COMPRENSIONES DE COVARIACIÓN LINEAL DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO DEL COLEGIO TOMAS CARRASQUILLA IED

YULLY PAULIN MONTERROZA CÁRDENAS

MÓNICA ISABEL RODRÍGUEZ BARRETO

SANDRA MILENA RUBIO LUNA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C. 2018

COMPRENSIONES DE COVARIACIÓN LINEAL DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO DEL COLEGIO TOMAS CARRASQUILLA IED

YULLY PAULIN MONTERROZA CÁRDENAS

MÓNICA ISABEL RODRÍGUEZ BARRETO

SANDRA MILENA RUBIO LUNA

Trabajo de grado presentado para optar al título de Magíster en Educación

Tutor del Proyecto

JORGE CASTAÑO GARCIA

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C. 2018

NOTA DE ADVERTENCIA

"La universidad no se hace responsable por los conceptos emitidos por sus alumnos en sus trabajos de tesis. Sólo velará porque no se publique nada contrario al dogma y a la moral católica y porque las tesis no contengan ataques personales contra persona alguna, antes bien se vean en ellas el anhelo de buscar la verdad y la justicia."

Artículo 23, resolución No 13 del 6 de Julio de 1946,

por la cual se reglamenta lo concerniente a Tesis y Exámenes de Grado en la Pontificia Universidad Javeriana.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

RECTOR: JORGE HUMBERTO PELÁEZ PIEDRAHITA S.J.

DECANO ACADÉMICO: FÉLIX ANTONIO GÓMEZ HERNÁNDEZ. Ph.D.

DIRECTOR POSGRADOS: RICARDO MAURICIO DELGADO SALAZAR. Ph.D.

DIRECTOR DE LINEA: JORGE CASTAÑO GARCÍA

DIRECTOR DE LA TESIS: JORGE CASTAÑO GARCÍA

AGRADECIMIENTOS

A Dios por la oportunidad de hacer nuestra maestría en esta insigne institución y su compañía incondicional, que nos llenó de fortaleza, motivándonos a esforzarnos con constancia y dedicación.

A nuestra familia por el apoyo incondicional durante estos dos años, en el cumplimiento de este sueño, porque imprimieron en nosotras confianza y perseverancia para alcanzar esta meta tan anhelada.

A nuestro maestro, el Doctor Jorge Castaño García, quien con su sabiduría y experiencia nos orientó en excelencia para hacer de esta investigación un aporte significativo a nuestra práctica pedagógica.

A los estudiantes del grado 905 del Colegio Tomás Carrasquilla IED, por su disposición e interés al hacerse partícipes activos del presente estudio.

Tabla de contenido

INDICE DE TABLAS

TABLA DE FIGURAS

RESUMEN

En el presente ejercicio investigativo, se presentan los resultados de un estudio de caso en educación matemática, el cual consistió en una intervención que tuvo por objeto describir las comprensiones que se observan en los estudiantes de grado noveno del colegio Tomas Carrasquilla IED, cuando estudian eventos físicos asociados a la covariación lineal. Los referentes teóricos que sustentaron el trabajo fueron: la conceptualización del fenómeno de la comprensión de Perkins y el pensamiento covariacional como estrategia dinámica de aproximación al concepto de función lineal de Vasco. En su implementación se evidenció la importancia de apoyar el desarrollo del pensamiento variacional, a través del estudio de la covariación en situaciones físicas, ya que estas ofrecen orientaciones intuitivas, para comprender la covariación, sin embargo este es solo el punto de partida, porque hay un largo camino, para ayudar a los estudiantes, a comprender el significado de la razón de cambio, este camino es la distancia entre, comprender relaciones entre valores variables de dos magnitudes y comprender relaciones entre los valores que miden la variación de las variables, demostrando como la covariación lineal puede interpretarse como un modelo matemático que involucra la comparación y coordinación de dos magnitudes relacionadas en procesos de variación y cambio, además como relacionar la comprensión a un criterio de desempeño flexible que evidencie, cuando el estudiante puede pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que sabe. La metodología consistió en el diseño y aplicación de una secuencia didáctica que se analizó bajo los principios de la investigación cualitativa, mediante el estudio de las producciones escritas de las guías de trabajo y verbales de las entrevistas semiestructuradas las cuales permitieron establecer la matriz de categorías de análisis, fundamentando la propuesta de Perkins, de entender la comprensión y los elementos del pensamiento covariacional de Vasco y Carlson.

Palabras clave: Pensamiento variacional, covariación lineal, comprensión y función lineal.

ABSTRACT

In this present investigative exercise are presented the results of a case study in mathematics education, which consisted in an intervention with the objective of describe the comprehensions that are observed in the ninth grade from Tomas Carrasquilla IED School, when they study physical events associated with the linear covariance. The theoretical references that supported the job were: the conceptualization of the Perkins comprehension phenomenon and the covariance thinking as a dynamic strategy of the approaching to the of Vasco's linear function concept. During its implementation was evident the importance of supporting the variance thinking development through the covariance study in physical situations since those provide intuitive orientations to comprehend the covariance. However, this is just the starting point because there is a long way to help students to comprehend the meaning of the change reason. This way is the distance between comprehend relationships between variable values of two quantities and the relationships between the values that measure the variables variation, demonstrating how the linear covariance can interpret itself as a mathematical model that involves the comparison and the coordination of two quantities, related in variation and change processes and further how to relate the comprehension of a flexible performance criteria that demonstrate when the student can think and act with flexibility from what the student knows. The methodology consisted in the design and the application of a didactic sequence that was analyzed under the qualitative investigation principles through the written products study from the worksheets and verbal semi-structured interviews, which allowed to stablish the analysis categories matrix, informing the Perkins proposal to understand the comprehension and covariance thinking elements from Vasco and Carlson.

Key words: Variation thinking, covariance linear, comprehension and linear function.

INTRODUCCIÓN

El propósito de investigación abordado en el presente estudio, está orientado a describir las comprensiones que tienen los estudiantes de grado noveno, al analizar situaciones de tipo covariacional que involucran eventos dinámicos, problema que surge de una doble preocupación, por una parte, la importancia y la necesidad de reconocer la comprensión como la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que se conoce, como afirma Perkins (1999), para que desde esta premisa, se identifiquen las comprensiones de los estudiantes, mediante la observación detallada de sus desempeños, al realizar una gama de actividades que requieran, el generar explicaciones, encontrar evidencias, presentar analogías y argumentar de una manera nueva. Por otra parte, proponer un acercamiento al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional, que posibilite la aproximación al uso de herramientas para que los estudiantes sean capaces de analizar patrones de cambio que se presentan en variables que covarían entre ellas, y así fortalecer en ellos, una forma de pensar más dinámica, al analizar la relación entre variables involucradas, y así mismo relacionarlas y articularlas a partir de distinguir lo que cambia de lo que permanece constante y las posibles regularidades que se pueden generar (Vasco, 2006). Ambos centros de interés por si solos justifican la intención de garantizar un aprendizaje de la función lineal, mediante el desarrollo de una enseñanza, que favorezca una matemática comprensiva, cognitiva y procedimental, que ofrezca la capacidad de aplicar el conocimiento contextualmente.

Estas cuestiones refieren aspectos que han sido interés de análisis en varios estudios previos, (Carlson, 1998; Kaput, 1994; Posada, 2006; Jaramillo, 2015; Sierpinska, 1992, Perkins 1998) los cuales han direccionado el enfoque que sustenta la propuesta metodológica que subyace a este ejercicio investigativo, puesto que evidencian significativas aproximaciones, a un proceso que visibiliza, las comprensiones involucradas, en las relaciones funcionales dinámicas que hacen parte del objeto estudio.

Sin embargo, es de notar que, a pesar de estos y otros estudios sobre la enseñanza del concepto de función, en la actualidad, este objeto matemático se sigue abordando desde una perspectiva de correspondencia o de asignación, que obedece a una enseñanza netamente algorítmica o estática, que anula totalmente la posición del estudiante recursivo, capaz de articular su saber a partir de sus comprensiones y hacer del mismo un producto útil en diferentes contextos.

De acuerdo con lo anterior, nuestra propuesta investigativa busca describir las comprensiones de los estudiantes de grado noveno del Colegio Tomas Carrasquilla I.E.D. observadas, en las representaciones simbólicas, numéricas, escritas y verbales, que los jóvenes relacionaron, durante el desarrollo de la secuencia didáctica planteada, la cual integra situaciones dinámicas contextualizadas de tipo covariacional.

En este sentido, nuestro propósito investigativo está enfocado a valorar una propuesta metodológica que integre el fenómeno de la comprensión al desarrollo del pensamiento covariacional, tomando como principal insumo, el análisis de las respuestas que los estudiantes ofrecen a las situaciones dinámicas de covariación, propuestas en la secuencia didáctica diseñada. Dichas respuestas, evidencian **qué comprenden y cómo comprenden** los estudiantes el objeto matemático "función lineal". Para este propósito se hizo necesario pensar el fenómeno de la comprensión sustentando, que esta no puede ser observada directamente, sino a través de las acciones que realizan los estudiantes en el intento de resolver situaciones o tareas específicas, pues como afirma Sierpinska (1990), la comprensión se considera una experiencia mental real, que implica experimentar, utilizar y aplicar, la identificación, generalización y síntesis en un proceso discontinuo, que relaciona la comprensión a un acto involucrado en un proceso de interpretación, siendo ésta una dialéctica en desarrollo entre conjeturas cada vez más elaboradas y validaciones de las mismas, por tanto en este ejercicio investigativo se valida el carácter relativo de la comprensión que nunca es completa pero que siempre es mejorable.

La documentación, el desarrollo y los resultados de esta propuesta se organizaron en seis capítulos, de la siguiente manera: en el primer capítulo se presentan los antecedentes, apartado en el cual se retoman algunos de los trabajos que en diferentes marcos temporales han concentrado su reflexión en la enseñanza de la función lineal, el pensamiento covariacional y la faceta cognitiva de la comprensión.

En el segundo capítulo se describen los aspectos preliminares que permitieron organizar y explicar la problemática que fundamenta el trabajo investigativo, la cual se sustenta desde la descripción del problema, la justificación y posteriormente el planteamiento de los objetivos, que impulsan y determinan la importancia de apoyar la solución de la problemática.

En el tercer capítulo, se describen los aspectos teóricos que fundamentan el desarrollo histórico que ha tenido el concepto de función, haciendo énfasis específico en los sucesos, sujetos al cambio y al movimiento, con el propósito de establecer una relación directa de este análisis con la propuesta didáctica, adicionalmente se exponen aspectos disciplinares del concepto de función que aportan elementos importantes en los procesos de representación. Al mismo tiempo desde las consideraciones conceptuales asumidas, se expone la relación del objeto matemático de estudio con el pensamiento variacional y cómo se presenta este tema en el aprendizaje, desde el enfoque de comprensión de Perkins.

En el cuarto capítulo se describen las etapas del diseño y desarrollo de la experimentación, presentando los criterios de construcción y análisis del proceso de intervención, es decir, se encuentra la descripción de la población, selección de los tres casos de análisis, presentación de la secuencia didáctica y estructuración de la matriz de categorías de análisis.

En el quinto capítulo, se presentan los análisis de las respuestas escritas y orales de los estudiantes, a partir de reconocer la propuesta impulsada por la metodología, la cual resalta algunas reflexiones didácticas, orientadas a categorizar las comprensiones observadas, desde un criterio dinámico de tipo covariacional.

En el capítulo seis, se hace mención de las conclusiones, reflexiones, recomendaciones y discusiones que van en concordancia con los objetivos propuestos, los propósitos de la secuencia didáctica, el enfoque de la comprensión de Perkins y las interpretaciones de los resultados del análisis.

1 ANTECEDENTES

Para el presente ejercicio investigativo, nos documentamos con trabajos anteriores, que se relacionan con nuestro objeto de estudio, tal información la hemos clasificado en tres categorías:

- El concepto de función lineal como objeto matemático del pensamiento variacional.
- Faceta cognitiva de la comprensión.
- Estrategias de enseñanza-aprendizaje del concepto de función como covariación.

1.1 El concepto de función lineal como objeto matemático del pensamiento variacional

En el trabajo académico sobre la construcción del concepto de función lineal y sus diferentes formas de representación, se evidencian múltiples dificultades, u obstáculos epistemológicos[1] como los caracteriza la investigadora Anna Sierpinska (1992), quien considera que en el proceso en el cual se adquiere la noción de función y específicamente lo relacionado con la naturaleza variacional de la función, se evidencia, que las matemáticas no se dedican a problemas prácticos, que las técnicas usadas en la producción de tablas de relaciones no numéricas no son un objeto adecuado de estudio en matemáticas y por último, el observar los cambios como un fenómeno, tomando el foco de atención en cómo las cosas cambian, ignorando qué cambia.

Esta problemática subyace directamente de los esquemas de enseñanza tradicional, los cuales evidencian una sobrevaloración de los aspectos formales y algorítmicos que, en general, carecen

[1] La noción de obstáculo epistemológico o cognitivo fue introducida por Bachelard (1984/1962) en su obra *la formation du sprit scientifique,* en ella nos dice: *cuando buscamos las condiciones psicológicas de los procesos de las ciencias llegamos pronto a la convicción de que es en términos de obstáculo como es preciso exponer el problema del conocimiento científico…* se conoce contra un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal hechos, superándolos Bachelard, 1983 p 15 citado por Ruiz 1988 p 27. Los Obstáculos epistemológicos psicológicos que dificultan la construcción y apropiación de conocimientos y conceptos de las diferentes disciplinas, estos obstáculos epistemológicos no se refieren a los elementos externos que intervienen en el proceso de construcción de conocimiento, sino a las condiciones psicológicas que impiden evolucionar al espíritu científico en formación.

de significado para el estudiante. Los siguientes trabajos proponen algunas alternativas para la comprensión y estudio del concepto de función lineal mediante la implementación o adaptación de esquemas de enseñanza, que dejan evidenciar la utilidad y aplicación de la función lineal en diferentes contextos.

Planchart (2000) en su tesis doctoral, aborda la idea de mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje del concepto de función y para ello requiere que este concepto sea analizado desde cuatro aspectos medulares: proceso didáctico en la adquisición de las funciones, la visualización, los sistemas de representación, y la modelación desde el contexto físico y geométrico; y para ello propone, en primer lugar, identificar y analizar las dificultades que surgen durante el proceso que conduce al aprendizaje de las funciones. Y, en segundo lugar, analizar el papel de la visualización en la conceptualización de las funciones, diseñar módulos de actividades donde se incorpora la modelación matemática como articulación de los registros semióticos en la enseñanza y aprendizaje de las funciones.

Dentro de los hallazgos y las conclusiones más relevantes de este trabajo, basadas en los análisis de los resultados de los cuestionarios, las entrevistas y las actividades realizadas con los estudiantes, están:

- Las dificultades en el manejo de las distintas representaciones semióticas utilizadas en el concepto de función.
- La tendencia a pensar que las funciones son continuas, lo cual es propiciado en muchos casos por el docente, quien privilegia las funciones continúas con una única fórmula. Ante el registro gráfico, los estudiantes tienden a unir los puntos, lo cual consideran un requerimiento para ser función.

- Las dificultades relacionadas con la notación simbólica de la función; su lectura adquiere otra dimensión, por ejemplo, deja de ser función para convertirse en una operación aritmética de multiplicación.
- Las dificultades en la conversión, tanto del sistema de representación gráfico como del sistema en lenguaje natural (sobre situaciones físicas) al sistema algebraico (Planchart, 2000, p.161).

Sin embargo, dicho autor reconoce que los estudiantes participaron activamente en el proceso de modelación, entendiéndolo como una alternativa didáctica que permite coordinar los distintos sistemas de representación.

Posada y Villa (2006) en su investigación, presentan el diseño e implementación de una propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal, tomando como referentes conceptuales la noción de variación, el proceso de modelación matemática y los registros semióticos de representación. En dicha propuesta los autores muestran como el concepto de función lineal se puede interpretar como un modelo variacional a partir de sus diferentes representaciones y al utilizar la modelación matemática se realiza una trasposición entre el lenguaje natural y el lenguaje de representación matemática. En este sentido, se deben abordar elementos propios del pensamiento variacional como el concepto de ecuación, elementos del cálculo, funciones cuadráticas y polinómicas.

El trabajo realizado por estos dos investigadores, los llevó a pensar en una vía diferente para el desarrollo de los aspectos relacionados con los elementos propios del pensamiento variacional, teniendo como base el concepto de función, de ahí, definieron cómo la escuela puede orientar la construcción del concepto de función lineal con sus estudiantes, desde una perspectiva variacional, a partir de tener en cuenta los siguientes aspectos:

- La identificación de las relaciones de dependencia entre dos magnitudes.
- La cuantificación de la relación mediante tablas de valores.
- La identificación de la razón de cambio constante.
- El reconocimiento de la razón de cambio constante como elemento que identifica las funciones lineales.
- La compresión de la función lineal como un modelo que atrapa la covariación entre dos magnitudes.
- La identificación de la proporcionalidad simple directa como un caso particular de función lineal importante en la modelación de variados fenómenos.
- La identificación de las características que identifican una función lineal desde los diferentes registros de representaciones.

Roldan (2013) genera una propuesta didáctica para el aprendizaje de la función lineal a partir de analizar la importancia de este concepto en el desarrollo del pensamiento variacional, y presentar una formulación encaminada a consolidar este objeto matemático desde todos sus aspectos socio-históricos y disciplinares que les permitan a los estudiantes aplicar el concepto de función lineal en situaciones de la vida real que los encamine a la elaboración de modelos matemáticos. Para alcanzar este propósito diseñó una secuencia didáctica en la que planteó tres tipos de actividades con las que potencia la experimentación como herramienta importante del aprendizaje y la elaboración de modelos matemáticos, los cuales en conjunto dan como resultado el aprendizaje de los elementos relacionados con la función lineal, permitiendo el manejo del mismo y su aplicabilidad en situaciones de la vida real, guiando al estudiante a comprender el concepto de función, alejándolo de la definición formal, para que, a partir de la creación de modelos, la relación de los mismos con datos teóricos y experimentales de situaciones que representa, llegue a una definición propia con sentido que refleje la aprehensión de los elementos teóricos que le conforman. Esta investigación le permitió concluir:

- La función lineal se constituye en excelente herramienta para estudiar y modelar problemas de variación. Las cantidades empleadas varían en tiempo, espacio, con otras cantidades, esta variación puede ser más rápida o más lenta, creciente o decreciente, sin embargo, mantiene tal ritmo de variación ante lo cual son fácilmente identificables patrones y regularidades en ella. Estos aspectos desarrollan significativamente el llamado pensamiento variacional.
- Comprender lo que es función lineal requiere que el estudiante se aleje de la definición formal que se da –en clase y en textos- de ella, y que, a partir de la creación de modelos, la relación de los mismos con datos teóricos y experimentales de situaciones que representan, llegue a una definición propia con sentido que refleje su aprehensión de los elementos teóricos que le subyacen.
- La noción de correspondencia es relevante en las aplicaciones actuales de las matemáticas; debido en gran parte a la importancia para la concepción y estudio de los modelos matemáticos, y dado que prácticamente toda "aplicación" de las matemáticas presupone el empleo de un modelo, entonces tiene validez presentar la función lineal desde la correspondencia numérica entre variables.
- La enseñanza de la función lineal debe articular de manera equilibrada las formas más importantes de representación, es decir, las formas tabulares, gráficas cartesianas y algebraicas sin dejar de lado la expresión verbal. Se debe fortalecer el paso de una a otra forma de representación empleando diferentes contextos.

Las tesis anteriormente expuestas presentan algunas orientaciones encaminadas a mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje del objeto matemático función lineal, también ponen en evidencia las dificultades que encuentran los estudiantes para la aprehensión de este concepto debido a la complejidad de su interpretación, la dificultad para reconocer y articular las diferentes representaciones y el modelar situaciones o fenómenos; de ahí que el propósito general del presente trabajo, sea apoyar este proceso investigativo a partir de diseñar indicadores con los cuales se pueda evidenciar avances sobre el aprendizaje comprensivo de la función lineal en situaciones de covariación lineal, a partir de la adaptación e implementación de un conjunto de tareas contextualizadas, en las cuales se utilizan distintas representaciones asociadas a dicho concepto.

1.2 Faceta cognitiva de la comprensión

El tema de la comprensión, condiciona el modo fundamental de los conocimientos, los cuales no pueden ser asociados a un estado dicotómico (todo o nada), sino a un continuo sin límites que nunca llega a completarse, es decir, un continuo que no debe considerarse unidimensional sino multidimensional, pues la comprensión es una actividad privada, individual, en la que el sujeto que comprende tiene la última palabra y es, en este sentido, que el presente ejercicio investigativo, refiere como afirma Perkins, la comprensión como la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que se conoce, lo cual se retoma de los trabajos que se mencionan a continuación, que son una aproximación de diagnóstico y evaluación de la comprensión.

Rendón (2009) fundamenta su propuesta investigativa en una descripción analítica que pretende resignificar conceptual y contextualmente la razón de cambio, mediante la aplicación de los fundamentos de la enseñanza para la comprensión (EpC), los cuales establecen metodológicamente un escenario flexible que relaciona un campo especifico del saber con un contexto significativo a los estudiantes, permitiendo, en este sentido, cambiar las perspectivas del proceso de enseñanza aprendizaje, tratando de separar la experiencia del aula de los desarrollos procedimentales y algorítmicos. La investigación fue realizada con un grupo de estudiantes de grado noveno (9°) de la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa del municipio de Caldas (Antioquia), con ellos se implementó una guía de actividades que vinculó las concepciones del cambio (cualitativo y cuantitativo) con situaciones reales. Para dar cuenta de este logro, el análisis se realizó con la ayuda de herramientas metodológicas tales como el pre-test y el post-test, las matrices de evaluación y los mapas conceptuales. El aporte de Rendón, es una clara evidencia que sustenta, la importancia de proponer innovadoras situaciones de análisis para los estudiantes con el fin de describir sus logros, ubicándolos en los diferentes niveles de comprensión mediante la evaluación de las nuevas relaciones conceptuales que ellos van demostrando en el proceso. Este ejercicio investigativo llevó a Rendón a mostrar que los alumnos alcanzan a reformular sus planteamientos, permitiendo una mejor integración entre los elementos teóricos y prácticos de conceptos como razón de cambio, a partir de la aplicación de situaciones contextuales, apoyándose en representaciones de los registros gráficos y numéricos.

Perkins (2010) en su artículo “Enseñar para repetir o enseñar para comprender” afirma que el ejercicio a desarrollar de los docentes en el aula de clase debe dirigirse a que los estudiantes comprendan y piensen en torno a lo que conocen y aprenden; un reto que desafía las prácticas de enseñanza, infestadas de costumbres fuertemente arraigadas, por tanto, es común que los profesores enseñen contenidos reducidos en su máxima expresión. Por esta razón, muchos estudiantes no logran aplicar los conceptos adquiridos a otras situaciones posibles o analizar hechos sin perspectiva histórica. Perkins identificó, además, lo que él denomina "patrones domesticados" o rutinas pedagógicas tradicionales que no buscan desafiar y cuestionar a los estudiantes, sino más bien, domesticar la repetición de los conceptos adquiridos. De acuerdo al investigador, "*usualmente domesticamos tanto los contenidos como la forma de enseñarlos y, por ende, los aprendizajes no se dan por medio de la comprensión*". Para hacer frente a esto, Perkins plantea un cambio de mentalidad: fomentar que los estudiantes piensen y no sólo conozcan. "*Conocer es simplemente saber de un hecho, una efeméride. Hacerlos pensar, en cambio, es generar una conversación, dejar trabajar la intuición respecto de algo"*. Enseñar para comprender implica, además, redefinir lo que entendemos por comprensión: de un concepto posesivo, asociado al saber a cabalidad un tema, a una comprensión entendida como pensar, es decir, flexible, "*que no se trata de saber todo o mucho de algo".* "*Pedir pensar en algo es muy distinto a pedir demostrar conocimiento sobre hechos*"

En este sentido el presente trabajo investigativo pretende proyectar la visión de David Perkins sobre la comprensión, con el fin de pedir a los estudiantes no solo que sepan si no qué piensen a partir de lo que saben, demostrando un desempeño flexible, en el desarrollo de las actividades que se proponen desde la secuencia didáctica, las cuales, van más allá de la memorización y la rutina.

1.3 Estrategias de enseñanza-aprendizaje del concepto de función como covariación

El pensamiento variacional busca captar y modelar la covariación de variables relacionadas entre sí, por ello es fundamental primero hablar de covariación ya que esta propone estudiar la relación existente entre dos variables de manera que al tener en cuenta el aumento o la disminución de una de ellas se puede inferir el aumento o la disminución de la otra, es decir, se hace posible indicar la forma en que se relacionan y las formas en que covarían las variables involucradas, por ello, en este trabajo de investigación se proponen situaciones dinámicas de tipo covariacional, que fundamentan la secuencia didáctica, y permiten que los estudiantes pongan en juego distintas estrategias y procesos heurísticos que apuntan más al desarrollo de competencias que al abordaje simple de un tema, ya que redunda en la posibilidad de enseñar la función desde una perspectiva de dependencia y cambio sin la necesidad de acudir directamente al uso de fórmulas o definiciones. A continuación, se retoman algunos de los trabajos, que, en diferentes marcos temporales, han concentrado su interés, en el referente de covariación, como una herramienta didáctica de enseñanza aprendizaje del concepto de función lineal.

Grueso y González (2016) diseñan y desarrollan una propuesta de aula para el estudio de la función a través de situaciones de covariación dentro de eventos dinámicos, con el propósito de potencializar el desarrollo del pensamiento variacional a través de tareas covariacionales, intentando dentro de dichas tareas estudiar el concepto de función a través del uso y la articulación de diferentes registros de representación. Luego de la implementación, realizaron una caracterización y análisis de las actuaciones de los estudiantes según los niveles de covariación propuestos por Carlson (2003), los sistemas matemáticos de signos y los aspectos matemáticos involucrados. Dentro de los resultados pudieron corroborar la conveniencia de estudiar la función a través de situaciones problema de covariación, igualmente la de enseñar la función desde una perspectiva de dependencia y cambio sin la necesidad de recurrir directamente al uso de fórmulas o definiciones. Los autores proponen el estudio de la covariación a partir de situaciones problema reales, que realmente le permitan al estudiante desarrollar un pensamiento de tipo variacional, en lugar de continuar su enseñanza bajo ideas netamente algorítmicas o estáticas desde una perspectiva donde nos limitamos al uso de la fórmula, reemplazando valores con la finalidad de llenar tablas que permitan realizar la representación correspondiente en el plano cartesiano, ya que con esto no existe un verdadero acercamiento al concepto de función.

Gómez (2015), pretendió profundizar en el análisis de las producciones escritas y verbales realizadas por estudiantes de grado noveno, cuando abordan tareas asociadas al desarrollo del pensamiento variacional y específicamente aspectos relacionados al reconocimiento de qué es lo que cambia, cómo cambia y cuánto cambia, mediante la implementación de tres tareas las cuales corresponden a: ¿Qué pasa si se resbala el lápiz?, áreas de los triángulos formados por el movimiento del lápiz y por último hallando áreas máximas y mínimas; tareas que el investigador manifiesta fueron seleccionadas de la literatura nacional, donde en cada una de ellas se relacionan con el cambio y la variación. Estas se desarrollaron en dos momentos, el primero en forma de taller individual y el segundo en forma colectiva donde solucionaron las mismas tareas, pero ahora apoyados en simulaciones concretas y simulaciones realizadas en el software dinámico Geo-gebra. Este trabajo describió y analizó las características relacionadas con el desarrollo del pensamiento variacional, a partir de sustentar las diferentes acciones mentales y niveles de razonamiento expuestas en el marco conceptual de Carlson (2003). El investigador concluye que las tareas y la aplicación de las mismas en situaciones dinámicas son herramientas que permitieron contribuir en el desarrollo del pensamiento variacional, como también que las tres tareas propuestas le permitieron describir, analizar e interpretar posibles características del mismo; sin embargo deja a consideración para próximas investigaciones la necesidad de replantear estas tareas o construir otras para así orientar a los estudiantes a desarrollar la noción de razonamiento covariacional en lo que refiere a los N4 y N5 de este marco conceptual.

García (2016) investiga a partir de un estudio de casos desde un enfoque cualitativo, el desarrollo del razonamiento covariacional en estudiantes de secundaria en lo que se refiere al aprendizaje de la función lineal, diseñando una serie de actividades a través del software Easy Java Simulations y Geo-gebra, que le permitieran estudiar los niveles de razonamiento covariacional de los estudiantes de acuerdo al marco conceptual de Carlson (2003). Para el diseño de las cuatro actividades de intervención tuvo en cuenta que les permitiera a los estudiantes ser conscientes de los fenómenos de variación, a través de un proceso de observación, interacción, interpretación y análisis, estas actividades son:

- La primera de estas, corresponde a una construcción en Geo-gebra, de los elementos que conforman una función lineal a partir de su respectiva ecuación, donde el estudiante variaba el valor de cada elemento observando lo que sucedía en la representación gráfica, su intencionalidad era, que los estudiantes analizaran lo que representa cada elemento en una ecuación de la forma $y = mx + b$.
- La segunda corresponde al diseño de siete estaciones, que dan cuenta de los diferentes casos para hallar la ecuación de una función lineal, donde se esperaba que los estudiantes pusieran en práctica los elementos conceptuales de la actividad uno, buscando verificar el tratamiento que los estudiantes le daban a las diferentes situaciones en que se presenta la función lineal, a partir de la variación en sus elementos, cabe resaltar que lo de las estaciones hace parte de la metodología del colegio buscando que cada estudiante trabaje a su ritmo de aprendizaje.
- La tercera le brinda al estudiante la representación de una moto y un deslizador para cambiar la velocidad de esta, una vez el estudiante la manipula, obtiene la representación gráfica de la situación y la tabulación de los valores obtenidos de acuerdo a la selección de la velocidad realizada, buscando contextualizar una aplicación del concepto de función lineal desde la física.
- La cuarta se diseñó a partir de la representación gráfica de un modelo de oferta-demanda, de un producto específico, con características similares a la de la actividad anterior.

Concluye que los estudiantes con los que se realizó la investigación dieron principalmente características de niveles 2 y 3 en lo que se refiere al razonamiento covariacional y que también presentaron variaciones en la habilidad para aplicar este razonamiento al analizar eventos dinámicos.

Por su parte, los investigadores Henao, Marín, Montoya y Restrepo (2012) realizan un estudio que indica que es posible y necesario abordar el razonamiento covariacional desde los primeros años escolares, pues estudian este tópico en grado 5º dando cuenta de las distintas maneras en que los niños perciben la covariación entre dos magnitudes correlacionadas en tareas que involucran fenómenos de covariación. Esta investigación, consistió en un estudio de casos, que empleó un enfoque cualitativo, con el fin de identificar las características del razonamiento covariacional en 4 estudiantes de grado 5º en la IE República de Uruguay utilizando como constructo teórico el desarrollado por Johnson (2012) y Carlson (2003). En algunos de los razonamientos de los estudiantes se evidenció que establecieron relaciones de tipo covariacional entre las magnitudes implicadas en la actividad, dieron cuenta de que cambios particulares en una magnitud producen cambios particulares en la otra y reconocieron cambios simultáneos e interrelacionados (quiénes están cambiando, cómo están cambiando, relaciones de dependencia e independencia, qué permanece constante, implicaciones de una magnitud con respecto a la otra, entre otros). Además, en lo concerniente a la razón de cambio, algunos estudiantes demostraron que la estaban percibiendo a través de la comparación de las dos magnitudes desde la cuantificación. También, algunos de los razonamientos de los estudiantes se enmarcaron en la percepción de la tasa de variación como el surgimiento de una tercera cantidad relacionada con términos como velocidad, rapidez, ritmo rápido o ritmo lento. Este trabajo muestra la importancia de describir las comprensiones de los estudiantes en sus procesos de desarrollo de la conceptualización de la covariación, tanto en la educación básica primaria, como lo hicieron estos investigadores, como en educación secundaria (objeto del presente estudio).

Por su lado, Ávila (2011) describe, en su trabajo investigativo, el proceso de razonamiento covariacional asociado al concepto de función lineal y cuadrática abordado por medio del software Geo-gebra Modellus. Este estudio tuvo en cuenta algunos elementos del enfoque cualitativo y analizó el proceso de 3 estudiantes de grado décimo del colegio Vermont School (noveno en el currículo nacional) en el desarrollo de tres guías de trabajo que abordaban un conjunto de situaciones que involucraban fenómenos de covariación asociadas a la función lineal y cuadrática. Con este estudio se identificaron las acciones mentales de estos estudiantes, atendiendo a lo propuesto por Carlson (2003) y los procesos y comportamientos pseudoanáliticos, según Vinner (1997). Concluyen que los estudiantes con los que trabajaron las diferentes actividades dieron cuenta principalmente de características de nivel 3, debido a que la mayor parte del análisis dio muestras de la exteriorización de comportamientos que daban cuenta de la coordinación en la dirección de cambio y la cantidad de cambio de una variable que es dependiente con los cambios de otra que se conoce como variable independiente; además en los momentos que debían construir gráficas, la mayor parte del tiempo se observó un razonamiento lineal y la ubicación de puntos y segmentos entre esos puntos. Estos rasgos dan cuenta explícitamente de las acciones mentales (AM) propuestas por Carlson (1998) las cuales "*desde el marco conceptual de la covariación proporcionan un medio para clasificar los comportamientos que se pueden ver cuando los estudiantes se involucran en tareas de covariación"* entre ellas la coordinación del cambio de una variable respecto a la otra (AM1), el reconocimiento de la coordinación de la dirección del cambio de una variable respecto a la otra (AM2) y por último las estimaciones respecto a la coordinación de la cantidad del cambio de una variable respecto a la otra (AM3).

Los trabajos de investigación mencionados ilustran una manera distinta de abordar la enseñanza de la función lineal desde la covariación, donde se exponen situaciones dinámicas alejadas de la metodología tradicional, con el objeto de movilizar el pensamiento variacional de los estudiantes. Dentro de las propuestas se evidencian avances significativos con respecto a lo que los alumnos iban interiorizando a lo largo de las investigaciones. Las actividades y resultados obtenidos se vuelven de gran utilidad para el diseño de nuevas situaciones que aborden la covariación y que tengan en cuenta las producciones de los estudiantes.

2 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

2.1 Descripción del problema

El proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de función lineal no es fácil y prueba de ello son las numerosas investigaciones que se han realizado en torno a este concepto matemático y las propuestas de enseñanza que se han generado para contribuir a la comprensión correcta de este.

Pese a los esfuerzos investigativos en este campo, en las prácticas de aula, por su parte, aún se evidencia falta de empeño en llevar a cabo un proceso de enseñanza acorde a la complejidad de este concepto. La función lineal se aborda desde una perspectiva de correspondencia o de asignación, obedeciendo a ideas netamente algorítmicas o estáticas que están desligadas de verdaderos contextos de interpretación y análisis. Es decir, se privilegia la aplicación de fórmulas, el remplazo de valores de entrada, obteniendo valores de salida que pueden ser resumidos en el llenado de tablas, que posteriormente son representados en el plano cartesiano; como si llenar el tablero de cálculos, fórmulas y números reflejara un verdadero acercamiento a este concepto matemático.

Zúñiga (2009) afirma:

> La representación de funciones aún se reduce al trazado de la gráfica de una función, dada una expresión algebraica, representación que se hace siguiendo unos pasos previamente determinados (punto por punto, puntos de intersección, asíntotas, etc.) utilizando técnicas relativas a algoritmizar el paso del lenguaje algebraico al gráfico. (p.14)

La perspectiva de enseñanza tradicional deja de lado el enfoque covariacional, desde el cual se toma en consideración *"las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra"* (Carlson, 2003, p. 124). La perspectiva de la covariación debe atender a situaciones que impliquen fenómenos dinámicos en los cuales el estudiante identifique qué cambia, cómo cambia, cuánto cambia y finalmente, relación de un cambio de una variable respecto al cambio en la otra. Este tratamiento normalmente no se tiene en cuenta en las experiencias de aula. De modo que, el estudio de la función lineal debe implicar la relación de dependencia entre variables.

Por otro lado, algunas de las investigaciones realizadas en torno a la función lineal se centran en las estrategias metodológicas o las formas de enseñar este concepto. Sin embargo, también es necesario estudiar la manera en que los estudiantes están pensando las situaciones abordadas en torno a este. Así como la forma en que están realizando su proceso de aprendizaje. Estudiar las actuaciones de los estudiantes al abordar situaciones de covariación se constituye en una herramienta importante para las reflexiones y prácticas de los docentes. Carlson (2003, p.19) sugiere *"la necesidad de monitorear el desarrollo de los estudiantes sobre la función y de sus habilidades de razonamiento covariacional antes y durante su estudio del cálculo".*

Ahora bien, no es frecuente que los docentes e investigadores indaguen sobre los desempeños que los estudiantes pueden desarrollar en el abordaje de la función lineal desde una mirada variacional. Dentro de este marco ha de considerarse que, como dijo Perkins, *"para apreciar la comprensión de una persona en un momento determinado, pídanle que haga algo que ponga su comprensión en juego, explicando, resolviendo un problema, construyendo un argumento, armando un producto"* (1999, p.5)

Por las premisas anteriormente planteadas, se considera oportuno diseñar indicadores con los cuales se pueda evidenciar avances sobre el aprendizaje comprensivo de los estudiantes, alcanzado en el pensamiento variacional y más específicamente en la covariación lineal.

De modo, que surge la siguiente pregunta que orienta el presente trabajo investigativo,

¿Qué comprensiones se observan en los estudiantes de grado noveno del Colegio Tomás Carrasquilla IED, cuando analizan situaciones de covariación lineal asociadas a eventos físicos?

2.2 Justificación

El estudio de situaciones de covariación lineal potencializa el pensamiento variacional, en tanto fomenta habilidades cognitivas que son propias de este pensamiento. De acuerdo a lo expuesto en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006), el acercamiento a este pensamiento puede darse en la Educación Secundaria por medio del estudio del cambio, el cual se realiza analizando fenómenos de variación. Además, el desarrollo de este pensamiento les posibilita a los estudiantes alcanzar mejores niveles de desempeño en la resolución de problemas sustentados desde el estudio de:

- La variación y el cambio
- La modelación de procesos de la vida cotidiana,
- La modelación de procesos en las ciencias naturales y sociales
- La modelación de procesos en las matemáticas

En el grado noveno del currículo nacional esto se hace efectivo en el empleo de modelos funcionales, para el caso del presente ejercicio investigativo, modelos de función lineal.

Es importante distinguir las funciones lineales de las no lineales y conectar el estudio de la proporcionalidad directa con las funciones lineales. Es importante también tener en cuenta que las funciones permiten analizar y modelar distintos fenómenos y procesos no sólo en problemas y situaciones del mundo de la vida cotidiana, sino también de las ciencias naturales y sociales y de las matemáticas mismas (p.68)

De modo que las situaciones de covariación lineal contribuyen al análisis de fenómenos en los que intervienen magnitudes constantes y variables. Estas situaciones determinan que se puedan identificar en las variables involucradas, lo que permanece constante, lo que cambia, cómo cambia y cuánto cambia, así como las relaciones de dependencia e independencia de variables; reconociendo que a incrementos constantes de una variable se producen incrementos constantes en otra, hecho que no se válida para todo tipo de situaciones dinámicas, lo cual requiere de la pericia del estudiante el detallar bajo qué condiciones se establece cada tipo de relación lo que le implica pensar variacionalmente.

Como afirma Roldán (2013),

> la función lineal se constituye en excelente herramienta para estudiar y modelar problemas de variación. Las cantidades empleadas varían en tiempo, espacio, con otras cantidades, esta variación puede ser más rápida o más lenta, creciente o decreciente, sin embargo, mantiene tal ritmo de variación ante lo cual son fácilmente identificables patrones y regularidades en ella. Estos aspectos desarrollan significativamente el llamado pensamiento variacional. (p. 95)

Por lo tanto, es necesario que cuando se aborden situaciones de covariación lineal, no se haga de manera rutinaria y mecánica, partiendo de definiciones formales descontextualizadas que carecen de sentido, haciendo análisis estático del concepto. Más bien, se hace indispensable el uso de situaciones en las que por medio de la confrontación de datos y diferentes representaciones generen modelos de función lineal en los que elementos teóricos como el intercepto con el eje Y, la pendiente y la razón de cambio cobren significado (Roldán, 2013).

Ahora bien, según lo propuesto por el MEN en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas, “el desarrollo del pensamiento variacional, dadas sus características, es lento y complejo” por lo cual en el presente trabajo se considera importante abordar la covariación lineal como actividad previa a la formalización del concepto de función lineal, aspecto que no se estudia en esta investigación. Investigaciones como la de Carlson (2003) sugieren que los currículos enfaticen un enfoque covariacional para el aprendizaje de funciones. El proceso de covariación, visto según Saldanha y Thompson (1998), citado en Carlson, (2003) como “mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos variables de cantidades (magnitudes)" implica unas acciones mentales que movilizan el pensamiento variacional.

Por otra parte, a nivel nacional el ICFES evalúa a los estudiantes de grado noveno mediante la prueba SABER 9º con el fin de medir los desempeños de estos en los componentes propios de cada área, siendo en matemáticas el pensamiento variacional uno de los que refleja dificultades en el aprendizaje de conceptos y procesos básicos que se proponen en la misma.

También justifica este estudio los resultados de las pruebas saber grado noveno de la jornada mañana del colegio Tomas Carrasquilla IED correspondientes a los últimos tres años. Es de anotar que estos resultados corresponden al porcentaje de estudiantes que en la prueba no contestaron correctamente lo referente a cada uno de estos aprendizajes, evidenciando así algunas de las dificultades que se tienen en la institución con relación al desarrollo del pensamiento variacional.

En lo concerniente a los aprendizajes relacionados a dicho pensamiento en cada una de las tres competencias evaluadas encontramos: (ver tabla 1 en la página siguiente).

Teniendo en cuenta que la institución debe generar estrategias que conlleven a mejorar dichos aprendizajes dándole principal importancia a los que sobrepasan el 40%, es decir los que están en color naranja y rojo siendo estos los más críticos, se considera que es necesario identificar la manera como los estudiantes están comprendiendo las situaciones de covariación para así ajustar las prácticas de enseñanza y contribuir a que los estudiantes logren obtener algunos elementos que aumenten su nivel de comprensión.

En la presente investigación para hablar de comprensión se utilizará como referente la postura de Perkins (1999, p.5) quien aduce que esta se reconoce por medio del desempeño. Según este autor, “la visión de la comprensión vinculada con el desempeño favorece el aprendizaje gradual […]Los desempeños exigen atención, práctica y refinamiento”. Por esta y todas las razones expuestas anteriormente se considera oportuno estudiar los desempeños de los estudiantes tomasinos de grado noveno en los cuales se puedan evidenciar avances en la comprensión de la covariación lineal.

Tabla 1

Resultados pruebas SABER grado noveno años 2015 - 2017 Colegio Tomas Carrasquilla IED

COMPETENCIA	APRENDIZAJES POR MEJORAR	2015	2016	2017
COMUNICACIÓN	No usa ni relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación	54%	73%	38%
	No identifica características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan	43%	68%	49%
	No reconoce el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos	41%	76%	58%
	No reconoce relaciones entre diferentes representaciones de un conjunto de datos ni analiza la pertinencia de la representación	28%	29%	35%
	No establece relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas	21%	71%	53%
	No identifica expresiones numéricas y algebraicas equivalentes	No aplicó	No aplicó	70%
RAZONAMIENTO	No interpreta tendencias que se presentan en una situación de variación	64%	39%	46%
	No interpreta ni usa expresiones algebraicas equivalentes	48%	58%	48%
	No usa representaciones ni procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa	No aplicó	71%	No aplicó
	No verifica conjeturas acerca de los números reales, usando procesos inductivos y deductivos desde el lenguaje algebraico	No aplicó	61%	70%
RESOLUCIÓN	No resuelva problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos	46%	72%	69%
	No resuelve ni formula problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras y diagrama circular	No aplicó	No aplicó	51%

Datos tomados de la página del ICFES (Fuente: Elaboración propia)

2.3 Objetivo General

Describir las comprensiones que se observan en los estudiantes de grado noveno del Colegio Tomás Carrasquilla IED de covariación lineal en eventos físicos.

2.4 Objetivos específicos

- Diseñar e implementar una secuencia didáctica que promueva la complejización de las comprensiones de los estudiantes de la covariación lineal en eventos físicos
- Categorizar y analizar las comprensiones que se observan de los estudiantes de la covariación lineal.

3 MARCO TEÓRICO

El presente capítulo revela los elementos que conforman la fundamentación teórica de la presente investigación, en el cual se evidencia, el desarrollo histórico que ha tenido el concepto de función, para ello se hace énfasis específico de los sucesos sujetos al cambio y al movimiento, adicionalmente se exponen aspectos disciplinares del concepto de función que aportan elementos importantes en los procesos de comprensión y representación. Al mismo tiempo desde las consideraciones conceptuales asumidas, se expone la relación del objeto matemático de estudio con el pensamiento variacional y cómo se presenta este tema en el aprendizaje desde el enfoque de comprensión de Perkins.

3.1 Consideraciones históricas del concepto de función

En un amplio sentido, la importancia del concepto de función se debe a su enorme campo de aplicaciones, ejemplo de ello son las leyes físicas, que describen la forma en que ciertas magnitudes dependen de otras cuando alguna de estas varían, este aspecto se percibe claramente en el estudio del movimiento, la ley de Ohm, la ley de Hooke, la ley de la energía cinética entre otras, las cuales se caracterizan por estar representadas mediante una sola fórmula que define la correspondencia entre la variable dependiente e independiente asociadas a cada situación (Azcarate, 1996, p.18).

Este aspecto amerita ser ampliado desde una perspectiva histórica con el propósito de mostrar el concepto de función como un mecanismo dinámico que articula la matemática, con otras áreas del saber, por tanto, a continuación, los desarrollos que siguen se basan en los trabajos hechos por Gómez (2011) y Sánchez (2016).

Las nociones asociadas al concepto de función desde el estudio del movimiento, se pueden rastrear desde la edad antigua con los griegos, quienes, desde los tiempos de Heráclito y Zenón, habían considerado problemas asociados al movimiento, con aproximaciones cualitativas y cuantitativas muy disociadas que no favorecieron definir una formulación explícita del concepto de función.

En la edad media (desde el final del imperio romano hasta el siglo XV) se debe referenciar el trabajo desarrollado por los árabes que, como es bien conocido, tomaron el relevo de los griegos y permitieron que el legado de estos llegará a occidente y allí se gestara el interés de estudiar fenómenos sujetos a cambio, y en particular del movimiento. Preguntas del tipo, por qué sopla el viento, por qué la lluvia cae mientras el fuego sube o por qué los planetas brillan, aparecen junto a otras muchas, que direccionan los intereses investigativos a buscar un modelo del universo que permita responder a estas preguntas. No obstante, el paso adelante no se produjo tratando de hallar directamente una respuesta a estos interrogantes, sino iniciando un nuevo camino consistente en alterar el tipo de preguntas, así en lugar de preguntarse, por qué cae una piedra cuando la echamos al aire, se cuestiona cómo cae esta piedra, a qué velocidad. Este cambio, junto a la progresiva aparición de una ciencia experimental, permitirá un acercamiento entre las matemáticas y las ciencias de la naturaleza, y será la base del impulso que la ciencia sufrirá a partir del siglo XIV.

Las llamadas escuelas de filosofía natural de Oxford y París fueron dos de los principales núcleos de desarrollo de la ciencia en la edad media, tuvieron su mayor florecimiento durante el siglo XIV, influenciadas por pensadores como Roger Bacon (1214 - 1294), quién consideró las matemáticas griegas como un instrumento esencial para el estudio de los fenómenos de la naturaleza, estudió el movimiento local no uniforme partiendo de las doctrinas aristotélicas, Robert Grosseteste (1175 – 1253), quien analizó bajo la terminología propia de estas doctrinas fenómenos como luz, calor, densidad, velocidad que pueden poseer varios grados de intensidad. Empiezan a aparecer conceptos fundamentales como cantidad variable, entendida como un grado de cualidad, velocidad instantánea o puntual, y aceleración, todos ellos íntimamente ligados al concepto de función. Nicolás Oresme (1323 - 1382) principal representante de la escuela francesa, continuó el estudio sobre los fenómenos que cambian y abrió una nueva vía al proponer una aproximación geométrica, frente a los estudios cinemático-aritméticos desarrollados hasta aquel momento (Vargas, 2011).

Cerca de tres siglos después, periodo comprendido entre el siglo XV y el XVIII se presentó la época más fecunda para la formación del concepto de función, puesto que en él vivieron, entre otros, Galileo quien expresó las leyes del movimiento e incluyó en ellas el lenguaje de proporciones y a la vez las relaciones inversa y directamente proporcionales. Descartes, quien desarrolló el concepto de función en forma analítica al representar una curva por medio de una expresión algebraica, fue el primero en poner en claro que una ecuación de X e Y es una forma de mostrar dependencia entre cantidades, en donde los valores de una pueden calcularse a partir de los valores de la otra. Newton, se apoyó principalmente en el método de las tangentes de Descartes, consideró una tangente como la posición límite de una secante, pues, aclaró que, si los puntos de intersección con la curva están separados uno de otro por un pequeño intervalo, la secante distará entonces de la tangente un pequeño intervalo. Newton también introduce la noción de la diferencial designada por la palabra “momento” la cual es producida por una cantidad variable llamada “genita” que es considerada como variable e indeterminada y que aumenta o decrece mediante el movimiento continuo; esto se constituye en una aproximación al concepto de función. Leibniz describe una función como una cantidad formada de alguna manera a partir de cantidades indeterminadas y constantes, considera que el cálculo de variaciones es la teoría matemática que se desarrolló más en conexión al concepto de función. Gregory, a partir de la clasificación realizada por Descartes de las curvas geométricas y mecánicas, distingue entre funciones algebraicas y trascendentes, además da la primera definición explícita de función: "Una cantidad que se obtiene de otras cantidades mediante una sucesión de operaciones algebraicas o mediante cualquier operación imaginable". Con esto sugirió la necesidad del paso al límite cuya contribución, desde distintos puntos de vista, daría lugar al nacimiento primero de la geometría analítica y luego al cálculo infinitesimal, con el consiguiente progreso para el estudio de las funciones que permitirá la aparición de las primeras definiciones del término función (Vargas, 2011).

De esta manera el análisis histórico del concepto de función sugiere tener presente las nociones de variación y cambio en el diseño de situaciones para la construcción del concepto mencionado (Vargas, 2011).

Por tal razón, se validan todas las anteriores sugerencias en el diseño de las situaciones dinámicas de tipo covariacional expuestas en la unidad didáctica. (Ver tabla 2 en la página siguiente).

3.2 Concepto de función

Las diferentes definiciones dadas al concepto de función a través de la historia han cambiado producto del interés y solución de problemas de las ciencias como la física. La evolución de las definiciones creó una tensión entre formalismo y utilidad debido a que plantear definiciones bastante intuitivas provenientes de tales problemas carecen de formalidad, plantear definiciones con alto nivel de formalismo y consistencia alejan tal definición de la utilidad frente al problema, por hacerse más generales. (Roldán, 2013, p.31).

Tabla 2

Historia del concepto de función

ÉPOCA	DEFINICIÓN
Siglo XVII	Cualquier relación entre variables Una cantidad obtenida de otras cantidades mediante operaciones algebraicas o cualquier otra Cualquier cantidad que varía de un punto a otro de una curva Cantidades formadas usando expresiones algebraicas y trascendentales de variables
Siglo XVIII	Cantidades que dependen de una variable Función de cierta variable como una cantidad que está compuesta de alguna forma Cualquier expresión útil para calcular
Siglo XIX	Correspondencia entre variables Correspondencia entre un conjunto A y los números reales Correspondencia entre dos conjuntos
Siglo XX	Correspondencia entre dos conjuntos Conjunto de pares ordenados

Tomada de García 2012

En este sentido es de anotar que la definición del concepto de función no puede ser concebida, bajo ningún punto de vista como una tarea terminada y formalmente estructurada, pues hace parte de un proceso de redefinición y ajuste constante, sujeto a los intereses de aplicación del concepto, ejemplo de ello, se hace evidente en la siguiente postura:

Díaz (2013) afirma, que analizar el proceso histórico que ha experimentado el concepto de función, proporciona evidencias acerca de que, la enseñanza del concepto de función ha experimentado un desarrollo análogo al histórico, por tal razón, algunas de las dificultades que experimentan los estudiantes con el concepto de función, se parecen a las ideas que tenían los matemáticos del siglo XVIII. También pone de manifiesto las diferentes formas bajo las cuales se ha revelado el concepto de función, y los obstáculos epistemológicos significativos ligados a su desarrollo histórico. Permitiendo obtener algunas ideas que definieron parámetros claves en el diseño de las situaciones físicas de covariación. Entre ellas se mencionan las siguientes:

- Debemos buscar que el estudiante se interese en la explicación de los cambios y, en encontrar regularidades entre los cambios.
- Los estudiantes deben de ser capaces de decir no sólo qué cambia, sino también cómo cambia.
- Se deben utilizar los métodos de interpolación para el uso y construcción de tablas numéricas, ya que estas proporcionan contextos matemáticos dentro de los cuales se obtienen niveles más profundos de la noción de función.

Por consiguiente, para el presente ejercicio investigativo valoramos el concepto de función que subyace a la noción covariación y que pone de manifiesto la función desde la consideración de fenómenos de cambio y variación, es decir, el acercamiento al concepto de función desde un punto de vista dinámico, donde la dependencia entre variables debe primar sobre las reglas de asignación o correspondencia.

3.2.1 Representaciones de la función

La didáctica en las matemáticas sustenta la implementación de diferentes formas de representación (imágenes, dibujos, gráficas, tablas, símbolos), como una herramienta sólida que garantiza, la comprensión de un objeto matemático que por naturaleza propia es abstracto e intangible. En este sentido, los procesos de conceptualización requieren del uso de diferentes sistemas de representación, ya sea algebraico, geométrico y gráfico, entre otros.

D'Amore (2004) declara, que "t*odo concepto matemático requiere de representaciones, ya que no se dispone de objetos para presentar en su lugar, por ello la construcción del concepto debe darse sobre el tránsito entre registros representativos",* bajo esta inferencia un objeto matemático puede ser interpretado desde sus diferentes relaciones de representación las cuales configuran su significado.

El concepto de función lineal como ente abstracto, posee diversas representaciones semióticas para facilitar su comprensión, sin embargo *"el objeto representado puede variar según el contexto o el uso de la representación: en el caso de un gráfico cartesiano puede representar una función o el conjunto solución de una ecuación algebraica".* (Godino J. 2003, p.53). Lo cual parece confirmar, que la comprensión es el resultado de la conexión entre diferentes representaciones, las cuales otorgan significado al objeto matemático.

En consecuencia, es fundamental caracterizar, que la función lineal como concepto dinámico por naturaleza, posee múltiples representaciones en diferentes registros, los cuales se evidencian en el cuadro que se expone a continuación.

Tabla 3

Tipos de representación de la función.

TIPO DE REPRESENTACIÓN	DESCRIPCIÓN
Verbal	La función lineal presenta como representación una descripción en lenguaje natural, si se desea estudiar un fenómeno o resolver una situación problema que requiera ser modelado con una función, generalmente se tiene una descripción en lenguaje natural.
Registro tabular	La función lineal es representada por medio de una tabla de valores, en la cual se ponen en correspondencia las variables; sin embargo, tiene las limitaciones de la continuidad ya que se pueden incluir un número finito de valores.
Gráfico	Una función lineal se puede representar por medio de una línea recta (Continua o no) en el plano cartesiano.
Algebraico	La función lineal se representa por medio de una expresión algebraica o fórmula, que permite calcular la imagen f(x) para toda x correspondiente al dominio de la función.
Simbólico de los conjuntos	La función lineal se representa, como un conjunto de pares ordenados, que para su enseñanza se prefiere expresarlo por extensión y no por comprensión por su alto nivel de abstracción.
Figural	Hace mención a la relación de correspondencia entre los elementos del conjunto de partida, llamado también el dominio y el conjunto de llegada, llamado rango de la función.
Icónico	Asume la función como una "máquina", posee una entrada a la que se le suministran unos datos y una salida en donde se obtiene un valor.

Adaptada de García 2012

Por lo tanto, como sustento de la presente investigación validamos los siguientes planteamientos de Duval (2006) y D'Amore (2004), quienes determinan la conversión[2] de registros de representación como actividad fundamental para la aprehensión de los objetos matemáticos, en este sentido la comprensión del concepto de función se apoya en la coordinación de al menos dos registros de representación.

3.2.2 Razón de cambio

El matematizar y cuantificar los fenómenos es respuesta a la necesidad de predecir futuros comportamientos en los mismos, lo cual sustenta la definición de un modelo de aproximación, que dé cuenta de la relación entre los cambios de las variables asociadas a un evento del contexto real, dicho cambio de orden cuantitativo representa las relaciones de dependencia, entre las variables asociadas a la situación y como afirma Rendón (2016), estas relaciones pueden ser representadas de diferentes formas,[2] entre ellas las mencionadas en la tabla 4 (ver en la página siguiente).

Según Rendón (2009), la razón de cambio se matematiza mediante el cálculo, que se considera como la rama de las matemáticas que realiza las operaciones necesarias para prever un resultado de una acción previamente concebida, o conocer las consecuencias que se pueden derivar de unos datos previamente conocidos.

"La razón de cambio se define como un cociente incremental o de diferencias". El cociente es definido como el cambio o diferencia en el eje Y dividido por el respectivo cambio en el eje X,

---

[2] *Conversion* según (Duval 1999) es una actividad cognitiva que consiste en la transformación de una representación propia de un registro en otra representación perteneciente a otro registro de representación

reconociendo que el cambio se establece hallando la diferencia entre una magnitud final con una inicial. Usando la notación moderna puede escribirse como:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

Tabla 4

Tipos de representación de la razón de cambio

TIPO DE REPRESENTACIÓN	DESCRIPCIÓN
Geométrica	Aparece cuando las magnitudes involucradas en la situación de cambio se asocian con longitudes de segmentos.
Tabular	Aparece cuando se está en capacidad de producir diferentes medidas de las magnitudes involucradas en la situación de cambio. Se puede hacer un estudio de esos datos para encontrar patrones de regularidad. Los patrones de regularidad o los métodos de regresión permiten encontrar expresiones algebraicas que condensan el comportamiento de las variables involucradas y que se ajustan a los datos que sobre los mismos se tienen.
Algebraica	De acuerdo a los patrones de regularidad encontrados en la tabla se pueden establecer expresiones algebraicas que condense toda la información acerca de la situación de cambio. Las propiedades algebraicas de las expresiones permiten encontrar aspectos del comportamiento de las variables relacionadas en el problema de estudio
Gráfica	Se hace mediante la representación en el plano cartesiano, con un sistema de coordenadas cartesianas de los datos de la tabla que consignan las mediciones de las magnitudes involucradas. Se puede así mismo producir la gráfica a partir de las expresiones algebraicas que se obtuvieron de la tabla. Entonces se diferencian las variaciones lineales, cuadráticas, cúbicas y así sucesivamente.

Adaptada de Rendón 2016

Es de gran importancia resaltar que para el presente ejercicio investigativo la razón de cambio es considerada criterio de análisis, puesto que dota la secuencia didáctica de un significado contextual, al enunciar relaciones significantes entre las variables que determinan las relaciones de correspondencia, propuestas en las situaciones de tipo covariacional.

Por otra parte, es de aclarar que la razón de cambio es constante para las representaciones gráficas correspondientes a la función lineal y es variable para las demás formas de representación gráfica (cuadrática, cúbica, exponencial…). Por “constante” se entiende que el valor de la razón de cambio siempre es el mismo y se asocia a aquellas situaciones de variación que relacionan incrementos iguales en una de las variables respecto a incrementos iguales de la otra variable, del mismo modo la razón de cambio asocia valores diferentes cuando a variaciones iguales de una variable no se determinan las variaciones iguales de la otra variable, tal como se expone en las cuatro situaciones de análisis de la secuencia didáctica.

3.3 El pensamiento variacional en el concepto de función

De acuerdo con la propuesta de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006), el desarrollo del pensamiento variacional tiene un alto nivel de trascendencia para los estudiantes. Como su nombre lo indica, este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la educación básica primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para que en el momento de analizar fenómenos que relacionan procesos de variación, que pueden ser representados en diferentes registros, los jóvenes alcancen niveles de desempeño flexibles.

3.3.1 Pensamiento variacional desde Vasco

Vasco (2006) investigador en el ámbito educativo, ha realizado aportes significativos al campo matemático en lo que refiere al pensamiento variacional, describiendo este pensamiento como una manera de pensar dinámica, donde se producen sistemas que relacionan sus variables de tal forma que covarían en la obtención de un modelo, señalando así la modelación matemática como principal propósito del pensamiento variacional. Desde esta perspectiva el pensamiento variacional apunta a la construcción mental de relaciones y patrones que presentan las variables que covarían entre sí, por lo cual, argumenta que es importante que el estudiante identifique en diferentes contextos lo que varía, lo que se mantiene constante y las regularidades que se presentan en esos procesos y así sea posible indicar la forma en que se relacionan las variables y las formas en que covarían las mismas.

3.3.2 El estudio de la variación desde el razonamiento covariacional

Algunos autores han reflexionado sobre la importancia de analizar patrones de cambio en varios contextos, para que los estudiantes comprendan las diferentes situaciones en las que interviene el fenómeno de la covariación. De ellos hemos tenido en cuenta las consideraciones hechas por:

Carlson et al. (2003), quien define el razonamiento covariacional como *"las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra"* (p.124). Quien a su vez cita a Saldanha y Thompson (1998), quienes describen la comprensión de la covariación como *"mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos valores de cantidades (magnitudes)"* (p.298), manifestando que esta actividad mental implica la coordinación de las dos cantidades involucradas en la situación, donde se hace necesario un seguimiento al valor de cada cantidad y de esta forma, darse cuenta de que la otra cantidad también tiene un valor en cada instante.

Carlson considera que a partir de este punto de vista las imágenes cobran gran relevancia al momento de generar una idea de covariación, como también que son evolutivas, definiendo así unos niveles de razonamiento covariacional los cuales emergen en una sucesión ordenada de estas imágenes mentales.

Para Confrey y Smith (1995), un enfoque de covariación que tenga como fin crear y conceptualizar funciones, incluye la formación de vínculos entre los valores del dominio de una función y los de su recorrido. En el caso de las tablas, esto incluye la coordinación de la variación en dos o más columnas mientras se recorre la tabla de arriba a abajo (Confrey y Smith, 1994). Tanto Confrey y Smith (1995) como Thompson (1994) describen la acción de coordinar como fundamental para el razonamiento acerca de las relaciones funcionales dinámicas.

Por su parte, Posada y Villa (2006), proponen una aproximación variacional a la función lineal; en sus investigaciones estos autores llaman la atención sobre la necesidad de que converjan elementos asociados a los sistemas de representación y a la modelación matemática. Así mismo, cuestionan el excesivo énfasis que se hace en la definición algebraica de la función lineal en la introducción al concepto de función; estudiar este concepto de esta manera no siempre permite interpretar factores asociados a la variación.

La covariación, entendida como la comparación de dos valores de una magnitud respecto a dos valores de otra, ha sido ejercicio de reflexión para esta investigación ya que representa una alternativa dinámica de abordar el tema de función, además es un mecanismo que posibilita de herramientas a los estudiantes para ser capaces de analizar patrones de cambio en varios contextos, del mismo modo les permite desarrollar una *"comprensión más profunda de las maneras en que los cambios en las cantidades se pueden representar matemáticamente"* (NCTM, 2000, p. 305) posibilitando afianzar habilidades de interpretación de modelos de eventos dinámicos (Kaput, 1994; Rasmussen, 2000).

Por lo anterior se identifican algunas consideraciones conceptuales que serán sustento teórico para fundamentar el diseño de las actividades de comprensión que se generan en la secuencia didáctica, propuesta desde el presente trabajo investigativo:

Razonamiento covariacional: según Carlson, Jacobs y Larsen, (2001), son las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra.

Razón de cambio: de acuerdo con Thompson (1998), una imagen madura de razón involucra lo siguiente, la construcción de una imagen de cambio en alguna cantidad, la coordinación de imágenes de dos cantidades y la formación de una imagen de la covariación simultánea de dos cantidades.

Comprensión en la covariación: Saldanha y Thompson (1998), describen la comprensión de la covariación como *“mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos valores de cantidades (magnitudes)”* (p. 298). Esta actividad mental involucra la coordinación de las dos cantidades, es decir, hacer seguimiento al valor de cada cantidad y darse cuenta de que la otra cantidad también tiene un valor en cada instante. En esta teoría, las imágenes de covariación se consideran como algo que se desarrolla y tal desarrollo pasa de la coordinación de dos cantidades a las imágenes de la coordinación continua de ambas cantidades para un lapso determinado.

3.4 La comprensión en el concepto de función

La enseñanza y el aprendizaje con comprensión son sin lugar a duda uno de los principales intereses que se pretenden alcanzar en el aula de clases, por tanto suelen admitirse como objetivos deseables y prioritarios, tanto en matemáticas como en cualquier área del saber, lo que ha impulsado una corriente investigativa que se ocupa esencialmente del desarrollo de la comprensión en la enseñanza de las matemáticas, para lo cual ha sido premisa fundamental reconocer la construcción de conocimientos no sólo como resultado de procesos cognitivos internos del estudiante, sino que también como consecuencia de un componente externo sociocultural que condiciona los alcances del aprendizaje. Por tanto, el estudio de la comprensión ha dado lugar a programas de enseñanza experimentales (Carpenter, Fennema et al., 1999), proyectos curriculares orientados a garantizar un aprendizaje comprensivo (Goñi, 2000) y enfoques, como los que se presenta en este documento, que prefieren dar un rodeo a tan importantes y complejas cuestiones para centrar su atención en los efectos observables, en las manifestaciones externas y en su interpretación.

3.4.1 La comprensión desde diferentes autores

La noción de comprensión adopta distintos significados según el contexto en el que es utilizada, a continuación, se exponen diferentes concepciones de este objeto:

Sierpinska (1990) define la comprensión como un acto que está inmerso en un proceso de interpretación, y que se desarrolla en forma dialéctica entre conjeturas cada vez más elaboradas, señala también que la comprensión trae consigo un nuevo modo de conocimiento, así que se puede clasificar ésta en función del conocimiento que produce, y propone cuatro categorías mentales. Identificación: este acto consiste en una percepción repentina de objetos que pertenecen a la denotación del concepto (relacionados con el concepto en cuestión) o a la identificación de un término como poseedor de un status científico. Discriminación: diferenciación entre dos objetos, propiedades o ideas que se confundían antes. Generalización: consiste en darse cuenta de que algunas condiciones no son esenciales o de la posibilidad de extender el rango de aplicaciones. Síntesis: consiste en adquirir relaciones entre dos o más propiedades, hechos u objetos y organizarlos en un todo consistente. En este sentido se puede aseverar que la investigadora, percibe el fenómeno de la comprensión como un concepto condicionado a las formas de conocimiento, las cuales no son estáticas y de manera particular las relaciona con lo que Bachelard y Brousseau (1983) denominaron obstáculos epistemológicos, es decir, la comprensión que un sujeto tiene de un concepto es siempre un obstáculo epistemológico, porque esa forma de conocimiento es parcial; el modelo funciona para algunas situaciones matemáticas pero no para otras. Cuando el sujeto vive las experiencias contradictorias y se ve forzado a reorganizar sus formas de conocimiento tiene lugar un acto de comprensión significativo (Gómez, 2000). En este orden de ideas es claro entender por qué Sierpinska consideró la comprensión y los obstáculos como las dos caras de la misma moneda, una es la parte negativa, los obstáculos, puesto que presta atención a lo que es erróneo, mientras que la otra, la comprensión, es la parte positiva puesto que busca nuevas formas de conocimiento, por tanto algunos actos de comprensión, pueden ser catalogados como actos de superación de obstáculos y otros se convierten en actos de adquisición de nuevos obstáculos. Para ella, una descripción de actos de comprensión de un concepto matemático debería completarse con una lista de obstáculos epistemológicos relacionados con el concepto, aportando así más información sobre su significado.

Davis (1992) presenta una teoría acerca de cómo se produce el fenómeno de la comprensión utilizando la conocida metáfora del puzzle. El autor considera que las ideas son como piezas de un puzzle, que llegan a ser útiles y cobran sentido sólo si encajan en un conjunto de piezas previamente combinadas entre sí para formar una imagen coherente.

Hiebert y Carpenter (1992) consideran otro modelo, ampliamente aceptado y calificado por algunos autores como concepción fundamental, que considera la comprensión como resultado de establecer conexiones entre representaciones cognitivas, que garanticen, siempre a partir de datos reales obtenidos mediante instrumentos concretos, una información útil, válida y fiable y una valoración de la comprensión ajustada a la realidad cognitiva de los sujetos, es decir, la comprensión del conocimiento matemático se presenta en la propuesta representacionalista como una cuestión especialmente crítica y débil que puede ser superada con enfoques operativos basados, entre otros aspectos, en las características del conocimiento matemático y en el acercamiento permanente a la realidad.

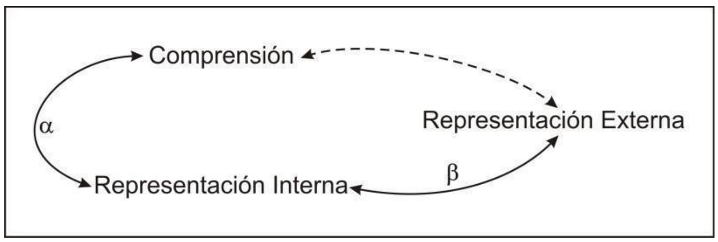


Figura 1 Elementos y relaciones intervinientes en la relación comprensión-representación según la visión representacionalista (Fuente: Tomado de Gallardo2004)

Se trata de una aproximación que aparece más completa en algunos estudios desarrollados en el seno del Grupo de la SEIEM “Pensamiento Numérico” (Romero, 2000) y que presenta cierta similitud en lo fundamental con la noción de comprensión asociada a las prácticas personales y a los significados del conocimiento matemático (Díaz, 2000). Otros autores destacan también la faceta cognitiva de la comprensión (Resnick y Ford, 1990; Skemp, 1993; Gusev y Safuanov, 2000).

Boix y Garner (1999), sugieren que la comprensión existe y adquiere calidad cuando se hace buen uso de los conceptos, teorías, narraciones y procedimientos en las artes y las ciencias, donde el sujeto debe ser capaz de comprender la naturaleza del conocimiento para resolver problemas, obtener resultados, tomar decisiones y transformar su entorno.

English y Halford (1995) también consideran la comprensión de un tópico matemático como el proceso consistente en la elaboración de una representación o modelo mental que incluya las relaciones esenciales que lo caracterizan. Cada sujeto elabora su propio modelo mental en función de las relaciones particulares que sea capaz de representar internamente. Tal como subrayan los autores:

> La esencia de comprender un concepto es poseer una representación mental o modelo mental que verdaderamente refleje la estructura de este concepto. […] comprender el número es tener un modelo mental de él que incluya todas las relaciones esenciales de los números, al menos en el dominio donde el concepto es utilizado. (p. 57)

Pirie y Kieren (1989) exponen las principales características de una teoría sobre comprensión en matemáticas a la que denominan “recursión trascendente”. El interés se centra en el estudio de la evolución de la comprensión en los sujetos, para lo que proponen un modelo de ocho niveles potenciales (Pirie y Kieren, 1994) con el que pretenden representar o describir esta evolución. Su concepción la expresan del siguiente modo:

> La comprensión matemática puede ser caracterizada como nivelada, pero de forma no lineal. Es un fenómeno recursivo y la recursión sucede cuando el pensamiento se desplaza entre niveles de sofisticación. En realidad, cada nivel de comprensión está contenido en niveles sucesivos. Cualquier nivel particular depende de las formas y procesos de dentro y, además, está obligado por los de fuera (p. 8)

Posada (2006) define la comprensión de la noción de función como un campo problemático que sugiere un trabajo donde se requiere de diversos factores, entre ellos, un reconocimiento de los principales obstáculos epistemológicos a los cuales se ve enfrentado un estudiante cuando inicia sus estudios acerca del concepto de función, tener presente la importancia que dicho concepto representa para la modelación de fenómenos de variación y el papel que desempeñaron estos fenómenos en la construcción y posterior formalización del concepto de función.

Desde cada una de las posturas de estos autores se resaltan aspectos importantes y significativos al momento de teorizar en la comprensión, en donde de manera general mencionan que cada sujeto es quien elabora su propio modelo mental de un determinado elemento a partir del conocimiento que este tiene, y que durante el proceso de aprendizaje el sujeto se ve forzado a reorganizar sus formas de conocimiento dando lugar a la comprensión, la cual es la finalidad de todo proceso, en este caso, del proceso de aprendizaje. Aunque todos los aportes son importantes, nuestra investigación no se apoyara en ninguno de ellos.

3.4.2 La comprensión según Perkins

Para el desarrollo de esta investigación se ha considerado el enfoque propuesto por David Perkins respecto a su concepción de la comprensión, la cual ha delimitado la formulación de cada una de las categorías de análisis propuestas, pues es la comprensión la que permea de significado las estrategias y procedimientos que subyacen de cualquier tipo de práctica educativa, en este sentido lo que se buscó fue visibilizar las habilidades de pensamiento relacionadas con el análisis de situaciones de tipo covariacional, situaciones que como sugiere Perkins relacionan actividades creativas en la que los estudiantes van más allá de la información suministrada demostrando actividades de comprensión que involucran la capacidad de hacer útil el conocimiento adquirido.

Según Perkins (1999), la comprensión es la *"habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. Para decirlo de otra manera, la comprensión de un tópico es la "capacidad de desempeño flexible"* con énfasis en la flexibilidad. De acuerdo con esto, aprender para la compresión es como aprender un desempeño flexible, más parecido a aprender a improvisar jazz, mantener una buena conversación o trepar una montaña, que, a aprender la tabla de multiplicar, las fechas de los presidentes o que F=MA. Aprender hechos puede ser un antecedente crucial para el aprendizaje para la compresión, pero aprender hechos no es aprender para la comprensión. Esta idea de la comprensión vista desde el desempeño contrasta con otra visión de la comprensión preeminente tanto en nuestro lenguaje cotidiano como en la ciencia cognitiva. A menudo pensamos la comprensión como algún tipo de representación, imagen o modelo mental que tiene la gente. Cuando logramos comprensión decimos: "lo tengo". La comprensión es algo que se posee más que la capacidad de realización". En palabras de Perkins hay un verdadero problema aquí identificar ¿Cuál concepción es mejor y por qué?

Este dilema puede ser abordado desde un sinnúmero de percepciones, las cuales orientan, la observación, diagnóstico y posterior valoración de la comprensión, pero nos parece acertado poner fin a esta dicotomía a partir de relacionar la presunción de Perkins.

3.4.2.1 La comprensión como desempeño flexible

Este enfoque de comprensión, puede ser fácilmente relacionado con la evidencia observable de la comprensión, pues el estudiante lo demuestra cuando es capaz de desempeñarse flexiblemente con relación al objeto de estudio, es decir, cuando manifiesta la capacidad de justificar, extrapolar, vincular y aplicar lo aprendido exhibiendo la posibilidad de ir más allá del conocimiento y de la habilidad rutinaria. De esta forma el desempeño flexible, orienta producciones de comprensión y está relacionada con las diferentes experiencias y desarrollos que se despliegan de la capacidad de reflexión de los diferentes tópicos y disciplinas de estudio que vinculan diferentes exigencias, las cuales permiten categorizar niveles en la comprensión. En efecto, Perkins (1999) suscita, "*por definición los desempeños de comprensión son actividades que van más allá de la memorización y la rutina. Un desempeño de comprensión siempre nos obliga a ir más allá".*

3.4.2.2 La comprensión como representación

La visión representacional de la comprensión, contrasta con la visión del desempeño flexible, pues establece un vínculo sólido entre la percepción y la comprensión, que se justifica desde la presunción de ver las comprensiones, de ahí que sea muy común afirmar, frases como: "veo lo que dices", "veo a través de ti", "veo la respuesta"…, en este sentido la comprensión como representación exige alcanzar una visión mental que capta lo que ha de comprenderse, así los modelos conceptuales son relacionados con diferentes representaciones como esquemas, modelos o imágenes, entonces puede decirse que la comprensión desde el enfoque representacionista, se sustenta en la posesión de una estructura mental que relaciona la representación adecuada, mientras que para el desempeño flexible la representación es solo una percepción, ya que la comprensión se fija en la propia capacidad de realización.

Por lo anterior, vale la pena aclarar que el desarrollo de esta investigación buscó corroborar la percepción de Perkins de la comprensión como un desempeño flexible, pues el afirmar que un sujeto comprende de algún modo o en cierto grado u determinado conocimiento, requiere implícitamente un uso consciente e intencionado de dicho conocimiento. Este uso podrá ser diferente en cada caso, dependerá de la situación problemática a la que se esté enfrentando por lo que la determinación de campos situacionales cobra en este punto especial importancia, en palabras de Perkins (1999) *"solo es posible retener, comprender y usar activamente el conocimiento mediante experiencias de aprendizaje en las que los estudiantes reflexionan sobre lo que están aprendiendo y con lo que están aprendiendo".*

En este sentido, se puede inferir que hay comprensión cuando el estudiante pone a prueba sus habilidades cognitivas mediante la exploración de nuevos caminos para resolver una situación que le interesa, a partir de ir más allá, inquirir, indagar y buscar mayor claridad en las respuestas a sus preguntas, tomando riesgos intelectuales que desafíen sus concepciones previas.

3.4.3 La comprensión como fundamento teórico de las categorías de análisis

Para la formulación de las categorías de análisis se consideraron los siguientes fundamentos como base:

- Perkins (2003) dice que:

> La comprensión no es un estado de posesión sino como un estado de capacitación. Cuando entendemos algo, no sólo tenemos información, sino que somos capaces de hacer ciertas cosas con ese conocimiento. Estás cosas que podemos hacer, que revelan comprensión y la desarrollan, se denominan "actividades de comprensión" y relacionan diferentes formas de explicación, ejemplificación, aplicación, justificación, comparación y contraste, contextualización, generalización, etcétera. (pp. 79-101)

- Niss (1999), dice que:

> […] para un estudiante involucrado en el aprendizaje de las matemáticas, la naturaleza, contenido y rango específico de un concepto matemático que él o ella está adquiriendo o construyendo está, en gran parte, determinado por el conjunto de dominios específicos en los cuales el concepto ha sido concretamente ejemplificado e incluido para este estudiante particular. (p. 15)

- White y Gunstone (1992) afirma que:

> Comprensión de conceptos y disciplinas: Las definiciones asociadas a los conceptos, aun siendo importantes, no son imprescindibles para su comprensión. Por otra parte, la comprensión de un concepto o disciplina no ha de verse como un estado dicotómico (todo o nada), sino como un continuo sin límites que nunca llega a completarse, es decir, un continuo que no debe considerarse unidimensional sino multidimensional. (s.p.)

- English y Halford (1995), *"Un beneficio de la comprensión es que puede guiar el desarrollo de estrategias y procedimientos apropiados"* (p. 77).

- Sierpinska (1994), *"Un objeto o entidad puede ser comprendido de diferentes formas y la comprensión no siempre consiste en lo mismo".* (s.p.)

- Díaz-Godino (2000) entiende la comprensión personal de un objeto matemático como la captación o apropiación de su significado. De esta manera, la comprensión se valorará en términos de correspondencia con el significado institucional establecido para ese objeto por la institución donde tiene lugar la valoración. Así,

> Una institución (escolar o de otro tipo) dirá que un sujeto comprende el significado de un objeto -o que ha captado el significado de un concepto, por ejemplo- si dicho sujeto es capaz de realizar las distintas prácticas prototípicas que configuran el significado de dicho objeto institucional. (pp. 84-85)

Desde estos fundamentos mencionados, desprendemos la idea de que la enseñanza basada en la comprensión resulta fundamental para el desarrollo de una educación adecuada, completa y de calidad, pues es la comprensión quien asiste al sujeto a la hora de desarrollar procedimientos y estrategias de resolución de tareas matemáticas, produciendo experiencias intelectuales satisfactorias, que ponen en funcionamiento acciones que involucran el experimentar, utilizar y aplicar flexiblemente el conocimiento, lo cual implica trascender a niveles de desempeño cada vez más complejos que involucren situaciones de la vida real y que permitan poner a prueba lo aprendido.

Por tanto, la comprensión del concepto de función lineal debe estar relacionado a una propuesta de análisis de situaciones que permitan dar significado al concepto de este objeto matemático, por esto en la propuesta didáctica se ilustran situaciones que privilegian la perspectiva covariacional de forma dinámica, para establecer relaciones directas con contextos de interpretación y análisis que evidencien que la comprensión va más allá de reportar cierta información, pues es un esquema de acción que requiere atención, práctica y refinamiento, que se solidifica en un compromiso reflexivo.

De acuerdo con lo mencionado, es importante validar la forma en que los estudiantes aprenden y logran adquirir o acumular conocimientos matemáticos nuevos. Para ello, se requiere contar con una propuesta didáctica bien estructurada, que permita categorizar las comprensiones de los estudiantes en torno a tareas de covariación que asocian, reglas de asignación, campos de variación, diferentes representaciones, análisis de gráficas, razón de cambio, entre otros. Esta propuesta define algunas de las comprensiones que alcanzan los estudiantes cuando solucionan situaciones dinámicas de tipo covariacional, entre ellas:

1. Relaciona las formas de covariación con las características del fenómeno de estudio.
2. Analiza representaciones tabulares.
3. Interpreta representaciones cartesianas.
4. Reconoce cuando se da la constancia de la razón de cambio y cuando no.
5. Interpreta la representación cartesiana de dos o tres gráficas: el punto de intercepto de las dos o tres gráficas, el intercepto con Y, y la mayor o menor inclinación de las rectas.

De esta manera, se articula la concepción de Perkins de la comprensión, a un ejercicio práctico del aula.

4 METODOLOGÍA

La presente investigación implicó describir, analizar e interpretar las comprensiones que se observan en los estudiantes cuando desarrollan tareas relacionadas con situaciones de covariación lineal, asociadas a eventos físicos. El carácter cualitativo del presente ejercicio permite como afirman Grinnell (1997) y Creswell (1997) citado por Hernández, Fernández y Baptista (2006) la garantía de las siguientes condiciones del estudio, necesarias para los objetivos de esta investigación:

- Se conduce básicamente en ambientes naturales, donde los participantes se comportan de forma auténtica
- Las variables no se definen con el propósito de manipularse
- La recolección de datos está influida por las prioridades de los participantes en la investigación, más que por la aplicación de instrumentos de medición estandarizados o estructurados
- Los significados se extraen de los datos y no necesitan reducirse a números ni deben analizarse estadísticamente (aunque el conteo puede utilizarse en el análisis)

De este modo, en el estudio de las comprensiones de los estudiantes se dejó claridad a los mismos de la importancia de ser genuinos en sus respuestas, teniendo en cuenta que no se les daría un juicio evaluativo de si sus respuestas eran o no correctas, sino más bien que se valoraba su naturalidad en su comportamiento y forma de pensar las situaciones dadas a lo largo del proceso los instrumentos utilizados no se constituían en cerrados, sino más bien eran preguntas abiertas que le permitían a los estudiantes flexibilizar sus saberes en las situaciones dadas. De hecho, en las intervenciones, los investigadores procuraban no manipular las comprensiones de los estudiantes en el proceso sino analizar las respuestas de estos y realizar una descripción e interpretación de éstas, buscando un significado en los datos recogidos. Este análisis recurre poco a lo estadístico, solo cuando se considera pertinente se utiliza el conteo (la frecuencia de tipos de respuestas).

Ahora bien, bajo las premisas del enfoque cualitativo de describir, interpretar y analizar la información se utilizó como método el estudio de casos, que como lo define Stake (2007) es "el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes". De este modo, se seleccionaron tres estudiantes de desempeño alto, medio y bajo con el fin de describir a profundidad y de manera detallada qué comprenden y cómo comprenden situaciones de covariación.

4.1 Caracterización de la población

El estudio se realizó en el Colegio Tomas Carrasquilla IED, está ubicado en la localidad 12 de la cuidad de Bogotá, en el barrio San Fernando, sin embargo, el 70% de la población estudiantil no vive en la localidad, ellos son transportados, por el servicio de rutas de la secretaria de educación, desde la localidad de suba, lo cual clasifica la población dentro de los estratos socioeconómicos menos favorecidos. Los estudiantes asisten al colegio de 6:10 am a 2:10 pm, cuentan con el servicio subsidiado, de desayuno y almuerzo, pues el colegio opera con jornada única.

El grupo en el que se desarrolló la experiencia, es de grado noveno, cuenta con 22 estudiantes, de los cuales solo 19 de ellos participaron de la investigación, las edades de los estudiantes oscilan entre 14 y 16 años, de los cuales dos se encuentran repitiendo noveno grado, el curso correspondiente es el 905, como es usual, está caracterizado por la presencia de varios estudiantes con diferentes habilidades e intereses en el área de matemáticas, lo cual dificulto, el proceso de selección de los tres casos de análisis.

Por tal razón, para seleccionar los tres jóvenes, que iban a ser los casos de estudio, se examinó, los niveles de desempeño escolar, reportados en el grado anterior, en el área de matemáticas, de esta manera se eligieron los sujetos, Suj1, Suj2 y Suj3, quienes reportaron haber tenido desempeño alto, medio y bajo respectivamente.

4.2 Descripción global del procedimiento

El presente trabajo investigativo se llevó a cabo en el Colegio Tomas Carrasquilla IED, con los estudiantes de grado noveno, el grupo conformado por 22 estudiantes, desarrollo la secuencia didáctica propuesta en un periodo aproximado de tres meses, con dos intervenciones por semana de aproximadamente de 120 minutos cada una. La secuencia didáctica se propuso como un instrumento de recolección de información, el cual permitió observar las comprensiones que tienen los estudiantes del pensamiento covariacional, cuando estudian situaciones dinámicas asociadas a eventos físicos.

Para el desarrollo de esta propuesta investigativa, se seleccionaron tres estudiantes, los cuales reportan diferentes desempeños en matemáticas (bajo, medio y alto), quienes serán los casos de estudio.

A la totalidad de los estudiantes del curso, se les aplica una prueba inicial, cinco sesiones de intervención y tres guías evaluativas, en un periodo de tiempo comprendido entre el 23 de enero al 21 de marzo del año 2018, con el objeto de estudiar cuatro situaciones distintas, de covariación lineal en eventos físicos, las cuales serán analizadas con la intensión de observar las comprensiones que demuestran los estudiantes, frente al objeto de estudio.

Las situaciones dinámicas de covariación lineal, que se relacionaron en la secuencia didáctica propuesta, fueron:

- Explorando la relación entre la variación de la altura del nivel del agua en una probeta y la cantidad de monedas que se introducen.
- Comprobando la covariación lineal en situaciones de llenado.
- La covariación lineal y la Ley de Hooke.
- Covariación lineal en eventos que relacionan movimiento.

Por otra parte, es de aclarar, que la prueba inicial, se realizó con la intensión de observar los desempeños de comprensión que los estudiantes reportaban antes de la aplicación de la secuencia didáctica, para convalidarlos en las demás sesiones implementadas.

Para aplicación de la secuencia didáctica, cada una de las sesiones de intervención se subdividió en dos momentos, los cuales estaban orientados a valorar tanto el trabajo individual como el colectivo.

Después de aplicar la secuencia didáctica completa, se procede a iniciar la fase de análisis, para la cual se seleccionaron las producciones escritas en las hojas de trabajo correspondientes a las tres guías evaluativas y las producciones verbales captadas en cada una de las entrevistas semiestructurada, que se aplicaron a los tres casos de análisis ya referenciados.

Es de agregar, que, en el proceso de análisis, se validó la visión de comprensión, vinculada con el desempeño propuesta por Perkins (1999), y se categorizaron dichas comprensiones observadas, de acuerdo a la matriz de categorías de análisis propuesta, dando cumplimiento, al propósito planteado, en el objetivo general que sustenta la presente investigación.

4.3 Instrumentos de recolección de información

El proceso de recolección de información estuvo definido por la implementación de la secuencia didáctica, información que se encuentra registrada, en las producciones escritas de los estudiantes y las grabaciones de las entrevistas Semiestructuradas, aplicadas a los mismos.

4.3.1 Producciones escritas

Los estudiantes resolvieron una prueba inicial, seis guías de sesiones en las que los investigadores intervinieron y tres guías evaluativas, las cuales se relacionaron con el desarrollo de las tareas de tipo covariacional, asociadas a eventos físicos. Las producciones escritas consistieron la elaboración de textos explicativos y argumentativos en los que se evidenciaron de manera particular el uso variado de palabras, dibujos y otras representaciones en el papel, de las cuales solo fueron analizadas, las que se relacionaron en las tres guías evaluativas, mencionadas anteriormente.

4.3.2 Entrevistas Semiestructuradas

Este instrumento hace parte de la definición del mismo proceso investigativo, el cual permitió ampliar las descripciones escritas generadas por los estudiantes, permitiendo visualizar de forma clara aquellas ideas que no se transmitieron por escrito.

Desde el enfoque cualitativo de esta investigación la entrevista tiende a ser más personal, evidenciando interacciones flexibles y dinámicas, pues como Castaño (2007) afirma:

> Son varias las funciones del entrevistador: la de animador, para ello motiva, mantiene la atención, invita a intentar soluciones y a no desfallecer ante los obstáculos que el niño pueda encontrar al procurar resolver la tarea; la de analista, para ello observa e interpreta las actuaciones (lo que dice y hace el niño) y de acuerdo a estas interpretaciones hace hipótesis sobre la forma como el niño está entendiendo y resolviendo la tarea. Sobre estas hipótesis formula preguntas y contrapreguntas que le permitan corroborarlas o rechazarlas. (p.109)

De esta manera, la entrevista semiestructurada permitió:

- Describir con mayor claridad y profundidad las comprensiones demostradas por los estudiantes.
- Evaluar mejor los argumentos expuestos por el entrevistado.
- Definir las metas de la entrevista para puntualizarlos en la práctica.
- Plantear preguntas claras, fáciles y cortas.
- Respetar las ideas de los estudiantes de acuerdo a sus ritmos de comprensión.
- Ahondar en los temas que se consideraban importantes.

4.3.3 Presentación de la secuencia didáctica "Comprensiones en situaciones de covariación lineal"

Para el objetivo de investigación del presente trabajo se estructuró una secuencia didáctica con el fin de promover el aprendizaje de los estudiantes en situaciones de covariación lineal. Las situaciones se pensaron para problematizar a los estudiantes con el objeto de que los problemas planteados se convirtieran en retos propios y estos pudieran dar respuestas genuinas en tanto estas se constituyen en lo que la movilización de su pensamiento les permite acceder.

Por lo tanto, se propusieron preguntas y situaciones problemas que indujeron a los estudiantes a expresar sus apreciaciones y argumentos, pues como Díaz (2013) afirma *"la secuencia demanda que el estudiante realice cosas, no ejercicios rutinarios o monótonos, sino acciones que vinculen sus conocimientos y experiencias previas con algún interrogante que provenga de lo real y con información sobre un objeto de conocimiento"* (p.4). En este sentido, en la secuencia didáctica se propusieron situaciones que implican la conexión de los saberes previos del estudiante con fenómenos cercanos a su realidad y con algunos elementos propios de la covariación lineal.

Por otra parte, se tuvo en cuenta ofrecer los apoyos que se consideraron útiles para que los estudiantes pudieran organizar y reorganizar su pensamiento e ir generando respuestas más elaboradas en el avance de la secuencia. Por lo tanto, se estructuró la secuencia con una trayectoria de complejidad creciente atendiendo a lo que aduce Díaz (2013):

> La secuencia didáctica es el resultado de establecer una serie de actividades de aprendizaje que tengan un orden interno entre sí, con ello se parte de la intención docente de recuperar aquellas nociones previas que tienen los estudiantes sobre un hecho, vincularlo a situaciones problemáticas y de contextos reales con el fin de que la información a la que va acceder el estudiante en el desarrollo de la secuencia sea significativa, esto es tenga sentido y pueda abrir un proceso de aprendizaje. (p.4)

Al diseñar la secuencia didáctica, uno de los aspectos más preponderantes, en consideración, fue la validación de la enseñanza de la covariación lineal desde un enfoque dinámico, que permitiera sustentar una aproximación didáctica al concepto de función lineal, ya que no se definió explícitamente la representación analítica de la función lineal.

En este sentido fue de gran importancia, caracterizar la función lineal como un modelo matemático que involucra la variación y el cambio de magnitudes, covariantes a través de eventos dinámicos que se asociaron a situaciones de la física, pues como afirma Vasco (2006) *“el pensamiento covariacional, da la posibilidad de distinguir lo que cambia de lo que permanece constante y las posibles regularidades que se pueden generar”*.

La secuencia didáctica, como se advirtió anteriormente se conforma, por una prueba inicial, seis sesiones de intervención y tres guías evaluativas, que fueron aplicadas en diferentes momentos del proceso. A continuación, se describen cada uno de estos componentes los cuales se encontrarán detalladamente en el anexo N°1.

4.3.3.1 Prueba inicial

Es una prueba que permite indagar las intuiciones que tienen los estudiantes, antes de realizar la intervención, sobre variación y en particular, sobre covariación lineal. Se utiliza un fenómeno con el cual los estudiantes están familiarizados en su cotidianidad, el cual consiste en la situación de llenado de un recipiente cuya sección transversal es constante, en el que se estudia principalmente la altura del nivel del agua y el tiempo transcurrido. Esta prueba da cuenta de las respuestas de los estudiantes al identificar las magnitudes constantes y variables en el proceso de llenado, así como la covariación entre algunas de las variables. También, permite identificar las interpretaciones de los estudiantes de esta situación de covariación en los registros tabular y cartesiano.

Después de esta prueba inicial, se realiza una intervención de tres sesiones en las que se utiliza un mismo fenómeno: se tiene una probeta que contiene cierta cantidad de agua y se le depositan una, dos, tres, … monedas iguales.

4.3.3.2 Sesión 1

En esta sesión se plantea a los estudiantes una situación de tipo covariacional lineal no proporcional, en la que se presenta una probeta que contiene cierta cantidad de agua a la cual se le depositan consecutivamente monedas de mil pesos, evidenciando el incremento constante de la altura del nivel del agua en la probeta.

Se les plantea tareas a los estudiantes en las que anticipen la posible tabla de datos y gráfica cartesiana que correspondan a la relación que existe entre las dos magnitudes inmersas en la situación (cantidad de monedas y altura del nivel del agua). Posteriormente se hizo trabajo grupal o colaborativo donde los estudiantes confrontan sus elecciones y las justifican.

Luego, realizaron la experiencia real y confrontaron los resultados con la elección hecha inicialmente. Finalmente, se llevó a cabo una plenaria donde cada grupo expuso los resultados.

Al finalizar esta sesión se espera que los estudiantes identifiquen que a medida que se agrega una moneda, el nivel del agua aumenta una determinada cantidad y usen este hecho para predecir mediante cálculos aritméticos nuevos valores de una de las variables que corresponden a valores dados de la otra.

4.3.3.3 Sesión 2

En esta sesión se plantea a los estudiantes la misma situación de covariación lineal no proporcional presentada en la sesión anterior. Se estudia el incremento del nivel del agua a medida que se depositan las monedas. En esta ocasión, se busca que los estudiantes se den cuenta que el incremento del nivel del agua, además de ser constante, puede ser mayor o menor dependiendo del tamaño o número (volumen) de monedas o del diámetro de la probeta. Finalmente, se pretende que contrasten los resultados obtenidos cuando la probeta es cilíndrica con una que no lo es y así analicen que cuando la probeta no es cilíndrica, el incremento de la altura del nivel del agua no es constante.

4.3.3.4 Sesión 3

En la sesión anterior los estudiantes constataron que a incrementos iguales de la cantidad de monedas se obtienen incrementos iguales del nivel del agua en probetas cilíndricas y que este hecho se da sin importar el tamaño de los incrementos, ni el intervalo en el que se da este incremento. En esta sesión se explora la relación entre los cambios de incrementos en experiencias de la probeta, pero en recipientes no cilíndricos. Una vez que los estudiantes constatan que en covariaciones no lineales no se cumple que a incrementos iguales de las monedas no se producen incrementos iguales de la altura, se pasa al cálculo de la razón de cambio, para verificar que esta es constante cuando la probeta es cilíndrica y que no es constante cuando la probeta tiene forma no cilíndrica (de forma más precisa, cuando la probeta tiene una forma tal que la sección transversal no es constante).

4.3.3.5 Guía evaluativa N°1 (situación de llenado uno)

En esta guía evaluativa se busca que los estudiantes identifiquen algunos aspectos que se han estudiado hasta el momento en las tres sesiones anteriores con respecto a la covariación lineal y no lineal. Se plantean dos situaciones de covariacional, relacionadas con el llenado de tres probetas de distintas formas y tres tanques también de distintas formas. La situación de las tres probetas hace referencia a la experiencia de estudiar la forma como varia el nivel del agua en una probeta cuando se introducen 1, 2, 3, … monedas donde se les pide estudiar seis afirmaciones y decir cual o cuales son correctas de acuerdo a lo aprendido hasta el momento. También, se plantean tareas en las que los estudiantes evidencien sus comprensiones sobre la razón de cambio y el uso que le pueden dar para determinar el valor de una de las variables en caso de conocer el valor de esta razón y uno de los valores de la altura del nivel del agua en un tiempo dado. La situación de los tres tanques, por su parte, hace referencia a que estos se llenan haciendo uso de un balde agregando 1, 2, 3, … baldes de agua hasta llenarse cada tanque, donde se le pide a los estudiantes dibujar la gráfica que consideren para el llenado de cada uno de los tanques, ejercicio que finaliza decidiendo sobre si la razón de cambio (altura nivel del agua y la cantidad de baldes vertidos) es constante o no.

4.3.3.6 Sesión 4

En esta sesión se plantea a los estudiantes un ejercicio de retroalimentación de la guía evaluativa N°1 (Situación de llenado uno), con el objeto de validar los procesos de acción y reflexión, asociados al análisis e interpretación de la covariación objeto de estudio.

En grupo deben argumentar cada una de las justificaciones expuestas al indicar como verdaderas o falsas las seis afirmaciones dadas. También, debían justificar y acordar una respuesta colectiva si es posible en la situación de llenado de los tres tanques, con la intención de identificar si reconocen que las variaciones de tipo cuantitativo caracterizadas, indican incrementos o disminuciones de las magnitudes asociadas al llenado y en consecuencia definir el grado de claridad que alcanza el estudiante en determinar que la variación observada se le puede asociar un número, que da cuenta de la razón de cambio.

4.3.3.7 Sesión 5

En esta sesión se plantea a los estudiantes una situación de tipo covariacional lineal relacionada con la ley de Hooke, en la que se presenta una simulación que permite estudiar la relación entre el alargamiento de un resorte, la cual se produce en relación con la fuerza aplicada, evidenciando el incremento proporcional de este alargamiento también llamado elongación del resorte por la fuerza que ejerce el peso que se le suspende a dicho resorte. El simulador utilizado se encuentra en el siguiente enlace: http://phet.colorado.edu/sims/mass-spring-lab/mass-spring-lab_en.html. Seguido a la exploración del simulador se solicita a los estudiantes responder y justificar algunas preguntas que se relacionan con la rigidez y alargamiento del resorte al ejercer una cantidad de pesos en él. Luego, se propone dos situaciones donde se involucran estos conceptos con la finalidad de llegar a establecer relaciones en la variación entre en el incremento del valor de la cantidad de pesos y el incremento del valor del alargamiento del resorte desde las características de realizar el experimento en la tierra o en la luna, para así poder hacer una idea del término de rigidez.

Posteriormente se considera una situación con el alargamiento de un caucho para relacionar las variaciones no constantes.

4.3.3.8 Guía evaluativa N°2 (llenado dos y resorte)

En esta guía se pretende que los estudiantes indiquen los aprendizajes que hasta el momento de la secuencia didáctica han obtenido en los dos fenómenos abordados. Se plantea en registro cartesiano la representación de los resultados de dos experiencias distintas, la primera hace referencia al llenado de tres recipientes de formas distintas y la segunda a la variación de la longitud de dos resortes distintos. En este caso, se le hace una pequeña variación a la situación del resorte, pues no se estudia el alargamiento del resorte a medida que se le colocan cantidades de peso, sino la longitud del resorte a medida que se le colocan 1, 2,3, …pesos. Se plantean las mismas seis preguntas adaptadas a las características particulares de cada fenómeno. Con esta prueba se pretende que los estudiantes describan los significados que le dan a los puntos de corte con el eje Y, a los puntos de corte entre gráficas, a la razón de cambio, a la rapidez de cambio y a la constancia de los incrementos de una variable con respecto a los incrementos iguales de la otra variable asociada.

4.3.3.9 Sesión 6

Esta vez se plantea una situación novedosa para los estudiantes de covariación lineal, asociada con el movimiento, en donde se relacionan los incrementos constantes con la velocidad constante y los incrementos no constantes con la velocidad variada.

A partir de gráficas y enunciados se estudian situaciones donde intervienen distancias, velocidades, puntos de corte para situación con dos móviles y razón de cambio para finalmente establecer diferencias y semejanzas que pueden caracterizar a partir de las situaciones propuestas. Los estudiantes de manera grupal, resuelven tareas en las que se parte de la representación tabular, la cartesiana, información de la rapidez o de la razón de cambio para dar cuenta de algunos aspectos estudiados en la secuencia didáctica de la covariación lineal.

4.3.3.10 Guía evaluativa N°3 (movimiento rectilíneo uniforme)

De manera individual, los estudiantes analizan una situación en la que les es dada la representación tabular de la distancia recorrida por tres automóviles que viajan en la misma dirección, medida que se toma desde un mismo punto a la salida de una ciudad y los tres autos parten al mismo tiempo. Los estudiantes deben dar cuenta de los elementos trabajados en la secuencia didáctica, a saber, la constancia de los incrementos en una variable relacionada con los incrementos iguales de la otra, la representación cartesiana y la tabular que corresponda a cada auto, los puntos de corte con el eje Y, los puntos de corte entre gráficas, la inclinación de las rectas y el significado de razón de cambio.

4.4 Análisis

El análisis que se llevará a cabo es principalmente de tipo cualitativo. En este análisis se describirán de forma detallada las comprensiones alcanzadas por los estudiantes, que se rastrean en las producciones escritas de los tres casos en los que se focaliza el estudio, las cuales incluyen la prueba inicial, las guías de trabajo de las seis sesiones y las tres guías evaluativas, que componen el desarrollo de la secuencia didáctica. Esta información se complementará, en el análisis, con las entrevistas que se realizaron en diferentes momentos del proceso a estos tres sujetos.

Este análisis cualitativo se compone de dos aspectos:

a) Un análisis intrasujeto que consistirá en reconocer y describir el cambio que se produjo en las respuestas y justificaciones de cada uno de los casos en el transcurso de la secuencia didáctica en actuaciones acordes a las categorías definidas para este análisis. Se hizo relación de las preguntas de cada una de las situaciones de las tres guías evaluativas con las categorías definidas y se estudiaron las respuestas de los tres sujetos a estas.

b) Un análisis intersujeto que consistirá en reconocer y describir las semejanzas y diferencias en la forma de argumentar, justificar las respuestas a las preguntas o tareas planteadas, producto de la comparación entre las producciones de los tres casos.

Este análisis cualitativo, será complementado con otro más de tipo cuantitativo, de carácter descriptivo. El fin de este tipo de análisis es validar los hallazgos del estudio, mediante la verificación de respuestas similares de otros estudiantes, distintos a los tres casos, del curso e identificar otras formas de respuestas a las dadas por los casos de interés.

El análisis se presentará a partir de cada categoría definida. Se tomarán en cuenta las respuestas de los estudiantes en cuatro situaciones abordadas en las tres guías evaluativas: Situación 1 (llenado uno), Situación 2 (llenado dos), Situación tres (ley de Hooke) y situación 4 (Movimiento uniforme). De manera cualitativa, se realizarán las descripciones pertinentes a las categorías de análisis y cuando sea necesario se recurrirá a descripciones cuantitativas, de tipo estadístico. Algunas veces, cuando se dispone de información o se considere útil, se compararán con las producciones de tareas semejantes en la prueba inicial.

4.4.1 Categorías de análisis

En relación con el objetivo general que direcciona esta investigación, se hizo un proceso de contrastación entre la teoría sustentada en el marco teórico y la información recogida por medio de los instrumentos de recolección aplicados, de esta transversalización se generó la matriz de categorías de análisis que se encuentra en el anexo N°2.

Dicha matriz relaciona cinco categorías de análisis, las cuales describen los desempeños de comprensión que pueden alcanzar los estudiantes, cuando se enfrentan a tareas relacionadas con procesos de covariación. Tales categorías son:

1. Relaciona las formas de covariación con características del fenómeno.
2. Interpreta representaciones tabulares.
3. Interpreta representaciones cartesianas.
4. Reconoce cuando se da constancia de la razón de cambio y cuando no.
5. Interpreta la representación cartesiana de dos o tres graficas: el punto de intercepto de las dos o tres gráficas, el intercepto con Y, y la mayor o menor inclinación de las rectas.

De la anterior caracterización de las comprensiones en covariación lineal, se desprende un listado de 13 indicadores generales, los cuales se definieron desde un análisis predictivo (anticipado), que pretendió esencialmente dar cuenta, de la covariación lineal proporcional, la covariación lineal no proporcional y la covariación no lineal.

Desde esta perspectiva, se implementó una discriminación específica, de los desempeños de comprensión en covariación lineal, vinculada a cada una de las situaciones de análisis ya mencionadas.

4.4.2 Instrumentos de organización de la información

Se realizó una caracterización tipológica de las respuestas obtenidas por los estudiantes durante el desarrollo de la secuencia didáctica, que sirvió como apoyo para generar un proceso de asociación con las categorías de análisis propuestas, las cuales a su vez fueron complementadas con las producciones escritas y verbales de los tres casos de análisis. "Estos análisis a priori y a posteriori, consolidaron la comparación y categorización de las producciones, identificando tanto modelos y estrategias, como formas de simbolización, esquematización y formalización" Zolkower, Bressan & Gallego (2006, p. 22).

Así pues, durante el proceso investigativo, se utilizaron distintos borradores que consolidaron y estructuraron la información, bajo diferentes criterios de organización, los cuales se describen a continuación, según los momentos en los que se fijaron.

Momento uno: organización de la información recolectada

En este primer momento se utilizaron dos instrumentos, los cuales hacen referencia a una tabla en Excel y una tabla en Word, en las que se organizó las producciones escritas del grupo total de estudiantes.

Instrumento 1

Tabla 5

Ejemplo borrador de organización de información. Instrumento 1

TIPO DE SITUACIÓN						
CATEGORÍAS	INDICADORES	TAREA	TIPO	FRECUENCIA	DESCRIPCIÓN	OBSER VACIONES-COMENTARIOS - EVIDENCIAS

Origen: Fuente propia

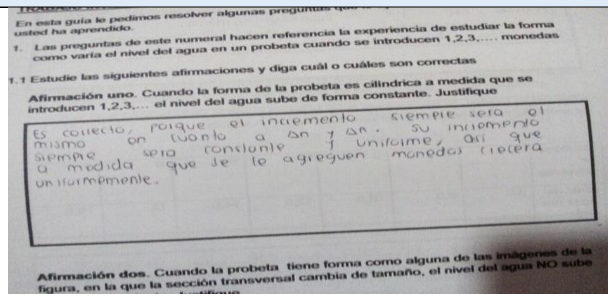
Corresponde a la tabla en Excel, en la cual se registró y organizó la información correspondiente a las cinco categorías de análisis y sus respectivos indicadores, esto para cada una de las cuatro situaciones que se emplearon.

Para completar la tabla se tuvo en cuenta todas las preguntas, las cuales fueron asociadas a cada una de las categorías e indicadores, luego a partir de las características de las producciones escritas de los estudiantes en cada una de las preguntas fue necesario proponer una tipología, para facilitar la organización de la información, así se determinó una frecuencia para cada tipología, posteriormente se realizó una descripción general de cada tipología y por último se relacionan algunas observaciones, comentarios o evidencias con un valor numérico en orden ascendente, las cuales se amplían en el instrumento 2.

Instrumento 2

Tabla 6

Borrador de organización de la información. Instrumento 2

NÚMERO	OBSERVASIONES-COMENTARIOS-EVIDENCIAS
1	 En esta guía le pedimos resolver algunas preguntas ... usted ha aprendido. 1. Las preguntas de este numeral hacen referencia la experiencia de estudiar la forma como varía el nivel del agua en un probeta cuando se introducen 1,2,3,.... monedas 1.1 Estudie las siguientes afirmaciones y diga cuál o cuáles son correctas Afirmación uno. Cuando la forma de la probeta es cilíndrica a medida que se introducen 1,2,3,... el nivel del agua sube de forma constante. Justifique Es correcto, porque el incremento siempre sera el mismo en cuanto a Δn y Δh. Su incremento siempre sera constante y uniforme, asi que a medida que se le agreguen monedas crecera uniformemente. Afirmación dos. Cuando la probeta tiene forma como alguna de las imágenes de la figura, en la que la sección transversal cambia de tamaño, el nivel del agua NO sube Situación 1 Evidencia 1 Sujeto 1 Identifica las formas en que se caracteriza el cambio y la variación indicando las cantidades (variables y constantes) que intervienen en la situación y las relaciones de dependencia entre ellas.
2	

Origen: Fuente propia

Corresponde a un documento en Word, en el cual se relacionan observaciones, comentarios y evidencias de forma detallada, haciendo un primer intento de definir las comprensiones que se observan en las producciones escritas.

Momento dos: descripción estudio de casos

En este segundo momento se utilizan dos instrumentos también de borrador, los cuales corresponden a una tabla Word diseñada en Excel y una tabla Word, en las que ahora se registra las producciones escritas solo de los tres estudiantes que se seleccionaron para el estudio de casos. Estas producciones se complementan con las entrevistas que se realizaron para cada una de las situaciones de covariación lineal propuestas en la secuencia.

Instrumento 3

Tabla 7

Ejemplo borrador de organización de la información. Instrumento 3

TIPO DE SITUACIÓN									
CATEGOR ÍAS	INDICA DORES	TARE A	TIPO	FRECUENCIA	DESCRIPCIÓN	OBSER VACIONES-COMENTARIOS - EVIDENCIAS	Suj 1A	Suj 2I	Suj 3H

Origen: Fuente propia

Este instrumento es una extensión del instrumento 1, en donde se anexa un aspecto llamado descripción por sujeto en el que se incluyen únicamente a los tres estudiantes del estudio de casos, con la finalidad de relacionar en cuáles de las tipologías descritas en el momento uno, hace parte cada uno de ellos, esto se realiza en cada de las situaciones en su totalidad de preguntas.

Instrumento 4

Tabla 8

Ejemplo borrador organización de la información. Instrumento 4

CATEGORÍAS	INDICADOR	N°	DESCRIPCIÓN / EVIDENCIA
			Foto
			Descripción foto
			Entrevista
			Descripción entrevista
			Asociación de respuestas

Origen: Fuente propia

En este instrumento se relaciona de cada uno de los tres casos, con sus respectivas producciones escritas y entrevistas correspondientes a las cuatro situaciones de estudio, realizando registro de descripción – evidencia para cada una de las preguntas. Esto con la finalidad de elaborar la caracterización individual encontrando información que permita ampliar el panorama en la búsqueda de elementos que permitan alcanzar el objetivo propuesto.

En conclusión, hasta este punto se utilizó como insumo para el análisis de resultados, los cuatro borradores de los instrumentos ya mencionados en los dos momentos anteriores, los cuales permitieron relacionar las respuestas escritas y orales de los tres sujetos, a cada una de las categorías de análisis con sus correspondientes indicadores, con la intención de hacer un comparativo de los dos tipos de producciones que permitieran perfilar los desempeños de comprensión que se observan en los estudiantes.

Momento tres: análisis de resultados

Las tablas de borrador anteriormente expuestas, son consolidadas en un último instrumento de organización de información, el cual se presenta en el anexo N°3, y fue el instrumento de relación directa que permitió formular el análisis de los resultados.

En este instrumento se registra cada una de las tareas que se tuvieron en cuenta en el análisis, las producciones escritas, las entrevistas, el número de evidencia, la categoría de análisis y los indicadores que se relacionó con cada una de las tareas. Este instrumento se utilizó para el estudio de caso, para otros sujetos se omitió la parte correspondiente a las entrevistas.

5 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Como se dijo en el capítulo anterior, se realizarán varios tipos de análisis. Por un lado, el análisis de tipo cualitativo, consistente en estudiar las producciones de los tres casos en los que se focalizaron las observaciones. Para ello, se recurrió a dos tipos de información, a saber, las producciones de estos casos en la prueba inicial y las guías evaluativas del desarrollo de la secuencia didáctica y las entrevistas en profundidad que se realizaron en los diferentes momentos para complementar la información escrita. Este análisis cualitativo consta de dos componentes: a) un análisis intrasujeto en el que se trata de captar el cambio producido en cada caso a lo largo de la secuencia didáctica en actuaciones que sirven de evidencia para las categorías de análisis ya definidas y b) un análisis intersujeto, consistente en comparar las producciones de los tres casos, de forma que se puedan identificar posibles semejanzas o diferencias. Este tipo de análisis se complementará con otro, de tipo un poco más cuantitativo, de carácter descriptivo; para este tipo de análisis se toman las respuestas de todos los estudiantes del curso en los que se desarrolló la experiencia didáctica, identifican formas típicas de respuestas en algunas tareas y se comparan con las ya encontradas en los tres casos de estudio.

Para obtener la información, se tomó la prueba inicial y cuatro situaciones: a) la prueba inicial (Anexo 1 pág. 115). La situación de esta prueba consiste en verter agua de forma constante a un recipiente hasta llenarlo y se estudia la forma de variación de la altura del nivel del agua con relación al tiempo de llenado. b) una situación en la que se estudian dos casos: en primer lugar, la forma como varía el nivel del agua en una probeta cuando se introducen 1,2,3,… monedas, teniendo en cuenta formas diferentes de las probetas (cuando tiene una forma tal que la sección transversal es constante, por ejemplo, un cilindro; y cuando esta sección transversal es variable, por ejemplo, un cono); en segundo lugar, la forma como varía la altura del nivel del agua en recipientes de diferentes formas a medida que se vierten 1,2,3,… baldes para su llenado. A estos dos casos los denominamos Situación de llenado uno ***(S1).*** c) una situación en la que se parte de la representación cartesiana de la relación entre la altura del nivel del agua y la cantidad de baldes vertidos de tres recipientes distintos, a la cual denominamos situación de llenado dos ***(S2);*** d) una situación en la que se estudia la longitud de dos resortes distinto con respecto a la cantidad de pesos que se suspenden de los mismos a partir de la representación cartesiana de esta relación, a la cual denominamos situación de Ley de Hooke ***(S3)*** y e) la situación cuatro corresponde al estudio de la distancia de un móvil a un punto a medida que este se desplaza (se compara cuando se desplaza con velocidad constante y con velocidad variable), a la cual denominamos situación de movimiento ***(S4).***

A continuación, se presentan los resultados que se obtienen en cada indicador, para cada categoría. Por razones de espacio los datos y el detalle de los análisis se encuentran en el anexo 3. Para orientar al lector, en cada caso se señalan las tareas analizadas en el respectivo indicador o respectivos indicadores (cuando una misma tarea o grupo de tareas dan información para varios indicadores) y las tablas en las que se presentan los datos; en paréntesis aparece la indicación para localizar la información en el anexo.

5.1 Categoría uno: Relaciona la forma de covariación con características del fenómeno.

En este apartado se analizan las repuestas de los estudiantes a las tareas correspondientes al único indicador de esta categoría.

5.1.1 Indicador 1

Reconoce que existen formas de covariación tales que a incrementos iguales de una de las variables se tienen incrementos iguales de la otra y que hay otras formas de covariación en la que no se da esto.

Las tareas que fueron analizadas para este indicador son las siguientes:

- Indicar si es correcta o no la afirmación: cuando la forma de la probeta es cilíndrica a medida que se introducen 1, 2, 3, … monedas, el nivel del agua sube de forma constante (Anexo 1, pág. 160, pregunta 1, afirmación uno)
- Indicar si es correcta o no la afirmación: cuando la probeta tiene forma como alguna de las imágenes de la figura (el recipiente A de forma de cono truncado, el B esférico y C cono truncado invertido), en la que la sección transversal cambia de tamaño, el nivel del agua NO sube de forma constante (Anexo 1, pág.160, pregunta 1, afirmación dos)
- Determinar si la medida de una magnitud dada varía o permanece constante a lo largo del desarrollo del fenómeno (llenado del recipiente), para el caso de la magnitud <altura del nivel del agua> (Anexo 1, pág.115, pregunta 1)
- Indicar si la variación de la altura del nivel del agua está relacionada con las variaciones del tiempo de llenado (Anexo 1, pág. 116, pregunta 2)

Las respuestas de los tres casos en los que se focalizó el estudio se encuentran registradas en las tablas 1 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.1, afirmación uno de situación de llenado uno), 2 (Respuestas de los tres sujetos a Pregunta1.1. afirmación dos de situación uno de llenado uno) y 3 (Respuestas de los tres sujetos a preguntas 1 y 2 de prueba inicial), respectivamente, que se encuentran en el anexo número 3.

Analizada la información en las tablas mencionadas, se encuentra que los estudiantes de este curso aunque pueden identificar, en el fenómeno de llenado, que la altura del nivel del agua cambia y pueden relacionarla con el tiempo de llenado, algunos no explicitan la relación de covariación e incluso, algunos casos hacen referencia a otras magnitudes y modifican las condiciones iniciales del fenómeno cuando se les pide relacionar la altura del nivel del agua a medida que el tiempo ha transcurrido. Pareciera que para unos estudiantes existe una dificultad de diferenciar las variables, estas se presentan como una globalidad indiferenciada que en algunos casos los estudiantes de este nivel todavía no logran diferenciar completamente.

5.2 Categoría dos: Interpreta representaciones tabulares

En este apartado se analizan las repuestas de los estudiantes a las tareas correspondientes a los indicadores 1, 2 y 3 de esta categoría.

5.2.1 Indicador 1

Por simple inspección de los valores de las variables reconoce cuándo la covariación es lineal y asocia este hecho con la situación experiencial y descarta las representaciones tabulares de otros tipos de covariaciones

Las tareas que fueron analizadas para este indicador son las siguientes:

- Indicar si la representación tabular dada corresponde a un recipiente de determinada forma. (Anexo 1, pág. 161, pregunta 1, afirmación cuatro)
- Escoger la tabla de valores que representa la relación entre la altura del nivel del agua (A) y el tiempo transcurrido (F) en una posible experiencia de llenado en un recipiente de forma cilíndrica (Anexo 1, pág. 117 pregunta 3)

Las respuestas de los tres casos en los que se focalizó el estudio se encuentran registradas en las tablas 4 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.1 afirmación cuatro de situación uno de llenado uno) y 5 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 3 de prueba inicial), respectivamente, que se encuentran en el anexo número 3.

Analizada la información en las tablas mencionadas, se encontró la dificultad que tienen los estudiantes para pasar de evaluar la constancia o no del cambio de altura a valorar la variación de la magnitud del cambio. Mientras los sujetos se representen el problema directamente ligado a la forma de los recipientes pueden entender cuando es constante y cuando no. Es más, pueden saber que el valor crece más rápido, si la sección transversal se reduce y menos rápido si la sección transversal se amplía, pero pasar de ahí a analizar el problema sobre los valores de las variables sin el apoyo de la información que adiciona el hecho empírico genera dificultades mayores. Además, los estudiantes de este grado valoran la constancia de los valores de las dos sucesiones, de las dos variables, sin tener en cuenta la razón de los incrementos. Según parece, los sujetos identifican la constancia o no de las variables y comprenden el crecimiento o decrecimiento del valor siempre y cuando asocien la información al hecho empírico.

5.2.2 Indicadores 2 y 3

Indicador 2: Identifica una forma de correspondencia entre los valores de las variables lo que le permite continuar con los valores siguientes (el valor n+1) a partir de un par de valores dados (el valor n)

Indicador 3: Asigna valores nuevos a partir de otros valores ya conocidos mediante procesos de interpolación y extrapolación, en caso de covariaciones que dan lugar a una razón de cambio constante y reconoce que esto no se puede hacer en caso de otras formas de covariación que dan lugar a una razón de cambio variable

Las tareas que fueron analizadas para estos indicadores son las siguientes:

- Asignar dos nuevos valores a partir de la información de la representación tabular dada (Anexo 1, pág. 190, preguntas 7 y 8)
- Indicar, a partir de los datos de la tabla dada, el tiempo que debe transcurrir para que el nivel del agua alcance 5,5 cm de altura (Anexo 1, pág. 119, pregunta 7.2)

Las respuestas de los tres casos en los que se focalizó el estudio se encuentran registradas en las tablas 6 (Respuestas de los tres sujetos a preguntas 7 y 8 de la S4 movimiento) y 7 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 7.2 de la prueba inicial), respectivamente, que se encuentran en el anexo número 3.

Analizada la información en las tablas mencionadas, permiten afirmar que los estudiantes de este grado asignan valores nuevos a partir de la representación tabular, usando procedimientos intuitivos, procediendo de forma aditiva, esto se ve más claro en los casos en que los valores nuevos se pueden obtener por intrapolación o si hay que extrapolar el valor nuevo es cercano al último de la tabla. Así, a partir del patrón que identifican pueden continuar con los valores siguientes en la sucesión, a partir de un valor n. Si el valor nuevo es muy lejano a valores de la tabla, introducen o multiplicación simple (valor unitario por número de unidades) o regla de tres, en el caso en que la tabla represente valores en covariación directamente proporcional tienen éxito, pero si no es así, los lleva a error. Parece entonces que los estudiantes para efectos de estos cálculos, determinan y usan el patrón de cambio entre los valores, pero pasan por alto la diferencia de registros tabulares con el par (0,0) y (0,y) y se impone, en estos casos, el esquema de multiplicación simple y el procedimiento de regla de tres.

5.3 Categoría tres: analiza representaciones cartesianas

En este apartado se analizan las repuestas de los estudiantes a las tareas correspondientes a los indicadores 1, 2, 3,4 y 5 de esta categoría.

5.3.1 Indicadores 1 y 2

Indicador 1: Ubica puntos específicos en el plano cartesiano, demarcando las correspondientes parejas ordenadas.

Indicador 2: Establece escalas y registra correctamente los valores en ellas.

Las tareas que fueron analizadas para estos indicadores son las siguientes:

- Utilizar la representación gráfica dada para indicar la cantidad de agua que hay en el recipiente cando han transcurrido 4 segundos y el tiempo que debe transcurrir para que haya 70 mililitros de agua en el recipiente (Anexo 1, pág. 121, pregunta 9)
- Representar en la gráfica los valores de la representación tabular dada (Anexo 1, pág. 122, pregunta 10)

Las respuestas de los tres casos en los que se focalizó el estudio se encuentran registradas en la tabla 8 (Respuestas de los tres sujetos a preguntas 9 y 10 de la prueba inicial), respectivamente, que se encuentran en el anexo número 3.

Analizada la información en las tablas mencionadas, se encontró que dan significado a los puntos coordenados de la representación gráfica asociándolos a los valores de las variables relacionadas. Además, a partir de valores dados en la representación tabular pueden demarcar correctamente los pares ordenados correspondientes en la gráfica. Por otro lado, cuando les dan la escala en el plano cartesiano, los casos Suj2 y Suj3 ubican correctamente los valores utilizando la escala dada y en el caso Suj1 la adapta de manera que pueda obtener más precisión en la ubicación de las parejas ordenadas.

5.3.2 Indicador 3

Reconoce a partir de la forma de la gráfica (recta o no) la covariación lineal o no de las dos variables asociadas.

Las tareas que fueron analizadas para estos indicadores son las siguientes:

- Indicar si la representación cartesiana dada corresponde a un recipiente de determinada forma. (Anexo 1, pág. 162, pregunta 1, afirmación cinco)
- Escoger la gráfica que representa la forma de variación de la altura del nivel del agua y el tiempo transcurrido en una experiencia de llenado en una probeta de forma cilíndrica. (Anexo 1, pág. 120, pregunta 8)
- Describir las características de los recipientes, a partir de las gráficas dadas (Anexo 1, pág. 180, pregunta 1.1)
- Describir las características de los resortes, a partir de las gráficas dadas (Anexo 1, pág. 180, pregunta 1.1)
- Relacionar cada gráfica con el movimiento del auto que se mostraba en la representación tabular dada (Anexo 1 pág. 189, pregunta 2)

Las respuestas de los tres casos en los que se focalizó el estudio se encuentran registradas en las tablas 9 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.1 afirmación cinco de situación uno de llenado uno), 10 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 8 de la prueba inicial), 11 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.1 de la situación de llenado dos, 12 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.1 de la situación 3 Ley de Hooke) y 13 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 2 de la situación 4 de movimiento), respectivamente, que se encuentran en el anexo número 3.

Analizada la información en las tablas mencionadas, se puede afirmar que los casos nivel alto y nivel medio reconocen que cuando la gráfica no es una recta, la covariación entre las dos variables relacionadas no es lineal. Solo acuden a la variación no constante de los incrementos para indicar la correspondencia a gráficas de líneas no rectas, sin hacer distinción entre estas. El sujeto nivel bajo por su parte, al pensar en términos de la experiencia del llenado, acierta en el sentido de la variación de los incrementos.

Por lo tanto, teniendo en cuenta los hallazgos mencionados en la comprensión de las representaciones cartesianas, se puede declarar que el sujeto nivel alto persiste en asociar la constancia de los incrementos con la forma de la gráfica y los sujetos nivel medio y bajo comprenden la representación cartesiana desde las condiciones fenomenológicas, asociando características propias del hecho empírico con la forma de la gráfica. Ahora bien, en la situación 4 (de movimiento) los casos focalizados además de tener en cuenta la constancia o no de los incrementos y, por ende, la forma de la gráfica, utilizaron un criterio adicional que fue los interceptos con el eje Y, pues permite que el procedimiento sea más rápido en la medida en que, en los datos dados en la tabla identifican el valor inicial de la variable dependiente. Por lo tanto, sus comprensiones son encaminadas a procesos simplificados, utilizando como vías de solución aquellas que les permitan diferenciar de manera rápida las representaciones cartesianas.

De este modo, se hace evidente el progreso de los tres casos al transcurrir la aplicación de la secuencia didáctica, especialmente en los sujetos nivel alto y bajo. El caso Suj1 (nivel alto), amplía su perspectiva de una representación gráfica, pues en la última situación tiene en cuenta la constancia o no de los incrementos de las variables, así como el criterio de los interceptos, mostrando así una comprensión más abarcadora. Por su parte, el caso Suj3 inicialmente no interpretaba correctamente la representación cartesiana de la relación de dos variables de una situación, que paulatinamente fue comprendiendo, pasando de una comprensión en términos del hecho empírico a una comprensión en términos de la variación de los incrementos y los valores de los interceptos con Y y su significado en la situación.

5.3.3 Indicador 4

Asocia la mayor o menor inclinación de la recta con la mayor o menor razón de cambio (rapidez del cambio de la variable dependiente con relación a la independiente)

Las tareas que fueron analizadas para este indicador son las siguientes:

- Dibujar la forma que considera tendría la gráfica cartesiana si el tanque es como el de la siguiente figura dadas (Anexo 1, pág. 164, pregunta 2.3)
- Indicar el valor de verdad de cada una de cuatro afirmaciones a partir de la representación gráfica dada de un móvil que se desplaza con velocidad constante. (Anexo 1, pág. 191, pregunta 9)

Las respuestas de los tres casos en los que se focalizó el estudio se encuentran registradas en las tablas 14 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 2.3 de la situación uno de llenado**)** y 15 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 9 de la situación cuatro de movimiento), respectivamente, que se encuentran en el anexo número 3.

Analizada la información en las tablas mencionadas, se puede afirmar que en la situación del llenado de los tanques los tres casos relacionan la inclinación de la recta con la mayor o menor rapidez de llenado del recipiente. Al parecer, esta relación se pudo hacer gracias a las características del fenómeno de llenado tales como el tamaño de la sección transversal de los recipientes, que al hacerse visibles les sugería pensar en la razón entre los incrementos de la altura del nivel del agua y los incrementos de los baldes vertidos de un tanque con respecto a otro. Ahora bien, en la situación de movimiento rectilíneo uniforme en un móvil se les dificultó más esta relación a los sujetos 2 y 3 asociaron la velocidad del móvil con la longitud de la recta de cada segmento.

5.3.4 Indicador 5

Anticipa la posible forma de la gráfica que representa la covariación a partir de las condiciones de la situación.

La tarea que fue analizada para este indicador son las siguientes:

- Dibujar la forma que considera tendría la gráfica cartesiana para cada uno de los dos tanques con la forma de las dos figuras dadas. (Anexo 1, pág. 163 y 164, preguntas 2.1 y 2.2)

Las respuestas de los tres casos en los que se focalizó el estudio se encuentran registradas en la tabla 16 (Respuestas de los tres sujetos a preguntas 2.1 y 2.2 de la situación uno de llenado), respectivamente, que se encuentran en el anexo número 3.

Analizada la información en las tablas mencionadas, se puede afirmar que estos sujetos anticipan la forma de la representación gráfica adecuada cuando el recipiente es cilíndrico, teniendo como referente dicha forma o la constancia de los incrementos en las variables relacionadas. Ahora bien, cuando el recipiente no es cilíndrico, el caso Suj3 comprende que la representación cartesiana corresponde a una curva con el sentido correcto de las variaciones de los incrementos. Mientras que Suj1 y Suj2 no aciertan en la representación cartesiana porque solo se limitan a asociar la forma no cilíndrica del recipiente con la no constancia de los incrementos sin tener presente el ritmo del crecimiento.

5.4 Categoría cuatro: Reconoce cuándo se da la constancia de la razón de cambio y cuándo no.

En este apartado se analizan las repuestas de los estudiantes a las tareas correspondientes al único indicador de esta categoría.

5.4.1 Indicador 1

Relaciona el valor de la razón de cambio con el incremento de una variable respecto a la otra y reconoce su significado en la situación.

Las tareas que fueron analizadas para este indicador son las siguientes:

- Indicar si es correcta a o no la afirmación: cuando la forma como varía el nivel del agua con relación al número de monedas es constante, ocurre que la razón de cambio $\Delta A/\Delta N$ (incrementos en altura del nivel del agua/incrementos en número de monedas) es constante (Anexo 1, pág. 161, pregunta 1.1, afirmación 3)
- Indicar si es posible calcular el nivel que alcanzaría el agua cuando se hayan introducido 41 monedas en una probeta cilíndrica, si se conocen la siguiente información:

La razón de cambio $\Delta A/\Delta N$ es constante y vale 5cm /moneda

Cuando se han introducido 4 monedas el nivel alcanzado por el agua es27 cm (Anexo 1, pág. 162, pregunta 1.2)

- Indicar para cuál o cuáles de las formas A, B o C, de los recipientes dados, se puede decir que la razón de cambio altura del nivel del agua y la cantidad de baldes es constante y para cuál o cuáles no (Anexo 1, pág.164, pregunta 2.4)

- Indicar si la razón de cambio entre la altura del nivel del agua y la cantidad de baldes vertidos es constante o no en el recipiente C de la representación cartesiana dada, usada en la categoría 3, indicador 5 (Anexo 1, pág.181, pregunta 1.5)
- Indicar si la razón de cambio entre la longitud del resorte y la fuerza aplicada es constante en ambos resortes de la representación cartesiana dada, usada en la categoría 3, indicador 1 (Anexo 1, pág. 181, pregunta 1.5)
- Indicar para cuál o cuáles de los tres carros se puede afirmar que la razón de cambio entre las distancias y los tiempos es igual, tomando en cuenta la información dada en el registro tabular (Anexo 1, pág. 188, pregunta 1)
- Identificar el o los carros para los que se puede afirmar que para incrementos iguales de tiempo se tienen incrementos iguales de distancia, y en las que no se puede hacer tal afirmación, a partir de la siguiente representación tabular (Anexo 1, pág. 190, pregunta 5)

Las respuestas de los tres casos en los que se focalizó el estudio se encuentran registradas en las tablas 17 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.1afirmación tres de la situación uno de llenado uno), 18 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.2 de la situación uno de llenado), 19 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 2.4 de la situación uno de llenado uno), 20 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.5 de la situación dos de llenado), 21(Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.5 de la situación tres Ley de Hooke), 22(Respuestas de los tres sujetos a pregunta 6 de la situación cuatro de movimiento) y 23 (Respuestas de los tres sujetos a preguntas 1 y 5 de la situación cuatro de movimiento), respectivamente, que se encuentran en el anexo número 3.

Analizada la información en las tablas mencionadas, se encontró que estos sujetos asocian la razón de cambio constate con situaciones de tipo covariacional lineal. Sin embargo, en sus comprensiones se dilucidan elementos diferentes, implícitos en su significado. Para el caso Suj1 se puede afirmar que comprende la razón de cambio como la razón entre incrementos correspondientes. El caso Suj3, en ocasiones coordina el valor del incremento de la variable dependiente respecto a la independiente, pero no como razón (como proceso aritmético) sino, al parecer, apoyándose en el contenido empírico de la tarea, incluso, aunque reconoce la constancia de los incrementos de cada variable por aparte, niega la constancia de la razón de cambio, porque el punto inicial de la tabla no es (0,0). El caso Suj2 le falta hacer la coordinación entre el valor de estos incrementos, solo tiene en cuenta la constancia de las variaciones de las variables, sin correlacionarlas.

5.5 Categoría cinco: Interpreta la representación cartesiana de dos o tres gráficas: el punto de intercepto de las dos o tres gráficas, el intercepto con Y, y la mayor o menor inclinación de las rectas

En este apartado se analizan las repuestas de los estudiantes a las tareas correspondientes a los indicadores 1,2 y 3 de esta categoría.

5.5.1 Indicador 1

Asocia el punto de intercepto de dos o tres gráficas de la representación cartesiana, con el punto en el cual los valores de las variables relacionadas coinciden.

Las tareas que fueron analizadas para este indicador son las siguientes:

- Indicar el significado del punto “e” en el que se cortan las dos gráficas correspondientes a los recipientes A y B, teniendo en cuenta la representación cartesiana dada (Anexo 1, pág. 181, pregunta 1.4)

- Indicar el significado del punto “g” en el que se cortan las dos gráficas correspondientes a los resortes A y B, teniendo en cuenta la representación cartesiana dada (Anexo 1, pág. 181, pregunta 1.4)
- Indicar qué información ofrecen los puntos “a” y “b” de la representación cartesiana dada (Anexo 1, pág. 189, pregunta 3 y 4)

Las respuestas de los tres casos en los que se focalizó el estudio se encuentran registradas en las tablas 24 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.4 de la situación dos de llenado.), 25 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.4 de la situación tres Ley de Hooke) y 26 (Respuestas de los tres sujetos a preguntas 3 y 4 de la situación cuatro de movimiento), respectivamente, que se encuentran en el anexo número 3.

Analizada la información en las tablas mencionadas, se encontró que el caso nivel alto comprende que el punto donde se cruzan dos gráficas corresponde a la coincidencia en los valores de las dos variables relacionadas. Aunque inicialmente (en la situación de llenado) Suj1, solo relacionó la variable dependiente, en las tareas de las situaciones posteriores si indicó la coincidencia de los valores en ambas variables relacionadas. En cambio, el caso nivel medio solo identifica la coincidencia de los valores de la variable dependiente, sin tener en cuenta la independiente, en el significado que le atribuye al punto donde se cruzan las gráficas. Por su parte, el caso nivel bajo igualmente solo reconoció la coincidencia de los valores en el punto de corte de dos gráficas, de la variable dependiente. Además, nuevamente ofrece sus respuestas desde la perspectiva del hecho empírico. Parece ser que los estudiantes omiten la coincidencia de los valores de la variable independiente en el punto donde se cruzan dos gráficas.

5.5.2 Indicador 2

Relaciona los puntos de intercepto con Y con el valor inicial de la variable dependiente.

Las tareas que fueron analizadas para este indicador son las siguientes:

- Indicar cuál de los tres recipientes tiene el menor nivel de agua al empezar el llenado, teniendo en cuenta la representación cartesiana utilizada en el indicador anterior. (Anexo 1, pág. 180, pregunta 1.2)
- Identificar cuál de los dos resortes tiene una longitud menor cuando no están estirados, teniendo en cuenta a representación cartesiana utilizada en el indicador 1 de la categoría 5. (Anexo 1, pág. 180, pregunta 1.2)

Las respuestas de los tres casos en los que se focalizó el estudio se encuentran registradas en las tablas 27 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.2 de la situación dos de llenado) y 28 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.2 de la situación tres Ley de Hooke), respectivamente, que se encuentran en el anexo número 3.

Analizada la información en las tablas mencionadas, se puede afirmar que los tres casos comparan los valores de los puntos de corte con el eje Y en una representación cartesiana de dos o tres gráficas e identifican el mayor o menor valor de la variable dependiente estudiada en cada situación. El caso nivel alto hace explicito este significado, mientras que los casos nivel medio y bajo son superficiales en sus justificaciones.

5.5.3 Indicador 3

Identifica la mayor o menor inclinación de las rectas con la mayor o menor rapidez de variación y las asocia correctamente con la situación experiencial

Las tareas que fueron analizadas para este indicador son las siguientes:

- Indicar en cuál de los tres recipientes el nivel del agua sube más rápido a medida que se vierte el contenido de los baldes, teniendo en cuenta la representación cartesiana utilizada en el indicador 1 de la categoría 5 (Anexo 1, pág.181, pregunta 1.3)
- Indicar cuál de los dos resortes se estira con mayor facilidad, teniendo en cuenta la representación cartesiana utilizada en el indicador 1 de la categoría 5. (Anexo 1, pág. 181, pregunta 1.3)

Las respuestas de los tres casos en los que se focalizó el estudio se encuentran registradas en las tablas 29 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.3 de la situación dos de llenado) y 30 (Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.3 de la situación tres Ley de Hooke), respectivamente, que se encuentran en el anexo número 3.

Analizada la información en las tablas mencionadas, se puede afirmar que los estudiantes de este grado asocian la rapidez de cambio con la longitud de las líneas de la representación gráfica. De modo que la mayor o menor longitud de la gráfica indica la mayor o menor razón de cambio en cada situación

Por lo tanto, en esta categoría consistente en interpretar la representación cartesiana de dos o tres gráficas, los tres sujetos comprendieron el punto de intercepto de dos o tres gráficas como el punto en el cual los valores de las variables relacionadas coinciden. Sin embargo, les hace falta identificar la mayor o menor inclinación de las rectas con la mayor o menor rapidez de variación y asociarla correctamente con la situación experiencial.

5.6 Síntesis de resultados por categoría

En la tabla 9 de las páginas siguientes se presenta una síntesis de los resultados obtenidos en cada categoría.

Tabla 9

Síntesis de resultados por categoría

Categoría	Indicadores	Interpretación de las comprensiones
6.1 **Categoría uno:** Relación de la forma de covariación con características del fenómeno	**Indicador 1:** Reconoce que existen formas de covariación tales que a incrementos iguales de una de las variables se tienen incrementos iguales de la otra y que hay otras formas de covariación en la que no se da esto	En términos general los estudiantes de este grado en la situación de llenado muestran que asocian correctamente que en un recipiente cuya sección trasversal es constante a lo largo de su altura, la variación del nivel del líquido es constante a medida que se llena y que, si esta sección trasversal varía, la forma de variación de la altura del nivel del agua no es constante. Parece que la familiarización que el estudiante tiene con el hecho empírico ofrece apoyos intuitivos para diferenciar la forma de variación del nivel del líquido en los dos casos, no todos expresan estas diferencias en términos de covariación de incrementos que sería un indicador de acceder a la comprensión de la covariación. Algunos estudiantes al intentar explicar la covariación recurren a otras magnitudes que no son estudiadas en el fenómeno, es como si para algunos estudiantes existe una dificultad de diferenciar las variables, presentándoseles como una globalidad indiferenciada.
6.2 **Categorías dos:** Interpreta representaciones tabulares	**Indicador 1:** Por simple inspección de los valores de las variables reconoce cuándo la covariación es lineal y asocia este hecho con la situación experiencial y descarta las representaciones tabulares de otros tipos de covariaciones **Indicador 2:** Identifica una forma de correspondencia entre los valores de las variables lo que le permite continuar con los valores siguientes (el valor n+1) a partir de un par de valores dados (el valor n) **Indicador 3:** Asigna valores nuevos a partir de otros valores ya conocidos mediante procesos de interpolación y extrapolación, en caso de covariaciones que dan lugar a una razón de cambio constante y reconoce que esto no se puede hacer en caso de otras formas de covariación que dan lugar a una razón de cambio variable	Mientras los sujetos se representen el problema directamente ligado a la forma de los recipientes no solo pueden entender cuándo es constante la variación de la altura del nivel del agua y cuándo no; también, pueden saber, en muchos casos, que el valor crece más rápido si la sección transversal se reduce y menos rápido si la sección transversal se amplía; sin embargo, esta conquista no es garantía de que pueda pasar de estos hechos a analizar la forma de covariación a partir de la representación tabular. Sin el apoyo de la información que adiciona el hecho empírico, algunos estudiantes, como el caso de nivel bajo, tiene grandes dificultades. Este hecho se da quizá porque hacerlo a partir de los valores de las variables sin referencia de la situación empírica requiere tomar conciencia, al menos, del hecho de que la constancia de variación equivale a que a incrementos iguales de una de las variables corresponden incrementos iguales de la otra. Los estudiantes utilizan procedimientos sucesivos (aditivos) para encontrar valores nuevos a partir de los valores de una presentación tabular. Agregan sucesivamente a un par de valores dados el incremento correspondiente a cada variable para obtener el nuevo valor, por eso el método se agota cuando se trata de valores muy lejanos a los dados en la tabla. En estos casos, en las formas más avanzadas introducen la multiplicación simple a partir del valor unitario y en algunos casos utilizan la regla de tres. Pero este último procedimiento los conduce a error cuando la covariación no es proporcional. Los estudiantes no usan la razón de cambio para realizar los cálculos, quizá porque esto requiere comprender una nueva covariación (ya no entre los valores de las variables) sino entre los incrementos de los valores de las variables.

6.3 **Categoría tres:** analiza representaciones cartesianas	**Indicador 1:** Ubica puntos específicos en el plano cartesiano, demarcando las correspondientes parejas ordenadas. **Indicador 2:** Establece escalas y registra correctamente los valores en ellas. **Indicador 3:** Reconoce a partir de la forma de la gráfica (recta o no) la covariación lineal o no de las dos variables asociadas. **Indicador 4:** Asocia la mayor o menor inclinación de la recta con la mayor o menor razón de cambio (rapidez del cambio de la variable dependiente con relación a la independiente) **Indicador 5:** Anticipa la posible forma de la gráfica que representa la covariación a partir de las condiciones de la situación	Los estudiantes ubican correctamente puntos en el plano cartesiano, asociándolos a los valores de las variables relacionadas. A partir de valores dados en la representación tabular identifican correctamente los pares ordenados correspondientes en la gráfica. Unos estudiantes asocian la forma de la gráfica (recta o curva) con la forma de covariación, pero entendida ésta como que se da o no que a incrementos iguales de una variable corresponde incrementos iguales de la otra, sin que se llegue a asociar con que la idea de que la recta representa la constancia de la razón de cambio y la no recta representa variación de ésta. Algunos estudiantes, como el de nivel bajo, al asociar la gráfica con el fenómeno empírico muestra que puede anticipar el sentido del incremento (cada vez se incrementa con mayor –o menor-rapidez) Los estudiantes asocian el intercepto de la gráfica con el eje Y con las condiciones iniciales del fenómeno que se representa. De igual forma algunos estudiantes logran relacionar la inclinación de la recta en una covariación lineal para algunos fenómenos (el de llenado), pero esto no es garantía para que lo extienda a otros fenómenos. Por ejemplo, los sujetos de nivel medio y alto, en la situación de movimiento (distancia recorrida y tiempo de recorrido, en movimiento con velocidad constante) interpretan la longitud del segmentos de recta en una gráfica cartesiana con la mayor o menor rapidez del móvil.
6.4 **Categoría cuatro:** Reconoce cuándo se da la constancia de la razón de cambio y cuándo no	**Indicador 1:** Relaciona el valor de la razón de cambio con el incremento de una variable respecto a la otra y reconoce su significado en la situación	Para los estudiantes resulta difícil comprender el significado de la constancia de la razón de cambio, aunque los tres sujetos de estudio asocian la razón de cambio constate con situaciones de tipo covariacional lineal. En el caso Suj1 se puede afirmar que comprende la razón de cambio como la razón entre incrementos correspondientes., mientras que el Suj3, realmente no maneja la razón de cambio, él interpreta la covariación apoyándose, como se ha dicho, en la situación empírica. Y otros sujetos, como el del nivel medio, solo se orientan por la idea que a incrementos iguales corresponden incrementos iguales.
6.5 Categoría cinco: Interpreta la representación cartesiana de dos o tres gráficas: el punto de intercepto de las dos o tres gráficas, el intercepto con Y, y la mayor o menor inclinación de las rectas	Indicador 1: Asocia el punto de intercepto de dos o tres gráficas de la representación cartesiana, con el punto en el cual los valores de las variables relacionadas coinciden.	Los datos estudiados permiten afirmar que el caso nivel alto comprende que el punto donde se cruzan dos gráficas corresponde a la coincidencia en los valores de las dos variables relacionadas. Aunque se puede apreciar una sutil diferencia en sus compresiones. En casos como el sujeto de nivel alto, entienden que el punto de corte equivale a la igualdad de los valores de las dos variables del fenómeno estudiado. En otros casos, parece que no se toma conciencia de este hecho y algunas veces se afirma la igual de valores de una de las dos variables pero no de ambas, es como estos sujetos no lograran coordinar las dos variables y centraran la atención en una de ellas.

Origen: Fuente Propia

6 DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Las evidencias y el análisis presentado en el capítulo anterior y en el anexo #3 hacen posible aseverar algunos aspectos con respecto a las comprensiones que se observaron en los estudiantes en las situaciones abordadas de covariación lineal. Por un lado, es posible afirmar que, aunque en términos generales los estudiantes de este grado dan muestra de ser capaces de identificar, en los fenómenos estudiados, que algunas magnitudes permanecen constantes y que otras varían, y, además, que hay covariaciones entre ellas, en algunos casos, como el estudiante del nivel bajo, presentan dificultad para diferenciar unas magnitudes de otras. Cuando tratan de ponerlas en relación para definir si las variaciones de una tienen como efecto variaciones en otra, caen en el error de afirmar la covariación porque introducen otra magnitud distinta al par que se estudia. Podría decirse que, en un comienzo, los estudiantes reconocen los cambios de las magnitudes, pero al hablar de las relaciones entre los cambios, éstas aparecen como un todo indiferenciado.

También se evidencia que para los estudiantes es un gran apoyo intuitivo el fenómeno que se va a estudiar, de ahí que la mayor o menor familiaridad que tengan con el fenómeno le va a ser de gran ayuda para establecer alguna medida cualitativa de cambio. Podrá decir cosas tales como si la covariación es directa (si aumenta una la otra también o si disminuye una la otra también), inversa (si una aumenta la otra disminuye o viceversa) e, incluso, puede ir un poco más allá, tener intuición de que una magnitud varia de forma constante o no, tomando como referencia el fenómeno. Sin embargo, estas intuiciones no significan que tengan resuelta la cuantificación de la covariación, es decir, que sean valores que a incrementos iguales de una de las variables se dan incrementos iguales de la otra y, mucho menos, que sean conscientes, de la constancia de la razón de cambio.

Por otra parte, los estudiantes no usan la razón de cambio para realizar los cálculos que se requieren para encontrar valores nuevos, ellos recurren a procedimientos más intuitivos (agregaciones sucesivas o, de multiplicación simple, para ello utilizan el valor unitario). En sus procedimientos de cálculo, no aparece la razón de cambio, lo cual puede ser indicador de que los estudiantes realmente no han logrado acceder a la comprensión de la variación del cambio, sino más acceden a la comprensión de la correspondencia del cambio de una magnitud con relación a la otra. En otras palabras, los estudiantes no usan la razón de cambio para realizar los cálculos, quizá porque esto requiere comprender una nueva covariación, ya no entre los valores de las variables, sino entre los incrementos de los valores de las variables.

Este estudio también ofrece evidencia de que, en términos generales, los estudiantes relacionan las variables de los fenómenos con puntos específicos del plano cartesiano. Ahora bien, no asocian la forma de la gráfica (recta o curva) con la constancia o variación de la razón de cambio. Más bien, relacionan las gráficas rectas con el tipo de covariación en el que a incrementos iguales de una variable corresponden incrementos iguales de la otra y las gráficas curvas con aquella covariación en la que no se presenta este hecho. Además, en algunos fenómenos asocian la inclinación de la recta en una covariación lineal. Sin embargo, no necesariamente lo hacen extensivo a otros fenómenos. Posiblemente, como ya se dijo antes, la mayor o menor, familiaridad con las características del hecho empírico quizá le permiten hacer o no este tipo de relaciones.

Por otra parte, en la interpretación de la representación cartesiana de dos gráficas, para los estudiantes el punto de intersección de estas refiere a una igualdad de valores de una misma variable. Sin embargo, en algunos casos, como el estudiante de nivel alto, reconocen esta igualdad de valores en las dos variables relacionadas, mientras en otros casos, no lo hacen, consideran este hecho como indicador de la igualdad de valores para solo una de las variables, dejando de lado la coordinación de las dos variables relacionadas.

Por consiguiente, al referenciar el objetivo general de la presente investigación, orientado a describir las comprensiones de covariación en eventos del contexto físico, que demuestran los estudiantes de grado noveno del Colegio Tomás Carrasquilla I.E.D y conforme a los resultados obtenidos en el análisis realizado, mencionamos a continuación aspectos relevantes y concluyentes que pueden estar sujetos a futuras discusiones. Para esto, se relacionarán algunas posturas teóricas que subyacen específicamente al estudio del fenómeno de la comprensión y a la perspectiva covariacional de la función lineal. Ya que estos dos pilares teóricos, demarcan en la presente propuesta de investigación, elementos alternativos y dinámicos que pueden ser considerados una buena herramienta de aproximación a la conceptualización del objeto matemático función lineal.

Por consiguiente, en el diseño e implementación de la secuencia didáctica, se abordaron situaciones dinámicas, que involucraron la covariación y el cambio de magnitudes, a partir del estudio de eventos propios del contexto físico, tomando en consideración las posturas sustentadas por autores como Vasco y Carlson, quienes han desarrollado, estudios relacionados con el pensamiento variacional, asociando el concepto de función, como modelo matemático que involucra la covariación a través de varios registros de representación.

De manera particular, a continuación, se mencionan algunos de los resultados obtenidos por estos dos referentes, los cuales convergen tácitamente, con los alcances de la presente investigación.

Por ejemplo, Vasco (2006), afirmó:

> El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos recortados de la realidad. (p. 138)

Por su parte Carlson (1998) refiere la noción de razonamiento covariacional, a partir de proponer un marco conceptual que describe las acciones mentales involucradas al aplicar razonamiento covariacional cuando se interpretan y representan funciones asociadas a eventos dinámicos, reportando que estudiantes de alto desempeño en un curso de cálculo, al razonar sobre cantidades covariantes, demuestran construir imágenes de la variable dependiente de una función, que cambia simultáneamente con el cambio imaginado de la variable independiente y en algunas situaciones eran capaces de construir imágenes de la razón de cambio. Es así, como desde Carlson et al. (2003), se define el razonamiento covariacional *como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra"*. (p.124)

De ahí que, tanto estos autores, como el presente trabajo, configuren una reflexión sobre la importancia de analizar patrones de cambio en varios contextos, para que los estudiantes comprendan las diferentes situaciones en las que interviene el concepto de variación.

Propuesta, que se ratifica en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006), los cuales frente al desarrollo del pensamiento variacional, infieren indiscutiblemente, el alto nivel de trascendencia que tiene para los estudiantes, el analizar fenómenos que relacionan procesos de variación entre dos magnitudes y que posteriormente pueden ser representados en diferentes registros, con el objeto de distinguir lo que cambia de lo que permanece constante y las posibles regularidades que se pueden generar en el análisis de una situación dinámica (Vasco, 2006).

Por consiguiente, en la secuencia didáctica se abordaron cuatro eventos físicos que relacionaron situaciones de covariación lineal proporcional, covariación lineal no proporcional y covariación no lineal, las cuales sustentan la definición dinámica del concepto de función, el cual a través de la historia ha evolucionado, al punto de inferir las interpretaciones clásicas que relacionan el estudio del movimiento.

En este sentido, el apoyarnos en esta definición, justificó la viabilidad de exponer algunos elementos o rasgos de la función, a través de la puesta en escena de actividades de covariación, logrando proyectar las consideraciones de Dolores y Salgado (2009), quienes en su investigación, orientan a los estudiantes a realizar acciones que los conlleven a involucrarse con preguntas como: ¿qué cambia?, ¿cuánto cambia?, ¿cómo cambia?, ¿a qué razón cambia? y ¿cómo se comporta globalmente la gráfica?, por lo tanto cada una de las tareas diseñadas en la secuencia didáctica, involucró diferentes tipos de representación de la función (tabular, grafico simbólico…) que gradualmente permitieron vislumbrar los elementos de las situaciones dinámicas de tipo covariacional sustentadas por Vasco (2006):

- Coordinar el cambio de una variable con respecto a la otra
- Coordinar la dirección del cambio de una variable con respecto a la otra
- Coordinar la cantidad de cambio de una variable respecto a la otra
- Coordinar la razón de cambio de una variable respecto a otra

Esto con el fin de reconocer la función lineal, como un modelo matemático que involucra la covariación entre las magnitudes asociadas a situaciones problema en contextos físicos, las cuales favorecen la comprensión significativa de este objeto matemático.

De esta manera, la categorización de las comprensiones que se observaron en los estudiantes durante el desarrollo de la secuencia didáctica estuvo fundamentada desde los elementos teóricos que postula Perkins (1999), frente a la concepción del fenómeno de la comprensión, el cual relaciona la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que los estudiantes saben. Es decir, el comprender la covariación lineal, relacionó la capacidad de los estudiantes, de desempeñarse flexiblemente en relación con el tópico: explicar, justificar, extrapolar y aplicar el concepto, de diversas maneras, que van más allá del conocimiento y la habilidad rutinaria.

De ahí, que el problema de categorizar las comprensiones se refirió directamente a la observación y clasificación de la información suministrada por los estudiantes en sus respuestas escritas y orales, las cuales permitieron perfilar las comprensiones que ellos demostraban, mediante la identificación de esos desempeños flexibles, que daban cuenta de acciones determinantes, que iban más allá de la memorización y la rutina, es decir el análisis concentró su atención en identificar lo que Sierpinska (1990) denomina *la calidad de las comprensiones,* pues efectivamente el ejercicio de evaluar las comprensiones involucro, vislumbrar las acciones asociadas al pensamiento covariacional, como un sistema de conocimientos y creencias acerca del mismo, y se evaluó el nivel de consistencia existente, entre las respuestas de los estudiantes con la teoría aceptada, adicionalmente a ello se intentó determinar una marca de transferencia (intra-inter) con el ánimo de rastrear si se superaban aquellas formas de comprensión basadas en esquemas inconsistentes o los denominados obstáculos epistemológicos.

En este sentido la presente investigación, trabajó sobre una aproximación indirecta, integradora, basada en la observación cuidadosa de los desempeños relevantes de los tres casos de análisis, frente a las situaciones dinámicas de tipo covariacional del contexto físico, que buscó la operatividad entendida como capacidad para proporcionar instrumentos válidos y fiables para la descripción de las comprensiones.

En esta línea, se diseñó la matriz de categorías de análisis, como un medio que nos permitió describir las comprensiones que se pueden alcanzar, cuando los estudiantes se involucran en el desarrollo de tareas de covariación lineal, reconociendo que dentro de la estructura conceptual de la función lineal hay un aspecto fundamental, del cual debemos dar referencia y es el razonamiento covariacional, entendido como cada una *de "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra"* (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2003).

En consecuencia, la presente investigación, tras observar los desempeños de comprensión, asociados a las acciones cognitivas, implicadas en la coordinación y comparación de dos magnitudes que covarían, deja de manifiesto, varios aspectos que se pueden convertir en precedentes para futuras discusiones o investigaciones, a continuación, se detallarán algunos de ellos.

En cuanto a la experiencia, consideramos que la secuencia didáctica que se diseñó e implementó como herramienta, permitió analizar desde la investigación cualitativa las producciones escritas y verbales de los estudiantes para llegar a describir y entender las comprensiones que ellos tienen, a la vez se convierte en un insumo importante para propiciar en los estudiantes de cualquier grado de secundaria el desarrollo del pensamiento variacional teniendo como eje principal la covariación, la razón de cambio y el concepto de función.

Por otro lado, se evidencia la necesidad de proponer y trabajar la covariación haciendo uso de situaciones cercanas a los estudiantes, que permitan abordar lo covariacional de forma distinta durante su trayectoria escolar desde edades tempranas, con experiencias sencillas y enriquecedoras, resaltando la necesidad de este en la vida cotidiana de cada individuo. Para así, ir acercando al estudiante al concepto de función y no necesariamente esperar hasta grado noveno, en este nivel ya es importante que ellos dominen de manera más clara algunos conceptos previos y necesarios para abordar el concepto de función y poder potencializar mejor la comprensión en este concepto y poder abordar con mayor facilidad los relacionados con el cálculo.

También, los resultados del presente estudio, pueden ser tomados como un referente importante que permiten diseñar tareas de covariación como también una propuesta de enseñanza pertinente para el aprendizaje del concepto de función, ya que ,estos mostraron que este tipo de tareas permite desarrollar habilidades en los estudiantes para alcanzar un pensamiento de tipo variacional, haciendo un acercamiento significativo a lo que proponen los lineamientos curriculares y los estándares básicos de matemáticas.

Otro gran alcance fue lograr integrar la forma de proponer un acercamiento al concepto de función lineal desde la secuencia didáctica propuesta con el identificar y describir las comprensiones de los estudiantes desde la observación detallada de sus desempeños, ambos justifican la necesidad de garantizar una manera de enseñar que favorezca la comprensión matemática que les permita a los estudiantes aplicar el conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Avila, P. (2011). Razonamiento covariacional a través de software dinámico. El caso de la variable lineal y cuadrática . Medellín.

Azcarate, C. (1996). Funciones y gráficas. Madrid: Síntesis.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos:Un marco conceptual y un estudio. *8(2)*, 121 - 156. Revista EMa.

Carpenter, T., Fennema, E., Fuson, K., Hiebert, J., Human, P., Murray, H., . . . Wearne, D. (1999). Learning basic number concepts and skills as problem solving. En E. Fernnema y T.A. Romberg (Eds.). *Mathematics classroom that promote understanding*, 45 - 61. Mahwah, N.J: Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. Educational Studies in Mathematics. *26*, 135 - 164.

D'Amore, B. (2004). Conceptualizacion, registros de representaciones semioticas y noetica. Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. 35 - 106. Barcelona, España: Uno.

Díaz. (2013). Artículo El Concepto de Función: Ideas pedagogicas a partir de su historia e investigaciones El calculo y su enseñanza. *4*. (Cinvestav-IPN, Ed.) México, D.F. Obtenido de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/

Díaz-Godino, J. (2000). Significado y comprensión de los conceptos matemáticos. *Uno*, 25, 77- 87.

Duval, R. (2006). n tema Crucial en la Educación Matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. 143 - 168. La gaceta del RSME.

Godino, J. (2003). Razonamiento Algebraico y su didáctica para maestros. Granada: Repro Digital.

Godino, J. (2003). Teoria de las representaciones semióticas. Granada: Universidad de Granada.

Gómez, O. (2015). Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno. Bogotá, Colombia.

Gómez, W. (2011). Algunas herramientas de la interdisciplinariedad para la comprensión del concepto de función lineal. Bogotá, Colombia.

Goñi, J. (2000). La enseñanza de las matemáticas, aspectos sociológicos y pedagógicos. Barcelona: Grao.

Grueso, R., & González , G. (2016). El concepto de función como covariación en la escuela. Santiago de Cali, Colombia.

Gusev, V., & Safuanov, I. (2000). Some theoretical problems of the development of mathematical thinking. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds) Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. *3*, 17 - 24. Hiroshima, Japan.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). Metodología de la investigación. *cuarta*. México, D.F.: McGraw-Hill Interamericana.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En D.A.Grouws (Ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. 65 -97. New York: MacMillan Publishing Company.

Jaramillo, J. (2015). Propuesta metodológica para la comprensión de situaciones problema que involucran procesos de variación a partir de modelos matemáticos. Medellín, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. Bogotá, Colombia: MEN.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, Colombia: MEN.

Niss, M. (1999). Aspects of the Nature and State of Research in Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics.

Perkins, D. (2003). El contenido, hacia una pedagogia de la comprensión. 79 - 101. Barcelona: Gedisa.

Perkins, D., & Blythe, T. (1994). Putting Understanding up-front. Educational Leadership. *Ante todo la comprensión, 51(5)*, 4 -7.

Pirie, S., & Kieren, T. (1989). A Recursive Theory of Mathematical Understanding. For the Learning of Mathematics.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? Educational Studies in Mathematics.

Posada, F., & Villa, J. (2006). Propuesta didáctica de aproximaciónal concepto de función lineal desde una perspectiva variacional. Medellín, Colombia.

Rendón Mesa, P. A. (2009). Conceptualización de la razón de cambio en el marco de la enseñanza para la comprensión. Medellin, Colombia.

Resnick, L., & Ford, W. (1990). La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Barcelona: Paidós - MEC.

Roldán Cruz, E. (2013). El aprendizaje de la función lineal, propuesta didáctica para estudiantes de 8° y 9° grados de educación básica. Bogotá, Colombia.

Romero, I. (2000). Representación y Comprensión en Pensamiento Numérico. IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Huelva (paper).

Saldanha, L., & Thompson, P. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. En S.B. Berensen, K.R. Dawkins, M. Blanton, W.N. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood y L. Stiff (Eds.). *Proceedings of the 20th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 298 - 303. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Sánchez Peña, D. (2016). Conceptualización de la función lineal y afín: Una experiencia de aula. Bogotá, Colombia.

Sierpinska, A. (1990). Some Remarks on Understanding in Mathematics. 10, 3, 24 -36. For the Learning of Mathematics.

Sierpinska, A. (1994). Understanding in Mathematics. London: The Falmer Press.

Skemp, R. (1993). Psicología del aprendizaje de las matemáticas. Madrid: Morata.

Stake, R. (2007). Investigación con estudio de casos. *cuarta*. Madrid: Morata.

Vargas Núñez, M. E. (2011). El concepto de función y sus aplicaciones en situaciones relacionadas con fenomenos físicos, que conducen a un modelo cuadrático, una propuesta para trabajar en el grado noveno . Colombia.

Vasco, C. (2006). Siete retos de la educación colombiana para el periodo de 2006 a 2019. Obtenido de http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/RetosEducativos.pdf

Zuñiga López, M. (2009). Un estudio acerca de la construcción del concepto de función. Tegucigalpa, M.D.C., Honduras.

ANEXOS

Anexo 1: SECUENCIA DIDÁCTICA

Título: Comprensión del conocimiento de situaciones de covariación

Propósitos generales

- **Propósitos de investigación**

Objetivo General: Identificar y describir las diferentes formas como los estudiantes comprenden las situaciones de covariación expuestas en una serie de tareas que se proponen resolver a lo largo de la secuencia didáctica identificando las relaciones de correspondencia entre las magnitudes asociadas a cada situación y analizando el comportamiento de la razón de cambio entre ellas.

Objetivos específicos

- Identificar qué comprensiones iniciales tienen los estudiantes acerca de situaciones covariacionales y como lo relacionan a su contexto real.
- Categorizar las comprensiones de los estudiantes en la construcción del significado de la función lineal.
- Describir las maneras cómo relacionan la razón de cambio con las diversas formas de representación de la covariación.
- Analizar el uso de las distintas formas de representación de la función lineal.

- **Propósitos de enseñanza**

Objetivo General: Que los estudiantes resuelvan con flexibilidad diferentes y diversos problemas relacionados con eventos de tipo covariacional y asocien dicho proceso a su contexto real.

Objetivos específicos:

- Fortalecer los desempeños en los que se evidenciaron dificultad en el desarrollo de la prueba inicial.

- Orientar a los estudiantes en la identificación de los tres tipos de covariación: lineal no proporcional, lineal proporcional y no lineal, a partir de situaciones contextualizadas que modelan estas representaciones.
- Guiar a los estudiantes en la comprensión de la covariación lineal de un evento covariacional, influenciándolo a tener un desarrollo flexible de sus habilidades y conocimientos.
- Contribuir a que los estudiantes determinen patrones de comportamiento en las diferentes situaciones de análisis de tipo covariacional.
- Proponer una serie de actividades de comprensión que permitan al estudiante flexibilizar sus conocimientos y demostrar la utilidad de sus aprendizajes.

Descripción global de la secuencia

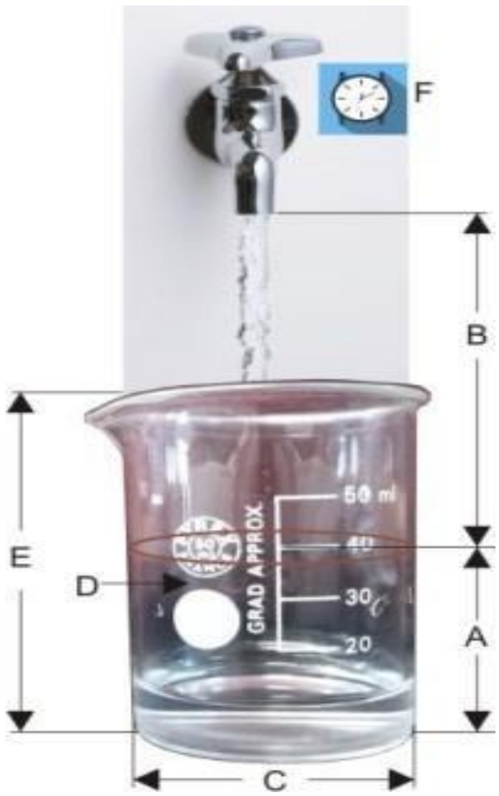
Prueba inicial: Se aplica una prueba diagnóstica cuyo objetivo principal es evaluar las comprensiones iniciales de los estudiantes, clasificando los tipos de razonamiento que relacionan en el desarrollo de la actividad, para rastrearlos durante la solución de la secuencia didáctica y reportar si se mantienen o cambian, permitiéndonos determinar si mejoran la calidad de sus comprensiones o no.

SESIÓN	NOMBRE DE LA SESIÓN	DESCRIPCIÓN GLOBAL DE LA SESIÓN.
1	Explorando la relación entre la variación de la altura del nivel del agua en una probeta y la cantidad de monedas que se introducen.	En esta sesión se involucra al estudiante en un proceso de modelación que relaciona la covariación lineal entre la altura del nivel del agua en la probeta respecto al incremento sucesivo de la cantidad de monedas que se introducen en ella, la situación de análisis relaciona un ejemplo claro de covariación lineal proporcional.
2	Estudiando la variación de los incrementos en la situación de depositado de monedas en probetas de forma diferente.	En esta sesión se pretende involucrar al estudiante en un análisis con mayor grado de complejidad al que se estudió en la sesión número uno. Se considera la misma experiencia de las probetas con las monedas pero se cambian de forma de los recipientes que se emplearan, esto permite ahondar en la reflexión de la covariación, que para este caso será lineal no proporcional y no lineal.

3	Construyendo la noción de razón de cambio.	En esta sesión se orienta al estudiante a determinar el resultado del cociente que relaciona la variación de los incrementos de las magnitudes asociadas, que será constante o variable según el tipo de covariación. El principal propósito que se persigue con esta sesión es, que ellos identifiquen que, a incrementos iguales de una variable, se tienen incrementos iguales de la otra variable, por tanto, la razón de cambio bajo estas condiciones es constante, del mismo modo, mientras que cuando a incrementos iguales en una variable no se presentan iguales incrementos en la otra la razón de cambio es variable.
Guía Evaluativa N°1	Esta guía pretende evaluar la calidad de las comprensiones adquiridas por los estudiantes después de desarrollar las sesiones 1, 2, y 3, y en esa misma medida, determinar cómo han cambiado sus percepciones respecto al ejercicio diagnostico propuesto en la prueba inicial.	
4	Comprobando la covariación lineal en situaciones de llenado.	En esta sesión se propone un ejercicio de retroalimentación de la guía evaluativa, que se desarrollara en grupo, con el ánimo de que los estudiantes compartan sus respuesta y las validen argumentativamente con sus compañeros, lo que permitirá medir el grado de consistencia de las respuestas expuestas en la guía evaluativa.
5	La covariación lineal y la Ley de Hooke	En esta sesión se empleará la ley de Hooke, a partir de observar la simulación de un sistema masa resorte y analizar el comportamiento de las variables que se caracterizan en este evento físico, determinando así las relaciones de correspondencia entre el alargamiento del resorte y la cantidad de pesos que se suspenden de él.
Guía Evaluativa N°2	Esta segunda guía evaluativa, se aplica con el objetivo de determinar la transferencia que es capaz de hacer el estudiante cuando analiza simultáneamente la situación de llenado y la ley de Hooke, permitiendo de esta manera caracterizar las comprensiones alcanzadas por el estudiante con el desarrollo de las actividades ya propuestas.	
6	Covariación lineal en eventos que relacionan movimiento.	En esta sesión se le propone al estudiante una situación novedosa que permite relacionar la covariación lineal proporcional, la covariación lineal no proporcional y la covariación no lineal, con el ánimo de generar más actividades de comprensión, que puedan llevar al estudiante como afirma Perkins más allá de lo que sabe.
Guía Evaluativa N°3	En esta guía el estudiante revelará sus comprensiones en la relación entre diferentes registros de representación de la covariación, al analizar esta nueva situación, del mismo modo se determinara el nivel de transferencia de los razonamientos lógicos evidenciados durante el proceso.	

PRUEBA INICIAL[3]

La figura muestra un recipiente que se está llenando. El líquido cae de una llave que se abre según se desee, pero durante el llenado no se modifica la abertura de la llave esto con el fin de permitir pasar la misma cantidad de líquido cada segundo.



A	Altura del nivel de agua a medida que se va llenando el recipiente
B	Longitud del chorro de agua (la medida que va desde la boca del grifo o la llave hasta que desaparece porque hace contacto con el líquido que ya está en el recipiente
C	Diámetro del recipiente
D	Cantidad de agua a medida que se va llenando el recipiente
E	Altura del recipiente
F	Tiempo transcurrido mientras va cayendo el líquido en el recipiente

Utilice la información proporcionada para contestar las preguntas que se formulan a continuación.

[3] Esta prueba se elaboró en el seminario **Construcción del pensamiento Numérico dirigido por el profesor Jorge Castaño G. Maestría de Educación (I semestre de 2017). Pontificia Universidad Javeriana**

NOMBRE____ CURSO ___________

1. En la tabla aparecen las letras A, B, C, D, E, F. En cada caso diga si los valores que representa cada letra varían o permanecen constantes mientras el llenado del recipiente. Justifique cada respuesta dada.

Valores representados Por	**Escriba si cambian o no los valores de la medida**	**Justifique su respuesta**
A (la altura del nivel de agua)		
B (longitud del chorro de agua)		
C (diámetro del recipiente)		
D (cantidad de agua)		
E (la altura del recipiente)		

2. A continuación, se dan algunos pares de medidas, para cada caso diga si los valores de alguna de las medidas cambian a medida que cambian los valores de la otra medida, o si por el contrario los valores de estas medidas no se relacionan entre sí. Justifique la respuesta.

Valores representados por	**Escriba si una medida cambia o no con los cambios de la otra medida**	**Justifique su respuesta**
A (altura del nivel de agua) y **C (**diámetro del recipiente)		
A (altura del nivel de agua y **E** (altura del recipiente)		
D (cantidad de agua) y **C** (diámetro del recipiente)		
C (diámetro del recipiente) y **E** (altura del recipiente)		
B (longitud del chorro) y **D** (cantidad de agua)		
E (altura del recipiente) y **F** (tiempo transcurrido)		

3. A continuación, se presentan tres tablas en las que se escriben valores de **A** (altura del nivel de agua) y **F** (tiempo transcurrido), escoja la tabla que representa los valores de A, y F que corresponden a una posible experiencia de llenado de un recipiente que tiene la misma forma del que se mostró en la figura inicial. En cada caso escriba Si o No según corresponda y justifique su respuesta.

3.1

Valores de A (dado en cm)	1,2	2,5	3,9	5,4	7,0
Valores de F (dado en Seg)	1	2	3	4	5

Justifique su respuesta:

3.2

Valores de A (dado en cm)	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0
Valores de F (dado en Seg)	2	4	6	8	10

Justifique se respuesta:

3.3

Valores de A (dado en cm)	1,8	1,6	1,4	1,2	1,0
Valores de F (dado en Seg)	1	2	3	4	5

Justifique su respuesta:

4. En un experimento que no tiene nada que ver con la situación de llenado que se viene estudiando se toman los datos que aparecen en las tablas, a partir de estos datos observe cómo varían las medidas y complete la tabla con los valores que considera toman las medidas a partir de los valores que se dan.

4.1

Valores de W (dado en cm)	4	8	12		
Valores de M (dado en cm)	56	52	48		

4.2

Valores de X (dado en cm)	36	72			
Valores de Y (dado en Seg)	4	8			

5. Si se sabe que la medida **B** (la longitud del chorro de agua) en un momento dado mide 26 cm y que el valor de **A** (altura de nivel del agua) correspondiente es 34 cm, ¿cuánto medirá el valor de **A** cuando se reduce a la mitad el valor de **B**?

Justifique su respuesta

6. Juana realiza dos observaciones en dos momentos diferentes del proceso de llenado, las medidas que reporta en cada caso son:

Observación 1. La medida **A** (la altura del nivel de agua) es 15 cm

Observación 2. El tiempo transcurrido es 3 veces la cantidad de segundos que habían transcurrido al hacer la primera observación.

¿Cuánto medirá la altura del agua en la segunda observación?

Justifique su respuesta

7. Utilice la tabla para contestar las preguntas 7.1 y 7.2

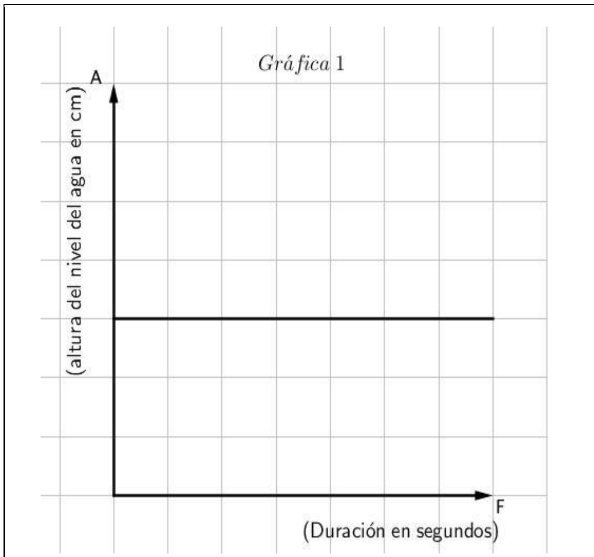
Valores de A (dado en cm)	2,2	4,4	6,6	8,8	11,0
Valores de F (dado en Seg)	2	4	6	8	10

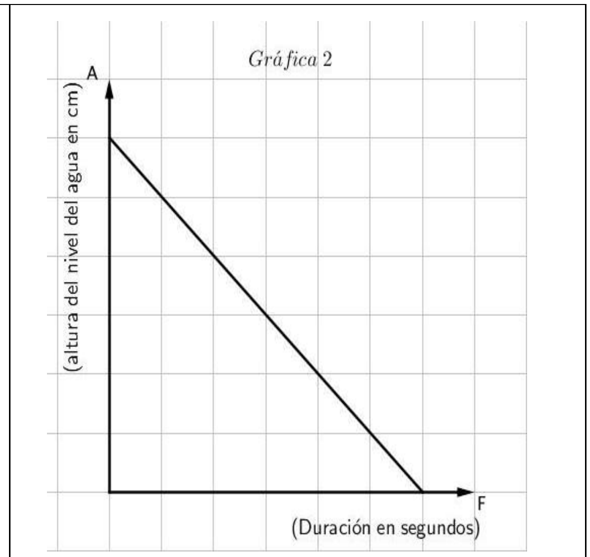
7.1 ¿Qué altura alcanza el nivel del agua cuando han transcurrido 4 segundos de llenado?

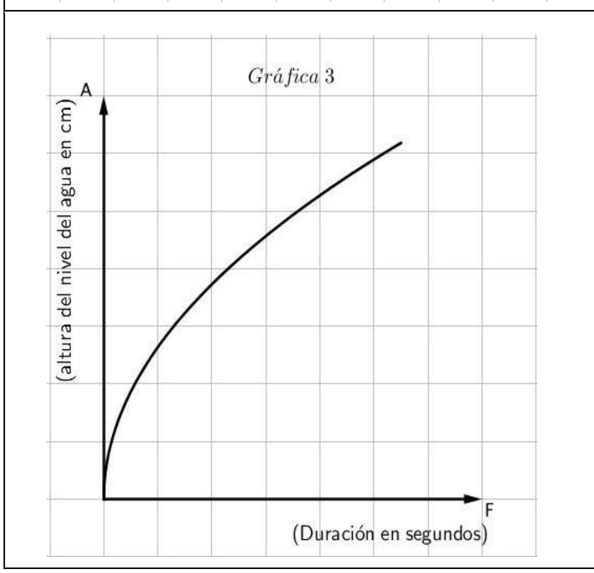
Justifique se respuesta:

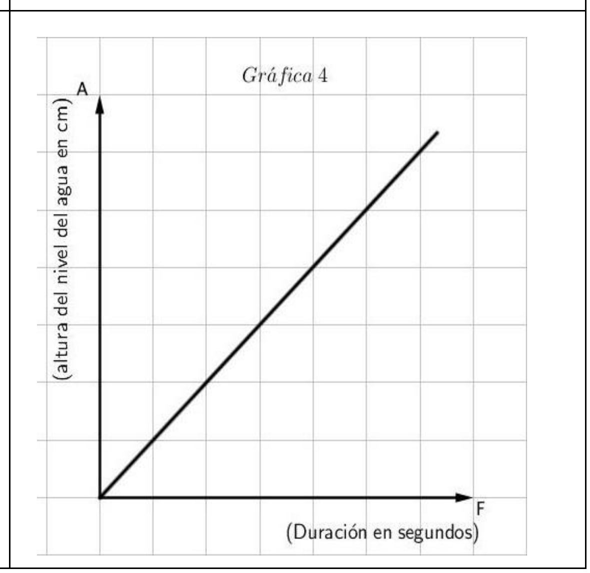
7.2 ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el nivel del agua alcance 5,5 cm de altura? Escribe el procedimiento seguido.

8. De las cuatro gráficas, seleccione la que considera que representa correctamente la forma como cambian los valores de la medida **A (**altura del nivel del líquido a medida que cambia **F (**el tiempo de llenado**)**.



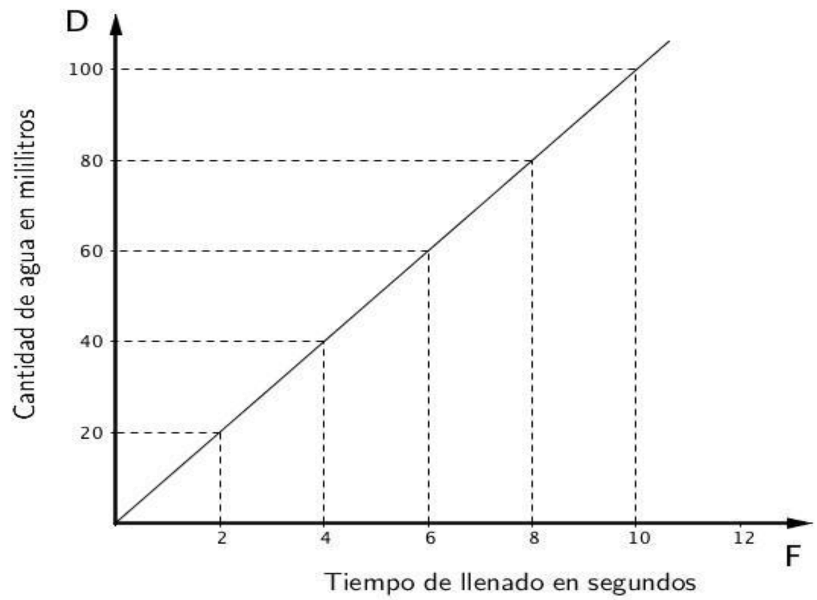






Justifique su respuesta:

9. La gráfica representa los valores que va tomando **D** (cantidad de agua) a medida que cambian los valores de **F** (al tiempo de llenado). Utilice la gráfica para contestar las preguntas 9.1 y 9.2

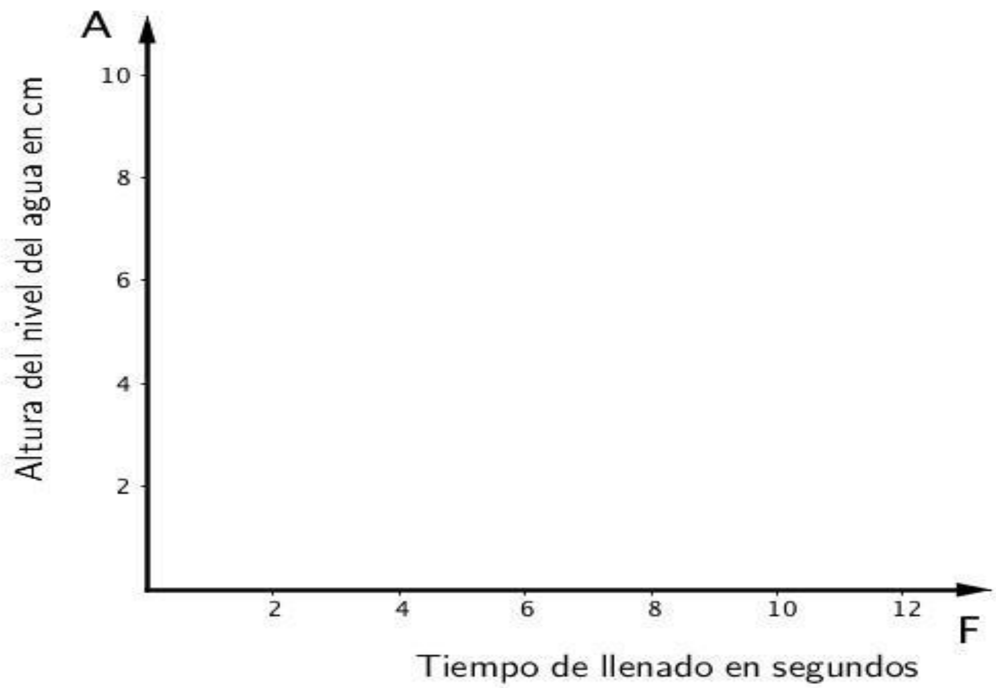


9.1 ¿Qué cantidad de agua hay en el recipiente cuando han transcurrido 4 segundos de llenado? Justifique su respuesta:

9.2 ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para en el recipiente haya 70 mililitros de agua? Justifique su respuesta:

10. Represente en el plano los valores de la tabla y trace la gráfica

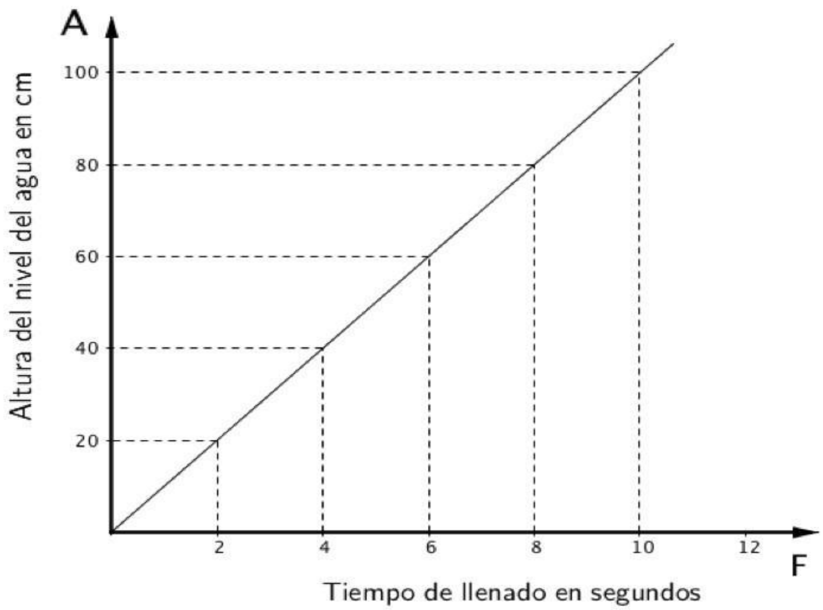
Valores de A (dado en cm)	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0
Valores de F (dado en seg)	2	4	6	8	10



11. ¿Qué pasa con la forma como cambia **A (Altura del nivel del agua)** a medida que cambia **F (tiempo de llenado)** si se utilizan recipientes más delgados o más gruesos?

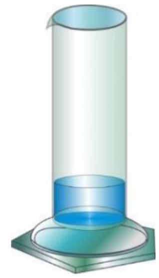
Justifique su respuesta:

12. La gráfica muestra la forma como van cambiando los valores de **A** (Nivel del agua) a medida que cambian los valores de **F** (el tiempo de llenado), en ese mismo dibujo trace otra gráfica que represente la misma variación de los valores de **A** con relación a **F,** pero si se trata de llenar un recipiente más delgado que el que se ha venido utilizando.



Justifique su respuesta:

Sesión N° 1	
1. Nombre de la sesión	Explorando la relación entre la variación de la altura del nivel del agua en una probeta y la cantidad de monedas que se introducen.
2. Fecha de implementación	13 de febrero de 2018
3. Descripción global de la sesión	En esta sesión se plantea a los estudiantes una situación de covariación lineal, la cual consistente en considerar una probeta cilíndrica, que contiene inicialmente determinada cantidad de agua, que alcanza un nivel de altura de 40mm de longitud. A esta probeta se van depositando 1, 2, 3, … monedas en forma secuencial. El propósito es analizar la correspondencia en la variación de las magnitudes asociadas (variación de la altura del nivel del agua y número de monedas depositadas).
4. Objetivos de aprendizaje de los estudiantes	Al finalizar la sesión los estudiantes • Identificarán la forma como varía el nivel del agua a medida que se introducen 1, 2, 3, … monedas. • Reconoce que cuando la probeta es cilíndrica ocurre que existen incrementos constantes de altura para variaciones constantes de la cantidad de monedas introducidas. • Identifica una forma de correspondencia entre los valores de la altura del nivel del agua y la cantidad de monedas introducidas, de forma que le permite continuar con los valores siguientes (el valor n+1) a partir de un par de valores dados (el valor n)
5. Objetivos de enseñanza	Guiar al estudiante a reconocer y caracterizar particularidades especiales en una situación de covariación.
Descripción de actividades de la sesión Momentos	**Momento 1.** Presentación de la situación problema. En plenaria se explica la situación a los estudiantes y se discute sobre las descripciones y explicaciones que ofrecen al responder la pregunta sobre la relación de variación entre la altura del nivel del agua respecto al depósito de 1, 2,3, … monedas. Formulación de la situación problema: Considerar una probeta cilíndrica que contiene cierta cantidad de agua, como lo muestra la figura.

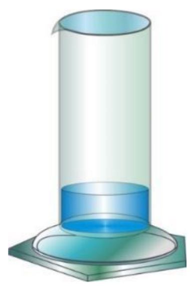
	 Se le van depositando de manera sucesiva 1,2, 3, … monedas de $1000 El estudiante debe identificar cuales magnitudes permanecen constantes y cuales cambian a media que se realiza la experiencia. Por ejemplo, el diámetro de la probeta, la cantidad de agua, el nivel de la altura de la longitud del agua y el número de monedas que se introducen. **NOTA 1.** En este momento se busca que aparezcan diferentes posiciones de los estudiantes. No se trata ofrecer soluciones y, en tanto sea posible, que aparezcan diferentes respuestas, con la intención de suscitar un interés por ejecutar posteriormente una experiencia para resolverla. **NOTA 2.** En las gráficas cartesianas se trazan curvas continuas, a pesar de que si se quiere ser estrictos se puede considerar que la variable número de monedas es discreta. Sin embargo, este es un aspecto que en este momento no se busca hacer diferenciar a los estudiantes, además, bien podría pensarse en una cantidad no entera de monedas (p. ej. 1,82 monedas). (15 minutos) **Momento 2**. Anticipaciones de los estudiantes En este momento, los estudiantes de forma individual anticipan lo que ellos consideran que deben evidenciar las representaciones tabular y cartesiana, que modelan la relación entre las dos variables asociadas. Para ello resuelven la guía No 1 y las preguntas 1, y 2 (15 minutos) **Momento 3.** Trabajo colectivo, para discutir las respuestas dadas en el trabajo individual Los estudiantes comparten sus respuestas y buscan conseguir un acuerdo. (20 minutos) **Momento 4**. Realización de la experiencia y comparación de predicciones con los resultados obtenidos. (40 minutos) **Momento 5.** Puesta en común. Algunos socializan los resultados obtenidos y se discute sobre ellos (20 minutos) **Tiempo estimado: 1 hora y 50 minutos**
Materiales	Probetas cilíndricas, monedas de la misma nominación, agua, fotocopias de la actividad a realizar en la sesión, lápiz, regla.

SESIÓN N° 1

EXPLORANDO LA RELACIÓN ENTRE LA VARIACIÓN DE LA ALTURA DEL NIVEL DEL AGUA EN UNA PROBETA Y LA CANTIDAD DE MONEDAS QUE SE INTRODUCEN

ESTUDIANTE: ____

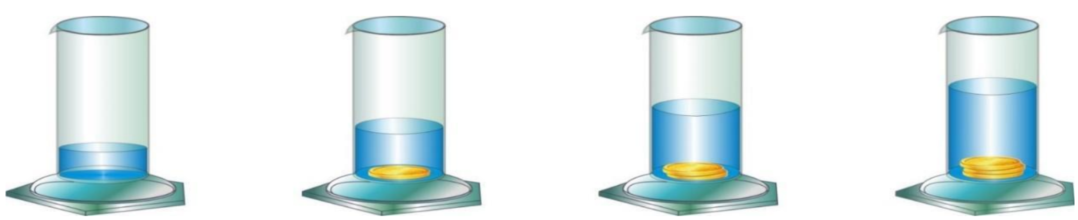
Piense en una situación como la siguiente: Se tiene una probeta que contiene cierta cantidad de agua, como lo muestra la figura.



Imagine que se van depositando de manera sucesiva 1,2,3… monedas de $1000, ¿qué sucede con la altura del nivel del agua a medida que va introduciendo cada moneda?

Justifique su respuesta:

La figura muestra una probeta, en la que la altura del nivel del agua es 40 mm. Si se deposita en el recipiente consecutivamente 1,2,3, etc. monedas de $1000, la altura del nivel del agua se incrementa.



Utilice la información proporcionada para contestar las preguntas que se formulan a continuación.

TRABAJO INDIVIDUAL

1. Analice el cambio que existe entre altura del nivel del agua respecto a la cantidad de monedas depositadas y seleccione la tabla de datos que, según su criterio, relaciona mejor la variación entre estas dos cantidades.

A.

Cantidad de monedas	0	1	2	3	4
Altura del nivel del agua (mm)	40	38	36	34	32

B.

Cantidad de monedas	0	1	2	3	4
Altura del nivel del agua (mm)	0	2	4	6	8

C.

Cantidad de monedas	0	1	2	3	4
Altura del nivel del agua (mm)	40	42	44	46	48

D.

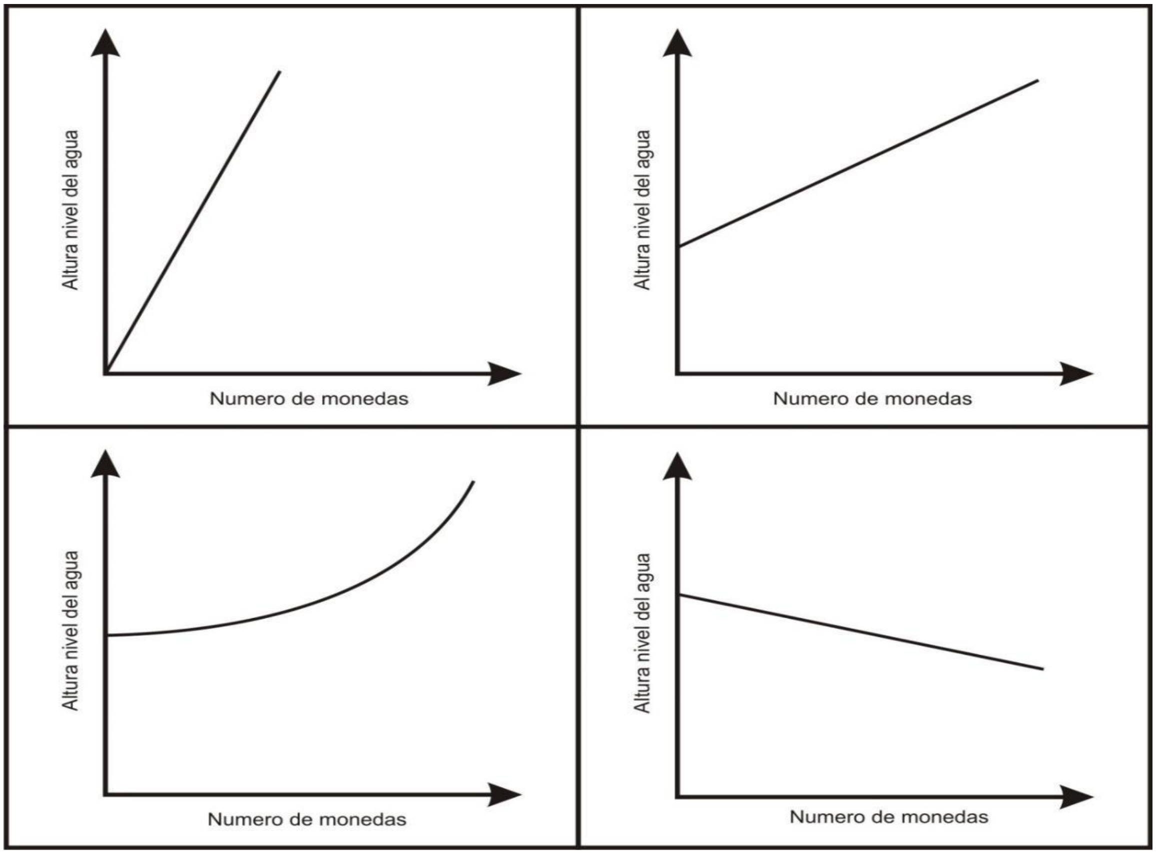
Cantidad de monedas	0	1	2	3	4
Altura del nivel del agua (mm)	40	42	43	47	52

La tabla de datos que mejor representa la variación es:

Indique para cada tabla si los valores corresponden a una posible experiencia de depositado de monedas de la misma denominación en una probeta.

Justifique su respuesta.

2. Seleccione la gráfica que considere representa mejor la forma como varía la altura del nivel del agua con relación a la cantidad de monedas depositadas.



La gráfica que mejor representa la variación es:

Indique para cada gráfica si los valores corresponden a una posible experiencia de depositado de monedas de la misma denominación en una probeta.

Justifique su respuesta.

TRABAJO COLABORATIVO

Grupo No ____

NOMBRES: ____

____

Complete la siguiente tabla, con la ayuda de sus compañeros de grupo y describa que argumentos comunes y no comunes se relaciona en cada una de las selecciones realizadas.

Acuerdos y desacuerdos con relación a las tablas.

Tabla	Acuerdos	Desacuerdos
A		
B		
C		
D		

La tabla(s) que el grupo considera representa(n) correctamente la forma como la altura del nivel del agua varía a medida que varía el número de monedas depositadas es (son): __________

Justifiquen su respuesta:

Acuerdos y desacuerdos con relación a las gráficas.

Gráfica	**Acuerdos**	**Desacuerdos**
A		
B		
C		
D		

La gráfica(s) que el grupo considera representa(n) correctamente la forma como la altura del nivel del agua varía a medida que varía la cantidad de monedas es(son): ___________

Justifiquen la respuesta:

EXPERIENCIA

Ahora van a realizar la experiencia para ver realmente cómo varía la altura del nivel del agua a medida que se introducen 1, 2, 3, … monedas en la probeta.

Materiales: Probeta, monedas de $1000, agua y cinta métrica.

Procedimiento: Vierta 20 ml de agua en la probeta.

Introduzca una moneda de $1000 en la probeta y registre en la tabla de datos que aparece a continuación la nueva medida de la altura del nivel del agua. Repita el mismo procedimiento hasta completar cinco monedas. Utilice la escala de medición en milímetros que aparece anexada a la probeta.

1. Complete la tabla

Número de monedas	**Altura del nivel del agua (mm)**
0	40
1	
2	

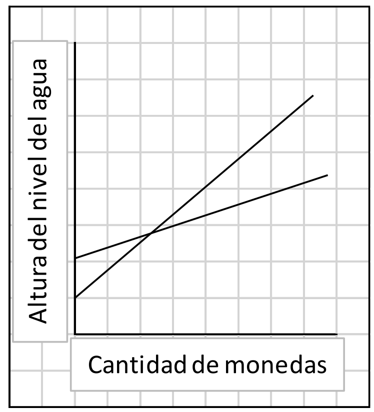
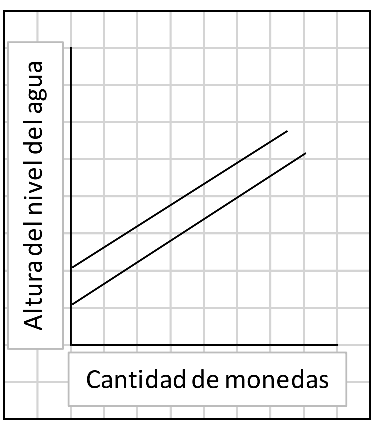
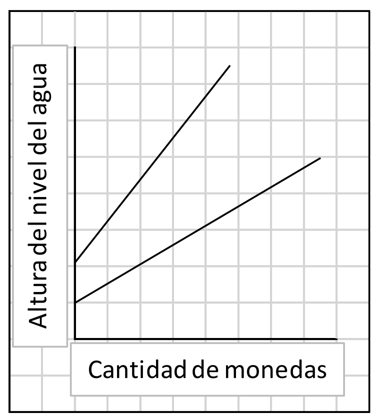
2. Grafique en el plano cartesiano los valores registrados en la tabla anterior. Utilice una escala de 10 en 10 y en el eje “x” represente el número de monedas y en el eje “y” altura del nivel del agua.

3. Comparen la tabla seleccionada inicialmente, según los acuerdos y desacuerdos que se construyeron de manera grupal, con la tabla obtenida en la experiencia y escriba si coinciden o no. Expliquen por qué se da esta coincidencia o no.

4. Comparen la gráfica seleccionada inicialmente, según los acuerdos y desacuerdos que se construyeron de manera grupal, con la obtenida en la experiencia y escriba si coinciden o no. Expliquen por qué se da, o no esta coincidencia.

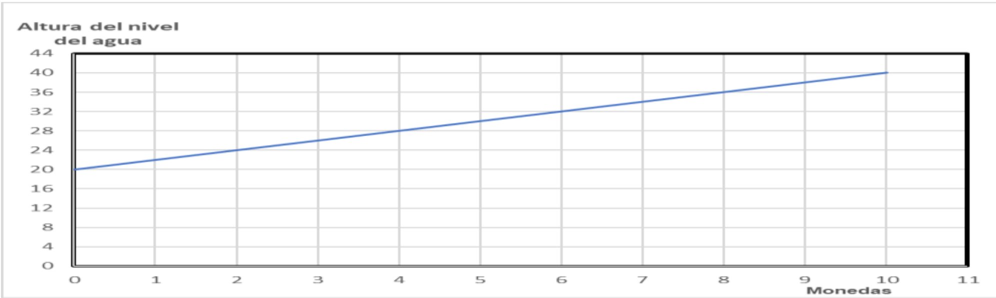
TRABAJO EN CASA

1. Las siguientes gráficas cartesianas presentan dos rectas correspondientes a dos probetas A y B iguales. Cuál de estas gráficas es correcta si se sabe que la cantidad inicial de agua en la probeta B, es el doble de la de A y las monedas que se van introduciendo en las probetas son de la misma denominación.

A. 	B. 
C. 	D. 

Justifique su respuesta:

2. A partir de la siguiente gráfica, responda cada una de las preguntas propuesta a continuación.



a) ¿Cuál es la altura del nivel del agua en la probeta cuando aún no se introducido monedas?

Justifique su respuesta:

b) ¿Cuál es la altura alcanzada del nivel del agua cuando se introducen 5 monedas?

Justifique su respuesta:

c) ¿Cuál es la altura alcanzada del nivel del agua cuando se introducen 8 monedas y media?

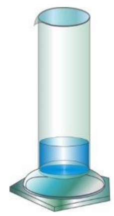
Nota: Admita que las monedas se pueden fraccionar.

Justifique su respuesta:

d) Trace en la misma gráfica la recta que representaría la variación de la altura a medida que se introducen monedas en caso de que las monedas que se usaran sean más pequeñas que las que fueron usadas. Asuma que la probeta es la misma y que la altura inicial del agua es la misma.

Justifique su respuesta:

Sesión N° 2	
1. Nombre de la sesión	Estudiando la variación de los incrementos en la situación de depositado de monedas en probetas de forma diferente.
2. Fecha de implementación	21 de febrero de 2018
3. Descripción global de la sesión	En esta sesión se plantea a los estudiantes la misma situación de covariación lineal presentada en la sesión 1, relacionada con una probeta que contiene una cantidad de agua que alcanza una determinada altura, a la que se van depositando consecutivamente monedas de la misma denominación. Se estudia el incremento del nivel del agua a medida cuando se depositan las monedas. En esta ocasión, se busca que los estudiantes se den cuenta que el incremento del nivel del agua, además de ser constante, puede ser mayor o menor dependiendo del tamaño o número de monedas o del diámetro de la probeta. Finalmente, se pretende que contraste los resultados obtenidos con la probeta es cilíndrica con un Erlenmeyer.
4. Objetivos de aprendizaje de los estudiantes	Al finalizar la sesión esperamos que los estudiantes logren: ● Identificar que cuando la probeta no es cilíndrica, el incremento de la altura del nivel del agua no es constante. ● Reconocer que el incremento de la altura del nivel del agua en una probeta cilíndrica, además de ser constante, es mayor si la probeta es de menor diámetro y menor si es de mayor diámetro y dar razones adecuadas de por qué se produce este hecho. ● Identificar que cuando se cambia la denominación de las monedas, el incremento de las alturas del nivel del agua puede ser mayor o menor por la variación del volumen y dar razones adecuadas de por qué se produce este hecho.
5. Objetivos de investigación	Esta sesión tiene el propósito de ofrecer una experiencia que ilustre una forma de covariación no lineal y que se pueda comparar con la situación de covariación lineal analizada en la sesión 1.
Preguntas de investigación	¿Qué comprensiones tienen los estudiantes al momento de contrastar una situación de covariación lineal con otra de covariación no lineal?
Descripción de actividades de la sesión Momentos	El desarrollo de la sesión está propuesto en seis momentos, los cuales son: **Momento uno:** Este momento será de trabajo individual, se pretende que el estudiante analice e identifique algunos elementos de una gráfica doble, la cual representa la variación del nivel del agua a medida que se le depositan monedas de la misma denominación en dos probetas de diferentes diámetros. Además, se realizará una plenaria en la que se expongan las conclusiones obtenidas de este

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
ejercicio y del planteado en la tarea para la casa asignada en la sesión 1 (25 minutos)
Momento dos: En este momento se formula la siguiente situación problema.
Imagine que se hace la misma experiencia de la sesión anterior pero ahora se cambia la forma de la probeta. En lugar de ser de forma cilíndrica ahora tiene forma parecida a la de un cono.


En este momento se busca que los estudiantes identifiquen que el incremento de la altura del nivel del agua a medida que se depositan las monedas en una probeta no cilíndrica, no es constante. Además, pueda seleccionar el registro tabular y gráfico que representa esta situación. (25 minutos)
Momento tres: Este momento será de trabajo grupal, se pretende que cada grupo llegue a algunos acuerdos sobre las conclusiones obtenidas de la situación anteriormente planteada. (15 minutos)
Momento cuatro: Se hará una puesta en común en la que se socialicen algunas conclusiones importantes obtenidas en la situación planteada. (15 minutos)
Momento cinco: Este momento será de trabajo individual. Se les planteará a los estudiantes la situación del depositado de monedas representada de forma tabular. Se busca que estudien los incrementos que se producen en una de las variables cuando se hace cambio en la otra y de esta manera introducir la noción de razón de cambio. (20 minutos)
Momento seis: De manera grupal, se llegarán a conclusiones sobre los incrementos del nivel del agua en dos representaciones tabulares presentadas en el ejercicio individual presentada en el momento anterior. (10 minutos)
Tiempo estimado: 110 minutos
</td>
</tr>
<tr>
<td>Materiales</td>
<td>Fotocopias de la actividad a realizar en la sesión, lápiz, borrador, tajalápiz y regla</td>
</tr>
</table>

SESIÓN N° 2

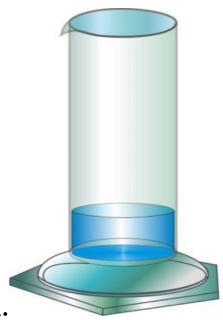
ESTUDIANDO LA VARIACIÓN DE LOS INCREMENTOS EN LA SITUACIÓN DE DEPOSITADO DE MONEDAS EN PROBETAS DE FORMA DIFERENTE.

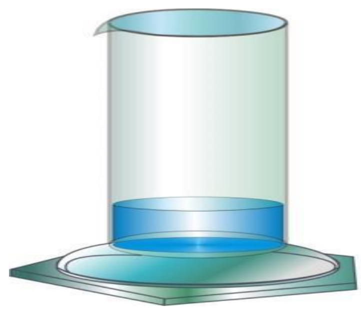
ESTUDIANTE: ____

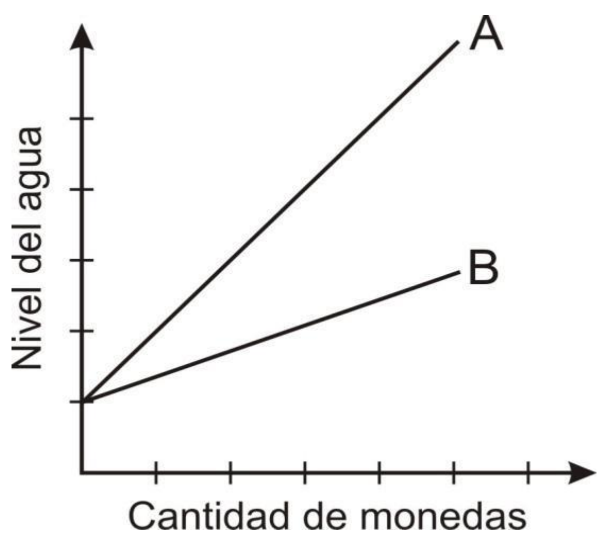
<u>TRABAJO INDIVIDUAL</u>

Considerando el trabajo desarrollado en la sesión N° 1.

Analice la siguiente gráfica que representa la variación de la longitud del agua cuando se le depositan sucesivamente monedas de $1000 a las probetas A y B

A. 

B. 



Indique si cada uno de los siguientes enunciados es falso o verdadero y justifique su respuesta según corresponda para cada caso:

ENUNCIADO	F	V	JUSTIFICACIÓN
La probeta A tiene inicialmente más cantidad de agua.			
La probeta B experimenta un menor incremento en la longitud del agua, porque su diámetro es mayor.			
Las gráficas cortan en el eje Y, en un mismo punto, porque la cantidad inicial de agua es la misma.			
La probeta A tiene su gráfica más inclinada porque experimenta un mayor incremento en la longitud del agua debido a que su diámetro es menor.			
La inclinación de las gráficas de ambas probetas depende de la cantidad de agua inicial.			

Determine si las variables cavarían o no y explique por qué:

- El diámetro de la probeta y la cantidad de agua inicial:

- El incremento de la longitud del agua y el número de monedas que se sumergen en la probeta

- El tamaño de las monedas y el diámetro de la probeta.

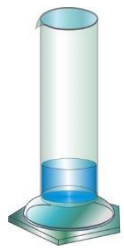
- La cantidad de monedas y el tamaño de la probeta.

TRABAJO COLABORATIVO

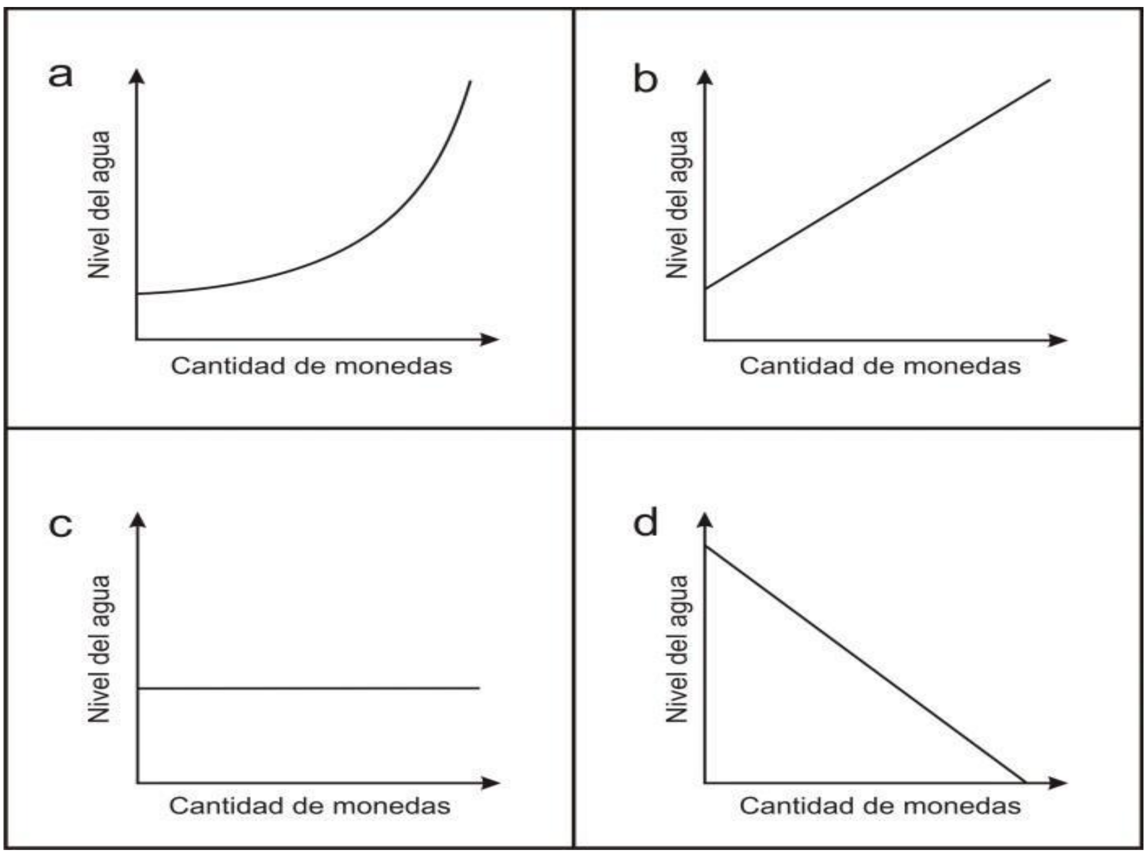
Socialice con sus compañeros los resultados de la tarea asignada y los ejercicios de retroalimentación expuestos anteriormente y consigne en el siguiente cuadro las conclusiones que a su criterio son importantes para explicar la variación de la longitud del agua de la probeta a la cual se le sumergen monedas consecutivamente.

TRABAJO INDIVIDUAL

Imagine que se hace la misma experiencia de la sesión anterior pero ahora se cambia la forma de la probeta. En lugar de ser de forma cilíndrica ahora tiene forma parecida a la de un cono



1. De las siguientes gráficas escoja la que considera que representa mejor la forma como varía la altura del nivel del agua a media que se introducen monedas de la misma denominación en la probeta.



2. De las siguientes tablas escoja la que considera que representa mejor la forma como varía la altura del nivel del agua a medida que se introducen en la probeta monedas sucesivamente

A.

Altura del nivel del agua (mm)	30	32	32	36	40	46
Cantidad de monedas	0	1	2	3	5	8

B.

Altura del nivel del agua (mm)	30	32	33	35	39	44
Cantidad de monedas	0	1	2	3	4	5

C.

Altura del nivel del agua (mm)	30	32	34	36	36	36
Cantidad de monedas	0	1	2	3	4	5

D.

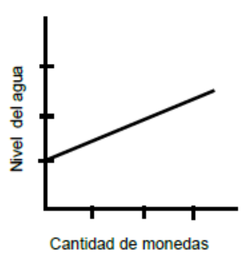
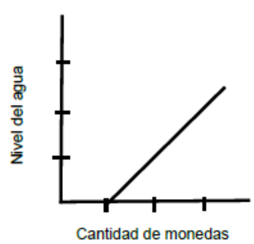
Altura del nivel del agua (mm)	30	29	27	25	18	15
Cantidad de monedas	0	1	2	3	4	5

Justifique su respuesta:

3. Considerando que después de realizar la experiencia de la sesión N°1 se logró demostrar que la gráfica que mejor representa la variación de la altura del nivel del agua respecto al número de monedas que se introducen en la probeta es:

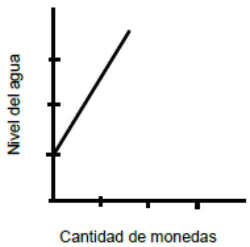
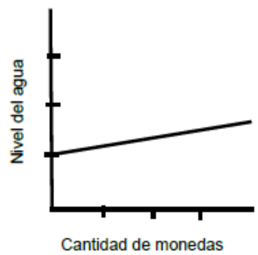
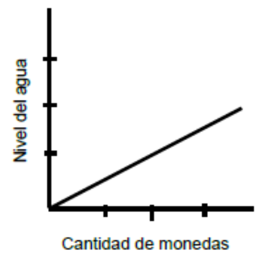
Responda las siguientes preguntas:

- Si se duplica la cantidad de agua inicial de la probeta antes de depositar cualquier moneda y el resto de la experiencia se desarrolla en las mismas condiciones, seleccione la gráfica que mejor representara esta situación.

A. 	B. 	C. 	D. Ninguna de las anteriores

Justifique su respuesta:

- Si se cambia la denominación de las monedas y en vez de usar monedas de $1000, usamos monedas de $50, lo más probable es que la gráfica sea:

A.	B.	C.	D.
			Ninguna de las anteriores

Justifique su respuesta:

TRABAJO COLABORATIVO

Teniendo en cuenta lo desarrollado en los tres pasos anteriores enuncie los acuerdos a los que llego con sus compañeros de grupo en:

1. Acuerdos en la selección de la gráfica del punto 1:

2. Acuerdos en la selección de la tabla del punto 2.

3. Acuerdos en la selección de las gráficas del punto 3.

TRABAJO INDIVIDUAL

La siguiente tabla de datos se obtuvo de una experiencia como la realizada en la sesión anterior.

Cantidad de monedas	**Altura del nivel del agua (mm)**
0	40
1	42
2	44
3	46
4	48
5	50
6	52

1. Conteste las siguientes preguntas:

- ¿De qué valor a que otro cambia la altura del nivel del agua si se pasa de tenar 3 a 5 monedas?

Justifique su respuesta:

- ¿De qué valor a qué otro cambia la altura del nivel del agua si se pasa de tener 2 a 6 monedas?

Justifique su respuesta:

INCREMENTO DE LA CANTIDAD DE MONEDAS

Cuando el valor de la cantidad de monedas cambia de un valor a otro se dirá que se ha producido un INCREMENTO EN EL VALOR del número de monedas.
Por ejemplo. Si el valor del número de monedas inicialmente es 3 y después cambia al valor de 5 monedas se dirá que el valor del número de monedas se ha incrementado 2 monedas.

Si se representa por "n" la cantidad de monedas, podemos representar por Δn el incremento de la cantidad de monedas.

INCREMENTO DE LA CANTIDAD DE MONEDAS es igual a la resta
Valor final de la cantidad de monedas (nf) *MENOS* valor inicial de la cantidad de monedas (ni)

$$\Delta n = nf - ni = 5 \text{ monedas} - 2 \text{ monedas} = 3 \text{ monedas.}$$

Este incremento puede ser negativo si "n" pasa de un valor mayor a uno menor. Por ejemplo el número de monedas cambia de 3 a 1. En esta caso (Δn)

$$\Delta n = nf - ni = 1 \text{ moneda} - 3 \text{ monedas} = -2 \text{ monedas.}$$

INCREMENTO DEL VALOR DEL NIVEL DEL AGUA

De forma semejante se define el incremento de la altura de nivel del agua

Representemos por:

Ai el valor inicial de la altura del nivel del agua

Af el valor inicial de la altura del nivel del agua

ΔA el incremento de la altura del nivel del agua

Considerando la información expuesta anteriormente:

- Calcule el incremento de la altura del nivel del agua cuando el número inicial de la cantidad de monedas es 4 y cambia a 6.

Justifique su respuesta:

- Calcule incremento de la altura del nivel del agua cuando el número inicial de la cantidad de monedas es 5 y cambia a 1

Justifique su respuesta:

2. Complete la tabla siguiente y responda las preguntas

TABLA N° 1

A	B	C	D	E	F
Cantidad final de monedas **(nf)**	Cantidad inicial de monedas **(ni)**	Incremento del valor de la cantidad de monedas **Δn**	Altura final del nivel del agua **Af**	Altura inicial del nivel del agua **Ai**	Incremento del valor de la altura del nivel del agua **ΔA**
4	2		48	44	
6	4		52	48	
8	6		56	52	
10	8		60	56	
12	10		64	60	

Observe y analice las columnas C y F ¿Qué puede concluir al respecto?

3. Complete esta nueva tabla, en la que se ha cambiado el incremento de los valores de la cantidad de monedas.

TABLA N° 2

A	B	C	D	E	F
Cantidad final de monedas **(nf)**	Cantidad inicial de monedas **(ni)**	Incremento del valor de la cantidad de monedas **Δn**	Altura final del nivel del agua **Af**	Altura inicial del nivel del agua **Ai**	Incremento del valor de la altura del nivel del agua **ΔA**
4	1		48	42	
7	4		54	48	
10	7		60	54	
13	10		66	60	
16	13		72	66	

Observe las columnas C y F ¿Qué puede concluir al respecto? ¿Ocurre lo mismo en las tablas N_o 1 y $N_{o.}$ 2? ¿A qué cree que se debe esto?

TRABAJO COLABORATIVO

Comparen los valores de las tablas N_o 1. y N_o 2. y verifiquen si coinciden o no, corrijan en caso de ser necesario. Conversen sobre las conclusiones que obtuvieron de los resultados de las dos tablas y regístrelas a continuación.

TRABAJO EN CASA

Supongamos que las monedas se pueden fraccionar y que se realiza la experiencia en una probeta cilíndrica.

1. Completar la tabla

Cantidad de monedas	Altura del nivel del agua (en mm)
0	50
1	58
1,5	
2	66
2,5	
3	
3,25	
3,5	
3,75	
4	
5,1	
5,2	

2. Cuánto se incrementa el nivel del agua en la probeta

a) Si la cantidad de monedas pasa de 3 monedas a 5

b) Si la cantidad de monedas cambia de 5,1 a 5,2

c) Si la cantidad de monedas cambia de 2,5 a 1,5

3. Cuánto se incrementa la cantidad de monedas

a) Si el nivel del agua para de 74 mm a 86 mm

b) Si el nivel del agua para de 90 cm a 80 cm

4. Cuánto se incrementa el nivel del agua en la probeta si la cantidad de monedas pasa de 6 a 87

Sesión N° 3	
1. Nombre de la sesión	Construyendo la noción de razón de cambio
2. Fecha de implementación	28 de febrero de 2018
3. Descripción global de la sesión	En la sesión anterior los estudiantes constataron que a incrementos iguales de la cantidad de monedas se obtienen incrementos iguales de la longitud del nivel del agua en probetas cilíndricas y que esta condición no se cumple para la probeta no cilíndrica. Por tanto, se espera que el estudiante caracterice las condiciones correspondientes a una covariación lineal y una no lineal. Una vez se constate que en las covariaciones no lineales los incrementos iguales de monedas no relacionan incrementos iguales de altura en el nivel del agua, se introduce el concepto de razón de cambio a partir del cálculo del mismo, para verificar que esta es constante cuando la probeta es cilíndrica y que no lo es cuando la probeta tiene forma no cilíndrica (de forma más precisa, cuando la probeta tiene una forma tal que la sección transversal no es constante).
4. Objetivos de aprendizaje de los estudiantes	Al finalizar la sesión esperamos que los estudiantes logren: ● Relacionar características generales que permitan crear la noción de razón de cambio ● Calcular la razón de cambio en una situación en la que las medidas covarían de forma lineal, además que identifiquen que esta permanece constante a lo largo del proceso.
5. Objetivos de investigación	Esta sesión tiene el propósito de ofrecer a los estudiantes situaciones sencillas relacionadas con la experiencia de la probeta y las monedas que le permitan crear la noción de razón de cambio y comprender que esta puede ser constante o no según las características de la probeta. Describir las respuestas y explicaciones que los estudiantes tienen al momento de determinar la razón de cambio de las situaciones planteadas para asociarlas con la comprensión del conocimiento de la razón de cambio.
Preguntas de investigación	¿Cuál es la relación contextual del concepto de razón de cambio, con las situaciones de tipo covariacional.?

Descripción de actividades de la sesión Momentos	Se da continuidad a la situación de análisis de la probeta buscando que los estudiantes calculen la razón de cambio que existe entre la variación de los incrementos en una probeta cilíndrica y una no cilíndrica. El desarrollo de la sesión está propuesto en tres momentos, los cuales corresponden a socialización del trabajo en casa, trabajo grupal y plenaria. **Momento uno:** Socialización del trabajo en casa Se pretende que de manera general se socialice la tarea de casa con el objeto de la finalidad evidenciar los avances sobre el aprendizaje comprensivo del concepto razón de cambio. (15 minutos) **Momento dos:** Trabajo grupal Se pretende que los estudiantes identifiquen como es el incremento tanto del número de monedas como del nivel del agua a partir de los intervalos dados en cada una de las situaciones propuestas para la probeta cilíndrica(A) y la no cilíndrica(B), de la misma manera que identifiquen como es el cociente entre estos dos incrementos y comparen los resultados para generar conclusiones (60 minutos) **Momento tres:** Plenaria Se pretende que cada grupo exponga los resultados y conclusiones del trabajo realizado, para de esta manera conceptualizar sobre la razón de cambio. (30 minutos) **Tiempo estimado: 105 minutos**
Materiales	Fotocopias de la actividad a realizar en la sesión, lápiz, regla.

SESIÓN N° 3

CONSTRUYENDO LA NOCIÓN DE RAZÓN DE CAMBIO

NOMBRES: ____

____

TRABAJO COLECTIVO

GRUPO N° _______

¿A QUE SE HA LLEGADO HASTA EL MOMENTO?

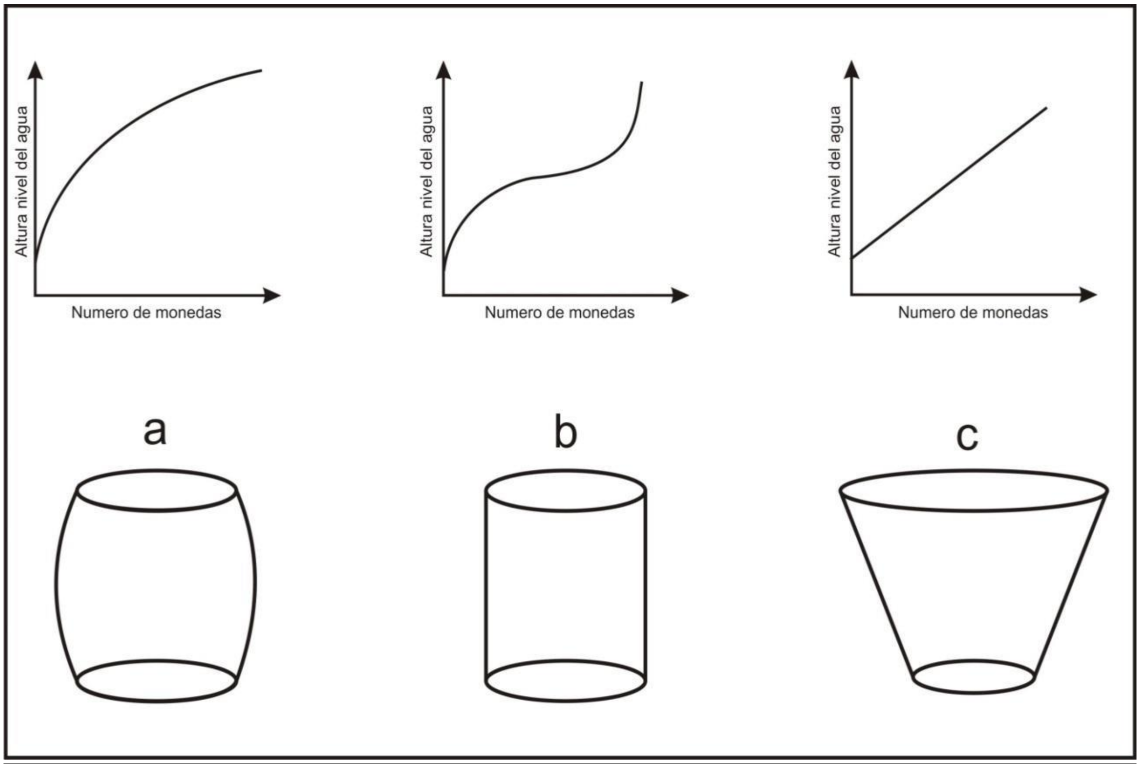
Recuerden que hemos venido trabajado la forma como varía la altura del nivel del agua (A) en una probeta a medida que se van introduciendo 1,2,3, … monedas (la cantidad de monedas se representa por n). ¿Qué hemos aprendido?

> Que la altura del nivel de agua sube de forma constante a medida que se introducen 1, 2, 3, … monedas, pero que esto sucede cuando la probeta tiene forma de cilindro y que en casos en los que la probeta tiene la forma como la del dibujo la altura no sube de forma constante (a medida que se van depositando monedas el nivel del agua sube más rápido).

> También aprendimos que en el caso de probetas cilíndricas se cumple que para incrementos iguales de la cantidad de monedas (Δn), corresponden incrementos iguales de la altura (ΔA). Recordar los resultados de las tablas 2 y 3 de la guía No 2 de la clase anterior.

En esta sección vamos a estudiar qué sucede con la variación de ΔA con relación a los Δn, cuando las probetas no son cilíndricas.

1. A continuación, se dan tres gráficas a, b y c y tres formas de probetas A, B, y C. Estudien cuál gráfica va con cuál probeta. Justifiquen su respuesta.



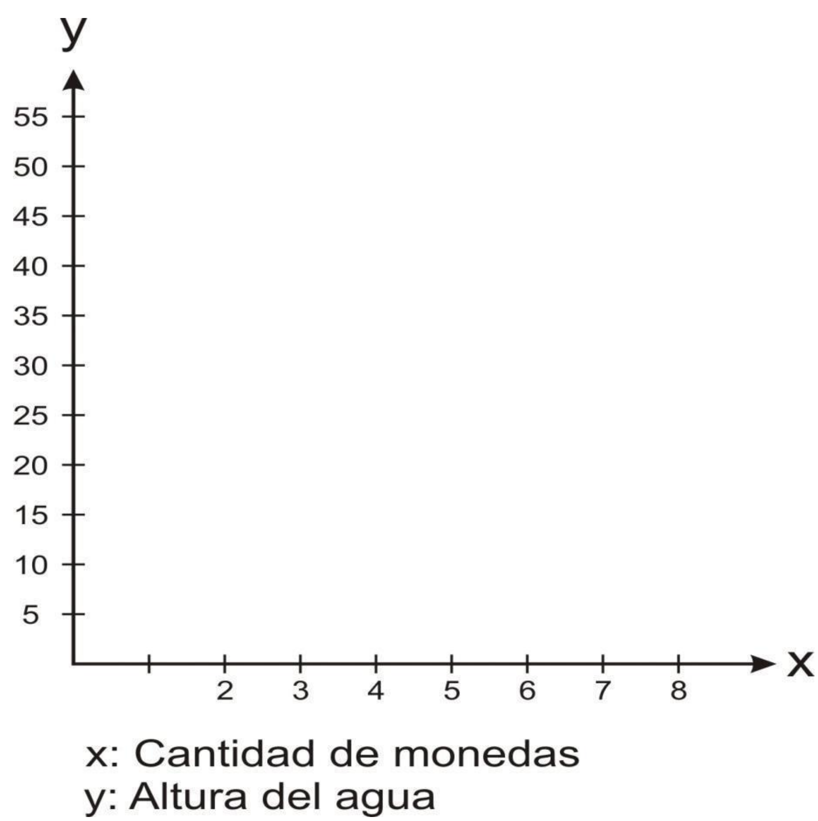
Justifique su respuesta:

2. La tabla representa los valores que alcanza el nivel del agua en dos probetas diferentes a medida que se introducen en ellas 1, 2, 3, … monedas de la misma denominación. La probeta A tiene forma de cilindro y la B no

TABLA N° 1

Cantidad de monedas	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Altura que alcanza el agua en la probeta A	15	19	23	27	31	35	39	43	47
Altura que alcanza el agua en la probeta B	15	23	30	36	41	45	48	50	51

Elaborar en un mismo sistema de ejes cartesianos las gráficas correspondientes a la variación de la altura del nivel del agua con relación a la cantidad de monedas en las dos probetas.



3. En las tablas siguientes se representan las variaciones de los incrementos de las alturas (ΔA) para incrementos de la cantidad de monedas (Δn). Con base en los datos de la tabla N°1 complete las tablas N°2 y N°3.

TABLA N° 2. Probeta A

A	B	C	D	E	F
Cantidad final de monedas **(nf)**	Cantidad inicial de monedas **(ni)**	Incremento del valor de la cantidad de monedas **Δn**	Altura final del nivel del agua **Af**	Altura inicial del nivel del agua **Ai**	Incremento del valor de la altura del nivel del agua **ΔA**
4	2				
6	4				
8	6				
10	8				
12	10				

TABLA No 3. Probeta B

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Cantidad final de monedas **(nf)**	Cantidad inicial de monedas **(ni)**	Incremento del valor de la cantidad de monedas **Δn**	Altura final del nivel del agua **Af**	Altura inicial del nivel del agua **Ai**	Incremento del valor de la altura del nivel del agua **ΔA**
4	2				
6	4				
8	6				

4. Comparen las tablas Nº 2 y Nº 3, ¿qué puede decirse de la forma como varía ΔA para las variaciones de Δn?

Justifiquen la respuesta:

5. Tengan en cuenta la forma de la probeta B y respondan la siguiente pregunta

¿Siempre ocurrirá que para Δn constantes los ΔA no serán constantes, sin importar de qué tamaño sea Δn y en qué intervalo se tome este incremento?

Justifiquen su respuesta.

6. ¿Si se cambia el valor de los incrementos de n, modificaría las conclusiones a las que llegó en el punto 4? Elabore dos tablas semejantes a 2 y 3 en las que el incremento del número de monedas sea 3. ¿Qué pueden decir?

TABLA N° 4. Probeta A

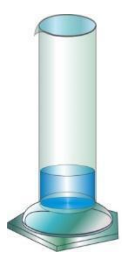
A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Cantidad final de monedas **(nf)**	Cantidad inicial de monedas **(ni)**	Incremento del valor de la cantidad de monedas **Δn**	Altura final del nivel del agua **Af**	Altura inicial del nivel del agua **Ai**	Incremento del valor de la altura del nivel del agua **ΔA**

TABLA N° 5. Probeta B

A	B	C	D	E	F
Cantidad final de monedas **(nf)**	Cantidad inicial de monedas **(ni)**	Incremento del valor de la cantidad de monedas **Δn**	Altura final del nivel del agua **Af**	Altura inicial del nivel del agua **Ai**	Incremento del valor de la altura del nivel del agua **ΔA**

¿Qué conclusiones pueden sacar?

7. A las tablas 2 y 3 anexen una nueva columna G, en la que calculen la razón ΔA/ Δn. Esta razón se acostumbra a llamar RAZÓN DE CAMBIO, precisamente para indicar en este caso que es la razón a la que aumenta la altura del nivel del agua por cada unidad (en este caso cada moneda)

Probeta A 

Probeta B 

TABLA N° 6. Probeta A. Razón de cambio

A	B	C	D	E	F	G
Nf	**ni**	**Δn = nf - ni**	**Af**	**Ai**	**ΔA= Af – Ai**	**R= ΔA/ Δn**
4	2					
6	4					
8	6					
10	8					
12	10					

TABLA N° 7. Probeta B. Razón de cambio

A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
Nf	**ni**	**Δn = nf - ni**	**Af**	**Ai**	**ΔA= Af - Ai**	**R= ΔA/ Δn**
4	2					
6	4					
8	6					

8. En las tablas 6 y 7 compare la columna que corresponde a G, ¿qué conclusión pueden sacar?

9. ¿La razón de cambio cuando la probeta es cilíndrica (A) cambia cuando se cambia el tamaño de los intervalos? ¿Sucede lo mismo cuando la probeta no es cilíndrica? Expliquen a qué se debe esta diferencia

GUIA EVALUATIVA N°1

SITUACIÓN DE LLENADO UNO

ESTUDIANTE: ____

TRABAJO INVIDIVUAL

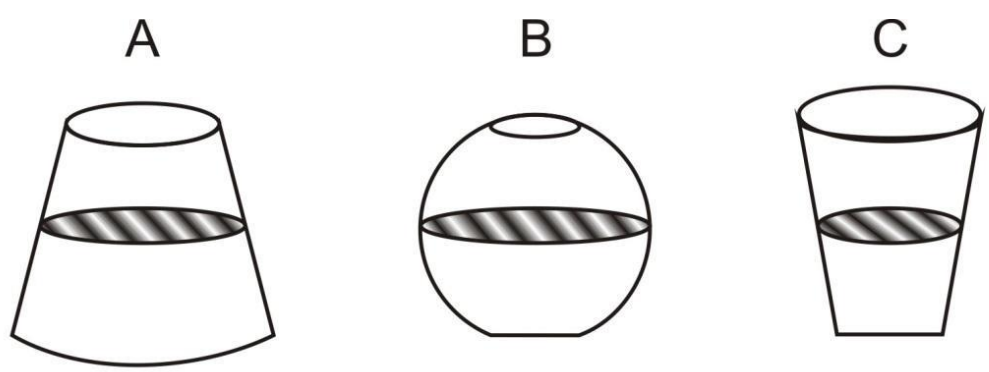
En esta guía le pedimos resolver algunas preguntas que le ayudará a identificar lo que usted ha aprendido.

1. Las preguntas de este numeral hacen referencia la experiencia de estudiar la forma como varía el nivel del agua en una probeta cuando se introducen 1, 2, 3, … monedas

1.1 Estudie las siguientes afirmaciones y diga cuál o cuáles son correctas

Afirmación uno. Cuando la forma de la probeta es cilíndrica a medida que se introducen 1, 2, 3, … monedas el nivel del agua sube de forma constante. Justifique

Afirmación dos. Cuando la probeta tiene forma como alguna de las imágenes de la figura, en la que la sección transversal cambia de tamaño, el nivel del agua NO sube de forma constante. Justifique



La parte sombreada representa la seccion transversal en las figuras

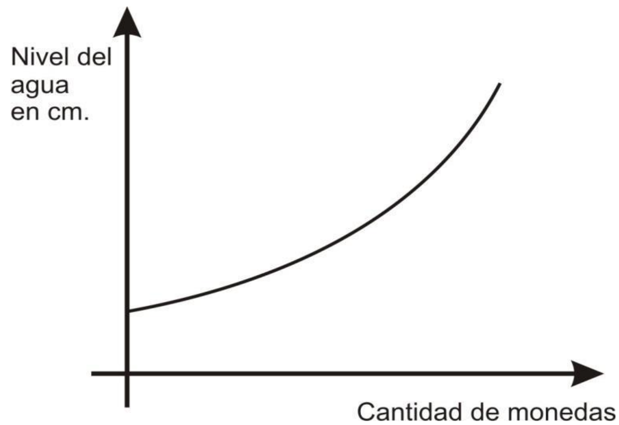
Afirmación tres. Cuando la forma como varía el nivel de agua con relación al número de monedas es constante, ocurre que para incrementos iguales en la cantidad de monedas se producen incrementos iguales en el nivel del agua. Justifique

Afirmación cuatro. Si una probeta tiene la forma como la de la imagen A de la figura de arriba, le puede corresponder una tabla como.

Cantidad de monedas	1	2	3	4	5	6	7
Nivel del agua (en cm)	5,0	8,0	10,5	12,5	14,0	15	15,5

Justifique su respuesta:

Afirmación cinco. Si una probeta tiene la forma como la de la imagen C de la figura de arriba, le puede corresponder una gráfica como. Justifique



Afirmación seis. Cuando la forma como varía el nivel de agua con relación al número de monedas es constante, ocurre que la razón de cambio ($\Delta A / \Delta n$) es constante. Justifique

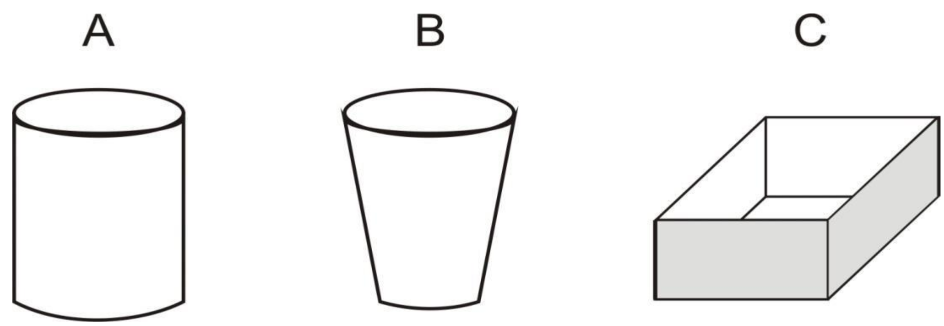
1.2 Imagine que se tiene una probeta cilíndrica tan alta como sea necesario. En una experiencia como estas que se viene estudiando en la que se sumergen monedas en una probeta se tiene esta información:

a) La razón de cambio $\Delta A / \Delta n$ es constante y vale 5 cm/moneda

b) Cuando se han introducido 4 monedas el nivel alcanzado por el agua es 27 cm

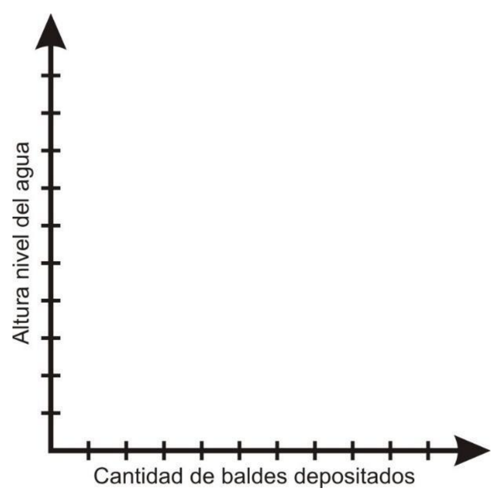
¿Con esta información se podría calcular el nivel que alcanzaría el agua cuando se hayan introducido 41 monedas?

2. Imagine ahora que se realiza una experiencia como la de la probeta, pero un poco diferente. Esta nueva experiencia consiste en que se llenan tanques que tienen formas como las de los dibujos.

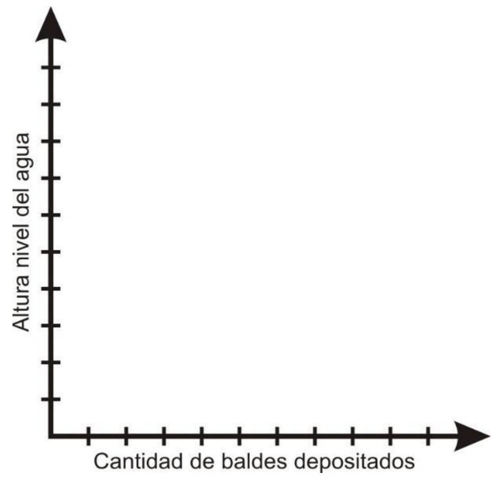


Para hacer el llenado, se usa un balde. Se llena el balde y su contenido se vierte en el recipiente. Esta operación se hace 1, 2, 3, … veces hasta llenar totalmente el tanque (asocie al eje horizontal la cantidad de baldes que se vierten y al eje vertical el incremento en la altura del nivel del agua)

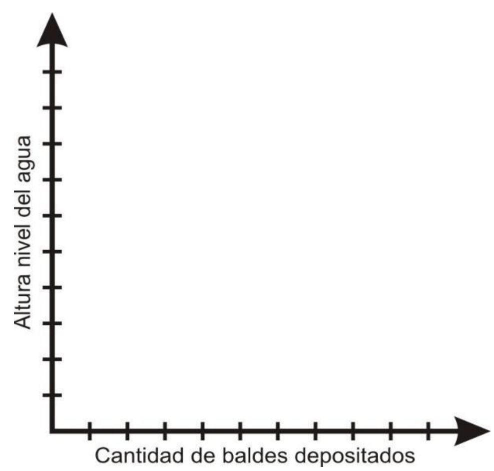
2.1 Dibuje la forma que considera tendría la gráfica cartesiana si el tanque es como A



2.2 Dibuje la forma que considera tendría la gráfica cartesiana si el tanque es como B



2.3 Dibuje la forma que considera tendría la gráfica cartesiana si el tanque es como C



2.4 Para cuál o cuáles de las formas A, B o C se puede decir que la razón de cambio altura del nivel del agua y la cantidad de baldes vertidos es constante y para cuál o cuáles esta razón no lo es.

Sesión N° 4	
1. Nombre de la sesión	Comprobando la covariación lineal en situaciones de llenado
2. Fecha de implementación	06 de marzo de 2018
3. Descripción global de la sesión	En esta sesión se plantea a los estudiantes un ejercicio de retroalimentación de la guía evaluativa N°. 1 “Situación de llenado uno”, con el objeto de validar los procesos de acción y reflexión, asociados al análisis e interpretación de la covariación objeto de estudio. En grupo deben argumentar cada una de las justificaciones expuestas en el punto 1.1 de la guía evaluativa, en el que se sugería analizar seis afirmaciones que debían ser caracterizadas como falsas o verdaderas según el criterio de los alumnos. De esta misma manera se solicita al grupo de estudiantes justificar y acordar una respuesta colectiva si es posible, de las preguntas 1.2 y 2 de la guía evaluativa con la intención de identificar si reconocen que las variaciones de tipo cuantitativo caracterizadas, indican incrementos o disminuciones de las magnitudes asociadas al llenado y en consecuencia definir el grado de claridad que alcanza el estudiante en determinar que la variación observada se le puede asociar un número, que da cuenta de la razón de cambio.
4. Objetivos de aprendizaje de los estudiantes	Al finalizar la sesión esperamos que los estudiantes logren: ● Reconocer los incrementos constantes y los incrementos no constantes a partir de la forma y características del recipiente que se utiliza. ● Ubicar puntos específicos en el plano cartesiano, demarcando las correspondientes parejas ordenadas. ● Identificar el rango de valores que configuran la relación que existe entre el depósito de baldes de agua en un tanque y el respectivo incremento en el nivel del agua que se genera. ● Obtener nuevos valores a partir de los valores ya conocidos y extraer conclusiones infiriendo información desconocida, de representaciones tabulares y cartesianas.
5. Objetivos de investigación	Esta sesión tiene el propósito de: Definir las actividades personales y colectivas en las que los estudiantes pueden afianzar los conocimientos que van adquiriendo a lo largo del proceso para mejorar su compresión de la situación de llenado.
Preguntas de investigación	¿Pueden los estudiantes diferenciar que a la situación de covariación analizada subyacen registros tabulares, representaciones gráficas y simbolizaciones?

Descripción de actividades de la sesión Momentos	Esta sesión se divide en tres momentos. El primero es de trabajo individual con la aplicación de la guía evaluativa, el segundo trabajo grupal de socialización y análisis de respuestas y tercero plenaria. **Momento uno:** Trabajo individual. Está definida como una primera guía evaluativa del proceso de investigación, en la que se plantean dos situaciones de covariacional lineal, que relacionan el llenado de tres recipientes de distinta forma. La primera situación corresponde al llenado de tres probetas con 1, 2, 3, … monedas, mientras que la segunda situación corresponde al llenado de tres tanques con 1, 2, 3, … baldes con agua donde cada situación se relaciona con estudiar la forma como varia el nivel del agua. (40 minutos) **Momento dos:** Trabajo colectivo Se espera que los estudiantes conformen grupos de tres, con la finalidad de socializar el trabajo realizado en el momento uno, para posteriormente establecer acuerdos y desacuerdos para cada una de las situaciones abordadas. (40 minutos) **Momento tres:** Plenaria. Algunos estudiantes ponen en común los resultados obtenidos y se discute sobre ellos. (40 minutos) **Tiempo estimado: 120 minutos**
Materiales	Fotocopias de la sesión, lápiz, regla, esferos.

SESIÓN N° 4

COMPROBANDO LA COVARIACIÓN LINEAL EN SITUACIONES DE LLENADO.

TRABAJO COLECTIVO

1. Reúnase con dos compañeros más y registre a continuación los acuerdos o desacuerdos a los que llegaron los integrantes de su grupo con relación a la solución de la guía evaluativa para el punto 1.1.

AFIRMACIÓN	ACUERDOS	DESACUERDOS
1		
2		
3		
4		
5		
6		

2. Registre a continuación las respuestas del ejercicio 1.2 de cada uno de los estudiantes

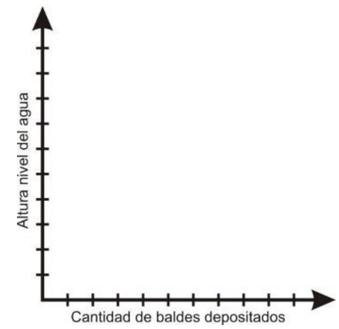
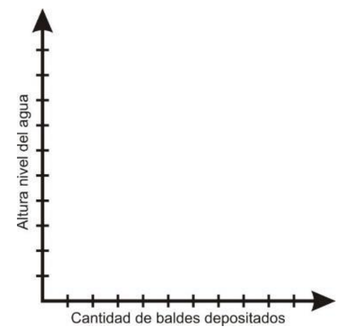
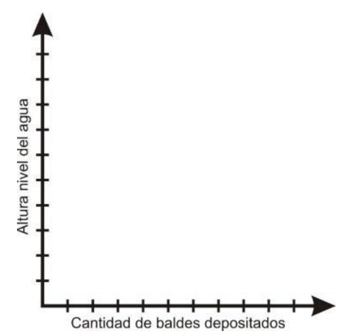
Estudiante	**Respuesta a la pregunta 1.2**	**Ventajas de la respuesta**	**Desventajas de la respuesta**	**Sugerencias del grupo**	**Respuesta grupal**

A continuación, enuncie las consideraciones tenidas en cuenta para la selección de la respuesta grupal.

3. Socialice con sus compañeros la solución del punto 2. Y complete la siguiente tabla.

PREGUNTA	**ACUERDOS**	**DESACUERDOS**
2.1		
2.2		
2.3		
2.4		

A continuación, evidencie las respuestas que consideran son correctas después de hacer la socialización:

2.1		Justifique el acuerdo:
2.2		Justifique el acuerdo:
2.3		Justifique el acuerdo:
2.4		Justifique el acuerdo:

Sesión N° 5	
1. Nombre de la sesión	La covariación lineal y la Ley de Hooke
2. Fecha de implementación	07 de marzo de 2018
3. Descripción global de la sesión	En esta sesión se plantea a los estudiantes una situación de tipo covariacional lineal relacionada con la ley de Hooke, en la que se presenta una simulación que permitirá estudiar la relación entre el alargamiento de un resorte, la cual se produce en relación con la fuerza aplicada por suspender determinado número de pesos sobre él, evidenciando el incremento proporcional de este alargamiento también llamado elongación del resorte. Seguido a la exploración del simulador se solicita a los estudiantes responder y justificar algunas preguntas que se relacionan con la rigidez y alargamiento del resorte al suspender 1, 2, 3, … pesos en él. Luego se propone dos situaciones donde se involucran estos conceptos con la finalidad de llegar a establecer relaciones entre la variación entre en el incremento del valor de la cantidad de pesos y el incremento del valor del alargamiento del resorte desde las características propias del resorte. Posteriormente se considera una situación con el alargamiento de un caucho para relacionar las variaciones no lineales. Finalmente se realizará una plenaria.
4. Objetivos de aprendizaje de los estudiantes	Al finalizar la sesión esperamos que los estudiantes logren: ● Comprender que la elongación del resorte incrementa en la misma medida cada vez que se le aplica fuerzas iguales. ● Identificar que el alargamiento del resorte varia de forma constante con relación a la fuerza aplicada por el peso que se le suspende al resorte. ● Comprender que la ley de Hooke es una forma de variación lineal semejante a lo estudiado en el caso de la experiencia de la probeta y de llenado.
5. Objetivos de investigación	Esta sesión tiene el propósito de: ● Identificar las formas como los estudiantes relacionan la variación del alargamiento de un resorte con relación al valor de la fuerza aplicada al suspenderse un peso en el resorte.
Preguntas de investigación	¿Pueden los estudiantes establecer relaciones entre la experiencia de la probeta y la experiencia del resorte? En caso de ser así, ¿Qué elementos relacionan y cómo los relacionan?

Descripción de actividades de la sesión Momentos	Esta sesión se divide en tres momentos. El primero consiste en trabajo individual, el segundo de trabajo grupal y el tercero de plenaria. **Momento uno:** Trabajo individual. Este momento inicia con la presentación del simulador y la exploración del mismo, posteriormente cada uno estudiara algunas preguntas y situaciones relacionadas con la simulación, experimentando a su vez con un resorte en el planeta tierra y en la luna donde se compara lo que sucede con la variación del alargamiento del resorte ubicado en cada una de estos dos lugares. (40 minutos) **Momento dos:** Trabajo grupal. Se estudia dos situaciones, una con un resorte y la otra con un caucho con la necesidad de asociar los valores de los incrementos del alargamiento del resorte o caucho, a los correspondientes incrementos de los pesos suspendidos, para llegar a reconocer y relacionar los incrementos constantes con el resorte y los incrementos no constantes con el caucho. (40 minutos) **Momento tres:** Plenaria. Algunos estudiantes ponen en común los resultados obtenidos y se discute sobre ellos. (40 minutos) **Tiempo estimado: 120 minutos**
Materiales	Sala de sistemas, simulador portable, televisor, fotocopias de la actividad a realizar en la sesión, lápiz, regla.

SESIÓN N° 5

LA COVARIACIÓN LINEAL Y LA LEY DE HOOKE

ESTUDIANTE: ____

TRABAJO INDIVIDUAL

A continuación, la docente le presentará una simulación de un sistema masa resorte la cual encontrarán en el siguiente enlace http://phet.colorado.edu/sims/mass-spring-lab/mass-spring-lab_en.html

Después de realizar la exploración del simulador conteste las siguientes preguntas:

1. Si consideramos un resorte de rigidez **R** al que se sujeta un peso **W.** Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique su respuesta.

- Si consideramos un resorte de rigidez **R** en el planeta tierra y le sujetamos la mitad del peso inicial ($\frac{W}{2}$), el alargamiento se duplica. ☐

  ____

  ____

- Si al resorte de rigidez **R** le sujetamos el doble del peso inicial (2**W**), el alargamiento se reduce a la mitad. ☐

  ____

  ____

- Si al resorte le duplicamos la rigidez (2**R**) y le sujetamos el peso **W,** el alargamiento no cambia. ☐

  ____

  ____

- Si al resorte le reducimos la rigidez a la mitad ($\frac{R}{2}$) y le sujetamos el doble del peso (2**W**), el alargamiento se cuadruplica. ☐

  ____

  ____

- Si nos llevamos el resorte de rigidez **R** a la luna y le colocamos el peso **W** el alargamiento del resorte aumenta respecto al planeta tierra. ☐

  ____

  ____

- Si nos llevamos el resorte de rigidez **R** a Júpiter y le colocamos el peso **W** el alargamiento del resorte disminuye respecto al planeta tierra. ☐

  ____

  ____

2. Considere cada una de las siguientes situaciones y responda.

A. Si se tiene un resorte de rigidez **R** en el planeta tierra y le sujetamos sucesivamente1, 2, 3, ... pesos **W** de igual valor, se evidenciará un alargamiento del resorte que denominaremos ΔX, el cual corresponde a la diferencia, de la posición final X_f respecto a la posición inicial X_i, es decir, ($\Delta X = X_f - X_i$). Si de la experiencia obtenemos la tabla de datos No.1 completar la tabla No. 2

TABLA N° 1

Cantidad de pesos	0	1	2	3	4	5
Alargamiento del resorte	0	4	8	12	16	20

TABLA N° 2

A	B	C	D	E	F
Cantidad final de pesos **(Wf)**	Cantidad inicial de pesos **(Wi)**	Incremento del valor de la cantidad de pesos **(ΔW)**	Alargamiento final del resorte **(Xf)**	Alargamiento inicial del resorte **(Xi)**	Incremento del valor del alargamiento del resorte **ΔX**
2	1				
3	2				
4	3				
5	4				
6	5				

Si se repite la experiencia de la situación del literal A, pero en la luna. La tabla de valores que relaciona el alargamiento del resorte respecto al número de pesos es:

TABLA N°3

Cantidad de pesos	0	1	2	3	4	5
Alargamiento del resorte	0	2	4	6	8	10

Con la anterior información complete la tabla número 4.

TABLA N° 4

A	B	C	D	E	F
Cantidad final de pesos **(Wf)**	Cantidad inicial de pesos **(Wi)**	Incremento del valor de la cantidad de pesos **(ΔW)**	Alargamiento final del resorte **(Xf)**	Alargamiento inicial del resorte **(Xi)**	Incremento del valor del alargamiento del resorte **ΔX**
2	1				
3	2				
4	3				
5	4				
6	5				

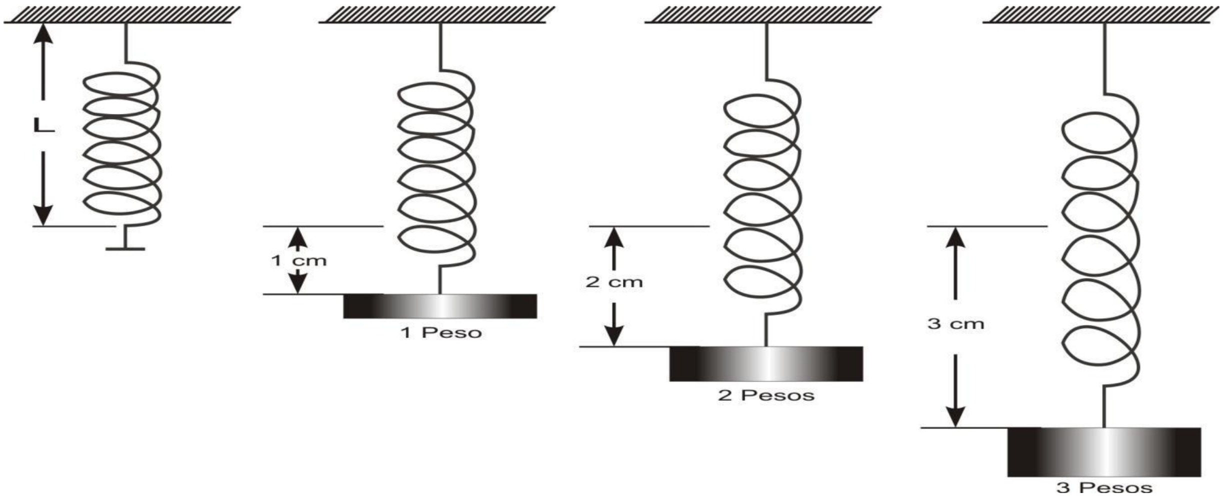
3. Al comparar la tabla No. 2 con la tabla No. 4. ¿Qué sucede con la variación ΔW y la variación ΔX para el resorte ubicado el en planeta tierra y el resorte ubicado en la luna? ¿Existe alguna relación entre estos dos eventos físicos?

Justifique su respuesta

4. Elaborar en un mismo sistema de ejes cartesianos las gráficas correspondientes a la variación de los pesos respecto al alargamiento del resorte de las dos situaciones antes enunciadas. (Asocie al eje horizontal la cantidad de pesos y al eje vertical el alargamiento del resorte)

TRABAJO COLECTIVO

Observe que la siguiente figura muestra un resorte al cual se le colocan 1,2,3, … pesos sucesivamente, provocando que el resorte incremente su alargamiento.



Ahora analizaremos la misma situación en la que se relaciona la cantidad de pesos respecto al alargamiento del resorte, utilizando resortes de menor y mayor rigidez.

1. ¿Qué pasa con la variación del alargamiento del resorte (ΔX) a medida que se le colocan 1,2, 3, …pesos en un resorte de menor rigidez?

2. La siguiente gráfica representa la forma como varía el alargamiento del resorte respecto a la cantidad de pesos que se le adiciona.

La gráfica que mejor representa la variación entre la cantidad de pesos y el alargamiento que experimenta el resorte de menor rigidez es _____________

A.	B.	C.	D.
			

Justifique su elección

3. Al realizar una experiencia con un resorte se obtuvieron los siguientes datos

Cantidad de pesos	0	2	4	6
Alargamiento del resorte	0	1	2	3

Si se utilizara un resorte de mayor rigidez proponga una tabla con los posibles valores que se obtendrían

Cantidad de pesos				
Alargamiento del resorte				

4. La siguiente tabla (Nº 5) corresponde a la relación entre la cantidad de pesos que se le sujeta a un resorte y a un caucho

Cantidad de pesos	0	2	4	6	8	10
Alargamiento del resorte	0	8	16	24	32	40
Alargamiento del caucho	0	2	4	8	16	32

a.) Complete la tabla Nº6 considerando la variación entre la cantidad de pesos y el alargamiento del resorte

TABLA Nº6 RESORTE

A	B	C	D	E	F	G
Wf	**Wi**	**ΔW = Wf -Wi**	**Xf**	**Xi**	**ΔX= Xf - Xi**	**R= ΔW/ ΔX**
4	2					
6	4					
8	6					
10	8					

b.) Complete la tabla Nº7 considerando la variación entre la cantidad de pesos y el alargamiento del caucho

TABLA Nº7 CAUCHO

A	B	C	D	E	F	G
Wf	**Wi**	**ΔW = Wf -Wi**	**Xf**	**Xi**	**ΔX= Xf - Xi**	**R= ΔW/ ΔX**
4	2					
6	4					
8	6					
10	8					

c.) En las tablas 6 y 7 compare la columna que corresponde a "G", ¿Qué conclusiones puede sacar?

d.) ¿Qué significado tiene el valor de la columna "G" para cada una de las situaciones analizadas?

GUÍA EVALUATIVA N° 2.

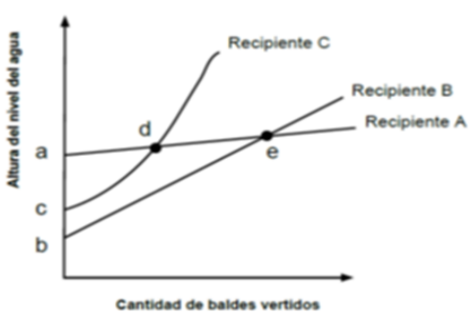
LLENADO DOS Y RESORTES

NOMBRE: ____

1. Las gráficas representan los resultados de dos experiencias distintas, la primera hace referencia al llenado de tres recipientes de formas distintas y la segunda a la variación de la longitud de dos resortes distintos.

A. Conteste las preguntas a partir de las gráficas.

B. En cada caso justifique su respuesta

<table>
<tr><th>Gráficas correspondientes al llenado de tres recipientes A, B y C de formas distintas</th><th>Gráficas correspondientes a la variación de la longitud de dos resortes distintos</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>1.1 ¿Qué se puede decir de la forma de los tres recipientes?</td><td>1.1 ¿ Qué se puede decir de las características de los dos resortes?</td></tr>
<tr><td>1.2 ¿Cuál de los tres recipientes tiene el menor nivel de agua al empezar el llenado?</td><td>1.2 ¿Cuál de los dos resortes tiene una longitud menor cuando no hay alargamiento en él?</td></tr>
</table>

1.3 ¿En cuál de los tres recipientes el nivel del agua sube más rápido a medida que se vierte el contenido de los baldes?	1.3 ¿Cuál de los dos resortes se estira con más facilidad?
1.4 ¿Qué significado tiene el punto "**e**" en el que se cortan las dos gráficas correspondientes a los recipientes A y B?	1.4 ¿Qué significado tiene el punto "**g**" en el que se cortan las dos gráficas correspondientes a los resortes A y B?
1.5 ¿La razón de cambio entre la altura del nivel del agua y la cantidad de baldes vertidos es constante en el recipiente C?	1.5 ¿La razón de cambio entre la longitud del resorte y la fuerza aplicada es constante en ambos resortes?
1.6 Indique a qué gráfica podría corresponder una de las dos tablas que se presentan a continuación:	1.6 Indique a qué gráfica podría corresponder una de las dos tablas que se presentan a continuación:

Tabla A

Cantidad de baldes	0	2	5	8	11
Altura nivel del agua	2	4	12	18	24

Tabla B

Cantidad de baldes	0	2	5	8	11
Altura nivel del agua	0	4	10	16	22

Tabla A

Cantidad de pesos	0	2	4	6	9
Longitud del resorte	0	18	30	42	60

Tabla B

Cantidad de pesos	0	1	4	6	9
Longitud del resorte	6	12	30	42	60

Sesión N° 6	
1. Nombre de la sesión	Covariación lineal en eventos que relacionan movimiento.
2. Fecha de implementación	13 de marzo de 2018
3. Descripción global de la sesión	En esta sesión se plantea a los estudiantes situaciones de covariacional lineal, relacionadas con el movimiento, en donde se relacionan los incrementos constantes con la velocidad constante y los incrementos no constantes con la velocidad variada. A partir de gráficas y enunciados se estudiarán situaciones donde intervienen distancias, velocidades, puntos de corte para situación con dos móviles y razón de cambio para finalmente establecer diferencias y semejanzas que pueden caracterizar a partir de las situaciones propuestas. Para ello es necesario que el estudiante de manera grupal estudie cada una de las situaciones propuestas relacionándolas con el trabajo que se desarrolló en las sesiones anteriores. Finalmente, de manera individual se consideran dos situaciones en las que intervienen tres y dos automóviles y para ello se relacionan representaciones tabulares y cartesianas, para que a partir de ellas los estudiantes den respuesta a algunas preguntas.
4. Objetivos de aprendizaje de los estudiantes	Al finalizar la sesión los estudiantes ● Reconocerán la función lineal como un modelo matemático que involucra la covariación y el cambio de magnitudes, a partir situaciones propias de diferentes contextos. ● Asocien el corte de las representaciones cartesianas con dos o tres gráficas, con el punto de encuentro de dos móviles respecto al mismo intervalo de tiempo. ● Relacionen el punto de intercepto con Y, con la posición inicial de los móviles. ● Identifiquen la mayor o menor inclinación de las rectas con el valor de la velocidad.
5. Objetivos de enseñanza	Esta sesión tiene el propósito de: ● Identificar la forma como los estudiantes relacionan los incrementos constantes con la velocidad constante y los incrementos no constantes con la velocidad variada. ● Identificar la forma como los estudiantes asocian el punto de corte de las representaciones cartesianas con dos o tres gráficas, con el punto de encuentro de dos móviles respecto al mismo intervalo de tiempo.

Descripción de actividades de la sesión Momentos	En esta última sesión el estudiante trabajará inicialmente de manera grupal y posteriormente de manera individual para desarrollar la guía evaluativa N° 3, teniendo presente el trabajo desarrollado a lo largo de la secuencia. **Momento uno:** trabajo grupal Se proponen cuatro situaciones relacionadas con el movimiento, en donde cada grupo las estudiará a partir de la razón de cambio y la representación gráfica y tabular utilizando rapidez, distancia y velocidad. (40 minutos) **Momento dos:** Guía evaluativa N° 3 Se les propone a los estudiantes dos situaciones con dos y tres móviles donde se espera dé cuenta de manera general de lo trabajado a lo larga de la secuencia didáctica. (40 minutos) **Tiempo estimado: 80 minutos**
Materiales	Fotocopias de la actividad a realizar en la sesión, lápiz, regla, colores.

SESIÓN N° 6

COVARIACIÓN LINEAL EN EVENTOS QUE RELACIONAN MOVIMIENTO

TRABAJO COLECTIVO

1. Completa la tabla a partir de la siguiente información

Unos soldados marchan en línea recta a razón de 3 metros cada segundo

Tiempo (seg)	5		11		18		25		100
Distancia (m)		12		27		60		81	
R=Distancia/Tiempo									

¿Qué observa que sucede con la ***R=Distancia/Tiempo***

Justifique su respuesta

2. Ordena de mayor a menor rapidez cada uno de los siguientes movimientos: un cuerpo A recorre x metros en t segundos, mientras:

a.) B recorre la misma distancia en la mitad del tiempo. __________

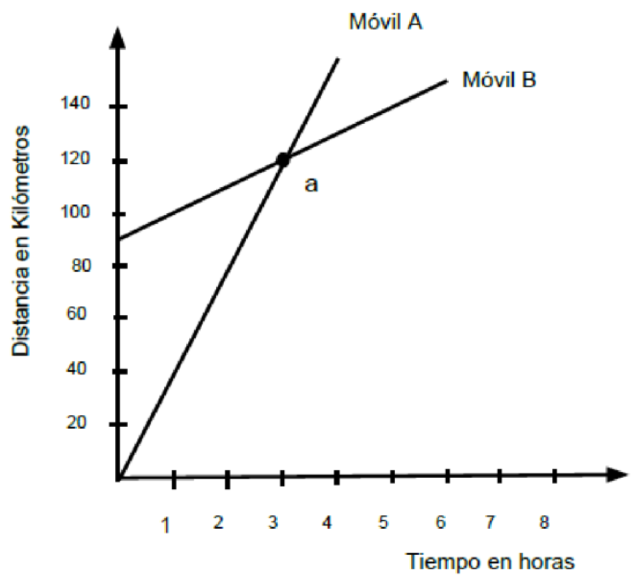
b.) C recorre la mitad de la distancia en el mismo tiempo. __________

c.) D recorre la mitad de la distancia en la mitad del tiempo __________

d.) E recorre el doble de la distancia en la mitad del tiempo __________

e.) F recorre la mitad de la distancia en el doble del tiempo. __________

La siguiente gráfica describe el movimiento de dos automóviles A y B.



3. A partir de la información de la gráfica responda las siguientes preguntas

A. ¿Cuál móvil recorre mayor distancia?

B. ¿Qué representa el punto de corte de la gráfica?

C. ¿Cuál móvil tiene mayor velocidad?

D. ¿En el momento que inicia la observación qué relación hay entre los dos móviles?

4. A continuación, se presenta una tabla de valores que relaciona los datos que describen el movimiento de dos móviles.

TABLA N° 1

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5
Distancia recorrida móvil A (Km)	0	40	80	120	160	200
Distancia recorrida móvil B (Km)	5	25	125	625	3125	15625

A. Considerando la información suministrada en la tabla No. 1 complete la tabla No.2 para el móvil A

TABLA N° 2

A	B	C	D	E	F	G
Incremento final de tiempo **tf**	Incremento inicial de tiempo **ti**	Incremento del valor del tiempo **Δt**	Incremento final de la distancia **df**	Incremento inicial de la distancia **di**	Incremento del valor de la distancia **Δd**	Razón de cambio **R= Δd/ Δt**
1	0					
2	1					
3	2					
4	3					
5	4					

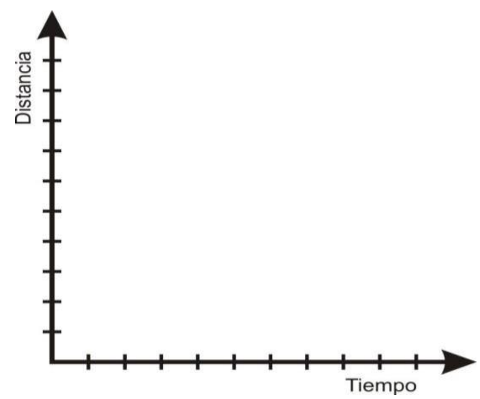
B. Considerando la información suministrada en la tabla No. 1 complete la tabla No.3 para el móvil B

TABLA N° 3

A	B	C	D	E	F	G
Incremento final de tiempo **tf**	Incremento inicial de tiempo **ti**	Incremento del valor del tiempo **Δt**	Incremento final de la distancia **df**	Incremento inicial de la distancia **di**	Incremento del valor de la distancia **Δd**	Razón de cambio **R= Δd/ Δt**
1	0					
2	1					
3	2					
4	3					
5	4					

5. Si compara la columna G de las tablas No. 2 y No.3 que puede concluir.

6. Represente en el siguiente plano cartesiano las gráficas correspondientes a los móviles A y B



7. De acuerdo a la información obtenida en las tablas No. 2 y No. 3 y en el plano cartesiano responde las siguientes preguntas:

A. ¿Los móviles A y B se encuentran en algún momento de su desplazamiento? De ser afirmativa su respuesta indique en qué tiempo se presenta dicho encuentro.

B. ¿Qué magnitud física asocia los resultados de la columna G?

C. ¿Qué semejanzas y diferencias puede caracterizar en los movimientos analizados?

GUIA EVALUATIVA N°3

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME

NOMBRE: ____

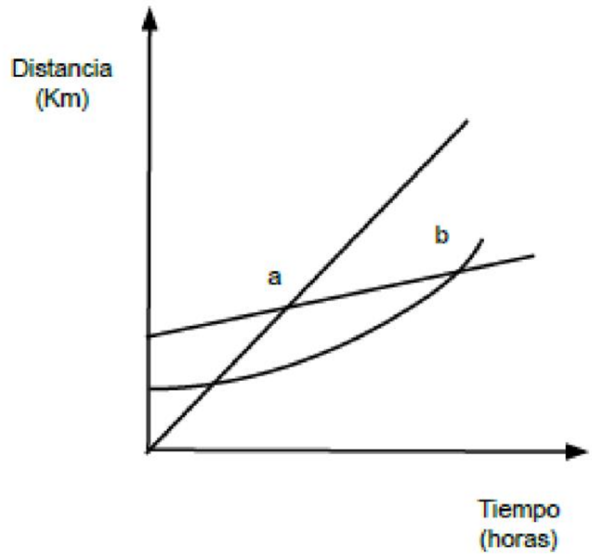
La tabla da información de la distancia recorrida por tres automóviles que viajan en la misma dirección a medida que transcurre el tiempo. La medida de la distancia de los tres autos se toma desde un mismo punto a la salida de una ciudad. Los tres autos parten al mismo tiempo.

TABLA Nº1

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5
Distancia automóvil A (km)	10	20	30	40	50	60
Distancia automóvil B (km)	0	20	40	60	80	100
Distancia automóvil C (km)	5	10	25	50	85	130

1. ¿Para cuál o cuáles de estos carros se puede afirmar que para incrementos iguales de tiempo se tienen incrementos iguales de la distancia?

2. Relacione cada gráfica con el auto que le corresponde



Justifique su respuesta:

3. ¿Qué información ofrece el punto ***b*** de la gráfica?

4. ¿Qué información ofrece el punto ***a*** de la gráfica?

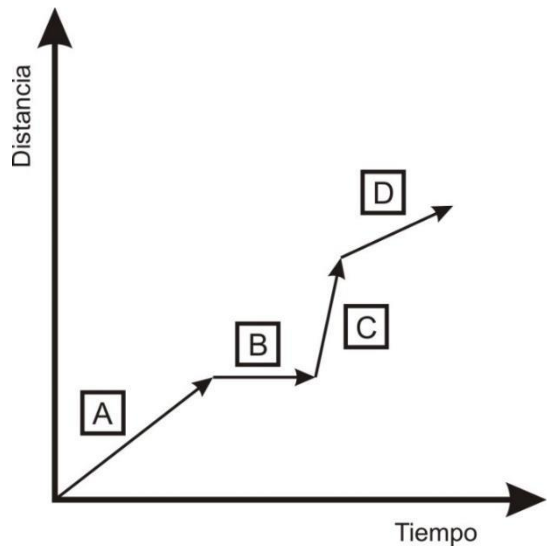
5. ¿Para cuál o cuáles de los tres carros se pude afirmar que a incrementos iguales del tiempo no corresponden incrementos iguales de la distancia? Justifique su respuesta

6. ¿Para cuál o cuáles de los tres carros se pude afirmar que la razón de cambio entre las distancias y los tiempos es la misma?

7. ¿Cuál es la distancia a la que se encuentra el móvil B cuando ha transcurrido 5 horas y media?

8. ¿Cuál es la distancia a la que se encuentra el móvil A cuando ha transcurrido 46 horas?

9. Un móvil que se desplaza con velocidad constante describe el siguiente movimiento.



Teniendo en cuenta la información de la gráfica, para cada caso diga si la afirmación es falsa o verdadera y justifique su respuesta:

- El móvil lleva una menor velocidad en el recorrido A.

____
____
____

- El móvil experimenta una mayor velocidad en el recorrido C

____
____
____

- El móvil tiene una velocidad cero en el recorrido B

____
____
____

Anexo 2: MATRIZ DE CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Tabla 1

Categorías de análisis

Categoría	Formulación general de los indicadores	Variación de la altura del nivel del agua en un recipiente respecto a incrementos iguales de depósito de monedas o de depósito de agua	Variación del alargamiento de un resorte respecto a incrementos iguales de pesos que se suspenden de él	Variación de la longitud de la distancia recorrida por un móvil respecto a incrementos iguales de tiempo
Relaciona formas de covariación con características del fenómeno.	1. Reconoce que existen formas de covariación tales que a incrementos iguales de una de las variable se tienen incrementos iguales de la otra y que hay otras formas de covariación en las que no esto sucede	● Reconoce que cuando la probeta es cilíndrica o tiene una sección transversal de área constante ocurre que hay incrementos constantes de altura para variaciones constantes de la cantidad de monedas introducidas, y que esto no ocurre en el caso de probetas en que la sección trasversal no es constante.	● Reconoce que en el caso de alargamiento de un resorte ocurre que hay incrementos constantes de su elongación para variaciones constantes de la fuerza aplicada	● Reconoce que cuando un móvil se desplaza con velocidad constante ocurre que hay incrementos constantes de la longitud de la distancia recorrida para variaciones constantes de tiempo y que esto no ocurre en el caso de que la velocidad sea variable
Interpreta representaciones tabulares	1. Por simple inspección de los valores de las variables reconoce cuándo la covariación es lineal y asocia este hecho con la situación experiencial y descarta las representaciones tabulares de otros tipos de covariaciones	● Dada una representación tabular, por simple inspección asocia la situación de llenado con la covariación directa (una de las variables aumenta a medida que aumenta la otra), razón por la que descarta otros tipos de covariación	● Dada una representación tabular, por simple inspección asocia la situación de alargamiento de un resorte con la covariación directa (una de las variables aumenta a medida que aumenta la otra), razón por la que descarta otros tipos de covariación	● Dada una representación tabular, por simple inspección reconoce que las que representan la relación entre la longitud de la distancia recorrida por un móvil y el tiempo transcurrido tiene que mostrar una covariación directa (una de las variables aumenta a medida que aumenta la otra), razón por la que descarta otros tipos de covariación

	2. Identifica una forma de correspondencia entre los valores de las variables lo que le permite continuar con los valores siguientes (el valor n+1) a partir de un par de valores dados (el valor n)	• Identifica una forma de correspondencia entre los valores de la altura del nivel del agua y la cantidad de monedas introducidas, de forma que le permite continuar con los valores siguientes (el valor n+1) a partir de un par de valores dados (el valor n)	• Identifica una forma de correspondencia entre los valores de la elongación del resorte y la cantidad de pesos que se sujetan de él, de forma que le permite continuar con los valores siguientes (el valor n+1) a partir de un par de valores dados (el valor n)	• Identifica una forma de correspondencia entre los valores de la longitud de la distancia recorrida y los incrementos de tiempo, de forma que le permite continuar con los valores siguientes (el valor n+1) a partir de un par de valores dados (el valor n)
	3. Asigna valores nuevos a partir de otros valores ya conocidos mediante procesos de interpolación y extrapolación, en caso de covariaciones que dan lugar a una razón de cambio constante y reconoce que esto no se puede hacer en caso de otras formas de covariación que dan lugar a una razón de cambio variable	• Obtiene nuevos valores a partir de los valores ya conocidos (mediante interpolación y extrapolación) en caso de recipientes que dan lugar a una razón de cambio constante y reconoce que esto no se puede hacer en caso de otros recipientes que dan lugar a una razón de cambio variable	• Obtiene nuevos valores a partir de los valores ya conocidos (mediante interpolación y extrapolación) en caso de resortes que dan lugar a una razón de cambio constante y reconoce que esto no se puede hacer en caso del caucho que da lugar a una razón de cambio variable	• Obtiene nuevos valores a partir de los valores ya conocidos (mediante interpolación y extrapolación) en caso de móviles que llevan una velocidad constante la cual da lugar a una razón de cambio constante y reconoce que esto no se puede hacer en el caso de móviles con velocidad variable que dan lugar a una razón de cambio variable
Interpreta representaciones cartesianas	1. Ubica puntos específicos en el plano cartesiano, demarcando las correspondientes parejas ordenadas.	• Ubica puntos específicos en el plano cartesiano, demarcando las correspondientes parejas ordenadas.	• Ubica puntos específicos en el plano cartesiano, demarcando las correspondientes parejas ordenadas	• Ubica puntos específicos en el plano cartesiano, demarcando las correspondientes parejas ordenadas.
	2. Establece escalas y registra correctamente los valores en ellas.	• Establece escalas y registra correctamente los valores en ellas.	• Establece escalas y registra correctamente los valores en ellas.	• Establece escalas y registra correctamente los valores en ellas.

	3. Reconoce a partir de la forma de la gráfica (recta o no) la covariación lineal o no de las dos variables asociadas.	● Reconoce a partir de la forma de la gráfica (recta o no) la covariación lineal o no de la altura del nivel del agua y la cantidad de monedas introducidas y los asocia de forma correcta a la forma del recipiente en el que se realiza la experiencia.	● Reconoce a partir de la forma de la gráfica (recta o no) la covariación lineal o no de la elongación del resorte y la cantidad de pesos que se suspende de él y los asocia de forma correcta a la acción del campo gravitacional en el que se encuentra el resorte o a la rigidez del mismo	● Reconoce a partir de la forma de la gráfica (recta o no) la covariación lineal o no de la longitud de la distancia recorrida por el móvil y el tiempo transcurrido y los asocia de forma correcta a la velocidad constante.
	4. Asocia la mayor o menor inclinación de la recta con la mayor o menor razón de cambio (rapidez del cambio de la variable dependiente con relación a la independiente)	● Asocia la mayor o menor inclinación de la recta con el mayor o menor rapidez del cambio de la altura del nivel del agua	● Asocia la mayor o menor inclinación de la recta con la mayor o menor rigidez del resorte o la mayor o menor influencia del campo gravitacional	● Asocia la mayor o menor inclinación de la recta con la mayor o menor la mayor o menor velocidad del móvil
	5. Anticipa la posible forma de la gráfica que representa la covariación a partir de las condiciones de la situación	● Anticipa la posible forma de la gráfica que representa la covariación a partir de caracterizar la forma y el diámetro de la probeta o del recipiente de llenado.	● Anticipa la posible forma de la gráfica que representa la covariación a partir de caracterizar la rigidez del resorte y la longitud inicial del mismo en su estado de equilibrio.	● Anticipa la posible forma de la gráfica que representa la covariación a partir de caracterizar la velocidad constante o variable del automóvil.
Reconoce cuando se da la constancia de la razón de cambio y cuando no	1. Relaciona el valor de la razón de cambio con el incremento de una variable respecto a la otra y reconoce su significado en la situación	● Relaciona el valor de la razón de cambio a la mayor o la menor rapidez del cambio de la altura del nivel del agua, reconoce las características del recipiente que la hacen constante o no.	● Relaciona el valor de la razón de cambio a la mayor o la menor elongación del resorte, reconoce las características del resorte o el caucho que la hacen constante o no.	● Relaciona el valor de la razón de cambio a la mayor o la menor rapidez del cambio de la longitud de la distancia recorrida, reconoce las características de la velocidad del móvil que la hacen constante o no.

Interpreta la representación cartesiana de dos o tres gráficas: el punto de intercepto de las dos o tres gráficas, el intercepto con Y, y la mayor o menor inclinación de las rectas.	1.Asocia el punto de intercepto de dos o tres gráficas de la representación cartesiana, con el punto en el cual los valores de las variables relacionadas coinciden	● Asocia el punto de intercepto de dos o tres gráficas de la representación cartesiana, cuando las dos o tres probetas registran la misma altura del nivel del agua respecto a la misma cantidad de monedas introducidas en ellas.	● Asocia el punto de intercepto de dos o tres gráficas de la representación cartesiana, con el punto en el cual dos o tres resortes registran igual alargamiento respecto a la misma cantidad de pesos suspendidos en ellos.	● Asocia el punto de intercepto de dos o tres gráficas de la representación cartesiana, con el punto de encuentro de dos o tres móviles respecto al mismo intervalo de tiempo.
	2. Relaciona los puntos de intercepto con Y, con el valor inicial de la variable independiente.	● Relaciona el punto de intercepto con Y, con la altura del nivel del agua inicial en las probetas.	● Relaciona el punto de intercepto con Y, con la longitud inicial del resorte.	● Relaciona el punto de intercepto con Y, con la posición inicial de los móviles.
	3. Identifica la mayor o menor inclinación de las rectas con la mayor o menor rapidez de variación y las asocia correctamente con la situación experiencial.	● Identifica la mayor o menor inclinación de las rectas con el diámetro de las probetas	● Identifica la mayor o menor inclinación de las rectas con la rigidez de los resortes y con el efecto del campo gravitacional en el que se encuentran.	● Identifica la mayor o menor inclinación de las rectas con el valor de la velocidad.

Origen: Fuente propia

Anexo 3: ANÁLISIS

Como se dijo en el capítulo anterior, se realizarán varios tipos de análisis. Por un lado, el análisis de tipo cualitativo, consistente en estudiar las producciones de los tres casos en los que se focalizaron las observaciones. Para ello, se recurrirá a dos tipos de información, a saber, las producciones de estos casos en las guías individuales y pruebas a lo largo del desarrollo de la secuencia didáctica y las entrevistas en profundidad que se realizaron en los diferentes momentos para complementar la información escrita. Este análisis cualitativo consta de dos componentes: a) un análisis intrasujeto en el que se trata de captar el cambio producido en cada caso a lo largo de la secuencia didáctica en actuaciones que sirven de evidencia para las categorías de análisis ya definidas y b) un análisis intersujeto, consistente en comparar las producciones de los tres casos, de forma que se puedan identificar posibles semejanzas o diferencias. Este tipo de análisis se complementará con otro, de tipo un poco más cuantitativo, de carácter descriptivo; para este tipo de análisis se toman las respuestas de todos los estudiantes del curso en los que se desarrolló la experiencia didáctica, identifican formas típicas de respuestas en algunas tareas y se comparan con las ya encontradas en los tres casos de estudio.

Para obtener la información, se tomó de una prueba inicial y cuatro situaciones: a) la prueba inicial elaborada en común acuerdo dentro del seminario construcción del pensamiento numérico dirigido por el profesor Jorge Castaño, director de este trabajo. La situación de esta prueba consiste en verter agua de forma constante a un recipiente hasta llenarlo y se estudia la forma de variación de la altura del nivel del agua con relación al tiempo de llenado. b) una situación en la que se estudian dos casos: en primer lugar, la forma como varía el nivel del agua en una probeta cuando se introducen 1,2,3,… monedas, teniendo en cuenta formas diferentes de las probetas (cuando tiene una forma tal que la sección transversal es constante, por ejemplo, un cilindro; y cuando esta sección transversal es variable, por ejemplo, un cono); en segundo lugar, la forma como varía la altura del nivel del agua en recipientes de diferentes formas a medida que se vierten 1,2,3,… baldes para su llenado. A estos dos casos los denominamos Situación de llenado uno ***(S1).*** c) una situación en la que se parte de la representación cartesiana de la relación entre la altura del nivel del agua y la cantidad de baldes vertidos de tres recipientes distintos, a la cual denominamos situación de llenado dos ***(S2);*** d) una situación en la que se estudia la longitud de dos resortes distinto con respecto a la cantidad de pesos que se suspenden de los mismos a partir de la representación cartesiana de esta relación, a la cual denominamos situación de Ley de Hooke ***(S3)*** y e) la situación cuatro corresponde al estudio de la distancia de un móvil a un punto a medida que este se desplaza (se compara cuando se desplaza con velocidad constante y con velocidad variable), a la cual denominamos situación de movimiento ***(S4)***

Todas las producciones de los sujetos aquí mencionadas se relacionan en los anexos 4.

Categoría uno: Relaciona la forma de covariación con características del fenómeno

En la situación uno de llenado los tres casos relacionan la constancia o no de la variación de la altura del nivel del agua con la forma del recipiente que se llena. Si es cilíndrica, reconocen que la altura aumenta de forma constante para variaciones iguales de la variable independiente (1, 2, 3, monedas) y en caso de que la forma no sea cilíndrica consideran que la altura no varía de forma constante. Sin embargo, los enunciados que elaboran los tres sujetos para justificarlo guardan algunas diferencias que posiblemente pueden poner en evidencia comprensiones distintas. A continuación, se presentan respuestas a dos de las tareas relacionadas con esta categoría.

En primer lugar, cuando en la situación de llenado uno se les solicita indicar si es correcta o no la afirmación: cuando la forma de la probeta es cilíndrica a medida que se introducen 1, 2, 3,

… monedas, el nivel del agua sube de forma constante (apartado S1, pregunta 1.1 afirmación uno), se obtienen las respuestas de la tabla 1.

Tabla 1

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.1, Afirmación uno de situación de llenado uno

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
Es correcto "---Su incremento siempre será constante y uniforme, así que a medida que le agreguen monedas crecerá uniformemente"[4] (Evidencia 1).	Es correcto "…porque el peso de las monedas es constante y la forma del recipiente es de una forma en la cual sube en un mismo nivel" (Evidencia 2).	Es correcto "porque su medida no cambia, siempre está derecha" (Evidencia 3).

Origen: Fuente propia

Se aprecia una diferencia en la forma de enunciar del Suj1 con relación a los otros dos. El Suj1 hace referencia de forma explícita a que los incrementos serán constantes, mientras que Suj3, aunque también reconocen que en un recipiente de forma cilíndrica el nivel de agua sube de forma constante, no explicita que se trata de incrementos. Podría decirse que el Suj3 razona apoyándose más en el hecho empírico, mientras que el Suj1 ofrece una explicación más independiente de ésta

Respuestas a la pregunta de si es correcta a o no la afirmación: cuando la probeta tiene forma como alguna de las imágenes de la figura (el recipiente A de forma de cono truncado, el B esférico y C cono truncado invertido), en la que la sección transversal cambia de tamaño, el nivel del agua NO sube de forma constante (apartado S1, pregunta 1.1 afirmación dos)

[4] En lo posible se ha mantenido el escrito original de estudiante, se ha cambiado agregando o quintado algún signo de puntuación para facilitar su comprensión. Cuando se encuentran errores ortográficos se han hecho las modificaciones necesarias. El texto en manuscrito se encuentra en el anexo citado.

Tabla 2

Respuestas de los tres sujetos a Pregunta 1.1, afirmación dos de situación uno de llenado uno

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
Sí [es correcto] "… porque el incremento de Δn [incremento de la cantidad de monedas] sí puede ser el mismo, pero la altura, o sea, su incremento ya no será igual, ya no tiene el mismo incremento como sería en la probeta cilíndrica" (Evidencia 4).	Sí [es correcto] "…porque la forma de las probetas no son las mismas y hacen que varíe su constante" (Evidencia 5).	Sí [es correcto] "sí, porque si nos fijamos en la probeta A empieza a subir aumentando de a poquito y luego empieza a subir bastante, en cambio en la probeta B empieza a subir mucho, cambia y luego sube otra vez…" (Evidencia 6).

Origen: Fuente propia

Nuevamente se constata que los tres casos reconocen que en recipientes que tienen una forma en la que cambia la sección transversal, el aumento de la altura del nivel del agua no es constante. El Suj1 mantiene una enunciación en términos de la variación (en este caso no constante) del incremento de la altura, mientras que el Suj3 continúa haciendo descripciones del cambio apoyándose en el hecho empírico, sin recurrir a la idea de incrementos.

En la prueba inicial, los tres sujetos coinciden en afirmar que la medida de la altura del nivel del agua varía y que ésta se relaciona con el tiempo de llenado. En las dos tareas relacionadas con este aspecto: a) en la que se le solicita que determine si la medida de una magnitud dada varía o permanece constante a lo largo del desarrollo del fenómeno (llenado del recipiente), para el caso de la magnitud <altura del nivel del agua> y b) en la que se pide si la variación de la altura del nivel del agua está relacionada con las variaciones del tiempo de llenado (apartado prueba inicial, pregunta 1 y 2), los tres sujetos estudiados ofrecen las respuestas de la siguiente tabla

Tabla 3

Respuestas de los tres sujetos a preguntas 1 y 2 de prueba inicial

Tarea	Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
Tarea a. Indicar si la medida de la altura del nivel del agua varía o permanece constante	Sí [varía] “porque a medida que va cayendo mayor cantidad de agua, aumenta su altura. Por la forma del recipiente, la altura sube” (Evidencia 7).	Sí [varía] “porque entre más se va llenando el recipiente, más altura tiene el agua” (Evidencia 8).	“Sí cambia” “porque cada determinado tiempo, el agua va a subir de nivel, excepto si sierran el grifo o la llave” (Evidencia 9)
Tarea b. Indicar si la variación de la medida de la altura se relaciona con la variación de la medida del tiempo de llenado	Sí [se relacionan] “Claro que cambia, porque entre más tiempo, más agua caerá y crecerá la altura” (Evidencia 10).	Sí [se relacionan] “Digamos: uno abre el chorro de agua más y el agua cae más rápido, entonces el tiempo transcurrido va a ser más corto porque sube más rápido, entonces sí varía” (Evidencia 11).	Sí [se relacionan] “Esto si cambia porque si aumentamos la cantidad de agua que entre, va a transcurrir menos tiempo” “…si cambiamos la probeta, se va a demorar más tiempo, pero eso también depende de la cantidad que esté botando el chorro” (Evidencia 12).

Origen: Fuente propia

Aunque los tres casos coinciden en afirmar que la magnitud altura del nivel del agua tiene un valor variable a lo largo del fenómeno y que éste se relaciona con la variación del tiempo de llenado transcurrido, en las justificaciones de los sujetos de nivel medio y nivel bajo en la segunda tarea hacen referencia a variaciones de las condiciones del fenómeno. Contrario a lo que se le indicaba en la pregunta, varían la cantidad de agua vertida por unidad de tiempo y no analizan las dos variables en cuestión para indicar su relación, sino que relacionan la altura del nivel del agua con la cantidad de agua vertida en la unidad de tiempo. Esto puede leerse como que, al empezar el proceso didáctico, en este nivel cualitativo, algunos estudiantes aún no diferencian totalmente las relaciones entre las variaciones de una magnitud con relación a las otras, es decir, las relaciones entre magnitudes, aparece como una globalidad que no se diferencian totalmente.

De los 19 estudiantes que participaron en el estudio, 7 más reconocen que la altura del nivel del agua varía durante el proceso de llenado al igual que los 3 casos de estudio. En lo que respecta a la segunda tarea, 9 estudiantes más, al igual que el caso sujeto nivel alto, reconocen la relación entre la variación en el tiempo transcurrido, 3 más modifican condiciones del fenómeno como lo hacen los sujetos de nivel medio y bajo. Por ejemplo, entre los sujetos que modifican las condiciones, el Suj4 dice: “la medida del vaso va cambiando a medida que el chorro del agua cae” y Suj5 dice: “si la llave se modifica, la altura también cambiará y el tiempo será más corto” (Evidencias 13 y 14, respectivamente). De este modo, no relacionan la altura del nivel del agua con el tiempo transcurrido bajo las mismas condiciones del fenómeno estudiado, sino que relacionan los cambios de las magnitudes altura y tiempo en las condiciones que alteran (por ejemplo, tiempo de llenado en dos recipientes diferentes).

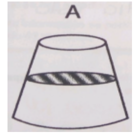
Los datos estudiados con relación a esta categoría <<relación de la forma de covariación con características del fenómeno>> permiten afirmar que los estudiantes de este grado aunque pueden identificar en este fenómeno que la altura del nivel del agua cambia y pueden relacionarla con el tiempo de llenado, algunos no explicitan la relación de covariación e incluso, algunos casos hacen referencia a otras magnitudes y modifican las condiciones iniciales del fenómeno cuando se les pide relacionar la altura del nivel del agua a medida que el tiempo ha transcurrido. Pareciera que para unos estudiantes existe una dificultad de diferenciar las variables, estas se presentan como una globalidad indiferenciada que en algunos casos los estudiantes de este nivel todavía no logran diferenciar completamente.

Categoría dos: Interpreta representaciones tabulares

Indicador 1: Por simple inspección de los valores de las variables reconoce cuándo la covariación es lineal y asocia este hecho con la situación experiencial y descarta las representaciones tabulares de otros tipos de covariaciones

En la situación uno de llenado se pide relacionar la representación tabular en el caso en que la forma del recipiente que se llena es

A



Afirmación cuatro. Si una probeta tiene la forma como la de la imagen A de la figura de arriba, le puede corresponder una tabla como. Justificar.

Cantidad de monedas	1	2	3	4	5	6	7
Nivel del agua (en cm)	5,0	8,0	10,5	12,5	14,0	15	15,5

Gráfica1. De secuencia didáctica, pregunta1.1 afirmación cuatro de situación uno de llenado uno. Fuente propia

El caso de nivel medio considera que la tabla puede corresponder a este hecho y aunque los casos nivel alto y bajo, coinciden en que la tabla no corresponde al fenómeno, las razones son distintas. La tabla ilustra las respuestas dadas.

Tabla 4

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.1, afirmación cuatro de situación uno de llenado uno

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
“Falso, porque en esa probeta va a haber un decrecimiento y los datos de esta tabla solo ascendiendo siempre los datos” (Evidencia 15).	“Es correcto porque, aunque el incremento no sea constante tenemos que ver también como está formada la probeta y ver que la forma en la parte de arriba es más angosta” (Evidencia 16).	“No, porque tendrá que empezar aumentando menos porque la probeta es ancha en la parte inferior y flaca en la parte superior por lo cual en la tabla nunca se muestra eso” (Evidencia 17).

Origen: Fuente propia

El sujeto de nivel alto termina confundiendo el valor decreciente de la sección transversal de la probeta con el hecho de que hay que esperar que los valores de la altura han de decrecer. Esta respuesta contrasta con las justificaciones dadas en las preguntas de la primera categoría, en las que parece tener claras estas relaciones. Sin embargo, en aquellas preguntas se requería decidir sobre la constancia o no de la variación, aquí hay que involucrar no solo la constancia del cambio, sino el sentido de la variación, los incrementos de la altura no son constante para incrementos iguales del tiempo sino, además, hay que decidir que éstos disminuyen con el tiempo. En otras palabras, el valor de la altura se incrementa, pero su incremento es cada vez menor. Y este sujeto termina confundiendo y expresa que los datos de la altura que muestra la tabla crecen cuando, según él, deberían decrecer. El sujeto de nivel bajo, contesta correctamente, considera que la tabla NO representa correctamente la relación entre las dos variables, ya que por ser la probeta más ancha en la parte inferior tiene que aumentar menos que en la parte superior que es menos ancha y parece tener claro que esto no lo muestra la tabla. El sujeto de nivel medio contesta incorrectamente, aunque refiere que la parte superior es más angosta no cae en la cuenta que, precisamente por este hecho, los incrementos han de crecer.

Hechos como este empiezan a insinuar la dificultad que tienen los estudiantes para pasar a evaluarla constancia o no del cambio de altura a valorar la variación de la magnitud del cambio. Mientras los sujetos se representen el problema directamente ligado a la forma de los recipientes pueden entender cuándo es constante y cuándo no. Es más, pueden saber que el valor crece más rápido si la sección transversal se reduce y menos rápido si la sección transversal se amplía, pero pasar de ahí a analizar el problema sobre los valores de las variables sin el apoyo de la información que adiciona el hecho empírico genera dificultades mayores.

En la prueba inicial se puede asociar una tarea similar en la que se solicita escoger la tabla de valores que representa la relación entre la altura del nivel del agua (A) y el tiempo transcurrido (F) en una posible experiencia de llenado en un recipiente de forma cilíndrica. Para cada una de las tres tablas planteadas se debía justificar su escogencia o no escogencia.

Opción 1

Valores de A (dado en cm)	1,2	2,5	3,9	5,4	7,0
Valores de F (dado en seg)	1	2	3	4	5

Opción 2

Valores de A (dado en cm)	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0
Valores de F (dado en seg)	2	4	6	8	10

Opción 3

Valores de A (dado en cm)	1,8	1,6	1,4	1,2	1,0
Valores de F (dado en seg)	1	2	3	4	5

Los tres sujetos coinciden en afirmar que la segunda tabla presentada es la que corresponde a una posible experiencia de llenado en un recipiente de forma cilíndrica. Sin embargo, los enunciados que elaboran para justificarlo guardan algunas diferencias, que posiblemente pueden poner en evidencia comprensiones distintas.

Los tres sujetos estudiados ofrecen las siguientes respuestas:

Tabla 5

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 3 de prueba inicial.

Opciones	Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
Opción 1	No corresponde “debido a que pasa cada segundo y no es uniforme, porque va aumentando así: de 1,2 a 2,5=1,3, luego de 2,5 a 3,9 es 1,4 y así va aumentando, no es uniforme,	No corresponde “No es la que corresponde porque la cantidad del chorro de agua no es el mismo y la cantidad no es la misma” “no aumentaban [altura del nivel del agua] la misma	No corresponde “en la tabla, los segundos están bien, pero el agua y las medidas están mal, tienen que subir la misma cantidad de acuerdo con los segundos” (Evidencia 20).

	así que esta no es” (Evidencia 18)	medida en cada segundo (…) el chorro está abierto en una medida, si cae la primera tiene que caer la segunda los mismos centímetros” (Evidencia 19)	
Opción 2	Sí corresponde “porque es uniforme lo que aumenta por segundo, por el tiempo, a medida que va pasando el tiempo (los segundos) aumenta 1,4 cm siempre. Esto significa que es constante” (Evidencia 21)	Sí corresponde “Los segundos son constantes y los valores de la otra medida también, aumentan en la misma medida cada centímetro en cada segundo” (Evidencia 22)	Sí corresponde “Esta tabla está bien ya que sube la misma cantidad de agua en cada segundo dado” (Evidencia 23)
Opción 3	No corresponde “porque a medida que va pasando el tiempo va disminuyendo de 0,2 mm, lo que significa que puede ser constante, pero disminuye y así no es el ejemplo” (Evidencia 24)	No corresponde “No es la que corresponde porque el tiempo y la cantidad de agua no es la misma” “los valores de los segundos también son continuos, pero los valores de milímetros no son los mismos, van disminuyendo” (Evidencia 25)	No corresponde “los segundos se muestran bien, pero si vemos en la tabla, el valor del agua no se presenta correctamente” (Evidencia 26)

Origen: Fuente propia

El sujeto nivel alto considera los valores de las variables implicadas, su variación, el valor de los incrementos y además la dirección de los incrementos (por eso rechaza la opción tres: “*…lo que significa que puede ser constante, pero disminuye y así no es el ejemplo”*). Por su parte, los sujetos nivel medio y nivel bajo parecen fundar sus respuestas en el hecho de que observan las sucesiones de los valores de las variables por aparte (los de tiempo y los de la altura) y sólo se interesan por verificar si tienen variación constante. Estas respuestas parecen poner en evidencia que estos sujetos, en especial los casos Suj2 y Suj3, a partir de la representación tabular valoran las constancias de la variación de las dos sucesiones (la de los valores de las dos variables) y esto les basta para decidir si corresponde o no a las variaciones constantes que ellos esperan de las dos variables por tratarse de un recipiente cilíndrico

Al comparar con las respuestas de estos tres casos con los del curso, se encuentra que 4 estudiantes más del curso reconocieron cuándo la covariación es lineal y cuándo no, a través de la inspección de los valores de la tabla y la relación entre estos y la experiencia de llenado de un recipiente cilíndrico de forma parecida a lo que hicieron los sujetos 2 y 3. Por ejemplo, Suj5 con respecto a la primera tabla dada afirma: “al sumar el primero con el segundo da 2,4 y tendría que dar 2,5, no son iguales los resultados”, con respecto a la segunda tabla dice que sí corresponde porque “al sumar 1,4 y 1,4 da 2,8 y sumando el primero y el segundo dará el resultado de la tercera…” y en relación a la no escogencia de la tercera tabla dice porque “… no corresponden los resultados porque no son iguales. Además, al contrastar las respuestas de algunos sujetos se nota que, al parecer, aunque los sujetos reconocen, a partir de los valores de la tabla la covariación lineal, no expresan sus justificaciones en los mismos términos. Por ejemplo, Suj9, respecto a los valores de la segunda tabla dada, afirma que “sí es constante y lógico porque cada segundo que pasa, se llena 1,4 cm de agua” y Suj14 dice “Si es porque cada segundo cae la misma cantidad de agua por segundo” (Evidencias 27 y 28). Suj9 lo hace en términos de los valores de los incrementos y Suj14 lo hace en términos de las variaciones en los valores. Aunque este último reconoce la constancia de las variaciones, no indica el valor de estos.

Por su parte, el resto de estudiantes del curso utilizan un criterio en el que alteran las condiciones planteadas del fenómeno o determinan si los valores dados, a su parecer, serían acordes a la experiencia real del fenómeno. Por citar un caso Suj16 con respecto a la primera tabla dada, considera que no corresponde porque “puede que la altura del agua sea más que 7 [cm] en 5 segundos porque pude que el chorro sea más rápido o más lento”. También, Suj12 con respecto a la primera tabla dada dice que “1,2 segundos si corresponde, [pero] el resto [de valores de la tabla] no corresponden, ya es muy extremo” (Evidencias 29 y 30).

Por consiguiente, los datos estudiados en este indicador <<por simple inspección de los valores de las variables reconoce cuándo la covariación es lineal y asocia este hecho con la situación experiencial>> permiten afirmar que los estudiantes de este grado valoran la constancia de los valores de las dos sucesiones, de las dos variables, sin tener en cuenta la razón de los incrementos. Según parece, los sujetos identifican la constancia o no de las variables y comprenden el crecimiento o decrecimiento del valor siempre y cuando asocien la información al hecho empírico.

Indicador 2 y 3

Indicador 2: Identifica una forma de correspondencia entre los valores de las variables lo que le permite continuar con los valores siguientes (el valor n+1) a partir de un par de valores dados (el valor n)

Indicador 3: Asigna valores nuevos a partir de otros valores ya conocidos mediante procesos de interpolación y extrapolación, en caso de covariaciones que dan lugar a una razón de cambio constante y reconoce que esto no se puede hacer en caso de otras formas de covariación que dan lugar a una razón de cambio variable

En la situación de movimiento, se plantean dos tareas de asignar nuevos valores a partir de la información de la siguiente representación tabular

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5
Distancia automóvil A (km)	10	20	30	40	50	60
Distancia automóvil B (km)	0	20	40	60	80	100
Distancia automóvil C (km)	5	10	25	50	85	30

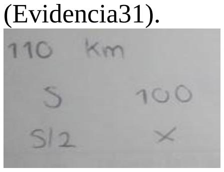
Se plantean dos tareas en las cuales se pide a) la distancia a la que se encuentra el móvil B cuando han transcurrido 5 horas y media y b) la distancia a la que se encuentra el móvil A cuando han transcurrido 46 horas (apartado S4, preguntas 7 y 8).

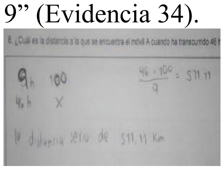
Los tres sujetos indican el valor solicitado, asociando los valores dados en la tabla de la relación entre distancia y tiempo de los dos autos a la covariación lineal proporcional, sin identificar que los valores de uno de los dos autos corresponden a una covariación lineal no proporcional

A continuación, se relacionan las respuestas de los tres sujetos estudiados:

Tabla 6

Respuestas de los tres sujetos a preguntas 7 y 8 de la S4 movimiento.

Tarea	Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
Tarea a. Indique la distancia a la que se encuentra el móvil B cuando han transcurrido 5 horas y media	Su respuesta es 110 km. “está incrementando [la distancia] de 20 en 20 [km] (…) entonces cuando llegue a 6 [horas, la distancia será] 120. (…) Cinco y medio es la mitad entre cinco y seis, entonces [la distancia cuando t=5,5 horas] sería 110 [km]o también sería hacer una regla de tres que sería como lo más rápido: en 5 horas hay 100 km, ¿en cinco[horas] y medio, cuántos km habrá?” (Evidencia31).  Multiplica 100 por 5,5 y el resultado lo divide en cinco. El resultado es 110 km.	Se encuentra en 120 “cinco horas y media pongámoslo aquí (escribe este valor al lado del 5 de la tabla), como va constante, sucesivamente va aumentando veinte, yo sólo le sumé veinte y ya” (Evidencia 32). En la tabla de valores, al lado del último valor de la distancia escribe 120, teniendo en cuenta que los incrementos son de 20 km y al lado del último valor del tiempo escribe 5, 5 horas, sin tener en cuenta el valor de los incrementos del tiempo.	“110 km porque el automóvil va aumentando de 20 en 20 y si sacamos la mitad de 20 es 10, por lo cual si estuviera corriendo dos horas sería 120, pero estamos hablando de una hora y media lo cual sería 110 kilómetros” (Evidencia 33). Encuentra el punto medio del intervalo de distancias [100,120] km, teniendo en cuenta que 5,5 corresponde al punto medio los tiempos correspondientes, [5,6] horas
Tarea b. Indique la distancia a la que se encuentra el móvil A cuando han	Su respuesta es 511,11 km. “…el móvil A siempre va a incrementar de 10 en 10. (…) 6 [horas] será 70 [km], 7 [horas], será 80[km], 8 [horas] será 90[km] y 9 [horas] será 100[km]. Entonces yo cogí este, el 9,	460 km “solo lo multipliqué [46 por 10]” (Evidencia 35). Tiene en cuenta que el valor del incremento es el mismo, 10 km, y lo multiplica 46 horas, sin tener en cuenta que	“porque si tenemos en cuenta, el automóvil va aumentando de 10 en 10 y si multiplicamos 46 * 10 nos daría 460 kilómetros” (Evidencia 36). Tiene en cuenta que el valor del incremento es el mismo,

transcurrido 46 horas	como era 100, como para que fueran más exactos los datos, para hacerlo más rápido (…) si en 9 horas hay 100 km (…) en 46 horas, ¿cuánto habrá? (…) 46 por 100 dividido en 9” (Evidencia 34).  Después de encontrar que para 9 horas corresponde 100 Km, resuelve la regla de tres 9 horas para 100 km, para 46 horas cuántos, por eso multiplica 100 por 46 y el resultado lo divide en 9. El resultado es 511,11 km	cuando t=0, la distancia es 10 km.	10 km, y lo multiplica 46 horas, sin tener en cuenta que cuando t=0, la distancia es 10 km.

Origen: Fuente propia

Ninguno de los tres casos distingue que el caso del móvil B el valor de la variable dependiente es cero al iniciar el movimiento mientras que en el móvil A no lo es. En la pregunta referida al móvil B, el sujeto de nivel alto, indica que cada hora aumenta 20 km y que como se trata de media hora solo agrega 10 km a los 100 km correspondientes al valor de 5 horas, valores que se pueden obtener directamente de la tabla. Este mismo sujeto muestra que también que puede asociar la pregunta al procedimiento de regla de tres. El sujeto de nivel bajo realiza las cuentas de forma similar al primer procedimiento del sujeto 1. El sujeto 2 se limita a agregar a 100 km la distancia que recorría por móvil en la siguiente hora, pasando por alto que solo es media hora. En la segunda pregunta, la referida al móvil A, combina dos formas de proceder, en la primera suma a los 10 km iniciales, los 10 km de cada una de las primeras 9 horas —*Entonces yo cogí este, el 9, como era 100, como para que fueran más exactos los datos, …*- y después aplica regla de tres, confundiendo el hecho de que a las 9 horas el móvil esté a una distancia de 100 km con el hecho de que cada 9 horas recorre 100 km, que es la condición de la regla de tres. Los otros dos sujetos se limitan a reducir el problema a una multiplicación simple, sin tener presente los 10 km iniciales.

Además de los errores de los procedimientos de cálculo en la segunda pregunta es que el sujeto 1, aunque incurriendo en error, tiene presente el valor inicial (0 min, 10 km), mientras que los otros dos casos lo pasan por alto. Pareciera que los estudiantes asimilan el problema a un esquema de multiplicación simple (si cada hora recorre 10 km en 46 …).

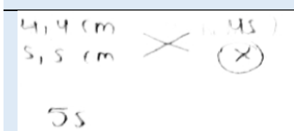
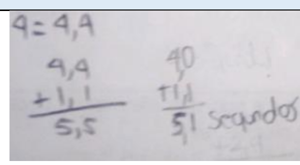
A esta tarea, se le puede asociar una pregunta similar de la prueba inicial en la que se solicita que, a partir de los datos dados en la tabla, indique el tiempo que debe transcurrir para que el nivel del agua alcance 5,5 cm de altura (apartado prueba inicial, pregunta 7.2)

Valores de A (dado en cm)	2,2	4,4	6,6	8,8	11,0
Valores de F (dado en seg)	2	4	6	8	10

La tabla muestra los procedimientos utilizados

Tabla 7

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 7.2 de la prueba inicial

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
 "Se hace una regla de tres y si en 4,4 cm pasaron 4 segundos, ¿cuántos habrá en seis? A simple vista sólo se ve que es un segundo más" (Evidencia 37). Multiplica 5,5 por 4, obtiene 22 y divide este resultado por 4,4 y el cociente es 5 segundos	 "llegué hasta 1,1 entonces lo sume y me dio 5,5 segundos, después lo sume a los 4 segundos que nos habían dado al inicio y me dio [5,1] segundos". (Evidencia 38).	"Transcurre 5 segundos, porque si sacamos la mitad de 4,4 y 6,6 nos va a dar 5 segundos [que es el tiempo medio entre el tiempo de 4,4 cm y el de 6,6 cm de altura] ya que se encuentra en la mitad de ellos" (Evidencia 39). Al determinar que el incremento de 4,4 a 5,5 es de 1,1, utiliza este valor como incremento en el tiempo y por eso a 4 segundos le suma 1,1. De modo, que responde que para que el nivel del agua alcance una altura de 5,5 cm deben transcurrir 5,1 segundos

Origen: Fuente propia

El caso nivel alto, al igual que en la tarea de movimiento, utiliza la regla de tres para dar el valor solicitado. De este modo, se va haciendo notable el intento del caso nivel alto de utilizar algunas herramientas matemáticas que ha obtenido en su recorrido escolar, aunque en algunas ocasiones no sea acertado tal uso. Por su parte, los sujetos de nivel medio y bajo nuevamente recurren a un cálculo aritmético aditivo considerando la constancia y el valor de los incrementos de acuerdo a los valores dados en la tabla. Sin embargo, el caso nivel medio asume que el incremento que se da en la altura del nivel del agua debe ser el mismo en los valores del tiempo.

Los datos estudiados en este indicadores:<< identifica una forma de correspondencia entre los valores de las variables lo que le permite continuar con los valores siguientes (el valor n+1) a partir de un par de valores dados (el valor n)>> y <<asigna valores nuevos a partir de otros valores ya conocidos en caso de covariaciones que dan lugar a una razón de cambio constante>> permiten constatar que los estudiantes de este grado asignan valores nuevos a partir de la representación tabular, usando procedimientos intuitivos, son procediendo de forma aditiva, esto se ve más claro en los casos en que los valores nuevos se pueden obtener por intrapolación o si hay que extrapolar el valor nuevo es cercano al último de la tabla. Así, a partir del patrón que identifican pueden continuar con los valores siguientes en la sucesión, a partir de un valor n. Si el valor nuevo es muy lejano a valores de la tabla, introducen o multiplicación simple (valor unitario por número de unidades) o regla de tres, en el caso en que la tabla represente valores en covariación directamente proporcional tienen éxito, pero si no es así, los lleva error. Parece entonces que los estudiantes para efectos de estos cálculos, determinan y usan el patrón de cambio entre los valores, pero pasan por alto la diferencia de registros tabulares con el par (0,0) y (0, y) y se impone, en estos casos, el esquema de multiplicación simple y el procedimiento de regla de tres.

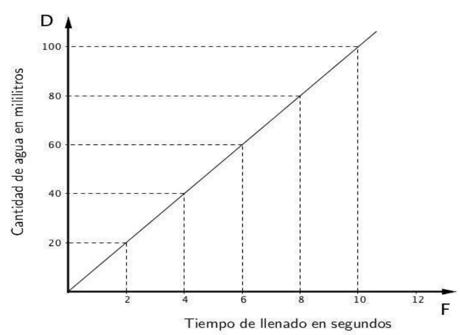
Categoría tres: Interpreta representaciones cartesianas

Indicadores 1 y 2

Indicador 1: Ubica puntos específicos en el plano cartesiano, demarcando las correspondientes parejas ordenadas.

Indicador 2: Establece escalas y registra correctamente los valores en ellas.

En la prueba inicial encontramos dos tareas asociadas a estos aspectos enunciados en los anteriores indicadores, en las cuales se solicitaba a) utilizar la siguiente representación gráfica para indicar la cantidad de agua que hay en el recipiente cando han transcurrido 4 segundos y el tiempo que debe transcurrir para que haya 70 mililitros de agua en el recipiente



Gráfica 2. Tomada de prueba inicial.

y b) representar en la gráfica los valores de la siguiente tabla

Valores de A (dado en cm)	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0
Valores de F (dado en seg)	2	4	6	8	10

Gráfica 3. Tomada de prueba inicial

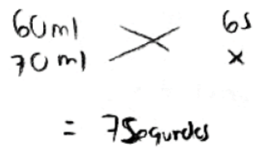
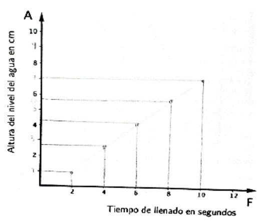
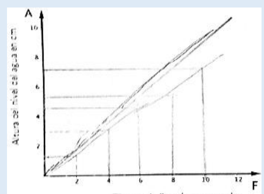
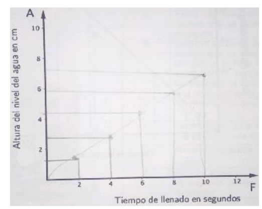
En la primera tarea los tres casos utilizan las parejas ordenadas de la representación gráfica dada para indicar que cuando han transcurrido 4 segundos, la cantidad de agua en el recipiente es 40 ml y que deben transcurrir 7 segundos para que la cantidad de agua en recipiente sea de 70 ml. En cuanto a la segunda tarea los tres sujetos se aproximan a la representación cartesiana correcta de los valores dados en la representación tabular de la altura del nivel del agua a medida que transcurre el tiempo. No obstante, son notables algunas diferencias en las enunciaciones de los tres casos.

Las respuestas de los tres sujetos se relacionan a continuación:

Tabla 8

Respuestas de los tres sujetos a preguntas 9 y 10 de la prueba inicial

Tarea	Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)

Tarea a. Indique la cantidad de agua en el recipiente cuando haya transcurrido 4 segundos y el tiempo transcurrido cuando haya70 ml en el recipiente	“hay 40 ml en cuanto a la cantidad de agua cuando han transcurrido 4 segundos” (Evidencia 40).  “Se hace una regla de tres o simplemente se ve en la gráfica” Han transcurrido 7 segundos cuando hay 70 ml en el recipiente.	“40 porque va aumentando 40 ml” (Evidencia 41). “7 segundos deben transcurrir para que haya 70 ml de agua en el recipiente”	“40 ml porque la gráfica muestra que en 4 segundos se llena 40 ml” (Evidencia 42). “para que el recipiente contenga 70 ml de agua deben transcurrir 7 segundos porque si nos fijamos, en la mitad de 60 y 80 se encuentra 70 y en la mitad de 6 y 8 se encuentra 7”
Tarea b. Represente en la gráfica los valores de la tabla dada.	 (Evidencia 43).	 La gráfica dada como repuesta es la que se encuentra menos inclinada, que une los puntos demarcados (Evidencia 44).	 (Evidencia 45).

Origen: Fuente propia

Los tres casos aciertan en decir que en 4 segundos transcurridos la cantidad de agua en el recipiente es de 40 ml y que deben transcurrir 7 segundos para que la cantidad de agua en el recipiente sea 70 ml. Ahora bien, el caso nivel medio no enuncia el criterio que tuvo en cuenta para dar su respuesta. Sin embargo, los casos nivel alto y bajo coinciden en explicitar que la información la da la gráfica, es decir, tiene en cuenta los puntos cartesianos y le dan significados a los mismos. Además, el caso nivel alto explica que también se pudo usar una regla de tres en la que toma una de las parejas ordenadas y, reconociendo la proporcionalidad entre las dos magnitudes relacionadas, halla el valor solicitado.

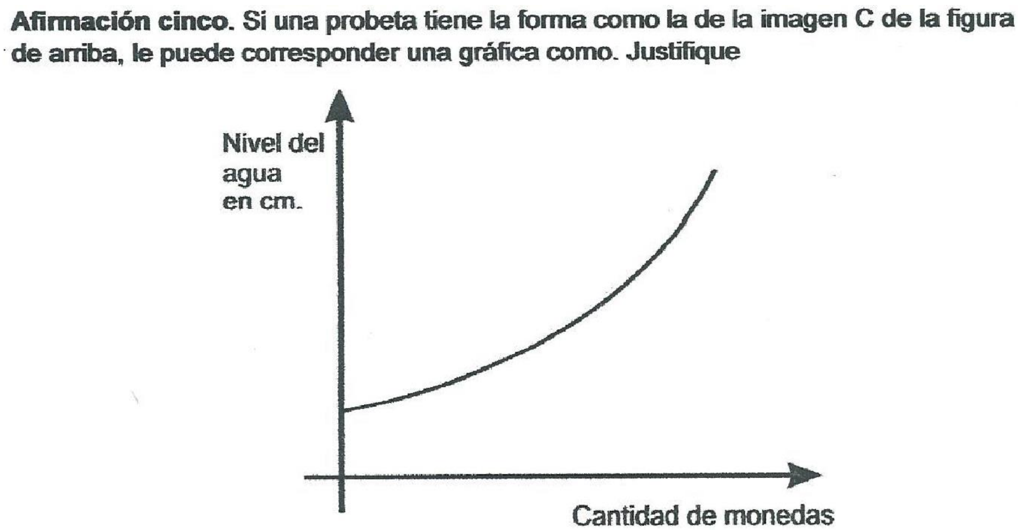
En lo concerniente a la segunda tarea, el caso Suj1 hace una modificación a la escala indicada en la gráfica, que está de dos en dos unidades y él le ubica el entero que falta entre cada par de valores señalados en esta y así la escala queda de 1 en 1. Al parecer, así se le facilita ubicar los seis puntos coordenados, de los cuales se ubica en uno. Por su lado, los casos Suj2 y Suj3 demarcan los valores dados en la representación tabular utilizando la escala dada y además traza la línea que una los puntos demarcados.

Los datos analizados en los indicadores: << ubica puntos específicos en el plano cartesiano, demarcando las correspondientes parejas ordenadas>> y << establece escalas y registra correctamente los valores en ellas>> indican que los estudiantes de este curso, dan significado a los puntos coordenados de la representación gráfica asociándolos a los valores de las variables relacionadas. Además, a partir de valores dados en la representación tabular pueden demarcar correctamente los pares ordenados correspondientes en la gráfica. Por otro lado, cuando les dan la escala en el plano cartesiano, los casos Suj2 y Suj3 ubican correctamente los valores utilizando la escala dada y en el caso Suj1 la adapta de manera que pueda obtener más precisión en la ubicación de las parejas ordenadas.

Indicador 3: Reconoce a partir de la forma de la gráfica (recta o no) la covariación lineal o no de las dos variables asociadas.

En la situación uno de llenado se pide relacionar la representación cartesiana en el caso en que la forma del recipiente que se llena es:

C



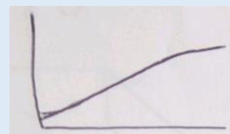
Gráfica 4. De la secuencia didáctica, pregunta1.1. afirmación cinco de situación uno de llenado. Fuente propia

Aunque los casos Suj1 y Suj2 coinciden en que la gráfica corresponde al fenómeno, las razones dadas son distintas. Ver tabla 9 en la página siguiente

El caso de nivel alto aduce dos razones, una, que tiene que ver con la relación entre la forma curva de la gráfica e incrementos no constantes y la otra con la dirección de las variaciones ("… *pero va ascendiendo*"). Este sujeto comprende que esta tarea implica determinar la constancia o no de la variación y al encontrar que los datos no crecen constantemente, hecho que corresponde a la forma variable de la sección transversal, le es suficiente para determinar que la forma de parábola de la representación gráfica corresponde a la forma del recipiente presentado. Sin embargo, le falta comprender que esta tarea implica, además de reconocer la no constancia de los incrementos, tener en cuenta si la variación de estos disminuye o aumenta, lo cual tampoco tuvo en cuenta en las justificaciones dadas en el indicador dos de la categoría dos. El caso de nivel medio considera que la gráfica puede corresponder a este fenómeno, porque simplemente se limita a relacionar la forma del recipiente con la forma de la línea de la gráfica. No tiene en cuenta la no constancia de los incrementos ni el sentido de variación de estos. Por su parte, el caso Suj3 da su respuesta en términos de lo que sucede en el fenómeno y reconoce que los aumentos del nivel del agua en el recipiente presentado, son mayores inicialmente.

Tabla 9

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.1 afirmación cinco de situación uno de llenado uno

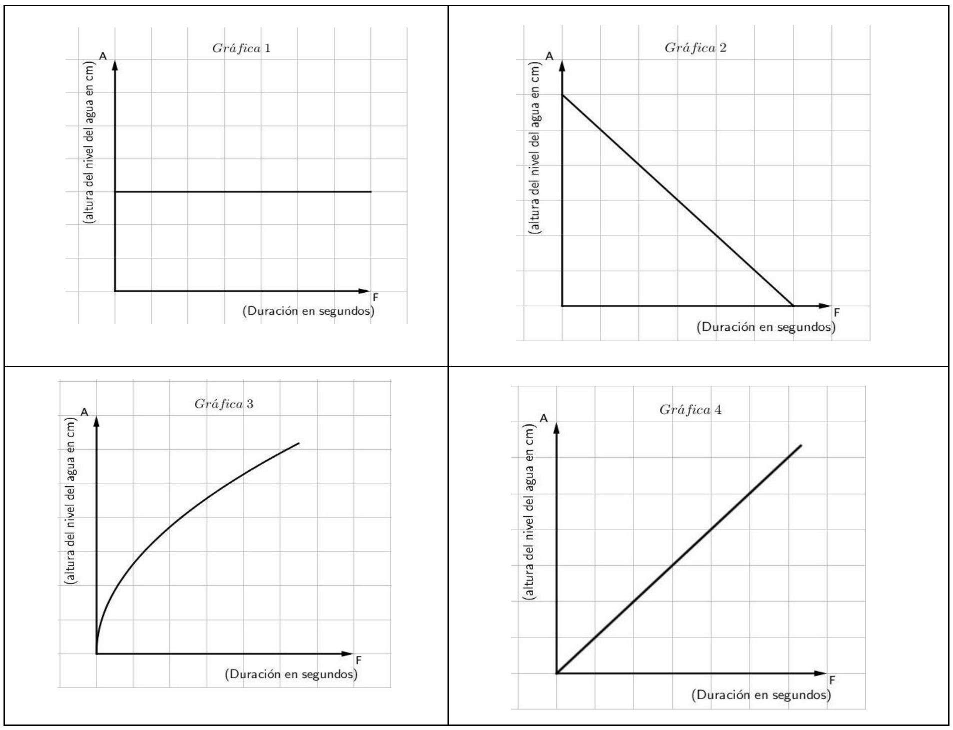
Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
"Verdadero, porque tiene un incremento no constante, pero va ascendiendo, lo que en la gráfica sería una parábola" (Evidencia 46).	"Es correcta porque la forma de la probeta y como aumenta el agua se asimilan a la gráfica" (Evidencia 47).	Indica que no es correcta y realiza la representación cartesiana que considera la correcta.  "[la parte inicial de la gráfica] nos muestra que va aumentando más cantidad y luego, empieza a subir menos" Con respecto a por qué no comienza en cero, el estudiante dice: "tendría que empezar con cierta cantidad de agua porque […] si la probeta no tiene agua y le metemos monedas ¿cómo va a aumentar la cantidad de agua?" (Evidencia 48).

Origen: Fuente propia

Además, comprende que es necesario un nivel de agua al iniciar el llenado para que se dé la condición del aumento del nivel del agua a medida que se le introducen monedas. Pensar en la situación fenomenológica le permite comprender otros elementos, como en este caso el intercepto con el eje Y.

Los casos nivel alto y nivel medio reconocen que cuando la gráfica no es una recta, la covariación entre las dos variables relacionadas no es lineal. Solo acuden a la variación no constante de los incrementos para indicar la correspondencia a gráficas de líneas no rectas, sin hacer distinción entre estas. El sujeto nivel bajo por su parte, al pensar en términos de la experiencia del llenado, acierta en el sentido de la variación de los incrementos.

En la prueba inicial se puede asociar una tarea relacionada, en la que se solicita escoger la gráfica que representa la forma de variación de la altura del nivel del agua y el tiempo transcurrido en una experiencia de llenado en una probeta de forma cilíndrica. Las cuatro opciones presentadas son las siguientes:



Gráfica 5. Tomada de prueba inicial pegunta 8**.**

A continuación, se relaciona las respuestas de los tres sujetos estudiados:

Tabla 10

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 8 de la prueba inicial.

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
"Es la gráfica 4 porque como su aumento es uniforme en la representación de una recta no tiene ningún tipo de parábola, por la constancia de todas las medidas, son constantes" (Evidencia 49).	"Es el gráfico 4 porque es el que más se acomoda (…) La altura del nivel del agua empezaba en una medida, entonces iba subiendo, entonces [la gráfica 3] no me convenció mucho, hacía lo mismo, pero la figura, la vasijita tenía que ser más diferente. Entonces la acomodé más como al ejemplo que	"Gráfica 3 porque nos muestra desde el segundo cero y va subiendo de acuerdo a la altura del agua y es mejor para ubicar. Esta también se puede utilizar si la medida es estable" (Evidencia 51).

	estaban dando [forma cilíndrica del recipiente] y escogí la 4" Una de las investigadoras le solicita explicar cuál sería la gráfica si el recipiente no tuviera forma cilíndrica (le hace un dibujo) la estudiante responde: "sería [la gráfica 3] porque va subiendo, pero tiene diferente forma que [la gráfica 4]" (Evidencia 50).	

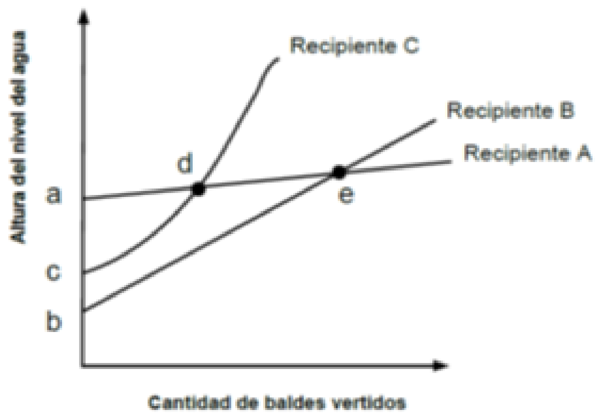
Origen: Fuente propia

En esta tarea, las justificaciones de los casos Suj1 y Suj2 (nivel alto y medio) son similares a las dadas en la situación de llenado uno, pues relacionan la covariación lineal con gráficas de líneas rectas. El Suj1 hace el análisis en términos de la constancia de los incrementos y Suj2 asociando la forma del recipiente con la forma de la línea de la gráfica. La respuesta del caso Suj3 (nivel bajo) muestra que al inicio de la secuencia didáctica el estudiante no relaciona la forma de la covariación de las variables asociadas (lineal o no) a partir de la forma de las gráficas (recta o no). En cambio, en la situación 1 (de llenado uno) lo pudo hacer.

Al comparar las respuestas de estos casos con los otros estudiantes del curso se encuentran respuestas semejantes. Tres estudiantes seleccionan la gráfica 4 y otros tres la gráfica 3 (Evidencias 52 y 53). También, se encuentran 4 estudiantes que seleccionan la gráfica 1 y la gráfica 2, pero no ofrecen con claridad el criterio de selección.

Los datos analizados indican que, al inicio de la secuencia didáctica, la mayoría de los estudiantes del curso no tiene un criterio correcto de asociación entre la situación de llenado y la representación gráfica correspondiente. Quienes ofrecen la respuesta correcta no ofrecen razones en lo que incluya que a incrementos iguales del tiempo corresponden incrementos de la altura del nivel del agua. Se encuentran algunos estudiantes que seleccionan una curva creciente precisamente por el hecho de mostrar que la altura va creciendo. Pero incluso otros seleccionan las otras opciones dando muestras de no leer la dinámica de la relación que muestra la gráfica.

En una tarea semejante en la situación 2 (llenado dos) en la que se pedía describir las características de los recipientes, a partir de las gráficas dadas (apartado S2, pregunta 1.1)



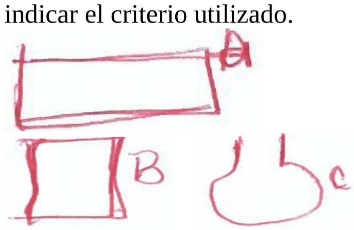
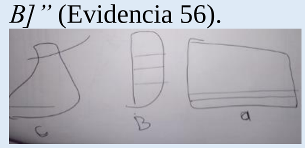
Grafica 6. Tomada de guía evaluativa dos, situación de llenado dos

Los tres casos de estudio relacionan la forma recta de la gráfica con recipientes de forma cilíndrica y la gráfica que no es recta con el recipiente no cilíndrico.

Las respuestas de los tres sujetos a esta tarea se relacionan a continuación

Tabla 11

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.1 de la situación de llenado dos.

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
"su llenado [del recipiente A] es uniforme, por eso está en recta, [con respecto] a C, crece, pero no de manera uniforme [y con respecto a] B está creciendo uniformemente la altura, los datos son iguales, el incremento es constante" (Evidencia 54).	"tienen diferente forma [los recipientes], empiezan con valores iniciales distintos, tienen la cantidad de baldes vertidos[iguales]" (Evidencia 55). Realiza los siguientes dibujos según las gráficas dadas, sin indicar el criterio utilizado. 	Realiza los siguientes dibujos y asocia las líneas rectas con los recipientes A y B y la línea curva con el recipiente C y hace la diferencia entre el A y el B cuando dice que el A *"está aumentando menos cantidad de agua que [el B]"* (Evidencia 56). 

	A la recta A asocia una vasija más ancha que a la B seguramente por tener presente la mayor inclinación de la recta B.	

Origen: Fuente propia

El caso Suj1 relaciona la forma recta de la gráfica con una variación uniforme de altura (*su llenado [del recipiente A] es uniforme, por eso está en recta*) y la curva con una variación no uniforme (*C, crece, pero no de manera uniforme*. Los sujetos 2 y 3 ofrecen razones en términos de la asociación directa que establecen con el mayor o menor ancho del recipiente.

En una tarea análoga a ésta en la situación 3 (ley de Hooke) en la que a partir de gráfica se pedía describir las características de los resortes (apartado S3, pregunta 1.1) los tres sujetos, al parecer, relacionan las gráficas rectas con la constancia de las variaciones del alargamiento del resorte con respecto a la cantidad de pesos que se suspenden de él.

La tabla muestra las respuestas ofrecidas por los tres sujetos

Tabla 12

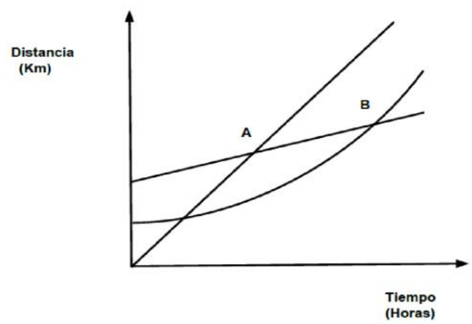
Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.1 de la situación 3 Ley de Hooke.

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
"los datos siempre serán constantes, para que sean [rectas las gráficas] significa que tienen un crecimiento constante, […] va subiendo constantemente" (Evidencias 57).	"En el resorte dependiendo del peso se estiraba, se alargaba dependiendo del peso, de la [rigidez] y dependiendo del espacio donde estaba; si estábamos en la tierra el resorte iba a estar más alargado y cuando estábamos en la luna el resorte iba a estar menos alargado" (Evidencias 58).	"los datos siempre serán constantes, para que sean [rectas las gráficas] significa que tienen un crecimiento constante, […] va subiendo constantemente" (Evidencias 59).

Origen: Fuente propia

El caso Suj1 y Suj3 hacen explicito que la forma recta de las gráficas implica una constancia en los incrementos de las variables. Sin embargo, el caso Suj2 no hace explicita esta relación. En este caso, sus apreciaciones ponen en evidencia que comprende la relación de dependencia entre las variables asociadas. Sin embargo, no hace explicita la constancia de las variaciones de las variables.

Con relación a la tarea de los móviles se pedía relacionar cada gráfica con el movimiento del auto que se mostraba en la representación tabular dadas (apartado S4, pregunta 2)



Gráfica 7. Tomado de situación 4 de movimiento rectilíneo

En esta tarea, los tres sujetos relacionan las gráficas rectas con los automóviles A y B y la que no es recta con el C. La tabla muestra las respuestas ofrecidas por los tres sujetos. Ver tabla 13 en la página siguiente.

El caso Suj1 toma como principal criterio de análisis el intercepto con Y, aunque indica que la forma de la gráfica (*se puede ver por el ascenso)* también sería otro indicador para asociar los autos con sus correspondientes gráficas. Por su parte, el caso Suj2, al parecer utiliza como único criterio de asociación entre los autos y su representación gráfica el intercepto con el eje Y. En cuanto al caso Suj3 hace mención de la constancia o no de los incrementos y teniendo en cuenta la variación de los mismos y, por tanto, la forma de las gráficas, así como también complementando este criterio con el de los interceptos con Y, realiza la respectiva relación entre los autos y su representación cartesiana.

Tabla 13

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 2 de la situación 4 de movimiento.

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
"[relacionando los puntos de corte con Y de las gráficas con los valores iniciales de la tabla] la que empieza en cero es B (…), la que le sigue, es cinco (señala el intercepto con Y de la gráfica que es una curva) (…) y la mayor (señala el intercepto de más valor) sería 10. Y esta que está en el medio es C, y también se puede ver por el ascenso (…) pero para sacarlo más rápidamente es por la inicial" (Evidencia 60)	"Esta línea [recta que parte del origen] sería el automóvil B (…) porque la distancia empieza desde cero (…), la distancia del automóvil C sería [la gráfica que no es recta] y la [otra gráfica del intercepto de más arriba] sería A" (Evidencia 61).	"yo elegí que el automóvil B [la recta que parte del origen], era el que iba subiendo de 10 en 10. El A sería [la recta que no parte del origen] porque empieza en 10 km y el C sería [la gráfica no recta] por lo que va aumentando cinco, diez, veinticinco, cincuenta" (Evidencia 62).

Origen: Fuente propia

Uno de los criterios utilizados para interpretar la representación gráfica es el análisis de interceptos con Y para realizar la asociación entre los autos y sus gráficas correspondientes. Esto se puede deber a que esta tarea, se resuelve más rápidamente con los valores de la variable dependiente, cuando la independiente es cero, pues se facilita más hacer el análisis en la tabla de un solo valor por variable en cada auto, que en lugar de analizarse la covariación lineal o no, con todos los valores. Sin embargo, los casos nivel alto y bajo son conscientes además que la forma de la gráfica revela la constancia o no de los incrementos y de acuerdo a ello también se puede hacer la asociación.

Por lo tanto, teniendo en cuenta los hallazgos mencionados en la comprensión de las representaciones cartesianas, se puede declarar que el sujeto nivel alto persiste en asociar la constancia de los incrementos con la forma de la gráfica y los sujetos nivel medio y bajo comprenden la representación cartesiana desde las condiciones fenomenológicas, asociando características propias del hecho empírico con la forma de la gráfica. Ahora bien, en la situación 4 (de movimiento) los casos focalizados además de tener en cuenta la constancia o no de los incrementos y, por ende, la forma de la gráfica, utilizaron un criterio adicional que fue los interceptos con el eje Y, pues permite que el procedimiento sea más rápido en la medida en que, en los datos dados en la tabla identifican el valor inicial de la variable dependiente. Por lo tanto, sus comprensiones son encaminadas a procesos simplificados, utilizando como vías de solución aquellas que les permitan diferenciar de manera rápida las representaciones cartesianas.

De este modo, se hace evidente el progreso de los tres casos al transcurrir la aplicación de la secuencia didáctica, especialmente en los sujetos nivel alto y bajo. El caso Suj1 (nivel alto), amplía su perspectiva de una representación gráfica, pues en la última situación tiene en cuenta la constancia o no de los incrementos de las variables, así como el criterio de los interceptos, mostrando así una comprensión más abarcadora. Por su parte, el caso Suj3 inicialmente no interpretaba correctamente la representación cartesiana de la relación de dos variables de una situación, que paulatinamente fue comprendiendo, pasando de una comprensión en términos del hecho empírico a una comprensión en términos de la variación de los incrementos y los valores de los interceptos con Y y su significado en la situación.

Indicador 4: Asocia la mayor o menor inclinación de la recta con la mayor o menor razón de cambio (rapidez del cambio de la variable dependiente con relación a la independiente)

En la situación uno de llenado se les solicita dibujar la forma que considera tendría la gráfica cartesiana si el tanque es como el de la siguiente figura dadas (apartado S1, pregunta 2.3)

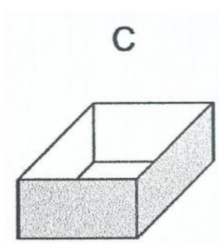
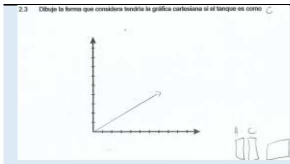
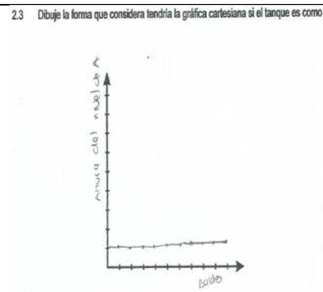
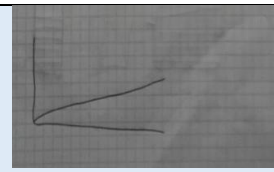


Tabla 14

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 2.3 de la situación uno de llenado.

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)

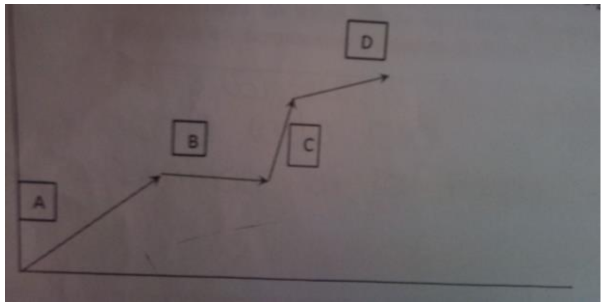
 "Si la recta está más pegada al [eje] x significa que […] está ascendiendo más lento, o sea, hay algún punto en que la recta va a ascender mucho y va a crecer, pero más lento que él [tanque] A" (Evidencia 63).	 (Evidencia 64).	 "porque va aumentando menos [que en el tanque A]…en la C [la gráfica es diferente] por lo que es más grande y su capacidad de recibir agua es mayor" (Evidencia 65).

Origen: Fuente propia

En el caso Suj1, se evidencia que comprende la relación de los incrementos de las variables, altura del nivel del agua y cantidad de baldes depositados, como constantes, además, tiene en cuenta el hecho de que la gráfica parte del origen dado a que cuando se han depositado cero baldes de agua en el tanque su nivel de altura es cero. También, reconoce la inclinación de la recta *(si la recta está más pegada al [eje] x)*, y la asocia con la razón de cambio, realizando su análisis a partir de las características de la gráfica, pues indica que la inclinación cada vez más cercana al eje x implica una rapidez menor que la del recipiente A. Se aprecia una diferencia en la forma de enunciar del caso Suj3 con relación al caso nivel alto. El Suj3 igualmente comprende la relación entre la inclinación de la recta y la rapidez de cambio de la altura del nivel del agua con respecto a la cantidad de baldes depositados. No obstante, su comprensión es en términos de las características de los tanques que se usan en el fenómeno del llenado (es más grande y su capacidad de recibir agua es mayor). Por su lado, el caso Suj2, comprende que la inclinación de la recta cada vez más cercana al eje x indica que la rapidez de cambio es cada vez menor en el recipiente C. Sin embargo, su gráfica indica que asume que cuando comienza el proceso de llenado, el tanque contiene alguna cantidad de agua.

Ahora se da paso a estudiar las respuestas a una tarea semejante a la Situación 1 (situación de llenado uno) en la Situación 4 (de movimiento rectilíneo uniforme).

En la tarea se solicitaba indicar el valor de verdad de cada una de las afirmaciones dadas a partir de la siguiente representación gráfica de un móvil que se desplaza con velocidad constante (apartado S4, pregunta 9).



Gráfica 8. Tomado de situación 4 movimiento rectilíneo

El caso Suj1 deja en evidencia la asociación que hace entre la inclinación de la recta y la rapidez de cambio de la distancia recorrida del auto respecto al tiempo, lo que se constituye en la velocidad que lleva. Por su parte, los casos Suj2 y Suj3 no relacionan la inclinación de las rectas con la velocidad del móvil. Más bien, asocian la longitud de cada recorrido con la velocidad.

Las repuestas de los tres casos se relacionan a continuación.

Tabla 15

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 9 de la situación cuatro de movimiento

Tarea	Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
Afirmación 1: El móvil lleva una menor velocidad en el recorrido A.	Falso “En el recorrido A no tiene su mayor velocidad. [En el recorrido C si la tiene] porque tiene el ascenso más rápido” (Evidencia 66).	Falso “Lleva mayor velocidad” “el recorrido de la distancia de la flecha es más larga” (Evidencia 67).	Verdadero “porque para ganar más velocidad el automóvil debería llevar mucho más impulso” “Si la línea fuera más larga lleva menos velocidad y si fuera más corta tendría más velocidad, por lo que hace el recorrido más rápido” (Evidencia 68).
Afirmación 2: El móvil experimenta una	Verdadero “porque es la que más está empinada, eso significa que su ascenso está siendo mayor. [Entre más inclinada	Falso “Recorre menor velocidad” (Evidencia 70).	Verdadero “Porque ya había llevado un gran impulso. Por lo cual el auto va ganando mucha más velocidad” (Evidencia 71).

mayor velocidad en el recorrido C	la recta] está [pausando el auto], está constante, no incrementa [incrementa poco]” (Evidencia 69).		
Afirmación 3: El móvil tiene una velocidad cero en el recorrido B	Verdadero “porque está así [de forma horizontal]” (Evidencia 72).	Falso “El móvil tiene un término medio” “Sería cero este [punto: el origen del plano], porque no tendría [longitud]. Este si tiene, el B” (Evidencia 73).	Falso “si estuviera en una velocidad cero, el auto no debería estar andando” (Evidencia 74).

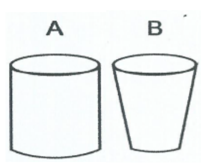
Origen: Fuente propia

El caso Suj1 indica que entre más inclinada esté la recta mayor será la rapidez de la distancia recorrida con respecto al tiempo (*su ascenso está siendo mayor).* De este modo, reconoce que la razón entre la distancia y el tiempo en cada uno de los recorridos es constante, pero además identifica que es mayor entre más inclinada esté la recta y entre menos lo esté, es menor la razón de cambio. Por su parte, el caso Suj2 no asocia la velocidad del móvil con la inclinación de la recta, sino con la longitud de la recta de cada recorrido. De esta manera, para Suj2 en el recorrido A la velocidad es mayor, tomando como criterio que es la recta de mayor longitud y el recorrido C es donde la velocidad es menor, por ser la recta de menor longitud. Además, afirma que la velocidad sería cero en el punto de origen de la representación cartesiana, pues la longitud del recorrido sería nula. Igualmente, el caso Suj3 relaciona la longitud de las rectas de los recorridos con la velocidad. Sin embargo, sus declaraciones indican que concibe el fenómeno como la salida de un auto de un punto de partida para llegar a un destino, considerando que el auto no es posible que se halla detenido, pues al ver la continuidad de las líneas para el significan continuidad en el movimiento real del auto. De este modo, en las comprensiones de Suj3 falta relacionar los incrementos de las distancias con respecto a los incrementos de los tiempos de un recorrido y comparar esta relación con los otros recorridos.

Por consiguiente, en este indicador se puede considerar que en la situación del llenado de los tanques los tres casos relacionan la inclinación de la recta con la mayor o menor rapidez de llenado del recipiente. Al parecer, esta relación se pudo hacer gracias a las características del fenómeno de llenado tales como el tamaño de la sección transversal de los recipientes, que al hacerse visibles les sugería pensar en la razón entre los incrementos de la altura del nivel del agua y los incrementos de los baldes vertidos de un tanque con respecto a otro. Ahora bien, en la situación de movimiento rectilíneo uniforme en un móvil se les dificultó más esta relación a los sujetos 2 y 3 asociaron la velocidad del móvil con la longitud de la recta de cada segmento.

Indicador 5: Anticipa la posible forma de la gráfica que representa la covariación a partir de las condiciones de la situación.

Las dos tareas relacionadas con este indicador consisten en a) dibujar la forma que considera tendría la gráfica cartesiana si el tanque es como el de la figura A y b) dibujar la forma que considera tendría la gráfica cartesiana si el tanque es como el de la figura B

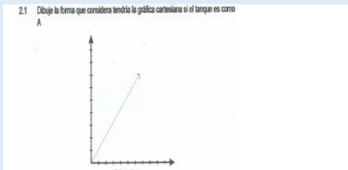
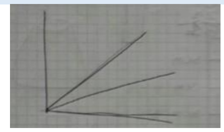
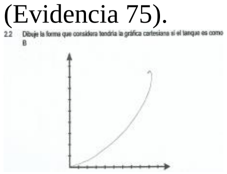


En la situación uno de llenado, los tres casos relacionan la gráfica cartesiana recta con la covariación de la altura del nivel del líquido y el tiempo de llenado en el caso en que el recipiente que se llena tenga la forma cilíndrica y en caso de que la forma sea de cono truncado (invertido) relacionan la covariación con la forma curva. Sin embargo, en el segundo caso se evidencian formas diferentes de comprender la situación de un sujeto a otro.

A continuación, se presentan las respuestas de los tres casos en dicha tarea:

Tabla 16.

Respuestas de los tres sujetos a preguntas 2.1 y 2.2 de la situación uno de llenado.

Tarea	Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
Tarea a: Dibujar la forma que tendría la gráfica cartesiana si el tanque es como el de la figura A	 “Si la forma [del recipiente es] cilíndrica [corresponde a] una recta en el plano" (Evidencia 75).	 (Evidencia 76).	 “iría aumentando la misma cantidad, por lo cual tendría que ir así [recta], subiendo” (Evidencia 77).
Tarea b: Dibujar la forma que tendría la gráfica cartesiana si el tanque es como el de la figura B	 *“la hubiera hecho más inclinada en* [la parte inicial de la gráfica] *que* [se va llenando] *más rápido y luego* [en la parte final de la gráfica] *se va formando una curva”* (Evidencia 78).	 (Evidencia 79)	 “empieza aumentando más, pero desde un punto cero, […] aumenta dos centímetros, dos, dos, dos y va disminuyendo” (Evidencia 80).

Origen: Fuente propia

En lo que respecta a la representación gráfica del recipiente no cilíndrico, solo el caso Suj3 comprendió, además de la no constancia de los incrementos, el sentido de la variación de los mismos y esto le permitió representar la representación gráfica correcta. No obstante, en los casos Suj1 y Suj2 no lo hicieron correctamente. El caso de Suj1 solo tuvo en cuenta que al no ser cilíndrica la forma del recipiente, la representación cartesiana correspondería a una parábola y aunque indica que la rapidez de cambio es mayor en la primera parte del llenado del recipiente por su forma más angosta en la parte inferior, continua su argumento teniendo en cuenta solamente que el resto de la gráfica debe corresponder a una parábola, la cual solo asumen en el sentido en el que la dibujó. Por su parte, Suj2 parece considerar que cuando se inicia el llenado, el recipiente ya contienen una cantidad de agua, pues el intercepto con Y de la gráfica no es cero, además, al igual que Suj1, no tiene en cuenta el sentido de la variación de los incrementos.

Con los datos estudiados con relación al indicador <<anticipa la posible forma de la gráfica que representa la covariación a partir de las condiciones de la situación>> se constata que los tres casos anticipan la forma de la representación gráfica adecuada cuando el recipiente es cilíndrico, teniendo como referente dicha forma o la constancia de los incrementos en las variables relacionadas. Ahora bien, cuando el recipiente no es cilíndrico, el caso Suj3 comprende que la representación cartesiana corresponde a una curva con el sentido correcto de las variaciones de los incrementos. Mientras que Suj1 y Suj2 no aciertan en la representación cartesiana porque solo se limitan a asociar la forma no cilíndrica del recipiente con la no constancia de los incrementos sin tener presente el ritmo del crecimiento.

Categoría cuatro: Reconoce cuando se da la constancia de la razón de cambio y cuando no

Indicador 1: Relaciona el valor de la razón de cambio con el incremento de una variable respecto a la otra y reconoce su significado en la situación.

En la situación uno de llenado se presentan tres tareas relacionadas con la razón de cambio y su significado en las condiciones del fenómeno

En primer lugar, se les solicita indicar si es correcta a o no la afirmación: cuando la forma como varía el nivel del agua con relación al número de monedas es constante, ocurre que la razón de cambio $\Delta A/\Delta N$ (incrementos en altura del nivel del agua/incrementos en número de monedas) es constante.

Tabla 17.

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.1afirmación tres de la situación uno de llenado uno.

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
"Verdadero, si ΔA y ΔN es constante, por clara razón también lo sería la razón de cambio debido a que es ΔA dividido por ΔN" (Evidencia 81).	*"no es correcta, porque en ejemplos anteriores a veces el nivel del agua y de monedas era constante y a veces no era en delta de A y en delta de N*" (Evidencia 82).	Es correcto "*si metemos una moneda va a aumentar lo mismo a si metemos dos monedas"* "*aumentaría lo mismo la altura del agua con la cantidad de monedas que se entren […]; si metemos una moneda aumenta 3 cm, pero si metemos dos monedas, va a aumentar seis, […] está aumentando lo mismo"* (Evidencia 83).

Origen: Fuente propia

El caso Suj1, relaciona la constancia de los incrementos en las variables altura del nivel del agua y número de monedas con la constancia en el resultado de la división de los incrementos de la variable dependiente y los de la independiente. De este modo, relaciona la razón de cambio con el proceso aritmético que implica la división de las dos variables de la situación. Por su lado, Suj3 relaciona la constancia de los incrementos de las variables con la razón de cambio constante a través del análisis de la situación desde el hecho empírico, tomando en consideración que el aumento de la altura del nivel del agua es en la misma cantidad por cada moneda que se introduce. Ahora bien, Suj2, no asocia la constancia de los incrementos de las dos variables con la razón de cambio constante.

En segundo lugar, se les solicita que indique si es posible calcular el nivel que alcanzaría el agua cuando se hayan introducido 41 monedas en una probeta cilíndrica, si se conocen la siguiente información:

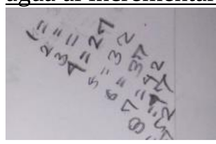
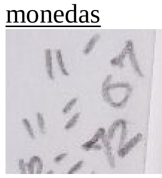
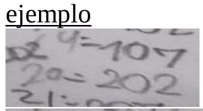
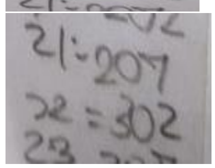
a) La razón de cambio ΔA/ΔN es constante y vale 5cm /moneda

b) Cuando se han introducido 4 monedas el nivel alcanzado por el agua es27 cm

A continuación, se presentan las respuestas de los tres casos a esta tarea.

Tabla 18.

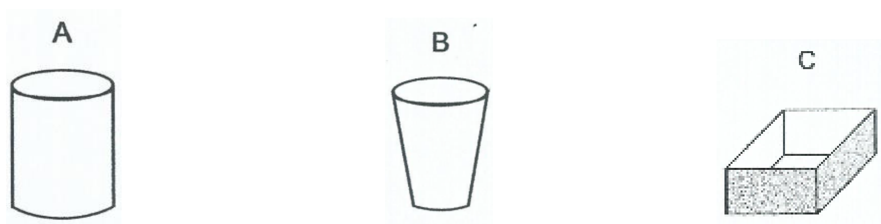
Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.2 de la situación uno de llenado.

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
Es posible. El nivel alcanzado es de 276.75 cm *"debería estar en 20 [cm la altura del nivel del agua] y no en 27*[como lo indicaba la segunda información dada], *entonces yo dije, bueno hagamos la división 27/4, queda 6,75[…] a medida que se le vaya incrementando una moneda va a aumentar 6.75, […] la razón de cambio pues es la división, […]entonces lo que hice fue multiplicar 41 por 6.75 y me dio 276,75"* (Evidencia 84).	Es posible. El nivel alcanzado es de 3002 cm Suma incrementos constantes de cinco en la medida del nivel del agua al incrementar una moneda.  Comete estos errores: Repite dos veces el incremento para 11 monedas  Realiza erradamente el algoritmo de la suma para cantidades mayores a 100, obteniendo, por ejemplo   Así, erradamente llega a que, para 41 monedas ingresadas el nivel del agua alcanza 3002 cm (Evidencia 85).	Es posible. El nivel alcanzado es de 212 cm *"…* [según la información dada en el literal A, se aumenta] *cinco cm por cada moneda […] entonces sería 41 por 5 […] y si tenemos en cuenta lo de la* [información dada en el literal B], *cuando se han introducido cuatro monedas, el nivel del agua ha alcanzado 27 cm. El 7cm es con lo que inicia el agua […] si se lo sumamos* [al 205, el resultado es], *212 la altura del nivel del agua"* (Evidencia 86).

Origen: Fuente propia

El caso Suj1 reitera su comprensión de la razón de cambio constante como la constancia en la división de los incrementos de la variable dependiente con respecto a la independiente. Sin embargo, en esta segunda tarea no da la respuesta acertada porque no identifica que la covariación de la tarea analizada es de tipo lineal no proporcional. Por su parte, el caso Suj3 además de relacionar el valor de la razón de cambio con la constancia de los incrementos de una de las variables con respecto a la otra, identifica que la covariación característica de la tarea en cuestión es de tipo lineal no proporcional. Por su lado, el caso Suj2 en esta tarea si asocia el valor de la razón de cambio correctamente con las características de la situación. No obstante, al utilizar un proceso aditivo, que es extenso, comete errores en sus cálculos.

En cuanto a la tercera tarea, relacionada con la razón de cambio y su significado en la situación de llenado uno, se les solicita indicar para cuál o cuáles de las formas A, B o C, de los siguientes recipientes, se puede decir que la razón de cambio altura del nivel del agua y la cantidad de baldes es constante y para cuál o cuáles no.



Se relacionan seguidamente las respuestas de los tres casos

Tabla 19

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 2.4 de la situación uno de llenado uno.

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
“*Para la A y la C, la razón de cambio es constante porque el ΔA y ΔN es constante, así que la razón de cambio será igual. En cambio, para la B no lo sería porque su incremento ΔN no es constante, o sea que su razón de cambio no lo será”* (Evidencia 87).	*“Tanque A, si es constante porque la forma del tanque hace que el incremento pueda acomodarse y sea constante.* *Tanque B, no es constante porque la forma del tanque hace que el incremento varíe.* *Tanque C si es constante porque el tanque siempre se queda de una misma forma”* (Evidencia 88).	*“son constantes en la A y en la C, ya que* [la A tiene forma de cubo] *y la A es un cilindro, entonces aumentaría lo mismo. En cambio, la B empieza con una mayor cantidad y luego empieza a cambiar su subida”* (Evidencia 89).

Origen: Fuente propia

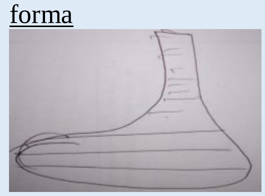
Los tres sujetos reconocen que en los tanques A y C la razón de cambio de la altura del nivel del agua con respecto a la cantidad de baldes vertidos es constante y para el tanque B no se presente este hecho. El caso Suj1, al parecer recurre a la interpretación que hace de la razón de cambio constante como el resultado constante de la división del valor de los incrementos de una variable con respecto a la otra. En cambio, los casos Suj2 y Suj3 solo tienen en cuenta la variación constante o no de los incrementos de las variables sin establecer la relación de los incrementos de una de las variables con respecto a la otra.

Ahora se da paso a estudiar las respuestas a tareas semejantes a esta de llenado (situación 1) en una situación similar de llenado (situación 2). En la tarea, se les solicita que indiquen si la razón de cambio entre la altura del nivel del agua y la cantidad de baldes vertidos es constante o no en el recipiente C de la representación cartesiana dada, usada en la categoría 3 (indicador 5) (Evidencias 46-48 y 54-56, apartados S1 y S2, preguntas No 1.1 afirmación cinco y 1.1 respectivamente).

Los tres sujetos indican que la razón de cambio de la altura del nivel del agua con respecto a la cantidad de baldes vertidos no es constante para la representación cartesiana del recipiente

Tabla 20

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.5 de la situación dos de llenado.

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
No es constante la razón de cambio *“los datos no son constantes”*(Evidencia 90)	No es constante la razón de cambio *“los datos no van a ser los mismos por lo que suben, yo me guío más por la forma, por el ángulo de la línea. Como este,* [el recipiente A, cuya gráfica es una línea recta], *serían datos constantes, digamos, suben al mismo valor digamos. Pero en este,* [el recipiente C] *representado por una línea curva como que no* [serían constantes]” (Evidencia 91).	No es constante la razón de cambio El recipiente C tendría la siguiente forma  *“como la boquilla es diferente va aumentando más cantidad”* (Evidencia 92).

Origen: Fuente propia

El caso Suj1 determina la no constancia de la razón de cambio, al recurrir al único criterio de la no constancia de los incrementos, al parecer le es suficiente reconocer que la variación de los datos no es constante para que el resultado de la división entre los incrementos de las dos variables asociadas tampoco lo sea. En los casos Suj2 y Suj3, nuevamente, identifican la constancia o no de las variaciones de la altura del nivel del agua y la cantidad de baldes vertidos para determinar si la razón de cambio es o no constante.

Por otra parte, en la situación de la ley de Hooke (situación 3), se da paso a estudiar las respuestas de los estudiantes, relacionadas con identificar la constancia o no de la razón de cambio. En la tarea se les solicitaba indicar si la razón de cambio entre la longitud del resorte y la fuerza aplicada es constante en ambos resortes de la representación cartesiana dada.

Los casos Suj1 y Suj3 indican que la razón de cambio entre la longitud del resorte y la fuerza aplicada es constante en los dos resortes representados en la gráfica cartesiana dada. Por su parte, Suj2 indica que la razón de cambio no es constante.

Tabla 21

*Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.5 de la situación tres Ley de Hooke***.**

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
<u>Si es constante la razón de cambio</u> *"por eso están en recta ambos"* (Evidencia93).	<u>No es constante la razón de cambio</u> *"No entendí" "la cantidad de peso de los resortes creo que no varía, pero la longitud por el peso creo que si varía"* (Evidencia 94).	<u>Si es constante la razón de cambio</u> *"Si es constante, solo que una tiene mayor rigidez"* (Evidencia 95).

Origen: Fuente propia

En las enunciaciones de los sujetos 1 y 2 se puede evidenciar que asocian la recta de la representación cartesiana a la covariación de la longitud de los resortes con respecto a las fuerzas porque es constante la razón de cambio entre estas dos magnitudes. En cuanto al caso Suj3, además muestra explícitamente que la mayor o menor inclinación de la recta, cada resorte dependiendo de la mayor o menor rigidez. Nuevamente, el caso Suj2, no establece relación de los incrementos constantes de la longitud de los resortes con respecto a los incrementos en la cantidad de pesos que se suspenden de estos, por lo que al parecer no comprende la noción de razón de cambio.

Ahora se da paso a estudiar las respuestas a tareas semejantes en la situación de movimiento rectilíneo uniforme (situación 4). En una primera tarea, se les solicita que indiquen para cuál o cuáles de los tres carros se puede afirmar que la razón de cambio entre las distancias y los tiempos es igual, tomando en cuenta la información dada en el registro tabular, esta tarea corresponde al anexo 1, página ___, pregunta ___

Las respuestas dadas por los tres casos fueron las siguientes

Tabla 22.

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 6 de la situación cuatro de movimiento.

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
"la A y la B, que tienen una razón de cambio iguales, constantes" *"… se divide la velocidad final [*se refiere al incremento de la distancia*] con el tiempo final"* (Evidencia 96). halla los incrementos de la distancia y el tiempo, luego hace la división y afirma que la razón de cambio es 10 para el móvil A, que para el móvil B se presentaría lo mismo.	Para los automóviles A y B *"porque en el A siempre su constante ha ido aumentando 10 kilómetros, en la B ha sido 20 km, pero en la C la distancia del automóvil empieza aumentando 5km, […] ya después 15, después sucesivamente, […]. Razón de cambio sería cómo los datos van cambiando"* (Evidencia 97).	Para el auto B *"el auto B y el A, pero si hubiera empezado desde cero […] si hubiera empezado desde cero hubiera un incremento constante"* (Evidencia 98).

Origen: Fuente propia

El caso Suj1, nuevamente recurre al cálculo aritmético de la razón de cambio, haciendo la división entre el incremento en la distancia y el incremento en el tiempo transcurrido. Por su parte el caso Suj2 solo acude a la constancia de la variación de la variable dependiente para indicar constancia en la razón de cambio. Suj3, por su lado, acude a la constancia de los incrementos y asocia este hecho a la razón de cambio. Sin embargo, sigue manifestando como condición de constancia en los incrementos que el valor de la variable dependiente sea cero cuando el de la independiente también lo es.

En una segunda tarea, se pedía identificar el o los carros para los que se puede afirmar que para incrementos iguales de tiempo se tienen incrementos iguales de distancia, y en las que no se puede hacer tal afirmación, a partir de la siguiente representación tabular

Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5
Distancia automóvil A (km)	10	20	30	40	50	60
Distancia automóvil B (km)	0	20	40	60	80	100
Distancia automóvil C (km)	5	10	25	50	85	130

La tabla muestra las respuestas ofrecidas por los tres sujetos

Tabla 23

Respuestas de los tres sujetos a preguntas 1 y 5 de la situación cuatro de movimiento.

Tarea	Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
Seleccionar los carros en los que se puede afirmar que para incrementos iguales de tiempo se tienen incrementos iguales de la distancia	<u>Contesta que los carros A y B</u> *"para el A tiene un incremento de 10 km y el B que aumenta de 20 en 20"* (Evidencia 99).	*"es el automóvil B porque [...] el tiempo empezaba en cero, la distancia del automóvil tiene que empezar también en cero y tiene que ir aumentando sucesivamente, con su constante de tiempo"* (Evidencia 100).	*"Los autos (A) y (B) siempre van aumentando la velocidad cada hora por lo cual se encuentran en la misma hora"* *"…este empieza con 10 km [el auto A] y este empieza con cero [el auto B], luego se encuentran acá [cuando t=1 hora] este aumenta a 20 km hora [el auto A], cuando ya en primera hora cuando el automóvil B tiene la*

			misma distancia" (Evidencia 101).
Seleccionar los carros en los que no se puede afirmar que para incrementos iguales de tiempo se tienen incrementos iguales de la distancia	Contesta C *"C. Para el carro C no tiene incrementos iguales, por eso en la gráfica tiene forma de parábola"* (Evidencia 102).	Autos A y C *"… debería incrementar [la distancia del auto A], cero, diez, como en esta [el cero de la distancia del auto B] y en esta [distancia de auto C]nos dice que en el tiempo cuando están en cero han recorrido ya alguna distancia"* (Evidencia 103).	Contesta B *"los automóviles [A y C] empiezan su recorrido en 10 y en 5 cuando el tiempo está en cero, pero el automóvil B empieza en cero y va aumentando su velocidad al mismo tiempo".* *"va aumentando [el auto B] la velocidad al mismo tiempo, 2, 4, 6, 8, 10* (se equivoca, los valores son 20, 40, 60, ...) *En cambio, acá [auto A] se supone que el cambio tendría que empezar: cero (realza la voz), diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, y así sucesivamente"* (Evidencia 104).

Origen: Fuente propia

El caso nivel alto indica que los incrementos de distancia y tiempo son constantes para los autos A y B y especifica su valor. Y para el auto C indica la no constancia de los incrementos y la asocia con la representación cartesiana que no corresponde a una línea recta.

El caso nivel medio, al parecer escoge, en la primera tarea, el carro B porque considera que cuando el tiempo es cero la distancia también es cero y se da una constancia en los incrementos. En la segunda tarea, selecciona los autos A y C como aquellos en los que a incrementos iguales de tiempo no corresponden incrementos iguales de distancia porque, cuando el tiempo es cero la distancia no es cero ("*…en el tiempo cuando están en cero han recorrido ya alguna distancia")*. Al parecer relaciona la constancia de incrementos cuando se incrementa el mismo valor en las variables siempre y cuando se comience desde cero, tanto en la variable independiente como en la dependiente.

En el caso del nivel bajo, aunque las respuestas que ofrece no parecen ser muy consistentes, se aprecia nuevamente la confusión del caso nivel medio, exigir que la distancia sea cero para tiempo igual cero, para aceptar que a incrementos iguales de una variable corresponden incrementos iguales de la otra.

Comparando con la estadística del curso, de los 19 estudiantes que participaron en el estudio, 5 más identifican que en los carros A y B se cumple que, a incrementos iguales de tiempo, se tienen incrementos iguales de distancia, al igual que el caso nivel alto y para el auto C no se presenta la constancia de incrementos. Por ejemplo, Suj9 dice: “para el carro A y B tienen incrementos iguales de tiempo y de distancia” y para el auto C, “en la tabla y la gráfica, no muestran incrementos constantes de tiempo y distancia”. Por otro lado, 13 estudiantes, incluidos los casos nivel bajo y medio, no son consistentes en el criterio aplicado para indicar los autos en los que se cumple que a incrementos constantes de tiempo se tienen incrementos constantes de distancia y en los que a incrementos constantes de tiempo NO se tienen incrementos constantes de distancia. Por citar un caso, Suj19 indica que en los autos A y B se cumple que a incrementos iguales de tiempo se tienen incrementos iguales de distancia porque “empiezan con números parecidos” y ante la pregunta ¿para cuál o cuáles de los autos se cumple que a incrementos iguales de tiempo no se tienen incrementos iguales de distancia?, su respuesta es: “Si es verdad ya que el incremento del tiempo no tiene nada que ver con la distancia” (Evidencias 105 y 106). Por lo tanto, la mayoría de estudiantes del curso no fueron consistentes en el criterio aplicado para determinar si la constancia de una de las magnitudes implicaba constancia o no en la otra magnitud relacionada.

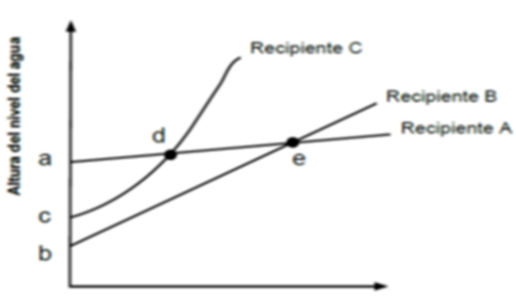
Por consiguiente, con respecto a la categoría <<reconoce cuándo se da la constancia de la razón de cambio y cuándo no>> se deja en evidencia que los tres sujetos asocian la razón de cambio constate con situaciones de tipo covariacional lineal. Sin embargo, en sus comprensiones se dilucidan elementos diferentes de su implícitos en su significado. Para el caso Suj1 se puede afirmar que comprende la razón de cambio como la razón entre incrementos correspondientes. El caso Suj3, en ocasiones coordina el valor del incremento de la variable dependiente respecto a la independiente, pero no como razón (como proceso aritmético) sino, al parecer, apoyándose en el contenido empírico de la tarea, incluso, aunque reconoce la constancia de los incrementos de cada variable por aparte, niega la constancia de la razón de cambio, porque el punto inicial de la tabla no es (0,0). El caso Suj2 le falta hacer la coordinación entre el valor de estos incrementos, solo tiene en cuenta la constancia de las variaciones de las variables, sin correlacionarlas.

Categoría cinco: Interpreta la representación cartesiana de dos o tres gráficas: el punto de intercepto de las dos o tres gráficas, el intercepto con Y, y la mayor o menor inclinación de las rectas

Indicador 1: Asocia el punto de intercepto de dos o tres gráficas de la representación cartesiana, con el punto en el cual los valores de las variables relacionadas coinciden.

En la situación de llenado dos (Situación 2) los tres casos relacionan el punto de intercepto de dos gráficas de la representación cartesiana con el punto en el cual los valores de la variable dependiente coinciden. A continuación, se presentan respuestas a una tarea relacionada con interpretar en puntos de intercepto de dos o tres gráficas.

Se les solicita indicar el significado del punto "e" en el que se cortan las dos gráficas correspondientes a los recipientes A y B, teniendo en cuenta la siguiente representación cartesiana.



Gráfica 9. Tomada de situación dos de llenado.

Tabla 24

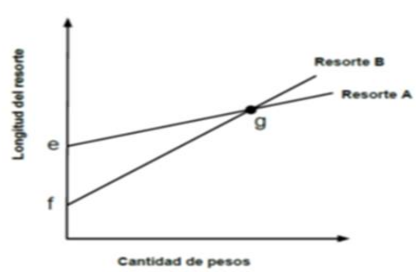
Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.4 de la situación dos de llenado.

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
"este punto significaría un punto en el que se encontraron, los dos [recipientes] *quedaron con […] la misma altura, a pesar de la forma…"* (Evidencia 107).	*"en el punto "e" el recipiente A y el recipiente B tienen la misma altura del nivel del agua"* (Evidencia 108).	*"en algún tiempo del llenado los dos recipientes tuvieron que tener la misma cantidad* [refiriéndose a la altura del nivel del agua]" (Evidencia 109).

Origen: Fuente propia

Los tres casos asocian ese punto a la coincidencia de la altura del nivel del agua de los dos recipientes, sin tomar en consideración que la cantidad de baldes vertidos también le corresponde el mismo valor. Ahora bien, el caso Suj3 no toma en consideración la variable independiente, pero indica la coincidencia de la altura del nivel del agua en un mismo tiempo, involucrando esta otra magnitud. Al parecer, su comprensión de la tarea es desde la óptica de la situación real y por eso vincula otros elementos que en esa tarea no se requieren.

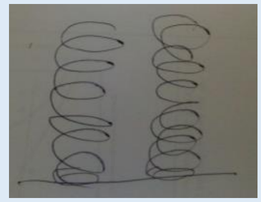
Ahora se da paso a estudiar las respuestas a una tarea semejante a esta de llenado (situación 1) en la situación de ley de Hooke (situación 3). En la tarea se les solicita indicar el significado del punto "g" en el que se cortan las dos gráficas correspondientes a los resortes A y B, teniendo en cuenta la siguiente representación cartesiana:



Gráfica 10. Tomada de situación tres Ley de Hooke

Tabla 25

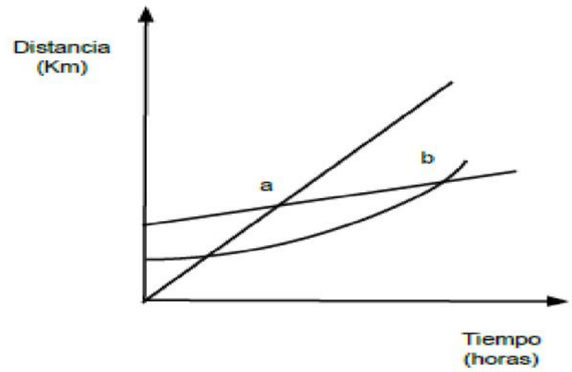
Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.4 de la situación tres Ley de Hooke.

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
"es el punto donde el resorte A y el resorte B llegaron a la misma longitud" *"… digamos, cuando se añadió cinco pesos llegaron a 30 [cm], entonces ambas están en esa longitud"* (Evidencia 110).	*"el punto de intersección de 'g' significa […] que la longitud del resorte es la misma […] en este punto* [el 'g']*"* (Evidencia 111).	*"El punto en el que se encuentran los dos resortes"*  Al realizar el dibujo dice: *""en algún tiempo los dos resortes se van a encontrar"* (Evidencia 112).

Origen: Fuente propia

El caso Suj1 indica que el punto de corte entre las dos gráficas correspondientes a los resortes A y B pertenece al punto en el que los valores de la longitud de los resortes y la cantidad de pesos que se suspenden de él coinciden en los dos resortes. En esta tarea acude a la representación gráfica y a los elementos implícitos de este registro de representación para dar el significado del punto de corte de las dos gráficas, lo cual no tuvo en cuenta en la tarea semejante a esta en la situación de llenado. Por su parte, el caso Suj2, asocia el punto de corte de estas dos gráficas con el punto en el que los dos resortes tienen la misma longitud. De este modo, nuevamente asocia al significado de este punto de corte el valor en el que coincide la variable dependiente de la situación, sin tener en cuenta la independiente. Y en cuanto al caso Suj3, también tiene en cuenta solamente la coincidencia en el valor de la variable dependiente, sin tomar en consideración la independiente. Además, Suj3 ofrece su explicación desde el fenómeno real, lo que ilustra con el dibujo de los resortes a una misma longitud.

Ahora se da paso a estudiar las respuestas a dos tareas semejantes a esta de ley de Hooke (situación 3) en la situación de movimiento rectilíneo uniforme (situación 4). En la tarea se les solicita: a) indicar qué información ofrece el punto “b” y b) indicar qué información ofrece el punto “a” de la siguiente representación cartesiana:



Gráfica 11. Tomada de situación cuatro de movimiento.

Tabla 26.

Respuestas de los tres sujetos a preguntas 3 y 4 de la situación cuatro de movimiento.

Tarea	Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
Tarea a: Indicar la información que ofrece el punto “b”	*“la recta A y la parábola C se cruzan, en un tiempo indicado tienen la misma distancia"* (Evidencia 113).	*“en este punto han transcurrido la misma distancia, […] el automóvil A y el automóvil C”* (Evidencia 114).	*“que en alguna parte el automóvil A y el automóvil C se encuentran en algún lugar de su recorrido”* (Evidencia 115).
Tarea b: Indicar la información que ofrece el punto “a”	*“es lo mismo, pero en cambio es en el punto C, o sea, es el punto en el que en el mismo tiempo tienen la misma distancia, en el ejemplo de* [estar <u>los autos en</u>] *la carretera, […] en este punto se cruzan* [<u>los autos</u>]*”* (Evidencia 116).	*“el automóvil A y el automóvil B han transcurrido en ese punto la misma distancia”* (Evidencia 117).	“*los dos carros, el A y B, se encontraron en un punto antes de llegar a* [<u>su destino</u>]*”* (Evidencia 118).

Origen: Fuente propia

En el caso Suj1 relaciona el punto de corte entre las dos gráficas como el punto en el que los dos automóviles en el mismo tiempo han llegado a la misma distancia, haciendo relación al valor en el que coinciden las dos variables asociadas. Por su lado, Suj2 solo denota la coincidencia del valor de la distancia de los dos automóviles relacionados en las gráficas que se cruzan. Y en el caso Suj3, pensando en términos de la realidad del fenómeno, asocia este punto de corte como el punto del recorrido en el que se encuentran el par de autos asociados a las gráficas.

Los datos estudiados con relación a este indicador < <asocia el punto de intercepto de dos o tres gráficas de la representación cartesiana, con el punto en el cual los valores de las variables relacionadas coinciden >> permiten afirmar que el caso nivel alto comprende que el punto donde se cruzan dos gráficas corresponde a la coincidencia en los valores de las dos variables relacionadas. Aunque inicialmente (en la situación de llenado) Suj1, solo relacionó la variable dependiente, en las tareas de las situaciones posteriores si indicó la coincidencia de los valores en ambas variables relacionadas. En cambio, el caso nivel medio solo identifica la coincidencia de los valores de la variable dependiente, sin tener en cuenta la independiente, en el significado que le atribuye al punto donde se cruzan las gráficas. Por su parte, el caso nivel bajo igualmente solo reconoció la coincidencia de los valores en el punto de corte de dos gráficas, de la variable dependiente. Además, nuevamente ofrece sus respuestas desde la perspectiva del hecho empírico. Parece ser que los estudiantes omiten la coincidencia de los valores de la variable independiente en el punto donde se cruzan dos gráficas.

Indicador 2: Relaciona los puntos de intercepto con Y con el valor inicial de la variable independiente.

En la situación de llenado dos (Situación 2) los tres casos relacionan el punto de intercepto con Y con el valor inicial de la variable dependiente. A continuación, se presentan respuestas a una tarea relacionada con el punto de intercepto con el eje Y.

Se les solicita indicar cuál de los tres recipientes tiene el menor nivel de agua al empezar el llenado, teniendo en cuenta la representación cartesiana utilizada en el indicador anterior.

Los tres sujetos comprenden que el recipiente B comienza con menor altura del nivel del agua

Tabla 27

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.2 de la situación dos de llenado.

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
EL recipiente B *"el corte con Y es el agua inicial que tienen todas las rectas, […] entonces el B es el que inicia con menor […]. El que inicia con mayor altura del nivel del agua es el A, porque inicia más alto que todos"* (Evidencia 119).	*"El recipiente B. Lo deduzco por ver la gráfica"* (Evidencia 120).	EL recipiente B *"empieza menor que todos estos [los otros dos interceptos con Y]"* (Evidencia 121).

Origen: Fuente propia

El caso Suj1 explicita que el corte con el eje Y se refiere al valor inicial de la altura del nivel del agua y compara los interceptos de las tres gráficas y comprende que el de menor valor es el correspondiente al recipiente B. Por su parte, Suj2 compara los puntos de corte que ve en la gráfica y reconoce que el del recipiente B indica que el nivel del agua al empezar el llenado era menor con respecto a los otros dos recipientes, aunque no explicita los elementos de la gráfica que toma en cuenta para su respuesta. Igualmente, Suj3 asocia el punto de corte de menor valor a aquel que corresponde al recipiente B, aunque no ofrece mayores explicaciones.

Ahora se da paso a estudiar las respuestas a una tarea semejante a esta de llenado dos (situación 2) en la situación de ley de Hooke (situación 3). En la tarea se les solicita identificar cuál de los dos resortes tiene una longitud menor cuando no están estirados, teniendo en cuenta a representación cartesiana utilizada en el indicador 1 de la categoría 5.

Tabla 28

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.2 de la situación tres Ley de Hooke

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
EL resorte B *"el B inicia más bajo que el A"* (Evidencia 122).	*"El resorte B, por verlo en la gráfica"* (Evidencia 123).	EL resorte B *"porque está empezando desde más bajo"* (Evidencia 124).

Origen: Fuente propia

Los tres sujetos indican que el resorte B es el que tiene una longitud menor cuando no hay alargamiento en el. Suj1 y Suj3 indican que es así porque es el punto más bajo, el que está más cerca al punto de origen del plano cartesiano, luego de comparar los dos interceptos con Y. En cuanto a Suj2 al parecer, también hace la comparación entre los interceptos que ve en la gráfica y selecciona el correspondiente al recipiente B. De manera que, los tres sujetos justifican superficialmente su respuesta.

Los datos estudiados con relación al indicador << relaciona los puntos de intercepto con Y con el valor inicial de la variable dependiente >> permiten afirmar que los tres casos comparan los valores de los puntos de corte con el eje Y en una representación cartesiana de dos o tres gráficas e identificar el mayor o menor valor de la variable dependiente estudiada en cada situación. El caso nivel alto hace explicito este significado, mientras que los casos nivel medio y bajo son superficiales en sus justificaciones.

Indicador 3: Identifica la mayor o menor inclinación de las rectas con la mayor o menor rapidez de variación y las asocia correctamente con la situación experiencial

En la situación de llenado dos (Situación 2) los tres casos no identifican la mayor o menor inclinación de las rectas con la mayor o menor rapidez de variación y no las asocian correctamente con la situación experiencial. A continuación, se presentan respuestas a una tarea relacionada con interpretar la mayor o menor rapidez de cambio en la situación dada.

Se les solicita indicar en cuál de los tres recipientes el nivel del agua sube más rápido a medida que se vierte el contenido de los baldes, teniendo en cuenta la representación cartesiana utilizada (ver gráfica 9) en el indicador 1 de la categoría 5.

Tabla 29.

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.3 de la situación dos de llenado.

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
El recipiente C *"depende de la forma, pero se ve que su crecimiento será mayor"* (Evidencia 125).	El recipiente C *"tiene mayor alargamiento la línea"* (Evidencia 126).	El recipiente C *"pues empezó con más cantidad de agua y terminó con menos baldes"* (Evidencia 127).

Origen: Fuente propia

El caso Suj1 no da una justificación clara de su elección, mientras que los casos Suj2 y Suj3 relacionan la mayor o menor rapidez de cambio con la longitud de la línea de la representación gráfica.

Ahora se da paso a estudiar las respuestas a una tarea semejante a esta de llenado dos (situación 2) en la situación de ley de Hooke (situación 3). En la tarea se les solicita indicar cuál de los dos resortes se estira con mayor facilidad, teniendo en cuenta a representación cartesiana utilizada en el indicador 1 de la categoría 5.

Tabla 30

Respuestas de los tres sujetos a pregunta 1.3 de la situación tres Ley de Hooke.

Suj1 (alto)	Suj2 (medio)	Suj3 (bajo)
"el resorte B como se ve en la gráfica es el que tiene mayor alargamiento" (Evidencia 128).	*"el resorte B sería el que tiene mayor longitud, pues se estira más"* (Evidencia 129).	*"el de menor rigidez"* (Evidencia 130).

Origen: Fuente propia

Los sujetos 1 y 2 seleccionan el resorte B aduciendo que tiene mayor estiramiento. Por su parte, Suj3 nuevamente recurre a los hechos para dar cuenta de una propiedad que supone coordinación.

Los datos estudiados con relación al indicador << identifica la mayor o menor inclinación de las rectas con la mayor o menor rapidez de variación y las asocia correctamente con la situación experiencial >> permiten aseverar que los estudiantes de este grado asocian la rapidez de cambio con la longitud de las líneas de la representación gráfica. De modo que la mayor o menor longitud de la gráfica indica la mayor o menor razón de cambio en cada situación

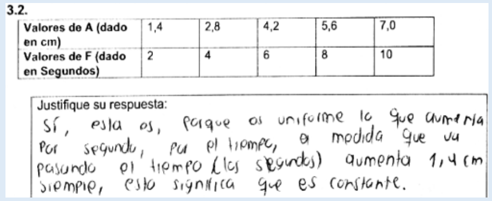
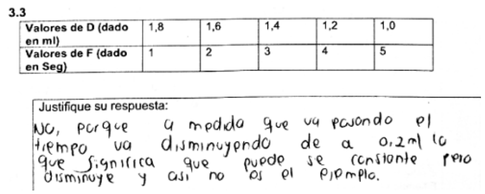
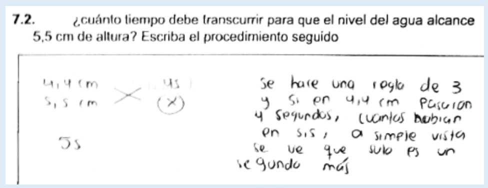
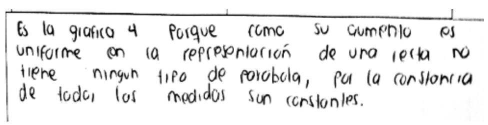
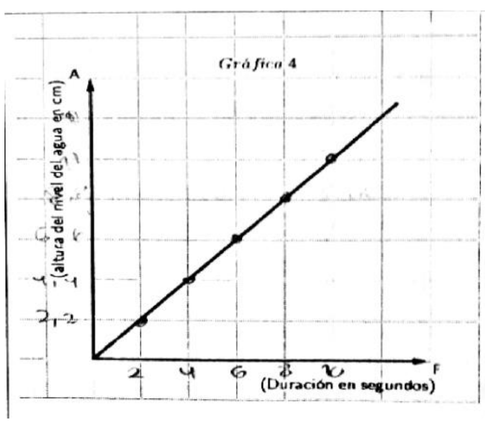
Por lo tanto, en esta categoría consistente en interpretar la representación cartesiana de dos o tres gráficas, los tres sujetos comprendieron el punto de intercepto de dos o tres gráficas como el punto en el cual los valores de las variables relacionadas coinciden. Sin embargo, les hace falta identificar la mayor o menor inclinación de las rectas con la mayor o menor rapidez de variación y asociarla correctamente con la situación experiencial.

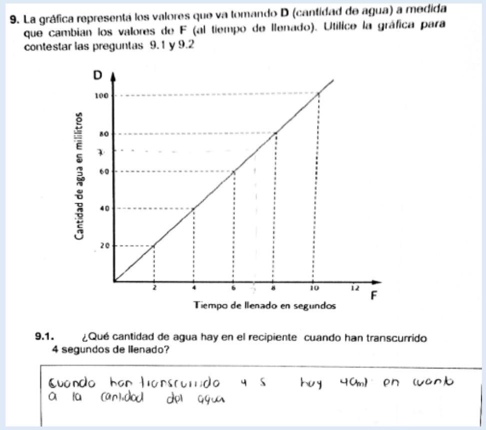
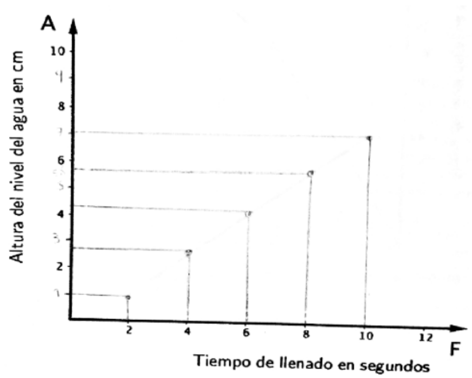
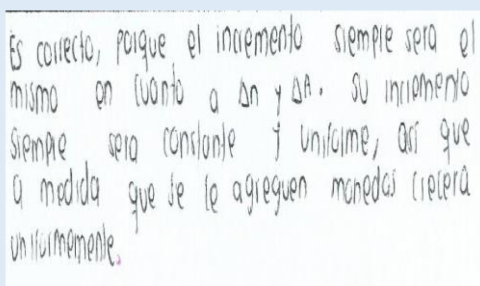
Anexo 4: EVIDENCIAS DE RESULTADOS DE ANÁLISIS

Se utilizan algunos códigos para hacer referencia a cada uno de los sujetos que intervienen, así: DM: docente Mónica, DY: docente Yully, DS: docente Sandra, 1A: Sujeto 1A, 2I: Sujeto 2I y 3H: Sujeto 3H.

Tabla 1: Sujeto 1 A.

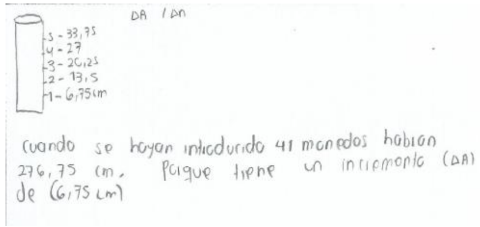
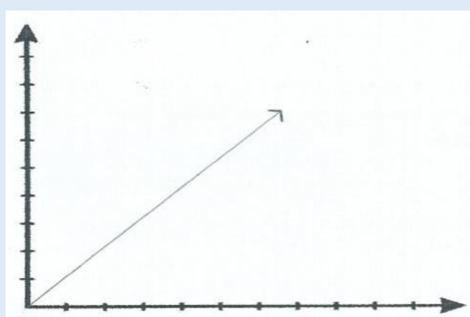
TAREA	EVIDENCIA	RESPUESTA ESCRITA	RESPUESTA VERBAL	OBSERVACIÓN
Prueba inicial Pregunta 1	7	1. En la tabla aparecen las letras A, B, C, D, E, F. En cada caso diga si los valores que representa cada letra varían o permanecen constantes mientras el llenado del recipiente. Justifique cada respuesta dada. Valores representados por: A (la altura del nivel de agua) Escriba si cambian o no los valores de la medida: Si Justifique su respuesta: Porque a medida de que va cayendo mayor contidad de agua aumenia su altura, por la forma del recipiente, la altura sube.		Categoría 1 Indicador 1
Pregunta 2	10	2. A continuación, se dan algunos pares de medidas, para cada caso diga si los valores de alguna de las medidas cambian a medida que cambian los valores de la otra medida, o si por el contrario los valores de estas medidas no se relacionan entre sí. Justifique la respuesta. Valores representados por: A (altura del nivel de agua) y F (tiempo transcurrido) Escriba si una medida cambia o no con los cambios de la otra medida: Si Justifique su respuesta: Claro que cambia, porque entre más tiempo más agua caera y creceria la altura.		Categoría 1 Indicador 1
Pregunta 3 Opción 1	18	3.1. Valores de A (dado en cm): 1,2 / 2,5 / 3,9 / 5,4 / 7,0 Valores de F (dado en Segundos): 1 / 2 / 3 / 4 / 5 Justifique su respuesta: No, debido a que pasa cada segundo y no es uniforme, Porque va aumenlando así: de 1,2 a 2,5 = 1,3 luego de 2,5 a 3,9 es 1,4 y ai va aumenlando, no es uniforme, así que esta no es.		Categoría 2 Indicador 1

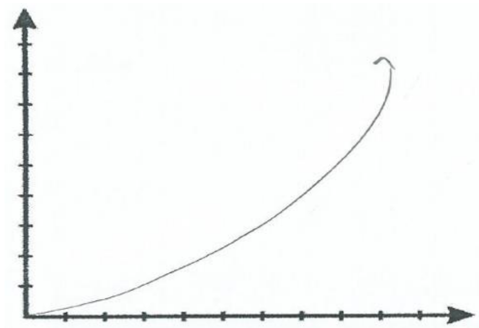
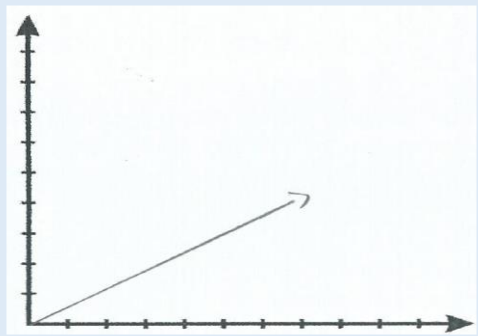
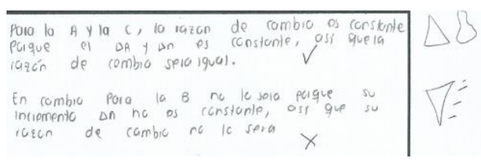
<table>
<tr><td>Pregunta 3
Opción 2</td><td>21</td><td>
3.2.
<table>
<tr><td>Valores de A (dado en cm)</td><td>1,4</td><td>2,8</td><td>4,2</td><td>5,6</td><td>7,0</td></tr>
<tr><td>Valores de F (dado en Segundos)</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr>
</table>
Justifique su respuesta:
Sí, esta es, porque es uniforme lo que aumenta por segundo, por el tiempo, a medida que va pasando el tiempo (los segundos) aumenta 1,4 cm siempre, esto significa que es constante.</td><td>Categoría 2
Indicador 1</td></tr>
<tr><td>Pregunta 3
Opción 3</td><td>24</td><td>
3.3
<table>
<tr><td>Valores de D (dado en ml)</td><td>1,8</td><td>1,6</td><td>1,4</td><td>1,2</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>Valores de F (dado en Seg)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
</table>
Justifique su respuesta:
No, porque a medida que va pasando el tiempo va disminuyendo de a 0,2ml lo que significa que puede ser constante pero disminuye y así no es el ejemplo.</td><td>Categoría 2
Indicador 1</td></tr>
<tr><td>Pregunta 7.2</td><td>37</td><td>
7.2. ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que el nivel del agua alcance 5,5 cm de altura? Escriba el procedimiento seguido
4,4 cm — 4s
5,5 cm — (x)
5s
Se hace una regla de 3 y si en 4,4 cm pasaron 4 segundos, cuantos habían en 5,5, a simple vista se ve que sólo es un segundo más</td><td>Categoría 2
Indicador 3</td></tr>
<tr><td>Pregunta 8</td><td>49</td><td>
Es la gráfica 4 porque como su aumento es uniforme en la representación de una recta no tiene ningún tipo de parábola, por la constancia de todas las medidas son constantes.

</td><td>Categoría 3
Indicador 3</td></tr>
</table>

Pregunta 9	40			Categoría 3 Indicador 1 y 2
Pregunta 10	43			Categoría 3 Indicador 1 y 2
Situación 1 Llenado uno Pregunta 1.1 Afirmación uno	1		**1A:** "Correcto, porque el incremento siempre será el mismo en cuanto a incremento del incremento de la altura […]" **DM:** Pues piensa en la situación […], ¿siempre será constante? **1A:** "Pues siempre será constante y conforme así cambiara a medida se le agreguen más monedas siempre constantemente, entonces digamos la probeta si tú, si tu pones […] si esta de forma	Categoría 1 Indicador 1

			cilíndrica, significa que siempre va crecer de igual forma, siempre de la misma cantidad”	
Afirmación dos	4	Es correcto porque el incremento de un si puede ser el mismo pero la altura osea su crecimiento ya no sería igual, no tiene el mismo incremento como sería en una probeta cilindrica	**1A:**Sí, eso es lo que yo dije, lo que siempre vamos a ver es que cuando esta cilíndricamente va a crecer constantemente, porque depende mucho de la forma no, en cambio esta como inicia (señalando la C), se va a ver un incremento, pero digamos aquí en esta parte (señala la parte sombreada de C) va a ser constante tal vez, pero cuando empiece a crecer y empiece a crecer ya no será constante, porque va aumentar y ya no será lo mismo, igual que en el círculo aquí va ser menor (parte baja de la probeta), aquí va ser mayor (parte media de la probeta, **[…] o sea, va ascender y a descender.** **DM:** si tú en el plano cartesiano dibujaras como queda la gráfica cuando es cilíndrica, como queda aquí (señalando las gráficas A, B, y C, […] más o menos como que gráficas te daría. **1A:** pues a ver, digamos que esta es la gráfica (traza el cuadrante uno del plano) la cilíndrica siempre estará recta, bueno y depende si está en cero […] (señalando la A) esta inicia del mayor a, bueno digamos que inicia en cero, si inicia en cero va iniciar del mayor, o sea, va crecer va crecer, pero a medida que, o sea se va volver más chiquita. Va ascender, pero se va volver más chiquita. Y esta digamos iniciamos más grande (señala la C) esta inicia más grande y empieza es hacer esto (traza grafico en el plano) […] todas estas (señala las tres probetas) son forma de parábola y estas que son cilíndricas son rectas)	Categoría 1 Indicador 1
Afirmación tres	81	Cuando la probeta es. cilindrica el incremento es constante entonces la afirmación sería correcta pero no siempre tendria un incremento igual, debido a que la probeta cambia. Si Δn incrementa, claro que ΔA incrementa, pero no de igual forma.	“Yo puse falso, (lee la respuesta dada), o sea si la probeta es cilíndrica el incremento si es será constante […], el incremento no siempre va ser igual, el incremento depende de la forma.”	Categoría 4 Indicador 1

Afirmación cuatro	15	falso, porque en esta probeta va a haber un decrecimiento, y los datos de esta tabla solo asciendiendo siempre. los datos, el nivel del agua llega un punto en que debe mantener un mismo nivel y no crecer tan rapido, pero no lo hace.	"Falso, porque en esta probeta debe haber un decrecimiento, acá (señala probeta A), va haber un decrecimiento va tener una cantidad de agua mayor y a medida que va creciendo, aunque se le van aumentando unas monedas, van hacerse más chiquitos va a disminuir, entonces habrá un decrecimiento, entonces la tabla estaría bien si iniciara en 15 y terminara en 5, pero pues no así no es. […] En esta es en la que yo dije que me había equivocado, ya me acorde, pues porque si va crecer, porque claro que tiene que crecer, digamos acá inicia en 5, entonces el crecimiento siempre será mayor, por ejemplo, acá de a tres, entonces de a tres yo puse que esta tabla estaba bien. O sea, no va decrecer, sino que va seguir creciendo"	Categoría 2 Indicador 1
Afirmación cinco	46	verdadero, porque tiene un incremento no constante pero va asciendiendo, lo que en la grafica seria una parabola.	"Verdadero porque el vasito como es así más o menos (lo dibuja en el papel) acá va tener un aumento (señala la parte inferior de la probeta), es más fácil llenar esta parte entonces va ser más rápido llenar, pero mire que va creciendo y ya no está en recto, igual constante y sé que va […]los datos, bueno si hubiera una tabla significaría que los datos acá (señala la gráfica cartesiana) van medio constantes y se diferencia mucho porque es más fácil llenar esta parte que esta (señalando el dibujo de la probeta)"	Categoría 3 Indicador 3

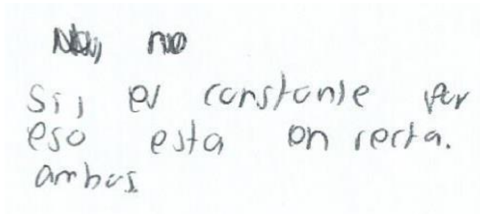
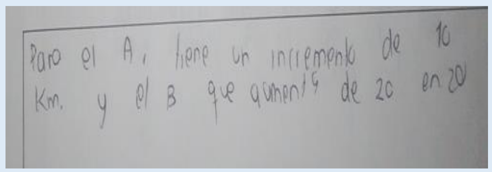
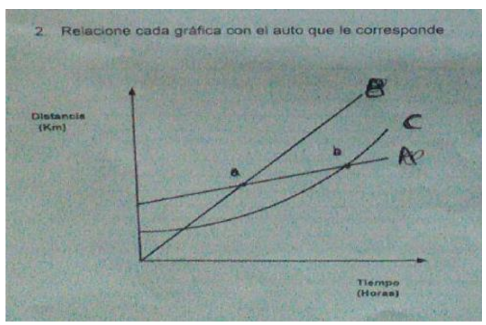
Pregunta 1.2	84		“Lo que hice fue, o sea, la probeta es cilíndrica, significa que el crecimiento siempre será igual, entonces aquí lo que nos dice es que a medida que se le va metiendo una moneda va aumentando de 5 en 5 (dibuja la probeta e indica el nivel de 5 en 5), cuenta 5,10,15, pero lo que dice es que cuando se le han introducido cuatro monedas el nivel alcanzado por el agua es 27 cm, entonces yo dije bueno si fuera como de 5 en 5 como dice que es, entonces acá seria 20, 25, entonces una, dos, tres cuatro, entonces acá en cuatro monedas según lo que dice que vale a 5 cm, entonces debería estar en 20 y no en 27, entonces yo dije bueno hagamos la división, 27 / 4 queda 6,7 . 6,75, ya la había hecho. Entonces yo dije, bueno lo que vamos hacer, es que cuando haya una moneda va haber 6,75 para ser más exactos, cuando haya dos, va ver, y cuando haya cuatro monedas va haber 27. Vamos a ver si es lo que dice, a medida que se le vaya incrementando una moneda, va aumentar a 6,75. Y la razón de cambio ya, no es este incremento, si, no y la razón de cambio pues es la división o sea es esta división. […] entonces lo que hice fue multiplicar 41 X 6,75 y me dio 6, 73 6,75 y porque tiene este incremento, porque es lo que yo considero, […]”	Categoría 4 Indicador 1
Pregunta 2.1	75		“Si la forma era cilíndrica iba ser una recta en el plano”	Categoría 3 Indicador 5

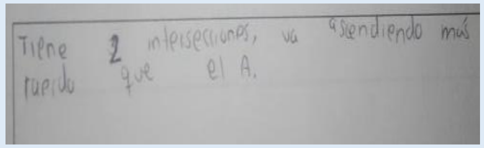
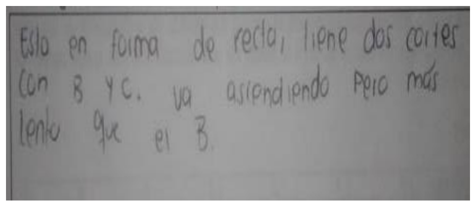
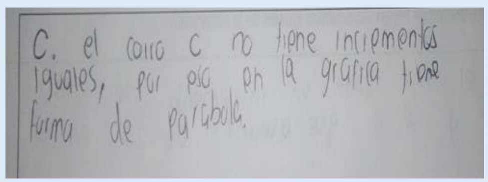
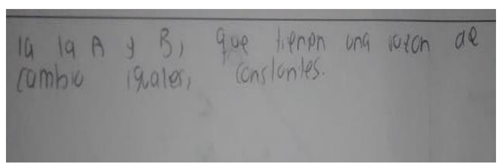
Pregunta 2.2	78		“Acá dice que tiene o sea esta parte(señala la parte baja de la probeta) es más chica y es más difícil de llenar y empieza en cero y bueno va teniendo su ascenso pero no es tan rápido, la verdad la había hecho algo así como, como la deje inclinada porque esta parte es más difícil de llenar (señala la parte baja del plano), esta parte es más fácil de llenar (señala la parte superior de la probeta) y esta parte es más difícil de llenar (señala la parte superior de la gráfica que realiza […]”	Categoría 3 Indicador 5
Pregunta 2.3	63		“Bueno lo mismo que la A, o sea si es cilíndrico, por decir así, si es recto, tiene la misma forma se va llenar constantemente, pero digamos esto que es más amplio (señala la probeta), es más difícil de llenar, entonces lo que yo hice es si la recta está más pegada al corte x significa que está ascendiendo más lento, ojala algún punto de la recta va ascender mucho y va crecer, pero es más lento que el A. […] dependiendo del cierre (diámetro)”	Categoría 3 Indicador 4
Pregunta 2.4	87		“Yo puse lo que hemos dicho muchas veces, si es cilíndrica es constante, si es cuadrado, pero tiene siempre la misma forma de para arriba es constante, y la B no va ser constante si la forma es así”	Categoría 4 Indicador 1

Situación 2 Llenado dos Pregunta 1.1	54	A. su llenado es uniforme, Por eso esta en recta. C. crece pero no de forma uniforme B) Esta creciendo uniformemente la altura, los datos son iguales, el incremento es constante.	“Bueno, que se puede, digamos en la A, que es de las probetas se puede ver que digamos el recipiente A depende o sea como es su recta, se puede ver que se podría decir que su forma es así (dibuja el recipiente que está a la derecha en la foto), o sea es cilíndrica, pero es gruesa porque va ascendiendo, pero muy despacio. El recipiente B se puede ver que su, su forma es cilíndrica y delgada ¿por qué? Porque pues el agua, la altura del nivel del agua va creciendo más rápidamente, que pues las otras (dibuja el recipiente del centro, que está en el dibujo de la foto). Y el recipiente C se podría decir que su forma es por decirlo así por la forma en que está en la gráfica (dibuja un tercer recipiente con forma no cilíndrica)”	Categoría 3 Indicador 3
Pregunta 1.2	119	B. Empieza con un ΔA inicial más baja.	**A1:** “Bueno con las probetas se puede ver que, o sea la inicial casi siempre es igual porque las rectas parten de un mismo punto, las líneas, pero se puede ver digamos que tienen una altura inicial ya dada ¿no? Entonces digamos eh, el B sería el que inició con menos **DM:** ¿menos qué? **A1:** “Menos agua” **DM:** ah o sea es la cantidad de líquido inicial que hay en el recipiente **A1:** “Sí. Este inicio (señala el punto de intercepción con el eje Y del recipiente B), el corte con Y es el agua inicial que tienen am todas las rectas, todas las que están en la gráfica, entonces el B es el que inicia con menor, pues se ve pues que tiene mayor crecimiento que el A ¿no? El que inicia con mayor altura del nivel del agua es el A, porque inicia más alto que todos, significa que inició con la mayor cantidad de altura, pero a pesar de que inicia con la mayor, pues se ve que el B es mucho mayor. Y digamos el C está después del B"	Categoría 5 Indicador 2

Pregunta 1.3	125	El recipiente C. Depende de la fuma pero se ve que su crecimiento sera mayor.	"yo puse que pues, la verdad te diría que es el B porque está en forma de recta, pero digamos se puede ver en la gráfica que el que mayor está, tiene mayor crecimiento es el C porque va subiendo, yo diría que es el C, está subiendo como de forma, o sea más, más rápido que el B. Porque el B digamos si completamos la gráfica iría acá(extiende la recta del recipiente B), en cambio acá (señala, sombrea la gráfica del recipiente C y lo extiende un poco) no sé, yo siento que subiría más rápido, creo"	Categoría 5 Indicador 3
Pregunta 1.4	107	El punto dondo se cruzan la A y B	**A1:** "O sea, significa el punto donde se cruzan A y B, o sea donde, en la gráfica hay un punto en donde llegan a la misma altura, ambos están en la misma". **DM:** pero en cuanto a la situación real, de los recipientes que tú estás llenando, depositando baldados de agua, ¿cómo lo asocias este punto de corte de esta situación? **A1:** "Que llega un punto, yo lo pondría que digamos que llega un punto en el que ambas, o sea a pesar de la forma, ambas tienen la misma cantidad, o sea, siempre van a tener la misma cantidad de agua porque va a ser constante la misma cantidad de agua, que se va echando, pero, o sea este punto significa que esto es la altura ¿no? (señala el eje Y). Este punto significaría un punto en el que se encontraron, los dos quedaron con la misma, en el mismo, la misma altura, a pesar de la forma y todo. Pues acá se ve que el B tiene mayor crecimiento y el A no, pero igual este es el punto donde ambas quedaron con la misma cantidad de agua, de, o sea de la misma altura".	Categoría 5 Indicador 1
Pregunta 1.5	90	No, los datos no son cunstantes.	"Yo diría que es como el cambio que tiene cada una". La estudiante justifica que para el resorte la razón de cambio es constante por que los incrementos de los valores asociados al alargamiento y a los pesos cambian	Categoría 4 Indicador 1

			proporcionalmente, lo que no sucede en el caucho el cual tiene razón de cambio variable”	
Situación 3 Ley de Hooke Pregunta 1.1	57	los dos en un punto se encuentran, su alargamiento es unifome para los dos, pero la b crece más, el peso es mayor.	**DM:** La docente refiere la pregunta 1 de la sesión 5, en la hay seis afirmaciones las cuales pueden ser verdaderas o falsas y se solicita a los estudiantes indicar la respuesta con su respectiva justificación. Afirmación número 2. “Si al resorte de rigidez R le sujetamos el doble del peso inicial, ahora vas a duplicar el peso ¿El alargamiento se reduca a la mitad? **A1:** “Falso, eso sería lo que pasaría en el primero si se quita la mitad del peso se reduciría, pero ahora como estamos es añadiendo el doble el alargamiento se duplicaría, por eso es falso” **A1:** “El alargamiento del resorte A no es igual al del B, ya que el resorte A es más grueso, o tiene un resorte más grueso”	Categoría 3 Indicador 3
Pregunta 1.2	122	El B. Inicio mas bajo que el A	“La inicial podría verse afectado por el resorte, yo lo diría así por la forma del resorte, o sea digamos este que esta con menos alargamiento podría decirse ” “cuando no hay alargamiento el B es más bajo”	Categoría 5 Indicador 2
Pregunta 1.3	128	El Resorte B, se ve que tiene un mayor alargamiento.	“Se ve que es el B a pesar de que haya iniciado con menor, el resorte B como se ve en la gráfica es el que tiene mayor alargamiento”	Categoría 5 Indicador 3
Pregunta 1.4	110	Donde se cruzan.	“Es el punto donde el resorte A y el resorte B llegaron a la misma longitud”	Categoría 5 Indicador 1

Pregunta 1.5	93		**DM:** La docente referencia la pregunta 4.4 de la sesión 5 que relaciona la razón de cambio para un resorte y un caucho a los que se les aplica la misma fuerza. “Si yo te digo a ti razón de cambio, tú en que piensas, a que asocias el concepto razón de cambio” **A1:** “Yo diría que es como el cambio que tiene cada una ” La estudiante justifica que para el resorte la razón de cambio es constante por que los incrementos de los valores asociados al alargamiento y a los pesos cambian proporcionalmente, lo que no sucede en el caucho el cual tiene razón de cambio variable”	Categoría 4 Indicador 1
Situación 4 Movimiento Pregunta 1	99		**A1:** “El A y el B porque el aumento era siempre igual […] aumento sucesivo, […] como constante, digamos este (señala el A) siempre va ir de 10 en 10y este (señala el B) de 20 en 20 pueda que tengan inicios distintos y todo, pero en cambio el C (lo señala, mientras dice) acá aumenta 5, acá aumenta 15, acá aumenta, acá aumenta 25, acá aumenta 35 y pues es muy cambiante, […]”	Categoría 4 Indicador 1
Pregunta 2	60		**A1:** “siempre iniciando por digamos esta es la inicial no, (encerrando los valores iniciales para los tres autos, en las tablas de datos), esto es la inicial (encierra los puntos de corte de cada grafica sobre el eje y), esto bueno, la que inicia en cero es B, después por obvia razón se saca la conclusión de que esta es B (indica la primera grafica de arriba hacia abajo), la que le sigue es cinco (encierra el segundo punto sobre el eje y), entonces esta es mayor que esta (encierra el primer punto sobre el eje de arriba hacia abajo y luego el segundo punto), entonces la mayor seria diez (toco el primer punto sobre el eje y) entonces ponemos acá que la mayor es A, y esta que está en el medio (indica el punto en la gráfica) es esta.	Categoría 3 Indicador 3

			y pues también se puede ver por el ascenso, pero para sacarlo más rápido se mira pues por la inicial”	
Pregunta 3	113	 Tiene 2 intersecciones, va asiendiendo más rapido que el A.	**A1:** “Es cuando la recta A y la parábola B se cruzan, en este momento, en un tiempo indicado tiene la misma distancia, en un punto pude que cambien, pero en este punto tienen la misma, el mismo tiempo la misma distancia. […] se encuentran los dos, en una misma distancia y en un mismo tiempo”	Categoría 5 Indicador 1
Pregunta 4	116	 Esto en forma de recta, tiene dos cortes con B y C. va asiendiendo pero más lento que el B.	**A1:** “Lo mismo, es lo mismo, pero en cambio es en el punto C, o sea , es el punto en el que en el mismo tiempo tienen la misma distancia”	Categoría 5 Indicador 1
Pregunta 5	102	 C. el como C no tiene incrementos iguales, por eso en la grafica tiene forma de parabola.	**A1:** “Dije que era el C porque digamos el tiempo siempre va aumentar de uno en uno, entonces es constante ese incremento, en cambio como acabe de explicar el automóvil C no va tener constante, digamos, seria uniforme al tiempo, si creciera o sea, digamos de cinco en cinco seria, pero como este no lo hace por eso es que no es constante al tiempo”	Categoría 4 Indicador 1
Pregunta6	96	 la la A y B, que tienen una razon de cambio iguales, constantes.	**A1:** “Bueno la razón de cambio es el incremento […], lo que era el incremento final dividido la distancia […] digamos 2 y 4, entonces el tiempo final seria 2 y la distancia final seria 20, entonces se divide […] entonces la razón de cambio es 10 y si lo hacemos con A y B su razón de cambio seria constante su razón de cambio podemos ver que nunca será igual que el B, en cambio el C la razón de cambio podemos ver que nunca va ser constante”	Categoría 4 Indicador 1

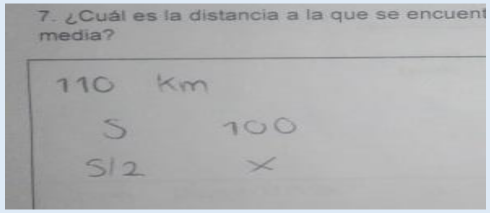
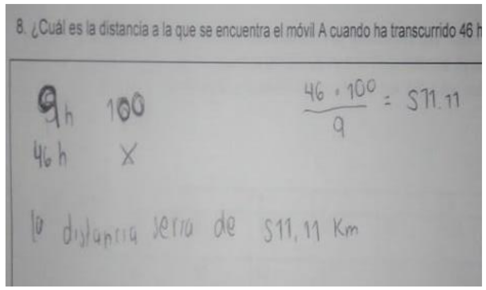
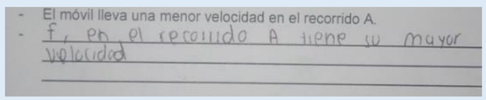
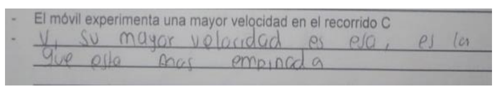
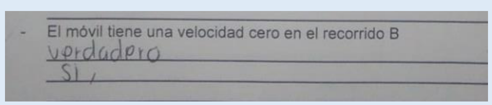
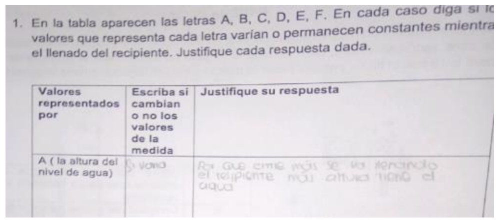
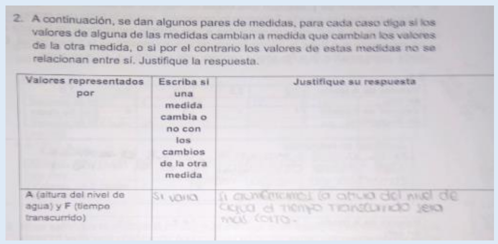
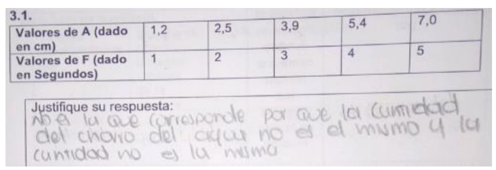
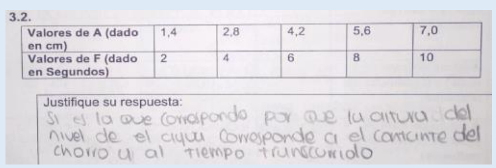
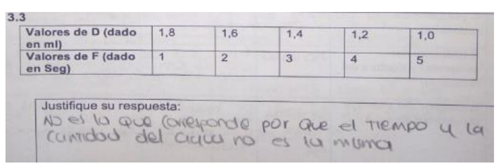
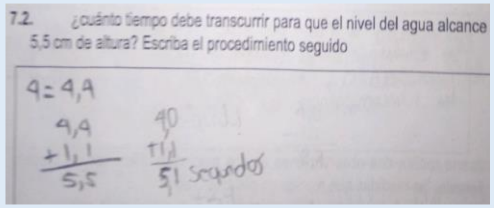
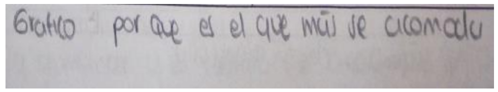
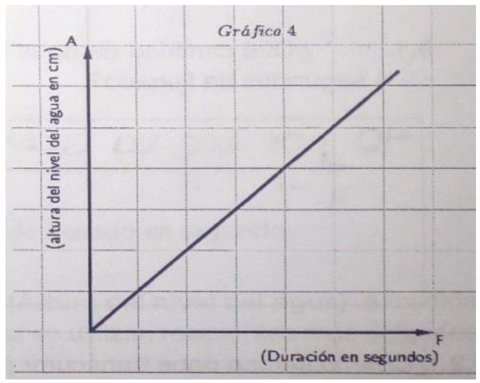
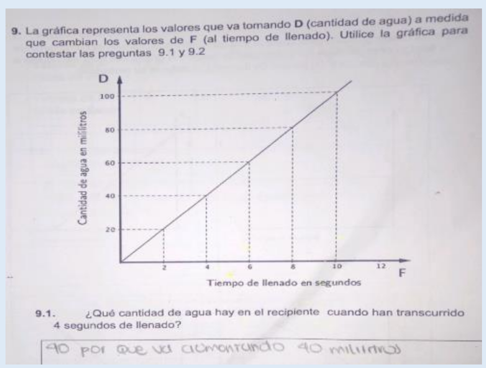
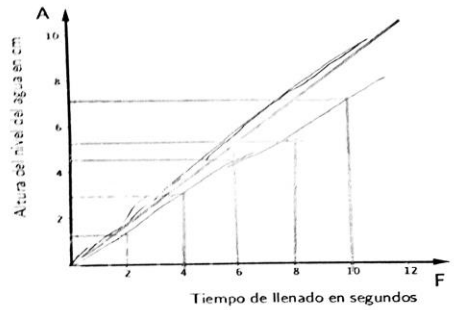
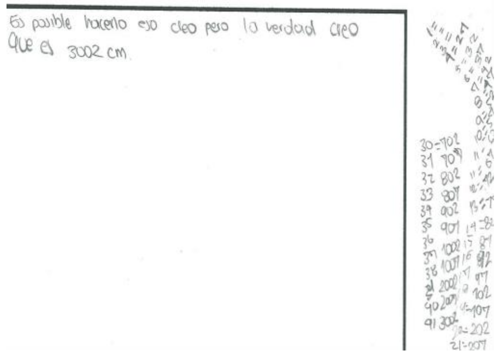
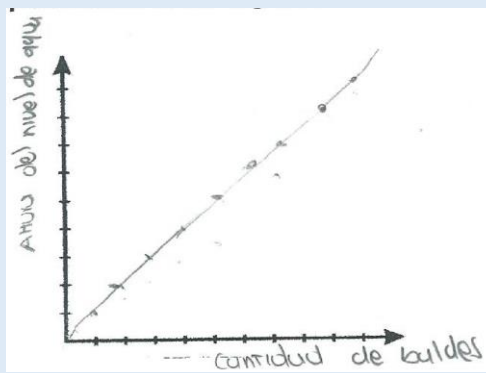
Pregunta 7	31		**A1:** "Bueno sin regla de tres podemos ver […] está incrementando de 20 en 20, pues cuando llegue a 6 va tener un incremento de 20 entonces va estar en 120 como ya lo tenía acá, y si lo sacamos pues tenemos que hacer un cinco y medio, […] de seis y cinco y medio es la mitad entre cinco y seis, lo que sería 110 o también se puede hacer una regla de tres si no que un poco más rara	Categoría 2 Indicador 3
Pregunta 8	34		**A1:** "El móvil A podemos que va incrementar siembre va incrementar de 10 en 10 entonces 6 será 70, 7 será 80. 8 será 90 y 9 será 100, entonces yo cogí este el 9, como que era el 100 como para que fueran más exactos los datos o sea para hacerlo más rápido. Bueno, yo cogí el 9 que era 100, entonces y puse, si en nueve horas hay cien kilómetros, y pregunta en 46 horas ¿Cuánto habrá? Y pues 46 x 6 / 9 y ya. […]"	Categoría 2 Indicador 3
Pregunta 9 Afirmación 1 Móvil A	66		"Falso, porque en el recorrido A no tiene su mayor velocidad, […] en el C porque tiene el ascenso más rápido"	Categoría 3 Indicador 4
Pregunta 9 Afirmación 2 Móvil C	69		**A1:** "Verdadero, porque es la que está más empinada"	Categoría 3 Indicador 4
Pregunta 9 Afirmación 3 Móvil B	72		**A1:** "Verdadero, porque esta así (traza una recta horizontal)"	Categoría 3 Indicador 4

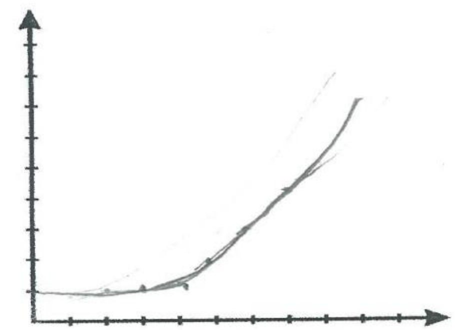
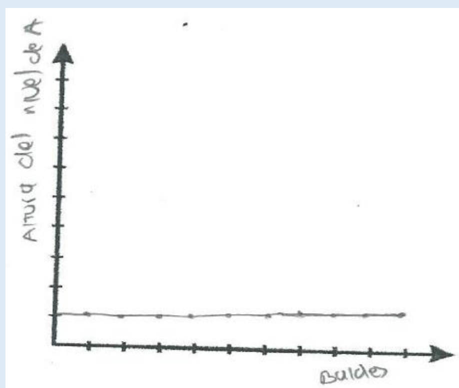
Tabla 2: Sujeto 2I.

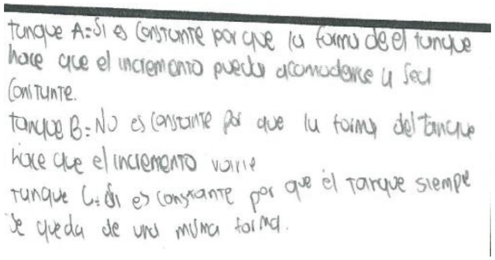
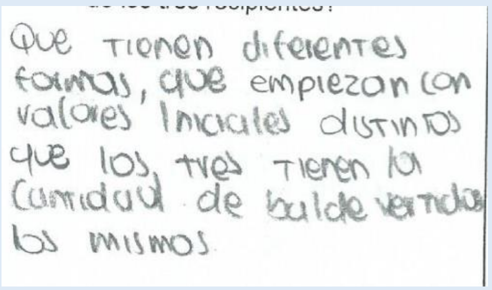
TAREA	EVIDENCIA	RESPUESTA ESCRITA	RESPUESTA VERBAL	OBSERVACIÓN
Prueba inicial Pregunta 1	8	 1. En la tabla aparecen las letras A, B, C, D, E, F. En cada caso diga si lo[s] valores que representa cada letra varían o permanecen constantes mientra[s] el llenado del recipiente. Justifique cada respuesta dada. Valores representados por: A (la altura del nivel de agua) · Escriba si cambian o no los valores de la medida: Si varía · Justifique su respuesta: Por que entre más se va llenando el recipiente más altura tiene el agua		Categoría 1 Indicador 1
Pregunta 2	11	 2. A continuación, se dan algunos pares de medidas, para cada caso diga si los valores de alguna de las medidas cambian a medida que cambian los valores de la otra medida, o si por el contrario los valores de estas medidas no se relacionan entre sí. Justifique la respuesta. Valores representados por: A (altura del nivel de agua) y F (tiempo transcurrido) · Escriba si una medida cambia o no con los cambios de la otra medida: Si varía · Justifique su respuesta: si aumentamos la altura del nivel de agua el tiempo transcurrido sera más corto.		Categoría 1 Indicador 1
Pregunta 3 opción 1	19	 3.1. Valores de A (dado en cm): 1,2 · 2,5 · 3,9 · 5,4 · 7,0 Valores de F (dado en Segundos): 1 · 2 · 3 · 4 · 5 Justifique su respuesta: No es la que corresponde por que la cantidad del chorro del agua no es el mismo y la cantidad no es la misma		Categoría 2 Indicador 1
Pregunta 3 opción 2	22	 3.2. Valores de A (dado en cm): 1,4 · 2,8 · 4,2 · 5,6 · 7,0 Valores de F (dado en Segundos): 2 · 4 · 6 · 8 · 10 Justifique su respuesta: Si es la que corresponde por que la altura del nivel de el agua corresponde a el cantinte del chorro y al tiempo transcurrido		Categoría 2 Indicador 1
Pregunta 3 opción 3	25	 3.3 Valores de D (dado en ml): 1,8 · 1,6 · 1,4 · 1,2 · 1,0 Valores de F (dado en Seg): 1 · 2 · 3 · 4 · 5 Justifique su respuesta: No es la que corresponde por que el tiempo y la cantidad del agua no es la misma		Categoría 2 Indicador 1

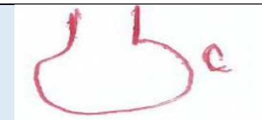
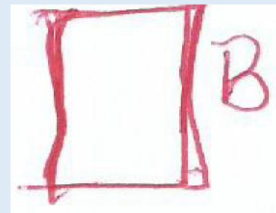
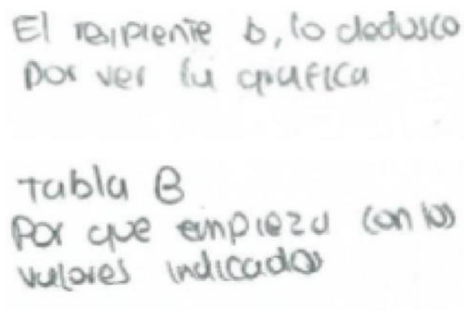
Pregunta 7.2	38	 7.2. ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que el nivel del agua alcance 5,5 cm de altura? Escriba el procedimiento seguido 9= 4,4 4,4 + 1,1 = 5,5 40 + 11 = 51 segundos	Categoría 2 Indicador 3
Pregunta 8	50	 Grafico por que es el que más se acomoda  	Categoría 3 Indicador 3
Pregunta 9	41	 9. La gráfica representa los valores que va tomando D (cantidad de agua) a medida que cambian los valores de F (al tiempo de llenado). Utilice la gráfica para contestar las preguntas 9.1 y 9.2 9.1. ¿Qué cantidad de agua hay en el recipiente cuando han transcurrido 4 segundos de llenado? 40 por que va aumentando 40 mililitros	Categoría 3 Indicador 1 y 2

Pregunta 10	44		Categoría 3 Indicador 1 y 2
Situación 1 Llenado uno Pregunta 1.1 Afirmación uno	2	Es correcto por que el peso de las monedas es constante y la forma del resipiente es de un forma en la cual sube en un mismo nivel	Categoría 1 Indicador 1
Afirmación dos	5	Es correcto porque la formas de las Probetas no son la mismas y hacen que varie su constante	Categoría 1 Indicador 1
Afirmación tres	82	Es correcto porque mientras insertamos las monedas cambia el nivel del agua aumenta o disminuye dependiendo tambien de la probeta	Categoría 4 Indicador 1
Afirmación cuatro	16	Es correcto por que aunque el incremento no sea constante tenemos que ver tambien como esta formada la Probeta y ver que la forma en la parte de arriba es más angosta.	Categoría 2 Indicador 1
Afirmación cinco	47	Es correcto por que la forma de la probeta y como aumenta el agua se asimilan a la grafica	Categoría 3 Indicador 3

Pregunta 1.2	85		**DY:** La docente hace referencia a la pregunta 1.2 de la guía evaluativa, de la cual hace la lectura para la estudiante, enfatizando en la pregunta y la información suministrada. **2I:** “Pues yo sí creo que es posible, yo calculando hay más o menos, calcule como he, como cada que aumento de una moneda era de 5 cm, entonces fui incrementando hasta que llegue a 41monedas y me dio 3002 cm. Indica en la hoja los cálculos que realizó a lo cual explica que inicio el conteo desde cuatro monedas con una altura de 27 cm y que fue sumando de 5 cm a cada moneda y así sucesivamente, hasta llegar a 41monedas, además responde que el significada que tiene para ella el hecho de sumar cinco monedas se debe a que cada moneda vale 5cm”	Categoría 4 Indicador 1
Pregunta 2.1	76		La docente en la entrevista hace referencia a la sesión 1 de la secuencia didáctica y su respectiva actividad de casa. En la sesión 1 encamina la entrevista a las preguntas que tienen que ver con la anticipación de la tabla de datos y con la representación cartesiana, cuya información es la que tomaremos para comprender en esta pregunta la respuesta dada por la estudiante. **DY:** […] ¿cuál de esas cuatro tablas crees que corresponde a esa situación del depositado de monedas y la relación con la altura del nivel del agua? […] ¡muy bien! ¿Por qué no podría ser esta tabla A? **2I:** “Porque en la tabla, bueno la cantidad de monedas es constante, pero la altura del nivel del agua no es la misma, no va subiendo en la misma medida” **DY:** okey ¿Y qué está pasando más bien con la altura del nivel del agua en esa tabla?	Categoría 3 Indicador 5

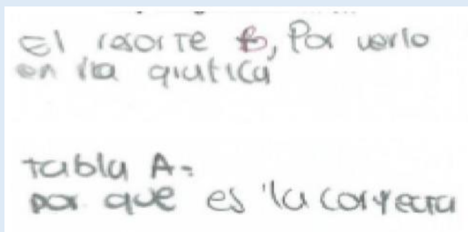
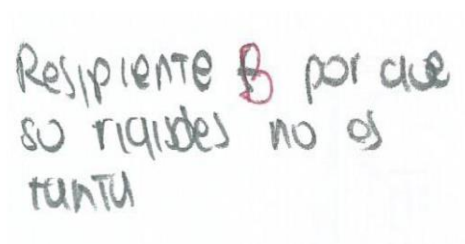
		2I: “Se varia, digamos, se varia, no es la misma, […]” **DY:** ¿Por qué no sería la B? **2I:** “[…] porque hay empieza en cero, […]” **DY:** ¿Qué significaría el hecho de que …? **2I:** “Que no tiene ningún nivel del agua y que no tiene monedas”	
Pregunta 2.2	79		Categoría 3 Indicador 5
Pregunta 2.3	64		Categoría 3 Indicador 4

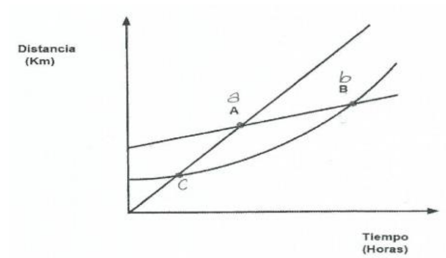
Pregunta 2.4	88	 tanque A: Si es constante por que la forma de el tanque hace que el incremento pueda acomodarse a la sea constante. tanque B: No es constante por que la forma del tanque hace que el incremento varíe tanque C: Si es constante por que el tanque siempre se queda de una misma forma.	**DY:** La docente enfatiza en las características de la situación 2.4 a medida que hace lectura de la misma referenciando cada uno de los tres tanques y su forma de llenado **2I:** “Bueno, en el tanque A, me parece que es constante por la forma del tanque, que hace que el incremento pueda acomodarse a la constante, entonces […] el tanque es como cilíndrico, entonces el constante va a ser más medido, los baldes que sea. Entonces en la B, pues el tanque no me parece que sea como constante porque la forma del tanque hace que el incremento varíe, entonces este es el tanque (señala en la fotocopia al tanque B), entonces no es como en la misma forma, entonces vamos […] va en una medida como tan baja que va subiendo […] Bueno, y en el tanque C, si es constante porque bueno, el tanque aquí se ve como que tiene volumen, pero su forma nunca cambia, y es como empieza bajo, y sigue así, su constante va variando sucesivamente”	Categoría 4 Indicador 1
Situación 2 Llenado dos Pregunta 1.1	55	 Que tienen diferentes formas, que empiezan con valores iniciales distintos que los tres tienen la cantidad de balde vertidos los mismos.	La docente le solicita a la estudiante que indique la forma del recipiente **2I:** Claro, sería en, pues en ejercicios anteriores había como un cuadrito así (dibuja un recipiente) pues yo creería que es el A  El C sería como, un recipiente diferente, como el que tu nos habías dicho, algo así (realiza el dibujo)	Categoría 3 Indicador 3

			 Y en la C sería como normal (usa tono de corrección de lo dicho), en la B sería como cilíndrica, como la que tú nos habías puesto, como la probeta (realiza el dibujo)  	
Pregunta 1.2	120	 El recipiente b, lo dedusco por ver la grafica tabla B Por que empieza con los valores indicados	La docente DM lee la pregunta 1.2 textualmente de la guía y la estudiante responde: **2I:** “Pues el B” **DM:** Para ti sería el recipiente… **2I:** “B” La estudiante creía que se había confundido y luego verifica que no es así. Se mantiene en que su respuesta es B **DM:** cuando empiezo a hacer el llenado el que monos agua inicialmente tienen es…. **2I:** “El recipiente B” **DM:** O sea que el que más tiene agua, ¿quién es? **2I:** “El recipiente A”	Categoría 5 Indicador 2

Pregunta 1.3	126	Resipiente C por que depionto su figura es de diametro mas angosto	**2I:** “El recipiente C” **DM:** ¿Por qué? **2I:** “Tiene mayor alargamiento (desliza el esfero sobre la gráfica del recipiente C). Bueno, empieza en diferente esto, pero el sube más rápido (subraya la línea del recipiente C) digamos, en el A tiene la misma (señala un recorrido horizontal con su mano) la misma longitud entonces podría decirse que el C es más largo que el ##### ese es el que creo tiene mayor altura del nivel del agua”	Categoría 5 Indicador 3
Pregunta 1.4	108	Que en ese punto el nivel del agua es el mismo en los resipientes a y b	**2I:** “En este punto (remarca el punto “e”), en estos puntos (también remarca el punto “d”) yo creo que la altura del nivel del agua es la misma en los recipientes, entonces en este punto (señala el punto “d”) en el “d” el recipiente C y el reciente A tienen la misma altura del nivel del agua y aquí en el punto “e” el recipiente A y el recipiente B tienen el mismo altura del nivel del agua”	Categoría 5 Indicador 1
Pregunta 1.5	91	La cantidad de baldes no cambian solo la altura del agua solo por la forma.	**DM:** ¿La razón de cambio entre la altura del nivel del agua y la cantidad de baldes vertidos es constante? Acuérdate qué era la razón de cambio: la variación entre la diferencia en la altura el nivel del agua con la diferencia en la cantidad de baldes que se están depositando. ¿Será que la razón de cambio aquí es constante (recorre con el esfero la gráfica del recipiente C)? Sí, no y ¿por qué? **2I:** “Creo que no, no es constante porque pues, el nivel del agua, pues no cambia creo, pues los datos, si hace la figura, los datos no van a ser la mismos por lo que suben, yo me guío más por la forma, por el ángulo de la línea. Como este (señala la gráfica del recipiente A, que es una línea recta cuyo grado de inclinación es casi paralela al eje x) sería datos constantes, digamos, suben al mismo valor digamos.	Categoría 4 Indicador 1

			Pero en este (señala la línea curva del recipiente C) como que no”	
Situación 3 Ley de Hooke Pregunta 1.1	58	Que hay un punto de intersección y que la longitud de los resortes empiezan en distintas cantidades o valores	1. La docente hace referencia al evento físico del resorte y a partir de la consideración del mismo genera la siguiente pregunta” **DM:** ¿Qué variables se relacionan y que encuentras en particular entre dichas variables? **2I:** “En el resorte dependiendo del peso se estiraba, se alargaba dependiendo del peso de la gruesidad de su resistencia y dependiendo del espacio donde estaba si estábamos en la tierra el resorte iba a estar más alargado y cuando estábamos en la luna el resorte iba a estar menos alargado. 2. La docente trae a consideración la guía evaluativa y pregunta sobre las características de los resortes que se relacionan en una gráfica en el plano cartesiano. **2I:** “La longitud del resorte es la misma, pero, pues como no después de tanto tiempo el alargamiento en un punto” **DM**: La docente relaciona a continuación la situación de llenado que se encuentra en la misma guía y luego vuelve sobre la gráfica de los resortes y pregunta señalando el eje Y “Este corte que hay en el eje Y qué información me dará de los resortes” **2I:** “creo que la f tiene mayor longitud y la e empieza con mayor cantidad, pero tiene menor longitud una tiene más alargamiento más longitud” La estudiante dibuja dos resortes de diferente longitud. **DM:** La docente señala los dibujos y manifiesta le muestra respecto a la gráfica cual sería el resorte que correspondería a cada línea.	Categoría 3 Indicador 3

			2I: “Relaciona el resorte de mayor longitud al punto de corte f sobre el eje Y y el resorte de menor longitud al punto de corte e que esta sobre el eje Y” **DM:** La docente afirma “esta es la situación del resorte sin ponerle ningún pesito” **2I:** “No ya se le ha puesto peso” **DM:** “La misma cantidad de pesos a ambos” **2I:** “No no no diferente” **DM:** “A cuál le has puesto más peso ahí” **2I:** “A la f” La estudiante invierte su respuesta y afirma que es más grueso”	
Pregunta 1.2	123	 el resorte B, Por verlo en la grafica tabla A. por que es la correcta	**DM:** ¿Cuál de los dos resortes tiene una longitud menor cuando no hay alargamiento? **2I:** “hay si me equivoqué yo puse la f cuando era la B”	Categoría 5 Indicador 2
Pregunta 1.3	129	 Resipiente B por que su rigides no es tanta	**DM:** ¿Cuál de los dos resortes se estira con más facilidad? **2I:** “el f” **DM:** Acuérdate que el resorte es A y B” **2I:** La estudiante corrige “cuando sea f es B, el resorte B seria el que tiene mayor longitud pues se estira más”	Categoría 5 Indicador 3

Pregunta 1.4	111	Que en ese punto los resortes estan aluiqados a la mima medida	**DM:** ¿Qué significado tiene el punto g en el que se cortan las gráficas correspondientes a los resortes A y B? **2I:** “El punto de intersección de g significa pues para mí que la longitud del resorte es la misma”	Categoría 5 Indicador 1
Pregunta 1.5	94	No la entendi	**DM:** ¿La razón de cambio entre la longitud del resorte y la fuerza aplicada es constante en ambos resortes? **2I:** “La cantidad de peso de los dos resortes creo que no se los varia, pero la longitud por el peso creo que si varia.”	Categoría 4 Indicador 1
Situación 4 Movimiento Pregunta 1	100	Para el automovil B este tiene el mismo inciemento en distancia que en horas.	**“[**…] para mí el automóvil B, porque digamos, en el tiempo en horas dice cero, uno, dos, tres cuatro cinco, en la distancia del automóvil dice también empieza desde cero, **cuando hay cero horas hay cero distancia recorrida**, heee, inicia bien, tiene su constante veinte, cuarenta, sesenta […]”	Categoría 4 Indicador 1
Pregunta 2	61		**“P**ara mi esta línea (señala la que parte de cero) sería el auto B porque la distancia del automóvil B empieza desde cero, y en la gráfica el punto de inicio de esta línea es cero. Esta línea (toco la otra recta) el automóvil A y esta el automóvil C (señala la curva).[…] teniendo en cuenta el punto de inicio de la gráfica en donde empieza”	Categoría 3 Indicador 3
Pregunta 3	114	En el Punto b nos Muestra que se Une con la linea a.	“Pues para mi es aquel en el que esta línea […] las dos líneas en este punto han transcurrido la misma distancia (marca el punto sobre la gráfica) […] el automóvil A y el automóvil C, en este punto han transcurrido la misma distancia”	Categoría 5 Indicador 1

Pregunta 4	117	En el Punto a nos Muestra que se Cruza Con la Linea b.	**2I: “Q**ue en el automóvil a y el automóvil B han transcurrido en ese punto la misma distancia” **D1:** Que ellos hayan trascurrido la misma distancia, ¿podría pensarse que en el camino se encuentran? **2I:** “Dándole la imaginación pues si […] si podría decirse”	Categoría 5 Indicador 1
Pregunta 5	103	A los Carros A y C empiezan el mismo tiempo pero no tienen la misma distancia al empezar y sus constantes no son iguales,	**2I:** “Pues volviéndonos a la tabla los incrementos iguales de tiempo serian cero, uno, dos, tres, cuatro, cinco” En la distancia el automóvil A, no me parece que es la misma, porque mirando el tiempo la distancia tendría que ser cero, entonces empieza diez, veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sus kilómetros si son consecuentes, pero no empieza como debería ser, heee, los kilómetros. **DM:** ¿Para ti la respuesta es? **2I:** “A y B”	Categoría 4 Indicador 1
Pregunta 6	97	La razón de cambio se podria decir que es la A y la B.	**2I:** “En la B, como ya te había dicho el tiempo ha transcurrido es cero y en la distancia a transcurrido cero., y entonces empieza como deben ser cero, […]” **D1:** Sea, si en el tiempo cero no esta distancia cero, no cumple la condición de que tenga razón de cambio constante	Categoría 4 Indicador 1
Pregunta 7	32	Se encuentra en 120.		Categoría 2 Indicador 3
Pregunta 8	35	A 160 Km.		Categoría 2 Indicador 3

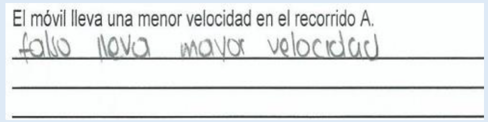
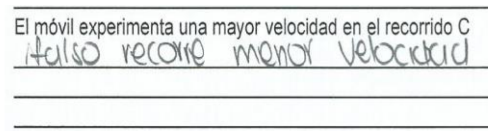
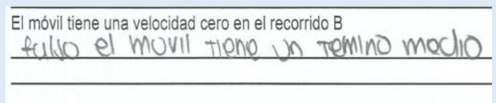
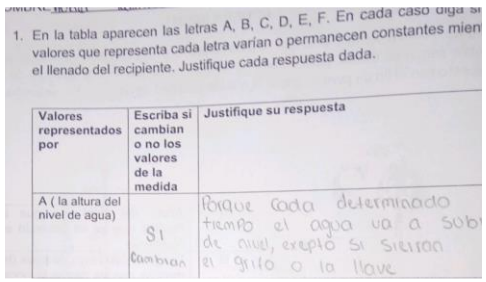
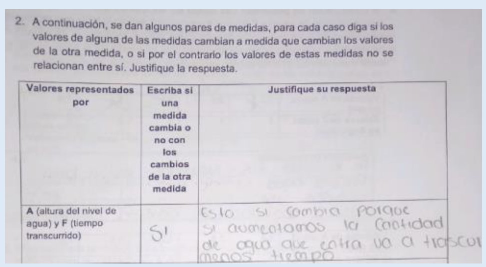
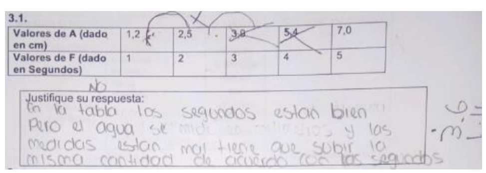
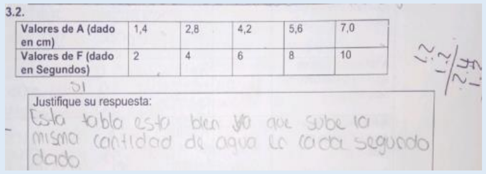
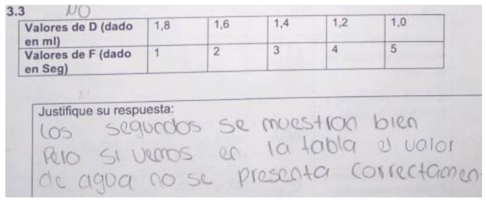
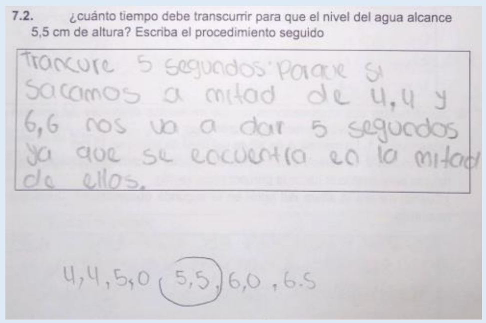
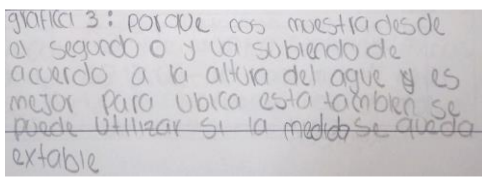
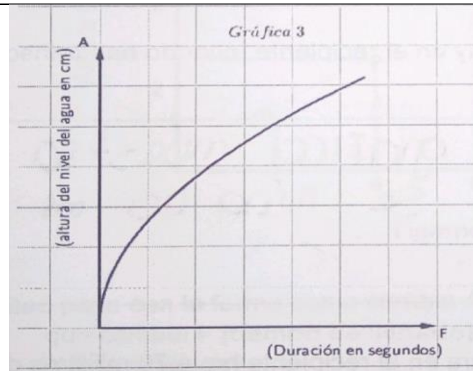
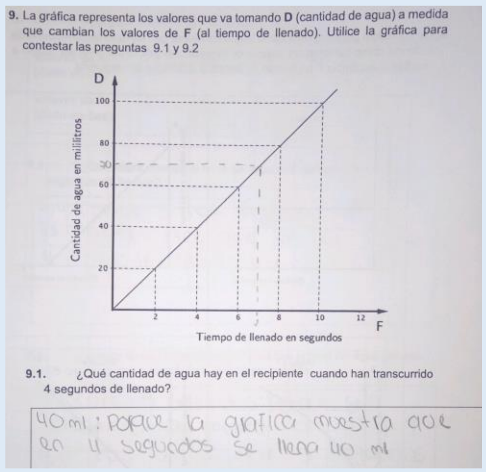
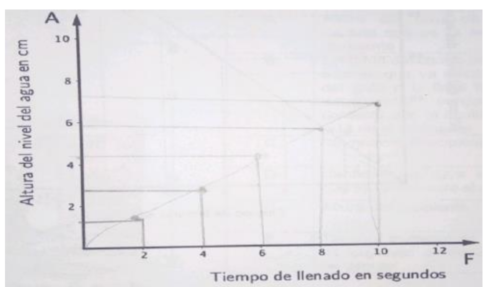
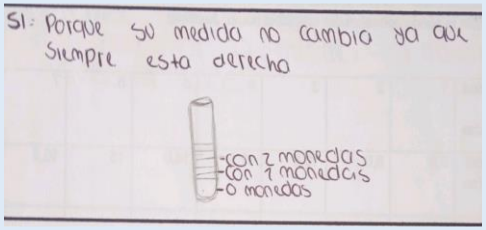
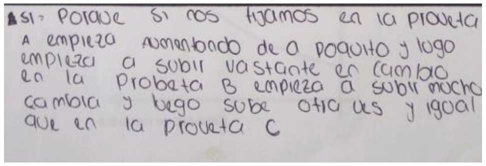
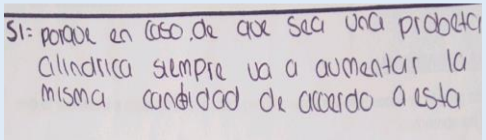
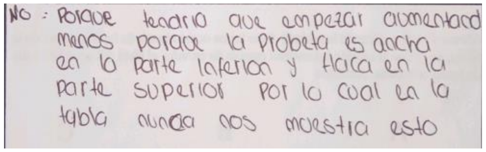
Pregunta 9 Móvil A	67	 El móvil lleva una menor velocidad en el recorrido A. falso lleva mayor velocidad	**DM**: Para ti, ¿el móvil A lleva una menor velocidad en el recorrido? **2I**: "Para mi lleva la mayor velocidad porque ha transcurrido gran distancia desde su punto de partida"	Categoría 3 Indicador 4
Pregunta 9 Móvil C	70	 El móvil experimenta una mayor velocidad en el recorrido C falso recorre menor velocidad	**DM:** ¿El móvil C es el que experimenta una mayor velocidad? **2I:** "Yo a pesar de que escribí esto me equivoque, […] si tuviera mayor velocidad tendría mayor distancia, y en esta no lleva mayor distancia"	Categoría 3 Indicador 4
Pregunta 9 Móvil B	73	 El móvil tiene una velocidad cero en el recorrido B falso el movil tiene un temino medio	**DM:** ¿El móvil tiene una velocidad cero en B? **2I: "**Pues no, seria, porque como su, como ya la línea nos muestra ya tiene una dicha distancia entonces ya tiene un recorrido, entonces mira, una velocidad cero estaría en el punto de partida todavía […]" **DM:** Entonces para ti Isabella, la longitud de esta línea tú la relacionas directamente con la velocidad **2I:** "Y con la distancia" **DM:** Si la longitud de la línea es mayor es porque recorrió mayor distancia, y si la longitud es más pequeñita [..] **2I:** "Si señora"	Categoría 3 Indicador 4

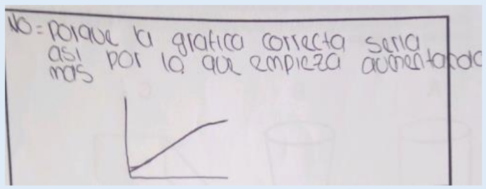
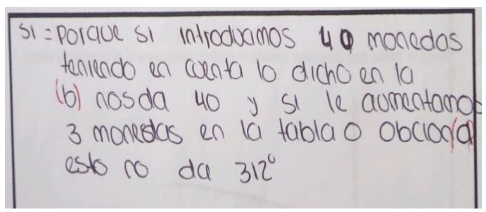
Tabla 3: Sujeto 3H.

TAREA	EVIDENCIA	RESPUESTA ESCRITA	RESPUESTA VERBAL	OBSERVACIÓN
Prueba inicial pregunta 1	9	 1. En la tabla aparecen las letras A, B, C, D, E, F. En cada caso diga si valores que representa cada letra varían o permanecen constantes mien el llenado del recipiente. Justifique cada respuesta dada. Valores representados por: A (la altura del nivel de agua) — Escriba si cambian o no los valores de la medida: Si cambian — Justifique su respuesta: Porque cada determinado tiempo el agua va a sub de nivel, exepto si sierran el grifo o la llave		Categoría 1 indicador 1
Pregunta 2	12	 2. A continuación, se dan algunos pares de medidas, para cada caso diga si los valores de alguna de las medidas cambian a medida que cambian los valores de la otra medida, o si por el contrario los valores de estas medidas no se relacionan entre sí. Justifique la respuesta. Valores representados por: A (altura del nivel de agua) y F (tiempo transcurrido) — Escriba si una medida cambia o no con los cambios de la otra medida: Si — Justifique su respuesta: Esto si cambia porque si aumentamos la cantidad de agua que entra va a trascur menos tiempo		Categoría 1 indicador 1
Pregunta 3 opción 1	20	 3.1. Valores de A (dado en cm): 1,2 — 2,5 — 3,8 — 5,4 — 7,0 Valores de F (dado en Segundos): 1 — 2 — 3 — 4 — 5 No Justifique su respuesta: En la tabla los segundos estan bien Pero el agua se [illegible] y las medidas estan mal tiene que subir la misma cantidad de acuerdo con los segundos		Categoría 2 indicador 1

Pregunta 3 opción 2	23	 3.2. Valores de A (dado en cm): 1,4 / 2,8 / 4,2 / 5,6 / 7,0 Valores de F (dado en Segundos): 2 / 4 / 6 / 8 / 10 SI Justifique su respuesta: Esta tabla esta bien ya que sube la misma cantidad de agua la cada segundo dado	Categoría 2 indicador 1
Pregunta 3 opción 3	26	 3.3 NO Valores de D (dado en ml): 1,8 / 1,6 / 1,4 / 1,2 / 1,0 Valores de F (dado en Seg): 1 / 2 / 3 / 4 / 5 Justifique su respuesta: Los segundos se muestran bien pero si vemos en la tabla el valor de agua no se presenta correctamen	Categoría 2 indicador 1
Pregunta 7.2	39	 7.2. ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que el nivel del agua alcance 5,5 cm de altura? Escriba el procedimiento seguido Trancure 5 segundos porque si sacamos a mitad de 4,4 y 6,6 nos va a dar 5 segundos ya que se encuentra en la mitad de ellos. 4,4 , 5,0 , 5,5 , 6,0 , 6.5	Categoría 2 indicador 3
Pregunta 8	51	 grafica 3 : porque nos muestra desde el segundo 0 y va subiendo de acuerdo a la altura del agua y es mejor para ubica esta tambien se ~~puede utilizar si la medida se queda~~ extable	Categoría 3 indicador 3

		 	
Pregunta 9	42	 9. La gráfica representa los valores que va tomando D (cantidad de agua) a medida que cambian los valores de F (al tiempo de llenado). Utilice la gráfica para contestar las preguntas 9.1 y 9.2 9.1. ¿Qué cantidad de agua hay en el recipiente cuando han transcurrido 4 segundos de llenado? 40 ml: porque la gráfica muestra que en 4 segundos se llena 40 ml	Categoría 3 indicador 1 y 2
Pregunta 10	45	 	Categoría 3 indicador 1 y 2

Situación 1 llenado uno Pregunta 1.1 Afirmación uno	3	 SI: Porque su medida no cambia ya que siempre esta derecho 		Categoría 1 indicador 1
Afirmación dos	6	 SI: Porque si nos fijamos en la proveta A empieza aumentando de a poquito y luego empieza a subir vastante en cambio en la Probeta B empieza a subir mucho cambia y luego sube otra vez y igual que en la proveta C		Categoría 1 indicador 1
Afirmación tres	83	 SI: porque en caso de que sea una probeta cilindrica siempre va a aumentar la misma cantidad de acuerdo a esta	**3H:** “si, (lee la producción escrita), como explico acá, si metemos lo mismo, digámosle, le metió una moneda aumentaba 2cm, dos monedas aumentan 2 cm con otras aumentan 2, 2, 2, así sucesivamente”. **DS:** aquí cuando tú dices “aumentar la misma cantidad”, ¿te refieres a esto? **3H:** “si porque en caso de que sea una probeta cilíndrica aumentaría lo mismo […] aumentaría lo misma siempre y cuando tenga siempre una capacidad igual, […] que sea recto”	Categoría 4 indicador 1
Afirmación cuatro	17	 NO: Porque tendria que empezar aumentando menos porque la Probeta es ancha en la parte inferior y flaca en la parte superior por lo cual en la tabla nunca nos muestra esto	**3H:** “no, (lee la producción escrita), como nos podemos dar cuenta aquí esta probeta en la parte inferior es más ancha y en la parte superior es más angosta” **DS:** como relacionas tu eso que dices ahí con estas cantidades para asegurarlo. **3H:** “por lo cual la tabla nunca nos muestra eso, si nos damos cuenta, digamos aumenta 5cm, 5, 8, 3 aquí aumenta 2, está disminuyendo, luego 2 otra vez, luego 2 no luego 1,5, luego 1 y luego 5 cm. Por lo cual está aumentando menos acá (señala parte superior de la probeta) y acá está aumentando más	Categoría 2 indicador 1

			(señala parte inferior de la probeta), o sea la primera parte estaría bien 5, 8 10, y acá ya está […]” **DS:** sea que tú dices que debe inicial un aumento mínimo y a medida que se van agregando monedas el nivel debe ir aumentando mucho más que al comienzo. Y que eso lo evidencias en los valores que se dan. **3H:** “si”	
Afirmación cinco	48		**3H:** “no, (lee la producción escrita), o sea, esta es la probeta si, […] como nos damos cuenta tendría que empezar aumentar más, y luego va bajando, por lo cual la gráfica quedaría así (dibuja la de la producción escrita) por lo que va aumentando más, nos damos cuenta esta nos muestra que está aumentando más cantidad y luego empieza a subir menos”	Categoría 3 indicador 3
Pregunta 1.2	86		**3H:** “partamos de lo que dice, si tenemos en cuenta esta es la probeta cilíndrica (mientras la dibuja) y 4 x 5, 4 x 5 nos da 20, y estos 7 sería el agua con la que inicia […] porque si introducimos 40 monedas teniendo en cuenta lo dicho en ***a*** (hace lectura del literal a), teniendo en cuenta que los 7 cm son con lo que inicia el agua. […]” **DS:** con esta información si es posible o no es posible identificar la altura del nivel del agua. **3H:** “si es posible” **DS:** si, es posible, y tu como lo identificarías a partir de la información. **3H:** “como, teniendo en cuenta que si aumentamos tres monedas en la […] esto nos de 312 como la altura del nivel del agua” **DS: y** como obtienes ese 312	Categoría 4 indicador 1

3H: "[…] vale 5 cm por cada moneda, multiplicamos 40 monedas, […]entonces 41 monedas, entonces sería 41 x 5, 205, pero como dice aquí fue que introducíamos 40 monedas, teniendo en cuenta lo que dice en la b que aumenta 5, […]"

DS: bueno no logras recordar como obtuviste el 302, ¿con esto que estás haciendo acá este 205 que información representa para ti?

3H: "pues si lo sacábamos de este modo nos da 205, por lo cual supongo o creo que sería el valor que nos daría"

DS: 205?

3H: "si porque […] con esta información se podría tener el valor que aumenta el agua si se introducen 41 monedas, 41, son las 41 monedas que se han introducido, y si tenemos en cuenta lo de la b que dice cuándo se han introducido cuatro monedas, el nivel del agua ha alcanzado 27 cm. El 7cm es con lo que inicia el agua"

DS: ¿y dónde dejas esos 7cm?

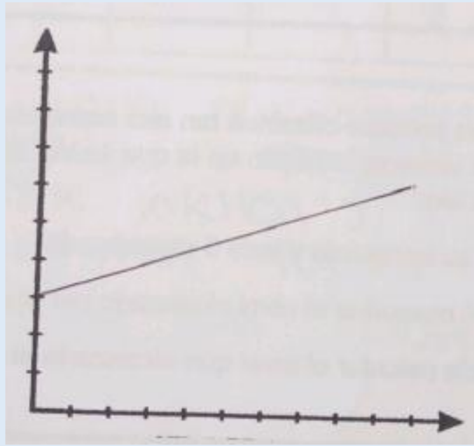
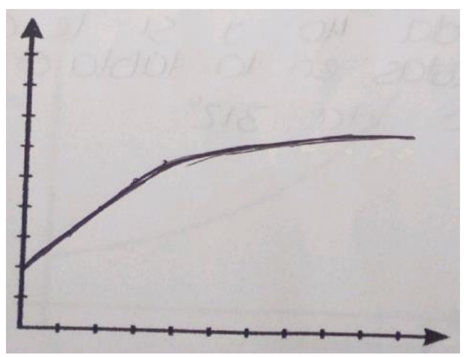
3H: "¿pues donde los dejaría? Pues, los deseche, pero si se los sumamos a este (señala 205) 212 la altura del nivel del agua"

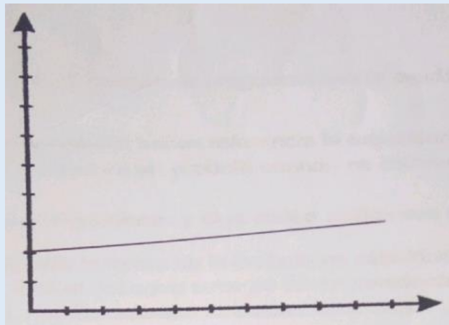
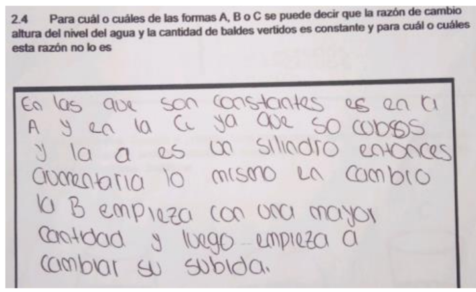
DS: sea que, si es posible, con esto que haces aquí, ¿y esa altura correspondería entonces a?

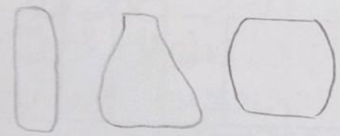
3H: "312"

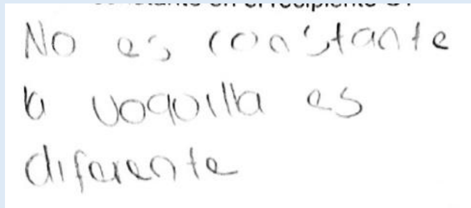
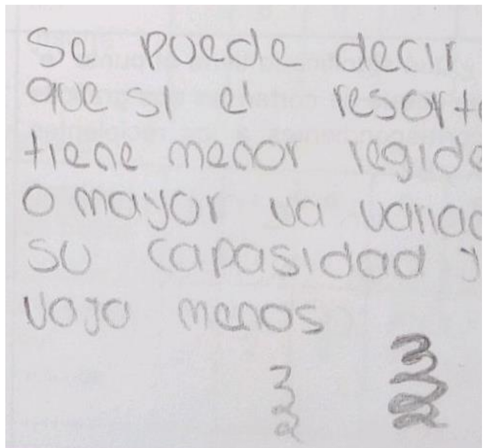
DS: y entonces que paso acá (señala el procedimiento de las producciones escritas iniciales)

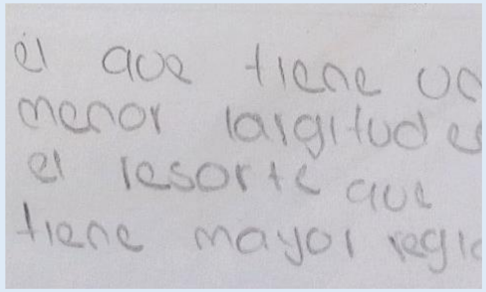
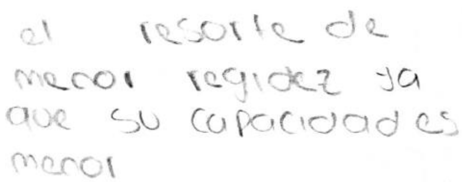
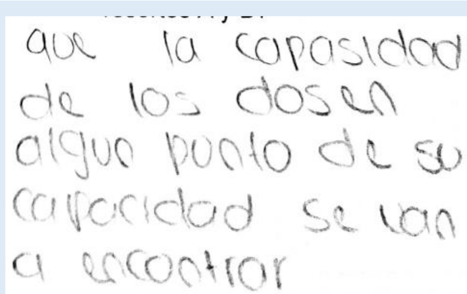
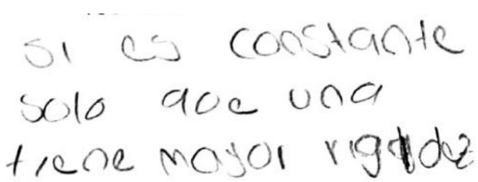
3H: "la embarre"

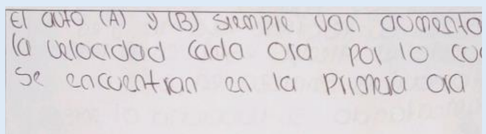
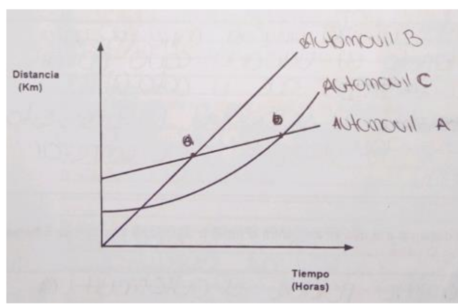
Pregunta 2.1	77		**3H:** “pues como ya lo había explicado, obviamente tendría que iniciar con algo, por eso yo cogí, cuando cero empecé con cierta cantidad de agua (señala la gráfica de su producción escrita), listo e iba aumentando la misma cantidad, […] como lo podemos ver con la probeta cilíndrica que sería casi lo mismo (traza un nuevo plano y una gráfica) que está (refiriéndose a la gráfica a) que tendría que empezar a subir **DS:** “tu gráfica correcta igual sería la que tienes acá (señala la de la producción escrita inicial) o esta que estás haciendo acá (señala la que está haciendo durante la entrevista) **3H:** “esta” (señalando la que está haciendo durante la entrevista) **DS:** ¿esa? **3H:** “si” **DS:** ¿aquí que paso? (señalando la de la producción inicial) **3H:** “le metí agua que no era necesaria”.	Categoría 3 indicador 5
Pregunta 2.2	80		**3H:** “hago este tipo de representación, porque, si nos damos cuenta empieza aumentando más, pero desde un punto cero, por lo cual en todas las inicie desde un mismo punto. Entonces tendría que ver, digamos aumenta 2 cm, 2,2,2, y va disminuyendo […]”	Categoría 3 indicador 5

Pregunta 2.3	65			Categoría 3 indicador 4
Pregunta 2.4	89	 2.4 Para cuál o cuáles de las formas A, B o C se puede decir que la razón de cambio altura del nivel del agua y la cantidad de baldes vertidos es constante y para cuál o cuáles esta razón no lo es En las que son constantes es en la A y en la C ya que so cubos y la a es un silindro entonces aumentaria lo mismo en cambio la B empieza con una mayor cantidad y luego empieza a cambiar su subida.	La docente hace referencia al punto 2 de la guía evaluativa donde hace una explicación de la información de la misma, enfatizando en la pregunta 2.4, donde pide al estudiante que responda a la pregunta **DY:** ¿para cual o cuales de las formas a, b o c se puede decir que la razón de cambio de la altura del nivel del agua y la cantidad de baldes vertidos es constante y para cual o cuales esta razón no lo es? **3H:** "en las que son constantes es en la a y en la c, ya que son cubos y la a es un cilindro … (hace lectura de lo que escribió en la guía) Si nos fijamos la a es un cilindro y va subiendo la misma cantidad o sea que es constante (sobre la figura indica como seria ese aumento del nivel del agua). En la c, acá es igualito, digamos que está representando un cubito. Y está aumentando la misma cantidad de agua. Digamos que se está aumentando dos, otros dos, otros dos … (dibuja el recipiente y en el realiza trazos internos cada vez que dice otros dos…) lo mismo que está pasando en la a, está aumentando dos, otros dos, dos, dos, … En cambio en la b no sería constante porque está aumentando mayor cantidad y cada vez que está	Categoría 4 indicador 1

			subiendo va bajando (va realizando el dibujo mientras habla), va bajando la cantidad”	
Situación 2 llenado dos Pregunta 1.1	56	yo creo que la cantidad de agua va cambiando depende los tres recipientes 		Categoría 3 indicador 3
Pregunta 1.2	121	Si tenemos en cuenta seria el cilindro ya que siempre aumenta lo mismo		Categoría 5 indicador 2
Pregunta 1.3	127	sube mas rapido el resipiente C ya que su capacidad puede resivir mas		Categoría 5 indicador 3
Pregunta 1.4	109	que en alguna momento los dos resipientes se van a unir		Categoría 5 indicador 1

Pregunta 1.5	92	 No es constante la vasilla es diferente		Categoría 4 indicador 1
Situación 3 Ley de Hooke Pregunta 1.1	59	 Se puede decir que si el resort tiene menor regid o mayor va varia su capasidad y vajo menos	1.la docente refiere la pregunta 1 de la sesión 5, en la hay seis afirmaciones las cuales pueden ser verdaderas o falsas y se solicita a los estudiantes indicar la respuesta con su respectiva justificación. Afirmación número 2. **DY:** si al resorte de rigidez r le sujetamos el doble del peso inicial, ahora vas a duplicar el peso ¿el alargamiento se reduca a la mitad? **3H:** "eso es falso, el alargamiento depende de la cantidad del peso, excepto que el resorte tenga más rigidez, si por ejemplo tenemos el resorte y duplicamos el resorte se estira más, mas no le resta." 2.la docente le solicita al estudiante describir el comportamiento de los resortes que se relacionan en la gráfica. **3H:** "se puede decir que el resorte tiene mayor rigidez o menor rigidez, va variando la capacidad o va bajando menos" 3.pregunta señalando la respuesta a la pregunta 1.1 de los resortes "¿qué significa esto, o sea en esta grafica que podrías decir del resorte a y el resorte b? **3H:** "el resorte a su rigidez es mayor que la del resorte b."	Categoría 3 indicador 3

Pregunta 1.2	124		**DY:** ¿cuál de los dos resortes tiene una longitud menor cuando no hay alargamiento en él? **3H:** “el que tiene una menor longitud es el resorte que tiene una mayor rigidez” **DY:** ¿para la situación cual sería el que cumple esa condición? **3H:** “el b, sería el b” **DY:** ¿cómo sabes hay en la gráfica que es el b? **3H:** el estudiante señala en la gráfica el punto de corte del eje y para el resorte b y dice “porque está empezando desde más abajo”	Categoría 5 indicador 2
Pregunta 1.3	130		**DY:** ¿cuál de los dos resortes se estira con más facilidad? **3H:** “el de menor, el de menor rigidez”	Categoría 5 indicador 3
Pregunta 1.4	112		“El punto en el que se encuentran los dos resortes por ejemplo” toma papel y lápiz para dibujar la justificación a la pregunta y dibuja dos resortes de igual longitud que una con una línea horizontal y afirma “en algún momento los dos resortes se van a encontrar.”	Categoría 5 indicador 1
Pregunta 1.5	95		En este momento, la docente referencia la pregunta 2 de la sesión 5 que relaciona la razón de cambio para un resorte al que se le aplica la misma fuerza, ubicándolo en el planeta tierra y en la luna. La docente le solicita al estudiante contemplar una comparación entre esta situación y las condiciones	Categoría 4 indicador 1

			en las que se presentaría este mismo evento en las probetas. **3H:** el estudiante reconoce que la razón de cambio es igual para los dos resortes e identifica que la diferencia de valores en esta magnitud, se debe específicamente al valor de la gravedad de la tierra y la luna. Cuando establece la comparación, acertadamente relaciona la probeta de forma cilíndrica, para la razón de cambio que genera el resorte que está en la tierra, pero las condiciones que asocia de comparación para el resorte de la luna no corresponde, ya que considera de nuevo la misma probeta cilíndrica que dibujo previamente con la diferencia de acotar que para esta circunstancia la probeta tendría menor cantidad de agua inicial.	
Situación 4 movimiento Pregunta 1	101		"Para el auto a y el b, pero teniendo en cuenta que el auto a está empezando con, o sea cuando los carros no van ni con un kilómetro, el carro a ya había empezado con 10 kilómetros, pero su aumento es constante, y para el auto b seria que empieza cuando está en cero, empieza en cero kilómetros, y luego va aumentando de 2 en 2[…] de 20 en 20"	Categoría 4 indicador 1
Pregunta 2	62		"Pues si tuvimos en cuenta el auto que es el b (señala en la gráfica la recta que parte de cero), que es el que empieza desde cero ya sería más fácil, sería el automóvil b porque empieza desde cero y va aumentando su velocidad de 2 en 2 […] y el auto a seria este (señala la gráfica recta que no parte de cero)"	Categoría 3 indicador 3

Pregunta 3	115	La información que nos ofrece el [illegible] (b) esque en alguna parte el autom[illegible] A y el automovil (C) se encontra[illegible] en algun lugar de su recorrido	"Es que en alguna parte el automóvil a y el automóvil c se encontraron"	Categoría 5 indicador 1
Pregunta 4	118	la información que nos quiere ofrecer es que en los carros (A) y (B) se encontra[illegible] al empezar la carrera por lo cual el automovil (A) llega a encontrarse con los dos automoviles	"Es que los dos carros el a y b se encontraron en un punto antes de llegar a […]"	Categoría 5 indicador 1
Pregunta 5	104	B porque si nos fijamos los automoviles empiezan su recorido en 10 y en 5 cuando el tiempo esta en 0 pero el automovil B empieza en 0 y va aumentando su velocidad al mismo tiempo	"Para el c, aquí me equivoque y puse el b , porque puse en b porque si nos fijamos los automóviles empiezan sus recorridos en 10 y en 5 […]el c porque empiezan 5 , 10, 15, a porque empieza aumentando 5, 10, 25, lo cual debería ser 15 […]"	Categoría 4 indicador 1
Pregunta 6	98	Si podria afirmar que el carro (B) va aumentando su velocidad cada 20 km/h por otro mientras que el auto (A) va aumentando su velocidad pero no esta contando que tendria que empezar en 0 km/h	"El auto b y el a pero si hubiera empezado desde cero […] si esto (señala la tabla de datos para el auto a) hubiera empezado desde cero hubiera un incremento constante que sería el 10 lo pasaríamos acá (señala los valores dados en la tabla y cuenta)10, 20, 30, 40 y 50"	Categoría 4 indicador 1
Pregunta 7	33	110 kilometro porque el automovil va aumentando de 20 en 20 y si sacamos la mitad de 20 es 10 por lo cual si estuviera corriendo dos oras seria 120 pero estamos hablando de una hora y media lo cual seria 110 kilometros	"110 kilómetros, porque el automóvil va aumentando de 20 en 20 y si sacáramos la mitad de 20, la mitad de 20,es por lo cual si estuviera corriendo 2 horas seria 120, pero estamos hablando de una hora y media lo cual seria 110, porque la mitad de 20 es 10 lo cual esto estaría haciéndolo en media hora"	Categoría 2 indicador 3
Pregunta 8	36	460 porque si tenemos en cuenta el automovil va aumentando de 10 en 10 y si multiplicamos 46·10 nos daria 460 kilometros	"460 porque si tenemos en cuenta el automóvil va aumentando de 10 en 10. Y si multiplicamos 46 por 10 nos daría 460 kilómetros. […] y lo multiplique como lo dije aquí 46 por 10".	Categoría 2 indicador 3

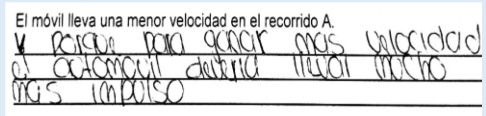
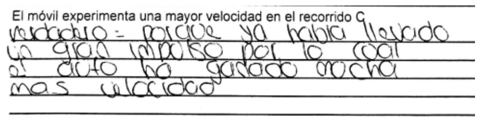
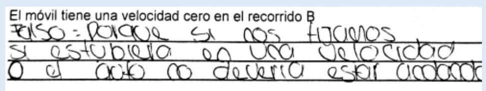
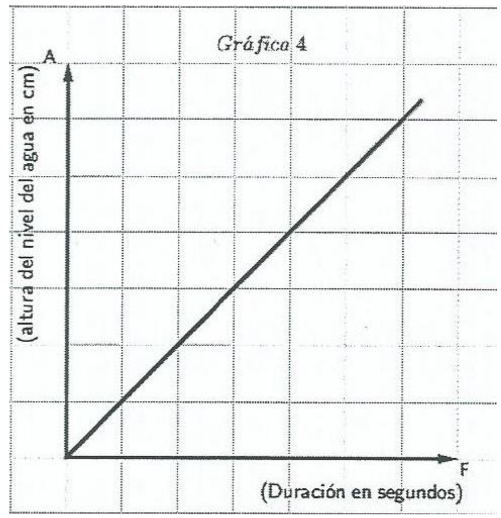
Pregunta 9 Móvil A	68	 El móvil lleva una menor velocidad en el recorrido A. V porque para ganar mas velocidad el automovil deberia llevar mucho mas impulso	"Hay que tener en cuenta una cosa que yo tuve en cuenta a acá, y fue que para ganar velocidad el carro necesitaba impulso, lo cual que si la línea era más larga era que el carro iba más lento. Pero si era más corta el carro iba más rápido […] por eso digo que el móvil a iba más lento para ganar impulso" (señala la gráfica)	Categoría 3 indicador 4
Pregunta 9 Móvil C	71	 El móvil experimenta una mayor velocidad en el recorrido C verdadero = porque ya habia llegado un gran impulso por lo cual el auto ha ganado mucha mas velocidad	"Verdadero porque al ganar más velocidad el automóvil debería llevar más impulso… verdadero porque ya había llegado a un gran impulso por lo cual el auto ha ganado mucha más velocidad"	Categoría 3 indicador 4
Pregunta 9 Móvil B	74	 El móvil tiene una velocidad cero en el recorrido B Falso = porque si nos fijamos si estubiera en una velocidad 0 el auto no deberia estar andando	"Falso porque si tuviera una velocidad cero el carro debería quedarse estático y lo estático lo presentaría como un punto no más"	Categoría 3 indicador 4

Tabla 4: Otros sujeto

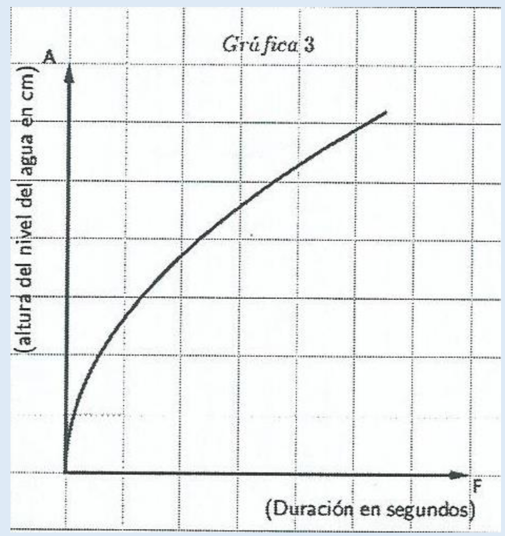
<table>
<tr><th>TAREA</th><th>EVIDENCIA</th><th>SUJETO</th><th>RESPUESTA ESCRITA</th><th>OBSERVACIÓN</th></tr>
<tr><td>Prueba inicial

pregunta 2</td><td>13</td><td>Suj4</td><td>2. A continuación, se dan algunos pares de medidas, para cada caso diga si los valores de alguna de las medidas cambian a medida que cambian los valores de la otra medida, o si por el contrario los valores de estas medidas no se relacionan entre sí. Justifique la respuesta.
<table>
<tr><th>Valores representados por</th><th>Escriba si una medida cambia o no con los cambios de la otra medida</th><th>Justifique su respuesta</th></tr>
<tr><td>A (altura del nivel de agua) y F (tiempo transcurrido)</td><td>si cambia</td><td>si Cambia por que la medida del vaso va cambiendo, A medide que el chorro del. Agua Cae</td></tr>
</table></td><td>Categoría 1 Indicador 1</td></tr>
<tr><td>Pregunta 2</td><td>14</td><td>Suj5</td><td>2. A continuación, se dan algunos pares de medidas, para cada caso diga si los valores de alguna de las medidas cambian a medida que cambian los valores de la otra medida, o si por el contrario los valores de estas medidas no se relacionan entre sí. Justifique la respuesta.
<table>
<tr><th>Valores representados por</th><th>Escriba si una medida cambia o no con los cambios de la otra medida</th><th>Justifique su respuesta</th></tr>
<tr><td>A (altura del nivel de agua) y F (tiempo transcurrido)</td><td>Si</td><td>si la llave se modifica la altura tambien cambiara y el tiempo sera mas corto</td></tr>
</table></td><td>Categoría 1 Indicador 1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Pregunta 3 Opción 1</td><td>29</td><td>Suj16</td><td>3.1.
<table><tr><td>Valores de A (dado en cm)</td><td>1,2</td><td>2,5</td><td>3,9</td><td>5,4</td><td>7,0</td></tr><tr><td>Valores de F (dado en Segundos)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>
Justifique su respuesta: Puede que la altura se ha mas que 7,0 en 5 segundos por que puede que el chorro se ha mas rapido o mas lento.</td><td>Categoría 2 Indicador 1</td></tr>
<tr><td>Pregunta 3 Opción 1</td><td>30</td><td>Suj12</td><td>3.1.
<table><tr><td>Valores de A (dado en cm)</td><td>1,2</td><td>2,5</td><td>3,9</td><td>5,4</td><td>7,0</td></tr><tr><td>Valores de F (dado en Segundos)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr></table>
Justifique su respuesta:
1,2 segundo si corresponde el resto no corresponde a el tiempo ya es muy extremo.</td><td>Categoría 2 Indicador 1</td></tr>
<tr><td>Pregunta 3 Opción 2</td><td>27</td><td>Suj9</td><td>3.2.
<table><tr><td>Valores de A (dado en cm)</td><td>1,4</td><td>2,8</td><td>4,2</td><td>5,6</td><td>7,0</td></tr><tr><td>Valores de F (dado en Segundos)</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr></table>
Justifique su respuesta: Si es constante y logico por que cada segundo que pasa se llena 1,4 cm de agua y por lo cual esta tabla si es correcta.</td><td>Categoría 2 Indicador 1</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Pregunta 3
Opción 2</td>
<td>28</td>
<td>Suj14</td>
<td>
3.2.
<table>
<tr><td>Valores de A (dado en cm)</td><td>1,4</td><td>2,8</td><td>4,2</td><td>5,6</td><td>7,0</td></tr>
<tr><td>Valores de F (dado en Segundos)</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr>
</table>
Justifique su respuesta: si es por que cada segundo cae la misma cantidad de agua por segundo
</td>
<td>Categoría 2 Indicador 1</td>
</tr>
<tr>
<td>Pregunta 8
gráfica 4</td>
<td>52</td>
<td>Suj5
Suj</td>
<td>


La grafica 4 muestra como en el tiempo que trancurre va aumentando la altura del agua en el recipiente
Elegí el grafico #4 a traves de la duracion de segundos va subiendo diagonalmente
</td>
<td>Categoría 3 In
dicador 3</td>
</tr>
</table>

			Yo digo que es esta ya-que la duracion en segundos de-termina el nivel del agua en el vaso	
Pregunta 8 gráfica 3	53	Suj16 Suj9 Suj	 Grafico 3= Por que va mostrando mas evidenciadamente la la alteracion de la altura del agua por segundo	Categoría 3 Indicador 3

			Para mí es la grafica 3 porque mientras pasan los segundos aumenta la altura del nivel del agua y es la que mejor representa el caso. yo escojo la grafica 3 porque va mostrando mas valanceadamente la alteracion dela altura del agua por segundo	
Situación 4 Movimiento Pregunta 1	105	Suj19	1 ¿Para cuál o cuáles de estos carros se puede afirmar que para incrementos iguales de tiempo se tienen incrementos iguales de la distancia? yo diria que la (A) y la (b) ya que empiezan con numeros muy parecidos	Categoría 4 Indicador 1
Pregunta 5	106	Suj19	5. ¿Para cuál o cuáles de los tres carros se pude afirmar que a incrementos iguales del tiempo no corresponden incrementos iguales de la distancia? Justifique su Si es verdad ya que el incremento del tiempo no tiene nada que ver con la distancia.	Categoría 4 Indicador 1