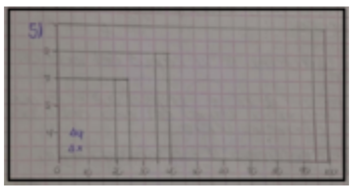
x(longitud del lado en cm)	y(perímetro de una cara del cubo en cm)	Variación en longitud: Δx	Variación en perímetro: Δy	$\Delta x / \Delta y$ (Cociente)
4	16	1	4	1/4
5	20	1	4	1/4
7	28	1	4	¼
9	162	1	4	¼
10	200	1	4	¼
11	242	1	4	¼
13	336	1	4	1/4
…	…	-	-	-
100	2000	1	4	¼

¿Es decir que existe relación entre los valores? Si claro, las variables *x* e *y* cambian sus valores dependiendo la longitud de uno de sus lados, asimismo aumenta de manera que coincide tanto el perímetro como la longitud.

30. ¿Qué puede decir de la forma como cambian los valores de las variables *x* e *y*?
- Cambia en base a la ecuación y = 4x

1. Entonces, ¿Definitivamente esa es la ecuación que determina el perímetro? si

31. Haga una gráfica que relacione las dos magnitudes, ¿dónde quedaría el punto 100?



Δx: 1
Δx: Delta de *x* puede ser distancia
Δy: Delta de *y* puede ser tiempo

Una conlleva a la otra para que se pueda hacer la operación

32. Describa la gráfica que hizo, explique en ella dónde se encuentra Δx y dónde Δy. (Δ: Delta, es una letra griega designada para enunciar diferencia entre valores: resta)
- Pues como lo puse antes, las deltas son las restas entre las operaciones, pero otra vez solo me centré en una, y quedó mal.

2. Anteriormente dijimos que delta indicaba diferencia, con esto, ¿Dónde ubicaría Δx y dónde Δy?

Δx: 1
Δx: Delta de *x* puede ser distancia
Δy: Delta de *y* puede ser tiempo
Una conlleva a la otra para que se pueda hacer la operación
Como lo escribí antes

33. Si debe enunciar una expresión (ecuación) para esta gráfica, ¿cuál sería? ¿Cuál es la relación entre Δx y Δy? Pues las restas el delta

3. ¿Por qué no hay otra relación? Porque las deltas no se relacionan

-

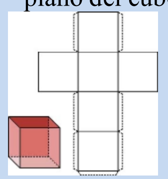
34. Si le preguntaran ¿cuánto crece el perímetro cuando la longitud del lado aumenta en 2 centímetros, qué respondería? ¿Cuánto cambia el perímetro cuando la longitud cambia en 3 cm, en 4c, y en 1 cm? ¿Qué puede decir sobre el valor que encuentra?
- Crece lo mismo que crece el lado

4. Si por ejemplo, vemos en la tabla que cada vez que aumenta uno la longitud de los lados del cubo, el perímetro aumenta 4, ¿qué pasaría si aumentamos en dos el lado? Pues que aumenta en dos también
5. ¿Aumenta o disminuye? aumenta, porque a mayor lado mayor perímetro

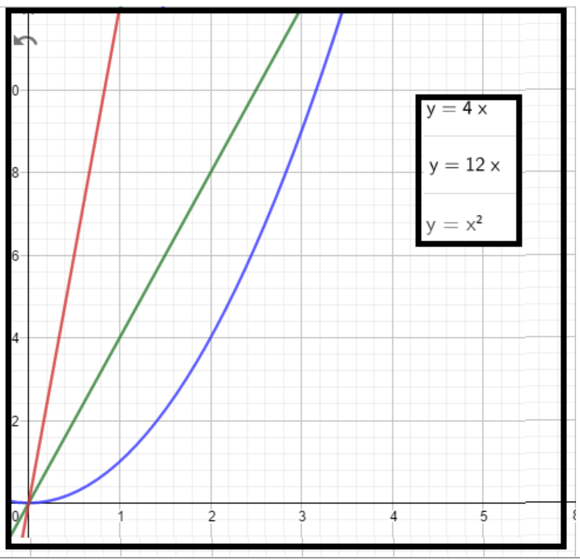
35. ¿Qué significa el número 4? ¿Dónde lo ubica en las tablas, en la gráfica y en la ecuación?
-Cuatro es el número de lados que tiene la cara del cubo, es quien determina el perímetro

6. ¿Es posible decir que cuatro es un número que determina la variación? Si claro, varía de cuatro en cuatro

36. Complete la siguiente tabla. Justifique sus respuestas

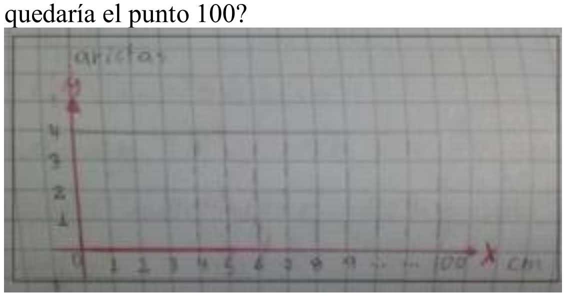
Longitud del lado del cubo en cm	Perímetro de una cara del cubo en cm	Perímetro total en cm Sugerencia : desarrollo plano del cubo 	Área total en cm^2
0,5	0,20	0,60	00,25
1	4	1	1
2,5	8,20	24,60	4,25
4	16	48	16
5	20	60	25
6	24	72	36
7	28	84	49
8	32	96	64
9	36	108	81
10	40	120	100
11	44	132	121
12	48	144	144
…	…	…	…

7. ¿De qué manera encontró los valores de la tabla? Pues, hallé perímetro y área y para las totales multipliqué por seis

100 400 1200 1000	
37. Para cada una de las siguientes gráficas, indique qué variables de la tabla se están relacionando. 	8. ¿Qué variables se relacionan en la gráfica? Los números de x y los de y 9. ¿Es decir que si hay una relación? si, al ubicarse en el plano como parejas la hay
38. ¿Cuál expresión (ecuación) corresponde a cada gráfica? - $y = 12x$ rojo - x^2 azul - $y = 4x$ verde	10. ¿por qué relaciona las gráficas con estas ecuaciones? Porque son las que corresponden con los lados
~~39.~~ ¿Qué encuentra similar y qué encuentra diferente entre estas? - Que hay dos rectas y una curva	- Entonces ¿las recta son se elevan al cuadrado?, no porque son rectas, además ya habíamos encontrado los valores para las rectas y sabíamos que iban como rectas en el plano. - ¿La inclinación de la recta depende del número? Si, a mayor número más “vertical” es - ¿Entonces, es posible determinar que 4 y 12 son razones de cambio constantes? Pues 4 es constante pero no sé qué es una razón de cambio, no estoy seguro
40. ¿Cómo son las diferencias en los cambios? Δx y Δy -son las restas	7. ¿De qué manera se combinan? Los deltas son variaciones que se complementan y determinan la gráfica

	Cambia una con respecto a la otra? Si, si una aumenta, la otra también lo hace uniformemente
41. Qué significa para usted la afirmación "*las variables que se relacionan están coordinadas*" Que una cambia respecto a la otra	
42. Defina partir de la afirmación anterior "*Covariación*". Enuncie un ejemplo en la vida real. -Sería la coordinación de dos variables que definen una relación lineal.	

Anexo P. Entrevista semi-estructurada #2 - Estudiante alto.

<table>
<tr><th>PREGUNTA-RESPUESTA</th><th>ENTREVISTA</th></tr>
<tr><td>Se presenta la tabla que relaciona dos magnitudes: longitud del lado del cubo vs número de aristas de una cara del cubo
<table>
<tr><th>x (Longitud del lado del cubo en cm)</th><th>y(número de aristas de una cara del cubo)</th></tr>
<tr><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td>5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4</td></tr>
<tr><td>7</td><td>4</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4</td></tr>
<tr><td>9</td><td>4</td></tr>
<tr><td>10</td><td>4</td></tr>
<tr><td>…</td><td>-</td></tr>
<tr><td>100</td><td>4</td></tr>
</table>
Complete los valores de la tabla, justifique tus respuestas</td>
<td>8. ¿Por qué llenó la tabla con estos valores? Las aristas del cubo son constantes, siempre son cuatro para una cara quien varía es el lado.
9. Entonces ¿Para cualquier valor es cuatro? Si, a menos que cambie la figura y le ponga más o menos lados</td></tr>
<tr><td>10. ¿Cree que el número de aristas depende de la longitud del lado del cubo? ¿Por qué?
- No depende, siempre será 4</td>
<td>1¿cuál sería la fórmula para determinar el número de aristas de cualquier cubo? Es y = 4, 4 es constante para cualquier cubo
11. ¿Y este depende de la longitud del lado del cubo? No, si dependiera variaría con él y esto no sucede pues es constante</td></tr>
<tr><td>12. Haga una gráfica que relacione las dos magnitudes, ¿dónde quedaría el punto 100?

</td>
<td>3¿Por qué hizo esta gráfica? Pues ubiqué los puntos que están en la tabla, como parejas ordenadas</td></tr>
<tr><td>13. Describa la gráfica que hizo.
Ubiqué los puntos de la tabla</td>
<td>14. ¿Eso quiere decir que para un lado que mida 2.5 cm también el número de aristas sería 4? Siempre será cuatro</td></tr>
</table>

15. Si debe enunciar una expresión (ecuación) para esta gráfica, ¿cuál sería? Y = 4	16. ¿Por qué considera que esta es la ecuación que relaciona las variables? Porque es constante el cuatro

A partir de la tabla responda las siguientes preguntas:

PREGUNTA-RESPUESTA	ENTREVISTA
Se presenta la tabla que relaciona dos magnitudes: longitud del lado del cubo vs perímetro de una cara del cubo. (ver tabla 1) 43. Complete los valores de la tabla, justifique tus respuestas.	7. ¿Qué operación matemática considera que se usa para que 4 se convierta en 16, y 5 en 20? Se multiplica 4 por cualquier lado, ya que es la cantidad de aristas que tiene una cara del cubo 8. Entonces, ¿La fórmula general sería? $y= 4x$, donde x representa el lado del cubo
44. ¿Cree que el perímetro de una cara del cubo depende de la longitud del lado del cubo? ¿Por qué? Depende pues a mayor lado del cubo, mayor perímetro	3. ¿Cree que el perímetro de una cara del cubo depende de la longitud del lado del cubo? ¿Por qué? Pues claro, si aumentamos el lado del cubo, mayor será el perímetro, siempre aumenta. 4. ¿Y siempre aumenta la misma cantidad? Si, es constante el cambio es decir, siempre va de cuatro en cuatro, es uniforme 5. ¿Podríamos afirmar que hay una razón constante? Si, hay una razón una fracción que se aplica para todos los casos
45. ¿Cómo cambian los valores en la tabla? Por ejemplo, la relación que existe entre la columna de las longitudes y los perímetros (numéricamente), con la información que detectó de la pregunta anterior complete la siguiente tabla siguiendo el ejemplo que se le presenta - Cambian debido a las variaciones (ver tabla 2)	11. ¿De qué manera completa la tabla que presenta las variaciones? Pues, aquí hay trampa, nos puso unas de uno en uno y otras de dos en dos, a ver si hacíamos plana jajajajaj, pero a mi no me engaña, igual, siempre la variación es de a uno, pues construimos cubos de todos los tamaños. 12. ¿A qué llama usted variación? A la diferencia que hay entre filas y columnas 13. ¿Es decir que existe relación entre los valores? Si claro, la columna de la longitud se convierte en el perímetro al multiplicar por cuatro, si la longitud es grande el perímetro también lo será. 14. ¿Y las restas son constantes? Si, va de uno en uno o de 4 en 4 15. Respecto al cociente ¿qué puede afirmar? Que es una fracción, por lo tanto, una razón, que nos muestra que aumenta uno en x y 4 en y

Tabla 1

x (Longitud del lado del cubo en cm)	y(perímetro de una cara del cubo en cm)
4	16
5	20
6	24
7	28
8	32
9	36
10	40
…	…
100	400

Tabla 2

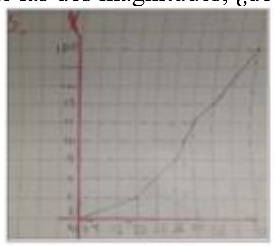
X(longitud del lado en cm)	y(perímetro de una cara del cubo en cm)	Variación en longitud: Δx	Variación en perímetro: Δy	$\Delta x/\Delta y$ (Cociente)
4	16	0	0	0
5	20	1	4	¼
7	28	2	4	¼
9	162	2	4	¼
10	200	1	4	¼
11	242	1	4	¼
13	336	2	4	¼

…	…	-	-	-
100	2000	1	4	¼

46. ¿Qué puede decir de la forma como cambian los valores de las variables x e y?

- Cambia debido a las restas entre los valores

47. Haga una gráfica que relacione las dos magnitudes, ¿dónde quedaría el punto 100?



4. ¿por qué la gráfica tiene esta forma? Por tacaño, quise usar poco espacio y no tomé los valores adecuado, debió ser una recta y quedó toda chueca, a la próxima toca usar más hoja.
5. ¿Es importante el manejo de escalas? Claro, la profe nos explicaba que es como cuando uno va a la casa de los espejos, se ve desproporcionado porque los espejos ofrecen esta ilusión, es lo mismo con la gráfica, si no uso las escalas adecuadas, tendré una gráfica desproporcionada, anormal, como en este caso
6. ¿De qué manera se ubicarían los deltas en la gráfica? Pues las restas entre los números, sería señalar las distancias en cada eje

48. Describa la gráfica que hizo, explique en ella dónde se encuentra Δx y dónde Δy. (Δ: Delta, es una letra griega designada para enunciar diferencia entre valores: resta)

- Serían las restas pero como quedó mal por las escalas, no se ven

49. Si debe enunciar una expresión (ecuación) para esta gráfica, ¿cuál sería? ¿Cuál es la relación entre Δx y Δy? La proporción entre las diferencias, el cociente

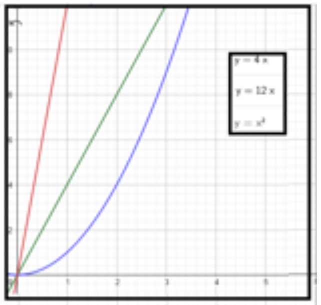
-

50. Complete la siguiente tabla. Justifique sus respuestas

Longitud del lado del cubo en cm	Perímetro de una cara del cubo en cm	Perímetro total en cm Sugerencia : desarrollo plano del cubo	Área total en cm^2
0,5	0,20	1,20	0,025
1	4	24	1
2,5	8,20	49.2	4,25
4	16	48	16
5	20	60	25
6	24	72	36
7	28	84	49
8	32	192	64
9	36	216	81
10	40	120	100
11	44	264	121

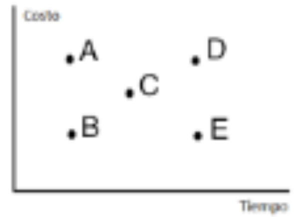
8. ¿De qué manera encontró los valores de la tabla? Para perímetro usé la fórmula *4*x*, donde *x* es el lado del cubo, para el perímetro total, multipliqué los valores de la columna del perímetro por seis porque son seis caras, para área el lado al cuadrado
9. Esta ecuación que usó ¿Es la expresión simbólica para cada situación? Pues es la fórmula general para determinar el perímetro, el perímetro total y el área de cualquier cubo
10. ¿Y cuál es la razón de cambio de cada ecuación? En la de perímetro es 4, en la de perímetro total sería 6, porque teniendo el perímetro se multiplica por seis, y en la del área… no sé, no hay un valor específico, no creo que sea el mismo lado, de pronto no tiene

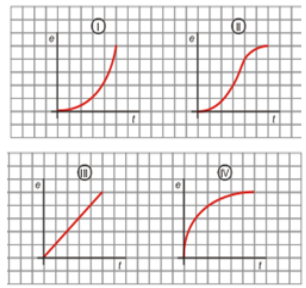
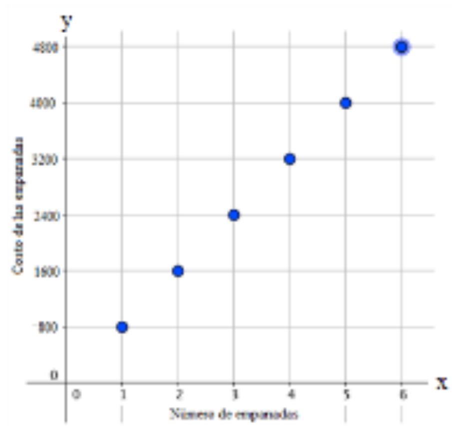
    ¿Por qué? Porque es una ecuación diferente, ni siquiera da recta.

12 48 288 144 … … … … 100 400 2400 1000	
51. Para cada una de las siguientes gráficas, indique qué variables de la tabla se están relacionando. 	11. ¿Qué variables se relacionan en la gráfica? Los valores de cada eje
52. ¿Cuál expresión (ecuación) corresponde a cada gráfica? - y = 12x rojo - x^2 azul - y = 4x verde	¿Por qué la curva no tiene razón de cambio’ Porque es multiplicativa por si misma, no hay un número constante, para que sea razón de cambio, debe haber un número constante. Esto quiere decir que la inclinación depende del número. Si, claro, a mayor número, menos inclinada ¿Entonces, es posible determinar que 4 y 12 son razones de cambio constantes? El cuatro si, el 12 supongo porque acompaña a la *x* en la ecuación
~~53.~~ ¿Qué encuentra similar y qué encuentra diferente entre estas? - Son dos rectas y una que no.	- ¿Cambia una variable con respecto a la otra? Si, por eso crecen en simultánea, y se ven restas o diferencias iguales

Anexo Q. Actividad diagnóstica. Clasificación de las preguntas según los niveles Carlson de covariación.

<table>
<tr><th colspan="2">PROBLEMA</th><th>NIVEL QUE BUSCA APRECIAR</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Problema #1: Botellas de agua</td><td>Evalúa la siguiente situación: Imagina el siguiente recipiente llenándose de agua:
1. Realiza un bosquejo de una gráfica (en el plano cartesiano) que relacione la altura que va adquiriendo al irse llenando el recipiente, con la cantidad de vasos de agua que se aplican para llenarlo.
</td><td rowspan="2"><u>Nivel 2 (N2). Dirección</u>
En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra, (AM) haciendo la construcción de una línea recta creciente, y realizando una verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida, considerando los cambios del valor de entrada (describe que existe una dirección en el cambio entre los valores en x e y).</td></tr>
<tr><td>2. Realiza el mismo ejercicio con el recipiente que se presenta a continuación.
</td></tr>
<tr><td>3. Compara las dos gráficas. ¿Qué diferencias o similitudes encuentras entre ambas?</td><td rowspan="2"><u>Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa</u>
En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra, (AM) localizando puntos y construyendo rectas secantes, además de verbalizar el cambio que hay entre el valor de salida y el de entrada (describe que existe una dirección y una cantidad específica en el cambio entre los valores en x e y).</td></tr>
<tr><td>4. Piensa en otra forma de recipiente y realiza la gráfica correspondiente.</td></tr>
</table>

Problema # 2: El costo de una llamada telefónica	En algunas tarifas telefónicas, el costo de una llamada depende de la duración de la comunicación y la distancia a la que se llama. La siguiente gráfica representa las llamadas de 5 personas.  Observa la gráfica y responde las siguientes preguntas. 1. ¿Qué variables que aparecen en la gráfica?	**<u>Nivel 1 (N1). Coordinación</u>** En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable, (AM) haciendo una descripción de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (describe que existe una relación entre las variables sin saber cuál es)
	2. ¿Quién ha llamado más lejos? ¿Por qué?	**<u>Nivel 1 (N1). Coordinación</u>** En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable, (AM) haciendo una descripción de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables. (describe que existe una relación entre las variables sin saber cuál es)
	3. ¿Y más cerca? ¿Por qué?	
	4. ¿Qué llamadas se han realizado a una misma distancia y duración?	
	5. ¿Dónde situarías una llamada efectuada al mismo lugar y distancia que la llamada A, pero del doble de duración de ésta? Coloca el punto F en el plano anterior para indicar tu respuesta.	**<u>Nivel 2 (N2). Dirección</u>** En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra, (AM) haciendo la construcción de una línea recta creciente, y realizando una verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida, considerando los cambios del valor de entrada. (describe que existe una dirección en el cambio entre los valores en x e y)
Problema # 3: La carrera de atletismo	Las siguientes gráficas corresponden al ritmo que han seguido cuatro personas en un determinado tramo de una carrera. Asocia cada persona con su gráfica (escribe el nombre correspondiente encima de la gráfica)	**<u>Nivel 2 (N2). Dirección</u>** En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra, (AM) haciendo la construcción de una línea recta creciente, y realizando una verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida, considerando

	 -Mercedes: Comenzó con mucha velocidad y luego fue cada vez más despacio. -Carlos: Empezó lentamente y fue aumentando gradualmente su velocidad. -Carolina: Empezó lentamente, luego aumentó mucho su velocidad y después fue frenando poco a poco. -José: Mantuvo un ritmo constante.	los cambios del valor de entrada (describe que existe una dirección en el cambio entre los valores en x e y).
Problema #4: Las empanadas de doña Ceci	Doña Ceci decide poner un negocio de empanadas y para ilustrar los precios, presenta la siguiente gráfica a sus clientes:  **1.** Escribe con tus palabras la relación existente entre ambos ejes de la gráfica (x e y).	**<u>Nivel 1 (N1). Coordinación</u>** En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable, (AM) haciendo una descripción de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (describe que existe una relación entre las variables sin saber cuál es).
	2. ¿Crees que se deben unir los puntos? ¿Por qué?	**<u>Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa</u>** En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio

		en una variable con cambios en la otra, (AM) localizando puntos y construyendo rectas secantes, además de verbalizar el cambio que hay entre el valor de salida y el de entrada (describe que existe una dirección y una cantidad específica en el cambio entre los valores en x e y)
	3. Realiza la tabla que relacione ambos ejes para que doña Ceci pueda cobrar más fácil en el negocio.	**<u>Nivel 4 (N4). Razón promedio</u>** En el nivel de la razón promedio las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada, (AM) construyendo rectas secantes contiguas al dominio y verbalizando la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada), mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada (describe que existe una dirección y una cantidad específica con un valor constante en el cambio entre los valores en x e y). **AM1.** Reconoce elementos significativos en un sistema de representación. **AM2.** Realiza conversiones entre distintos tipos de representaciones teniendo en cuenta los elementos significantes. *-Representación Tabular*, El estudiante debe reconocer: a) Relación fila- fila. b) Relación columna –columna. c) Relación columna- fila /fila- columna. d) Aumento o disminución de la relación según una cantidad numérica específica y constante. *-Representación Gráfica*, El estudiante debe reconocer: a) Puntos como parejas ordenadas en el plano. b) Ubicación de los ejes x como horizontal e y como vertical. *-Representación Verbal*, El estudiante debe reconocer: a) La relación entre los valores de la variable.
	4. ¿Cuánto valen 10 empanadas? ¿Cuánto valen 100? ¿cuánto valen 1000? ¿Cuánto valen n? 10 empanadas= $_________ 100 empanadas= $_________ 1000 empanadas= $_________ n empanadas= $_________	
	5. Haz la gráfica, la tabla y construye la fórmula matemática (utilizando n) para calcular el precio de las empanadas más $500 adicionales por un vaso de gaseosa, por si los clientes desean sus empanadas en combo.	

		b) Expresarla por medio de palabras que se ajusten al contexto. *-Representación Simbólica*, El estudiante debe reconocer: a) La cantidad de aumento o disminución entre fila-columna que denominará pendiente. b) b) A partir de la gráfica o de la tabla, ubicará el punto de partida y le llamará punto de corte con el eje y.

Anexo R. Instrumento sesión 1 –El fruver de doña Ceci (ingeniero). Clasificación de las preguntas según los niveles Carlson de covariación.

PROBLEMA		NIVEL QUE BUSCA APRECIAR
Problema # 1: empaque de la fruta	Doña Ceci tiene un fruver y en él distribuye ciruelas negras, debe transportarlas en camiones en cajas individuales, teniendo en cuenta que la fruta no se puede magullar. Con base a lo anterior contesta las siguientes preguntas: 1. ¿Cuál es el empaque más adecuado? 2. ¿Si lo debo poner en cajas para trasportarlo en camiones, cómo lo haría para no magullar la fruta? La empresa de diseño LH propone como figura para empacar el cubo y diseña en cubo como el que se te compone a continuación: El diseñador Urquijo cree que se necesitan establecer ciertas relaciones y propiedades del cubo a partir de sus medidas, para poder dar la repuesta más adecuada en cuanto al diseño, es por esto que genera dos tablas para que sus ingenieros en prácticas tomen medidas de los cubos y puedan ver la favorabilidad y las posibles relaciones que hay.	No aplica, se hacen las pregunta para poner en contexto

Problema # 2: relaciones del cubo

Ingeniero:
A partir de las instrucciones dadas, elabora el cubo en origami con cada uno de los papeles, tomando medidas antes de comenzar y al terminar la construcción del mismo.

Con los datos obtenidos completa la tabla anexa que hace referencia a las propiedades del cubo.

PROPIEDADES DEL CUBO CONSTRUIDO

Lado de la hoja en (cm)	Número de caras del cubo	Número de vértices		Número de aristas		Número de diagonales	
		En una cara	En total	En una cara	En total	En una cara	En total
16 cm							

Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa
En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra, (AM) localizando puntos y construyendo rectas secantes, además de verbalizar el cambio que hay entre el valor de salida y el de entrada (describe que existe una dirección y una cantidad específica en el cambio entre los valores en x e y).

Problema #3: preguntas de las relaciones

Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué permanece constante y qué varía entre las magnitudes consideradas en la tabla anterior?

b) ¿Qué conclusión se obtiene al relacionar el número de caras del cubo y la medida del lado de la hoja?

c) ¿Qué conclusión se obtiene al relacionar el número de vértices en una cara y el total de los vértices? ¿Y sobre el las caras en cada cubo con el total de las caras del cubo?

d) ¿Qué conclusión se obtiene sobre la relación entre el número de aristas y el número total de caras?

Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa
En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra, (AM) localizando puntos y construyendo rectas secantes, además de verbalizar el cambio que hay entre el valor de salida y el de entrada. (DESCRIBE QUE EXISTE UNA DIRECCIÓN Y UNA CANTIDAD ESPECÍFICA EN EL CAMBIO ENTRE LOS VALORES EN X y Y)

	e) ¿Qué conclusión se obtiene sobre la relación entre el número de diagonales y el número total de caras?	
Problema #4 elaboración de la gráfica, fórmula.	Sigue las instrucciones: -Construye una gráfica en el plano cartesiano con los datos obtenidos para cada relación existente.	**AM1** Reconoce elementos significativos en un sistema de representación. **AM2** Realiza conversiones entre distintos tipos de representaciones teniendo en cuenta los elementos significantes. - -*Representación Tabular*, El estudiante Debe reconocer: Relación fila- fila, Relación columna – columna, Relación columna- fila /fila- columna, Aumento o disminución de la relación según una cantidad numérica específica y constante. - -*Representación Gráfica*, El estudiante debe reconocer: Puntos como parejas ordenadas en el plano, Ubicación de los ejes X como horizontal e Y como vertical. - -*Representación Verbal*, El estudiante debe reconocer: La relación entre los valores de la variable, Expresarla por medio de palabras que se ajusten al contexto. - -*Representación Simbólica*, El estudiante debe reconocer: La cantidad de aumento o disminución entre fila-columna que denominará pendiente, A partir de la gráfica o de la tabla, ubicará el punto de partida y le llamará punto de corte con el eje Y, Una expresión general que le permitirá encontrar cualquier valor que se necesite dentro de la situación.
	-Expresa de manera verbal la relación entre los ejes de la gráfica	
	-Genera una expresión matemática que muestre de manera general la relación entre los ejes de la gráfica (sugerencia: puedes usar la ayuda de la variable x u otra que se te ocurra).	

Anexo S. Instrumento sesión 2 - El fruver de doña Ceci-relaciones del cubo. Clasificación de las preguntas según los niveles Carlson de covariación.

PROBLEMA		NIVEL QUE BUSCA APRECIAR
Problema # 1: empaque de la fruta	Doña Ceci tiene un fruver y en él distribuye ciruelas negras, debe transportarlas en camiones en cajas individuales, teniendo en cuenta que la fruta no se puede magullar. Con base a lo anterior contesta las siguientes preguntas: 3. ¿Cuál es el empaque más adecuado? 4. ¿Si lo debo poner en cajas para trasportarlo en camiones, cómo lo haría para no magullar la fruta? La empresa de diseño LH propone como figura para empacar el cubo y diseña en cubo como el que se te compone a continuación: El diseñador Urquijo cree que se necesitan establecer ciertas relaciones y propiedades del cubo a partir de sus medidas, para poder dar la repuesta más adecuada en cuanto al diseño, es por esto que genera dos tablas para que sus ingenieros en prácticas tomen medidas de los cubos y puedan ver la favorabilidad y las posibles relaciones que hay.	No aplica, se hacen las pregunta para poner en contexto

Problema # 2: relaciones del cubo

Ingeniero:
A partir de las instrucciones dadas, elabora el cubo en origami con cada uno de los papeles, tomando medidas antes de comenzar y al terminar la construcción del mismo.

Con los datos obtenidos completa la tabla anexa que hace referencia a las propiedades del cubo.

PROPIEDADES DEL CUBO CONSTRUIDO								
Lado de la hoja en (cm)	Número de caras del cubo	Número de vértices		Número de aristas		Número de diagonales	
		En una cara	En total	En una cara	En total	En una cara	En total
16 cm							

Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa

En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra, (AM) localizando puntos y construyendo rectas secantes, además de verbalizar el cambio que hay entre el valor de salida y el de entrada (describe que existe una dirección y una cantidad específica en el cambio entre los valores en x e y).

Problema #3: preguntas de las relaciones

Contesta las siguientes preguntas:

f) ¿Qué permanece constante y qué varía entre las magnitudes consideradas en la tabla anterior?

g) ¿Qué conclusión se obtiene al relacionar el número de caras del cubo y la medida del lado de la hoja?

h) ¿Qué conclusión se obtiene al relacionar el número de vértices en una cara y el total de los vértices? ¿Y sobre el las caras en cada cubo con el total de las caras del cubo?

i) ¿Qué conclusión se obtiene sobre la relación entre el número de aristas y el número total de caras?

Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa

En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra, (AM) localizando puntos y construyendo rectas secantes, además de verbalizar el cambio que hay entre el valor de salida y el de entrada. (DESCRIBE QUE EXISTE UNA DIRECCIÓN Y UNA CANTIDAD ESPECÍFICA EN EL CAMBIO ENTRE LOS VALORES EN X y Y)

	j) ¿Qué conclusión se obtiene sobre la relación entre el número de diagonales y el número total de caras?	
Problema #4 elaboración de la gráfica, fórmula.	Sigue las instrucciones: -Construye una gráfica en el plano cartesiano con los datos obtenidos para cada relación existente.	**AM1** Reconoce elementos significativos en un sistema de representación. **AM2** Realiza conversiones entre distintos tipos de representaciones teniendo en cuenta los elementos significantes. - -*Representación Tabular*, El estudiante Debe reconocer: Relación fila- fila, Relación columna – columna, Relación columna- fila /fila- columna, Aumento o disminución de la relación según una cantidad numérica específica y constante. - -*Representación Gráfica*, El estudiante debe reconocer: Puntos como parejas ordenadas en el plano, Ubicación de los ejes X como horizontal e Y como vertical. - -*Representación Verbal*, El estudiante debe reconocer: La relación entre los valores de la variable, Expresarla por medio de palabras que se ajusten al contexto. - -*Representación Simbólica*, El estudiante debe reconocer: La cantidad de aumento o disminución entre fila-columna que denominará pendiente, A partir de la gráfica o de la tabla, ubicará el punto de partida y le llamará punto de corte con el eje Y, Una expresión general que le permitirá encontrar cualquier valor que se necesite dentro de la situación.

Anexo T. Instrumento sesión 3 - ¿Las gráficas cómo son? Clasificación de las preguntas según los niveles Carlson de covariación.

PROBLEMA		NIVEL QUE BUSCA APRECIAR
Problema # 1: Propiedades del cubo	**Ingeniero:** A partir de las instrucciones dadas, elabora el cubo en origami con cada uno de los papeles, tomando medidas antes de comenzar y al terminar la construcción del mismo. Con los datos obtenidos completa la tabla anexa que hace referencia a las relaciones del cubo.	**<u>Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa</u>** En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra, (AM) localizando puntos y contruyendo rectas secantes, además de verbalizar el cambio que hay entre el valor de salida y el de entrada (describe que existe una dirección y una cantidad específica en el cambio entre los valores en x e y).

Longitud de un lado de la hoja en (cm)	Longitud de un lado del cubo en (cm)	Perímetro		Área		Volumen en cm^3
		De un lado del cubo en (cm)	total en (cm)	de una cara en cm^2	de la superficie completa en cm^2	
16 cm						

PROBLEMA		NIVEL QUE BUSCA APRECIAR
Problema #2: preguntas de las propiedades	Contesta las siguientes preguntas: a) ¿Qué permanece constante y qué varía entre las magnitudes consideradas en la tabla anterior?	**<u>Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa</u>** En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra, (AM) localizando puntos y contruyendo rectas secantes, además de verbalizar el cambio que hay entre el valor de salida y el de entrada (describe que existe una dirección y una cantidad específica en el cambio entre los valores en x e y).
	b) ¿Qué relación se puede encontrar entre la longitud de un lado de la hoja en (cm) con respecto a la longitud de un lado del cubo en (cm)? ¿Por qué?	
	c) ¿Qué conclusión se obtiene al relacionar el número de vértices en una cara y el total de los vértices? ¿y sobre el las caras en cada cubo con el total de las caras del cubo?	
	d) ¿Es posible relacionar la longitud del lado de la hoja con la longitud del lado del cubo? ¿De qué manera? ¿Por qué?	
	e) ¿Es posible relacionar el área de una cara en (cm^2) y el área de la superficie completa en (cm^2)? ¿De qué manera? ¿Por qué?	
	f) ¿Es posible relacionar el Volumen en (cm^3) con alguna magnitud anterior? ¿De qué manera? ¿Por qué?	

Problema #3 elaboración de la gráfica, fórmula.	Sigue las instrucciones: -Construye una gráfica en el plano cartesiano con los datos obtenidos para cada relación existente.	**AM1** Reconoce elementos significativos en un sistema de representación. **AM2** Realiza conversiones entre distintos tipos de representaciones teniendo en cuenta los elementos significantes. - -*Representación Tabular*, El estudiante Debe reconocer: Relación fila- fila, Relación columna –columna, Relación columna- fila /fila-columna, Aumento o disminución de la relación según una cantidad numérica específica y constante. - *Representación Gráfica*, El estudiante debe reconocer: Puntos como parejas ordenadas en el plano. Ubicación de los ejes X como horizontal e y como vertical. - -*Representación Verbal*, El estudiante debe reconocer: La relación entre los valores de la variable, Expresarla por medio de palabras que se ajusten al contexto. - -*Representación Simbólica*, El estudiante debe reconocer: La cantidad de aumento o disminución entre fila-columna que denominará pendiente, A partir de la gráfica o de la tabla, ubicará el punto de partida y le llamará punto de corte con el eje y, Una expresión general que le permitirá encontrar cualquier valor que se necesite dentro de la situación.
	-Expresa de manera verbal la relación entre los ejes de la gráfica	
	-Genera una expresión matemática que muestre de manera general la relación entre los ejes de la gráfica (sugerencia: puedes usar la ayuda de la variable x u otra que se te ocurra).	

Anexo U. Instrumento sesión 4 - Comparación de gráficas. Clasificación de las preguntas según los niveles Carlson de covariación.

<table>
<tr><th colspan="2">PROBLEMA</th><th>NIVEL QUE BUSCA APRECIAR</th></tr>
<tr><td rowspan="9">Problema # 1: Comparación entre gráficas</td><td>A partir de las gráficas obtenidas en las actividades anteriores responde:
a) ¿Cuáles son similares? ¿Por qué?</td><td rowspan="9"><u>Nivel 3 (N3). Coordinación cuantitativa</u>
En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra, (AM) localizando puntos y contruyendo rectas secantes, además de verbalizar el cambio que hay entre el valor de salida y el de entrada. (describe que existe una dirección y una cantidad específica en el cambio entre los valores en x e y).

AM1
Reconoce elementos significativos en un sistema de representación.

AM2
Realiza conversiones entre distintos tipos de representaciones teniendo en cuenta los elementos significantes.

- -Representación Tabular, El estudiante Debe reconocer: Relación fila- fila, Relación columna –columna, Relación columna- fila /fila-columna, Aumento o disminución de la relación según una cantidad numérica específica y constante.

- Representación Gráfica, El estudiante debe reconocer: Puntos como parejas ordenadas en el plano, Ubicación de los ejes X como horizontal e y como vertical.

- -Representación Verbal, El estudiante debe reconocer: La relación entre los valores de la variable, Expresarla por medio de palabras que se ajusten al contexto.
- -Representación Simbólica, El estudiante debe reconocer: La cantidad de aumento o disminución entre fila-columna que denominará</td></tr>
<tr><td>b) ¿Cuáles son diferentes? ¿Por qué?</td></tr>
<tr><td>c) Haz una relación entre la variación entre las pendientes de las gráficas.</td></tr>
<tr><td>d) ¿Qué pasa en cada tabla si cambiamos la longitud del lado de la hoja?</td></tr>
<tr><td>e) Si quiero obtener un cubo muy grande ¿De qué tamaño crees que tiene que ser la hoja?</td></tr>
<tr><td>f) Al variar la longitud del lado de la hoja y construir el cubo, ¿Varían la cantidad de vértices y diagonales obtenidos?</td></tr>
<tr><td>g) Compara las otras formas de representación (tabla, verbal, simbólica) y responde las preguntas anteriores, consignando en una tabla las respuestas:
<table><tr><th>Actividad- tipo de representación</th><th>Actividad 1</th><th>Actividad 2</th><th>Conclusión</th></tr><tr><td>Gráfica</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>Tabular</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>Verbal</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>Simbólica</td><td></td><td></td><td></td></tr></table></td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td>-Expresa de manera verbal la relación entre los ejes de la gráfica</td></tr>
</table>

	-Genera una expresión matemática que muestre de manera general la relación entre los ejes de la gráfica (sugerencia: puedes usar la ayuda de la variable x u otra que se te ocurra).	pendiente, A partir de la gráfica o de la tabla, ubicará el punto de partida y le llamará punto de corte con el eje Y, Una expresión general que le permitirá encontrar cualquier valor que se necesite dentro de la situación.

Anexo V. Secuencia didáctica.

SECUENCIA: ACTIVIDAD DE APERTURA- DESARROLLO- CIERRE

Sesiones que componen la secuencia didáctica

Etapa	Sesión	Nombre de la sesión	Descripción global de la sesión.
Apertura	**1**	Introducción al pensamiento variacional…Cómo varían las magnitudes.	Planteamiento de instrumento inicial de introducción de pensamiento variacional para evaluar el estado de preconceptos y las falencias de los estudiantes en pensamiento variacional.
Desarrollo	**1**	Veamos las propiedades del cubo.	Completar datos de la tabla anexa que se refieren a las propiedades existentes del cubo, transitar en los cambios de representación y concluir.
	2	Veamos las relaciones del cubo.	Completar datos de la tabla anexa que se refieren a las relaciones existentes del cubo, transitar en los cambios de representación y concluir.
Cierre	**1**	Compara… ¿Cambia o varía?	Comparar lo que cambia y lo que varía, según los resultados obtenidos en las tablas y cada representación.
	2	¿Y si es área? ¿Qué sucede con las gráficas y las tablas?	Comparación de cómo quedaría si tomamos el área como un dato lineal y el área como área, para ver una referencia de la función cuadrática

Descripción de cada sesión de la secuencia didáctica

Sesión No 1. **APERTURA**	
1.Nombre de la sesión	Introducción al pensamiento variacional…Cómo varían las magnitudes.
2.Fecha de implementación	
3.Descripción global de la sesión	Planteamiento de instrumento inicial de introducción de pensamiento variacional para evaluar el estado de preconceptos y las falencias de los estudiantes en pensamiento variacional.

	-Identificar el nivel en el que se encuentran los estudiantes con respecto a la función lineal.
4.Objetivos de aprendizaje de los estudiantes	-Observar los tránsitos entre los cambios de representación que hacen los estudiantes. -Evaluar los conocimientos que posee acerca de función lineal, sus características y formas de representación; ¿Qué cambia? ¿Cómo cambia? ¿Cuánto cambia?
5.Objetivos de investigación	Evaluar los preconceptos de los estudiantes en pensamiento variacional con respecto a covariación entre magnitudes.
6.Momentos	1. Aplicación de problemas de análisis de covariación para analizar preconceptos. 2. Socialización. 3. Institucionalización.

Sesión No 2. **DESARROLLO #1**	
1.Nombre de la sesión	Veamos las propiedades del cubo.
2.Fecha de implementación	
3.Descripción global de la sesión	Completar datos de la tabla anexa que se refieren a las propiedades existentes del cubo, transitar en los cambios de representación y concluir.
4.Objetivos de aprendizaje de los estudiantes	- Consignar datos en tablas viendo la variación de las magnitudes a trabajar. - Relacionar las magnitudes a través de preguntas que lo lleven a generar una expresión. -Transitar por los cambios de representación de la función lineal. -Ver que aunque se cambie de representación se está trabajando la misma función lineal. -Ver las propiedades del cubo.
5.Objetivos de investigación	Describir y clasificar la formación de funciones lineales que hacen los estudiantes usando las relaciones del cubo
6.Momentos	1. Elaboración del cubo. 2. Recoger datos y consignar en tabla. 3. De representación tabular a gráfica, verbal y algebraica. 4. Socialización.

	5. Institucionalización

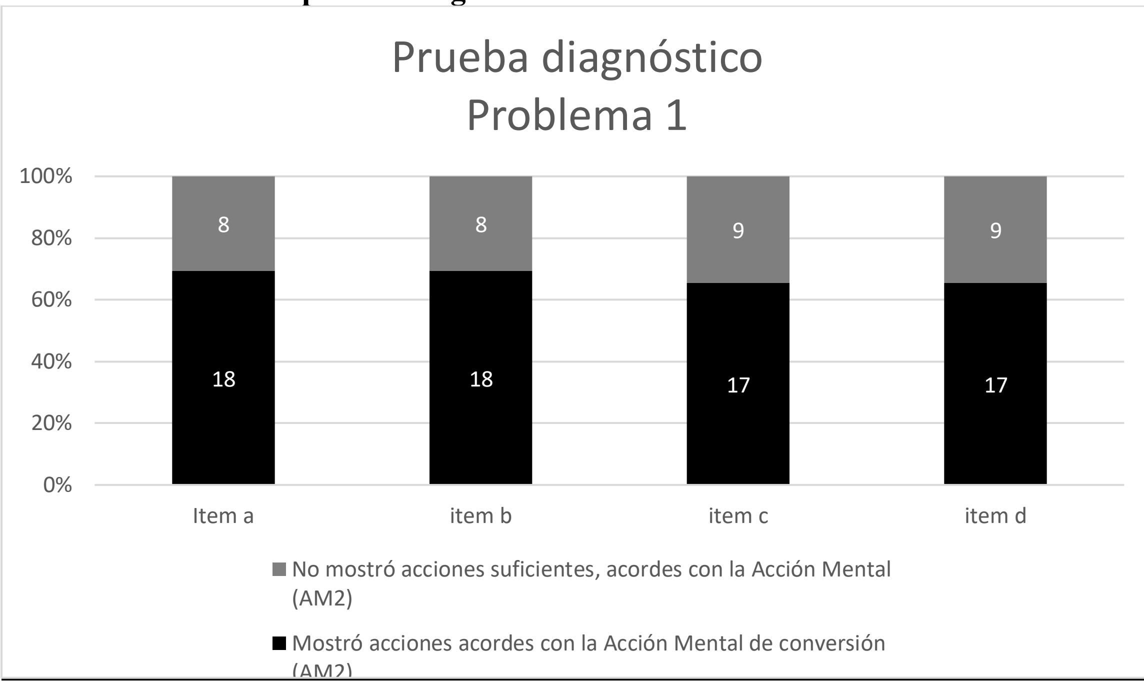
Sesión No 3. **DESARROLLO #2**	
1.Nombre de la sesión	Veamos las relaciones del cubo.
2.Fecha de implementación	
3.Descripción global de la sesión	Completar datos de la tabla anexa que se refieren a las relaciones existentes del cubo, transitar en los cambios de representación y concluir.
4.Objetivos de aprendizaje de los estudiantes	- Consignar datos en tablas viendo la variación de las magnitudes a trabajar. - Relacionar las magnitudes a través de preguntas que lo lleven a generar una expresión. -Transitar por los cambios de representación de la función lineal. -Ver que aunque se cambie de representación se está trabajando la misma función lineal. -Ver las relaciones del cubo.
5.Objetivos de investigación	Describir y clasificar la formación de funciones lineales que hacen los estudiantes usando las relaciones del cubo.
6.Momentos	1. Elaboración del cubo. 2. Recoger datos y consignar en tabla. 3. De representación tabular a gráfica, verbal y algebraica. 4. Socialización. 5. Institucionalización.

Sesión No 4. **CIERRE # 1**	
1.Nombre de la sesión	Compara… ¿Cambia o varía?
2.Fecha de implementación	
3.Descripción global de la sesión	Comparar lo que cambia y lo que varía, según los resultados obtenidos en las tablas y cada representación.
4.Objetivos de aprendizaje de los estudiantes	-Generación de expresión matemática que muestre las relaciones entre las distintas relaciones y propiedades obtenidas en las actividades anteriores.

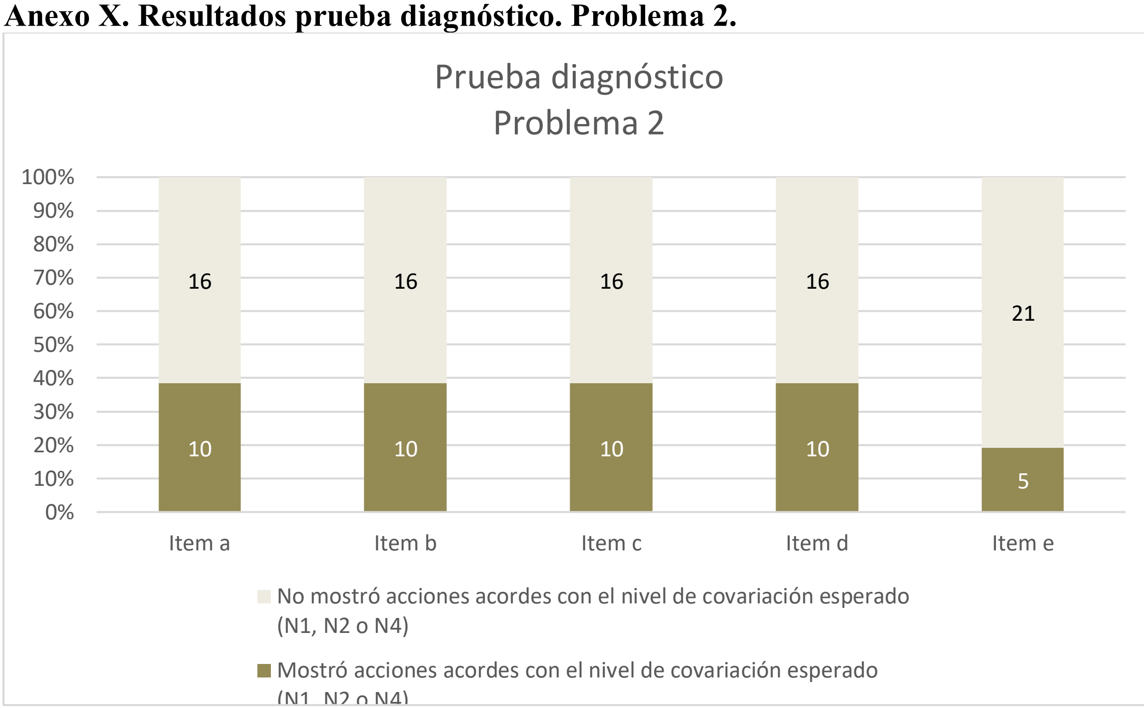
	-Comparación de las formas de representación de las relaciones y propiedades En gráficas, tablas- -Comparación de las pendientes de las rectas obtenidas en cada ejercicio, siendo estas la representación de la relación de covariación entre las magnitudes obtenidas.
5.Objetivos de investigación	Describir la comparación que hacen los estudiantes y clasificarla según los niveles de pensamiento variacional para saber la ubicación de su aprendizaje
6.Momentos	1. Comparación de las formas de representación obtenida en las actividades anteriores. 2. Clasificación en niveles de pensamiento según Carlson- Cardozo-Espinel. 3. Socialización. 4.Institucionalización 5. Conclusiones

Sesión No 5. **CIERRE # 2**	
1.Nombre de la sesión	¿Y si es área? ¿Qué sucede con las gráficas y las tablas?
2.Fecha de implementación	
3.Descripción global de la sesión	Comparación de cómo quedaría si tomamos el área como un dato lineal y el área como área, para ver una referencia de la función cuadrática.
4.Objetivos de aprendizaje de los estudiantes	-Tomar las magnitudes de las áreas como realmente son (cuadrados). - Usar distintos tipos de representación para consignar los datos. -Comparar con lo obtenido en la guía 4 donde son lineales -Ver otro tipo de covariación.
5.Objetivos de investigación	Describir la comparación que hacen los estudiantes y clasificarla según los niveles de pensamiento variacional para saber la ubicación de su aprendizaje
6.Momentos	1. Evaluación de datos según características de área 2. Paso por distintos tipos de representación. 3. Comparación de las formas de representación obtenidas en la sesión 4 con las obtenidas en la sesión 5 4. Socialización. 5.Institucionalización 6. Conclusiones

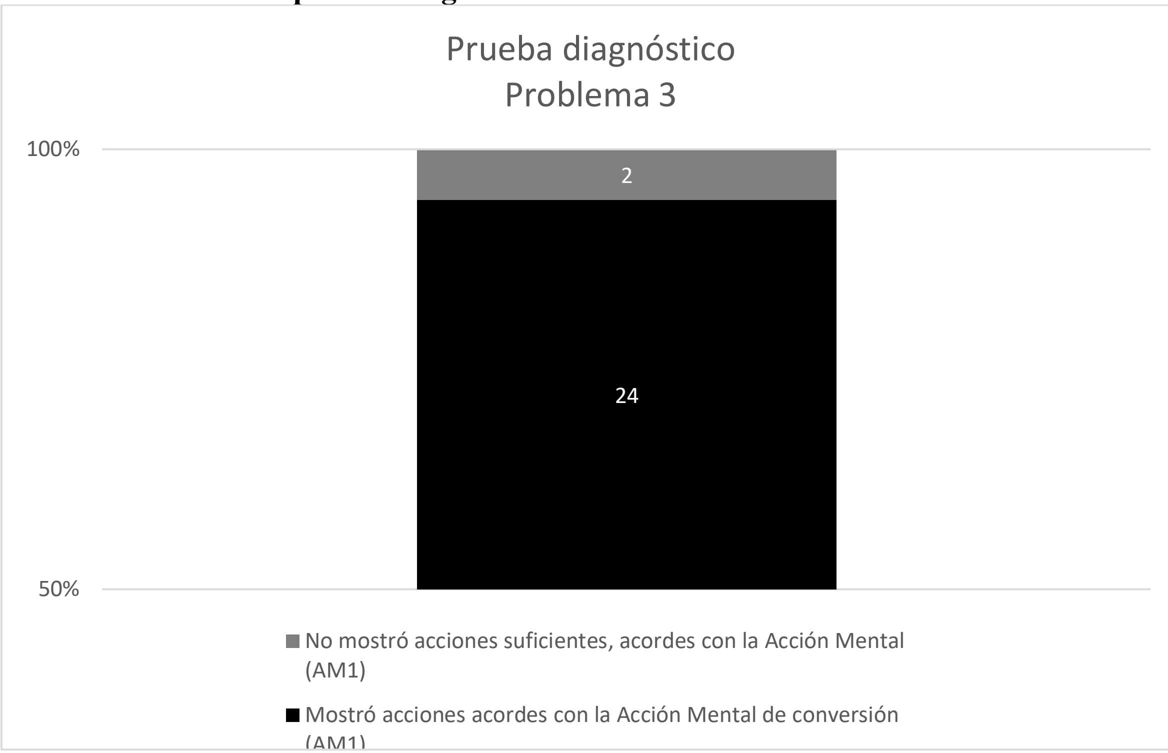
Anexo W. Resultados prueba diagnóstico. Problema 1.



Anexo X. Resultados prueba diagnóstico. Problema 2.



Anexo Y. Resultados prueba diagnóstico. Problema 3.



Anexo Z. Resultados prueba diagnóstico. Problema 4.