PROCESO DE MODELACIÓN DESARROLLADO POR ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO EN SITUACIONES DE COVARIACIÓN LINEAL

LYDA ESPERANZA MORALES MORA

MAURICIO PÉREZ OVALLE

VIRGILIO ROMERO DIAZ

DIRECTORA

MARTHA ALBA BONILLA ESTÉVEZ

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

BOGOTÁ D.C. 2018

PROCESO DE MODELACIÓN DESARROLLADO POR ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO EN SITUACIONES DE COVARIACIÓN LINEAL

LYDA ESPERANZA MORALES MORA

MAURICIO PÉREZ OVALLE

VIRGILIO ROMERO DIAZ

Trabajo de Grado presentado como requisito para optar al título de:

MAGISTER EN EDUCACIÓN

DIRECTORA

MARTHA ALBA BONILLA ESTÉVEZ

PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

BOGOTÁ D.C. 2018

RECTOR:	JORGE HUMBERTO PELÁEZ PIEDRAHITA. S.J.
DECANO ACADÉMICO:	FÉLIX ANTONIO GÓMEZ HERNÁNDEZ, Ph.D.
DIRECTOR DE POSTGRADOS:	RICARDO MAURICIO DELGADO SALAZAR, Ph.D.
DIRECTOR DE LA LÍNEA:	JORGE CASTAÑO GARCÍA, Ph.D.
DIRECTORA DE TESIS:	MARTHA ALBA BONILLA ESTÉVEZ, Mg.

Nota de advertencia

"La universidad no se hace responsable por los conceptos emitidos por sus alumnos en sus trabajos de tesis. Sólo velará porque no se publique nada contrario al dogma y a la moral católica y porque las tesis no contengan ataques personales contra persona alguna, antes bien se vean en ellas el anhelo de buscar la verdad y la justicia."

Artículo 23, resolución No 13 del 6 de Julio de 1946,
por la cual se reglamenta lo concerniente a Tesis y Exámenes de Grado
en la Pontificia Universidad Javeriana.

Agradecimientos

A Dios por su inspiración. A todas y cada una de las personas que han contribuido y colaborado en la elaboración de este trabajo, pero especialmente mis más sinceros agradecimientos a la profesora Martha Bonilla por su paciencia, su dedicación y su entrega, quien con su ejemplo ha enriquecido mi formación personal y profesional. (Lyda)

Queremos agradecer el apoyo continuo de nuestras familias, y en especial de nuestras parejas, mientras trabajábamos intensamente en esta investigación. Por otra parte, agradecimiento a los evaluadores de este proyecto por sus valiosos comentarios y sugerencias. No puede faltar reconocimiento a nuestra tutora por su trabajo en la construcción de este documento.

"Dios creo los números. El hombre todo lo demás"

Leopold Kronecker, matemático del siglo XIX

(Mauricio)

A ti Dios mío, bendito y alabado seas siempre.

A la profesora Martha Bonilla por su invaluable tutoría en la construcción de este proyecto y aportes al crecimiento profesional.

(Virgilio)

Dedicatoria

A mi madre quien me ha acompañado incondicionalmente en mi formación personal y profesional.

A mi esposo por su amor, comprensión y constante ayuda que me ha brindado hasta el día de hoy.

Y a mi pequeño hijo por su paciencia para esperar la ida al parque.

(Lyda)

A mi sobrino Isaac Matías, a mi ahijado Thomas Felipe, a mis padres, a mis hermanas y a mi amada esposa.

(Mauricio)

A mi papito, mi mamita, hermana y hermanos por estar siempre juntos en esta aventura llamada vida.

(Virgilio)

Tabla de contenido

Índice de tablas

Resumen

La siguiente investigación indagó sobre el proceso de modelación desarrollado por estudiantes de grado noveno en situaciones de covariación lineal. En cuanto a la metodología, se empleó un enfoque de investigación mixto, que se estructura en dos componentes, uno cuantitativo y el otro cualitativo.

En el componente cuantitativo se describió el éxito de los estudiantes al abordar resolución de situaciones que implican las primeras fases de la construcción de modelos matemáticos. En el cualitativo se refirió detalladamente el proceso de construcción de modelos que siguen los estudiantes a través de la aplicación de una secuencia didáctica

Los resultados obtenidos muestran que en la modelación matemática es necesario involucrar procesos específicos propios del pensamiento variacional y el razonamiento covariacional, además de situaciones del contexto cercano a los estudiantes con el fin de apuntar a un desarrollo del pensamiento matemático que les posibilite atender y solucionar situaciones de su entorno empleando la función lineal.

Palabras clave: *Modelación matemática, pensamiento variacional, razonamiento covariacional, función lineal, proceso.*

Abstract

The following investigation inquired about the modeling process developed by ninth grade students in situations of linear covariation. Regarding the methodology, a mixed research approach was used, which is structured in two components, one quantitative and the other qualitative.

The first is a descriptive type proposing an entry activity whose purpose is to specify the success of the students when dealing with situations that involve the first phases of the construction of mathematical models. The second purpose is to detail the process of construction of models that students follow through the application of a didactic sequence.

The results obtained show that in mathematical modeling it is necessary to involve specific processes of variational thinking and covariational reasoning, as well as situations of the students' context in order to point to a development of mathematical thinking that enables them to attend and solve situations of its environment using linear function.

Keywords:

Mathematical modeling, variational thinking, covariational reasoning, linear function, process.

Introducción

El diseño y planeación de las prácticas de enseñanza de las matemáticas deben considerar, en concordancia con los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) y los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006), procesos generales como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, también conocimientos específicos del pensamiento numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional; además, situaciones del contexto, ya sean propias de las matemáticas, de la vida diaria o de otras ciencias.

Componentes en la estructura curricular del área de matemáticas que requieren no limitar las prácticas de enseñanza a la transmisión de saberes para una mecanización y ejercitación de procedimientos, sino ampliar a prácticas pedagógicas que permitan a los estudiantes una reconstrucción significativa de saberes matemáticos y el desarrollo de procesos de pensamiento con los cuales pueden responder a los retos de la sociedad en la que se desenvuelven.

Sin embargo, a pesar de que en los documentos oficiales desde hace dos décadas se subraya la importancia de cambiar las prácticas pedagógicas, aún se presentan procesos de enseñanza anclados a los métodos tradicionalistas que distan cada vez más de los propósitos educativos mencionados, y como lo manifiesta Agudelo (2007) "la brecha entre las disposiciones educativas colombianas y las prácticas del aula de matemáticas continúa creciendo a medida que se expiden nuevas disposiciones y nuevos lineamientos curriculares. Las nuevas disposiciones y lineamientos educativos se convierten en simple retórica" (p. 59).

Es entonces necesario que nosotros los profesores transformemos nuestras prácticas pedagógicas a los fines educativos y orientaciones de los documentos oficiales en educación; toda vez que, el diseño y planeación de las prácticas de enseñanza de las matemáticas no deben considerar sólo procesos generales, procesos específicos y situaciones del contexto, sino que también, como lo afirma Villa-Ochoa (2009) es necesario que los profesores promuevan "la elaboración en interpretación de modelos, con el ánimo de construir un concepto matemático dotado de un significado, y con la intención de despertar una motivación e interés por las matemáticas debido a que esta área del conocimiento tiene con los problemas del contextoreal de los estudiantes " (p. 4-5), por ello que esta investigación, aunque se centra en el proceso de modelación, lo contextualiza a situaciones de variación lineal y enfatiza en promover en los estudiantes el razonamiento covariacional.

Ante este reto pretendimos con esta práctica investigativa realizar una experiencia y una descripción del proceso de modelación desarrollados por algunos estudiantes de grado noveno en situaciones del entorno que presentan covariación lineal; de tal manera que tanto las situaciones como las experiencias de aula y los resultados puedan ser utilizados por los compañeros, así como plantear posteriores investigaciones con el propósito de profundizar en el estudio de los procesos de modelación que siguen los estudiantes al modelar situaciones contextualizadas que les ayuden a construir conceptos como el de función como modelo de diferentes tipos de variación, lo que esperamos pueda coadyuvar al mejoramiento de los aprendizajes de nuestros estudiantes.

Para lograr este objetivo se adoptó un enfoque de investigación mixto, definido como "la integración sistemática de los métodos cuantitativo y cualitativo en un solo estudio con el fin de obtener una "fotografía" más completa del fenómeno" (Chen 2006) citado por Hernández, Fernández y Baptista (2014, p.534), y descrito como aquel que "comienza con una amplia encuesta con el fin de generalizar los resultados a una población y después, en una segunda fase, se centra en entrevistas abiertas y cualitativas para conocer los puntos de vista detallados de los participantes" por Creswell (2009) citado en Castro y Godino (2014, p. 101).

De tal manera que esta investigación se estructuró en dos grandes componentes, uno cuantitativo y el otro cualitativo. El componente cuantitativo fue de tipo descriptivo, porque "se busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis" (Hernández et al., 2014, p. 92). Para este componente se consideró las respuestas de los estudiantes a una prueba de entrada con el fin de cuantificar el porcentaje de éxito de ellos al abordar la resolución de situaciones que implican las dos primeras fases de la construcción de modelos matemáticos propuesto por Bassanezi (2002).

De otro lado, el componente cualitativo, tuvo como propósito describir de manera detallada el proceso de construcción de modelos que siguieron algunos estudiantes participantes cuando resolvieron las actividades que conformaron la secuencia didáctica. En este componente se utilizó el método de estudio de caso (Stake, 2007) y los datos que se analizaron corresponden a las respuestas dadas por dos estudiantes a cada una de las tareas propuestas en una secuencia didáctica integrada por tres actividades, dichos datos se complementaron con entrevistas realizadas a cada uno de los dos estudiantes de los cuales se describe el proceso; instrumentos que se diseñaron tomando como base las cinco fases para la construcción de un modelo matemático propuestas por Bassanezi (2002).

Capítulo 1

1. Preliminares

1.1 Antecedentes

Como el interés de esta investigación es describir el proceso de modelación desarrollado por estudiantes de grado noveno en situaciones de covariación lineal, se revisaron algunas investigaciones y artículos cuyas temáticas abordan el estudio de la modelación matemática así como del concepto de función y del razonamiento covariacional con el propósito de establecer algunos referentes que puedan orientar su desarrollo.

En cuanto a estudios relacionados con la modelación encontramos las siguientes investigaciones:

Varios son los autores que tematizan la modelación y sus posibilidades de inserción en los procesos de enseñanza y aprendizaje escolar. Según Bassanezi (2002, p. 36) en su libro Ensino-aprendizagem com modelagem matemática, citando a Blum, Niss y Huntley (1989) afirma que existen diversos argumentos para utilizar la modelación como estrategia de enseñanza de las matemáticas:

- Argumento formativo: enfatiza las aplicaciones matemáticas y el rendimiento modelado y resolución de problemas, como proceso para desarrollar la capacidad en general y las actitudes de los estudiantes, haciéndolos exploradores, creativos y hábiles en la resolución de problemas relacionados con su realidad.
- Argumento de competencia crítica: se centra en la preparación de los estudiantes para la vida real como ciudadanos actuantes en la sociedad, competentes para ver, formar juicios propios, reconocer y entender ejemplos representativos de aplicaciones de conceptos matemáticos.

- Argumentos de utilidad: enfatiza que la instrucción matemática pueda preparar el proceso del estudiante para utilizar el conocimiento matemático como herramienta para resolver problemas en diferentes situaciones y áreas.
- Argumento intrínseco: considera que la inclusión de modelado y sus aplicaciones, proporcionan al estudiante un rico arsenal para entender e interpretar las matemáticas en todas sus facetas.
- Argumento de aprendizaje: garantiza que los procesos de aplicación facilitan al usuario, el estudiante, comprender mejor los argumentos matemáticos, guardar los conceptos y los resultados y valorar la propia matemática.
- Argumento de alternativa epistemológica: el modelado también encaja en el Programa Etnomatemática indicado por D´Ambrosio "que propone un enfoque epistemológico alternativo asociado a una histografía más amplia. Parte de la realidad y llega, de manera natural, actuando de esta forma como una metodología más adecuada a las diversas realidades socioculturales (traducción nuestra, p. 36-37)

Todos estos argumentos apuntan a visualizar la utilización de la modelación de situaciones del contexto, con la finalidad de propiciar habilidades para que los estudiantes comprendan matemáticamente la realidad, reconceptualicen el significado de los conceptos y procesos matemáticos involucrados y mejoren su interés y actitud hacia las matemáticas.

De otro lado, Bassanezi (2002) también muestra que a pesar de los argumentos que favorecen la inclusión de la modelación en el aula, existen obstáculos que se deben tener en cuenta. Tales obstáculos son: instruccionales, para los estudiantes y para los profesores. Destacando que en las instituciones los currículos propuestos son rígidos y es responsabilidad del profesor cubrirlo todo, lo cual puede resultar posible cuando se trabaja la modelación, pues este es un proceso lento y que demanda tiempo. De otro lado, señala que los estudiantes y los profesores no están acostumbrados a este tipo de trabajo en el aula y por tanto muestran muchas reticencias a la hora de cambiar sus prácticas (p. 37).

Biembengut y Hein (2004) en el artículo titulado "Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática" presentan las principales consecuencias de la modelación matemática en la enseñanza de las matemáticas basadas en una investigación realizada en el 2001 y 2002 con un grupo de 30 profesores de varios niveles de enseñanza.

Se planteó a los docentes la implementación de la modelación matemática a través de dos tipos de abordajes "el primero, le permite desarrollar el contenido programático a partir de modelos matemáticos aplicados a las más diversas áreas del conocimiento y el segundo orienta a sus alumnos para que hagan un trabajo de modelaje" (Biembengut y Hein, 2004, p. 108).

Para desarrollar el de contenido programático, el profesor elige un tema de algún área del conocimiento que sea de interés para los alumnos y elabora un modelo matemático, o, por el contrario, elige un modelo matemático aplicado a la física, la química o cualquier otra área y lo adapta a sus contenidos a través de siete etapas que se pueden desarrollar durante diferentes horas de clase. A los profesores se les mostró un ejemplo específico que podían usar como guía o incluso adaptarlo a sus clases.

El segundo abordaje tiene como objetivo crear condiciones para que los alumnos aprendan a investigar y elaboren modelos matemáticos para algún área del conocimiento y se va desarrollando de manera paralela a los contenidos programáticos. Se desarrolla en cinco etapas y son los mismos estudiantes quienes eligen sus temas.

Al evaluar el proceso y el resultado, los investigadores encontraron ventajas tales como:

En relación con el modelo guía

- Permite al estudiante una mejor comprensión de los contenidos desarrollados y mejora el interés que demuestran los estudiantes por las matemáticas gracias a esa aproximación con las áreas afín y por su aplicación.
- Permite mayor seguridad en el profesor ya que puede definir muy bien los tiempos de trabajo, presentar ejemplos análogos y retomar el modelo director para resolverlo y evaluarlo.

En relación con el trabajo de modelación

- Contribuye al estudiante para que sea el mismo quien actúe e investigue, sea capaz de crear su propio conocimiento con un sentido crítico, especialmente en lo que tiene que ver con la formulación y la validación del modelo.
- Permite al profesor estar más atento a las dificultades de los estudiantes, aprovechar el desarrollo de modelo para enfatizar gradualmente en los temas y a su vez modificar criterios e instrumentos de evaluación.

Las principales dificultades se centran en la formación de los profesores ya que durante su formación, rara vez reciben orientación sobre la modelación ni cómo pueden usar este procedimiento en la enseñanza formal. Para los estudiantes, debido a la vivencia constante en la enseñanza tradicional, la modelación les genera cierta resistencia ya que es un método que requiere mayor empeño y trabajo en los estudios, la investigación y la interpretación del contexto (Biembengut y Hein, 2004).

Algunas de las conclusiones a las que llegaron estos investigadores es que aunque el proceso de modelación como metodología no es la única forma de superar los problemas en las aulas con respecto a la enseñanza de las matemáticas, sí representa un avance importante ya que se deja de transmitir conocimiento a través de técnicas de resolución y pasa a ser una estructura del conocimiento, pero esto implica un mayor trabajo de estudio, investigación e interpretación de contextos tanto para el profesor como para los estudiantes.

El adoptar modelos matemáticos en la enseñanza adecuados al entorno y la realidad de los estudiantes, propicia un mejor desempeño de estos y los convierte en agentes de cambio (Biembengut y Hein, 2004).

Mancera, Camelo y Perilla (2016) presentaron un artículo donde analizan la creación y el desarrollo de un ambiente de modelación matemática pensado desde una perspectiva socio crítica y el cual fue aplicado en un colegio público de Bogotá con estudiantes de grado undécimo. "La intención no es solamente la de desarrollar habilidades en la realización de cálculos y procedimientos matemáticos, sino también la de posibilitar espacios para que los estudiantes participen críticamente de la sociedad en que se desenvuelven" (Mancera et al., 2016, p. 72).

Para la aplicación retomaron a Barbosa (2004) quien propone que los ambientes de modelación se pueden presentar a los estudiantes de tres maneras diferentes a las que él denomina casos. En la primera manera el profesor hace una propuesta de problemas con datos cualitativos y cuantitativos los cuales no necesitan que los estudiantes busquen información adicional. Para la segunda el profesor propone un marco general en donde son los estudiantes los que definen qué estudiar y cómo estudiarlo, para lo cual necesitan de información adicional que deben buscar los mismos estudiantes; específicamente el problema propuesto fue sobre telefonía móvil, por ser un tema de actualidad y que presentaba en el país una problemática para ese momento y se busca que los estudiantes propongan un modelo para dar solución a una situación determinada y al mismo tiempo puedan dar cuenta de las consideraciones que tuvieron para construirlo. En la tercera manera se desarrollan proyectos a partir de problemas no matemáticos que los proponen directamente los estudiantes y que involucra reformular preguntas y resolverlas, entre algunos temas que surgieron estaban las dificultades en la conexión, robo de celulares, duración de las baterías, costos de los teléfonos en Colombia y en el exterior, entre otros.

Para el desarrollo del trabajo de aula se organizó a los estudiantes por grupos y a través de la guía del maestro, quien jugó un papel preponderante en conducir y puntualizar a una posible pregunta de investigación y con ayuda de la tecnología lograron encontrar la forma de traer al aula problemáticas de la realidad de los estudiantes, utilizando la matemática como una herramienta para el análisis y la crítica de dicha situación.

En algunas conclusiones los autores mencionan que "estos ambientes pueden ser considerados como posibilidades para explorar los papeles que la matemática desempeña en la sociedad" (Mancera et al., 2016, p.81). Esto implica crear ambientes de modelación que vayan más allá de sólo estar preocupados por la gestión de la clase, sino que permite a los estudiantes el asumir posicionamientos críticos. Frente a la manera en que se planteó la actividad, los estudiantes participaron de forma interesada en la construcción del modelo matemático, debido a que encontraron un alto grado de identificación con la problemática abordada ya que los temas los afectaban directa o indirectamente, comprendiendo la importancia de la reflexión y la crítica de los modelos matemáticos y la forma en que se pueden utilizar para la toma de decisiones. Según los autores, el maestro "requiere trascender la enseñanza de una matemática lineal y algorítmica, a una que opte por un proceso en el cual el estudiante tenga otro rol en el que sea partícipe de la construcción de su propio conocimiento" (Mancera et al., 2016, p. 82).

Por otro lado, encontramos un artículo de Villa, González y Carmona (2018), el cual se titula "Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea" donde presentan un trabajo que tenía como fin reconocer las contribuciones que los contextos y las tecnologías ofrecen a la comprensión de la tasa de variación instantánea como aproximación a la derivada en un punto, a través de la modelación. Los autores mencionan que "las tecnologías digitales cumplen un rol fundamental para la obtención y análisis de datos, producción de modelos o la validación y análisis de éstos" (Villa et al., 2018, p. 26). Citando a Arcavi (2008), sustentan que "los entes modelados no tienen que articularse de forma necesaria a fenómenos extramatemáticos, por lo tanto, situaciones y fenómenos de la misma matemática pueden ser susceptibles de ser modelados, de esa manera, toda práctica matemática es una práctica de modelación" (Villa et al, 2018, p. 26).

La intervención se desarrolló por medio de una metodología cualitativa a través del estudio de casos en el cual participaron cuatro estudiantes de precálculo de una universidad pública de Medellín. En las sesiones planteadas, las estudiantes se dedicaron al estudio de tareas referidas a la modelación de fenómenos de covariación, con el propósito de analizar el comportamiento de variables, reconocer patrones y establecer mecanismos que permitieran la construcción de modelos que representaran la covariación, todo esto trabajado a través de planteamientos presentados en software como Modellus y Geogebra que les permitieron recrear un movimiento uniforme y acelerado. Opinan que "las tecnologías utilizadas involucran la posibilidad de explorar y coordinar diferentes representaciones, visualizaciones y en el análisis de datos numéricos" (Villa et al., 2018, p. 32).

Dentro de los resultados del estudio presentan algunas conclusiones como que "existen estudiantes para quienes la secuencia de refinamientos más pequeños en la tasa de variación media no es suficiente para comprender la tasa de variación instantánea" (Villa et al., 2018, p. 32). Conclusión opuesta a lo que señala Carlson. También concluyen que "En la conjunción entre modelación y tecnologías se constituyó un sistema de experiencias, significados y representaciones a través de los cuales la tasa de variación instantánea cobró sentido para las estudiantes (Villa et al, 2018, p. 33). Muestran cómo el material obtenido por el manejo de software fue utilizado como insumo para la construcción de representaciones gráficas y algebraicas del modelo matemático.

Se encuentra otro artículo de Villa (2015) en el cual reporta algunos resultados de un estudio de caso cualitativo que tenía como fin indagar sobre la manera en que un conjunto de profesores de educación secundaria usan la modelación en la enseñanza de las matemáticas y que uno de los problemas es que "en el caso de la modelación matemática, los mecanismos generados parecen ser insuficientes para que se logre una apropiación e implementación de este proceso en las aulas de clase" (Villa, 2015, p. 135). Esto debido a la existencia de barreras diferentes de índole matemática, pedagógica y hasta personal que la modelación impone a los profesores.

El artículo hace referencia a una investigación realizada con cuatro profesores que se desempeñaban en diferentes niveles de instituciones educativas estatales, formados como profesores de matemáticas y uno de ellos con una especialización en enseñanza de las matemáticas. Inicialmente los profesores fueron observados en su ejercicio docente, luego se les aplicó un cuestionario, posteriormente se desarrolló una discusión grupal de tres episodios preparados sobre modelación y finalmente se les hizo una entrevista. El método adoptado en esta investigación fue el estudio de casos dando atención especial a las verbalizaciones de los profesores en sus diálogos tanto con los colegas, como con el investigador y con sus estudiantes, junto con las formas en que reconocen la modelación dentro del aula y cómo se lleva a cabo.

En las discusiones finales se presenta que "en los profesores analizados en este artículo, los enunciados verbales (rutinarios) parecen ser una de las principales maneras (quizás la única) de establecer relaciones entre las matemáticas y la cotidianidad de los estudiantes" (Villa, 2015, (Villa, 2015, p. 145). Aunque para los docentes es importante que la matemática trascienda la realidad, generalmente se obvian los contextos culturales de los estudiantes y se queda en enunciados verbales rutinarios que revisten un contenido matemático en contextos artificiales. Se requiere por lo tanto propiciar espacios de formación tanto para estudiantes como para profesores que les permita afrontar el componente de la modelación dentro de la actividad matemática y que éste mismo debe ser desarrollado en el aula. (Villa, 2015).

Los anteriores estudios de modelación fueron tomados como base para el desarrollo del presente trabajo de investigación.

Dentro de los estudios relacionados con el concepto de función y procesos de modelación encontramos los siguientes trabajos y artículos:

Posada y Villa (2006a (MEN, 1998)) presentan un trabajo de maestría titulado "Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional" el implementación de una propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal a partir de tres elementos didácticos fundamentales que son: la noción de variación, el proceso de modelación matemática y los registros semióticos de representación. Dicha propuesta fue aplicada a estudiantes de educación básica secundaria. Este estudio se basó en el proceso de modelación de Bassanezi y aunque tuvo especial trabajo en la segunda fase (abstracción – formulación), ellos consideran que es en la formulación donde se debe tener el mayor cuidado por la implicaciones didácticas y matemáticas que tiene, pero sin desconocer la importancia de las demás fases. Algunas de las conclusiones de este trabajo son:

- La función es un concepto que ha evolucionado históricamente desde la identificación de regularidades, razones y proporciones, descripción de gráficas hasta llegar a la función como objeto abstracto.
- Para que se pueda alcanzar un buen desarrollo conceptual de la función lineal con los estudiantes, desde una perspectiva variacional, se requiere tener en cuenta aspectos tales como: la identificación de las relaciones de dependencia entre dos magnitudes, la cuantificación de la relación mediante tabla de valores, la identificación de la razón de

cambio constante, reconocimiento de la razón de cambio constante como elemento que identifica las funciones lineales, la comprensión de la función lineal como un modelo que atrapa la covariación entre dos magnitudes, la identificación de la proporcionalidad simple directa como un caso particular de función lineal importante en la modelación de variados fenómenos y la identificación de las características de una función lineal desde los diferentes registros de representación.

- Desarrollar un enfoque de modelación matemática requiere largos períodos de tiempo y por lo tanto debe ser una tarea emprendida desde los primeros años de escolaridad (Posada y Villa, 2006a)

Como conclusión del trabajo afirman que: "En síntesis, una buena comprensión del concepto de función, implica pensarlo como un modelo matemático de relaciones de variación, apoyado en los diferentes sistemas semióticos de representación" (Posada y Villa, 2006a, p. 178).

Villa (2008) realizó una investigación en cooperación entre el programa de educación formal para adultos del Instituto Técnico Metropolitano y la Universidad de Antioquia, bajo el título "El concepto de función en las matemáticas escolares", en la cual se retoma la tesis propuesta por Posada y Villa (2006a) en donde se afirma que una didáctica del concepto de función debe abordar los aspectos de la variación, la modelación y los sistemas de representación. Con base en este planteamiento se construye una propuesta didáctica que pretende potenciar el entendimiento de algunos aspectos de la función lineal y cuadrática (Villa, 2008, p. 245).

Este autor diseñó una actividad contextualizada en la física, más precisamente en la caída libre de un objeto. Ésta es una situación de variación cuadrática que le permite iniciar la construcción del concepto de función de este tipo y propone tres momentos para que los estudiantes de manera progresiva analicen las características de la función. En el primer momento se pretende que los estudiantes realicen descripciones cualitativas escritas en lenguaje matemático, reconozcan algunas cantidades que intervienen en la caída libre de un objeto tales como la altura del objeto, la velocidad con la que cae, la aceleración, entre otras, orientándolos hacia el reconocimiento de relaciones de dependencia entre ellas y empleen lenguaje matemático y diversos sistemas de representación.

En el segundo momento plantea una guía experimental, en donde con materiales apropiados determinan tiempo, velocidad y distancia y así recopilar información en tablas, a partir de ellas se hace una gráfica en el plano cartesiano y por medio de ésta se debe identificar características de la razón de cambio. En el tercer momento se utiliza la simulación del fenómeno en un software, con el cual los estudiantes pueden generar relaciones entre las magnitudes y así construir un modelo algebraico.

Cada uno de los tres momentos fue diseñado con el objetivo de seguir a grosso modo las fases del proceso de modelación propuestas por Bassanezi (2002). Finalmente, dentro de algunas conclusiones de la investigación, Villa plantea que es posible alcanzar un buen desarrollo conceptual de la función desde una perspectiva variacional a través del proceso de modelación.

Por otra parte, a nivel internacional encontramos a López y Sosa (2008) quienes presentaron un artículo que corresponde a una investigación realizada con el fin de identificar factores que influyen en las dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. También reportaron factores de carácter cognitivo, epistemológico y didáctico que influyen en los estudiantes en cuanto al aprendizaje del concepto de función.

La investigación se llevó a cabo en tres etapas, en la primera hicieron una revisión documental en busca de las prácticas de enseñanza y la evolución del concepto de función. En la segunda etapa se elaboraron unos cuestionarios, los cuales se basaron en los errores reportados por otras investigaciones sobre las nociones e ideas de función, y en la tercera etapa se analizaron e interpretaron los resultados obtenidos en la implementación de los instrumentos anteriores a los estudiantes de bachillerato de un colegio de Yucatán.

En las conclusiones se pueden resaltar algunas, como la que menciona que los literales empleados tanto en las ecuaciones como en las funciones suelen ser las mismas, por lo que es necesario presentar problemas con literales que tengan significados distintos cuando se trate de variables y cuando se trate de incógnitas. Otra conclusión, es que la utilización de diferentes sistemas de representación para la función de forma aislada o sin articulación, no favorece en el estudiante la construcción del concepto de función. De igual manera se afirma que al dar la definición mediante conjuntos, se limita y esconde el carácter variacional que posee la función. Finalmente se menciona que los estudiantes generalmente son capaces de reconocer las variables que intervienen en un fenómeno, sin embargo, se les dificulta plantear un fenómeno de carácter variacional (López y Sosa, 2008).

Estas investigaciones y artículos han sido parte fundamental en la estructuración del presente trabajo porque nos indican que desde hace rato se viene hablando de la modelación y el currículo.

Algunos de los estudios relacionados con el razonamiento covariacional consultados son:

El trabajo de investigación de grado de maestría que Gómez (2015) realizó con estudiantes de grado noveno, profundizando en el estudio de producciones escritas y verbales, cuando estos abordan tareas asociadas al desarrollo del pensamiento variacional, específicamente usó la propuesta de niveles y acciones mentales de Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu (2003).

Algunas conclusiones a las que llegó con este trabajo se pueden resumir como:

- Los niveles de razonamiento covariacional de Carlson, parecen describir el razonamiento presentado por los estudiantes en el estudio de situaciones relacionadas al cambio y la variación.

- El planteamiento de tareas y el uso de las simulaciones permitieron lograr desarrollo del pensamiento variacional.
- El uso de software dinámico facilita en los estudiantes hacer cambios de representación.
- Preguntar por ¿qué cambia?, ¿cómo cambia? y ¿cuánto cambia? fue de vital importancia para originar la evolución en el razonamiento, de esta manera el estudiante estuvo en constante reflexión sobre sus procesos de pensamiento y esto le permitió validar y justificar los procesos de cambio y variación que consideraba en la producción escrita y la experimentación de las tareas (Gómez, 2015)

Otros autores como Grueso y González (2016) diseñaron una propuesta de aula, la cual se aplicó a estudiantes de grado noveno, para el estudio de la función a través situaciones de covariación dentro de eventos dinámicos, asume como marco teórico y metodológico los Modelos Teóricos Locales (MTL), propuestos por Filloy (1999), cuyas componentes son el de competencia formal, el de enseñanza, el de cognición y el de comunicación, los cuales se fundamentan en la observación experimental y la replicabilidad de diseños experimentales.

La propuesta intentó potencializar, a través de tareas de covariación, el desarrollo del pensamiento variacional propuesto por el MEN (2006). Dentro de dichas tareas de covariación, se estudió el concepto de función a través del uso y articulación de diversos registros de representación. Después de la implementación, se caracterizaron y analizaron las actuaciones de los estudiantes según los niveles de covariación de Carlson et al. (2003), los sistemas matemáticos de signos y los aspectos matemáticos involucrados. Se desarrolló también un análisis de dos textos escolares en los cuales encontraron que si bien proponen contextos de fenómenos de cambio para el estudio de la función lineal en las definiciones explícitas se excluye ese contexto dinámico y se restringe a un enfoque conjuntista, donde prima la correspondencia entre dos conjuntos y la representación por parejas ordenadas en el plano cartesiano.

Algunas de las conclusiones a las que llegaron estos autores son:

- El desarrollar tareas en torno a la covariación permitió que los estudiantes, a través de preguntas específicas, obtuvieran avances en las formas de razonamiento que usaban, evidenciando un acercamiento a nociones asociadas al concepto de función y de esta manera se llegó a clasificarlos en un nivel N3 de razonamiento covariacional propuesto.
- A partir de los resultados de los estudiantes se pudo afirmar que la mayoría de ellos identificó, describió e interpretó adecuadamente el significado de los cambios de una variable y los cambios de otra, lo cual implicó un comportamiento asociado a la acción mental 3 (AM3) que a su vez da cuenta de la coordinación cuantitativa de los cambios de una variable con los cambios en la otra.
- Respecto a los sistemas semióticos de representación, los estudiantes evidenciaron poco a poco a través del desarrollo de las tareas un mayor dominio de los distintos registros, por ejemplo, para poder esbozar las gráficas, acudían al uso del software, que les proporciona representaciones dinámicas y múltiples registros como el tabular, lenguaje simbólico o algebraico, y el grafico. El uso sistémico de estos registros permitió que la mayoría de los estudiantes lograran sustentar verbalizaciones asociadas a las formas de cambio, la dirección de los cambios y la cuantificación de ellos.
- Al trabajar la función desde la concepción de relación de dependencia y no con base en gráficas y tablas a partir de expresiones algebraicas, permitió transformar en los estudiantes el concepto de que la función es una correspondencia como consecuencia de cálculos algorítmicos mediados por una regla de asignación.
- Finalmente pudieron afirmar, por las actuaciones de los estudiantes, que el concepto de función se puede y se debería trabajar a partir de tareas de covariación ya que estas

permiten observar el comportamiento dinámico que subyace a dicho concepto (Grueso y González, 2016).

Las anteriores referencias han sido tenidas en cuenta en el desarrollo del presente estudio y nos permitirán describir el proceso de modelación a partir de las acciones mentales que muestren los estudiantes cuando abordan la resolución de situaciones del entorno que presentan covariación lineal.

1.2 Planteamiento del problema

Desde nuestros inicios como profesores de matemáticas en la educación básica y media nos ha interesado realizar prácticas de enseñanza que conduzcan al desarrollo del proceso de modelación en nuestros estudiantes. Interés suscitado no sólo por su uso en ciencias o en otras disciplinas para tomar decisiones o predecir comportamientos en fenómenos físicos o científicos, sino también por realizar prácticas pedagógicas que se enmarquen en los propósitos educativos del país plasmados en los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) y en los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006), así como para estar alineados con los requerimientos de las pruebas estandarizadas de tipo nacional o internacional.

En los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) se asevera que el desarrollo del proceso de modelación debe ser continuo y progresivo en toda la educación básica y media, potenciándolo junto con cada uno de los cinco pensamientos en el estudio de situaciones problemáticas propias del entorno escolar o de la cultura matemática. Siguiendo la propuesta de Hans Freudenthal (1977), se considera que la construcción de un modelo inicia con una situación problemática del contexto real, prosiguiendo con una formulación matemática de la misma, luego con el planteamiento del modelo teniendo presente que los objetos de la situación serán representados con objetos matemáticos y que las relaciones entre los objetos de la situación serán correspondidas mediante relaciones matemáticas, posteriormente, se debe proceder a la validación del modelo, para finalmente predecir comportamientos o tomar decisiones utilizando el modelo validado.

En MEN (2006) se considera que el proceso de modelación o matematización "puede entenderse como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente" (p. 53), indicando que aunque no hay una única manera de llegar a modelar situaciones, este proceso requiere decidir qué variables y relaciones entre ellas son importantes según la situación o problema a trabajar, para luego construir modelos que la representen y realizar predicciones que se validarán en consideración con dicha situación; requerimientos que presentan estrecha relación con las fases en la construcción de modelos descrita en los lineamientos curriculares.

Estos dos documentos orientadores también indican que, aunque el proceso de modelación se puede potenciar al estudiar objetos matemáticos específicos de cada uno de los cinco pensamientos matemáticos u otros campos del saber, es en el desarrollo del pensamiento variacional, y sus respectivos objetos matemáticos de estudio, donde este proceso toma prioridad y relevancia; planteamiento, que coincide con la postura de Vasco (2006) ya que este autor define el pensamiento variacional como una forma de pensar dinámica cuyo propósito rector es "tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad" (p. 6).

También se observa que el proceso de modelación es un componente de evaluación en pruebas de carácter internacional como las pruebas del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA), y en pruebas de carácter nacional como las SABER realizadas por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES).

En las pruebas PISA, en concordancia con marcos teóricos de PISA 2003, para el área matemáticas, se busca evaluar la competencia matemática del estudiante. Definiendo ésta como:

> La aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo (OECD e INECSE, 2004, p. 28).

Para estructurar la evaluación PISA contempla tres elementos. Uno de ellos son las situaciones en los que se sitúan los problemas, situaciones de carácter personal, educacional o profesional, publica y científica. El segundo, es el contenido matemático a utilizar para solucionar los problemas, clasificados en cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones, e inferencial. El tercero, las competencias matemáticas, refiriéndose a los procesos matemáticos que los estudiantes deben utilizar para resolver problemas (OECD e INECSE, 2004). Es pertinente aclarar, que PISA aunque considera la matematización como el proceso fundamental para resolver problemas, también incluye otros ocho procesos matemáticos.

La matematización, según PISA, es el camino fundamental que se espera utilicen los estudiantes para resolver los problemas propuestos; proceso que inicia con un problema enmarcado en la realidad, continuando con la sistematización del problema según conceptos matemáticos, para luego reducir la realidad mediante procedimientos como la consideración de cuáles son los rasgos importantes del problema, la generalización y la formalización, lo cual permitirá continuar con la resolución del problema en un contexto matemático, para finalizar analizando la solución matemática en el problema enmarcado en la realidad (OECD e INECSE, 2004, p. 30).

Los otros ocho procesos o competencias matemáticas (pensar y razonar, argumentación, comunicación, construcción de modelos, formulación y resolución de problemas, representación, empleo de operaciones y de un lenguaje simbólico, formal y técnico, y empleo de soportes y herramientas) se conciben necesarios y útiles en el proceso de matematización.

En las pruebas SABER 2016 de matemáticas para estudiantes de 3, 5, 9 y 11 la evaluación de los estudiantes se articula considerando el campo del saber y el campo de los procesos, los cuales se definen en correspondencia con los estándares básicos de competencias en matemáticas y los lineamientos curriculares de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional. El campo del saber, denominado componentes, está conformado por lo aleatorio, lo espacial-métrico y lo numérico-variacional. El campo de los procesos, denominado competencia, está compuesto por la comunicación, el razonamiento y la resolución. De esta articulación surgen unos resultados de aprendizajes y sus respectivas evidencias con los cuales se realiza un informe detallado para cada institución educativa participante en la evaluación.

Hasta aquí observamos que tanto los lineamientos curriculares de matemáticas, como las pruebas de tipo internacional y nacional comentadas anteriormente definen

para la estructuración curricular o el diseño de los tipos de tareas en las pruebas, respectivamente, tres tipos de componentes esenciales, expresados en términos de los lineamientos, el componente de los procesos generales, el de los procesos específicos y el del entorno.

Componentes que conducen a que en el diseño o planeación de las prácticas de enseñanza de las matemáticas deban incorporarse no sólo procesos generales como el de la modelación, sino que es necesario involucrar también procesos específicos, por ejemplo, los propios del pensamiento variacional; además, situaciones del contexto de los estudiantes; con el fin de apuntarle a un desarrollo del pensamiento matemático que posibilite a los estudiantes atender y solucionar situaciones de su entorno.

Condiciones que nos llevan a complejizar nuestro interés por prácticas de enseñanza que conduzcan a nuestros estudiantes al desarrollo del proceso de modelación de situaciones del entorno que involucren la covariación lineal; ya que para el noveno grado de la educación básica secundaria, espacio en el que desarrollamos nuestras prácticas educativas en el 2017, el proceso de modelación se debe desarrollar integrando el objeto matemático función, y sus clases como son la cuadrática, la lineal o la afín. Estas últimas nos conducen al estudio específico de la covariación lineal.

Atendiendo a estos requerimientos, se analiza el informe en las pruebas SABER 2016, específicamente el correspondiente a grado noveno de 2016 en la Institución Educativa Distrital Colegio El Porvenir, y especialmente los resultados relacionados con el componente de variación y el proceso de modelación. Los resultados indican que en la competencia comunicación el 78% de los estudiantes no reconoce el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos, el 74% de los estudiantes no usa ni relaciona diferentes representaciones para modelar situaciones de variación, el 71% de los estudiantes no establece relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas, el 65% de los estudiantes no identifica características de gráficas cartesianas en relación con la situación que representan. En la competencia razonamiento el 72% de los estudiantes no usa representaciones ni procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa, el 49% de los estudiantes no interpreta tendencias que se presentan en una situación de variación; y en la competencia resolución el 70% de los estudiantes no resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos. Datos que permiten evidenciar que un gran porcentaje de esta población no obtiene los niveles de desempeño esperados en el área de matemáticas.

Considerando estos resultados nos dimos a la tarea de reconocer en el plan de estudios, propuesto por la Institución Educativa Distrital Colegio El Porvenir para estudiantes de grado noveno en el 2016, qué se propone en específico para la enseñanza y el aprendizaje tanto del proceso de modelación como del desarrollo del razonamiento de covariación lineal. Para el primero identificamos que plantean que el estudiante al terminar el primer periodo debe interpretar, plantear y resolver problemas que se modelen como ecuaciones lineales de primer grado, y para el tercer periodo modelar situaciones concretas mediante funciones cuadráticas y solucionarlas por los métodos grafico o analíticos. Para el desarrollo del razonamiento de covariación lineal, no fue posible identificar propósitos encaminados a tal fin en ninguno de los periodos, pero sí se observan propósitos encaminados a estudiar la función lineal o afín, empero de manera estática. Además, no se encontraron documentos institucionales que muestren la propuesta y el proceso de enseñanza empleado para lograr estos aprendizajes en los estudiantes.

Teniendo presente propósitos en las orientaciones educativas para el área de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional en torno al proceso de modelación y el desarrollo del pensamiento variacional, además, de las tendencias en las pruebas de tipo internacional y de tipo nacional, declarados hace más de una década, en contraste con los resultados de nuestros estudiantes del grado noveno del 2016 en la prueba nacional y considerando que el plan de estudios de la institución educativa a pesar de que contempla enseñar a los estudiantes a modelar, plantea el estudio de funciones de primer, segundo grado y exponenciales de manera estática, surge la necesidad de proponer un proceso de enseñanza en el que se promueva el desarrollo del proceso de modelación de situaciones del entorno que presenten covariación lineal, en estudiantes de grado noveno de 2017 en la jornada tarde de la Institución Educativa Distrital Colegio El Porvenir.

Considerando la situación descrita hasta este punto, se plantea la siguiente pregunta que orientara este trabajo de investigación ¿Cómo desarrollan el proceso de modelación algunos estudiantes, de grado noveno de 2017 de la jornada tarde de la Institución Educativa Distrital Colegio El Porvenir, cuando abordan la resolución de situaciones del entorno que presentan covariación lineal?

1.3 Justificación

El diseño y planeación de las prácticas de enseñanza de las matemáticas deben considerar, en concordancia con los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) y los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006), procesos generales como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, también procesos específicos del pensamiento numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional; además, situaciones del contexto, ya sean propias de las matemáticas, de la vida diaria o de otras ciencias.

Componentes en la estructura curricular del área de matemáticas que requieren no limitar las prácticas de enseñanza a la transmisión de saberes para una mecanización y ejercitación de procedimientos, sino ampliar a prácticas pedagógicas que permitan a los estudiantes una reconstrucción significativa de saberes matemáticos y el desarrollo de procesos de pensamiento con los cuales pueden responder a los retos de la sociedad en la que se desenvuelven.

Sin embargo, a pesar de que en los documentos oficiales desde hace dos décadas se subraya la importancia de cambiar las prácticas pedagógicas, aún se presentan procesos de enseñanza anclados a los métodos tradicionalistas que distan cada vez más de los propósitos educativos mencionados, y como lo manifiesta Agudelo (2007) "la brecha entre las disposiciones educativas colombianas y las prácticas del aula de matemáticas continúa creciendo a medida que se expiden nuevas disposiciones y nuevos lineamientos curriculares. Las nuevas disposiciones y lineamientos educativos se convierten en simple retórica" (p. 59).

Es entonces necesario que nosotros los profesores ajustemos nuestras prácticas pedagógicas a los fines educativos y orientaciones de los documentos oficiales en educación; sin embargo, el diseño y planeación de las prácticas de enseñanza de las matemáticas no deben considerar sólo procesos generales, procesos específicos y situaciones del contexto, es necesario, “analizar las razones estructurales de los problemas de comprensión con los cuales se enfrenta la mayoría de alumnos de todos los niveles de enseñanza” (Duval, 2004). Es por ello que esta investigación, aunque se centra en el proceso de modelación, lo contextualiza a situaciones de variación lineal y enfatiza en promover en los estudiantes el razonamiento covariacional.

Ante este reto pretendemos con esta práctica investigativa realizar una experiencia y una posterior descripción del proceso de modelación desarrollados por algunos estudiantes de grado noveno en situaciones del entorno que presentan covariación lineal; de tal manera que tanto las situaciones como las experiencias de aula y los resultados puedan ser utilizados por los compañeros, así como plantear posteriores investigaciones con el propósito de profundizar en el estudio de dificultades que manifiestan algunos estudiantes al modelar situaciones con estas características, lo que esperamos pueda coadyuvar al mejoramiento de los aprendizajes de nuestros estudiantes.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo General

Describir el proceso de modelación desarrollado por estudiantes, de grado noveno de 2017 de la jornada tarde de la Institución Educativa Distrital Colegio El Porvenir, cuando abordan la resolución de situaciones del entorno que presentan covariación lineal.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Diseñar e implementar una secuencia de actividades que promuevan en los estudiantes la aplicación de las fases del proceso de modelación de situaciones del entorno que presentan covariación lineal.
- Describir la manera como dos estudiantes de grado noveno producen modelos matemáticos en la solución de situaciones del entorno que presentan covariación lineal.
- Establecer el desarrollo del proceso de razonamiento covariacional que logran los dos estudiantes cuando resuelven situaciones del entorno que presentan covariación lineal.

Capítulo 2

2. Referentes teóricos

En este capítulo se presentan las ideas teóricas que sustentan la caracterización de los procesos de modelación desarrollados por en estudiantes de grado noveno al enfrentarse a tareas de cambio y variación, apoyados en la visión didáctica de la modelación matemática propuesta por Bassanezi, mencionada por Posada y Villa (2006a) y en el marco conceptual para el razonamiento covariacional planteado por Carlson et al (2003).

Aceptamos con Bassanezi (2002) que [...] a modelagem consiste na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem do mundo real (p. 16), en tal sentido se acepta que la idea de modelación como construcción de modelos matemáticos para explicar fenómenos del mundo real no es nueva y se constituye en lo que para algunos autores se denomina la matemática aplicada. Es por ello que según Bassanezi (2002), la modelación puede ser entendida tanto como un método científico de investigación como una estrategia de enseñanza-aprendizaje.

Para caracterizar estos dos modos de entendimiento de la modelación, Villa-Ochoa (2009) elabora una tabla en la que se muestra algunos aspectos que permiten la diferenciación entre modelación como actividad científica y modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje, en tanto posibilita la construcción de conceptos matemáticos en el aula de clase.

Tabla 1. Algunas diferencias entre el proceso de modelación en las ciencias y como recurso en las aulas de matemáticas.

Criterio	Como actividad Científica	Como herramienta en el aula de clase
Propósito del modelo	Se construye a partir del análisis de alguna situación para intentar explicar algún fenómeno o solucionar un problema	Se elabora para construir un concepto matemático con significado. Tiene como objetivo despertar el interés del estudiante por su carácter aplicativo

Los conceptos matemáticos	Emergen a través de la abstracción y análisis del fenómeno	Se consideran en la planeación y selección del contexto de acurdo a los propósitos de la actividad.
Contextos	Problemas que no han sido abordados	Problemas preparados y coherentes con el propósito educativo.
Otros factores	Ambientes propios de la ciencia donde se aplica. Casi siempre son externos a factores educativos	Se presentan en el aula como situaciones cotidianas o aplicaciones en otras ciencias.

Fuente: adaptación de tabla. Tomado de Villa Ochoa (2009, p. 6-7)

Aunque hay una gran diferencia entre estas dos aproximaciones, tal como se deduce de la lectura de la tabla anterior, el autor afirma que la modelación en las matemáticas escolares tiene sus fundamentos en la actividad del matemático que se encarga de aplicar y construir modelos, que emergen en contextos que no han sido abordados, para explicar fenómenos naturales, resolver problemas de otras ciencias y para poder avanzar en teorías o ciencias.

El interés por la modelación matemática y su relación con los procesos de enseñanza de las matemáticas, ha sido abordado en múltiples investigaciones que muestran la existencia de diversas posibilidades para su concreción. Villa-Ochoa (2012) presenta diferentes perspectivas desde las cuales se pueden asumir dichas relaciones:

Como una estrategia de los seres humanos para la explicación y producción del conocimiento, y también para el aprendizaje (D' Ambrosio, 2009); como una herramienta didáctica (Biembengut y Hein, 2004), como una competencia y una herramienta para desarrollar competencias matemáticas (Zöttl, Ufer, y Reiss, 2011), como una herramienta para posicionarse de manera crítica frente a las demandas sociales y democráticas (Skovsmose, 1999), entre otros (Villa Ochoa, p. 211).

2.1. La modelación en la enseñanza – aprendizaje de las matemáticas.

La definición dada por Bassanezi y Biembengut (1997, p. 14) como el método de enseñanza- aprendizaje que utiliza el proceso de modelación en cursos regulares, sirve de referente para esta investigación, razón por la cual se plantean a continuación aspectos teóricos relacionados con la modelación como recurso didáctico y la modelación como proceso constitutivo del pensamiento matemático.

Siguiendo a Vasco (2003) aceptamos que

> La modelación es pues el arte de producir modelos. Por eso, la modelación matemática es el arte de producir modelos matemáticos que simulen la dinámica de ciertos subprocesos que ocurren en la realidad. Se trata de un proceso de detección, formulación y proyección de regularidades por medio de la creación de un artefacto mental, un sistema con sus componentes, transformaciones y relaciones, cuyas variables covarían en forma que simulen las regularidades de la covariación de los fenómenos o procesos que se intenta modelar (Vasco C. , 2003, pág. s.p).

2.1.1. La modelación planteada como recurso didáctico.

La modelación en las matemáticas escolares, tal como lo menciona Villa Ochoa (2009), tiene sus fundamentos en la actividad del matemático que se encarga de aplicar y construir modelos, que emergen en contextos que no han sido abordados, para explicar fenómenos naturales, resolver problemas de otras ciencias y para poder avanzar en teorías o ciencias. El educador en matemáticas promueve la elaboración de modelos para construir un concepto matemático con significado, con la intención de despertar el interés y motivación por las matemáticas "debido a la relación que esta área del conocimiento tiene con los problemas del contexto real de los estudiantes" (Villa Ochoa, 2009, p. 5).

Asumir estos planteamientos implica para los profesores un cambio en sus prácticas ya que no se trata de proponer problemas de aplicación sino de:

> desafiar a los estudiantes en el uso de matemática para describir y analizar algún fenómeno de sus vidas diarias con el fin de (1) motivar el trabajo con matemática, (2)

establecer raíces cognitivas sólidas para la concepción, por parte del alumno, de algunos conceptos matemáticos básicos, y (3) experimentar a la matemática como medio para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida diaria" (Blomhøj, 2004, p. 26).

Es decir, la modelación se introduce al aula de clase en tanto "el interés no sólo debe estar en la simple construcción del modelo sino también, en la ganancia conceptual y educativa que adicionalmente permite este proceso" (Posada y Villa, 2006a, p. 78), es decir que el propósito de construir un modelo es promover el uso de sistemas conceptuales y las representaciones intervinientes, ya que como afirman Posada y Villa (2006a), citando a Lesh (2003).

Desde una perspectiva cognitiva, modelar implica suponer que el ser humano interpreta sus experiencias usando sistemas conceptuales internos o construidos, cuya función es seleccionar, filtrar, organizar y transformar la información obtenida o inferir patrones y regularidades que se encuentra, en ocasiones, más allá de lo visible. Por tal motivo al enfrentarse con situaciones complejas usa algún modo de representar y expresar sus ideas que va desde el lenguaje hablado, diagramas, metáforas, simulaciones hasta sofisticados sistemas simbólicos matemáticos (Posada y Villa, 2006a, p. 78).

De otro lado, el desarrollo de una actividad de modelación en la clase involucra un conjunto de acciones que involucran la formulación, sistematización, traducción, matematización, interpretación y evaluación (Blomhøj, 2004), acciones que configuran un Ciclo de Modelación, ya que, como afirma el autor, el proceso de modelación no puede considerarse como lineal sino cíclico.

Para Villa-Ochoa (2009) dicho ciclo, inicia con la determinación del fenómeno o problema, que es observado y sujeto a procesos de experimentación para poder profundizar en su comprensión y búsqueda de datos, se identifican algunos factores involucrados, porque no es posible contar con todos, se construye un modelo después de simplificar y hacer suposiciones que eliminen alguno de esos factores. Con el modelo construido se generan todos los análisis posibles y se emplean las herramientas matemáticas para construir una solución de tipo teórico de donde surgen las conclusiones y estas se someten a evaluación y validación.

Bassanezi, citado en Posada y Villa (2006a), sostiene que la modelación matemática es un proceso dinámico "la modelación es un arte de transformar situaciones de la realidad en problemas matemáticos con interpretaciones en el lenguaje normal" (Posada y Villa, 2006a, p. 74). Para la construcción de un modelo Bassanezi (2009) formula las siguientes cinco actividades intelectuales o fases de construcción, visualizadas en la tabla 3

Tabla 2. Fases de construcción de un modelo propuestas por Bassanezi.

Fase	**Características**
Fase 1. Experimentación	Actividad donde se obtienen los datos y se adoptan las técnicas y métodos estadísticos. Es esencialmente actividad de laboratorio.
Fase 2. Abstracción.	Procedimiento que debe llevar a la formulación de modelos matemáticos. Se emplean algunas etapas: a. Selección de las variables (bien definidas). Identificar las variables que describen y controlan la evolución del sistema. b. Problematización o formulación a los problemas teóricos en un lenguaje propio del que se esté trabajando. Formulación del problema con enunciado bien explícito. El problema se vuelve pregunta científica cuando explica la relación entre las variables. c. Formulación de hipótesis. Direccionan la investigación. Se pueden dar de varios modos: observación de casos, observación de hechos, comparación de otros estudios, deducciones lógicas, experiencias personales y analogía de sistemas (dos sistemas son análogos cuando se pueden representar por el mismo modelo matemático). d. Simplificación. Se restringe el fenómeno y se aísla solamente el campo de estudio (no se pueden considerar todos los detalles).
Fase 3. Resolución	El lenguaje verbal es sustituido por lenguaje matemático coherente (funciones/ ecuaciones). Esta fase depende de la Fase 2. Abstracción.
Fase 4. Validación.	Proceso de aceptación o no del modelo que se ha propuesto. Las hipótesis y los datos son confrontados, comparando las soluciones obtenidas con los valores obtenidos en el sistema real. "Un buen modelo es aquel que tiene capacidad de previsión de nuevos hechos o relaciones insospechadas" (Posada & Villa, 2006, pág. 77)
Fase 5. Modificación	Algunos aspectos ligados al problema pueden generar que el modelo sea aceptado o no. Las razones pueden estar entre el uso de hipótesis falsas, la obtención de datos errados, la insuficiente información, la aparición de más variables que las ya establecidas o el descubrimiento de algo nuevo

Fuente: Información adaptada de Posada y Villa (2006a, p. 75-78)

Para el cumplimiento de nuestro objetivo de investigación se toman estas fases para describir el proceso que siguen los estudiantes cuando resuelven una situación de covariación. Sin embargo, dado que se seleccionó como modalidad de trabajo en el aula que el profesor presentara la situación inicial, los análisis iniciarán en la fase de abstracción.

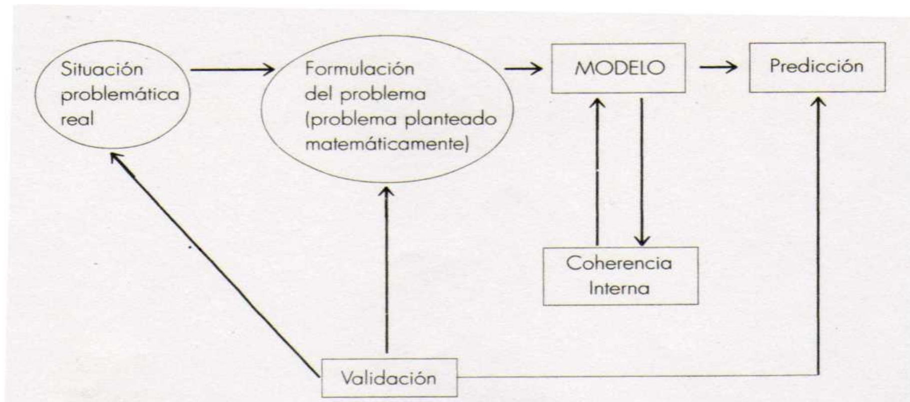
2.1.2. La modelación como proceso constitutivo del pensamiento matemático.

La modelación es considerada, tanto en los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) como en los Estándares Básicos de Competencia (MEN, 2006), como uno de los procesos matemáticos que se propone desarrollen los estudiantes en su tránsito por la educación básica. Asumiendo posturas teóricas fundamentadas en la Educación Matemática Realística en estos documentos se propone que los estudiantes aprendan matemáticas "haciendo matemáticas" actividad que debe contribuir a la formación de ciudadanos matemáticamente competentes.

A fin de integrar estas consideraciones al currículo de matemáticas se considera necesario que las situaciones problema, como contextos de aprendizaje de las matemáticas, giren en torno a la modelación de situaciones que vinculen estrechamente el mundo real con las matemáticas, en particular que retomen contextos cotidianos significativos para los estudiantes, ya que "es necesario relacionar los contenidos de aprendizaje con la experiencia cotidiana de los alumnos, así como presentarlos y enseñarlos en un contexto de situaciones problemáticas y de intercambio de puntos de vista" (MEN, 1998, p. 35).

Por otro lado, en los Lineamientos curriculares (MEN, 1998) se define el proceso de modelación como, "el proceso completo que conduce desde la situación problemática real original hasta un modelo matemático" (Lineamientos, 1998, p. 98), es decir, como un ciclo que comprende: la selección de una situación problemática real, la formulación del problema, la construcción del modelo, la predicción y la validación, representado mediante la imagen 1.

Imagen 1. Elementos básicos de la construcción de modelos. Gráfica propuesta por Freudenthal.



Fuente: MEN, lineamientos curriculares: matemáticas (1998, p. 97)

Complementado lo ya expuesto en los Estándares Básicos de Competencia (MEN, 2006) se define modelo como:

> Un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible, es decir un buen modelo debe permitir al estudiante efectuar manipulaciones o transformaciones sobre la situación, explorar diferentes alternativas de solución, así como la conjeturación y verificación de estas soluciones" (MEN, 2006, p. 52).

Apostando por las delimitaciones anteriores, se puede afirmar que la modelación y la resolución de problemas son consideradas en estos dos documentos como los procesos más relevantes para lograr la formación de ciudadanos matemáticamente competentes, razón por la cual es necesario hacer diferenciaciones y precisiones sobre cada uno de ellos. Señala Villa Ochoa (2009), la modelación es una actividad que aborda el proceso de construcción de modelos a partir de problemas de la realidad, más aún, es como una forma de describir las relaciones entre la realidad y las matemáticas, presentando a la modelación como un proceso vinculado con la solución de problemas “aplicaciones de las matemáticas a fenómenos del mundo real” (Villa

Ochoa, 2009, p. 17), en este sentido se concluye que la resolución de problemas guarda estrecha relación con la solución de problemas.

A pesar de ello, este autor manifiesta que también se han tipificado algunas diferencias que son más de tipo teórico que de efectos prácticos en el aula de clase. En la siguiente tabla se establecen criterios donde se evidencian puntos en común y diferencias entre el proceso de modelación y solución de problemas.

Tabla 3. Algunos elementos que caracterizan los procesos de modelación, planteamiento y resolución de problemas.

Criterios	Modelación Matemática	Resolución de Problemas
Contextos	Son contextos reales, los cuales dependen del entorno sociocultural de los estudiantes y de las demás ciencias. Son contextos extra matemáticos.	Pueden ser contextos reales, pero también, pueden ser contextos rediseñados y artificiales. Pueden ser contextos extra o intra-matemáticos.
Propósitos	El estudiante es sometido a procesos de experimentación, indagación, búsqueda de datos, abstracción y simplificación, entre otros.	En ocasiones, los datos son presentados a estudiantes en situaciones simplificadas, por tanto, los procesos de experimentación, establecimiento de datos, y simplificación son un poco más limitados
El proceso	Como proceso, la modelación matemática es recursiva y cíclica. Se desarrolla a través de una serie de fases en donde el estudiante debe interpretar, abstraer, simplificar, construir el modelo, interpretar matemáticamente dicho modelo y luego, a la luz del problema inicial, debe darse una evaluación del modelo, y de acuerdo con esto puede darse una reformulación del modelo. La validación es interna y/o externa.	Como proceso, la resolución de problemas incorpora una mirada regresiva del problema (suponer el problema resuelto). Es un proceso recursivo i cíclico que requiere analizar la situación; identificar lo relevante en ella; establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones semejantes; formarse modelos mentales de ella y representarlos externamente en distintos registros, formular distintos problemas, posibles preguntas y posibles respuestas que surjan a partir de ella. La validación es generalmente interna.

Argumentos	Al abordar problemas cotidianos y del entorno social y cultural de los estudiantes, permite una resignificación de la realidad objetiva por parte del estudiante, de manera tal que le posibilite asumir una actitud frente a las situaciones de la cotidianidad. Aporta elementos para responder a la pregunta clásica ¿para qué sirven las matemáticas?	Posibilita la construcción de conocimientos y del pensamiento matemático de manera flexible, contextualizada, con sentido y significado.

Fuente: Tomada de Villa Ochoa, (2009, p. 14-16)

Como se ha venido mencionando, esta investigación toma la modelación como "un proceso muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa" (Villa Ochoa, 2009, p. 12), que posibilita además reconocer vínculos entre el mundo real, contextos significativos de los estudiantes y las matemáticas así como desplegar procesos cognitivos tales como el razonamiento, la comunicación, la visualización y, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, entre otros.

2.2. El pensamiento variacional y el razonamiento covariacional.

Varias son las aproximaciones a la definición de pensamiento variacional, por ejemplo, para Vasco (2002) es "una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covarían en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes es los subprocesos de la realidad" (p. 104), y aclara que:

> El objeto del pensamiento variacional es pues la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el tiempo, y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad (Vasco, 2002, p. 104)

Por tal razón afirma que el pensamiento variacional trata de desarrollar la habilidad de los individuos para captar qué varia, con qué varia y cómo varia, es decir, que en una situación particular el interés recae en captar en un primer momento lo que cambia, lo que permanece constante y los patrones que se repiten. En un segundo momento la atención se dirige a la producción de modelos mentales cuyas variables internas interactúan de manera que reproducen las covariaciones detectadas, para continuar en un tercer momento, con echar a andar o correr esos modelos propuestos para ver qué resultados producen.

A continuación, menciona el autor, está el momento en el que se comparan los resultados con lo que ocurre en el proceso que se trata de modelar, para después llegar al momento de revisar y reajustar el modelo y finalizar con la formulación simbólica del sistema mental empleando palabras, gráficos o símbolos, y si hay tecnología disponible, se inicia el momento de calcular con esa formulación, para luego comparar los resultados con el proceso modelado y llegar a la reformulación del modelo. Así Vasco (2002) explica que:

> Para mí, el principal propósito del pensamiento variacional es la modelación y no es propiamente la resolución de problemas ni de ejercicios. Al contrario, para mí, los mejores problemas o ejercicios deberían ser desafíos o retos de modelar algún proceso (Vasco C., 2002, p. 105).

De otro lado el autor afirma que, un problema del desarrollo del pensamiento variacional en el aula es que al tratar de precisar verbalmente o tratar de construir la representación gráfica del modelo "se paraliza la covariación y distraen la atención hacia la forma estática de la gráfica" (Vasco, 2002, p. 104) impidiendo que se aprecie que cuando se tiene o se hace un modelo imaginativo se imagina para imitar la situación para tratar de percibir la variación en el tiempo, para luego estudiar la covariación de una variable con otra y notar que una permanece quieta mientras la otra se mueve, activando el pensamiento variacional.

Por tal razón se concluye que para lograr desarrollar habilidades, conceptos y procesos inmersos en este tipo de pensamiento es necesario proponer tareas que conlleven a establecer competencias y habilidades en contextos de cambio y variación:

> Debe apuntar al desarrollo de elementos procedimentales y conceptuales en el trato de la matemática y en este caso al desarrollo del pensamiento variacional. En consecuencia esta debe apuntar a que el estudiante tenga la posibilidad de plasmar, comunicar, verbalizar o representar simbólicamente la identificación de las magnitudes dependientes e independientes en una relación funcional, organice la información en tablas que permitan reconocer y cuantificar el cambio respecto a los procesos de covariación (Gómez, 2015, p. 21)

Como también señala Gómez (2015) se hace necesario sugerir que la tarea también tenga elementos didácticos que posibiliten dar cuenta de criterios de análisis en la modelación de la misma situación, dando cuenta de: la identificación y selección de las magnitudes variables y constantes, variación y covariación de las variables y la producción de representaciones simbólicas, gráficas o tablas que respalden los procesos de covariación. Lo importante, para este autor, es que la tarea posibilite reconocer y analizar "la capacidad del reconocimiento de la variación" (Gómez, 2015, p. 22) para así tener en cuenta la identificación de las variables, las relaciones entre las magnitudes que intervienen, la descripción y coordinación del cambio de una cantidad de magnitud respecto a otra magnitud.

En relación con el razonamiento covariacional, se define como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra" (Carlson et al., 2003, p. 124) quienes construyen un marco conceptual donde se muestra la caracterización del desarrollo de este pensamiento a partir cinco acciones mentales y cinco niveles de razonamiento de la covariación.

Estos elementos servirán como medio para clasificar los comportamientos de los estudiantes cuando se ven enfrentados a tareas de covariación (Gómez, 2015).

Las acciones mentales son un instrumento que permite clasificar los comportamientos que tienen los estudiantes cuando desarrollan tareas asociadas al proceso de covariación. Los comportamientos y producciones que presenten los estudiantes señalarán características relacionadas al pensamiento variacional y serán las inspeccionadas o como aclara, "la habilidad de razonamiento covariacional de un individuo, relativa a una tarea particular, se puede determinar sólo examinando el conjunto de comportamientos y acciones mentales exhibido mientras responde a esa tarea"(Carlson et al., 2003, p. 127).

Tabla 4. Acciones mentales del marco conceptual para la covariación.

Acción Mental	**Descripción de la acción mental**	**Comportamientos**
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios de otra	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (ejemplo: y cambia con cambios en x)
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades

son correctos).

Fuente: información adaptada de Carlson et al. (2003, p. 128)

A partir de los trabajos realizados en investigaciones Carlson et al. (2003) generan algunas descripciones de acciones mentales que se evidencian en estudiantes en relación con el desarrollo del pensamiento variacional y de sus comportamientos asociados. Estas acciones ayudan a clasificar las producciones que realizan estudiantes de manera verbal y escrita al enfrentarse a tareas de cambio y variación, y a observar las habilidades que se puedan sustentar frente a actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra, "con su forma de actuar, registrar y verbalizar la situación de cambio o variación" (Gómez, 2015, p. 17) y como se señala "un estudiante se clasifica en un determinado nivel de acuerdo con la imagen global que parece sustentar a las varias acciones mentales que esa persona exhibe en el contexto de un problema o una tarea" (Carlson et al., 2003, p. 128).

Además, en Carlson et al (2003) se propone un marco conceptual para la covariación con cinco niveles de razonamiento. Se describen cinco niveles de desarrollo de las imágenes de la covariación, presentadas en términos de las acciones mentales sustentadas por cada una.

Tabla 5. Niveles de razonamiento en el marco conceptual para la covariación.

Nivel	Características
Nivel 1 (N1) Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de la covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1)
Nivel 2 (N2) Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 ambas son sustentadas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3) Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes de N3.
Nivel 4 (N4) Razón	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden

promedio	sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes de N4.
Nivel 5 (N5) Razón instantánea	En el nivel de razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en las variables de entrada. Este nivel incluye una consciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la consciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente o la contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por imágenes de N5

Fuente: información señalada en (Carlson et al., 2003, p. 129)

Se debe agregar que para emplear estos niveles para caracterizar el razonamiento covariacional de un estudiante, el análisis se debe sustentar en las acciones mentales de ese nivel y las de los niveles inferiores, esto es, si un estudiante se encuentra en N3 (Coordinación cuantitativa) es porque da cuenta de las acciones mentales AM1, AM2 y AM3.

Para lograr recoger evidencias de este tipo de pensamiento es necesario proponer tareas que les permitan a los estudiantes desarrollar una “comprensión más profunda de las maneras en que los cambios en las cantidades se pueden representar matemáticamente” (Carlson et al., 2003, p. 122) teniendo presente que algunos estudiantes presentan dificultades para modelar relaciones de situaciones que involucran razón de cambio de una variable cuando varia continuamente en una relación dependiente con otra variable, esta habilidad es la esencial para interpretar modelos de eventos dinámicos e interpretar conceptos de cálculo (Carlson et al., 2003)

Así mismo, Villa (2006) describe algunas consideraciones para tener en cuenta a la hora de diseñar tareas en las que se espera desarrollar procesos y emplear conceptos matemáticos donde se identifiquen magnitudes independientes y dependientes, magnitudes variables, constantes, variación y covariación de las variables, organización de información en tablas para reconocer, sustentar y cuantificar el cambio teniendo en cuenta los procesos de covariación y Gómez (2015) agrega el "reconocimiento de las relaciones entre las magnitudes que intervienen en la situación, la descripción y coordinación del cambio de una cantidad de magnitud respecto a otra magnitud" (Gómez, 2015, p. 22).

Hay que mencionar que Carlson et al (2003) señala que es fundamental el concepto de razón para poder comprender las situaciones dinámicas y su significado en un contexto del mundo real al definir que primero la razón involucra la construcción de una imagen de cambio en una cantidad, en segunda instancia, la coordinación de imágenes de dos cantidades y tercero, la elaboración de una única imagen de covariación simultanea de dos cantidades. Así mismo indican que la comprensión de la noción de covariación implica para el sujeto "mantener en la mente, de manera simultánea, una imagen sostenida de dos variables de cantidades (magnitudes)" (Carlson et al., 2003, p. 123).

Apoyados en la visión didáctica de la modelación matemática propuesta por Bassanezi, especialmente en las fases del proceso mencionada por Posada y Villa (2006a) y en el marco conceptual para el razonamiento covariacional planteado por Carlson et al. (2003), se describirá el proceso de modelación seguido por algunos estudiantes de grado noveno cuando se ven enfrentados a tareas de covariación.

2.3. Función Lineal como modelo matemático de situaciones de variación lineal

De acuerdo con Posada y Villa (2006b) cuando describen el sentido de variación en relación a un modelo matemático:

> […] aquella apreciación del cambio en una o varias variables dependiendo del cambio de otra u otras, y a la noción de correlación como la posibilidad de expresar dicha variación a través de un modelo funcional, entonces el problema es encontrar, si es posible, una

> función que exprese la variación entre dichas variables. Esto es, en términos del proceso de modelación matemática, formular el modelo (Posada y Villa, 2006b, p. 129).

Por tal razón los autores indican que para reconocer la función lineal como un modelo matemático que expresa variación lineal es necesario proponer el estudio de situaciones en las que se interprete el concepto de función lineal desde una perspectiva variacional, se utilicen los registros de representación gráfico y tabular como auxiliares en la formulación del modelo y se considere la noción de razón de cambio constante como un modelo que expresa la variación entre las variables involucradas. Esto es así por cuanto en palabras de los autores:

> Es la razón de cambio, en particular las razones de cambio constantes, uno de los pilares en la consolidación del concepto de función, y finalmente, porque es la razón de cambio constante, la que nos permitirá aproximarnos a una interpretación alternativa de la función lineal, diferente a la conocida mirada desde la proporcionalidad directa entre dos cantidades de magnitudes (Villa Ochoa, 2009. p. 95)

De tal manera que la construcción del concepto de función lineal, como modelo de la covariación entre cantidades de magnitud cuya expresión analítica será $f(x) = ax + b$ significa que la cantidad de magnitud dependiente $y = f(x)$ se relaciona con la cantidad de magnitud independiente x, a través de una forma polinómica de grado uno.

Para el estudio de este tipo de funciones, en lo que se refiere a su aspecto variacional, se tendrán en cuenta los aspectos recomendados por Posada y Villa (2006b):

a. Se hace variar intencionalmente una de las cantidades de magnitud (la independiente que se denota con x), que se relaciona con el eje horizontal en el plano cartesiano y será también la primera columna o fila de las tablas. Como la variación será convenientemente establecida, se realizará un análisis de la relación entre los cambios de la cantidad de magnitud x y los cambios percibidos en la variable dependiente y, identificada con el eje vertical del plano cartesiano y será la segunda columna o fila de la tabla.

Teniendo la noción de incremento se estudiará la variación de una cantidad de magnitud calculando la diferencia entre dos valores de la misma. Si la variación es de la variable independiente esta se denotará como Δx y si es de la dependiente como Δy.

b. A partir del análisis del cociente entre Δy y Δx, se puede establecer el tipo de función que modela la situación. Se centra la atención en los cambios de las variables y se obtendrá entonces que las funciones lineales cumplen con que ese cociente es una constante: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ donde a se denominará razón de cambio. Razón de cambio entre cantidades de magnitudes que al ser constante define a las funciones lineales como $f(x) = ax + b$ con $a \neq 0$, y en particular cuando b es igual a cero es una transformación, que sirve para modelar fenómenos de variación y cambio ya que "si en particular la primera razón de cambio es un valor constante entonces el modelo funcional que atrapa la variación es lineal" (Posada y Villa, 2006b, p. 136).

c. En tareas que incluyan los aspectos mencionados en los párrafos anteriores se van trazando rutas de trabajo en el aula para construir el concepto de función lineal como "forma particular de correlacionar una variación" (Posada y Villa, 2006b, p. 138) y así se podrá dar inicio a las generalizaciones de estructuras matemáticas donde el interés es construir modelos para describir matemáticamente la variación y el cambio.

Dándole a la razón de cambio un sentido relevante Posada y Villa (2006b) sugieren realizar el siguiente conjunto de actividades cuya finalidad sea potenciar la construcción del concepto de función como modelo matemático:

a. Identificar las cantidades de magnitud pertinentes.

b. Identificar la posible covariación entre las cantidades de magnitud (diferencias, incrementos, razón de diferencias, cantidades de magnitud, entre otras).
c. Organizar la información en tablas de valores.
d. Identificar la razón de cambio constante.
e. Reconocer a la razón de cambio constante como elemento que identifica a la función lineal dado el caso.
f. Comprender la función lineal como un modelo que atrapa la covariación entre dos cantidades de magnitud.
g. Identificar la proporcionalidad simple directa como caso particular de la función lineal en la modelación.

Así para esta investigación en la que se ha decidido proponer el aprendizaje de la función lineal como modelo matemático los aportes de Villa Ochoa junto con las fases para la construcción de modelos matemáticos propuesta por según Bassanezi (2002) serán utilizadas tanto en el diseño de la secuencia didáctica como en el análisis de las producciones de los estudiantes participantes.

Capítulo 3

3. Diseño metodológico

3.1 Tipo de estudio.

Considerando que esta investigación definió como objetivo general describir el proceso de modelación desarrollado por estudiantes de grado noveno en situaciones del entorno que presentan covariación lineal, se adoptó un enfoque de investigación mixto.

Este enfoque es definido como "la integración sistemática de los métodos cuantitativo y cualitativo en un solo estudio con el fin de obtener una “fotografía” más completa del fenómeno” (Chen 2006) citado por Hernández, Fernández y Baptista (2014, p.534), y descrito como aquel que “comienza con una amplia encuesta con el fin de generalizar los resultados a una población y después, en una segunda fase, se centra en entrevistas abiertas y cualitativas para conocer los puntos de vista detallados de los participantes” por Creswell (2009) citado en Castro y Godino (2014, p. 101).

De tal manera que esta investigación se estructura en dos grandes componentes, uno cuantitativo y el otro cualitativo. El componente cuantitativo es de tipo descriptivo, porque “se busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis” (Hernández et al., 2014, p. 92). Para este componente se consideraron las respuestas de los estudiantes a la prueba de entrada con el fin de cuantificar el porcentaje de éxito de los estudiantes al abordar la resolución de situaciones que implican las dos primeras fases de la construcción de modelos matemáticos propuesto por Bassanezi (2002).

De otro lado, el componente cualitativo, tiene como propósito describir de manera detallada el proceso de construcción de modelos que siguen los estudiantes participantes cuando resuelven las actividades que conforman la secuencia didáctica. En este componente se utiliza el método de estudio de caso (Stake, 2007) y los datos que se analizan provienen de las respuestas dadas por los estudiantes a cada una de las tareas propuestas en una secuencia didáctica integrada por tres actividades, dichos datos se complementaron con entrevistas realizadas a cada uno de los dos estudiantes de los cuales se describió el proceso; instrumentos que se diseñan tomando como base las cinco fases para la construcción de un modelo matemático propuestas por Bassanezi (2002).

3.2 Población y casos

A continuación, se describe tanto la población como la muestra (casos) que se constituyeron en los sujetos participantes en esta investigación.

3.2.1 Población.

Para este estudio se eligió trabajar con población de la Institución Educativa Distrital Colegio El Porvenir, ubicada en la localidad de Bosa de la ciudad de Bogotá; colegio que presenta un proyecto educativo institucional denominado dialogo de saberes para el desarrollo de talentos con proyección a la comunidad. Además, otorga el título de bachiller técnico en gestión cultural en la perspectiva de educación física a los estudiantes que culminan allí el nivel once.

En este proyecto educativo se enuncia como misión la formación integral de sus estudiantes desde las dimensiones cognitiva, socio afectiva y físico creativa, promoviendo ciudadanos éticos, responsables y autónomos con proyección profesional y laboral, con el fin de ser agentes transformadores de su entorno social y cultural. Además, expresa en su visión el compromiso de direccionar sus acciones para llegar a ser reconocidos a nivel local y distrital como una institución educativa de carácter técnico con una propuesta formativa diversificada, fortaleciendo en los estudiantes los componentes académicos y de convivencia que potenciará la capacidad de interactuar con su comunidad.

La institución educativa tiene dos sedes, con niveles escolares desde transición hasta grado once, y cada nivel cuenta con tres cursos en la sede A y dos cursos en la sede B; para una población matriculada de aproximadamente 5000 estudiantes, con el apoyo de la rectora, ocho coordinadores, diez orientadores, ocho personas en el equipo administrativo y 182 docentes.

De esta población, se desarrolló el trabajo de investigación con los estudiantes del curso dos del nivel noveno, en el año 2017, de la jornada tarde pertenecientes a la seda A. Se consideró esta población porque es un curso en donde trabaja uno de los autores de esta investigación, lo cual facilita espacios y recursos para las intervenciones requeridas.

El curso 902 está integrado por 34 estudiantes con edades entre los 14 y los 16 años, de los cuales 14 son mujeres y 20 son hombres. A consideración de su docente de matemáticas, este grupo se caracteriza en las clases por una buena disposición para realizar y compartir sus soluciones de las actividades propuestas, por su amabilidad y buen trato con los integrantes de la comunidad educativa; además, una gran parte de los estudiantes cuentan con núcleo familiar compuesto por mamá, papá y hermanos, sin embargo, hay estudiantes que no conviven con ninguno de los padres.

3.2.2 **Casos.**

Para el componente cualitativo se seleccionaron dos estudiantes, a manera de estudio de caso. Para su selección se tomó como criterio el índice de éxito o la cantidad de respuestas acertadas en la prueba de entrada, así el estudiante de desempeño alto se seleccionó porque el porcentaje de respuestas acertadas estuvo entre el 100 y 90 porciento y el estudiante de desempeño bajo porque obtuvo entre el 59 y 0 porciento de respuestas correctas. Además, otro elemento para la selección fue contar con el consentimiento de los estudiantes y sus padres o acudientes para poder realizar las entrevistas con sus respectivas grabaciones.

3.3 Instrumentos

Para esta investigación se decidió diseñar e implementar tres tipos de instrumentos, primero fue la prueba de entrada, entendiendo ésta como un cuestionario que permite establecer el porcentaje de éxito de los estudiantes al abordar la resolución de algunas situaciones que se centran en la realización de las dos primeras fases de la construcción de modelos matemáticos. Otro instrumento fue una secuencia didáctica, concibiéndola como una serie de tareas secuenciadas con el propósito de que los estudiantes construyan modelos matemáticos, a la manera propuesta por Bassanezi (2002). Finalmente, una entrevista semiabierta a cada uno de los dos estudiantes seleccionados, organizada teniendo en cuenta las respuestas a la serie de tareas que integran la secuencia didáctica y cada una de las cinco fases para la construcción de un modelo matemático propuestas por Bassanezi (2002).

A continuación, se describe cada uno de los instrumentos empleados en esta investigación.

3.3.1 Prueba de entrada.

Este instrumento (anexo uno) inicia planteando a los estudiantes una situación en la cual cae agua, en cantidad constante, de una llave a un recipiente de forma cilíndrica. Se utiliza una imagen de la situación en la cual se señalan algunas variables a considerar, además, se emplea un registro tabular que describe lo que representa cada una de las variables en estudio.

El ítem uno solicita a los estudiantes responder y justificar si los valores de cada una de las variables señaladas en la imagen cambian mientras se llena el recipiente. El segundo ítem muestra parejas de variables, y pide escribir y justificar si alguno de los valores de una variable se modifica al cambiar los valores en la otra variable. El ítem tres muestra tres tablas con valores que relacionan las variables tiempo y altura del agua en un recipiente y se solicita indicar y justificar cuál de ellas representa una posible experiencia de llenado de un recipiente que tiene la misma forma al mostrado en la figura inicial.

El ítem cuatro muestra dos tablas con algunos valores que relacionan variables ajenas al experimento y solicita a los estudiantes observar la variación de estos datos y completar las tablas. El quinto ítem, retoma la situación inicial, e informa una altura del chorro del agua y la altura del nivel del agua en el recipiente que le corresponde, y pide al estudiante calcular la altura del nivel del agua en el recipiente al reducir la longitud del chorro a la mitad. El ítem seis muestra dos momentos de observación en el experimento, el primero indica una altura de 15 cm del agua en el recipiente sin especificar el tiempo, el segundo manifiesta que se ha triplicado el tiempo, pero no da el valor de la altura del agua, con el propósito que el estudiante la encuentre y justifique su respuesta.

El séptimo ítem entrega una tabla completa que relaciona tiempo, dado en cantidades enteras, con altura del agua en el recipiente, dadas en decimales; y solicita, inicialmente, calcular el nivel del agua a los cuatro segundos, posteriormente, calcular el tiempo necesario para que la altura del agua en el recipiente sea de 5,5 cm. El ítem número ocho muestra cuatro gráficos en el plano cartesiano y pide al estudiante que señale y justifique cuál de ellos representa correctamente la covariación entre el tiempo y la altura del agua en el recipiente. El noveno ítem entrega una representación en el plano cartesiano que muestra la covariación lineal existente entre el tiempo y la cantidad del agua en el recipiente; solicitando encontrar, partiendo de la gráfica, la altura del agua a los cuatro segundos, y el tiempo necesario para que haya 70 mililitros de agua.

El ítem número diez solicita al estudiante una conversión entre registros, pasar de una tabla de valores, que relaciona el tiempo y la altura del agua en el recipiente, al plano cartesiano, el cual se entrega con los ejes graduados e indicadores de que representa cada uno de los ejes. El ítem once solicita al estudiante describir cómo cambia la gráfica en el plano cartesiano al considerar, inicialmente, recipientes más delgados, y, después, depósitos más anchos. El ítem doce presenta una gráfica en el plano cartesiano mostrando una covariación lineal entre el tiempo y la altura del agua en el recipiente, y solicita trazar un grafo que represente una covariación de las mismas variables si se utiliza un recipiente más delgado.

De esta prueba de entrada se utilizan las respuestas a los ítems tres, cuatro y nueve para identificar el porcentaje de éxito de los estudiantes en la fase de experimentación; las respuestas del ítem uno para el paso de selección de variables de la fase de abstracción. Para esta misma fase, pero en el paso de problematización, en la cual el interés recae en describir el razonamiento covariacional evidenciado en cada estudiante, se empleará la información arrojada en el ítem dos para el nivel de dirección; los ítems cinco, seis y siete para el nivel de coordinación cuantitativa, y los ítems once y doce para el nivel de razón promedio. Para el paso de formulación de la hipótesis, y las fases de resolución, validación y modificación no aplican ítems en la prueba de entrada.

El éxito del estudiante se define por el porcentaje de respuestas correctas en intervalos considerados como alto, medio o bajo obtenido en cada una de las fases de construcción de modelos; clasificación, que posibilita la selección de los dos estudiantes.

3.3.2 Secuencia de actividades.

La secuencia de actividades se organizó para ser desarrollada en tres sesiones, que se organizan en dos momentos, el desarrollo de las actividades y el de socialización, con el fin de iniciar la siguiente actividad con respuestas consensuadas y válidas. La siguiente tabla describe las tareas en cada una de ellas.

Tabla 6. Descripción de la secuencia de actividades y sus tareas.

	Secuencia de Actividades		
	Actividad 1 Anexo 2	Actividad 2 Anexo 3	Actividad 3 Anexo 4
Descripción de la actividad	Aborda el proceso de construcción de modelos matemáticos en la fase de abstracción hasta el nivel de coordinación cuantitativa, fijando la atención en la identificación del cambio en la variable dependiente por cambio de una unidad en la variable independiente.	Continúa con el proceso de construcción de modelos matemáticos desde la fase de abstracción en el nivel de coordinación cuantitativa, con el fin de detectar el cambio en la variable dependiente con cambios mayores o iguales a una unidad en la variable independiente, hasta el nivel de razón promedio del paso de problematización de la fase de abstracción.	Se trabaja el proceso de modelación matemática desde el paso de formulación de la hipótesis de la fase de abstracción, continuando con la fase de resolución y terminando con la fase de validación.
Objetivo de la secuencia	Procurar que los estudiantes construyeran tres modelos matemáticos de situaciones de covariación lineal partiendo de la situación plasmada en la actividad inicial de la secuencia didáctica.		
Número de tareas	6	9	3
Finalidad de las tareas	Iniciar el proceso de construcción de modelos matemáticos desde la fase de abstracción en el nivel de coordinación cuantitativa, procurando la identificación del cambio en una de las variables por cambio de una unidad en la otra	Las tareas 1, 2 y 3 se proponen para continuar con el proceso de construcción del modelo matemático para R1, desde N3. Las tareas 4, 5 y 6 para avanzar en la construcción del modelo del R3. Las tareas 7, 8 y 9 para continuar con R2	En la tarea 1 se da continuidad al proceso de construcción del modelo matemático, para R1. Las tareas 2 y 3 se formularon para seguir con las mismas fases del proceso de construcción del modelo matemático, descritas para la tarea 1, pero para R3 y R2
Tarea 1	Se presenta una tabla donde estudiante debe indicar la altura del agua a los 4 minutos de lluvia al inicio, dentro de cada uno de los recipientes R1, R2, R3 y después desde el escalón central.	Completar una tabla que requiere calcular el cambio entre dos tiempos dados, y el cambio entre las alturas del nivel del agua desde el escalón central Posteriormente, calcular la razón entre el cambio en las alturas del agua desde el escalón central y el cambio en los tiempos respectivos, con el propósito de avanzar al tercer nivel (N3), manifestación de la razón de cambio, en el paso de problematización de la fase	Presenta dos tablas: la primera da unos valores para la variable tiempo y se debe indicar la altura del agua desde el escalón central para cada uno de esos valores, además, el procedimiento utilizado para calcularlos y una justificación de éste. La segunda solicita escribir un procedimiento general que permita calcular a partir de la variación de la cantidad de minutos transcurridos la altura del agua desde el

		de abstracción.	escalón central. Finalmente se solicita al estudiante que verifique la hipótesis expresada en lenguaje matemático considerando la situación inicial, para que de esta manera se lleve a cabo la fase de validación; y de ser necesario, continuar con la última fase, la de modificación del modelo matemático.
Tarea 2	La segunda tarea exhibe una tabla en la cual se debe indicar la altura del agua en cada uno de los recipientes y la altura del agua desde el escalón central, sin embargo, para esta tarea se incluye la variable tiempo al indicar que han transcurrido 8 minutos; lo cual exige la obtención de datos.	Registrar en el plano cartesiano los cambios calculados en la tarea anterior.	Misma organización que la tarea 1 pero empleando R3
Tarea 3	La tercera tarea, solicita responder qué ha estado cambiando durante los 4 primeros minutos, con lo cual se pretendió que se especificaran y seleccionaran las variables presentes en la situación	Se pregunta por el significado que tiene en la situación inicial el valor obtenido en cada una de las razones. Planteada con el fin de identificar la asociación que manifiesta el estudiante entre el valor calculado y la situación.	Misma organización que la tarea 1 pero empleando R2
Tarea 4	Se centra en R1. Inicia completando una tabla que relaciona: tiempo de llenado con altura del agua desde el escalón central. Luego realiza una representación en el plano cartesiano. Se plantean dos preguntas: la primera pide que manifieste que pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo y la segunda requiere indicar cuánto cambia la altura del agua por cada minuto que pasa.	Mismos criterios de la tarea 1, aplicados para R3	

Tarea 5	Considera R2 con los mismos criterios de la tarea 4	Mismos objetivos de la tarea 2 utilizados en R3
Tarea 6	Analiza R3 con los mismos criterios de la tarea 4 y 5.	Mismos criterios de la tarea 3 empleados en R3.
Tarea 7		Mismos criterios de la tarea 1 aplicados en R2
Tarea 8		Mismos objetivos de la tarea 2 empleados en R2
Tarea 9		Mismos criterios de la tarea 3 utilizados en R2.

Fuente: elaboración propia

3.3.3 Entrevista.

La entrevista se organizó para ser aplicada, de manera individual y en espacios separados, a cada uno de los dos estudiantes seleccionados, al finalizar la resolución de toda la secuencia de actividades. Para estructurar la entrevista se tomaron fases para la construcción de un modelo matemático propuestas por Bassanezi (2002); y se desarrolló solicitando al estudiante explicación de las respuestas que elaboró para cada una de las tareas propuestas en la secuencia de actividades.

3.4 Procedimiento para la recolección de la información

Para la prueba de entrada se distribuyó a los estudiantes en orden alfabético por las sillas del salón en el cual se desarrollan frecuentemente las clases de matemáticas, además, se entregó a cada uno de ellos las hojas que contienen la información de la prueba, y en la cual escribieron sus respuestas; material que se les recogió pasados 180 minutos.

Para el componente cuantitativo se empleó dos tipos de instrumentos, inicialmente una secuencia de tres actividades en el mismo número de sesiones con duración de 120 minutos cada una, indicando que se socializaron soluciones planteadas por los estudiantes, al finalizar cada sesión, con el fin de construir respuestas consensuadas y válidas para utilizar en las siguientes sesiones. Posteriormente, se diseñó y aplicó la entrevista.

Para la secuencia de actividades se utilizó una sesión de 120 minutos para cada una de ellas; al igual que para la prueba de entrada, se entregó a cada estudiante, en hojas, la información y las tareas a desarrollar de manera individual, material que se recogió al finalizar cada sesión. Las respuestas consensuadas en el momento de socialización se presentan de manera escrita en el inicio de cada una de las otras dos actividades.

Para la entrevista se utilizó una sesión de aproximadamente 120 minutos, hecha con el fin de verificar el proceso evidenciado en la secuencia de actividades y para su realización se propuso una serie de preguntas que indagaban sobre las justificaciones o argumentos dados para construir los modelos matemáticos de la situación planteada en la secuencia de actividades. Para la entrevista se organizó y presentó, a cada estudiante, en diapositivas las tareas y las respuestas que dio a las tareas de las actividades de la secuencia didáctica. Entrevistas que fueron recopiladas en audio y video, las cuales, fueron posteriormente transcritas (anexo cinco).

3.5 Tipos de análisis

3.5.1 Componente cuantitativo

Para el componente cuantitativo se aplicó a la población una prueba de entrada con el fin de describir el porcentaje de éxito o de respuestas correctas de los estudiantes al abordar la resolución de algunas situaciones que implican al estudiante en la construcción de un modelo de situaciones siguiendo las fases propuestas por Bassanezi (2002), específicamente, la fase de experimentación y los pasos se selección de variables y problematización de la fase de abstracción; se clasifica el éxito de los estudiantes en alto, medio o bajo cuantificando la cantidad de respuestas consideradas correctas para cada de estas fases.

3.5.2 Componente cualitativo

Para el componente cualitativo se emplearon dos tipos de instrumentos, inicialmente la secuencia actividades, posteriormente, la entrevista personalizada. Instrumentos que se diseñaron tomando fases para la construcción de un modelo matemático propuestas por Bassanezi (2002), e integrando a la segunda fase, la de abstracción, específicamente en el paso de problematización, niveles del razonamiento covariacional descritos por Carlson et al. (2003), toda vez que como afirma Barbosa (2001) la modelación puede ser incluida en la clase de matemáticas de tres maneras diferentes, pero solo tendremos en cuenta el primer caso:

> de três formas diferentes: 1) Caso 1. O professor apresenta a descrição de uma situação-problema, com as informações necessárias à sua resolução e o problema formulado, cabendo aos alunos o processo de resolução. Uma experiência de Franchi (1993) pode ilustrar este caso (ver 9 secção1). Ela colocou uma situação-problema aos alunos, que realizaram a investigação. Não foi preciso que eles procurassem dados fora da sala de aula; todo o trabalho se deu a partir da situação e do problema oferecido pelo profesor (Barbosa, 2001, p. 9)

Posada y Villa (2006a), en la descripción de las cinco fases del proceso de modelación matemática, indican que la de experimentación es aquella donde se procesa la obtención de datos. La de abstracción, conduce a la formulación del modelo matemático, sin embargo, en esta fase se encuentran tres pasos, el primero, denominado selección de variables, busca identificar las magnitudes que varían, el segundo, problematización, tiene como objetivo detectar la covariación entre las magnitudes, y el tercero, formulación de la hipótesis, se encamina a la formulación general, en lenguaje natural, de la covariación detectada en el paso anterior. La fase de resolución consiste en expresar la formulación del modelo en lenguaje matemático; y la penúltima fase, la de validación, tiene como propósito, contrastar el modelo matemático con los datos recogidos en la fase inicial; de tal forma que, de no ser adecuado, se continúe con la fase final, concerniente a la modificación del modelo matemático.

Las fases en la construcción de un modelo matemático son aplicables a múltiples fenómenos con diferentes comportamientos, sin embargo, como nuestro objetivo de investigación está enfocado en situaciones del entorno que modelan la covariación lineal, decidimos incluir en el paso de problematización, en el cual se detecta la covariación entre las magnitudes, niveles del razonamiento covariacional propuestos por Carlson et al. (2003), específicamente los niveles de dirección, coordinación cuantitativa y razón promedio.

El nivel, dirección, solicita reconocer que los cambios en una de las variables está relacionado con los cambios en la otra variable, además, detectar si el cambio en una genera cambios positivos o negativos en la otra; el nivel de coordinación cuantitativa exige, además, del nivel anterior, determinar la cantidad de cambio en una de las variables dado un cambio específico en la otra; y el nivel de razón promedio, solicita reconocer la cantidad promedio de cambio en una de las variables al realizar cambios constantes en la otra.

A partir de las precisiones anteriores, las fases en la construcción de modelos matemáticos y niveles del razonamiento covariacional, se organiza y describe el proceso de modelación desarrollado por los dos estudiantes de grado noveno cuando abordan la resolución de situaciones del entorno que presentan covariación lineal considerando sus producciones en la secuencia de actividades y la entrevista.

Para el análisis de las producciones escritas y orales de los estudiantes se consideran cuatro categorías de primer orden, la de experimentación, la de abstracción, la de resolución y la de validación. Para la categoría de abstracción se proponen tres categorías de segundo orden, la de selección de variables, la de problematización y la de formulación de la hipótesis. Para la categoría de segundo orden denominada problematización se proponen tres categorías de tercer orden, la de dirección, la de coordinación cuantitativa y la de la razón de cambio.

En la siguiente tabla, se presentan las categorías y subcategorías definidas:

Tabla 7. Categorías y subcategorías definidas para el análisis cualitativo.

Categorías de primer orden	Categorías de segundo orden	Categorías de tercer orden
Experimentación		
Abstracción	Selección de variables	
	Problematización	Dirección
		Coordinación cuantitativa
		Razón de cambio
	Formulación de la hipótesis	
Resolución		
Validación		

Fuente: elaboración propia

A continuación, se muestra la asociación entre cada una de las categorías y subcategorías con los ítems de la prueba de entrada y las tareas que integran la secuencia didáctica.

Tabla 8. Asociación de categorías y subcategorías con cada ítem de la secuencia

Categorías de primer orden	Categorías de segundo orden	Categorías de tercer orden	Prueba de entrada	Secuencia didáctica
Experimentación			Ítems 3, 4 y 9	Actividad uno: • Tareas uno y dos • Tabla en las tareas 4, 5 y 6
Abstracción	Selección de variables		Ítem 1	Actividad uno: • Tarea tres
	Problematización	Dirección	Ítem 2	Actividad uno: • Pregunta a de las tareas 4, 5 y 6
		Coordinación cuantitativa	Ítems 5, 6 y 7	Actividad uno: • Pregunta b de las tareas 4, 5 y 6 Actividad dos: • Tabla en las tareas 1, 4 y 7
		Razón de cambio	Ítems 11 y 12	Actividad dos: • Ultima columna de la tabla en las tareas 1, 4 y 7 • Tarea 9
	Formulación de la hipótesis		No aplica	Actividad tres: • Tabla inicial en las tareas 1, 2 y 3
Resolución			No aplica	Actividad tres: • Filas 5 y 6 de la segunda tabla de las tareas 1, 2 y 3
Validación			No aplica	Actividad tres: • Filas 7 y 8 en la segunda tabla de las tareas 1, 2 y 3

Además, planteamos los siguientes descriptores en cada una de las categorías para realizar la descripción cuantitativa del proceso de modelación en situaciones de covariación lineal desarrollado por los tres estudiantes de grado noveno seleccionados

Tabla 9. Descriptores en cada categoría de análisis

Categorías de primer orden	Categorías de segundo orden	Categorías de tercer orden	Descriptores
Experimentación			• Reconoce parejas de valores relacionadas por el comportamiento en la situación • Encuentra parejas de valores correspondientes a partir de la situación • Encuentra valores correspondientes de la variable dependiente dados algunos valores de la variable independiente
Abstracción	Selección de variables		• Identifica en la situación las magnitudes que varían
	Problematización	Dirección	• Reconoce que los cambios en una de las variables están relacionados con los cambios en la otra variable • Detecta si el cambio en una variable genera cambios positivos o negativos en la otra variable
		Coordinación cuantitativa	• Determina la cantidad de cambio en la variable dependiente por cambio de una unidad en la variable independiente • Determina la cantidad de cambio en la variable dependiente por cambio mayor a una unidad en la variable independiente
		Razón de cambio	• Reconoce la cantidad promedio de cambio en la variable dependiente al realizar cambios constantes en la variable dependiente • Reconoce el significado del valor calculado de la razón de cambio en la situación
	Formulación de la hipótesis		• Presenta, en lenguaje natural o numérico, la relación entre la variable dependiente y la variable independiente
Resolución			• Presenta, en lenguaje matemático, la relación entre la variable dependiente y la variable independiente
Validación			• Contrasta el modelo matemático con los datos recogidos en la fase inicial

Fuente: elaboración propia

Capítulo 4

4. Descripción de proceso

La descripción del proceso de modelación desarrollado por estudiantes, de grado noveno de 2017 de la jornada tarde de la Institución Educativa Distrital Colegio El Porvenir, cuando abordan la resolución de situaciones del entorno que presentan covariación lineal, se realiza en dos partes, inicialmente, describimos el éxito o porcentaje de respuestas acertadas de los 34 estudiantes del curso 902 a las doce preguntas planteadas en la prueba de entrada.

Posteriormente, describimos el proceso desarrollado por los dos estudiantes seleccionados, teniendo en cuenta sus producciones en la secuencia de actividades y en la entrevista.

4.1 Componente cuantitativo

Para la descripción del éxito de los estudiantes al abordar la resolución de situaciones que solicitan las dos primeras fases de la construcción de modelos matemáticos propuesto por Bassanezi (2002) mostramos, inicialmente, un panorama general de los resultados de los estudiantes en la prueba de entrada, posteriormente, se especifican los resultados en dos fases, la de experimentación y la de abstracción, esta última se desglosa en pasos y niveles de acuerdo a lo estipulado en el capítulos anteriores.

El éxito del estudiante se estableció en alto, medio o bajo considerando el porcentaje de respuestas acertadas en la prueba de entrada. En la siguiente tabla se muestra el puntaje máximo asignado a cada ítem de la prueba.

Tabla 10. Estructura de prueba de entrada

Ítem	Puntaje	Ítem	Puntaje	Ítem	Puntaje
1	5/5	5	1/1	9	2/2
2	7/7	6	1/1	10	1/1
3	3/3	7	2/2	11	2/2
4	10/10	8	2/2	12	2/2

Puntajes que se establecieron teniendo en cuenta la cantidad de respuestas que debía elaborar el estudiante en cada ítem de la prueba; considerando el número de aciertos se asignó un puntaje proporcional al máximo señalado, además, para el éxito alto se determinó un porcentaje de 100 a 90, para el medio un porcentaje de 89 a 60, y para el bajo un porcentaje menor o igual a 59.

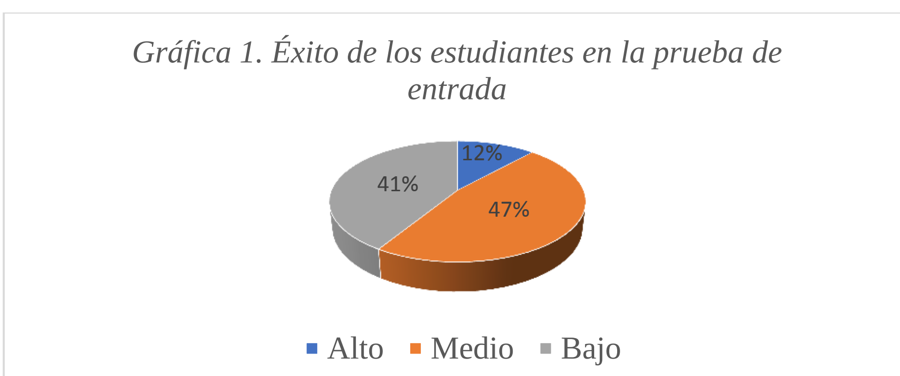
Al observar y sistematizar las respuestas acertadas de cada uno de los estudiantes en la prueba de entrada obtuvimos los resultados que se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 11. Resultados de los estudiante en la prueba de entrada

Estudiante	%	Estudiante	%	Estudiante	%	Estudiante	%
E1	68	E10	71	E19	71	E28	57
E2	63	E11	50	E20	42	E29	55
E3	63	E12	71	E21	79	E30	60
E4	52	E13	50	E22	65	E31	60
E5	94	E14	44	E23	60	E32	55
E6	42	E15	58	E24	60	E33	94
E7	52	E16	79	E25	68	E34	94
E8	92	E17	84	E26	36		
E9	31	E18	73	E27	47		

Fuente: elaboración propia

La cual nos permite presentar el éxito de los estudiantes en las dos primeras fases de la construcción de modelos matemáticos propuesto por Bassanezi (2002) como se muestra en la gráfica siguiente:



Fuente: elaboración propia

Solamente 12 %, es decir, 4 de 34 estudiantes presenta de 90 % a 100 % de respuestas correctas, mientras que 16 de los 34 estudiantes tiene entre 89 % y 60 %, y el 41 %, o sea 14 estudiantes, presentan un porcentaje de respuestas correctas inferior a 60 %.

Para describir los resultados de manera específica en las fases de experimentación y abstracción, dado que la prueba de entrada comenzó planteando a los estudiantes una situación donde caía agua constantemente de una llave a un recipiente de forma cilíndrica, además, se utilizaron las siguientes siete variables que se muestran en la imagen siguiente

Imagen 1. Situación planteada en la prueba de entrada.

A	Altura del nivel de agua a medida que se va llenando el recipiente
B	Longitud del chorro de agua (la medida que va desde la boca del grifo o la llave hasta que desaparece porque hace contacto con el líquido que ya está en el recipiente
C	Diámetro del recipiente
D	Cantidad de agua a medida que se va llenando el recipiente
E	Altura del recipiente
F	Tiempo transcurrido mientras va cayendo el líquido en el recipiente

Fuente: prueba de entrada

Con base en esta situación se plantearon doce preguntas de las cuales describiremos los resultados de los estudiantes en las siguientes fases.

4.1.1 Fase de experimentación

Para esta categoría se tuvo en cuenta las respuestas de los estudiantes a los ítems tres, cuatro y nueve de la prueba de entrada. El ítem tres presentó tres tablas, con valores, que relacionaban las variables tiempo y altura del agua en un recipiente, y se solicitó indicar y justificar cuál de ellas representaba una posible experiencia de llenado de un recipiente con la misma forma al mostrado en la figura inicial. El ítem cuatro presentó dos tablas con algunos valores que relacionaban variables ajenas al experimento y solicitó a los estudiantes observar la variación de estos datos y completar las tablas. En el noveno ítem se entregó una representación en el plano cartesiano que presentaba la covariación lineal existente entre el tiempo y la cantidad del agua en el recipiente; solicitando encontrar, partiendo de la gráfica, la altura del agua a los cuatro segundos, y el tiempo necesario para que haya 70 mililitros de agua.

Al observar y sistematizar las respuestas acertadas de cada uno de los estudiantes en estos tres ítems se obtuvo los resultados que se muestran en la siguiente tabla:

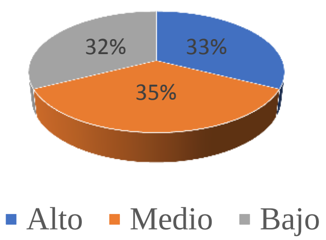
Tabla 12. Fase de experimentación. Resultados de los estudiantes

Estudiante	Puntaje en cada punto			%	Estudiante	Puntaje en cada punto			%
	3ro	**4to**	**9no**			**3ro**	**4to**	**9no**	
E1	3/3	9/10	2/2	93.3	E18	3/3	10/10	2/2	100
E2	1/3	10/10	2/2	86.6	E19	3/3	10/10	2/2	100
E3	1/3	10/10	2/2	86.6	E20	0/3	5/10	2/2	46.6
E4	0/3	10/10	2/2	80	E21	3/3	10/10	2/2	100
E5	3/3	10/10	2/2	100	E22	1/3	7/10	2/2	66.6
E6	0/3	10/10	1/2	73.3	E23	1/3	5/10	2/2	53.3
E7	1/3	10/10	1/2	80	E24	1/3	10/10	2/2	86.6
E8	3/3	10/10	2/2	100	E25	2/3	10/10	2/2	100
E9	0/3	7/10	1/2	53.3	E26	0/3	0/10	2/2	13.3
E10	1/3	9/10	2/2	80	E27	0/3	7/10	1/2	53.3
E11	1/3	9/10	1/2	73.3	E28	0/3	7/10	1/2	53.3
E12	3/3	9/10	1/2	86.6	E29	0/3	5/10	2/2	46.6
E13	0/3	6/10	2/2	53.3	E30	0/3	6/10	2/2	53.3
E14	0/3	4/10	2/2	40	E31	1/3	6/10	2/2	60
E15	0/3	9/10	2/2	73.3	E32	0/3	6/10	2/2	53.3
E16	3/3	9/10	2/2	93.3	E33	3/3	10/10	2/2	100
E17	3/3	10/10	2/2	100	E34	3/3	10/10	2/2	100

Fuente: elaboración propia

En la gráfica siguiente, gráfica 2, se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes agrupados de acuerdo a los niveles de éxito definidos.

Gráfica 2. Éxito de los estudiantes en la fase de experimentación



Fuente: elaboración propia

En el proceso de obtención de datos (fase de experimentación), los estudiantes realizan acciones y prácticas que permiten señalar que de 34 estudiantes, el 33% de ellos presenta entre 100% y 90% de respuestas correctas en estos desarrollos.

4.1.2 Fase abstracción

Posada y Villa (2006a), en la descripción de las cinco fases del proceso de modelación matemático, indican que la de abstracción, conduce a la formulación del modelo matemático y en esta fase se encuentran tres pasos: el primero, selección de variables, el segundo, problematización, y el tercero, formulación de la hipótesis, tal como lo propone Bassanezi (2002).

Considerando esta base, se concentra la descripción de los resultados de los estudiantes en esta fase del proceso en los dos primeros pasos.

4.1.2.1 Paso de selección de variables.

Para este paso se tuvo en cuenta las respuestas al ítem uno de la prueba de entrada; el cual solicitó a los estudiantes responder y justificar si los valores de cada una de las variables señaladas en la imagen cambiaban mientras se llenaba el recipiente, ya que este paso busca identificar las magnitudes que varían.

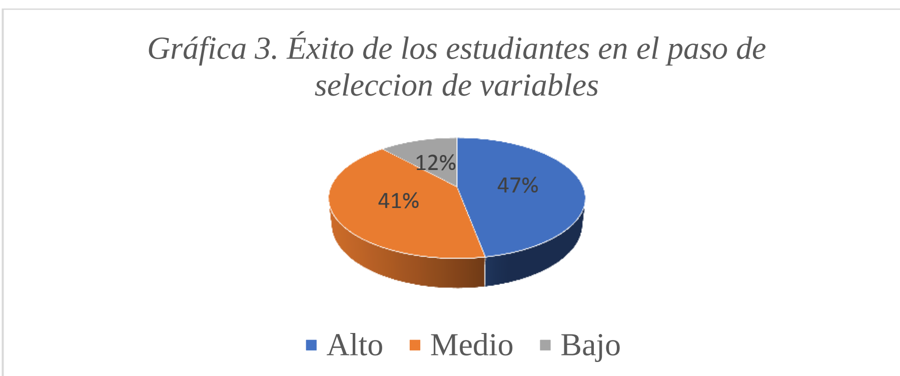
Al observar y sistematizar las respuestas acertadas de cada uno de los estudiantes en este ítem se obtuvo los resultados que se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 13. Resultados obtenidos en la selección de variables.

Estudiante	Puntaje	%	Estudiante	Puntaje	%	Estudiante	Puntaje	%
E1	4/5	80	E13	2/5	40	E25	4/5	80
E2	4/5	80	E14	5/5	100	E26	4/5	80
E3	5/5	100	E15	3/5	60	E27	5/5	100
E4	3/5	60	E16	5/5	100	E28	5/5	100
E5	5/5	100	E17	5/5	100	E29	4/5	80
E6	0/5	0	E18	5/5	100	E30	4/5	80
E7	4/5	80	E19	5/5	100	E31	5/5	100
E8	5/5	100	E20	3/5	60	E32	4/5	80
E9	2/5	40	E21	4/5	80	E33	5/5	100
E10	5/5	100	E22	4/5	80	E34	5/5	100
E11	4/5	80	E23	5/5	100			
E12	5/5	100	E24	2/5	40			

Fuente: elaboración propia

En la gráfica 3 se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes agrupados de acuerdo a los niveles de éxito definidos.



Fuente: elaboración propia

La Gráfica 3 recopila la información donde se evidencia que casi la mitad de los estudiantes (47%: 16 de 34) logra identificar las diferentes variables que describen y controlan la situación planteada (cae agua constantemente de una llave a un recipiente de forma cilíndrica). Al parecer poseen las herramientas suficientes para poder abordar los ejercicios desde un contexto variacional.

4.1.2.2 Paso de problematización.

El paso de problematización tiene como objetivo que los estudiantes puedan cuantificar la covariación entre las magnitudes, dado que nuestro objetivo de investigación se enfocó en situaciones del entorno que presenten covariación lineal, se utilizan para la descripción de este paso los niveles del razonamiento covariacional propuestos por Carlson et al. (2003), específicamente los niveles de dirección, coordinación cuantitativa y razón promedio.

4.1.2.2.1 *Nivel de dirección.*

Este nivel requiere reconocer que los cambios en una de las variables están relacionados con los cambios en la otra variable, además, detectar si el cambio en una genera cambios positivos o negativos en la otra. Para esta categoría se tuvo en cuenta las respuestas de los estudiantes al ítem dos de la prueba de entrada, el cual presentó parejas de variables, y pidió escribir y justificar si alguno de los valores de una variable se modifica al cambiar los valores en la otra variable.

Al observar y sistematizar las respuestas acertadas de cada uno de los estudiantes en este ítem se obtuvo los resultados que se muestran en la siguiente tabla:

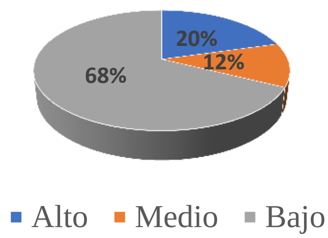
Tabla 14. Resultados de los estudiantes en ejercicio de covariación (ítem 2).

Estudiante	Puntaje	%	Estudiante	Puntaje	%	Estudiante	Puntaje	%
E1	5/7	71	E13	7/7	100	E25	4/7	57
E2	4/7	57	E14	3/7	43	E26	3/7	43
E3	4/7	57	E15	1/7	14	E27	3/7	43
E4	2/7	28	E16	6/7	86	E28	4/7	57
E5	7/7	100	E17	7/7	100	E29	3/7	43
E6	0/7	0	E18	3/7	43	E30	3/7	43
E7	1/7	14	E19	3/7	43	E31	4/7	57
E8	7/7	100	E20	3/7	43	E32	5/7	71
E9	1/7	14	E21	3/7	43	E33	7/7	100
E10	7/7	100	E22	3/7	43	E34	7/7	100
E11	2/7	28	E23	6/7	86			
E12	3/7	43	E24	3/7	43			

Fuente: elaboración propia

En la siguiente gráfica 4, se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes agrupados de acuerdo a los niveles de éxito definidos.

Gráfica 4. Éxito de los estudiantes en el nivel de dirección



Fuente: elaboración propia

Un alto porcentaje de los estudiantes, el 68%, no coordina dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra (Acción Mental 1: AM1). En la gráfica 4, se muestra 7 estudiantes con éxito alto, hay 4 estudiantes con éxito medio y 23 estudiantes con éxito bajo. Un alto porcentaje de los estudiantes no coordina dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra (acción mental 1: AM1); mientras que 20% fueron capaces de coordinar el valor de una variable con los cambios en la otra (AM1), además, coordinar la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable (AM2), mostrando habilidades de razonamiento covariacional a Nivel 2 (N2), donde las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección de cambio de una de las variables con cambios en la otra.

4.1.2.2.2 *Nivel de coordinación cuantitativa.*

Este nivel exige determinar la cantidad de cambio en una de las variables dado un cambio específico en la otra, acción mental 3 (AM3). Para nivel se tuvo en cuenta las respuestas de los estudiantes a los ítems cinco, seis y siete de la prueba de entrada.

El quinto ítem informó una altura del chorro del agua y la altura del nivel del agua en el recipiente que le corresponde, y pidió al estudiante calcular la altura del nivel del agua en el recipiente al reducir la longitud del chorro a la mitad. El ítem seis presentó dos momentos de observación en el experimento, el primero indicó una altura de 15 cm del agua en el recipiente sin especificar el tiempo, el segundo manifestó que se había triplicado el tiempo, pero no dio el valor de la altura del agua, con el propósito que el estudiante la encontrara y justificara su respuesta. El séptimo ítem entregó una tabla completa que relaciono tiempo, dado en cantidades enteras, con altura del agua en el recipiente, dadas en decimales; y solicitó, inicialmente, calcular el nivel del agua a los cuatro segundos, posteriormente, calcular el tiempo necesario para que la altura del agua en el recipiente sea de 5,5 cm.

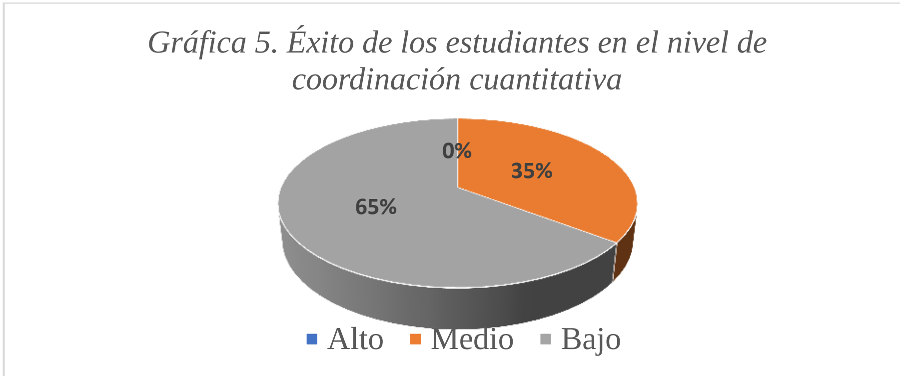
Al observar y sistematizar las respuestas acertadas de cada uno de los estudiantes en estos puntos se obtuvo los resultados que se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 15. Resultados de los estudiantes en puntos 5, 6 y 7 de la prueba de entrada.

Estudiante	Puntaje en cada punto			%	Estudiante	Puntaje en cada punto			%
	5to	**6to**	**7mo**			**5to**	**6to**	**7mo**	
E1	0/1	0/2	1/2	20	E18	1/1	0/2	2/2	60
E2	0/1	0/2	2/2	40	E19	1/1	0/2	2/2	60
E3	0/1	0/2	1/2	20	E20	0/1	0/2	2/2	40
E4	1/1	0/2	0/2	20	E21	1/1	0/2	2/2	60
E5	1/1	0/2	2/2	60	E22	0/1	1/2	2/2	60
E6	0/1	0/2	2/2	40	E23	0/1	0/2	2/2	40
E7	0/1	0/2	1/2	20	E24	0/1	0/2	2/2	40
E8	1/1	0/2	2/2	60	E25	0/1	0/2	1/2	20
E9	0/1	0/2	1/2	20	E26	0/1	0/2	2/2	40
E10	0/1	0/2	2/2	40	E27	0/1	0/2	2/2	40
E11	0/1	0/2	1/2	20	E28	0/1	0/2	2/2	40
E12	1/1	0/2	2/2	60	E29	1/1	0/2	2/2	60
E13	0/1	0/2	2/2	40	E30	0/1	0/2	2/2	40
E14	0/1	0/2	2/2	40	E31	0/1	1/2	2/2	60
E15	0/1	0/2	2/2	40	E32	0/1	0/2	2/2	40
E16	1/1	0/2	2/2	60	E33	1/1	1/2	2/2	80
E17	0/1	0/2	2/2	40	E34	0/1	2/2	2/2	80

Fuente: elaboración propia

En la gráfica 5 se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes agrupados de acuerdo a los niveles de éxito definidos.



Fuente: elaboración propia

Al observar los resultados se tiene que en la acción mental 3 (AM3), coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable, no se ubica ninguno de los 34 estudiantes en el nivel de éxito alto, pues ninguno de ellos logró un porcentaje superior al 89 %, mientras que 12 de ellos obtuvieron entre 89 % y 60 %; la mayoría, 22 estudiantes, no lograron coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra, por tal motivo no alcanzan un nivel 3 (N3).

4.1.2.2.3 *Nivel de razón de cambio.*

Este nivel solicita reconocer la cantidad promedio de cambio en una de las variables al realizar cambios constantes en la otra. Para este nivel se tuvo en cuenta las respuestas de los estudiantes a los ítems once y doce de la prueba de entrada.

El ítem once solicitó al estudiante describir cómo cambiaba la gráfica en el plano cartesiano al considerar, inicialmente, recipientes más delgados, y, después, depósitos más anchos. El ítem doce presentó una gráfica en el plano cartesiano mostrando una covariación lineal entre el tiempo y la altura del agua en el recipiente, y solicitó trazar un grafo que representara una covariación de las mismas variables si se utiliza un recipiente más delgado.

Al observar y sistematizar las respuestas acertadas de cada uno de los estudiantes en estos ítems se obtuvo los resultados que se muestran en la siguiente tabla:

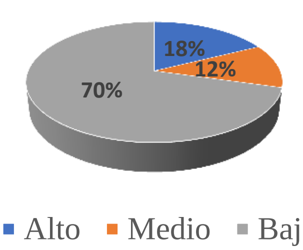
Tabla 16. Resultados obtenidos en los puntos 11 y 12 de la prueba de entrada

Estudiante	Puntaje en cada punto		%	Estudiante	Puntaje en cada punto		%
	11vo	**12vo**			**11vo**	**12vo**	
E1	0/2	1/2	25	E18	2/2	0/2	50
E2	0/2	0/2	0	E19	1/2	0/2	25
E3	0/2	0/2	0	E20	0/2	0/2	0
E4	0/2	1/2	25	E21	2/2	2/2	100
E5	2/2	2/2	100	E22	2/2	1/2	75
E6	2/2	1/2	75	E23	0/2	1/2	25
E7	0/2	1/2	25	E24	2/2	0/2	50
E8	2/2	2/2	100	E25	1/2	1/2	50
E9	0/2	0/2	0	E26	1/2	0/2	25
E10	1/2	1/2	50	E27	0/2	0/2	0
E11	0/2	0/2	0	E28	0/2	2/2	50
E12	1/2	0/2	25	E29	2/2	0/2	50
E13	0/2	0/2	0	E30	2/2	2/2	100
E14	0/2	1/2	25	E31	0/2	2/2	50
E15	2/2	2/2	100	E32	0/2	0/2	0
E16	1/2	2/2	75	E33	2/2	1/2	75
E17	2/2	0/2	50	E34	2/2	2/2	100

Fuente: elaboración propia

En la gráfica 6 se muestran los resultados obtenidos por los estudiantes agrupados de acuerdo a los niveles de éxito definidos.

Gráfica 6. Éxito de los estudiantes en el nivel de razón de cambio



Fuente: elaboración propia

En cuanto al nivel de la razón de cambio (N4) los resultados informan que la mayoría de los estudiantes, 24 de 34, no muestran la razón de cambio como promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable (AM4); 4 estudiantes muestran entre un 89% y 60% de respuestas correctas, y 6 estudiantes entre un 100% y 90% de aciertos.

4.2 Componente cualitativo

Para este componente, describimos el proceso de construcción de modelos matemáticos de situaciones de covariación lineal desarrollado por dos estudiantes, seleccionados según la cantidad de respuestas acertadas en la actividad de entrada, uno de ellos con alto porcentaje de respuestas acertadas (E1) y otro estudiante con bajo porcentaje de aciertos (E2). Esta descripción se presenta en tres fases, la de abstracción, la de resolución y la de validación; para lo cual se consideraron las producciones de los dos estudiantes en la secuencia de actividades y en la entrevista.

4.2.1 Fase de abstracción

Es el procedimiento que nos debe llevar a la formulación de los modelos matemáticos, para lo cual se deben establecer las siguientes etapas.

4.2.1.1 Paso de selección de variables

Este paso consiste en identificar las variables que describen y controlan la evolución del sistema. En la secuencia se planteó una situación con información que permitió a los estudiantes obtener y procesar datos para algunas situaciones relacionadas con el planteamiento inicial que aparece a continuación:

La empresa de acueducto, alcantarillado y aseo de Bogotá anunció la semana pasada que con el fin de efectuar reparaciones en la red de tubos realizaría un corte del suministro de agua desde el día de hoy y por un tiempo de 72 horas en el barrio El Porvenir de la localidad de Bosa. La señora María al no haberse enterado del corte y no tener agua almacenada decide aprovechar la lluvia que cae y pone en las escaleras de la terraza tres recipientes para recoger el líquido. Andrés, un hijo de María, observa los recipientes puestos e identifica que los tres son de forma cilíndrica, con la misma altura, pero con distinto diámetro; siendo el recipiente dos (R2) el de menor diámetro y el recipiente tres (R3) el de mayor diámetro. Además, que el recipiente uno (R1) fue colocado en el escalón central, el recipiente tres un escalón arriba y el recipiente dos un escalón abajo; tal como lo muestra la figura 1.

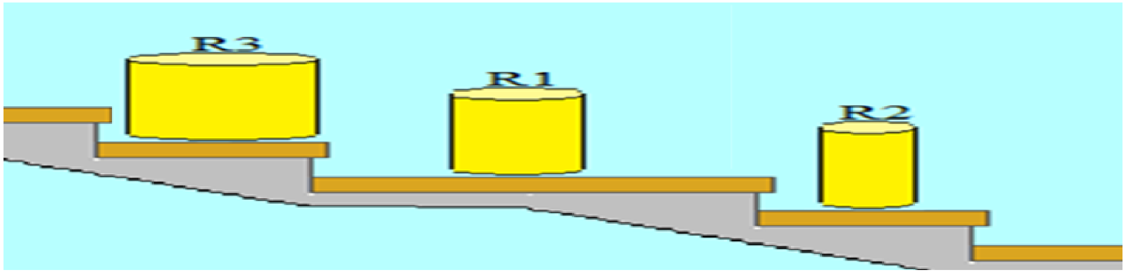


Figura 1.

Después de 4 minutos con la misma intensidad de lluvia Andrés observa que el agua ha logrado una altura de 8 centímetros dentro del recipiente tres, de 16 centímetros dentro del recipiente dos y 12 centímetros dentro del recipiente uno. Sin embargo, desea establecer la altura del agua en cada uno de los cilindros desde el escalón del centro; sin olvidar que la altura de cada escalón es de 5 centímetros.

Tabla 17. Descripción de proceso de modelación en el paso de selección de variables.

Descripción del proceso del estudiante que presentó alto porcentaje de éxito: E1	Descripción de los procesos del estudiante que presentó bajo porcentaje de éxito: E2
Actividad 1, tarea 1 se presenta una tabla que requiere al estudiante indicar la altura del agua a los 4 minutos de lluvia, inicialmente, dentro de cada uno de los recipientes, posteriormente, desde el escalón central; acción solicitada con el fin de verificar que el estudiante reconoce adecuadamente los datos en la situación. Para esta tarea, los estudiantes completan las tablas de la siguiente manera:	

E1:

1. Con un tiempo de cuatro minutos de lluvia, completa la siguiente tabla:

	R1	R2	R3
Altura del agua dentro del recipiente	12	16	8
Altura del agua en el recipiente desde el escalón central	12	11	13

E2:

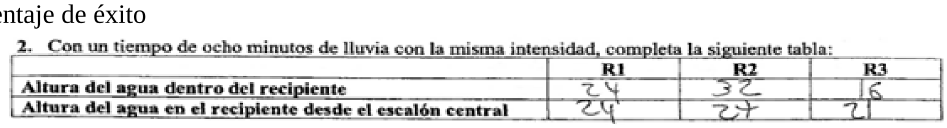
1. Con un tiempo de cuatro minutos de lluvia, completa la siguiente tabla:

	R1	R2	R3
Altura del agua dentro del recipiente	12	16	8
Altura del agua en el recipiente desde el escalón central	12	11	13

Esto indica que los estudiantes a partir de la lectura lograron identificar los datos correspondientes a la cantidad de agua que hay dentro de cada recipiente y así lo demostró cada uno en el momento de la entrevista:

E1	E2
P: Entonces, ¿cuál es la altura del agua dentro del recipiente a los 4 minutos... en el recipiente 1? E: 12, a los cuatro minutos el agua subió hasta 12 cm. P: En el recipiente dos escribiste 16, ¿por qué? E: En el recipiente 2 alcanzó los 16 cm porque era más angosto, entonces obviamente alcanza más altura... P: ¿Pero de dónde sacaste que eran 16?	P: Entonces veamos, con un tiempo de 4 minutos de lluvia, la altura del agua dentro del recipiente 1… y dijiste que era 12... ¿por qué? E: Porque a los 4 minutos hay 12 cm de altura. Lo que dice la situación. P: Listo. Ahora, a los 4 minutos dentro del recipiente 2, colocas que hay 16 cm de agua. ¿Por qué? E: Porque ahí dice que a los 4 minutos hay 12 cm de altura del agua en el recipiente 2. [Señalando en la información]

<table>
<tr><td>E: Pues aquí en el párrafo que dice 16 cm en el recipiente 2...
P: Ok... y aquí en el recipiente 3 escribes 8... ¿por qué?
E: Igualmente, porque ahí decía que a los 4 minutos alcanzó 8 cm. de altura.</td><td>P: O sea estás sacando la información de aquí.
E: Sí
P: Y colocas que a los 4 minutos, en el recipiente 3 hay 8 cm de agua. ¿Por qué?
E: Porque la información estaba escrita</td></tr>
<tr><td colspan="2">Al describir las estrategias utilizadas para encontrar los valores de la altura del agua desde el escalón central, cada uno de los estudiantes manifiesta:</td></tr>
<tr><td>P: ... Sin embargo si se desea establecer la altura del agua en cada uno de los cilindros desde el escalón del centro, sin olvidar que la altura de cada escalón es de 5 cm. Entonces, por ejemplo, aquí, a los 4 minutos, ¿cuánta altura alcanzó? [Refiriéndose al recipiente 3 que se ubica en el escalón alto]
E: 8 cm.
P: Bien. Entonces de aquí hasta aquí hay 8 cm., ¿pero desde el escalón central cuánto?
E: Pues 8+5... serían ...13
P: A 8 le sumas...
E: 5, que sería la altura del escalón. La altura del escalón más la altura del agua.</td><td>E: El recipiente 1 está en el escalón central pues esa es la medida. [Indica el valor ‘12’ de la tabla]
P: Listo. En el recipiente 2, ¿por qué dices que es 11?
E: Porque ahí tenía que haberle sumado los 5 cm del escalón central, pero se los resté…
P: ¿Y por qué dices que debiste haberlos sumado?
E: Para que quede a la misma altura del escalón central, y como está 5 cm más abajo, hay que sumarle los 5 para que quede a la misma altura del recipiente 1...
P: Hagamos el dibujo... lo que tú dices es que a esta altura le quito lo que tiene el escalón de altura, ¿y cuánto nos quedaría?
E: 11. O sea que sí restaríamos...</td></tr>
<tr><td>El estudiante deja claro que para el recipiente del escalón alto, tuvo en cuenta los 5 cm de altura que tiene de más con respecto al escalón central y además tuvo en cuenta la cantidad de agua que ya tenía el recipiente. Para los otros dos recipientes deduce la altura del agua de manera similar y lo argumenta así:</td><td>El estudiante duda sobre el proceso de resta que llevó a cabo en la parte escrita, manifestando que debió sumar los 5 cm para que el recipiente subiera a la misma altura del escalón central y no restar, pero con la guía del docente concluye que su proceso era el adecuado, restar la altura del escalón.
Luego explica para el recipiente 3 del escalón superior:</td></tr>
<tr><td>P: ... ¿Por qué aquí 12?
E: Porque el recipiente 1 ya estaba en el escalón central. No tenía que hacerle nada.
P: Listo. Aquí escribes 11 en el recipiente 2... ¿por qué?
E: Porque como estaba un escalón abajo y cada escalón mide 5 cm, le resté los 5 cm que tenía un escalón al otro, entonces me dio 11.</td><td>P: …. Y la otra, cuál es la altura que alcanza el agua en el recipiente 3 a los 4 minutos.
E: 13. Da 13.
P: ¿Y de dónde sale ese 13?
E: Los 8 + 5 del escalón.</td></tr>
<tr><td></td><td>El estudiante deja claro que para el recipiente del escalón alto, tuvo en cuenta los 5 cm de altura que tiene de más con respecto al escalón central y además tuvo en cuenta la cantidad de agua que ya tenía el recipiente.</td></tr>
<tr><td colspan="2">En la tarea 2 de la Actividad 1, se presenta una tabla en la cual se debe indicar la altura del agua en cada uno de los recipientes y la altura del agua desde el escalón central. Se incluye la variable tiempo al indicar que han transcurrido 8 minutos; lo cual exige la obtención de datos. Para esta tarea los estudiantes completan la tabla de la siguiente manera:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Alto porcentaje de éxito</td></tr>
</table>



2. Con un tiempo de ocho minutos de lluvia con la misma intensidad, completa la siguiente tabla:

	R1	R2	R3
Altura del agua dentro del recipiente	24	32	16
Altura del agua en el recipiente desde el escalón central	24	27	21

Bajo porcentaje de éxito

2. Con un tiempo de ocho minutos de lluvia con la misma intensidad, completa la siguiente tabla:

	R1	R2	R3
Altura del agua dentro del recipiente	24	32	16
Altura del agua en el recipiente desde el escalón central	24	27	21

Cuando se le pregunta por el primer renglón de la tabla los estudiantes responden así:	
P: ... Ahora a los 8 minutos, ¿cuál será la altura del agua dentro del recipiente 1? E: Pues como es el doble de tiempo y dice que es una lluvia constante a la misma intensidad, entonces se le suma... es el doble. Se le suma 12 otra vez... 12+12=24.	E: Porque se sumaron 12 cm y otros 12 cm más, entonces da 24 P: ¿Pero por qué sumas otros 12 minutos más? E: Porque dura otros 4 minutos más la caída del agua P: Listo. Como duplicamos el tiempo, también se duplica la cantidad de agua. Tú dices que puedes sumar 12 + 12 ó multiplicas 12 x 2. E: Sí. P: Listo. Ahora miremos en el recipiente 2. Tú dices que la altura es de 32 cm a los 8 minutos. ¿Por qué? E: Porque aquí aumenta 4 minutos más. O sea 32 cm

Los estudiantes toman en cuenta los valores para la variable tiempo, y como ésta se duplicó entonces la cantidad del agua que hay en el recipiente también. Reconocen que al cambiar una variable, también cambia la otra.

Al preguntarles por la forma en que completaron la siguiente celda que corresponde a la altura del agua en el recipiente desde el escalón central responden:	
E: Porque ... por la misma razón que en el primero... como es la misma intensidad que llueve, se le suma el doble, ... no el doble... se le suma lo que mide y se le resta 5 para saber la altura desde escalón central. P: O sea que respondiste aquí 32 - 5 lo del escalón central. Y para el recipiente 3, nos dices que la altura alcanza 16 cm de altura en 8 minutos, ¿la razón es? E: La misma que las anteriores... Llueve a la misma intensidad, se le suma 8 otra vez y da 16 y a eso se le suma 5, me da 21 por los 5 cm que hay demás del escalón central.	P: …Arranquemos con este [recipiente 1 situado en el escalón central]. A los 8 minutos, ¿cuál será la altura del agua? E: 24 cm porque está en el mismo escalón central P: Bien. Ahora miremos en el recipiente 2. Aquí colocaste que era 27, ¿por qué? E: Porque al 32 se le restan los 5 del escalón central. Y 32 - 5 = 27 cm P: Bien. Ahora veamos el recipiente 3. Dices que es 21 E: Porque al 16 le sumo los 5 del escalón central. Y 16 cm + 5 cm = 21 cm

Demostrando que tienen claro que el tiempo se duplicó y que eso implica que le deben sumar la misma cantidad de agua que ya tiene y que cada recipiente a partir del escalón central tiene una diferencia de 5 cm de altura. Lo cual es un indicio de que reconocen una relación cuantitativa entre las variables tiempo y altura de agua.

La primera actividad, en la tercera tarea, demanda del estudiante responder qué ha estado cambiando durante los cuatro primeros minutos, con lo cual se pretendió que se especificaran y seleccionaran las variables intervinientes en la situación. La respuesta del estudiante en la parte escrita fue la siguiente:

Alto porcentaje de éxito

3. Durante los 4 minutos iniciales ¿Qué ha estado cambiando? Justifica tu respuesta

la altura del agua. Eso pasa cuando cae agua en un recipiente.

Bajo porcentaje de éxito

3. Durante los 4 minutos iniciales ¿Qué ha estado cambiando? Justifica tu respuesta

Durante los 4 minutos Inicales a estado Cambiando la altura dependiendo a la altura de cada recipiente.

Hasta este momento los estudiantes sólo han identificado una variable que es la altura. Después en la entrevista responden lo siguiente

E: Cambia la altura del agua…
P: ¿Cambia algo más?
E: No. Sólo la altura.
P: Bueno voy a replantear la pregunta. Entre estos dos instantes aquí y aquí, qué cambia.
E: El tiempo y la altura.
P: ¿Así que solamente va cambiando la altura?
E: No. También el tiempo, porque dependiendo del tiempo va cambiando la altura.
P: ¿Habrá algo más que pueda cambiar?
E: No. Sólo la altura del agua y el tiempo.

E: Bueno, yo escribí: “Ha estado cambiando la altura dependiendo de la altura de cada recipiente”
P: No es solamente en el instante 4. Es durante ese lapso de tiempo, del minuto 0 al minuto 4, ¿qué ha estado cambiando?
E: La altura del agua, que depende de la intensidad de la lluvia y de lo que cae el agua.
P: ¿Y por qué cambia la altura del agua?
E: Gracias al tiempo y a la intensidad de la lluvia.
P: ¿Cómo así, ‘gracias al tiempo’?
E: Cambia la altura del agua a medida que pasa el tiempo. La intensidad de la lluvia es igual.

De esta manera los estudiantes reconocen que son dos las magnitudes presentes en esta situación, la altura y el tiempo y que las dos varían. Además, identifican que la intensidad de la lluvia es constante.

La cuarta tarea se concentra en R1, y pide completar una tabla que relaciona tiempo con altura del agua desde el escalón central, lo cual requiere que el estudiante siga obteniendo datos.

En la parte escrita, los estudiantes plasman lo siguiente:

4. Completa la siguiente tabla, representa la inforr

Altura del agua en R1 desde el escalón central	0cm	3cm	6cm	9cm	12cm	15cm	18cm	21cm
Minutos	0	1	2	3	4	5	6	7

4. Completa la siguiente tabla, representa la infor

Altura del agua en R1 desde el escalón central	0	3	6	9	12	15	18	21
Minutos	0	1	2	3	4	5	6	7

A fin de indagar sobre las estrategias utilizadas para encontrar los valores, durante la entrevista los estudiantes responden:

P: Altura del agua en R1 desde el escalón central. R1 es el recipiente. Dices que a los 0 minutos hay 0 centímetros de altura que alcanza el agua, ¿por qué?
E: Pues como no ha transcurrido ningún minuto pues no se ha llenado nada porque no ha caído agua.

E: En el recipiente 1 había, en 4 minutos 12 cm. Entonces dividí 12 entre 4 y me da 3. Y de ahí multiplicando ese número por el otro número para encontrar los otros.
P: Bueno. Para 1 minuto, tú dices que la altura son 3 cm. Para 2, dices que es 6…

P: En 1
E: En uno alcanza los 3 cm porque si en 4 minutos alcanza los 12, entonces yo dividí esos 12 entre 4. Y en un minuto alcanzó 3 cm.
P: ¿Y por qué lo dividiste? ¿por qué la división?
E: Como era constante yo lo dividí

Es decir los estudiantes suponen que la razón de llenado de agua es constante y por ello calculan 12/4, luego a partir de este, van encontrando los demás valores de la columna correspondiente a la variable altura.

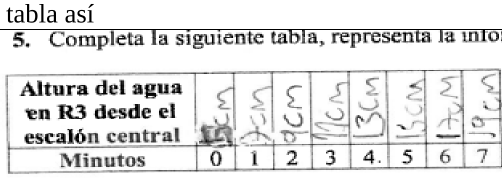
A pesar de elegir una estrategia aditiva (sumar cada vez 3) puede reconocer que las dos variables están relacionadas y dicha relación corresponde a un aumento, además cuantifica la relación como 1 a 3, cuando afirma que por cada minuto la altura cambia tres, lo cual se evidencia en el siguiente fragmento de la entrevista

P: En 2 minutos escribes 6...
E3: Pasa el doble de tiempo de un minuto, entonces le sumé a los 3 centímetros otros tres.
P: Y aquí dices que es 9
E3: Es 9 por qué pasó otro minuto, y cada minuto sube 3 centímetros. Se va sumando cada minuto de a tres.

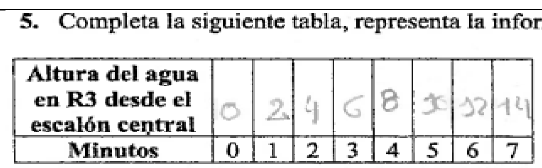
Inicialmente trata de elegir una estrategia multiplicativa, pero finalmente elige una estrategia aditiva (sumar cada vez 3), pero no es claro si reconoce que las dos variables están relacionadas y dicha relación corresponde a un aumento, sólo hasta el final menciona las dos variables y como una depende de la otra como se evidencia a continuación.

E: Porque voy sumando de a tres y así hasta llegar al último 21
P: ¿Y por qué sumas de a tres?
E: Porque voy sumando y encontrando las cantidades y llego hasta aquí al 12.
P: Ah, vas sumando cierta cantidad cada vez para que aquí al final te de 12. ¿Y cómo hiciste con los demás?
E: Sigo sumando
P: ¿Y aquí por qué te dio cero?
E: Porque en 0 minutos, hay 0 cm. No había agua.

Para la quinta tarea se solicita lo mismo que en la anterior, pero para el recipiente tres y el estudiante completa la tabla así


5. Completa la siguiente tabla, representa la inforn

Altura del agua en R3 desde el escalón central	[illegible]cm	7cm	9cm	11cm	13cm	15cm	17cm	19cm
Minutos	0	1	2	3	4.	5	6	7


5. Completa la siguiente tabla, representa la infori

Altura del agua en R3 desde el escalón central	0	2	4	6	8	10	12	14
Minutos	0	1	2	3	4	5	6	7

Se pregunta al estudiante sobre cómo hizo para completar la tabla y en la entrevista responde:

P: Listo veamos ahora para el recipiente número 3 con esta tabla. Nos dice que a los 0 minutos hay 5 cm, ¿por qué razón?
E3: Cómo empezaba desde el escalón central entonces ya tenía 5 centímetros.
P: Y dices que en 1 hay 7, ¿qué motivó esa respuesta?
E3: … cogí los 8 y lo dividí entre 4. Eso da 2 y le sumé 5. Me dio 7.
P: ¿Qué indica este 2?
E3: Lo que se ha llenado este recipiente en un minuto.
P: Listo, o sea que en este recipiente logras 2 centímetros de altura en un minuto. Listo… ahora para dos minutos…
E3: Pues igualmente se le suman los dos, o

Se observa que el estudiante no tomó en cuenta que para R3 tenía que completar la tabla con relación al escalón central, pero sí encuentra una relación para saber que aumenta de dos en dos. Y en la entrevista responde así:

E: Aquí dividí 8 en 4 y me dio 2, y de ahí fui sumando hasta que me diera 8
P: Ok, tú dices que la división da 2, y que ese resultado es la cantidad en centímetros de agua que vas sumando.
E: Porque si sumo de a 2 me va dando
P: Ah, vale. Y entonces esa es la única razón para encontrar los valores…
E: Sí
P: ¿Y aquí por qué dio cero?
E: Porque en cero no había agua
El docente en la entrevista hace otras preguntas al estudiante que le dan elementos para encontrar la

sea 4 y a ese 4 le sumó los 5 del escalón y me da 9. P: ¿Y este 11? E3: Pues igualmente. Cojo otros 2 minutos, me da 6 y a ese 6 le sumo 5	relación de tiempo con altura del agua, teniendo en cuenta que el recipiente 3 se encuentra un escalón arriba y que se solicita con respecto al escalón central. P: Listo. Perfecto. Veamos ahora lo que dice aquí: “altura del agua desde el escalón central”. ¿Te sugiere algo esto que dice acá? E: Sí. Que le sume o que le reste 5 cm, lo del escalón central. P: Ok. ¿cuándo sumas? E: Aquí en el recipiente tres le sumo lo del escalón central. Y aquí en el recipiente dos le resto. P: ¿Y por qué no consideraste eso acá? E: Porque no vi… P: Ok. ¿Podríamos mirar cómo quedaría? [Para el recipiente 3] E: Podríamos sumarle 5 cm a cada medida P: Aquí, a los cero minutos, va a haber… E: 5 P: Escribámoslo aquí arriba con rojo. ¿Y para los otros? E: Voy sumando de a 5. Lo del escalón. [Corrige todos los datos en el tablero sumando de a 5 a cada dato]

De la misma forma que para el recipiente anterior, R1, los estudiantes suponen que la razón de llenado de agua es constante y por ello calculan 8/4, luego a partir de este, van encontrando los demás valores de la columna correspondiente a la variable altura reconociendo que las variables están relacionadas y que dicha relación corresponde a un aumento, aplicando la misma estrategia aditiva (sumar cada vez 2) cuantificando una relación de 1 a 2 y además tomando en cuenta que por estar en el escalón superior debe sumar 5 cm más con respecto al escalón central.

Para la sexta tarea se solicita lo mismo que en la anterior, pero esta vez para R2 y los estudiantes completan las tabla así:

6. Completa la siguiente tabla, representa la infor

Altura del agua en R2 desde el escalón central	0cm	0cm	3cm	7cm	11cm	15cm	19cm	23cm
Minutos	0	1	2	3	4	5	6	7

Se observa que el estudiante colocó cero de altura para un tiempo de cero minutos, y una altura cero nuevamente, para un tiempo de un minuto.

6. Completa la siguiente tabla, representa la infor

Altura del agua en R2 desde el escalón central	0	4	8	12	16	20	24	28
Minutos	0	1	2	3	4	5	6	7

El estudiante colocó cero de altura para un tiempo de cero minutos, y para el resto de datos va aumentando de cuatro en cuatro

Cuando se indagó a los estudiantes sobre sus respuestas respondieron que:

P: Dices a los 0 minutos hay 0 cm ¿por qué razón? E3: Estaba un escalón abajo… [El estudiante se queda pensativo] P: Pero desde el escalón central no podrías decir qué es cero. Diríamos que son -5 cm. ¿Y en un minuto? En un minuto dices que es 0. ¿Por qué razón? E3: ...Estoy haciendo algo mal	E: Para el recipiente 2, en cero min hay cero cm de altura del agua. En 1 min, 4 cm. En 2 min 8 cm. y así sucesivamente.
El estudiante reconoce que se equivocó en los cálculos para los dos primeros valores dados para la variable tiempo transcurrido, cero y un minuto respectivamente, pues no tuvo en cuenta que con respecto al escalón central el recipiente está cinco centímetros abajo como se lo indica el profesor, sin embargo se observa que en los datos siguientes desde 2 minutos en adelante sí toma en cuenta que el recipiente está en el escalón inferior. La entrevista continúa así: P: Empecemos de nuevo... Cómo harías para calcular la altura del agua en un minuto. … E3: 16 cm es lo que sube y lo divido en 4, que indica que en un minuto sube 4 cm. Bueno y a ese 4 le resto 5, lo cual da -1. [El estudiante corrige el valor en el tablero] P: Listo y en 2, pusiste 3 E3: Sí porque a -1 le sumo 4 y me da 3 positivo. P: Bueno, y aquí dices que en 3 minutos aumenta a 7, ¿por qué razón? E3: Pues se le aumenta 4 al 3 anterior. P: ¿y aquí este 11? E3: Se le aumentan otros 4… Y así sigo aumentando de a 4 cada vez Finalmente, el estudiante corrige sus datos durante la entrevista y nuevamente procedió al igual que en los anteriores casos suponiendo que la razón de llenado del agua es constante y por ello calcula 16/4 y a partir de saber cuánto llena el recipiente en un minuto, cuantificando la relación 1 a 4 para calcular los demás valores de altura, pero esta vez resta los 5 centímetros al primer dato que obtiene y a partir de ese último dato sólo suma los 4 centímetros que sube el agua cada minuto, reconociendo que las variables están relacionadas y dicha relación corresponde a un aumento.	Demostrando que siguió el mismo proceso que para la tabla anterior, pero tiene en cuenta que aumenta de cuatro en cuatro. El docente le dice que tome en cuenta que es desde el escalón central que debe medir y en la entrevista corrige así: P: ¿Y allá? [Para el recipiente 2] E: Le restaría los 5 cm del escalón P: ¿Entonces cómo nos quedaría? E: 0 - 5 =- 5; 4 - 5 = -1; 8 - 5 = 3, y así

Fuente: elaboración propia

Es decir, E1 durante esta primera fase de construcción del modelo, abstracción, en el paso de selección de variables, coordina el valor de la variable altura del agua en cada recipiente desde el escalón central con los cambios en el tiempo transcurrido (AM1) comportamiento indicativo de la acción mental que caracteriza el Nivel1 (N1) de razonamiento covariacional, aunque es notorio que para todos los casos, aunque cuantifica la razón de cambio, no la utiliza para encontrar los valores de la variable dependiente, esto es posiblemente causado porque usa estrategias aditivas en el cálculo, por lo que es posible afirmar que el estudiante no exhibe la acción metal de coordinar la cantidad de cambio de la variable tiempo con los cambios en la variable altura del agua en el recipiente (AM3).

Mientras que E2 en esta primera fase de construcción del modelo, abstracción, en el paso de selección de variables, tiene dificultad para coordinar el valor de la variable altura del agua en cada recipiente desde el escalón central con los cambios en el tiempo transcurrido (AM1), pero fácilmente lo corrige durante la entrevista, alcanzando después de ella un indicativo de la acción mental que caracteriza el Nivel 1 (N1) de razonamiento covariacional.

4.2.1.2 Paso de problematización

También denominada la etapa formulación de la cuantificación de la relación entre variables. Es aquí donde se analiza la formulación de la relación, es decir, la razón de cambio constante para la variación lineal.

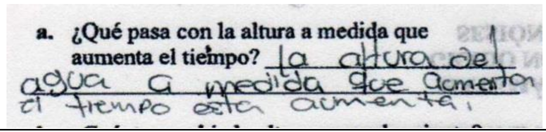
4.2.1.2.1 *Nivel de dirección.*

Tabla 18. Descripción de proceso en el nivel de dirección.

Descripción del proceso del estudiante que presentó alto porcentaje de éxito	Descripción de los procesos del estudiante que presentó bajo porcentaje de éxito.
Continua el proceso de modelación en la fase de abstracción, en el paso de problematización, el nivel de dirección (N2) desarrollando la primera actividad, literal a de las tareas 4, 5 y 6.	

Reconocen que ha estado cambiando la altura del agua dentro de los recipientes, en cada caso, mientras el tiempo está transcurriendo (AM1) y (AM2), esto es, después de completar tabla de datos a partir de la coordinación del cambio positivo de altura del agua en el recipiente desde el escalón central con los cambios en el tiempo trascurrido. Además de representar la información en el plano cartesiano.


a. ¿Qué pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo? va aumentando


a. ¿Qué pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo? la altura del agua a medida que aumenta el tiempo esta aumenta,

Para averiguar qué estrategia emplearon para coordinar la dirección del cambio en la altura del agua, desde el escalón central, con el aumento del tiempo, los estudiantes contestaron:	
P: Listo. Ahora vamos a mirar la otra parte. Volvamos a las tablas. ¿Qué pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo? E: Aumenta el nivel del agua. P: ¿En qué casos disminuiría? E: Si deja de llover, hace sol y se evapora el agua o que la señora María vacíe los recipientes	P: Bueno… vamos a mirar la respuesta que das al literal a. de los puntos 4, 5 y 6. Cada uno de ellos dice: “¿Qué pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo?” y es la misma pregunta para cada uno de los recipientes. Ahora miremos qué respondiste (para el recipiente 1): “A medida que aumenta el tiempo, aumenta la altura”. ¿En tus tres respuestas creo que dices lo mismo? E: Sí. Porque por cada tiempo que pase va aumentando el agua P: ¿Y por qué aumenta el agua? E: Porque se va llenando P: ¡Vale!

Fuente: elaboración propia

Están alcanzando un nivel de desarrollo de imágenes de la covariación (N2) que se están sustentando con sus acciones mentales (AM1) y (AM2).

4.2.1.2.2 *Nivel de coordinación cuantitativa.*

Tabla 19. Descripción de proceso en el nivel de coordinación cuantitativa

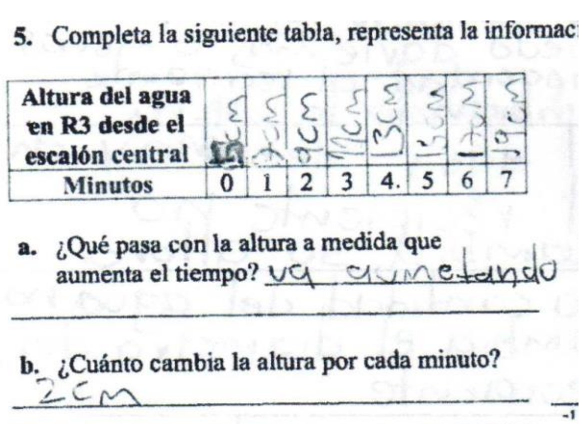
Descripción del proceso del estudiante que presentó alto porcentaje de éxito (E1)	Descripción de los procesos del estudiante que presentó bajo porcentaje de éxito (E2)
En el nivel 3 (N3), coordinación cuantitativa, donde se requiere determinar la cantidad de cambio en una de las variables dado un cambio específico en la otra, sustentado por las acciones mentales (AM1), (AM2) y (AM3), se tiene que al observar los resultados obtenidos en la actividad 1, literales b de tareas 4, 5 y 6, cada estudiante	

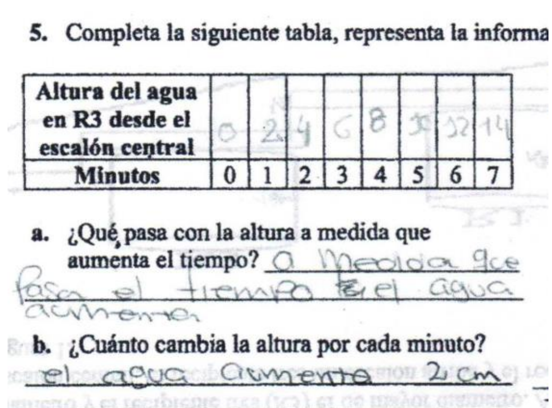
Los estudiante coordinan la cantidad de cambio de la altura del agua en cada recipiente desde el escalón central mientras transcurre el tiempo determinando cuanto es el cambio en la altura por cada minuto, en cada una de las tres situaciones (R1, R2 y R3). Los siguientes fragmentos de la entrevista da muestras de esto:

P: Bien. Ahora miremos esta otra pregunta. Para el recipiente 1 ¿Cuánto cambia la altura por cada minuto?
E: Pues en este 3cm. 2cm aquí y en este otro 4cm. [Señala la tabla del recipiente 1, luego del recipiente 3 y finalmente el recipiente 2]
P: ¿Y depende la posición donde esté?
E: No. Aquí tampoco y aquí tampoco. [Señala las tablas para justificar su respuesta]

P: Listo... Ahora vamos a mirar el literal b. de los mismos puntos 4, 5 y 6. Este literal dice: “Cuánto cambia la altura por cada minuto”. Para el recipiente 1 dices: “Por cada minuto, la altura del agua cambia 3”... ¿Tres qué?
E: Tres centímetros.
P: ¿Y por qué deduces eso?
E: Porque en la tabla dice que va aumentando.
P: Listo. Aquí para el recipiente 3 dices que el agua aumenta 2 cm por cada minuto. ¿Por qué?
E: Porque aquí en la tabla dividí 13 entre 4…
P: ¿Y no era 8?
E: 8 entre 4 y da 2
P: ¿Y por qué 8 y no 13?
E: Por el escalón

Los estudiante durante esta fase de construcción del modelo, abstracción, coordinan el valor de la variable altura del agua en cada recipiente desde el escalón central con los cambios en el tiempo transcurrido (AM1) además coordinan la dirección del cambio de la altura del agua con los cambios en el tiempo transcurrido (AM2) y coordinan la cantidad de cambio de altura del agua con los cambios en el tiempo (AM3) comportamientos que sustentan las acciones mentales que caracterizan el Nivel 3 de razonamiento covariacional, denominado Coordinación Cuantitativa.





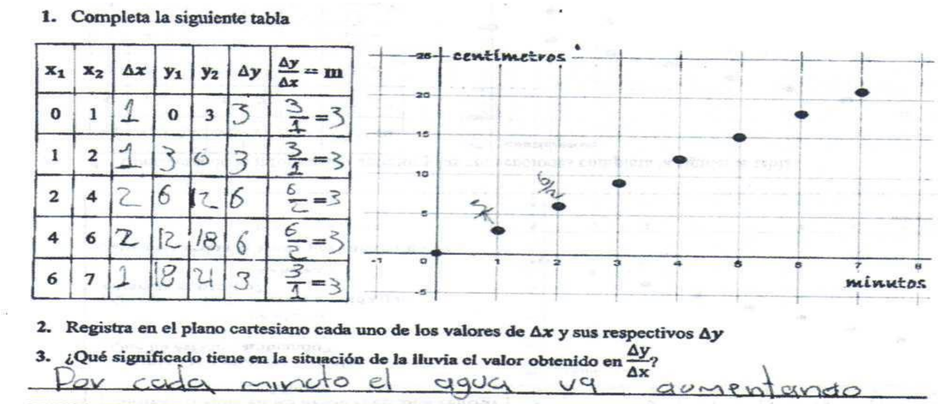
El estudiante está suponiendo que la razón de llenado es constante y calcula sumando cada vez 5 (estrategia aditiva), iniciando en 5 cm como se evidencia en este fragmento de la entrevista:	Supone que la razón de llenado de agua es constante y por ello calcula 8/4, luego va encontrando los demás valores de la columna correspondiente a la variable altura del agua en el recipiente. Afirma que:
P: Listo veamos ahora para el recipiente número 3 con esta tabla. Nos dice que a los 0 minutos hay 5 cm, ¿por qué razón? E: Cómo empezaba desde el escalón central entonces ya tenía 5 centímetros. P: Y dices que en 1 hay 7, ¿qué motivó esa respuesta? E: Porque en 4 minutos alcanzaba 8 centímetros, le sumé los 5, me dio 13. P: ¿A qué le sumaste 5? E: A los 8 centímetros de agua que había más los 5 del escalón me dio 13. Entonces ese 13 lo dividí en cuatro, igual como hice con el de acá. No, no fueron 13… cogí los 8 y lo dividí entre 4. Eso da 2 y le sumé 5. Me dio 7 P: ¿Qué indica este 2? E: Lo que se ha llenado este recipiente en un minuto	P: Ok. Y aquí (para el recipiente 2) nos dices que la altura del agua dentro del recipiente 2 cambia 4 cm. ¿Por qué? E: Porque aquí tomé que a los 4 minutos alcanza 16 cm P: Pero entonces aquí divides 16 y no 11… E: Por lo que no se cuenta el escalón…

Están reconociendo que la relación entre las variables altura del agua en el recipiente desde el escalón central y tiempo transcurrido van aumentando (AM2), coordinando así la cantidad de cambio de la altura del agua en el recipiente desde el escalón central con el cambio en la cantidad del tiempo transcurrido (AM3).

Es decir, los estudiante durante esta fase de construcción del modelo, abstracción, coordinan el valor de la variable altura del agua en cada recipiente desde el escalón central con los cambios en el tiempo transcurrido (AM1) además coordinan la dirección del cambio de la altura del agua con los cambios en el tiempo transcurrido (AM2) y coordinan la cantidad de cambio de altura del agua con los cambios en el tiempo (AM3) comportamientos que sustentan las acciones mentales que caracterizan el Nivel 3 de razonamiento covariacional, denominado Coordinación Cuantitativa.

En la segunda actividad, tablas de las tareas 1, 4 y 7, de la secuencia didáctica, continúa obteniendo datos y completando las tablas satisfactoriamente pues ya está reconociendo y coordinando la cantidad de cambio en una variable (tiempo transcurrido) con cambios en las otras variable (cantidad de altura del agua desde el escalón central) (AM3) a partir de la información inicial suministrada en esta sesión donde se da a conocer que es lo que está cambiando durante los 4 minutos iniciales (el tiempo y la altura) (AM1), lo que pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo (aumenta) (AM2) y cuánto cambia la altura por cada minuto (AM3), acciones que sustentan al Nivel 3 (N3): coordinación cuantitativa.

Alto porcentaje de éxito



1. Completa la siguiente tabla

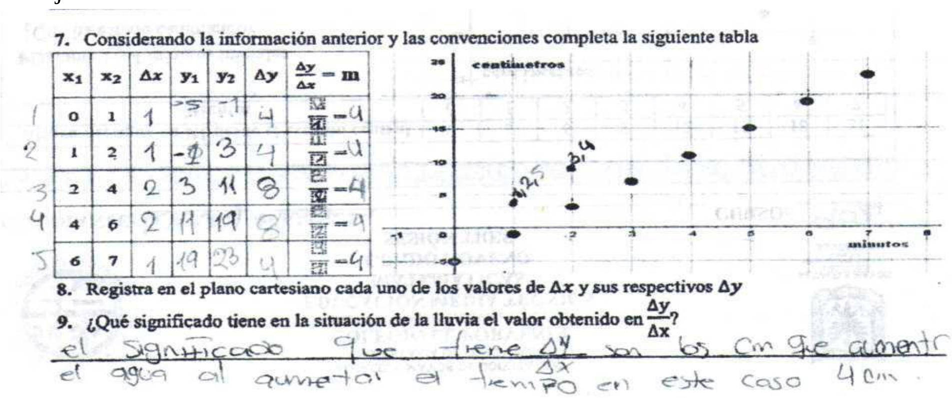
x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
0	1	1	0	3	3	$\frac{3}{1}=3$
1	2	1	3	6	3	$\frac{3}{1}=3$
2	4	2	6	12	6	$\frac{6}{2}=3$
4	6	2	12	18	6	$\frac{6}{2}=3$
6	7	1	18	24	3	$\frac{3}{1}=3$

2. Registra en el plano cartesiano cada uno de los valores de Δx y sus respectivos Δy

3. ¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

Por cada minuto el agua va aumentando

Bajo porcentaje de éxito



7. Considerando la información anterior y las convenciones completa la siguiente tabla

	x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
1	0	1	1	-5	-1	4	[illegible] = 4
2	1	2	1	-1	3	4	[illegible] = 4
3	2	4	2	3	11	8	[illegible] = 4
4	4	6	2	11	19	8	[illegible] = 4
5	6	7	1	19	23	4	[illegible] = 4

8. Registra en el plano cartesiano cada uno de los valores de Δx y sus respectivos Δy

9. ¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

el significado que tiene $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ son los cm que aumenta el agua al aumentar el tiempo en este caso 4 cm.

Los estudiantes coordinan la cantidad de cambio en el tiempo con la cantidad de cambio en la altura del agua en el recipiente desde el escalón central (AM3) y realiza los cambios respectivos en el tiempo y la altura por medio de la diferencia entre dos valores correspondientes en cada columna. El fragmento de entrevista permite indagar por las estrategias utilizadas para encontrar los valores de la altura del agua y los tiempos:

E: Pues ΔX es el cambio de un tiempo al otro, X_1 y X_2 que se restan.
P: Bueno aquí se podrían considerar las dos opciones. Primero vamos a considerar el cambio de aquí hasta aquí. ¿Cuánto cambió de

P: Bien, veamos el siguiente (para el recipiente 2). Aquí, ¿Por qué colocaste -5? (En fila 1, valor de Y_1)
E: Porque a 0 le corresponde -5 (en la tabla inicial)

0 a 1? ¿Cuánto cambia?
E: Un minuto
P: De 1 a 2
E: Un minuto
P: De 2 a 4 y de 4 a 6
E: 2 minutos
P: ¿Y de 6 a 7?
E: Un minuto
P: Y Aquí vamos a mirar los respectivos Y para cada uno de estos X. Aquí pusiste 0 para Y_1. ¿recuerdas por qué?
E: Porque no había subido nada
P: Aquí pusiste que era 3, ¿por qué?
E: Porque en un minuto ya había subido 3 cm
P: En 2 pusiste 6 ¿por qué?
E: Por la misma razón como es el doble. Y así va subiendo cada 3 cm
P: ¿Y aquí estos valores?
E: Son para X_2
P: Ahora vamos a mirar los cambios de Y_1 a Y_2.
E3: De 0 a 3 hay 3, de 3 a 6 cambia 3, de 6 a 12 cambia 6, de 12 a 18 cambia 6
P: Aquí, ¿por qué 3?
E: Porque a 2 minutos le corresponde 3 cm de altura
P: Ok. Y así para los demás
E: Sí
P: Ok. Ahí los datos nos quedaron bien. Ahora veamos el cambio. ¿De -5 a -1?
E: Hay 4
P: ¿De -1 a 3?
E: Hay 4
P: ¿De 3 a 11?
E: Hay 8
P: ¡Listo!

Fuente: elaboración propia

En la última columna deben calcular la razón entre cada una de las diferencias, $\Delta x\ y\ \Delta y$ y establecer si esta razón entre las diferencias correspondientes de dos valores de la tabla es una constante, para luego identificar si lo graficado corresponde a una funciòn lineal o no. Están alcanzando un nivel de desarrollo de imágenes de la covariación (N3): Coordinación cuantitativa.

4.2.1.2.3 *Nivel de razón de cambio.*

Este nivel solicita reconocer la cantidad promedio de cambio en una de las variables al realizar cambios constantes en la otra. Para describir el proceso en este nivel, de los estudiantes seleccionados, se observó inicialmente sus producciones en las tareas cuyo fin era establecer la razón entre el cambio en la variable dependiente y el cambio de una unidad en la variable independiente, posteriormente, la razón entre el cambio en la variable dependiente con el cambio mayor a la unidad en la variable independiente, además, el significado que asocia a esta razón considerando la situación inicial.

Tabla 20. Descripción de proceso en el nivel de razón de cambio

Descripción del proceso del estudiante que presentó alto porcentaje de éxito (E1)	Descripción de los procesos del estudiante que presentó bajo porcentaje de éxito (E2).
Para que los estudiantes abordaran este nivel se planteó en la tarea uno, de la segunda actividad de la secuencia didáctica, una tabla cuya última columna solicitó, una vez calculados los cambios en la variable dependiente dados unos cambios en la variable independiente, expresar la razón entre estos cambios y calcular el cociente de estos dos valores; además, se preguntó en la tarea tres por el significado que asocia a este valor considerando la situación inicial; sin embargo, estas dos tareas están referidas al recipiente uno; para el recipiente tres se asignaron las tareas cuatro y seis, y para el recipiente dos las tareas siete y nueve; cada una de ellas con los mismo propósitos, respectivamente, para los cuales se plantearon las tareas uno y tres.	
En la última columna de cada tabla logro establecer correctamente las razones considerando cambios iguales o mayores a la unidad en la variable independiente, además, obtiene el mismo cociente, respectivamente, en cada una de ellas.	Logra establecer razones considerando cambios iguales o mayores a la unidad en la variable independiente, sin embargo, en la quinta fila de la primera y segunda tabla obtiene distintos cocientes a los de las otras filas, respectivamente.

R1

E1:

x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
0	1	1	0	3	3	$\frac{3}{1}=3$
1	2	1	3	6	3	$\frac{3}{1}=3$
2	4	2	6	12	6	$\frac{6}{2}=3$
4	6	2	12	18	6	$\frac{6}{2}=3$
6	7	1	18	24	3	$\frac{3}{1}=3$

E2:

x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
0	1	1	0	3	3	$\frac{3}{1}=3$
1	2	1	3	6	3	$\frac{3}{1}=3$
2	4	2	6	12	6	$\frac{6}{2}=3$
4	6	2	9	18	9	$\frac{9}{2}=4.5$
6	7	1	12	21	9	$\frac{9}{1}=9$

R3

E1:

x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
0	1	1	5	7	2	[illegible] =2
1	2	1	7	9	2	[illegible] =2
2	4	2	9	13	4	[illegible] =2
4	6	2	13	17	4	[illegible] =2
6	7	1	17	19	2	[illegible] =2

E2:

x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
0	1	1	5	7	2	[illegible] =2
1	2	1	~~4~~	9	2	[illegible] =2
2	4	2	9	13	4	[illegible] =2
4	6	2	9	17	8	[illegible] =4
6	7	1	17	19	2	[illegible] =2

R2

E1:

x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
0	1	1	-5	-1	4	[illegible] =4
1	2	1	-1	3	4	[illegible] =4
2	4	2	3	11	8	[illegible] =4
4	6	2	11	19	8	[illegible] =4
6	7	1	19	23	4	[illegible] =4

E2:

x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
0	1	1	-5	-1	4	[illegible] =4
1	2	1	-~~0~~1	3	4	[illegible] =4
2	4	2	3	11	8	[illegible] =4
4	6	2	11	19	8	[illegible] =4
6	7	1	19	23	4	[illegible] =4

Sin embargo, al observar las siguientes producciones en el significado que otorgan a la razón de cambio en la situación inicial:

Proceso del estudiante con alto porcentaje de éxito (E1)

R1

3. ¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

Por cada minuto el agua va aumentando

R3

6. ¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

Que cambia dos centimetros por cada minuto que paso

R2

9. ¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

El cambio que se da entre y e x por cada minuto que pasa

Proceso del estudiante con bajo porcentaje de éxito (E2)

R1

3. ¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

las X_1 y X_2 los representa cuanto tiempo pasa y las Y_1 y Y_2 la altura el que a agua obtiene al pasar seirto tiempo y la exprecion $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nos muestra cuanto cambio la altura al pasar el tiempo.

R3

6. ¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

la cantidad que aumenta el agua a medida que aumenta el tiempo.

R2

9. ¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

el significado que tiene $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ son los cm que aumenta el agua al aumentar el tiempo en este caso 4 cm.

Vemos que para la tarea tres no especifica el valor exacto del cambio de la altura del agua desde el escalón central al aumentar un minuto el tiempo; sin embargo, para la tarea seis el estudiante escribe claramente el cambio en cada una de las variables, y para la tarea nueve, tampoco indica el valor específico del cambio en la variable dependiente; pero en todas las respuestas a estas tareas se puede observar que el significado que el estudiante asocia a la razón es la relación entre el cambio de la variable independiente dado un cambio de una unidad en la variable independiente. Afirmación que también toma fuerza al observar el siguiente apartado de la entrevista:	Vemos que para las tareas tres y seis el estudiante no presenta el valor exacto del cambio de la altura del agua desde el escalón central, tampoco el cambio o aumento especifico en el tiempo; aunque si escribe que a medida que aumenta el tiempo crece la altura del agua, esta manifestación corresponde al nivel de dirección. Para la tarea nueve indica que el cambio en la variable dependiente es 4 cm, pero no especifica el cambio necesario en la variable independiente. Al analizar la entrevista, una vez corregidos los datos erróneos en las alturas del agua de la tabla del recipiente uno y del tres y en consecuencia tener la misma razón de cambio en cada una de las tablas, respectivamente, logra manifestar que la razón de cambio en la situación indica cuanto cambia la altura del agua desde el escalón central al realizar cambios en el tiempo; prueba de esta afirmación la encontramos en el siguiente apartado de la entrevista:
P: ¿Qué significado tiene ese 3 en la situación?	E: Las X_1 y X_2 nos representa cuanto

E: Que siempre ha ido aumentando 3
P: Pero aquí no aumenta 3 (Señalando los dos valores de 6 en la columna ΔY)
E: Ahí aumentó el doble
P: ¿Pero qué significado tiene este 3 en la situación? (Señalando la columna ΔY / ΔX)
E: El cambio que se logró
P: Se más específico, en función de la situación, ¿Este 3 qué diría?
E: Ese 3 diría que la constante es 3
P: ¿Cada cuánto?
E: Cada minuto
P: Es decir, que por cada minuto…
E: ...Va a cambiar 3
P: Por ejemplo, aquí tienes 6 (Señalando valor 6/2 en columna ΔY / ΔX)
E: Cambia 3. Como son 2 minutos, cambia 6
P: Ahora miremos la misma pregunta, pero para el recipiente que está arriba, el tres. Aquí nos dio siempre 2. ¿Qué quiere decir este 2, o este ΔY / ΔX en la situación específicamente? (Señalando tabla para el recipiente 3)
E: Que por cada minuto siempre va a aumentar 2
P: Bien. Ahora veamos aquí para el recipiente de agua que está abajo. Aquí nos dio siempre 4 en la columna de ΔY / ΔX… la pendiente… (Indicando la tabla, esta vez para el recipiente 2)
E: Siempre nos dio 4 (Señalando la columna ΔY / ΔX)
P: Entonces, ¿Qué escribiste?
E: "Es el cambio que se da entre y e x por cada minuto que pasa" (Leyendo su texto escrito para la tarea 9)
P: Explícame eso por favor…
E: Que siempre se da cambio en 4, siempre va a aumentar 4
P: Pero detalladamente ¿Cómo sería?
E: Que por cada minuto que pase, siempre va a aumentar 4 cm la altura
tiempo pasa, y las Y_1 y Y_2 nos dice cuál es la altura que el agua obtiene al pasar cierto tiempo. Y la ecuación ΔY / ΔX nos muestra el cambio en la altura al pasar el tiempo. O sea, dependiendo de cuánto tiempo pase, aumenta la altura del agua.
P: Por ejemplo, aquí, ¿Este 3 de la última columna qué significa? (Señalando en la columna ΔY / ΔX)
E: Es el cambio. Por cada minuto, aumenta 3 cm el agua.
P: Vamos a mirar ahora, la misma pregunta, pero para el recipiente tres, ¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia, el valor de ΔY / ΔX
E: Sería lo mismo. Por cada que aumentan los minutos, aumentan los cm.
P: Ahora en esta última columna te dio 2, este 2, ¿Qué significa? (Señalando valor de la primera fila columna ΔY/ΔX)
E: Lo que cambia. En 1 minuto, aumenta 2 cm.
P: Bien. Indistintamente de los datos, podríamos seguir aquí colocando datos y vamos a obtener aquí otros números. Si estableces esta relación, ¿siempre me va a dar 2?
E: Sí, siempre. Si cambiara la intensidad de la lluvia, sí cambiaría ese dos.
P: Vamos con la otra tabla. Esta es para el recipiente que estaba en el escalón más bajo. ¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en ΔY / ΔX?
E: Es igual. Por cada que cambian los minutos, cambian los cm del agua. En este caso, y para este recipiente, 4 cm por minuto.
P: Bueno, y en general, ¿qué nos indica ΔY / ΔX?
E: Por cierta cantidad de tiempo que cambie, nos va a cambiar cierta cantidad en los cm de altura.

Fuente: elaboración propia

Se ve entonces que E1 reconoce la razón como la expresión matemática que indica cuanto cambia la variable dependiente por cambio de una unidad en la variable independiente, indistintamente, si la razón se halla con el cambio de un minuto en la variable independiente o con un cambio mayor a un minuto. Mientras que pese a los errores de cálculo de la altura del agua en cada uno de los recipientes desde el escalón central presentados en la tabla del recipiente uno y la tabla del recipiente tres, E2 logró reconocer la razón como la expresión matemática que indica cuanto cambia la variable dependiente por cambio constante en la variable independiente.

4.2.2 Paso de formulación de la hipótesis

Este paso, de la fase de abstracción, se encamina a la formulación general, en lenguaje natural, de la interrelación entre las variables estudiadas; y para describir el proceso de los estudiantes en este paso se observó sus producciones en la primera tabla de las tareas 1, 2 y 3 de la tercera actividad de la secuencia didáctica, además, las justificaciones a sus respuestas y posteriores elaboraciones en la entrevista.

Tabla 21. Descripción de proceso en el paso de formulación de hipótesis

Descripción del proceso del estudiante que presentó alto porcentaje de éxito	Descripción de los procesos del estudiante que presentó bajo porcentaje de éxito.
La primera tabla de la tarea uno entregó unos valores para la variable tiempo y se solicitó, inicialmente, indicar para cada uno de estos valores su correspondiente altura del agua desde el escalón central; posteriormente, la tarea pidió escribir el procedimiento utilizado para calcularlos y una justificación de éste. Las tareas dos y tres demandaron del estudiante las mismas acciones, pero para R3 y R2, respectivamente.	

Proceso del estudiante con alto porcentaje de éxito (E1)

minutos	Altura del agua en R1 desde el escalón central	Procedimiento para calcular la altura a partir de los minutos	Justifica el procedimiento utilizado
0	0	0+0=0	Al sumar el tiempo por el doble de si mismo da el resultado.
1	3	1+2=3	
2	6	2+4=6	
3	9	3+6=9	
4	12	4+8=12	
5	15	5+10=15	
6	18	6+12=18	
7	21	7+14=21	

minutos	Altura del agua en R3 desde el escalón central	Procedimiento para calcular la altura a partir de los minutos	Justifica el procedimiento utilizado
0	5	0+5=5	Al sumar los minutos con: (mts)
1	7	1+6=7	
2	9	2+7=9	
3	11	3+8=11	
4	13	4+9=13	
5	15	5+10=15	
6	17	6+11=17	
7	19	7+12=19	

Proceso del estudiante con bajo porcentaje de éxito (E2)

minutos	Altura del agua en R1 desde el escalón central	Procedimiento para calcular la altura a partir de los minutos	Justifica el procedimiento utilizado
0	0	$\Delta Y/\Delta X=0+0$	$\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ = a medida que tiempo aumenta el ~~agua~~ aumenta el agua.
1	3	$\Delta Y/\Delta X=3+3$	
2	6	$\Delta Y/\Delta X=6+3$	
3	9	$\Delta Y/\Delta X=9+3$	
4	12	$\Delta Y/\Delta X=12+3$	
5	15	$\Delta Y/\Delta X=15+3$	
6	18	$\Delta Y/\Delta X=18+3$	
7	21	$\Delta Y/\Delta X$	

minutos	Altura del agua en R3 desde el escalón central	Procedimiento para calcular la altura a partir de los minutos	Justifica el procedimiento utilizado
0	5	0+5	Se le suma dos ya que son los centimetros que acmenta el tiempo.
1	7	5+2	
2	9	7+2	
3	11	9+2	
4	13	11+2	
5	15	13+2	
6	17	15+2	
7	19	17+2.	

minutos	Altura del agua en R2 desde el escalón central	Procedimiento para calcular la altura a partir de los minutos	Justifica el procedimiento utilizado
0	-5	~~0+5~~	Se le suma 4 de los centimetros que acmenta por cada minuto.
1	-1	-5+4	
2	3	3+4	
3	7	7+4	
4	11	11+4	
5	15	15+4	
6	19	19+4	
7	23	23+4	

En las cuales se observa que el procedimiento utilizado por el estudiante para calcular la altura del agua desde el escalón central en el recipiente uno consistió en sumar a cualquier valor de la variable

En las cuales se identifica que no utilizó el valor de la variable independiente para calcular su correspondiente en la variable dependiente, su procedimiento de cálculo fue aditivo en todos los

tiempo el doble de este valor, es decir, y en términos generales, $n + 2n$, donde n representa el tiempo.	casos, ya que al reconocer que los valores en la variable tiempo estaban cambiando de a un minuto, y una vez obtenida la altura del agua desde el escalón central para el primer valor de la tabla, para hallar los demás valores en la variable dependiente sumó el cambio en la altura del agua por cada minuto al valor anterior, es decir, utilizó un procedimiento de recurrencia.

Al observar la parte de la entrevista donde se pidió a E1 explicar el procedimiento utilizado para calcular la altura del agua en el recipiente tres desde el escalón central, encontramos que, para el primer valor de la variable independiente, adicionó este con cinco, al segundo valor de la variable independiente le sumó el valor adicionado en el caso anterior más uno; y continuó de manera similar para calcular las otras alturas. Procedimiento en el que si bien utilizó el valor dado en el tiempo también recurrió al dato que adicionó anteriormente; lo cual conduce a necesitar el sumando precedente para hallar cualquier altura, es decir usa un procedimiento de recurrencia.

Considerando las anteriores producciones y la falta de un procedimiento escrito para calcular la altura en el recipiente dos desde el escalón central, se realizó en la entrevista preguntas al estudiante con el ánimo de tener hipótesis más prácticas. Observando el siguiente apartado de la entrevista:	Afirmaciones sustentadas con apartados de la entrevista:
P: Hagamos una cosa, devolvámonos aquí*, ¿Cómo harías si te pusiera aquí en la columna de los minutos, 20 minutos? (* Tabla de altura del agua en recipiente 1) E: Sería 20+20 y a eso le sumo otros 20. O sea, sería 20 por 3 P: ¿Podríamos aplicar esto mismo acá*? (*Procedimientos utilizados en los primeros valores de la tabla para calcular la altura) E: Si. P: ¿Cómo sería? E: Sería 3(0) = 0, 3(1) = 3, y así sucesivamente P: ¿Y si colocáramos un millón? E: Sería un millón por tres.	Por ejemplo para R1: P: Necesitas el número anterior. Por ejemplo, si nos dan el número 24 y nos piden hallar la altura. E: Necesitamos el número anterior, el 23, la altura a los 23 minutos. P: ¿Podrías pensar en otra estrategia? E: No P: Veamos aquí. Para ΔY / ΔX podríamos tener 3/1, 6/2, 12/4; en todos los casos, ¿cuánto daría? E: 3 P: ¿Y qué significa ese 3? E: Que sube 3 cm por cada minuto P: Siempre nos da tres. ¿Será que este 3 nos facilita encontrar un procedimiento?

Indicamos que el estudiante estableció como hipótesis multiplicar por tres el valor de la variable independiente para calcular la altura del agua en el recipiente uno desde el escalón central.
Además, con el siguiente apartado de la entrevista

P: Y aquí* a los 20 minutos ¿Cómo sería? (*Tabla para el recipiente tres)
E: Ahí estaba aumentando dos por cada uno; seria 20 por 2
P: Aquí* ¿Cómo sería? (*Procedimientos utilizados para calcular los primeros valores de la altura)
E: ¡Ah! no serviría, porque dos por cero da cero
P: ¿Y por qué no cuadra?
E: Porque no le estoy sumando el escalón, la medida del escalón; entonces sería dos por cero más cinco
P: ¿Y para un millón de minutos?
E: Sería dos por un millón más cinco
P: Esa es una estrategia. Entonces, ¿Cuál sería el procedimiento para calcular la altura a partir de los minutos?
E: Pues, hacer esas operaciones (Señalando las anteriormente descritas)

Como se observa el estudiante estableció como hipótesis multiplicar por dos el valor de la variable independiente y adicionar cinco a este producto para calcular la altura del agua en el recipiente tres desde el escalón central.
También, con el siguiente apartado de la entrevista

P: ¿Podrías por favor pensar una estrategia para acá*? (*Tabla para el recipiente dos)
E: Aquí el cambio es 4, por cero, menos cinco (Escribe 4(0) – 5)
P: ¿Y para las demás?
E: Pues sería lo mismo. Para 1 sería 4(1) - 5= -1, para 2 sería 4(2) - 5= 3, y así sucesivamente
P: ¿Y para 20 minutos?
E: Sería 4(20) – 5
P: ¿Y para un millón?
E: Sería 4(1.000.000) – 5

E: No responde
P: Por ejemplo, en 2 minutos, ¿cuánta agua habrá?
E: 6 cm
P: ¿Por qué?
E: Porque en 1 minuto hay 3 y 3(2) = 6
P: ¿Y en tres?
E: Ahí es 9, porque 3(3) = 9
P: Entonces aquí es 3(3). Bien. ¿Este primer 3 qué significa?
E: Lo que cambia por minuto
P: ¿Y este otro 3?
E: Los minutos
P: Ok. Explícame la respuesta.
E: Si en un minuto cambia tres y han pasado 3 minutos, se multiplica. Por ejemplo, si tengo 3 minutos y necesito saber cuánta agua cae en 3 minutos y sé que en 1 minuto cae 3, entonces multiplico 3 por 3.
P: Entonces ¿Qué multiplicas?
E: Lo que cae en 1 minuto y la cantidad de minutos que pasan
P: Bien. ¿Necesitamos con esta estrategia saber el valor anterior?
E: No.
Para el recipiente dos

P: ¿Podríamos encontrar una estrategia que no requiera saber el valor anterior?
E: No.
P: Pensemos un poquito. En 0 minutos ¿por qué hay aquí 5 cm?
E: Por la altura del escalón
P: En 1, hay 7. ¿Por qué hay 7?
E: Porque aumentaron 2 cm. y hay que sumarle los 5 del escalón
P: ¿Por qué aquí para el valor de 2 es 9?
E: 4 que han caído de agua más 5 cm del escalón
P: ¿Pero ese 4 qué significa?
E: Los cm de agua que han caído en 2 minutos
P: Aquí, para el valor de 11, ¿cómo sería?
E: 6 + 5 del escalón
P: ¿y este 6 qué significa?
E: La cantidad de agua que ha caído en tres minutos

Fuente: elaboración propia

De igual manera que E1 estableció como hipótesis multiplicar por cuatro el valor de la variable independiente y restar cinco a este producto para calcular la altura del agua en el recipiente dos desde el escalón central, al analizar las respuestas a la entrevista se encuentra que

E2 estableció como hipótesis multiplicar por tres el valor de la variable independiente para calcular la altura del agua en el recipiente uno desde el escalón central. Para el recipiente tres, propuso como hipótesis, multiplicar por dos el valor de la variable independiente y adicionar cinco a este producto; y para el recipiente dos, multiplicar por cuatro el valor de la variable independiente y restar cinco a este producto.

4.2.3. Fase de resolución

La fase de resolución consiste en expresar la formulación de la hipótesis en lenguaje matemático; y para describir el proceso de los estudiantes en esta fase se observó sus producciones en la segunda tabla de las tareas 1, 2 y 3 de la tercera actividad de la secuencia didáctica, además, las justificaciones a sus respuestas y posteriores elaboraciones en la entrevista.

Tabla 22. Descripción de proceso en la fase de resolución

Descripción del proceso del estudiante que presentó alto porcentaje de éxito	Descripción de los procesos del estudiante que presentó bajo porcentaje de éxito.
La segunda tabla, en las tres tareas, pidió escribir un procedimiento general que permitiera calcular a partir de la cantidad de minutos transcurridos la altura del agua desde el escalón central.	

Proceso del estudiante con alto porcentaje de éxito (E1)

Escribe, considerando la representación de todos los valores posibles, un procedimiento general que permita calcular a partir de los minutos la altura del agua en R1 desde el escalón central

$n=m+m(2)$

Escribe, considerando la representación de todos los valores posibles, un procedimiento general que permita calcular a partir de los minutos la altura del agua en R3 desde el escalón central

$h=m+(m+5)$

Proceso del estudiante con bajo porcentaje de éxito (E2)

Escribe, considerando la representación de todos los valores posibles, un procedimiento general que permita calcular a partir de los minutos la altura del agua en R1 desde el escalón central

$n+3=n$. n = altura del agua +3 = de cada minuto.

Escribe, considerando la representación de todos los valores posibles, un procedimiento general que permita calcular a partir de los minutos la altura del agua en R3 desde el escalón central
$n+2$ n= altura.

Escribe, considerando la representación de todos los valores posibles, un procedimiento general que permita calcular a partir de los minutos la altura del agua en R2 desde el escalón central
$n+4=n$. n= altura.

En las cuales m representa la variable independiente o el tiempo y n la variable dependiente o altura del agua en el recipiente desde el escalón central. Sin embargo, en las producciones logradas en la entrevista, el estudiante escribe la igualdad $n = 3m$ para representar el comportamiento en el recipiente uno; la expresión $n = 2m + 5$ para relacionar la altura del agua en el recipiente tres desde el escalón central, y la igualdad $n = 4m - 5$ para relacionar la variable dependiente con la variable independiente en la situación del recipiente dos.	En la cuales se puede observar que pretendió representar el procedimiento aditivo para calcular la altura del agua desde el escalón central, es decir, sumar al valor de cambio por unidad la altura del agua correspondiente al minuto anterior; pero representa con la misma variable la altura para momentos distintos. Sin embargo, en las producciones logradas en la entrevista, el estudiante escribe la igualdad m= $3n$ para representar el comportamiento en el recipiente uno; la expresión $m = 2n + 5$ para relacionar la altura del agua en el recipiente tres desde el escalón central, y la igualdad $m = 4n - 5$ para relacionar la variable dependiente, m, con la variable independiente, n, en la situación del recipiente dos.
	Como podemos observar en el siguiente apartado de la entrevista, en la cual se pretendió la conversión de la hipótesis, del recipiente uno, de lenguaje natural al matemático
	P: Pero pensemos la estrategia. ¿Cuántos minutos posibles hay? E: Infinitos P: ¿Cómo podemos representar toda esa cantidad? E: Con una letra, la n P: ¿Cuántos centímetros posibles hay? E: Infinitos. P: ¿Cómo podemos representar esa cantidad? E: Con una letra, la m P: Bien. ¿Cómo calcular cuántos cm hay a partir de la cantidad de minutos? E: 3n P: Bueno. ¿Y qué obtenemos? E: m
	Además, el siguiente apartado de la entrevista, donde se presenta la conversión de la hipótesis de R3
	E: Sí n representa los minutos y m representa los centímetros. Quedaría 2n = m P: ¿Esa sería tu estrategia? E: Sí. P: ¿Qué representa el 2 y qué representa la n? E: El 2 es lo que aumenta en cm por cada minuto, la n la cantidad de tiempo

	P: ¿Con eso me va a dar la altura del agua desde el escalón central? E: Sí P: ¿Y esto para qué recipiente es? E: Para el recipiente tres, pero le sumo 5 P: Entonces para el recipiente 3 sería m = 2n+5 E: Sí, 5 cm del escalón.
	También, el siguiente apartado de la entrevista, donde se presenta la conversión de la hipótesis de R2
	P: Ahora, ¿una (estrategia) general? E: 4n – 5 P: ¿Y eso qué nos permite obtener? E: La altura del agua en cualquier momento

Fuente: elaboración propia

Para E1 m representa la variable independiente o el tiempo y n la variable dependiente o altura del agua en el recipiente desde el escalón central. Sin embargo, en las producciones logradas en la entrevista, el estudiante escribe la igualdad $n = 3m$ para representar el comportamiento en el recipiente uno; la expresión $n = 2m + 5$ para relacionar la altura del agua en el recipiente tres desde el escalón central, y la igualdad $n = 4m - 5$ para relacionar la variable dependiente con la variable independiente en la situación del recipiente dos.

Por otro lado, E2 pretendió representar el procedimiento aditivo para calcular la altura del agua desde el escalón central, es decir, sumar al valor de cambio por unidad la altura del agua correspondiente al minuto anterior; pero representa con la misma variable la altura para momentos distintos. Sin embargo, en las producciones logradas en la entrevista, el estudiante escribe la igualdad m$= 3n$ para representar el comportamiento en el recipiente uno; la expresión $m = 2n + 5$ para relacionar la altura del agua en el recipiente tres desde el escalón central, y la igualdad $m = 4n - 5$ para relacionar la variable dependiente, m, con la variable independiente, n, en la situación del recipiente dos.

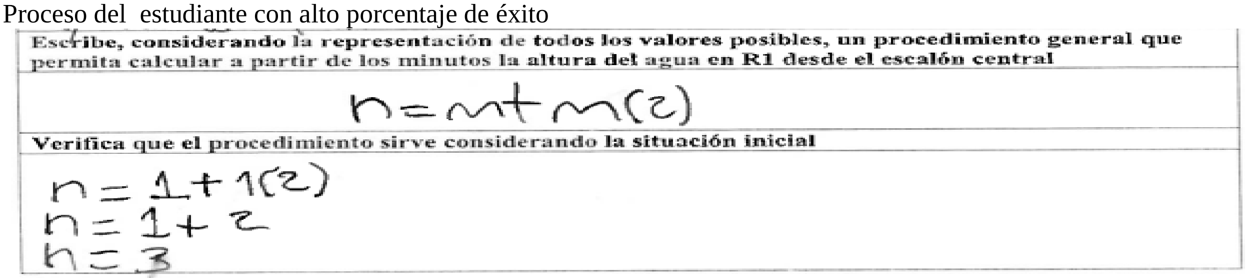
4.2.4. Fase de validación

Esta fase tiene como propósito, contrastar el modelo matemático con los datos recogidos en la fase inicial, de tal forma que de no ser adecuado, se continúe con la fase final, concerniente a la modificación del modelo matemático.

Tabla 23. Descripción de proceso en fase de validación

Descripción del proceso del estudiante que presentó alto porcentaje de éxito (E1)	Descripción de los procesos del estudiante que presentó bajo porcentaje de éxito (E2).
En la actividad número tres, en las dos últimas tablas de las tareas 1, 2 y 3, se solicita a los estudiantes que verifiquen la hipótesis expresada en lenguaje matemático considerando la situación inicial, para que de ésta manera se lleve a cabo la fase de la validación; y de ser necesario continuar con la última fase, la de modificación del modelo matemático.	
El estudiante presenta su modelo para el recipiente uno y procede a reemplazar con un dato como se observa en el escrito	Muestra en la actividad número tres, en las dos últimas tablas de las tareas uno, dos y tres, se solicita al estudiante que verifique la hipótesis expresada en lenguaje matemático considerando la situación inicial, para que de esta manera se lleve a cabo la fase de la validación; y de ser necesario continuar con la última fase, la de modificación del modelo matemático.

Proceso del estudiante con alto porcentaje de éxito

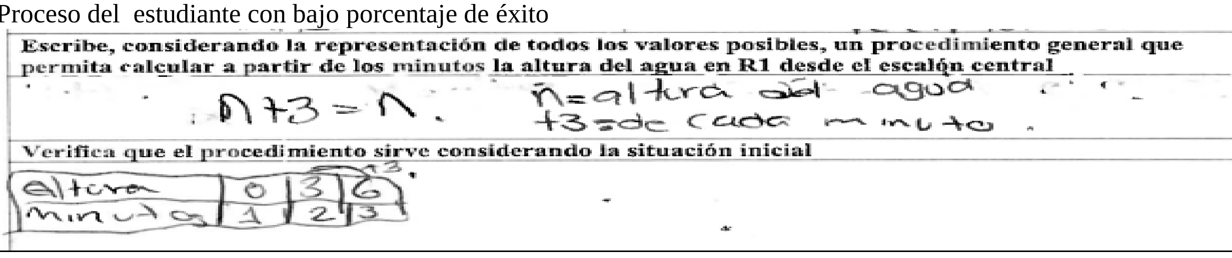

Escribe, considerando la representación de todos los valores posibles, un procedimiento general que permita calcular a partir de los minutos la altura del agua en R1 desde el escalón central

n=mt m(2)

Verifica que el procedimiento sirve considerando la situación inicial

n = 1+1(2)
n = 1+2
n = 3

Proceso del estudiante con bajo porcentaje de éxito


Escribe, considerando la representación de todos los valores posibles, un procedimiento general que permita calcular a partir de los minutos la altura del agua en R1 desde el escalón central

n+3 = n. n = altura del agua
+3 = de cada minuto

Verifica que el procedimiento sirve considerando la situación inicial

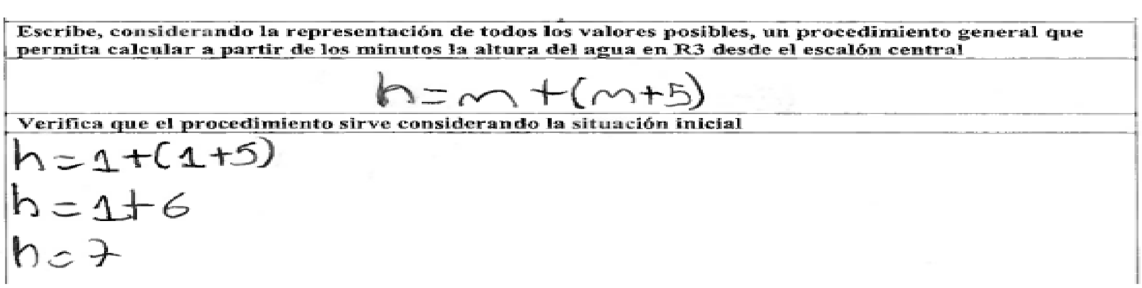
altura	0	3	6
minutos	1	2	3

Mientras que el primero (E1) logra encontrar la expresión matemática que le funciona tomando como base la variable tiempo como se puede observar en el fragmento de entrevista, el segundo estudiante (E2) no se da cuenta está colocando una misma letra que representa un mismo valor y que se contradice si se le suma 3 y se obtiene lo mismo, así que después de que el profesor hace algunas preguntas guía, el termina corrigiendo el modelo como se evidencia en el fragmento

El estudiante logra encontrar una expresión matemática alternativa que le funciona tomando como base la variable tiempo, como se puede observar en la verificación, pero cuando se hace la entrevista, el estudiante ya ha encontrado el modelo matemático en la fase de resolución y lo que expresa es validando el nuevo modelo, así:	Cuando se le pregunta en la entrevista, en la resolución ella se da cuenta que está colocando una misma letra que representa un mismo valor y que se contradice si se le suma tres y se obtiene lo mismo, así que después de que el profesor hace algunas preguntas guiadoras, termina corrigiendo el modelo como se evidencia en el siguiente diálogo:
E3: operar. Reemplazar los valores… n=3(m). Para 1 sería n=3(1), que es igual a 3. P: ¿Y por qué sabemos que nos sirve? E3: Porque aquí está coincidiendo el resultado. [Señalando la tabla donde está el registró de la altura con respecto al tiempo para ese recipiente uno]. P: 1 en el tiempo y 3 en la altura. ¿Y con otro? E3: Lo podríamos hacer por ejemplo con 3. n=3(3), que es igual a 9. Y coincide con el valor de 9 en la tabla. P: ¿Y con otro valor? E3: Con 5. n=3(5), que es igual a 15. Y aquí también me coincide con el 15.	P: Vamos a mirar si esas estrategias nos sirven o no. Para el recipiente 1, se pregunta: “Verifica que el procedimiento sirve considerando la situación inicial”. ¿Cuál fue tu respuesta? [Señala la expresión inicial escrita por la estudiante] E: n + 3 = n P: ¿Sirve o no sirve? E: No sirve. P: ¿Por qué no sirve? E: Porque está repetida la n P: Pero luego nos ha salido una nueva (estrategia): m=3n. ¿Esta nos sirve? E: Sí. P: ¿Cómo podríamos verificar si nos sirve o no? E: Cogiendo por ejemplo el valor de 2 tendríamos m=3(2). Así m=6.

Para R3 los estudiante presentan los siguientes modelos y verificación en lo escrito,

Proceso del estudiante con alto porcentaje de éxito ()

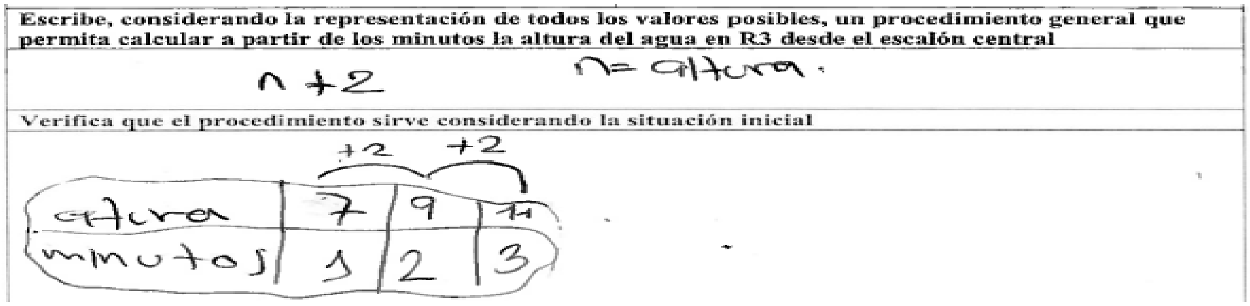

Escribe, considerando la representación de todos los valores posibles, un procedimiento general que permita calcular a partir de los minutos la altura del agua en R3 desde el escalón central

h=m+(m+5)

Verifica que el procedimiento sirve considerando la situación inicial

h=1+(1+5)
h=1+6
h=7

Proceso del estudiante con bajo porcentaje de éxito


Escribe, considerando la representación de todos los valores posibles, un procedimiento general que permita calcular a partir de los minutos la altura del agua en R3 desde el escalón central

n +2   n= altura.

Verifica que el procedimiento sirve considerando la situación inicial

altura	7	9	11
minutos	1	2	3

Nuevamente, de acuerdo con su modelo propio, es posible validarlo y comprueba que funciona para los valores dados. Sin embargo en la entrevista ya ha llegado al nuevo modelo matemático y lo valida así:	En esta ocasión presenta como modelo una suma de la altura con el número dos y no hay una verificación sino una tabla de datos que copió de la información inicial y trata de argumentar que aumenta cada vez más dos. En la entrevista, para la fase de validación logró encontrar el modelo matemático conducido por preguntas guiadoras del profesor y lo verifica así:
P: Bueno, vamos con los datos del recipiente 3. Recuerda, el recipiente que está arriba. ¿Cuál era la expresión que habíamos sacado? E3: n=2m+5 P: ¿Y cómo podemos saber si sirve o no? E3: Reemplazando valores. Por ejemplo con el 2. Entonces, n=2(2) + 5, así n=9 P: ¿Podríamos hacerlo también con más valores? E3: Sí P: ¿Con cuáles? E3: Con cualquiera. P: Listo. Hagámoslo con otro E3: Ok. Con 5, sería entonces, n=2(5) + 5, así n=15. Y aquí me coincide con el 15	P: Así que hemos probado la estrategia. Vamos con la siguiente. Esta ya es para el recipiente 3. Ya nos dimos cuenta que esta estrategia [la inicial escrita por la estudiante] 'n + 2' no nos sirve. ¿Cuál estrategia nueva formulaste? E: m = 2n + 5 P: ¿Será que sirve o no sirve? E: Sirve porque, por ejemplo, en dos minutos sería m=2(2) + 5. Así m=9 P: Bien. ¿Y con otro valor? E: Con 4 minutos sería: m=2(4) + 5. Así m= 13 [Escribe en tablero con seguridad] P: ¿Serviría para todos los valores? E: Sí
Por último cuando llega al recipiente dos que está en el escalón inferior, el estudiante no plantea ningún modelo y por consecuencia ninguna verificación por escrito. Pero como en la entrevista logró plantear un modelo matemático para este recipiente haciendo un proceso recurrente con los otros dos, llega a la siguiente verificación:	Por último para R2 que está en el escalón inferior, el estudiante plantea $n + 4 = n$. Al confrontar el modelo con los datos presentados a través de tablas construidas por el mismo estudiante se observa que el modelo no funciona. Con los datos que presenta no es posible inferir una regularidad que expresen los valores de sus tablas como por ejemplo la de incremento (Δx), diferencia entre valores correspondientes en la otra fila, de esto da cuenta el estudiante durante la entrevista y nuevamente con preguntas llega al modelo como se evidencia en el siguiente diálogo:
P: Entonces hagámosle con la del recipiente número 2. ¿Cuál sería? E3: n=4m-5 P: Listo, ¿entonces cómo sería ahí? E3: Por ejemplo, con el 2 sería: n=4(2)-5, entonces n=3. Y aquí en la tabla me coincide. P: Listo. ¿Y con otro? E3: Con cualquiera lo podría hacer. Por ejemplo con el 5. Sería n=4(5)-5, entonces	P: Bien. Ahora vamos con el recipiente 2. Veamos si nos sirve m=4n-5 E: Con 2 sería: m=4(2)-5. Así m=3. Con 4 sería m=4(4)-5. Así m=11 [Escribe en tablero con seguridad en el procedimiento] P: ¿Y es que solo sirve con 2 y con 4? E: No. Sirve con cualquiera. P: Hazlo con el 6

n=15. Me está coincidiendo aquí también	E: Sería m=4(6)-5. Así m=19
Finalmente, en esta última fase de construcción del modelo, correspondiente a la validación, el estudiante comprueba el modelo matemático con los datos recogidos en la fase inicial. Está construyendo una representación simbólica a partir de la suma y esta funciona, luego puede hacerla multiplicativa	Contrasta el modelo matemático que obtiene a partir de la entrevista con los datos recogidos en la fase inicial. Ya que en la primera parte y por escrito no logró plantear un modelo que pudiese verificar.

Fuente: elaboración propia

Finalmente, en esta última fase de construcción del modelo, correspondiente a la validación, E1 contrasta el modelo matemático que obtiene a partir de la entrevista con los datos recogidos en la fase inicial. Ya que en la primera parte y por escrito no logró plantear un modelo que pudiese verificar.

Por consiguiente, mientras que E1 contrasta el modelo matemático con los datos recogidos en la fase inicial, construyendo una representación simbólica a partir de las adiciones sucesivas y como esta funciona, luego puede hacerla multiplicativa. E2 presenta inconvenientes de tipo algebraico pero con las orientaciones dadas durante la entrevista logra construir modelos

Según Bassanezi (2002), "a el modelado aplicado a la enseñanza puede ser un camino para despertar mayor interés, ampliar el conocimiento del alumno y auxiliar en la estructuración de su manera de pensar y actuar" (s. p) y esto se evidenció durante todo el proceso de la secuencia pues al iniciar E1 y E2 presentaban notables diferencias en cuanto a la coordinación de cambio de una variable con cambios en la otra (N1) sustentada por AM1, pero transcurso de las actividades sus procesos se fueron cada vez aproximando a similitudes al coordinar la dirección de cambio de una de las variables con cambios en la otra (N2) sustentadas por acciones mentales AM1 y AM2, teniendo en cuenta a Carlson et al. (2003).

En la fase de Abstracción, en la formulación de modelos, E1 continuaba demostrando que podía coordinar no solo lo que cambiaba y como cambiaba, además ya podía coordinar la cantidad de cambio de una variable con cambios en la otra (N3). Por otro lado, E2 alcanzó a realizar las actividades en esta fase pero necesito de preguntas orientadoras para lograr finalizarlas con éxito.

La sustitución del lenguaje natural por el lenguaje matemático, fase de resolución, también mostró diferencias entre E1 y E2. E1 demostró ser coherente con sus análisis y acciones a través de las expresiones matemáticas empleadas, las cuales verificó y valido en la fase de validación donde empleo sumas sucesivas y las sustituyo por estructuras multiplicativas. Esto fue posible en E2 pero después de asesorías y preguntas orientadas pues se presentaron deficiencias en el pensamiento algebraico, identificación de variables independientes y dependientes, como también el asociar cada una de estas a los ejes horizontales y verticales del plano cartesiano.

Capítulo 5

5. Conclusiones

En este trabajo de investigación se adoptó la perspectiva de Bassanezi (2002) sobre el proceso de modelación y la perspectiva variacional para la modelación de funciones lineales, lo cual resultó ser valiosa en tanto los estudiantes participantes en este estudio, lograron desarrollar elementos que paulatinamente los llevaron a la fase de validación y alcanzaron el nivel cuatro de covariación según Carlson et al. (2003).

Al ser la modelación un proceso que permite convertir fenómenos o situaciones reales en símbolos o relaciones matemáticas a través de la detección, formulación y proyección de regularidades se pudo establecer que los estudiantes adquirieron habilidades en los subprocesos que fueron creciendo conforme se desarrollaba la secuencia didáctica.

Así, en cuanto al desarrollo del razonamiento covariacional encontramos que, en general, los estudiantes lograron el nivel cuatro de covariación que corresponde al cálculo de la razón promedio ya que reconocen la cantidad promedio de cambio en una de las variables al realizar cambios constantes en la otra, (altura del nivel del agua y tiempo de llenado).

Asociar las acciones mentales y los niveles de covariación propuesto por Carlson et al. (2003), fue importante en tanto con ello se pudo encontrar que es posible a través de estos instrumentos clasificar comportamientos de los estudiantes junto con sus producciones para cuando ellos desarrollan tareas relacionadas al pensamiento variacional.

Los problemas que se diseñaron para la prueba diagnóstica tuvieron la característica de conducir al análisis de la fase de abstracción de la modelación y dentro de ella los pasos de selección de variables y problematización que conllevan el alcanzar los cuatro niveles de covariación hasta llegar a la razón de cambio lo que permitió a los estudiantes mostrar comportamientos que corresponden con las acciones mentales AM 1 Coordinación del valor de una variable con los cambios de otra, AM2 Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable, AM3 Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra variable y AM4 Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.

De manera similar, los problemas que integraron la secuencia didáctica se caracterizaron por estar conformados por tareas que conllevan a establecer competencias y destrezas en contextos de cambio y variación, esto posibilitó que los estudiantes desarrollaran habilidades, conceptos y procesos inmersos en el tipo de pensamiento variacional.

De otro lado, las entrevistas como un instrumento para ahondar en las comprensiones que los estudiantes tienen en el momento de resolver cada pregunta fueron útiles para recolectar información detallada sobre la manera en que ellos interpretan las situaciones y aproximarse a conocer el proceso cognitivo que les permite establecer un modelo matemático frente a una situación del entorno.

7.7. Recomendaciones

El planteamiento de situaciones que conlleven un proceso de experimentación con objetos reales de laboratorio o incluso con ayuda de la tecnología para permitir que sean los mismos estudiantes quienes obtengan de manera directa las variables para desarrollar el proceso completo de modelación y puedan ver de una manera dinámica y no estática la covariación y las situaciones en contextos reales.

La realización de un estudio del proceso de modelación para construir otras clases de funciones que no sean lineales.

El trabajo conjunto con maestro para desarrollar procesos de modelación con estudiantes de primaria o primeros años de secundaria aprovechando situaciones de interés para el estudiante que surjan de sus propios entornos y que sean producto de su motivación.

Como se mencionó en los preliminares, específicamente en el planteamiento del problema, al no ser posible identificar o encontrar propósitos encaminados para el desarrollo del razonamiento de covariación lineal en ninguno de los periodos, pero sí propósitos encaminados a estudiar la función lineal o afín, empero de manera estática, se establece que al carecer la institución de documentos que evidencien o muestren la propuesta y el proceso de enseñanza empleado para lograr estos aprendizajes en los estudiantes, esta investigación podría ser usada como soporte para dar inicio a una reformulación del plan de estudios que fortalezca tanto al proceso de modelación como al razonamiento covariacional a partir de los análisis, conclusiones y recomendaciones.

Referencias

Agudelo, C. (2007). La Creciente Brecha entre las Disposiciones Educativas Colombianas, las Proclamaciones Oficiales y las Realidades del Aula de Clase: las Concepciones de Profesores y Profesoras de Matemáticas sobre el Álgebra Escolar y el Propósito de su Enseñanza. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, *5* (1), 43-62. Obtenido de http://www.redalyc.org/html/551/55100104/

Barbosa, J. C. (2001). *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24.* Caxambu, Anais, Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.p. 9.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendiza com modelagem matematica.* Sao Paulo: Contexto.

Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafios para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 105-125.

Blomhøj, M. (2004). Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica. *Clarke, B.; Clarke, D. Emanuelsson, G.; Johnansson, B. International Perspectives on Learning. National Center for Mathematics Education*, 20-35.

Blumm, W., Niss, M., & Huntley, I. (1989). *Modelling, applications and applied problem olving-teaching mathematics in a real context, horwood, chichester.* Blumm, W; Niss, M; Huntley, I (eds).

Bosch, M., Garcia, F., Gascón, J., & Ruiz, L. (2006). La modelación matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoria antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, Volumen 18, número 2*, 37-74.

Camelo, F., Perilla, W., & Mancera, G. (2016). Prácticas de modelación matemática desde una perspectiva socio crítica con estudiantes de grado undécimo. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 9 (2)*, 67-84.

Carlson, M., Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA, Volumen 8*, 121-156.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME, 9*, 143-168.

Gómez, O. M. (2015). *Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno (Tesis de Maestría).* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Grueso, R., & Gonzalez, G. (2016). *El concepto de función como covariación en la escuela (Tésis de Maestría).* Santiago de Cali: Universidad del Valle.

López, J., & Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa (21)*, 308-318.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Colombia.

MEN. (2006). *Estandares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Colombia.

OECD e INECSE. (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003.* Madrid.

Posada, F. A., & Villa, J. (2006a). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desd una perspectiva variacional (Tesis de Maestríia).* Universidad de Antioquia.

Posada, F., & Villa Ochoa, J. (2006b). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. *Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico Didáctica de las matemáticas, 2 (2)*, 127-163.

Sánchez, D. M. (2016). *Conceptualización de la función lineal y afin. Una experiencia de aula (Tesis de Maestría).* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Vasco, C. (2002). el pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnoilogías. *Memorias del Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas MEN*, 101-112.

Vasco, C. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. *Aniis eletrónicos do CIAEM. Conferrencia Interamericana de Educacao Matemática*, s. p.

Vasco, C. E. (2006). El pensamiento variacional y la modelación matemática . Cali, Colombia . Obtenido de http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf

Villa Ochoa, J. A. (2008). El concepto de función. Una mirada desde las matemáticas escolares. *Acta latinoamericana de matemática educativa ALME, 21*, 245-254.

Villa Ochoa, J. A. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universitaria Católica del Norte No. 27*, 1-21.

Villa Ochoa, J. A. (2015). Modelación matemática a partir de problemas de enunciados verbales: un estudio de caso con profesores de matemáticas. *Magis. Revista Internacional de Investigación en Educación*, 133-148.

Villa Ochoa, J. A., Gonzalez, D., & Carmona , J. (2018). Modelación y tecnología en el estuduio de la tasa de variación instantánea en matemáticas. *Formación Universitaria, 11 (2)*, 25-34.

Anexos

Anexo 1.

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ, D.C.
SECRETARIA DE EDUCACIÓN
COLEGIO EL PORVENIR
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
EDUCACIÓN MEDIA TÉCNICA
NIT 830052690-6 DANE 21110200240
Aprobado Según Resolución 2541 /28-08-2002, Grados 0º a 11º
Resolución Articulación: 730 /25-03-2009 y 07-0387 /25-07-2011

Prueba de Entrada

La figura muestra un recipiente que se está llenando. El líquido cae de una llave que se abre según se desee, pero durante el llenado no se modifica la abertura de la llave, ésto con el fin de permitir pasar la misma cantidad de líquido cada segundo.

A	Altura del nivel de agua a medida que se va llenando el recipiente
B	Longitud del chorro de agua (la medida que va desde la boca del grifo o la llave hasta que desaparece porque hace contacto con el líquido que ya está en el recipiente
C	Diámetro del recipiente
D	Cantidad de agua a medida que se va llenando el recipiente
E	Altura del recipiente
F	Tiempo transcurrido mientras va cayendo el líquido en el recipiente

Utilice la información proporcionada por la imagen y la tabla para contestar las preguntas que se formulan a continuación.

NOMBRE____**CURSO** _____________

1. En la tabla aparecen las letras A, B, C, D, E, F. En cada caso diga si los valores que representa cada letra varían o permanecen constantes mientras el llenado del recipiente.

Valores representados por	**Escriba si cambian o no los valores de la medida**	**Justifique su respuesta**
A (la altura del nivel de agua)		
B (longitud del chorro de agua)		
C (diámetro del recipiente)		
D (cantidad de agua)		
E (la altura del recipiente)		

2. A continuación, se dan algunos pares de medidas, para cada caso diga si los valores de alguna de las medidas cambian a medida que cambian los valores de la otra medida, o si por el contrario los valores de estas medidas no se relacionan entre sí. Justifique la respuesta.

Valores representados por	**Escriba si una medida cambia o no con los cambios de la otra medida**	**Justifique su respuesta**
A (altura del nivel de agua) y **F** (tiempo transcurrido)		
A (altura del nivel de agua) y **C (**diámetro del recipiente)		
A (altura del nivel de agua) y **E** (altura del recipiente)		
D (cantidad de agua) y **C** (diámetro del recipiente)		
C (diámetro del recipiente) y **E** (altura del recipiente)		
B (longitud del chorro) y **D** (cantidad de agua)		
E (altura del recipiente) y **F** tiempo transcurrido)		

3. A continuación se presentan tres tablas en las que se escriben valores de **A** (altura del nivel de agua) y **F** (tiempo transcurrido), escoja la tabla que representa los valores de A y F que corresponden a una posible experiencia de llenado de un recipiente que tiene la misma forma del que se mostró en la figura inicial. En cada caso escriba Si o No según corresponda y justifique su respuesta.

3.1.

Valores de **A** (dado en cm)	1,2	2,5	3,9	5,4	7,0
Valores de **F** (dado en segundos)	1	2	3	4	5

Justifique su respuesta

3.2.

Valores de **A** (dado en cm)	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0
Valores de **F** (dado en Segundos)	2	4	6	8	10

Justifique su respuesta

3.3

Valores de **D** (dado en ml)	1,8	1,6	1,4	1,2	1,0
Valores de **F** (dado en Seg)	1	2	3	4	5

4. En un experimento, **que no tiene nada que ver con la situación de llenado que se viene estudiando**, se toman los datos que aparecen en las tablas, a partir de estos datos observe cómo varían las medidas y complete la tabla con los valores que considera toman las medidas a partir de los valores que se dan.

4.1.

Valores de **W** (dado en cm)	4	8	12		
Valores de **M** (dado en cm)	56	52	48		

4.2.

Valores de **X** (dado en cm)	36	72			
Valores de **Y** (dado en Segundos)	4	8			

5. Si se sabe que la medida **B** (la longitud del chorro de agua) en un momento dado mide 26 cm y que el valor de **A** (altura de nivel del agua) correspondiente es 34 cm, ¿cuánto medirá el valor de **A** cuando se reduce a la mitad el valor de **B**? Justifique su respuesta

6. Juana realiza dos observaciones en dos momentos diferentes del proceso de llenado, las medidas que reporta en cada caso son:

Observación 1. La medida **A** (la altura del nivel de agua) es 15 cm

Observación 2. El tiempo transcurrido es 3 veces la cantidad de segundos que habían transcurrido al hacer la primera observación.

¿Cuánto medirá la altura del agua en la segunda observación? Justifique su respuesta

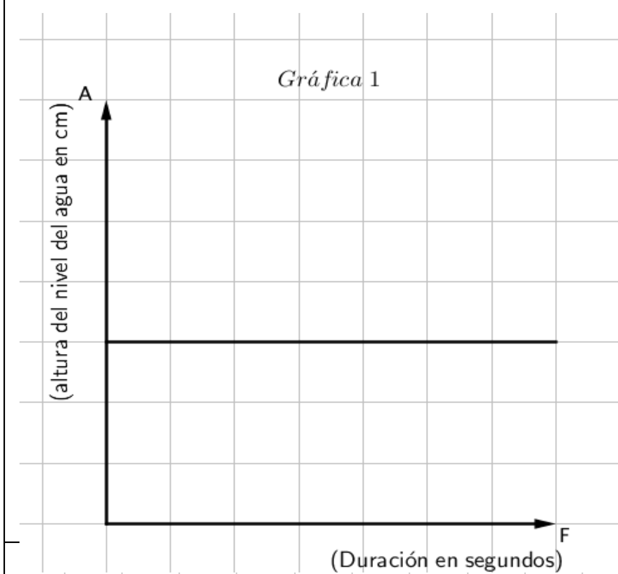
7. Utilice la tabla para contestar las preguntas 7.1 y 7.2

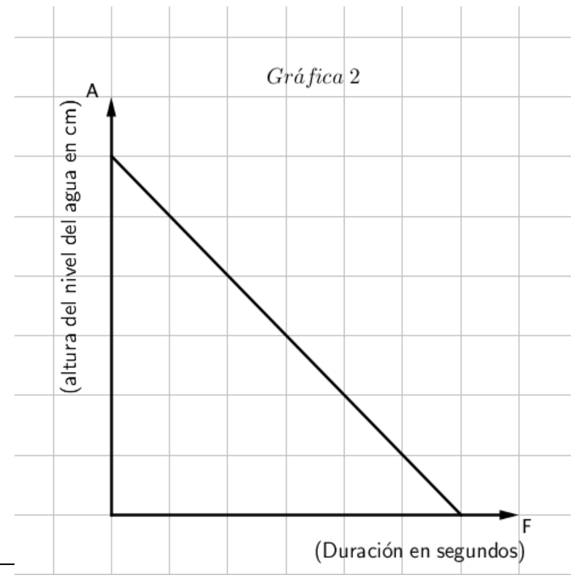
Valores de **A** (dado en cm)	2,2	4,4	6,6	8,8	11,0
Valores de **F** (dado en Seg)	2	4	6	8	10

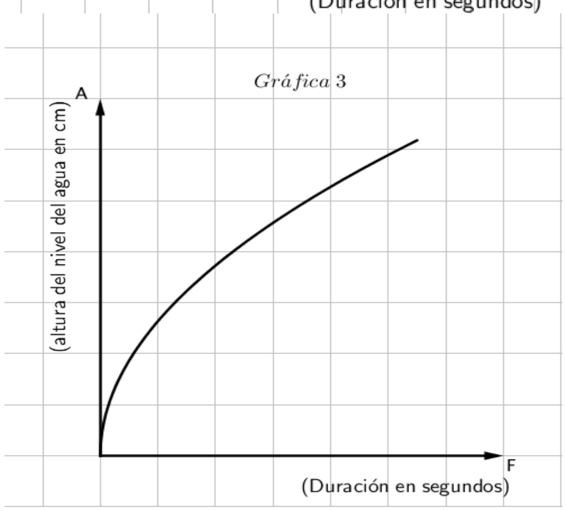
7.1. ¿Qué altura alcanza el nivel del agua cuando han transcurrido 4 segundos de llenado?

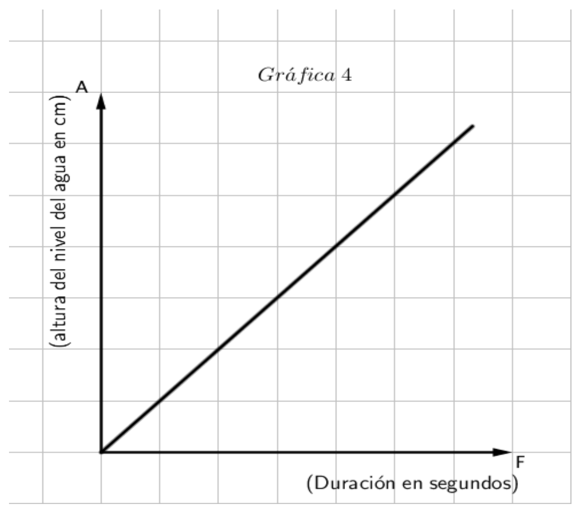
7.2. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que el nivel del agua alcance 5,5 cm de altura? Escriba el procedimiento seguido

8. De las cuatro gráficas, seleccione la que considera que representa correctamente la forma como cambian los valores de la medida **A** (altura del nivel del líquido) a medida que cambia **F (**el tiempo de llenado**)**.



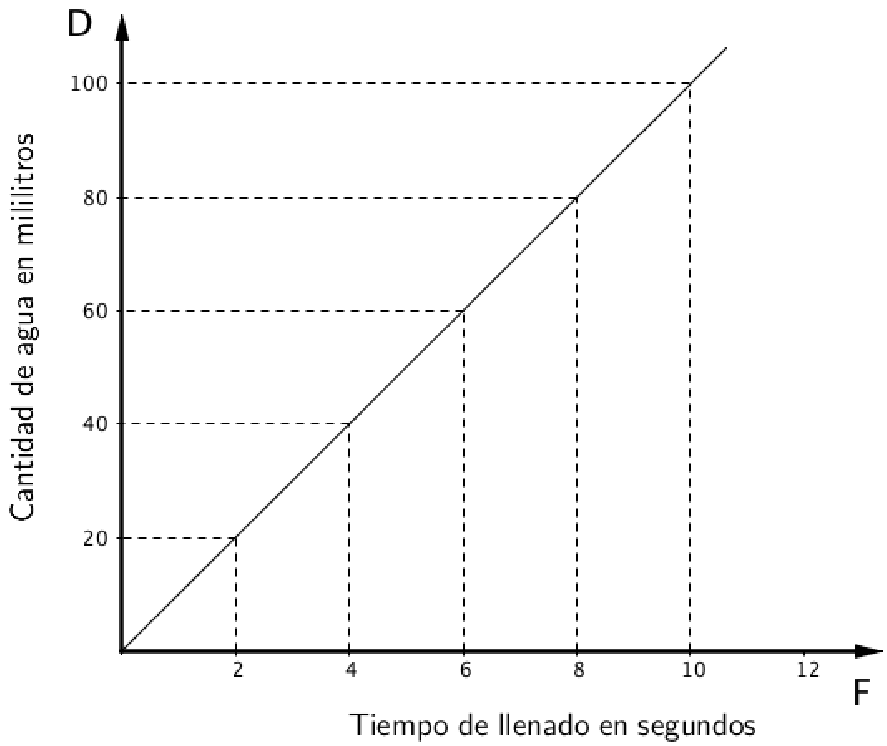






Justifique su respuesta

9. La gráfica representa los valores que va tomando **D** (cantidad de agua) a medida que cambian los valores de **F** (el tiempo de llenado). Utilice la gráfica para contestar las preguntas 9.1 y 9.2

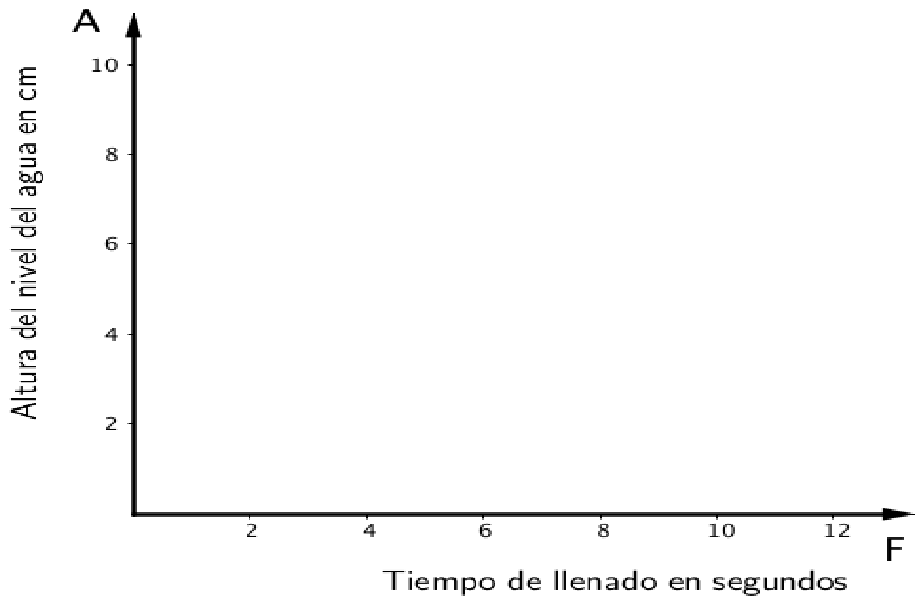


9.1. ¿Qué cantidad de agua hay en el recipiente cuando han transcurrido 4 segundos de llenado?

9.2. . ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para en el recipiente hayan 70 mililitros de agua?

10. Representa en la gráfica los valores de la tabla y trace la gráfica

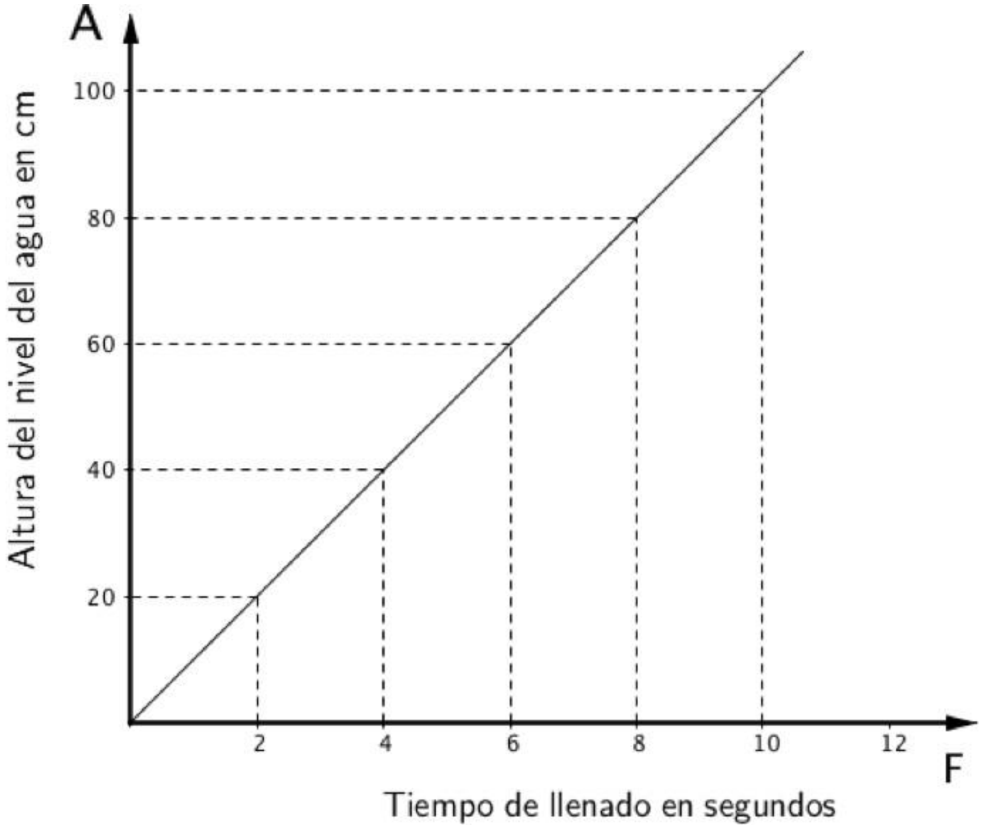
Valores de **A** (dado en cm)	1,4	2,8	4,2	5,6	7,0
Valores de **F** (dado en segundos)	2	4	6	8	10



11. ¿Qué pasa con la forma como cambia **A (Altura del nivel del agua)** a medida que cambia **F (tiempo de llenado)** si se utilizan recipientes más delgados o más gruesos?

Más delgados	Más gruesos

12. La gráfica muestra la forma como van cambiando los valores de **A** (Nivel del agua) a



medida que cambian los valores de **F** (el tiempo de llenado), en ese mismo dibujo trace otra gráfica que represente la misma variación de los valores de **A** con relación a **F** pero si se trata de llenar un recipiente más delgado que el que se ha venido utilizando. Justifique su respuesta.

Justifique su respuesta

Anexo 2

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ, D.C.
SECRETARIA DE EDUCACIÓN
COLEGIO EL PORVENIR
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL
EDUCACIÓN MEDIA TÉCNICA
NIT 830052690-6 DANE 21110200240
Aprobado Según Resolución 2541 /28-08-2002, Grados 0º a 11º
Resolución Articulación: 730 /25-03-2009 y 07-0387 /25-07-2011

ALCALDIA MAYOR
BOGOTA D.C.
Secretaria
EDUCACION

MATEMÁTICAS
GRADO NOVENO
Actividad 1

ESTUDIANTE:____CURSO:_________

La empresa de acueducto, alcantarillado y aseo de Bogotá anunció la semana pasada que con el fin de efectuar reparaciones en la red de tubos realizaría un corte del suministro de agua desde el día de hoy y por un tiempo de 72 horas en el barrio El Porvenir de la localidad de Bosa. La señora María al no haberse enterado del corte y no tener agua almacenada decide aprovechar la lluvia que cae y pone en las escaleras de la terraza tres recipientes para recoger el líquido. Andrés, un hijo de María, observa los recipientes puestos e identifica que los tres son de forma cilíndrica, con la misma altura, pero con distinto diámetro; siendo el recipiente dos (R2) el de menor diámetro y el recipiente tres (R3) el de mayor diámetro. Además, que el recipiente uno (R1) fue colocado en el escalón central, el recipiente tres un escalón arriba y el recipiente dos un escalón abajo; tal como lo muestra la figura 1.

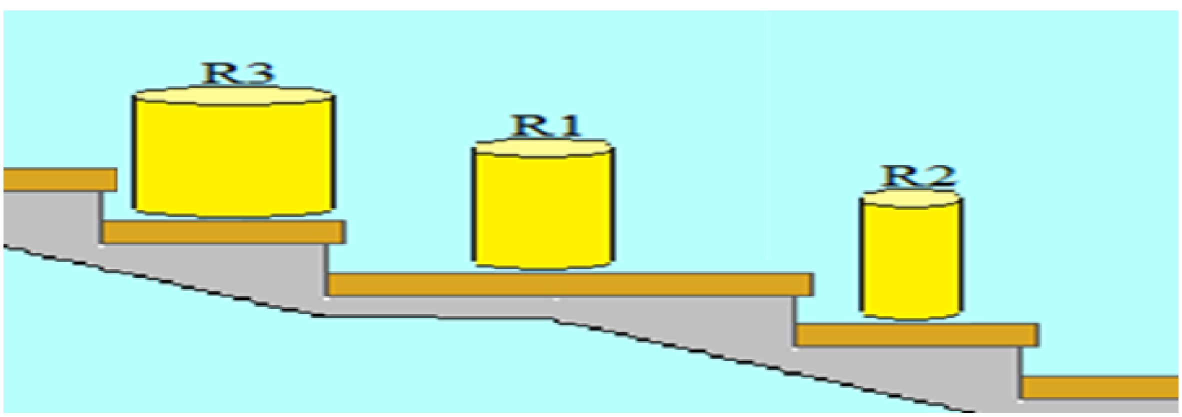


Figura 1.

Después de 4 minutos con la misma intensidad de lluvia Andrés observa que el agua ha logrado una altura de 8 centímetros dentro del recipiente tres, de 16 centímetros dentro del recipiente dos y 12 centímetros dentro del recipiente uno. Sin embargo, desea establecer la altura del agua en cada uno de los cilindros desde el escalón del centro; sin olvidar que la altura de cada escalón es de 5 centímetros.

Considerando esta situación responde:

1. Con un tiempo de cuatro minutos de lluvia, completa la siguiente tabla:

	R1	**R2**	**R3**
Altura del agua dentro del recipiente			
Altura del agua en el recipiente desde el escalón central			

2. Con un tiempo de ocho minutos de lluvia con la misma intensidad, completa la siguiente tabla:

	R1	**R2**	**R3**
Altura del agua dentro del recipiente			
Altura del agua en el recipiente desde el escalón central			

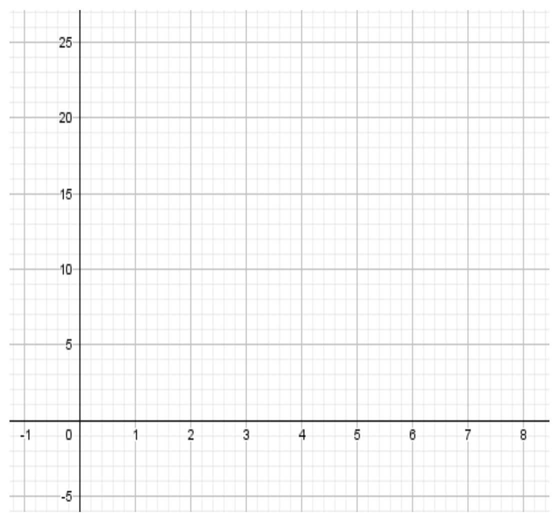
3. Durante los 4 minutos iniciales ¿Qué ha estado cambiando? Justifica tu respuesta

____

____

4. Completa la siguiente tabla, representa la información en el plano cartesiano y responde las preguntas.

Altura del agua en R1 desde el escalón central								
Minutos	0	1	2	3	4	5	6	7



a. ¿Qué pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo? ______________________

____

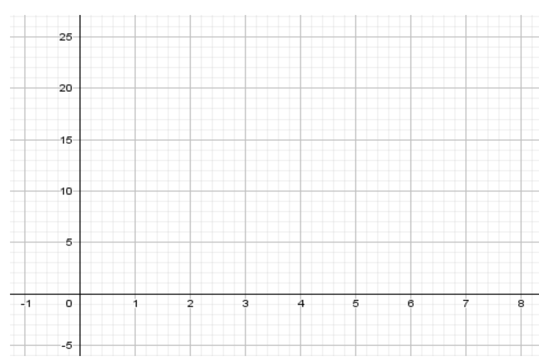
b. ¿Cuánto cambia la altura por cada minuto?

____

____

5. Completa la siguiente tabla, representa la información en el plano cartesiano y responde las preguntas.

Altura del agua en R3 desde el escalón central								
Minutos	0	1	2	3	4	5	6	7



a. ¿Qué pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo? ______________________

____

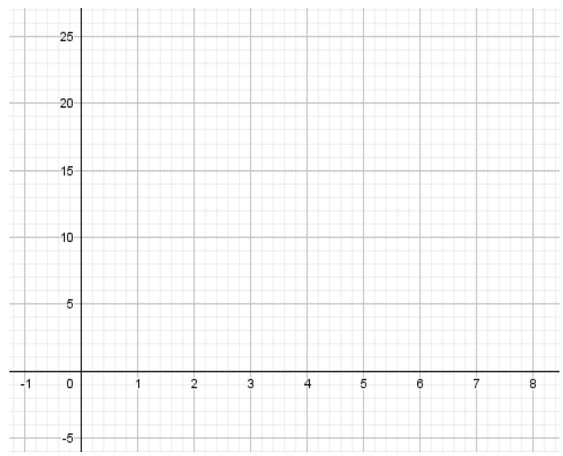
b. ¿Cuánto cambia la altura por cada minuto?

____

____

6. Completa la siguiente tabla, representa la información en el plano cartesiano y responde las preguntas.

Altura del agua en R2 desde el escalón central								
Minutos	0	1	2	3	4	5	6	7



a. ¿Qué pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo? ______________________

____

b. ¿Cuánto cambia la altura por cada minuto?

____

____

Anexo 3

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ, D.C.
SECRETARIA DE EDUCACIÓN

COLEGIO EL PORVENIR

INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL

EDUCACIÓN MEDIA TÉCNICA
MATEMÁTICAS
GRADO NOVENO
Actividad 2

ESTUDIANTE: ____ **CURSO:** __________

De la actividad 1 obtuvimos

Altura del agua en R1 desde el escalón central	0	3	6	9	12	15	18	21
Minutos	0	1	2	3	4	5	6	7

Durante los 4 minutos iniciales
¿Qué ha estado cambiando?

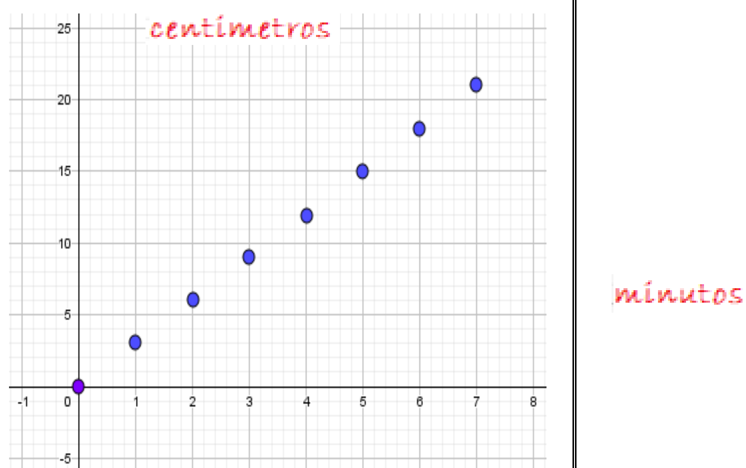
el tiempo y
la altura

¿Qué pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo?

aumenta

¿Cuánto cambia la altura por cada minuto?

3 centímetros



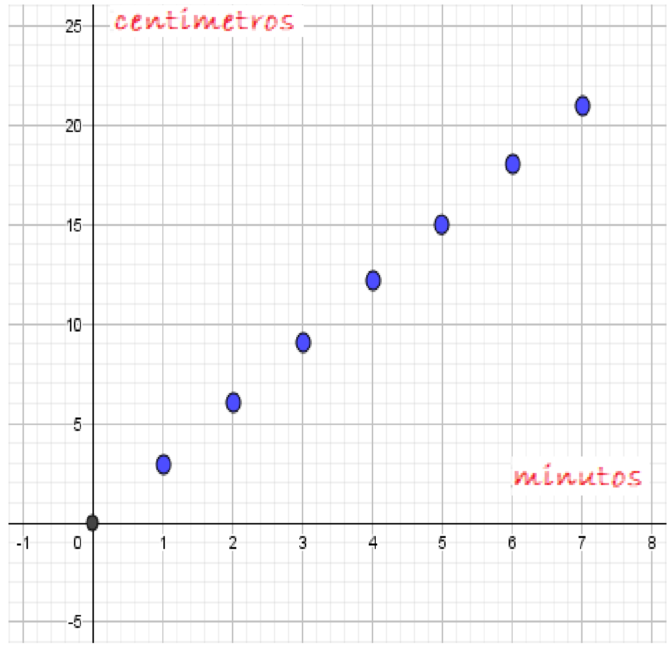
Considerando la información anterior y las siguientes convenciones

x_1	Representa una cantidad de minutos
x_2	Representa otra cantidad de minutos
y_1	Representa la cantidad de altura del agua desde el escalón central a los x_1 minutos
y_2	Representa la cantidad de altura del agua desde el escalón central a los x_2 minutos
Δx	Cambio en el tiempo desde $\mathbf{x_1}$ hasta $\mathbf{x_2}$

Δy	Cambio en la altura desde y_1 hasta y_2

1. Completa la siguiente tabla

x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
0	1		0	3		$\frac{}{} =$
1	2					$\frac{}{} =$
2	4					$\frac{}{} =$
4	6					$\frac{}{} =$
6	7					$\frac{}{} =$



2. Registra en el plano cartesiano cada uno de los valores de Δx y sus respectivos Δy

3. ¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

____

____

____

____

De la actividad 1 obtuvimos

Altura del agua en R3 desde el escalón central	5	7	9	11	13	15	17	19
Minutos	0	1	2	3	4	5	6	7

Durante los 4 minutos iniciales

¿Qué ha estado cambiando?

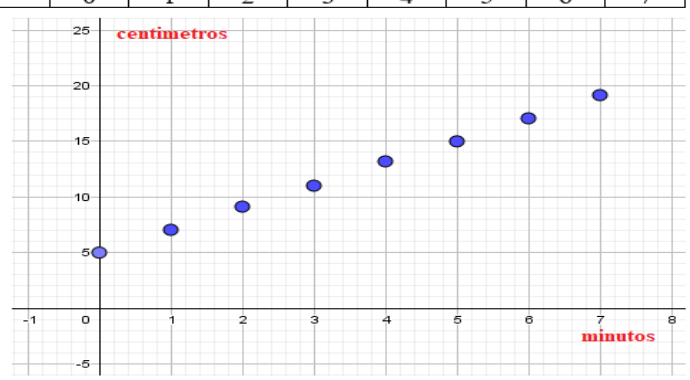
el tiempo y la altura

¿Qué pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo?

aumenta

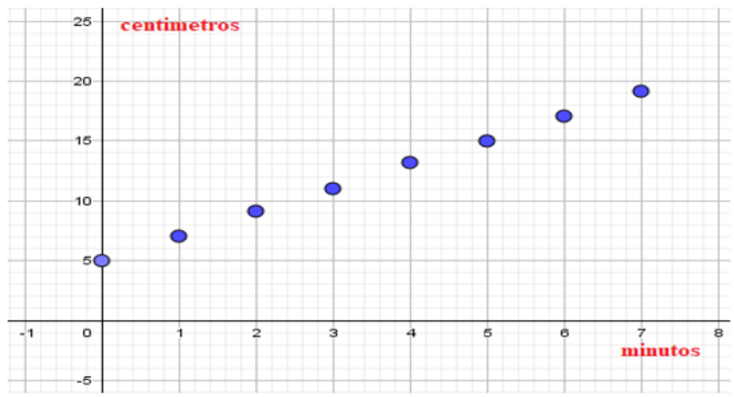
¿Cuánto cambia la altura por cada minuto?

2 centímetros



4. Considerando la información anterior y las convenciones completa la siguiente tabla

x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
0	1		5	7		$\frac{\square}{\square} =$
1	2					$\frac{\square}{\square} =$
2	4					$\frac{\square}{\square} =$
4	6					$\frac{\square}{\square} =$
6	7					$\frac{\square}{\square} =$



5. Registra en el plano cartesiano cada uno de los valores de Δx y sus respectivos Δy

6. ¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

____

____

____

____

De la actividad 1 obtuvimos

Altura del agua en R2 desde el escalón central	-5	-1	3	7	11	15	19	23
Minutos	0	1	2	3	4	5	6	7

Durante los 4 minutos iniciales
¿Qué ha estado cambiando?

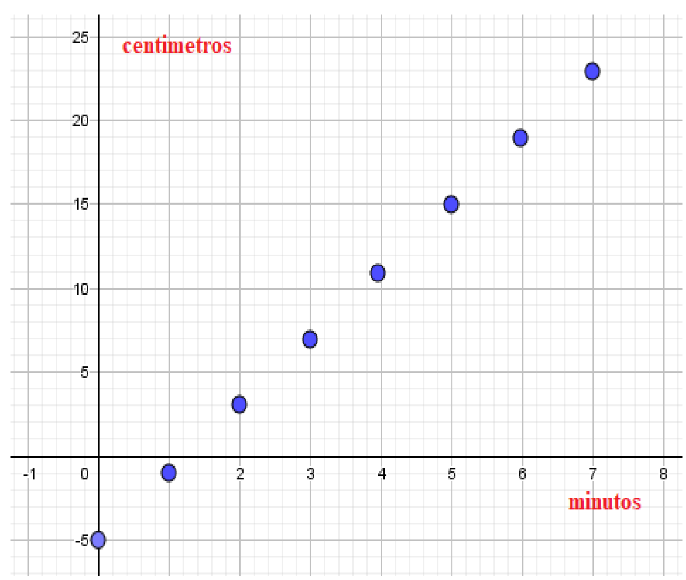
el tiempo y
la altura

¿Qué pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo?

aumenta

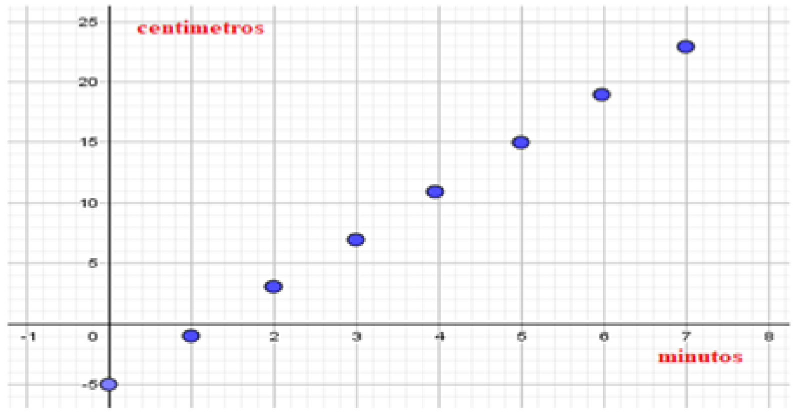
¿Cuánto cambia la altura por cada minuto?

4 centímetros



7. Considerando la información anterior y las convenciones completa la siguiente tabla

x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
0	1		-5	-1		$\frac{\square}{\square} =$
1	2					$\frac{\square}{\square} =$
2	4					$\frac{\square}{\square} =$
4	6					$\frac{\square}{\square} =$
6	7					$\frac{\square}{\square} =$



8. Registra en el plano cartesiano cada uno de los valores de $\boldsymbol{\Delta x}$ y sus respectivos $\boldsymbol{\Delta y}$

9. ¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

Anexo 4

ALCALDÍA MAYOR DE BOGOTÁ, D.C.
SECRETARIA DE EDUCACIÓN

COLEGIO EL PORVENIR

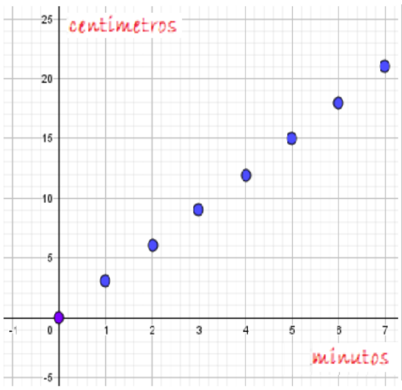
INSTITUCIÓN EDUCATIVA DISTRITAL

EDUCACIÓN MEDIA TÉCNICA
MATEMÁTICAS
GRADO NOVENO
Actividad 3

ESTUDIANTE:____CURSO: __________

De las actividades pasadas obtuvimos

Altura del agua en R1 desde el escalón central	0	3	6	9	12	15	18	21
Minutos	0	1	2	3	4	5	6	7



x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
0	1	1	0	3	3	$\frac{3}{1} = 3$
1	2	1	3	6	3	$\frac{3}{1} = 3$
2	4	2	6	12	6	$\frac{6}{2} = 3$
4	6	2	12	18	6	$\frac{6}{2} = 3$
6	7	1	18	21	3	$\frac{3}{1} = 3$

Durante los 4 minutos iniciales ¿Qué ha estado cambiando?

el tiempo y la altura

¿Qué pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo?

aumenta

¿Cuánto cambia la altura por cada minuto?

3 centímetros

¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

que por cada minuto que cambie, la altura cambiara 3 centímetros

Considerando la situación y la información anterior, responde los siguientes puntos:

1. Completa la siguiente tabla

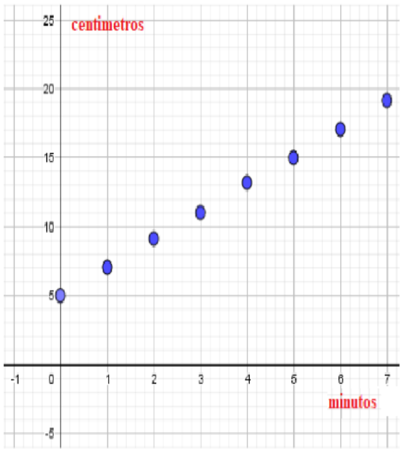
minutos	**Altura del agua en R1 desde el escalón central**	**Procedimiento para calcular la altura a partir de los minutos**	**Justifica el procedimiento utilizado**
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			

7			

<table>
<tr><th>¿Cuántos valores posibles hay para el tiempo?</th><th>¿Cómo representar todos estos valores posibles?</th><th>¿Cuántos valores posibles hay para la altura?</th><th>¿Cómo representar todos estos valores posibles?</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Justifica tu respuesta</td><td colspan="2">Justifica tu respuesta</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Escribe, considerando la representación de todos los valores posibles, un procedimiento general que permita calcular a partir de los minutos la altura del agua en R1 desde el escalón central</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Verifica que el procedimiento sirve considerando la situación inicial</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
</table>

De las actividades pasadas obtuvimos

Altura del agua en R3 desde el escalón central	5	7	9	11	13	15	17	19
Minutos	0	1	2	3	4	5	6	7



x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
0	1	1	5	7	2	$\frac{2}{1} = 2$
1	2	1	7	9	2	$\frac{2}{1} = 2$
2	4	2	9	13	4	$\frac{4}{2} = 2$
4	6	2	13	17	4	$\frac{4}{2} = 2$
6	7	1	17	19	2	$\frac{2}{1} = 2$

Durante los 4 minutos iniciales
¿Qué ha estado cambiando?

el tiempo y la altura

¿Qué pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo?

aumenta

¿Cuánto cambia la altura por cada minuto?

2 centimetros

¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

que por cada minuto que cambie,la altura cabiara 2 centimetros

Considerando la situación y la información anterior, responde los siguientes puntos:

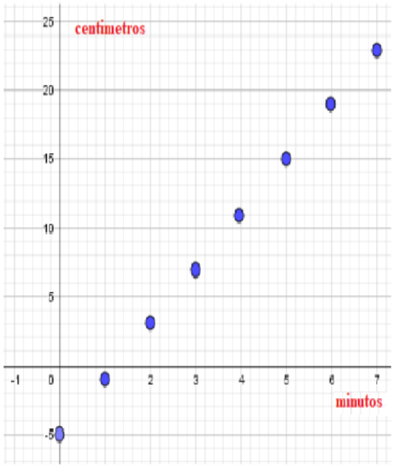
2. Completa las siguientes tablas

minutos	**Altura del agua en R3 desde el escalón central**	**Procedimiento para calcular la altura a partir de los minutos**	**Justifica el procedimiento utilizado**
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

<table>
<tr><th>¿Cuántos valores posibles hay para el tiempo?</th><th>¿Cómo representar todos estos valores posibles?</th><th>¿Cuántos valores posibles hay para la altura?</th><th>¿Cómo representar todos estos valores posibles?</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Justifica tu respuesta</td><td colspan="2">Justifica tu respuesta</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Escribe, considerando la representación de todos los valores posibles, un procedimiento general que permita calcular a partir de los minutos la altura del agua en R3 desde el escalón central</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Verifica que el procedimiento sirve considerando la situación inicial</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
</table>

De las sesiones pasadas obtuvimos

Altura del agua en R2 desde el escalón central	-5	-1	3	7	11	15	19	23
Minutos	0	1	2	3	4	5	6	7



x_1	x_2	Δx	y_1	y_2	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
0	1	1	-5	-1	4	$\frac{4}{1} = 4$
1	2	1	-1	3	4	$\frac{4}{1} = 4$
2	4	2	3	11	8	$\frac{8}{2} = 4$
4	6	2	11	19	8	$\frac{8}{2} = 4$
6	7	1	19	23	4	$\frac{4}{1} = 4$

Durante los 4 minutos iniciales ¿Qué ha estado cambiando?

el tiempo y la altura

¿Qué pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo?

aumenta

¿Cuánto cambia la altura por cada minuto?

4 centímetros

¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

que por cada minuto que cambie, la altura cambiara 4 centímetros

Considerando la situación y la información anterior, responde los siguientes puntos:

3. Completa la siguiente tabla

minutos	Altura del agua en R2 desde el escalón central	Procedimiento para calcular la altura a partir de los minutos	Justifica el procedimiento utilizado
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			

¿Cuántos valores posibles hay para el tiempo?	¿Cómo representar todos estos valores posibles?	¿Cuántos valores posibles hay para la altura?	¿Cómo representar todos estos valores posibles?

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Justifica tu respuesta</td><td colspan="2">Justifica tu respuesta</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Escribe, considerando la representación de todos los valores posibles, un procedimiento general que permita calcular a partir de los minutos la altura del agua en R2 desde el escalón central</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="4">Verifica que el procedimiento sirve considerando la situación inicial</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
</table>

4. ¿Es posible afirmar que el procedimiento general representa el comportamiento de cada uno de los casos en la situación? Justifica tu respuesta

Anexo 5

Estudiante: E1
Entrevistador: P

Fase	Paso	Lo que se dice
Experimentación	Procesa la obtención de datos	P: Listo compañero Arias. Vamos a iniciar la entrevista. Vamos a mirar y tratar de encontrar las razones de sus respuestas, ¿vale?, entonces recordemos lo que nos decía la situación: La empresa de acueducto, alcantarillado y aseo de Bogotá anunció la semana pasada que con el fin de efectuar reparaciones en la red de tubos realizaría un corte del suministro de agua desde el día de hoy y por un tiempo de 72 horas en el barrio El Porvenir de la localidad de Bosa. ¿Hasta ahí está claro?
		E3: Sí.
		P: ¿Qué es lo que va a pasar?
		E3: Pues que el acueducto va a cortar el agua.
		P: La señora María al no haberse enterado del corte y no tener agua almacenada decide aprovechar la lluvia que cae y pone en las escaleras de la terraza tres recipientes para recoger el líquido. Andrés, un hijo de María, observa los recipientes puestos e identifica que los tres son de forma cilíndrica, con la misma altura pero con distinto diámetro. ¿Entiendes lo que es cilíndrico?
		E3: Pues la base es circular y sube y tiene tres dimensiones… y la base de arriba es igual a la de abajo.
		P: Entonces, todos tienen la misma altura pero distinto diámetro. ¿Cuál sería el diámetro ahí?
		E3: Diámetro sería de aquí a aquí... la distancia de aquí a aquí…
		P: Listo... y como lo muestra la imagen, son distintos. Siendo el recipiente 2 el de menor diámetro... y el tres el de mayor diámetro. ¿Dónde estaría el recipiente dos? ¿y el tres?
		E3: Aquí y aquí.
		P: Mayor diámetro aquí y menor diámetro aquí
		E3: Y el otro recipiente estaría en la mitad, con un diámetro entre el grande y el pequeño
		P: Además que el recipiente 1 fue colocado en el escalón central, el recipiente 3 un escalón arriba y el recipiente 2 un escalón abajo, tal como muestra la Fig. 1. ¿Hasta ahí tienes alguna pregunta?
		E3: No.

		P: Listo, vamos a arrancar con las preguntas entonces... Después de 4 minutos con la misma intensidad de lluvia, Andrés observa que el agua ha logrado una altura de 8 cm. dentro del recipiente 3, entonces aquí en el recipiente 3...
		P: Listo, vamos a arrancar con las preguntas entonces... Después de 4 minutos con la misma intensidad de lluvia, Andrés observa que el agua ha logrado una altura de 8 cm. dentro del recipiente 3, entonces aquí en el recipiente 3...
		E3: El agua se llenó hasta 8 cm. en el recipiente 3
		P: ¿En cuánto tiempo?
		E3: En 4 minutos.
		P: ... y de 16 cm dentro del recipiente 2, ¿dónde sería?
		E3: Acá, en éste
		P: ... y 12 cm. dentro del recipiente 1. Sin embargo desea establecer la altura del agua en cada uno de los cilindros desde el escalón del centro, sin olvidar que la altura de cada escalón es de 5 cm. Entonces, por ejemplo, aquí, a los 4 minutos, ¿cuánta altura alcanzó?
		E3: 8 cm.
		P: Bien. Entonces de aquí hasta aquí hay 8 cm., ¿pero desde el escalón central cuánto?
		E3: Pues 8+5... serían ...13
		P: A 8 le sumas...
		E3: 5, que sería la altura del escalón. La altura del escalón más la altura del agua
		P: Las siguientes preguntas... con un tiempo de 4 minutos de lluvia completa la siguiente tabla (Punto No. 1). Entonces, ¿cuál es la altura del agua dentro del recipiente a los 4 minutos... en el recipiente 1?
		E3: 12 , a los cuatro minutos el agua subió hasta 12 cm.
		P: En el recipiente dos escribiste 16, ¿por qué?
		E3: En el recipiente 2 alcanzó los 16 cm porque era más angosto, entonces obviamente alcanza más altura...
		P: ¿Pero de dónde sacaste que eran 16?
		E3: Pues aquí en el párrafo que dice 16 cm en el recipiente 2...
		P: Ok... y aquí en el recipiente 3 escribes 8... ¿por qué?
		E3: Igualmente, porque ahí decía que a los 4 minutos alcanzó 8 cm. de altura.
		P: Listo, escribamos aquí... a los 4 minutos, ¿cuál es la altura aquí?

		E3: 8
		P: Listo 8 cm en 4 minutos... ¿Aquí?
		E3: 12
		P: 12 cm en 4 minutos... ¿y aquí?
		E3: 16
		P: 16 cm en 4 minutos.... Pero esta fila, la fila de abajo nos decía "la altura del agua en el recipiente desde el escalón central" y nos diste esta información... ¿Por qué aquí 12?
		E3: Porque el recipiente 1 ya estaba en el escalón central. No tenía que hacerle nada.
		P: Listo. Aquí escribes 11 en el recipiente 2... ¿por qué?
		E3: Porque como estaba un escalón abajo y cada escalón mide 5 cm, le resté los 5 cm que tenía un escalón al otro, entonces me dio 11.
		P: O sea que a estos 16 cm le quitaríamos los 5 y nos quedaría la altura del escalón central de 11 cm. ... Y aquí escribes 13 para el recipiente 3...
		E3: Porque como estaba arriba le sumé los 5 cm porque estaba más arriba y 8+5=13
		P: Listo. Vamos con el segundo punto.... Con un tiempo de 8 minutos de lluvia, con la misma intensidad, completa la siguiente tabla.... Ahora a los 8 minutos, ¿cuál será la altura del agua dentro del recipiente 1?
		E3: Pues como es el doble de tiempo y dice que es una lluvia constante a la misma intensidad, entonces se le suma... es el doble. Se le suma 12 otra vez... 12+12=24.
		P: ¿Y en el escalón central?
		E3: Pues sería los 12+12 porque igual está en el escalón central entonces no se le suma nada... sigue la misma altura.
		P: Listo, veamos para el recipiente 2. Tú colocas aquí que 32 a los 8 minutos... ¿por qué?
		E3: Porque ... por la misma razón que en el primero... como es la misma intensidad que llueve, se le suma el doble, ... no el doble... se le suma lo que mide y se le resta 5 para saber la altura desde escalón central.
		P: O sea que respondiste aquí 32 - 5 lo del escalón central. Y para el recipiente 3, nos dices que la altura alcanza 16 cm de altura en 8 minutos, ¿la razón es?
		E3: La misma que las anteriores... Llueve a la misma intensidad, se le suma 8 otra vez y da 16 y a eso se le suma 5, me da 21 por los 5 cm que hay demás del escalón central.
		P: Vale, listo. Gracias.

E3: OK

P: Bien, vamos ahora a analizar estas tablas. Vamos a mirar estas respuestas que nos das. Es de la misma situación pero ahora vamos a analizar por separado y para más datos. Vamos a concentrarnos primero en esta tabla. Altura del agua en R1 desde el escalón central. R1 es el recipiente. El escalón central está aquí. Dices que a los 0 minutos hay 0 centímetros de altura que alcanza el agua, ¿por qué?

E3: Pues como no ha transcurrido ningún minuto pues no se ha llenado nada porque no ha caído agua.

P: En 1

E3: En uno alcanza los 3 cm porque si en 4 minutos alcanza los 12, entonces yo dividí esos 12 entre 4. Y en un minuto alcanzó 3 cm.

P: ¿Y por qué lo dividiste? ¿por qué la división?

E3: Como era constante yo lo dividí.

P: O sea hacer esta división lo que te va a indicar es cuánta altura alcanza en un minuto.

En 2 minutos escribes 6...

E3: Pasa el doble de tiempo de un minuto, entonces le sumé a los 3 centímetros otros tres.

P: Y aquí dices que es 9

E3: Es 9 por qué pasó otro minuto, y cada minuto sube 3 centímetros. Se va sumando cada minuto de a tres.

P: Por eso aquí es 15 porque 12 más 3 es 15 y así hasta 21 por la misma razón.

Listo veamos ahora para el recipiente número 3 con esta tabla. Nos dice que a los 0 minutos hay 5 cm, ¿por qué razón?

E3: Cómo empezaba desde el escalón central entonces ya tenía 5 centímetros.

P: Y dices que en 1 hay 7, ¿qué motivó esa respuesta?

E3: Porque en 4 minutos alcanzaba 8 centímetros, le sumé los 5, me dió 13.

P: ¿A qué le sumaste 5?

E3: A los 8 centímetros de agua que habían más los 5 del escalón me dió 13. Entonces ese 13 lo dividí en cuatro, igual como hice con el de acá. No, no fueron 13… cogí los 8 y lo dividí entre 4. Eso da 2 y le sumé 5. Me dió 7.

P: ¿Qué indica este 2?

E3: Lo que se ha llenado este recipiente en un minuto.

P: Listo, o sea que en este recipiente logras 2 centímetros de altura en un minuto. Listo… ahora para dos minutos…

		E3: Pues igualmente se le suman los dos, o sea 4 y a ese 4 le sumó los 5 del escalón y me da 9.
		P: ¿Y este 11?
		E3: Pues igualmente. Cojo otros 2 minutos, me da 6 y a ese 6 le sumo 5
		P: Aquí tenemos 15…
		E3: Ahí le sumó 4 minutos más que son de este y éste.
		P: Miremos esta, que es para el recipiente 2. Dices a los 0 minutos hay 0 cm ¿por qué razón?
		E3: Estaba un escalón abajo…
		P: Pero desde el escalón central no podrías decir qué es cero. Diríamos que son -5 cm. ¿Y en un minuto? En un minuto dices que es 0. ¿Por qué razón?
		E3: ...Estoy haciendo algo mal
		P: Empecemos de nuevo... Cómo harías para calcular la altura del agua en un minuto. Veamos que estos datos están acá.
		E3: 16 cm es lo que sube y lo divido en 4, que indica que en un minuto sube 4 cm. Bueno y a ese 4 le resto 5, lo cual da -1.
		P: Listo y en 2, pusiste 3
		E3: Sí porque a -1 le sumo 4 y me da 3 positivo.
		P: Bueno, y aquí dices que en 3 minutos aumenta a 7, ¿por qué razón?
		E3: Pues se le aumenta 4 al 3 anterior.
		P: ¿y aquí este 11?
		E3: Se le aumentan otros 4… Y así sigo aumentando de a 4 cada vez
		P: Listo!.

Fase	Pasos	Lo que se dice
Abstracción	Selección de variables	P: Bien compañero, la pregunta número 3 nos dice: Durante los cuatro minutos iniciales ¿qué ha estado cambiando?. Justifica tu respuesta.

			E3: Cambiaba la altura del agua…
			P: ¿Cambia algo más?
			E3: No. Sólo la altura.
			P: Bueno voy a replantear la pregunta. Entre estos dos instantes aquí y aquí, qué cambia.
			E3: El tiempo y la altura.
			P: ¿Así que solamente va cambiando la altura?
			E3: No. También el tiempo, porque dependiendo del tiempo va cambiando la altura.
			P: ¿Habrá algo más que pueda cambiar?
			E3: No. Sólo la altura del agua y el tiempo.
	Problematización	y cambia positiva o negativamente con cambios en x	**Lo que se dice**
			P: Listo. Ahora vamos a mirar la otra parte. Volvamos a las tablas. ¿Qué pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo?
			E3: Aumenta el nivel del agua.
			P: ¿En qué casos disminuiría?
			E3: Si deja de llover, hace sol y se evapora el agua o que la señora María vacíe los recipientes.
		Cambio especifico en y por cambio dado en x	**Lo que se dice**
			P: Bien. Ahora miremos esta otra pregunta. Para el recipiente 1 ¿Cuánto cambia la altura por cada minuto?
			E3: Pues en este 3cm. 2cm aquí y en este otro 4cm.
			P: ¿Y depende la posición donde esté?
			E3: No. Aquí tampoco y aquí tampoco.
			P: Listo. Ahora analicemos un poquito esto. Aquí hay una información que ya colocaste en la sesión tres. Vamos a mirar esta tabla Vamos a considerar qué significa cada una de estas letras. X_1 representa una cantidad de minutos. X_2 representa otra cantidad de minutos. Y_1 representa la altura del agua desde el escalón central a los X_1 minutos. Y_2 representa la altura del agua desde el escalón central a los X_2 minutos. Entonces tenemos que $\boldsymbol{\Delta}$X es el cambio en el tiempo desde X_1 hasta X_2. Y $\boldsymbol{\Delta}$Y es el cambio en la altura desde Y_1 hasta Y_2. Entonces vamos a considerar esto para el recipiente 1. Aquí tenemos estos valores. X_1 vamos a mirar distintos tiempos.

			Entonces vamos a evaluar cuando sea 0, cuando sea 1, 2, 4 ó 6. Y aquí pusimos otros tiempos, cuando sea 1, 2, 4, 6 y 7. Y empezamos aquí ΔX ¿por qué pusiste 1 acá?
			E3: Pues ΔX es el cambio de un tiempo al otro, X_1 y X_2 que se restan.
			P: Bueno aquí se podrían considerar las dos opciones. Primero vamos a considerar el cambio de aquí hasta aquí. ¿Cuánto cambió de 0 a 1? ¿Cuánto cambia?
			E3: Un minuto
			P: De 1 a 2
			E3: Un minuto
			P: De 2 a 4 y de 4 a 6
			E3: 2 minutos
			P: ¿Y de 6 a 7?
			E3: Un minuto
			P: Y Aquí vamos a mirar los respectivos Y para cada uno de estos X. Aquí pusiste 0 para Y_1. ¿recuerdas por qué?
			E3: Porque no había subido nada
			P: Aquí pusiste que era 3, ¿por qué?
			E3: Porque en un minuto ya había subido 3 cm
			P: En 2 pusiste 6 ¿por qué?
			E3: Por la misma razón como es el doble. Y así va subiendo cada 3 cm
			P: ¿Y aquí estos valores?
			E3: Son para X_2
			P: Ahora vamos a mirar los cambios de Y_1 a Y_2.
			E3: De 0 a 3 hay 3, de 3 a 6 cambia 3, de 6 a 12 cambia 6, de 12 a 18 cambia 6, y de 18 a 21 son 3.
			P: Y aquí vemos representada esta información de la tabla. Este 0 ¿dónde estaría en la gráfica?
			E3: Estaría aquí.
			P: ¿y este otro 0?

		E3: Estaría aquí.
		P: ¿y este 1?
		E3: Aquí
		P: Listo. ¿y este cambio en X dónde estaría?
		E3: Aquí
		P: ¿y este 3?
		E3: Estaría aquí.
		P: ¿y este otro 3 dónde estaría?
		E3: Aquí. Por cada cambio serían 3.
		P: Veamos ahora este 6, ¿dónde estaría?
		E3: Aquí.
		P: ¿y este 6?
		E3: Sería este cambio entre 6 y 12
		P: ¿Y qué representa?
		E3: Por cada 2 minutos, va a aumentar 6
		P: ¿y este 3?
		E3: Entre el 18 y el 21. Aquí.
		P: ¿y allá cómo lo representaría?
		E3: Aquí
		P: ¿y qué quiere decir esto?
		E3: Eso quiere decir que hay un cambio en los minutos. Por cada minuto sube 3 cm.
		P: Listo! Ahora analicemos tus respuestas pero considerando el recipiente 3. ¿Recuerdas dónde está el recipiente 3?
		E3: Era el más grande y estaba al lado izquierdo en el escalón más alto.
		P: Bien. Aquí tenemos estos datos y esta gráfica. Aquí tenemos que hay 5 desde el escalón central. Este dato de 0 a 1, ¿el tiempo cuánto aumenta?
		E3: 1 minuto

		P: ¿De 2 a 4?
		E3: De 2 a 4 hay 2 minutos. De 4 a 6 también 2 minutos. De 6 a 7 un minuto.
		P: Lo podemos hacer restando los valores…y me va a dar de cuánto es el cambio en tiempo
		E3: Si
		P: Listo. Miremos ahora los valores de Y_1 y Y_2. ¿De qué nos hablan estos valores?
		E3: De los centímetros que va a haber en ciertas cantidades de tiempo.
		P: ¿De dónde sacas estos dos valores?
		E3: De la tabla
		P: Bien. ¿Y esta columna qué significa?
		E3: El cambio que hay en los centímetros
		P: ¿Y esta otra?
		E3: El cambio que hay en los minutos
		P: ¿Este 1 de aquí dónde es en la gráfica y qué significa?
		E3: Iría aquí y representa el cambio
		P: ¿Y qué quiere decir?
		E3: Que en el tiempo 1 minuto, cambia 2 en los cm.
		P: ¿y este 2 y este 4, ese cambio cómo lo representaría?
		E3: Comienza en 2 y llega a 4 y luego aumenta 4. Ese cambio se da acá…
		P: Vale. Ahora miremos para el recipiente número 2. ¿Recuerdas dónde está el recipiente 2?
		E3: El recipiente 2 está al lado derecho. Está más bajo.
		P: Si. Está un escalón abajo del central. Hagamos el mismo análisis. ¿Por qué colocaste éstos números acá?
		E3: Es el cambio que hay entre X_1 y X_2. Por ejemplo, de 1 a 2 hay 1. De 2 a 4 hay 2, etc.
		P: Listo. ¿Y estos valores de dónde salieron?

			E3: De la tabla.
			P: ¿Y este valor de aquí de dónde sale?
			E3: Porque en 0 minutos hay -5 cm.
			P: O la altura estaba en -5 cm
			E3: Sí.
			P: Bien. Entonces ahora miremos…Aquí, de -5 a -1…
			E3: Hay 4cm de aumento
			P: De -1 a 3…
			E3: También hay 4 cm
			P: Y de 3 a 11…
			E3: 8
			P: Bien. Tratemos de mirar en la gráfica estos cambios. ¿Dónde estaría por ejemplo, este 1?
			E3: Aquí.
			P: Aumentó 1 en el tiempo y aumentó 4 en la altura… ¿y este otro?
			E3: Aquí…
			P: ¿Y cómo representaríamos estos cambios en la gráfica?
			E3: Aquí… 2… y ...8.
			P: Listo!
		Manifestación de la razón de cambio	P: Bien compañero. Vamos ahora a analizar… Vamos a mirar la siguiente pregunta… Aquí de esta tabla llenamos esto: Y / ΔX. ΔX nos representa…
			E3: Un cambio en el tiempo
			P: ¿Y ΔY?
			E3: Un cambio en los cm.
			P: Bien. En todos te dio un valor de 3. Y ahora la pregunta, ¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en ΔY / ΔX?
			E3: Por cada cambio en ΔX también va cambiando en ΔY

		P: Y aquí según estos valores, ¿cuánto nos dió?
		E3: Va a cambiar 3
		P: ¿Qué significado tiene ese 3 en la situación?
		E3: Que siempre ha ido aumentando 3…
		P: Hummm, pero aquí no aumenta 3
		E3: Ahí aumentó el doble
		P: ¿Pero qué significado tiene este 3 en la situación?
		E3: El cambio que se logró…
		P: Sea más específico. En función de la situación, ¿este 3 qué diría?
		E3: Ese 3 diría que la constante es 3…
		P: ¿Cada cuánto?
		E3: Cada minuto
		P: Es decir, que por cada minuto…
		E3: ...Va a cambiar 3
		P: Por ejemplo aquí 6/2 … Por cada minuto…
		E3: Cambia 3. Como son 2 minutos, cambia 6
		P: Listo. Ahora miremos la misma pregunta pero para el recipiente que está arriba, el tres. Aquí nos dió siempre 2. ¿Qué quiere decir este 2, o este ΔY / ΔX en la situación específicamente?
		E3: Que por cada minuto siempre va a aumentar 2
		P: “Que cambia 2 cm por cada minuto que pasa”. Aquí ya fuiste más explícito en tu escritura a diferencia del caso anterior. Bien. Ahora veamos aquí para el recipiente de agua que está abajo. Aquí nos dio siempre 4 en la columna de ΔY / ΔX… la pendiente…
		E3: Siempre nos dio 4
		P: Entonces, qué escribiste…
		E3: “Es el cambio que se da entre y e x por cada minuto que pasa”
		P: Explícame eso por favor…
		E3: Que siempre se da cambio en 4.. siempre va a

		aumentar 4
		P: Pero detalladamente cómo sería…
		E3: Que por cada minuto que pase, siempre va a aumentar 4 cm la altura.
		P: Listo. Vamos a mirar ahora lo siguiente…
	Formulación de la hipótesis	P: Bien, ahora veamos este Paso 3 de la Fase 2… Entonces, aquí ya tenemos y estamos hablando de la última actividad. Tenemos nuevamente los datos del recipiente 1. Recordemos que en el minuto 0 hay 0 cm de altura del agua, que en el minuto 1 alcanza 3 cm, y así para los demás datos. Les solicité llenar esta tabla. Veamos que en la primera columna estamos hablando de los minutos, de la altura del agua en R1 desde el escalón central y la columna que menciona el procedimiento para calcular la altura del agua a partir de los minutos, y finalmente acá, en la última parte, explicar el procedimiento utilizado. Entonces, en 0 minutos, altura 0, en 1 minuto 3 cm, en 2 minutos 6 cm, y así con la información dada. ¿Qué hiciste aquí?
		E3: Pues ahí yo cogí el valor de los minutos y le sumé el doble… cogía ese valor y el doble de ese valor…
		P: Veamos este valor…
		E3: 6 más el doble de 6 sería 6+12=18
		P: Bueno, ¿y por qué ese procedimiento?
		E3: Bueno, pues yo miré los datos y con ese procedimiento coincidían los valores que se necesitaban y me salió...
		P: Pero entonces miraste solo los datos sin tener en cuenta la situación…
		E3: No, no tuve en cuenta la situación… sólo los datos.
		P: "Al sumar el tiempo por el doble de tiempo da el resultado". Mirando todos los números sacaste esta estrategia.
		E3: Sí.
		P: Listo. Veamos ahora para el siguiente caso, recipiente 3… ¿esta información de dónde la sacaste?
		E3: De la tabla

		P: ¿Y qué procedimiento hiciste?
		E3: Pues ahí cogí el 0+5… pero ahí yo le sumaba el número anterior al que estaba en la tabla
		P: ¿Cómo así?
		E3: Por ejemplo, como es 7 el resultado en la tabla, entonces le resté 1 y luego sí le sumaba el otro valor de la tabla, entonces 1+6=7… No… le sumaba el siguiente al anterior…
		P: Ah, el número siguiente que está aquí…
		E3: El número siguiente al resultado.
		P: Ah, ya entendí… Aquí, entonces 0 le sumas 5, entonces da 5. Aquí coges el 1 le sumas el siguiente a 5, sería 6. Si coges 2, …
		E3: le sumo el siguiente a 6, que sería 7, quedando 2+7=9
		P: Y así coincide… ¿y por qué?
		E3: La verdad que no supe hacer...y sólo escribí...lo hice mirando el anterior…y me dió..
		P: una estrategia…
		E3: Una estrategia para escribir estos datos.
		P: Veamos para el siguiente…
		E3: Para el siguiente no encontré estrategia
		P: Listo. Hagamos una cosa, devolvámonos aquí (tabla de altura del agua en recipiente 1). Como harías si te pusiera aquí en la columna de los minutos, 20 minutos
		E3: Sería 20+20 y a eso le sumo otros 20. O sea, sería 20x3
		P: ¿Podríamos aplicar esto mismo acá?
		E3: Si.
		P: ¿Cómo sería aquí?
		E3: Sería 3x0=0, 3x1=1, y así sucesivamente…
		P: ¿Y si aquí colocáramos un millón?
		E3: Sería un millón por tres.
		P: Entonces sería como multiplicar por tres. No vayas a olvidar esa estrategia. Ahora vamos a mirar

		si aquí podemos encontrar alguna. Y aquí a los 20 minutos cómo sería
		E3: No, la verdad no sé cómo haría…
		P: ¿Y por qué no 'cuadra'?
		E3: Porque no le estoy sumando el escalón…la medida del escalón
		P: Ok. Volvamos a la situación… ¿Aquí?
		E3: 2x0+5, 2x1+5, y así…
		P: ¿A todo le sumarías 5?
		E3: Si. A todo se le suma 5.
		P: ¿Y aquí para 20?
		E3: También le sumaría 5, 20x2+5
		P: ¿Y aquí para un millón de minutos?
		E3: Sería un 1.000.000 x 2 + 5
		P: Listo. Esa es una estrategia. Entonces, ¿cuál sería el procedimiento para calcular la altura a partir de los minutos?
		E3: Sólo necesito saber los minutos, el cambio y lo del escalón.
		P: Aquí tendríamos una estrategia. Ahora, ¿podrías por favor pensar una estrategia para acá?
		E3: Pues sería lo mismo. Para 0 sería 4x0-5=-5, para 1 sería 4x1-5=-1, para 2 sería 4x2-5=3.
		P: ¿Y para 20?
		E3: Sería 4x20-5
		P: ¿Y para un millón?
		E3: Sería 1.000.000x4-5
		P: Listo!

Fase	Paso	Lo que se dice
Resolución	Sustituye el lenguaje natural de las hipótesis por	P: Bien. Vamos a mirar la otra fase, llamada "Fase 3 - Resolución". Aquí, está la parte del taller que resolviste anteriormente. Ten en cuenta la estrategia o conclusiones que realizaste anteriormente. Les pedía llenar esta tabla. ¿Cuántos valores posibles hay para el tiempo?

	un lenguaje matemático	E3: Infinitos.
		P: ¿Por qué?
		E3: El tiempo es infinito. Puedo colocar un millón o 10 millones. Podemos aumentar o aumentar cuantas veces queramos.
		P: ¿Y si fuera por ejemplo del minuto 0 al minuto 2?
		E3: También sería infinito, porque también hay segundos, milisegundos, millonésima de segundo. Podríamos tener cantidades más pequeñas de tiempo.
		P: ¿Cómo hablar de todos estos valores posibles sin necesidad de mencionarlos uno a uno?
		E3: Con una letra. (m)
		P: Esta letra m nos representa todas las cantidades posibles de tiempo. Listos. ¿Cuántos valores posibles hay para la altura?
		E3: Infinito
		P: ¿Por qué?
		E3: Porque si el tiempo es infinito, entonces también va a ser infinita la altura si sigue lloviendo… lo limita la altura del recipiente.
		P: Por ejemplo si fuera hasta una altura de 20 cm…
		E3: También hasta 20 habría infinitos valores
		P: ¿Por qué?
		E3: Porque podríamos hablar de cantidades más pequeñas que los centímetros
		P: ¿Cómo hablar de todos estos valores sin necesidad de mencionarlos uno a uno?
		E3: Pues con la fórmula… con una letra
		P: Escribiste la letra ‘n’. Esta ‘n’ qué representa
		E3: Todos los valores posibles de la altura.
		P: ¿Y este ‘m+m(2)’?
		E3: La fórmula
		P: Un procedimiento general… miremos… el valor más el doble del valor… Ok. Entonces seguimos aquí: ”Escribe, considerando la representación de todos los valores posibles un procedimiento general que permita calcular a partir de los minutos, la altura del agua en el recipiente 1 desde el escalón central”
		E3: Como ya teníamos una estrategia, pero ya sacamos otra, que sería n=m(3). Desde el escalón central.
		P: ¿Y el 3 representa?

		E3: Representa el cambio

Fase	Paso	Lo que se dice
Validación	El modelo junto con las hipótesis analizadas en confrontación con los datos empíricos	P: Listo. Vamos a mirar si las expresiones generales nos sirven…
		E3: Pues esta era operar.. reemplazar los valores… n=3(m). Para 1 sería n=3(1), que es igual a 3.
		P: ¿Y por qué sabemos que nos sirve?
		E3: Porque aquí está coincidiendo el resultado.
		P: 1 en el tiempo y 3 en la altura. ¿Y con otro?
		E3: Lo podríamos hacer por ejemplo con 3. n=3(3), que es igual a 9. Y coincide con el valor de 9 en la tabla.
		P: ¿Y con otro valor?
		E3: Con 5. n=3(5), que es igual a 15. Y aquí también me coincide con el 15.
		P: Ok. Entonces tenemos tres casos en los que sí nos funcione. La idea es que nos funcione con todos. ¿Crees que funcionaría con todos?
		E3: Sí.
		P: Bueno, vamos con los datos del recipiente 3. Recuerda, el recipiente que está arriba. ¿Cuál era la expresión que habíamos sacado?
		E3: n=2m+5
		P: ¿Y cómo podemos saber si sirve o no?
		E3: Reemplazando valores. Por ejemplo con el 2. Entonces, n=2x2+5, así n=9
		P: ¿Y por qué sirve?
		E3: Porque está coincidiendo aquí también en la tabla.
		P: ¿Podríamos hacerlo también con más valores?
		E3: Sí
		P: ¿Con cuáles?
		E3: Con cualquiera.
		P: Listo. Hagámoslo con otro
		E3: Ok. Con 5, sería entonces, n=2x5+5, así n=15. Y aquí me coincide con el 15
		P: Vale. Entonces hagámosle con la del recipiente número 2. ¿Cuál sería?
		E3: n=4m-5

		P: Listo, ¿entonces cómo sería ahí?
		E3: Por ejemplo con el 2 sería: n=4x2-5, entonces n=3. Y aquí en la tabla me coincide.
		P: Listo. ¿Y con otro?
		E3: Con cualquiera lo podría hacer. Por ejemplo con el 5. Sería n=4*5-5, entonces n=15. Me está coincidiendo aquí también.
		P: Listo compañero. Hemos terminado. Muchas gracias por su tiempo y por tu amabilidad. Que estés muy bien.
		E3: Ok profe.

Anexo 6

Estudiante: **E2**
Entrevistador: P

Fase	Paso	Lo que se dice
		P: Hola Wendy, buenas tardes! Vamos a tratar de encontrar justificaciones para las respuestas que diste en las actividades o sesiones que trabajamos. Entonces vamos a iniciar con la primera actividad. Dice así: “La empresa de acueducto, alcantarillado y aseo de Bogotá anunció la semana pasada que con el fin de efectuar reparaciones en la red de tubos realizaría un corte del suministro de agua desde el día de hoy y por un tiempo de 72 horas en el barrio El Porvenir de la localidad de Bosa.” Hasta ahí ¿vamos claro?
		E1: Sí.
		P: ¿Qué es lo que va a pasar?
		E1: Que va a haber un corte de agua
		P: Listo. “La señora María al no haberse enterado del corte y no tener agua almacenada decide aprovechar la lluvia que cae y pone en las escaleras de la terraza tres recipientes para recoger el líquido.” Hasta ahí, ¿qué es lo que hace la Sra. María?
		E1: Pone tres recipientes para recoger agua en la escalera
		P: Seguimos. “Andrés, un hijo de María, observa los recipientes puestos e identifica que los tres son de forma cilíndrica, con la misma altura pero con distinto diámetro”. Hasta ahí, ¿cuál es el diámetro para tí?
		E1: El ancho
		P: Ok. Siendo el recipiente 2 el de menor diámetro y el recipiente tres el de mayor diámetro. Además, el recipiente 1 fue colocado en el escalón central, el recipiente tres un escalón arriba, y el recipiente dos un escalón abajo, tal como lo muestra la figura. ¿Hasta ahí vamos?
	Procesa la obtención de datos	E1: Sí
		P: Vamos a analizar tus respuestas para las fases. Son 4 fases. La más extensa va a ser la número dos. Entonces vamos a analizar de la sesión 1 la respuestas de lo que respondiste a la pregunta 1 y a la pregunta 2. Pero antes, miremos y retomemos aquí lo que decía nuestra situación. Voy a leer: “después de 4 minutos con la misma intensidad de lluvia, Andrés observa que el agua ha logrado una altura de 8 cm. dentro del recipiente 3”. ¿Hasta ahí está claro?
		E1: Sí.
		P: ¿De cuál recipiente nos están hablando?
		E1: Del más grande
		P: Listo. ¿Y qué dice la información hasta ahora?
		E1: Que la altura que ha alcanzado el agua en el recipiente más grande es de 8 cm.
		P: Bien. Sigo leyendo: “de 16 cm dentro del recipiente 2”. ¿Qué quiere decir eso?
		E1: Que después de 4 minutos, el recipiente 2 ha obtenido 16 cm de altura… el agua.
		P: Listo. Sigo leyendo: “y de 12 cm dentro del recipiente 1. Sin embargo desea establecer la altura del agua en cada uno de los cilindros desde el escalón del centro, sin olvidar que la altura de cada escalón es de 5 cm”. Esta era la información que nos daba y después queríamos que llenaras la siguiente tabla. Veamos qué dice: “Con un tiempo de 4 minutos de lluvia completa la siguiente tabla: Altura del agua dentro del recipiente y altura del agua en el recipiente desde el escalón central”. ¿Recuerdas dónde está el escalón central?
		E1: Donde está el recipiente 1
		P: Sí. Entonces veamos, con un tiempo de 4 minutos de lluvia, la altura del agua dentro del recipiente 1… y dijiste que era 12... ¿por qué?
		E1: Porque a los 4 minutos hay 12 cm de altura. Lo que dice la situación.

		P: Listo. Ahora, a los 4 minutos dentro del recipiente 2, colocas que hay 16 cm de agua. ¿Por qué?
		E1: Porque ahí dice que a los 4 minutos hay 12 cm de altura del agua en el recipiente 2.
		P: O sea estás sacando la información de aquí.
		E1: Sí
		P: Y colocas que a los 4 minutos, en el recipiente 3 hay 8 cm de agua. ¿Por qué?
		E1: Porque la información estaba escrita
		P: Bien. Veamos ahora para la siguiente (segunda fila de resultados en la tabla): Altura del agua en el recipiente desde el escalón central.
		E1: El recipiente 1 está en el escalón central pues esa es la medida.
		P: Listo. En el recipiente 2, ¿por qué dices que es 11?
		E1: Porque ahí tenía que haberle sumado los 5 cm del escalón central, pero se los resté…
		P: P: ¿Y por qué dices que debiste haberlos sumado?
		E1: Para que quede a la misma altura del escalón central, y como está 5 cm más abajo, hay que sumarle los 5 para que quede a la misma altura del recipiente 1...
		P: Hagamos el dibujo... lo que tú dices es que a esta altura le quito lo que tiene el escalón de altura, ¿y cuánto nos quedaría?
		E1: 11. O sea que sí restaríamos...
		P: Listos. Y la otra, cuál es la altura que alcanza el agua en el recipiente 3 a los 4 minutos. Veamos aquí la figura.
		E1: 13. Da 13.
		P: ¿Y de dónde sale ese 13?
		E1: Los 8 + 5 del escalón
		P: Listos! Vamos con la pregunta 2. Dice: “Con un tiempo de 8 minutos de lluvia con la misma intensidad, completa la tabla. ¿Cuál es la altura del agua dentro del recipiente 1?”
		E1: Son 24 porque si en 4 minutos eran 12, en 8 minutos serían 24. Lo sumo.
		P: ¿Lo multiplico o lo sumo? ¿Si lo multiplicas sería por cuánto?
		E1: Por dos.
		P: Entonces… si a los 4 minutos alcanzó una altura de…
		E1: 12 cm
		P: Y a los 8 minutos…
		E1: 24 cm
		P: ¿Por qué?
		E1: Porque se sumaron 12 cm y otros 12 cm más, entonces da 24
		P: ¿Pero por qué sumas otros 12 minutos más?
		E1: Porque dura otros 4 minutos más la caída del agua
		P: Listo. Como duplicamos el tiempo, también se duplica la cantidad de agua. Tú dices que puedes sumar 12 + 12 ó multiplicas 12 x 2.
		E1: Sí.
		P: Listo. Ahora miremos en el recipiente 2. Tú dices que la altura es de 32 cm a los 8 minutos. ¿Por qué?
		E1: Porque aquí aumenta 4 minutos más. O sea 32 cm
		P: Como aumentan 4 minutos, aumentan otros 16 cm la altura del agua. Ok. Y aquí para el recipiente 3. Tú dices que es 16 ¿por qué?
		E1: Porque se suman 8 cm + 8 cm.
		P: Entonces aquí para el recipiente 3, a los 8 minutos serían…
		E1: 16 cm.
		P: Ok. Ahora vamos a mirar la altura que alcanza el agua pero desde el escalón central. Arranquemos con este (recipiente 1 situado en el escalón central). A los 8 minutos, ¿cuál será la altura del agua?
		E1: 24 cm porque está en el mismo escalón central
		P: Bien. Ahora miremos en el recipiente 2. Aquí colocaste que era 27, ¿por qué?

		E1: Porque al 32 se le restan los 5 del escalón central. Y 32 - 5 = 27 cm
		P: Bien. Ahora veamos el recipiente 3. Dices que es 21
		E1: Porque al 16 le sumo los 5 del escalón central. Y 16 cm + 5 cm = 21 cm
		P: Listo! Bueno, vamos a ver las preguntas 4, 5 y 6 de la sesión 1. Este taller nos pedía argumentar datos. Para estos minutos, calcular la altura en centímetros desde el escalón central en cada uno de los recipientes. Bien, vamos a mirar las razones por las cuales colocaste estos datos. Recordemos la situación: "Después de 4 minutos con la misma intensidad de lluvia, Andrés observa que el agua ha logrado una altura de 8 cm dentro del recipiente 3, de 16 cm dentro del recipiente 2 y de 8 cm dentro del recipiente 1. Sin embargo, desea establecer la altura del agua en cada uno de los cilindros desde el escalón del centro sin olvidar que la altura de cada escalón es de 5cm". Bien, Entonces recuerda que colocamos estas tablas y tenías que averiguar estos datos, Por favor indícanos cómo sacaste estos datos.
		E1: En el recipiente 1 había, en 4 minutos 12 cm. Entonces dividí 12 entre 4 y me da 3. Y de ahí multiplicando ese número por el otro número para encontrar los otros.
		P: Bueno. Para 1 minuto, tú dices que la altura son 3 cm. Para 2, dices que es 6…
		E1: Porque voy sumando de a tres y así hasta llegar al último 21
		P: ¿Y por qué sumas de a tres?
		E1: Porque voy sumando y encontrando las cantidades y llego hasta aquí al 12.
		P: Ah, vas sumando cierta cantidad cada vez para que aquí al final te de 12. ¿Y cómo hiciste con los demás?
		E1: Sigo sumando
		P: ¿Y aquí por qué te dio cero?
		E1: Porque en 0 minutos, hay 0 cm. No había agua.
		P: Listo. Veamos aquí (para el recipiente 3) ¿cómo hiciste?
		E1: Aquí dividí 8 en 4 y me dió 2, y de ahí fuí sumando hasta que me diera 8
		P: Ok, tú dices que la división da 2, y que ese resultado es la cantidad en centímetros de agua que vas sumando.
		E1: Porque si sumo de a 2 me va dando
		P: Ah, vale. Y entonces esa es la única razón para encontrar los valores…
		E1: Sí
		P: ¿Y aquí por qué dio cero?
		E1: Porque en cero no había agua
		P: Listo. Veamos allá la tabla del recipiente 2. Ese '16'.
		E1: También lo dividí 16 entre 4 y me da 4 y entonces aquí voy sumando de a 4 hasta llegar a 16.
		P: ¿Y para el cero?
		E1: No había caído agua
		P: Analicemos esta información (en la tabla para el recipiente 1): Que a los 0 min, la altura del agua va a ser…
		E1: Cero
		P: ¿En un minuto?
		E1: Va a ser 3 cm
		P: ¿En dos minutos?
		E1: Va a ser 6 cm
		P: Y así sucesivamente. Y aquí para el recipiente 3 ¿qué quieren decir estos valores?
		E1: Que en el recipiente 3, en cero min había cero cm de altura. Que en 1 min había 2 cm de altura, que en 2 min había 4 cm de altura, que en 3 min 6 cm de altura.
		P: Ok. Y así con los demás datos. Ahora con la siguiente tabla (recipiente 2)
		E1: Para el recipiente 2, en cero min hay cero cm de altura del agua. En 1 min, 4 cm. En 2 min 8 cm. y así sucesivamente.
		P: Listo. Perfecto. Veamos ahora lo que dice aquí: "altura del agua desde el escalón central". ¿Te sugiere algo esto que dice acá?
		E1: Sí. Que le sume o que le reste 5 cm, lo del escalón central.

		P: Ok. ¿cuándo sumas?
		E1: Aquí en el recipiente tres le sumo lo del escalón central. Y aquí en el recipiente dos le resto.
		P: ¿Y por qué no consideraste eso acá?
		E1: Porque no ví…
		P: Ok. ¿Podríamos mirar cómo quedaría?
		E1: Sí.
		P: Aquí en la tabla para el recipiente 1.
		E1: Ahí quedaría igual.
		P: Aquí cómo sería (para el recipiente 2)
		E1: Podríamos sumarle 5 cm a cada medida
		P: Aquí, a los cero minutos, va a haber…
		E1: 5
		P: Escribámoslo aquí arriba con rojo. ¿Y para los otros?
		E1: Voy sumando de a 5. Lo del escalón.
		P: ¿Y allá? (Para el recipiente 2)
		E1: Le restaría los 5 cm del escalón
		P: ¿Entonces cómo nos quedaría?
		E1: 0 - 5 = 5; 4 - 5 = -1; 8 - 5 = 3, y así
		P: Bueno. Ahora esto. Explícamelo por fa... (Puntos en el plano cartesiano)
		E1: Pues tengo mal estos dos porque no eran los valores. el primero sí está bien.
		P: Ok. Aquí. ¿Por qué colocaste 'minutos' aquí?
		E1: Porque es el eje x
		P: Ok. Entonces, ¿qué quiere decir este punto?
		E1: Que en 1 min hay 3 cm de agua
		P: ¿Y qué quiere decir este punto?
		E1: Que en 2 min hay 6 cm de agua
		P: Pero este 3 no iría aquí. Si esta es la escala, ¿la mitad de 5 cuánto sería?
		E1: 2,5
		P: Si. ¿Y será que 3 va arriba o abajo?
		E1: Arriba
		P: O sea que el 3 no iría ahí… Bueno, pasemos a la otra tabla a ser representada. ¿Recuerdas los valores que se corrigieron?
		E1: 5, 7, 9, 11, 13
		P: ¿Cómo ubicarías estos valores?
		E1: (0,5); (1,7); (2,9)...
		P: Vale Wendy! Gracias… Vamos a continuar con la siguiente parte.

Fase	Pasos	Lo que se dice
Abstracción	Selección de variables	Bueno. Vamos a mirar el punto número 3 que dice: "Durante los 4 minutos iniciales, ¿Qué ha estado cambiando?"
		E1: Bueno, yo escribí: "Ha estado cambiando la altura dependiendo de la altura de cada recipiente"
		P: No es solamente en el instante 4. Es durante ese lapso de tiempo, del minuto 0 al minuto 4, ¿qué ha estado cambiando?
		E1: La altura del agua, que depende de la intensidad de la lluvia y de lo que cae el agua.

			P: ¿Y por qué cambia la altura del agua?
			E1: Gracias al tiempo y a la intensidad de la lluvia.
			P: ¿Cómo así, ‘gracias al tiempo’?
			E1: Cambia la altura del agua a medida que pasa el tiempo. La intensidad de la lluvia es igual.
			P: O sea que el tiempo también cambia. O sea que aquí en tu respuesta cambiaría algo…
			E1: Si. Durante los 4 minutos iniciales ha estado cambiando la altura y el tiempo.
			P: ¿Crees que habría alguna razón para que no consideraras el tiempo inicialmente?
			E1: Porque en la pregunta decía sólo 4 minutos, no de 0 a los 4 minutos.
			P: Listo. Vale.
	Problematización	y cambia positiva o negativamente con cambios en x	Lo que se dice
			P: Bueno Wendy, vamos a mirar la respuesta que das al literal a. de los puntos 4, 5 y 6. Cada uno de ellos dice: “¿Qué pasa con la altura a medida que aumenta el tiempo?” y es la misma pregunta para cada uno de los recipientes. Ahora miremos qué respondiste (para el recipiente 1): “A medida que aumenta el tiempo, aumenta la altura”. ¿En tus tres respuestas creo que dices lo mismo?
			E1: Sí. Porque por cada tiempo que pase va aumentando el agua
			P: ¿Y por qué aumenta el agua?
			E1: Porque se va llenando
			P: Vale!
		Cambio especifico en y por cambio dado en x	Lo que se dice
			P: Listo Wendy. Ahora vamos a mirar el literal b. de los mismos puntos 4, 5 y 6. Este literal dice: “Cuánto cambia la altura por cada minuto”. Para el recipiente 1 dices: “Por cada minuto, la altura del agua cambia 3”... ¿Tres qué?
			E1: Tres centímetros.
			P: ¿Y por qué deduces eso?
			E1: Porque en la tabla dice que va aumentando.
			P: Listo. Aquí para el recipiente 3 dices que el agua aumenta 2 cm por cada minuto. ¿Por qué?

		E1: Porque aquí en la tabla dividí 13 entre 4…
		P: ¿Y no era 8?
		E1: 8 entre 4 y da 2
		P: ¿Y por qué 8 y no 13?
		E1: Por el escalón
		P: Ok. Y aquí (para el recipiente 2) nos dices que la altura del agua dentro del recipiente 2 cambia 4 cm. ¿Por qué?
		E1: Porque aquí tomé que a los 4 minutos alcanza 16 cm
		P: Pero entonces aquí divides 16 y no 11…
		E1: Por lo que no se cuenta el escalón…
		P: Bueno. Entonces ahora vamos a mirar estas convenciones y vamos a mirar lo que nos indican y considerando los datos que tuvimos en el recipiente 1, vamos a considerar esta tabla. Empecemos aquí con los datos. Esta tabla nos dice minutos y altura del agua en el recipiente 1 desde el escalón central. ¿Recuerdas dónde estaba el recipiente 1?
		E1: En el escalón del centro
		P: En 0 min, ¿cuál es la altura?
		E1: Cero
		P: ¿En 1 min?
		E1: 3 cm
		P: Y así sucesivamente. Bien. Recuerda que en esta tabla grande apenas estaban estas dos columnas (X_1 y X_2). Entonces X_1 representa una cantidad de minutos. Podría ser 1 ó 5. X_2 representa otra cantidad de minutos. Entonces X_2 podría ser 0 ó 1 ó 2 o cualquiera de esos valores. Y_1 representa la cantidad de altura del agua desde el escalón central a los X_1 minutos. Y_2 representa la cantidad de altura del agua desde el escalón central a los X_2 minutos. Entonces fijémonos que Y_1 depende de X_1 y que Y_2 depende de X_2. Ahora, ΔX nos va a hablar de cambio en el tiempo desde X_1 hasta X_2. Y ΔY nos va a hablar de cambio en la altura desde Y_1 hasta Y_2. Entonces aquí, empecemos con ΔX. ¿Qué es lo que nos representa ΔX?
		E1: Cambio en el tiempo desde X_1 a X_2
		P: Bueno, aquí, para la primera fila…
		E1: ΔX vale 1. Porque de cero a uno hay 1.

		P: Aquí, en la fila 2 para ΔX te dió 1. ¿Por qué?
		E1: Porque de 1 a 2 hay 1. Hay un cambio de 1.
		P: Aquí en la fila 3 de ΔX dices que es 2…
		E1: Porque de 2 a 4 hay 2
		P: ¿2 qué?
		E1: 2 minutos
		P: Bueno. Ahora aquí, ¿qué representa Y_1?
		E1: Representa la altura del agua desde el escalón central a los X_1 minutos.
		P: Ok. Aquí en Y_1 colocaste 3. ¿Por qué?
		E1: Porque le corresponde el X_1 de la tabla que es 1.
		P: ¿Y por qué este 6 en Y_2?
		E1: Porque en 2 minutos hay 6 cm de altura.
		P: Ok. ¿Y por qué a este 2, da este 6 acá?
		E1: Porque a 2 min, 6 cm
		P: ¿Y por qué 12 aquí?
		E1: Porque esa información la saqué de la tabla inicial. Al 12 le corresponde el 4
		P: Y a este 4 le corresponde este 9. ¿De dónde sacaste esta información?
		E1: De….. Hummm. No. Me quedó mal…
		P: Quedó mal. Para este 4 iría 12. Y para este 6, (Cuarta fila, valor para X_2), ¿cuál le corresponde?
		E1: 18
		P: Y para este 6 le colocaste 12. ¿Recuerdas de dónde sacaste este 12?
		E1: No. No recuerdo
		P: Ok. ¿Qué valor iría ahí?
		E1: 18
		P: Listo. Ahora consideremos ΔY. ¿Recuerdas qué es ΔY?
		E1: Es el cambio en la altura de Y_1 a Y_2.
		P: Ok. Miremos aquí (Primera fila, valor en ΔY). ¿Por qué

		tenemos este 3 ahí?
		E1: Porque de 0 a 3 hay 3.
		P: Ok. Y ese valor de 3 en ΔY, ¿qué significa?
		E1: Un cambio de 3 cm en la altura
		P: Y así con los demás. ¿Y aquí para esta ΔY (cuarta fila)?
		E1: Sería 6.
		P: Entonces cambia 6. Y aquí, ¿de 21 a 18? (Quinta fila en valor de ΔY).
		E1: Cambia 3 cm en la altura.
		P: Listo. 3 cm. Y ahora aquí en la gráfica, ¿este punto qué significa?
		E1: Que en un minuto cambia 3 cm
		P: ¿Y este otro punto qué significa?
		E1: Que en cero minutos hay 0 cm de altura del agua.
		P: ¿Este 1 en ΔX, qué significa?
		E1: Un cambio en el tiempo
		P: ¿Y aquí en la gráfica, en qué eje va?
		E1: Aquí
		P: Bien. Así, el 0 y el 1 dónde van, ¿podrías señalarlos por favor?
		E1: Aquí y aquí
		P: ¿Y dónde iría este 3 para ΔY?
		E1: Aquí.
		P: Listo Wendy. Vamos a mirar...vamos a hacer un análisis similar pero con la otra tabla. Aquí vamos a mirar el recipiente 3. ¿Recuerdas dónde está el recipiente 3?
		E1: El que quedaba arriba
		P: Listo. Aquí tenemos la tabla con los datos iniciales. Vamos a mirar. ¿Por qué 1 aquí? (Primera fila valor en ΔX).
		E1: Porque de 0 a 1 hay 1
		P: ¿Y sería 1 qué?
		E1: 1 minuto

		P: De 1 a 2
		E1: 1 minuto
		P: De 2 a 4
		E1: 2 minutos
		P: De 4 a 6
		E1: Hay un cambio de 2 minutos
		P: Listo. Este dato de aquí. Este 7. ¿Por qué 7?
		E1: Porque…
		P: Recuerda, Y_1 es la altura del agua desde el escalón central en X_1 minutos. A este 1 de X_1...
		E1: Le corresponde 7. De aquí, de la tabla. Porque en un minuto, la altura del agua es 7.
		P: ¿Y aquí por qué 9?
		E1: Porque en 2 minutos, la altura del agua es 9.
		P: ¿Y por qué aquí 13?
		E1: Porque a 4 minutos, 13 cm
		P: Ahora miremos $\boldsymbol{\Delta}$X, ¿Qué es…?
		E1: Cambio en los minutos.
		P: ¿Aquí cuánto cambió?
		E1: En el tiempo 2 y en la altura 4
		P: ¿Y en este?
		E1: Ese está mal…
		P: ¿Por qué dices que está mal? Miremos…
		E1: Porque a 4 le corresponde 13
		P: ¿Y entonces el valor para $\boldsymbol{\Delta}$Y?
		E1: De 13 a 17, es 4
		P: Bien, veamos el siguiente (para el recipiente 2). Aquí, ¿Por qué colocaste -5? (En fila 1, valor de Y_1)
		E1: Porque a 0 le corresponde -5 (en la tabla inicial)
		P: Aquí, ¿por qué 3?

			E1: Porque a 2 minutos le corresponde 3 cm de altura
			P: Ok. Y así para los demás
			E1: Sí
			P: Ok. Ahí los datos nos quedaron bien. Ahora veamos el cambio. ¿De -5 a -1?
			Hay 4
			¿De -1 a 3?
			Hay 4
			¿De 3 a 11?
			Hay 8
			P: Listo!
		Manifestación de la razón de cambio	P: Bien Wendy. Vamos a continuar con la fase 2. Bien. Entonces teníamos y sacamos la siguiente información y tú respondiste a la siguiente pregunta. "¿Qué significado en la situación de la lluvia el valor obtenido en ΔY / ΔX?" Recordemos, ¿Qué significa esta ΔY?
			E1: Cambio en los cm del agua.
			P: ¿Y ΔX?
			E1: Cambio en x, los minutos
			P: Ahora veamos, qué resultado nos dió ΔY / ΔX para el primer caso
			E1: 3
			P: Y también aquí 3 y 3. Y aquí en las dos últimas también daba 3, porque los datos estaban equivocados. Bueno, qué significa, explícanos tu respuesta.
			E1: Las X_1 y X_2 nos representa cuánto tiempo pasa, y las Y_1 y Y_2 nos dice cuál es la altura que el agua obtiene al pasar cierto tiempo. Y la ecuación ΔY / ΔX nos muestra el cambio en la altura al pasar el tiempo. O sea, dependiendo de cuánto tiempo pase, aumenta la altura del agua.
			P: Muy bien. Por ejemplo aquí, ¿este 3 de la última columna qué significa?
			E1: Es el cambio. Por cada minuto, aumenta 3 cm el agua.
			P: Bien. Vamos a mirar ahora, la misma pregunta pero para el recipiente 3. Lo mismo, ¿qué significado tiene en la situación de la lluvia, el valor de ΔY / ΔX

		E1: Sería lo mismo. Por cada que aumentan los minutos, aumentan los cm.
		P: Ok. Ahora en esta última columna te dio 2, Pero aquí te dio 4... ¿Este 2, qué significa?
		E1: Lo que cambia. En 1 minuto, aumenta 2 cm.
		P: ¿Y por qué ahí hay 4?
		E1: Porque la tabla está mal.
		P: Bien. Indistintamente de los datos, podríamos seguir aquí colocando datos y vamos a obtener aquí otros números. Si estableces esta relación, ¿siempre me va a dar 2?
		E1: Sí. Siempre. Si cambiara la intensidad de la lluvia, sí cambiaría ese dos.
		P: Listo. Vamos con la otra. Esta es para el recipiente que estaba en el escalón más bajo (el 2). ¿Qué significado tiene en la situación de la lluvia el valor obtenido en ***Δ***Y / ***Δ***X?
		E1: Es igual. Por cada que cambian los minutos, cambian los cm del agua. En este caso, y para este recipiente, 4 cm por minuto.
		P: Bueno, y en general, ¿qué nos indica ***Δ***Y / ***Δ***X?
		E1: Por cierta cantidad de tiempo que cambie, nos va a cambiar cierta cantidad en los cm de altura.
		P: Bueno, entonces aquí terminamos con esta parte.
	Formulación de la hipótesis	P: Bien Wendy. Para este punto tenemos esta tabla (para recipiente 1), y esta otra (procedimiento para calcular la altura a partir de los minutos). Recordemos que en la primera tabla, para un minuto la altura del agua alcanza 3 cm de altura, en 3 min 9 cm y así sucesivamente. En la segunda tabla tenemos los minutos y después encontrar un procedimiento para calcular la altura. Empecemos aquí, ¿de dónde sacaste estos datos? (columna de altura del agua en recipiente 1)
		E1: Porque están en la tabla inicial.
		P: Bueno, y ahora el procedimiento para calcular la altura a partir de los minutos. Tú colocaste ***Δ***Y / ***Δ***X en todas las filas y además colocaste estos valores y los sumas. Explícanos un poco esto, por favor.
		E1: Por ejemplo, en 4 minutos había 12 cm de altura. Esta información nos la dieron en el primer punto.
		P: ¿Y qué haces con esos dos valores?
		E1: Divido 12 entre 4… y me da 3. Y de ahí me voy fijando

		que por un minuto aumenta tres cm la altura. Entonces en 1 min hay 3 cm. A los 2 minutos 6 cm y así voy sumando de a tres.
		P: O sea que este procedimiento que usas aquí es para calcular el valor de abajo (el siguiente).
		E1: Sí.
		P: ¿Qué es lo que significa ΔY / ΔX?
		E1: Un cambio en la altura del agua a medida que pasa el tiempo.
		P: Bien, pero miremos acá. Tú coges estos dos valores (3 y 3) y los sumas.
		E1: Sí.
		P: ¿Y esto (señalando ΔY / ΔX) es una suma?
		E1: No
		P: Veamos aquí. “Justifica tu procedimiento utilizado: ΔY / ΔX = a medida que aumenta el tiempo, aumenta el agua”. ¿Cómo justificas ese procedimiento?
		E1: Porque a medida que aumenta el tiempo, aumenta el agua
		P: Por ejemplo, a los 8 minutos, ¿cuál va a ser la altura del agua desde el escalón central en el recipiente 1?
		E1: 24. Si en el minuto 7 hay 21, para el siguiente se le suma 3 (21 + 3)
		P: ¿Y si fuera 9?
		E1: 27, que es 24 + 3
		P: O sea que siempre le sumas tres. ¿Podrías decirme entonces esta estrategia?
		E1: Para saber el cambio en cm, se necesita saber el número anterior y se le suma 3.
		P: Ok. Necesitas el número anterior. Por ejemplo, si nos dan el número 24 y nos piden hallar la altura.
		E1: Necesitamos el número anterior, el 23, la altura a los 23 minutos.
		P: ¿Podrías pensar en otra estrategia?
		E1: No
		P: Veamos aquí. Para ΔY / ΔX podríamos tener 3/1, 6/2, 12/4 (sacando los datos de la tabla inicial). En todos los casos,

		¿cuánto daría?
		E1: 3
		P: Bien. ¿Y qué significa ese 3?
		E1: Que sube 3 cm por cada minuto
		P: Siempre nos da tres. ¿Será que este 3 nos facilita encontrar un procedimiento?
		E1: (Estudiante no responde nada concreto ni audible)
		P: Por ejemplo, en 2 minutos, ¿cuánta agua habrá?
		E1: 6 cm
		P: ¿Por qué?
		E1: Porque en 1 cm hay 3 y 3 x 2 =6
		P: Entonces aquí necesitamos 3x(2). ¿Y en tres?
		E1: Ahí es 9. Porque 3 x 3 = 9
		P: Entonces aquí es 3x(3). Bien. ¿Este (primer) 3 qué significa?
		E1: Lo que cambia por minuto
		P: ¿Y este otro 3?
		E1: Los minutos
		P: Ok. Explícame la respuesta.
		E1: Si en un minuto cambia tres y han pasado 3 minutos, se multiplica. Por ejemplo, si tengo 3 minutos y necesito saber cuánta agua cae en 3 minutos y sé que en 1 minuto cae 3, entonces multiplico 3 x 3.
		P: Bien, ¿y en 4 minutos?
		E1: Sería 3 x 4
		P: Aquí queda 3x(4). ¿Este 3 indica...?
		E1: Lo que cambia por cada minuto
		P: ¿Y este 4?
		E1: Los minutos. Y multiplico.
		P: ¿Y por qué siempre hay una multiplicación ahí?
		E1: Para saber cuánta agua cayó, si en 1 minuto caen 3 cm.

		P: Entonces si en un minuto caen 3, en 4…
		E1: 3x(4)=12
		P: Listo. ¿Y para este 5?
		E1: 3x(5)
		P: ¿Y para estos?
		E1: 3x(6) y 3x(7)
		P: Entonces aquí, ¿Qué multiplicas?
		E1: Lo que cae en 1 minuto y la cantidad de minutos que pasan
		P: ¿Y será que podemos averiguar en 24 minutos cuál será la altura del agua?
		E1: 3x(24)
		P: Bien. ¿Necesitamos con esta estrategia saber el valor anterior?
		E1: No.
		P: Listo. Vamos con la siguiente tabla para el recipiente 3. ¿Recuerdas dónde estaba el recipiente 3?
		E1: En el escalón superior
		P: Bueno. y aquí vamos a mirar lo mismo. ¿Será que podemos encontrar una estrategia? Tú escribiste lo siguiente: aquí 0 + 5 = 5; 5 + 2 = 7; 7 + 2 = 9… ¿Cuál fue la estrategia acá?
		E1: Por cada minuto aumenta 2 cm
		P: Aquí coges el valor anterior…
		E1: Y le sumo 2
		P: Entonces ¿cuál sería la estrategia general tuya aplicada acá?
		E1: Necesito el anterior para saber el aumento
		P: Y eso es lo que escribiste aquí en la estrategia: “se le suman 2 ya que son los cm que aumenta el tiempo”. Vale. ¿Y si fueran 25 minutos?
		E1: Necesito el del 24 y así aumentarle 2
		P: ¿Podríamos encontrar una estrategia que no requiera saber el valor anterior?
		E1: No.

		P: Pensemos un poquito. En 0 minutos ¿por qué hay aquí 5?
		E1: Por la altura del escalón
		P: En 1, hay 7. ¿Por qué hay 7?
		E1: Porque aumentaron 2 cm. y hay que sumarle los 5 del escalón
		P: ¿Por qué aquí para el valor de 2 es 9?
		E1: 4 que han caído de agua más 5 cm del escalón
		P: ¿Pero ese 4 qué significa?
		E1: Los cm de agua que han caído en 2 minutos
		P: Aquí (para el valor de 11), ¿cómo sería?
		E1: 6 + 5 del escalón
		P: ¿y este 6 qué significa?
		E1: La cantidad de agua que ha caído en tres minutos
		P: Bien. ¿Y aquí cómo sería? (para el valor de 13)
		E1: 8 + 5. El ocho son los cm de agua que han caído en 4 minutos
		P: ¿Qué encontramos similar en esta estrategia?
		E1: Los 5 cm del escalón
		P: Y ahora busquemos una estrategia para encontrar estos otros números
		E1: En la primera sería 2x(1). En la segunda 2x(2), en la tercera 2x(3)
		P: ¿Y ese 2 qué significa?
		E1: Son los cm de agua que caen en 1 minuto.
		P: Entonces este 2 siempre será ΔY / ΔX y nos indica cuánto aumenta la altura del agua por cada minuto que pasa. Miremos acá otra vez en 2x(3). ¿Qué significa el 3?
		E1: El 3 son los minutos que queremos saber en cuánto ha aumentado el agua. En 3 minutos cuánto subió el agua.
		P: ¿Y por qué multiplicamos por 2?
		E1: Porque necesito saber si en 1 minuto sube 2 cm, entonces para 3 min multiplico
		P: Bien, ¿Para 25 cómo sería?

		E1: 2x(25)+5
		P: Listo. ¿Y si fueran 100 minutos?
		E1: 2x(100)+5
		P: ¿Y por qué 2 x 100?
		E1: 2 porque es lo que aumenta el agua en 1 minuto. Y 100 son los minutos en los que necesitamos saber en cuánto aumentó el agua. Más la altura del escalón.
		P: Bien Wendy. Vamos a mirar la misma tabla, pero ahora para el recipiente 2. ¿Recuerdas dónde estaba el recipiente 2?
		E1: En el escalón más bajo.
		P: Listo. ¿Por qué pusiste aquí -5?
		E1: Porque a cero le quité los 5 del escalón
		P: ¿Por qué aquí -1?
		E1: Porque están ahí en la tabla.
		P: Bueno, lo que vamos a averiguar es la altura del agua desde el escalón central. Bueno, aquí yo veo que siempre le sumas 4. ¿Por qué 4?
		E1: Porque (en este recipiente 2), en 1 minuto aumenta 4 cm
		P: Y aquí, ¿Por qué -5?
		E1: -5 del escalón
		P: Ah ya veo. Aquí la suma que da es el valor siguiente de abajo.
		E1: Sí.
		P: Pero no aplica lo mismo para todos los números...Faltó la estrategia para encontrar el 3. Bueno, aquí escribiste: “Se le suma 4 de los cm que aumenta por cada minuto” Explícame ese 4…
		E1: Le sumamos 4 a la información que esté en el minuto anterior.
		P: ¿Y para 38 minutos?
		E1: Necesitaríamos el del 37
		P: ¿Podría haber una estrategia que me permita calcular la altura del agua desde el escalón central en el recipiente 2 sin necesidad de utilizar el valor anterior?
		E1: Sí. Para el 2. Multiplicaríamos 4x(2).

		P: ¿Por qué?
		E1: Porque 4 es lo que aumenta el agua cada minuto y 2 porque han pasado 2 minutos
		P: Y la multiplicación…
		E1: Da 8 y le quitaríamos los 5 del escalón
		P: Entonces nos queda: 4x(2)-5. ¿Y para el valor de 3 cómo sería?
		E1: 4x(3)-5
		P: Y ¿por qué 4x3?
		E1: 4 es lo que aumenta por minuto y 3 son los minutos que han pasado. A eso se le resta lo del escalón.
		P: ¿Y para 5 cómo sería?
		E1: 4x(5)-5
		P: Bueno, y ahora sí, ¿para 38 cómo sería?
		E1: 4x(38)-5
		P: Listo. Y bueno, ahora la estrategia que propones ¿cómo sería?
		E1: Se multiplica el 4 a los minutos que haya pasado y a ese resultado se le resta 5 cm del escalón para saber finalmente cuántos cm aumenta el agua.
		P: ¿Y por qué sirve esa estrategia?
		E1: Porque en un minuto aumenta 4 cm. Si necesito saber el de otros, lo multiplico.

Fase	Paso	Lo que se dice
Resolución	Sustituye el lenguaje natural de las hipótesis por un lenguaje matemático	P: Listo Wendy. Vamos con la fase número 3. Vamos a mirar las siguientes tablas para cada uno de los recipientes. Aquí tenemos para el recipiente 1 la tabla inicial, donde en 0 min hay 0 cm de agua, en 1 min 3 cm de altura del agua, en 2 min 6 cm de altura del agua y así sucesivamente. ¿Dónde es que está el recipiente 1?
		E1: En el escalón central
		P: Vale. Y nos habías escrito esta información que ya la habíamos analizado anteriormente y ahora vamos a mirar esto. ¿Cuántos valores posibles hay para el tiempo? Tú escribiste: “si hablan en minutos, es infinito”. ¿Por qué?
		E1: Porque pueden haber 60 minutos, 120 minutos, 61 minutos.
		P: ¿Se podría en horas?

		E1: Sí
		P: ¿Y si fueran días?
		E1: También se podría. El tiempo sería infinito
		P: ¿Entonces qué responderías aquí? ¿Cuántos valores posibles hay para el tiempo?
		E1: Infinitos.
		P: Ok. ¿Cómo representar todos los valores posibles?
		E1: Con una letra
		P: Ok. ¿Cuántos valores posibles hay para la altura?
		E1: Infinitos. También depende de la altura del recipiente.
		P: De cero a 20 hay infinitas medidas. ¿Y si el recipiente fuera más alto?
		E1: También sería infinito
		P: Bueno. ¿Y cómo representamos todos esos valores posibles para la altura?
		E1: Con una letra
		P: ¿La misma letra que anteriormente?
		E1: No. Otra.
		P: Aquí nos justificaste las respuestas: “El tiempo que puede pasar mientras llueve es infinito, ya que no nos da un límite” Y aquí: “Todos los valores posibles se determinan con la altura que tenga el recipiente”. Bueno, quiero que miremos esta otra pregunta detalladamente. “Escribe, considerando la representación de todos los valores posibles, un procedimiento general que permita calcular a partir de los minutos, la altura del agua en R1 desde el escalón central”
		E1: n+3=n, donde n es la altura del agua.
		P: ¿Entonces a la altura del agua le sumas 3 y te da la misma altura?
		E1: Ay no!
		P: Es decir, tengo una altura de agua específica, ¿le sumo 3 y me va a dar la misma altura del agua?
		E1: No. Me va a dar la altura del agua más tres.
		P: Entonces no es lo mismo. ¿Esta n y esta n son lo mismo?
		E1: No.
		P: ¿Y cómo haríamos para diferenciar esta de esta?
		E1: Cambiarle la letra.
		P: Vale. Pero pensemos la estrategia. ¿Cuántos minutos posibles hay?

		E1: Infinitos
		P: ¿Cómo podemos representar toda esa cantidad?
		E1: Con una letra. La n.
		P: ¿Cuántos centímetros posibles hay?
		E1: Infinitos.
		P: ¿Cómo podemos representar esa cantidad?
		E1: Con una letra. La m
		P: Bien. ¿Cómo calcular cuántos cm hay a partir de la cantidad de minutos?
		E1: 3x(n)
		P: Bueno. ¿Y qué obtenemos?
		E1: m
		P: Es decir que m=3n. Y esa sería nuestra primera estrategia. Bien. Vamos a mirar lo mismo pero para las otras tablas. ¿Esta para qué recipiente es?
		E1: Para el recipiente 3
		P: Listos. Aquí. ¿Cuántos valores posibles hay para el tiempo?
		E1: Infinitos
		P: ¿Cómo representar todos esos valores posibles?
		E1: Con una letra o un número
		P: ¿Todos los valores posibles los podría representar con un número?
		E1: No.
		P: ¿Entonces cómo sería?
		E1: Con letra
		P: Bien. ¿Cuántos valores posibles hay para la altura?
		E1: Depende de la altura del recipiente
		P: ¿Seguirías con esa misma respuesta?
		E1: No. Son infinitos
		P: Si por ejemplo la altura fuera de 8 cm
		E1: También habría infinitos valores posibles
		P: Bien. ¿Cómo representar todos esos valores posibles?

		E1: Con una letra
		P: Bien. Aquí en procedimiento. Escribiste n + 2. Donde n representa la altura. ¿Podríamos pensar en otra estrategia?
		E1: Sí. n representa los minutos y m representa los centímetros. Quedaría 2 x (n) = m
		P: ¿Esa sería tu estrategia?
		E1: Sí.
		P: Qué representa el 2 y qué representa la n?
		E1: El 2 es lo que aumenta en cm por cada minuto. La n la cantidad de tiempo
		P: Y con eso me va a dar la altura del agua desde el escalón central
		E1: Sí
		P: ¿Y esto para qué recipiente es?
		E1: Para el recipiente tres. Pero le sumo 5
		P: Entonces para el recipiente 3 sería m = 2n+5
		E1: Sí. 5 cm del escalón.
		P: Ok. Bien. Vamos con la siguiente tabla. Ahora con el recipiente 2. ¿Recuerdas dónde está el recipiente 2?
		E1: En el escalón de más abajo.
		P: Aquí escribiste como procedimiento: "Se le suma 4 de los centímetros que aumenta por cada minuto". Miremos la estrategia. Para el minuto 1, ¿cómo sería?
		E1: 4x(1)
		P: Para 2, ¿cómo sería?
		E1: 4x(2) … y -5
		P: ¿Y por qué -5?
		E1: Por lo del escalón
		P: Entonces a todos los valores -5
		E1: Sí
		P: Ahora, ¿una (estrategia) general?
		E1: 4 x (n) – 5
		P: ¿Y eso qué nos permite obtener?
		E1: La altura del agua en cualquier momento.

	P: Bien.

Fase	Paso	Lo que se dice
Validación	El modelo junto con las hipótesis analizadas en confrontación con los datos empíricos	P: Vamos a mirar si esas estrategias nos sirven o no. Para el recipiente 1, se pregunta: “Verifica que el procedimiento sirve considerando la situación inicial”. ¿Cuál fue tu respuesta?
		E1: n + 3 = n
		P: ¿Sirve o no sirve?
		E1: No sirve.
		P: ¿Por qué no sirve?
		E1: Porque está repetida la n
		P: Pero luego nos ha salido una nueva (estrategia): m=3n. ¿Esta nos sirve?
		E1: Sí.
		P: ¿Cómo podríamos verificar si nos sirve o no?
		E1: Cogiendo por ejemplo el valor de 2 tendríamos m=3x2. Así m=6.
		P: ¿Y cómo sabes que así es?
		E1: Porque coincide el valor con la tabla. En 1 minuto aumenta 3 cm, en 2 min aumenta 6 cm.
		P: Bien. ¿Y sólo sirve con 2?
		E1: No. Con cualquier valor.
		P: ¿Podríamos ver otro ejemplo?
		E1: Sí. Por ejemplo con 4 minutos. Sería m=4x3. m=12
		P: Ok. ¿Para 7?
		E1: Sería m=7x3. Así m=21
		P: Así que hemos probado la estrategia. Vamos con la siguiente. Esta ya es para el recipiente 3. Ya nos dimos cuenta que esta estrategia (la inicial escrita por la estudiante) ‘n + 2’ no nos sirve. ¿Cuál estrategia nueva formulaste?
		E1: m = 2 x n + 5
		P: ¿Será que sirve o no sirve?
		E1: Sirve porque por ejemplo, en dos minutos sería m=2x2+5. Así m=9
		P: Bien. ¿Y con otro valor?

		E1: Con 4 minutos sería: m=2x4+5. Así m= 13
		P: ¿Serviría para todos los valores?
		E1: Sí
		P: Bien. Ahora vamos con el recipiente 2. Veamos si nos sirve m=4xn-5
		E1: Con 2 sería: m=4x2-5. Así m=3. Con 4 sería m=4x4-5. Así m=11
		P: ¿Y es que solo sirve con 2 y con 4?
		E1: No. Sirve con cualquiera.
		P: Hazlo con el 6
		E1: Sería m=4x6-5. Así m=19
		P: Listo Wendy. Hemos acabado. Muchísimas gracias.
		E1: Sonríe.