

UNA APROXIMACIÓN A LA EQUIVALENCIA DE FRACCIONARIOS A PARTIR DE LA
COMPOSICIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS NATURALES

JOHANN ALEXANDER CHIZNER RAMOS
ROSA EDELMIRA LAMPREA ORTIZ
MARIA ALEJANDRA URREGO SALAZAR



PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C. 2017

UNA APROXIMACIÓN A LA EQUIVALENCIA DE FRACCIONARIOS A PARTIR DE LA
COMPOSICIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS NATURALES

Autores:

JOHANN ALEXANDER CHIZNER RAMOS
ROSA EDELMIRA LAMPREA ORTIZ
MARIA ALEJANDRA URREGO SALAZAR

Trabajo de Grado presentado como requisito
para optar al título de Magister en Educación

Dirigida por:

JORGE CASTAÑO GARCÍA PhD



PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C. 2017

NOTA DE ADVERTENCIA

“La universidad no se hace responsable por los conceptos emitidos por sus alumnos en sus trabajos de tesis. Sólo velará porque no se publique nada contrario al dogma y a la moral católica y porque las tesis no contengan ataques personales contra persona alguna, antes bien se vean en ellas el anhelo de buscar la verdad y la justicia.”

Artículo 23, resolución No 13 del 6 de Julio de 1946,
por la cual se reglamenta lo concerniente a Tesis y Exámenes de Grado en la Pontificia
Universidad Javeriana.

AGRADECIMIENTOS

Te doy gracias Dios por guiar cada uno de mis pasos y en especial, por este maravilloso regalo.

A mi esposa Alejandra e hijos Jürgen y Maleja, quienes son el motor de mi vida, por su amor, comprensión y fortaleza. A mis padres, hermanos, sobrinos, cuñadas, suegra y familiares por su cariño y apoyo en momentos de debilidad. Muchas gracias.

Johann Alexander Chizner Ramos

A Dios quien nos da la vida, el conocimiento y la fuerza para lograr culminar esta maestría. A mi familia. Mi madre Rosabel, mi esposo Ricardo y mis hijos Cristian y Sebastián, por ser quienes siempre estuvieron a mi lado apoyándome incondicionalmente.

Rosa Edelmira Lamprea Ortiz

En primer lugar, quiero agradecer a Dios por haberme dado una segunda oportunidad de vida, a mi hijo Juan Felipe Urrego por su apoyo incondicional y su constante motivación durante toda la maestría. En segundo lugar, agradecer a mis compañeros por su dedicación y esfuerzos para salir adelante en este proceso. Y, por último, agradecer a todos los docentes. Dios los bendiga siempre.

María Alejandra Urrego Salazar

De una manera muy especial, agradecemos a nuestro tutor Jorge Castaño García, gracias a su apoyo y guía podemos ver realizado este sueño. En nuestro corazón solo tenemos gratitud y admiración hacia usted. Asimismo, a nuestra profesora Amparo Forero quien siempre tuvo una palabra de ánimo y apoyo hacia nosotros. Y como olvidarnos de nuestros estudiantes del curso 601 del colegio Jairo Aníbal Niño IED, su participación fue maravillosa. ¡Lo logramos!

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS	8
ÍNDICE DE GRÁFICOS	9
ÍNDICE DE TABLAS	10
ÍNDICE DE FOTOGRAFÍAS	11
RESUMEN.....	13
ABSTRACT.....	14
INTRODUCCIÓN	15
1. PROBLEMA	17
1.1 Antecedentes.....	17
1.2 Descripción del problema.....	23
1.3 Objetivos.....	30
1.3.1 Objetivo general.....	30
1.3.2 Objetivos específicos	30
2. MARCO TEORICO.....	31
2.1 Cuestiones preliminares.....	31
2.1.1 Transposición didáctica	32
2.1.2 La teoría de los campos conceptuales.....	33
2.1.3 La conversión de representaciones y el cambio de registro.....	34
2.1.4 El objeto matemático y su significado personal e institucional.....	36

2.2 Las fracciones como objeto de saber	37
2.2.1 La construcción de los números racionales	37
2.3 Las fracciones como objeto a enseñar	39
2.3.1 Las fracciones bajo la lupa de las antigua civilizaciones.....	39
2.3.2 Formas de interpretar el concepto de fracción.....	42
2.4 Las fracciones como objeto de enseñanza.....	44
2.4.1 Estados y operadores	44
2.4.2 Máquinas operadoras	46
2.4.3 Máquinas ampliadoras y reductoras	47
3. DISEÑO METODOLÓGICO	49
3.1 Metodología.....	49
3.2. Población.....	52
3.3. Criterios de selección de los tres casos de estudiado	53
3.4 Descripción global del procedimiento.....	53
3.4.1. Instrumentos de recolección de la información.	54
3.4.2. Prueba de entrada.....	54
3.4.3. Secuencia didáctica.....	57
4. ANÁLISIS, SISTEMATIZACIÓN E INTERPRETACIÓN DE LA INFORMACIÓN	63
4.1. Análisis prueba de entrada.....	63

4.2. Análisis de algunas tareas de composición de operadores multiplicativos y de equivalencia.....	81
4.2.1 Análisis de algunas tareas de composición de operadores multiplicativos	82
4.2.2 Análisis de algunas tareas de equivalencia de fracciones.....	89
4.2.3 Análisis de situaciones contextuales que involucran el concepto de equivalencia de fraccionarios	93
5. CONCLUSIONES.....	98
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	100
ANEXOS.....	105

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Del saber académico al saber aprendido.....	32
Figura 2: Referentes dinámicos para operadores multiplicativos naturales y fraccionarios	34
Figura 3: Actividad cognitiva de conversión	35
Figura 4: Algunas representaciones semióticas del número fraccionario	36
Figura 5: Representación babilonia de fracción.....	40
Figura 6: Representación egipcia de fracción	40
Figura 7: Definición 5 del libro V de los Elementos de Euclides	41
Figura 8: Proposición 16 del libro VI de los Elementos de Euclides.....	42
Figura 9: Cadena sucesiva de operaciones en cualquier orden	45
Figura 10:Combinación de operadores	46
Figura 11: Representación de las máquinas de Dienes	46
Figura 12: Obtención de máquinas equivalentes	48
Figura 13: Descripción global del procedimiento	54
Figura 14. Sección actívate secuencia didáctica	57
Figura 15. Secciones infórmate y práctica de la secuencia didáctica.....	58

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Porcentaje de rendimiento de la pregunta 11	78
Gráfico 2: Porcentaje de rendimiento pregunta 12	81

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Instrumentos de recolección de información	54
Tabla 2. Estructura general de la prueba de entrada	55
Tabla 3. Ejemplo cuadro de categorías para la prueba de entrada	56
Tabla 4. Estructura general de la secuencia didáctica.....	59
Tabla 5. Entrevistas semiestructuradas	61
Tabla 6: Estructura de una entrevista semiestructurada	61
Tabla 7. Rendimiento en situaciones de operadores multiplicativos naturales.....	63
Tabla 8. Análisis cuantitativo resultados prueba de entrada. Operador multiplicativo natural de la forma $a \times$	64
Tabla 9. Análisis cuantitativo resultados prueba de entrada. Operador multiplicativo natural de la forma $\div b$ y operador fracción de la forma $1/b$	65
Tabla 10. Análisis cuantitativo prueba de entrada. Sucesión de operadores multiplicativos naturales	70
Tabla 11. Rendimiento por pregunta prueba de entrada. Categoría: Composición de operadores multiplicativos naturales.....	74
Tabla 12. Análisis de respuesta pregunta 11 de la prueba de entrada	76
Tabla 13. Análisis de respuesta pregunta 12 de la prueba de entrada.....	79

ÍNDICE DE FOTOGRAFÍAS

Fotografía 1. Respuestas a situaciones de operadores multiplicativos, tipo a	67
Fotografía 2. Respuestas a situaciones de operadores multiplicativos, tipo b	68
Fotografía 3. Respuestas a situaciones de operadores multiplicativos, tipo c	69
Fotografía 4. Respuestas a situaciones de operadores multiplicativos sucesivos, tipo a	72
Fotografía 5. Respuestas a situaciones de operadores multiplicativos sucesivos, tipo b	72
Fotografía 6. Respuestas a situaciones de operadores multiplicativos sucesivos, tipo c	73
Fotografía 7. Respuesta situación 1 de composición de operadores multiplicativos, tipo a	82
Fotografía 8. Respuestas situación 1 de composición de operadores multiplicativos, tipo b ..	83
Fotografía 9. Respuesta situación 1 de composición de operadores multiplicativos, tipo c	84
Fotografía 10. Respuesta situación 2 de composición de operadores multiplicativos, tipo a ..	85
Fotografía 11. Respuesta situación 2 de composición de operadores multiplicativos, tipo b ..	85
Fotografía 12. Respuesta situación 2 de composición de operadores multiplicativos, tipo c ..	86
Fotografía 13. Respuesta situación 3 de composición de operadores multiplicativos, tipo a ..	86
Fotografía 14. Respuestas situación 3 de composición de operadores multiplicativos, tipo b	87
Fotografía 15. Respuesta situación 3 de composición de operadores multiplicativos, tipo c ..	87
Fotografía 16. Respuesta situación 3 de composición de operadores multiplicativos, tipo d ..	88
Fotografía 17. Respuestas situaciones de equivalencia de fraccionarios, tipo a	89
Fotografía 18. Respuestas situaciones de equivalencia de fraccionarios, tipo b	90
Fotografía 19. Respuestas situaciones de equivalencia de fraccionarios, tipo c	90
Fotografía 20. Respuestas situaciones de equivalencia de fraccionarios, tipo d	91
Fotografía 21. Método para respuestas tipo a	91
Fotografía 22. Método para respuestas tipo b	91

Fotografía 23. Método para respuestas tipo c	92
Fotografía 24. Respuesta situación contextual 6 de equivalencia de fraccionarios, tipo a	94
Fotografía 25. Respuestas situación contextual 6 de equivalencia de fraccionarios, tipo b	94
Fotografía 26. Respuesta situación contextual 6 de equivalencia de fraccionarios, tipo c	95
Fotografía 27. Respuesta situación contextual 9 de equivalencia de fraccionarios, tipo a	95
Fotografía 28. Respuestas situación contextual 9 de equivalencia de fraccionarios, tipo b	96
Fotografía 29. Respuestas situación contextual 10 de equivalencia de fraccionarios, tipo a...	97

RESUMEN

En este trabajo de investigación se describe la forma como los estudiantes de sexto grado componen operadores multiplicativos naturales de la forma $a \times$ y $\div b$ (siendo alguno de los números, a o b , múltiplo del otro) y cómo relacionan estos hechos con la comprensión de la noción de equivalencia entre números fraccionarios que son reductibles a la forma $\frac{1}{b}$.

Se diseñó una secuencia didáctica, que consta de cinco sesiones, basada en tres categorías: operadores multiplicativos naturales, composición de operadores multiplicativos naturales y equivalencia de fraccionarios. En el diseño la propuesta planteada, se presenta, a los estudiantes, un referente dinámico para el operador multiplicativo natural y fraccionario, representado a través máquinas ampliadora o reductoras.

Desde allí, se realiza un estudio de caso a tres estudiantes clasificados por niveles de desempeño, con el propósito de evidenciar los cambios, avances u obstáculos que se presenten en la construcción de las nociones abordadas.

Palabras claves: operadores multiplicativos, composición de operadores, equivalencia, fracción.

ABSTRACT

This research describes how the sixth-grade students make up natural multiplicative operators in the follow form $a \times$ and $\div b$ (being one of the numbers, a or b , multiple of the other) in addition to relating these facts with the understanding of the notion of equivalence between fractional numbers that are reducible to the form $\frac{1}{b}$.

To archive this, it was necessary to develop a didactic sequence, in which three categories were highlighted: natural multiplicative operators, composition of natural multiplicative operators and equivalent fractions. During the execution of the proposal, students were always presented with a dynamic reference for the natural and fractional multiplicative operator, representing this through amplifying or reducing machines.

In the different sections, a case study was carried out to three students classified according to their level of performance, in order to identify the changes, advances or obstacles that may arise during the construction of the topics covered.

Key words: multiplicative operators, operator composition, equivalence, fraction.

INTRODUCCIÓN

Durante varios años, se ha podido identificar y reconocer por la comunidad educativa nacional e internacional que las fracciones son uno de los contenidos del área de las matemáticas que presenta mayor dificultad tanto para su enseñanza (por parte del docente) como para su aprendizaje (por parte del estudiante), debido a su grado de complejidad. En nuestro país, este contenido, hace parte ineludible de la estructura de las pruebas SABER, realizadas para los grados 3°, 5°, 9° y 11°, en donde, se abordan y evalúan todos los temas relacionados con las fracciones y sus posibles aplicaciones en diferentes contextos.

A través de la presente investigación, anhelamos, primero, concordar con algunos objetivos perseguidos por el Ministerio de Educación Nacional, en correspondencia con los Estándares Básicos de Competencias (EBC) en Matemáticas, además, de “construir rutas de enseñanza que promuevan la consecución de aprendizajes”(Ministerio de Educación Nacional, 2016, p.6). En segundo lugar, indagar “las maneras como el sujeto se representa mentalmente las situaciones y problemas matemáticos relacionados con los diferentes sistemas conceptuales y las representaciones semióticas utilizadas para comunicarnos”(Secretaría de Educación Distrital, 2007, p.89). Finalmente, nos motiva presentar a los estudiantes, a través de una secuencia didáctica, una aproximación a la noción de equivalencia de fraccionarios a partir de la composición de operadores multiplicativos naturales, tarea que parece estar pendiente de ser abordada por los docentes de matemáticas.

Por lo anterior, se estructuraron cinco capítulos para exponer los diferentes elementos que componen este trabajo.

En el primer capítulo se presenta el planteamiento del problema, en el cual se exponen los antecedentes, la descripción del problema, la pregunta y los objetivos propuestos en la investigación.

En el segundo capítulo, se encuentran los referentes teóricos de la investigación, donde se destacan los conceptos de transposición didáctica, la conversión de las representaciones y el cambio de registro, la teoría de los campos conceptuales y el significado personal e institucional del objeto matemático, además, se abordan las fracciones como objeto de saber, objeto a enseñar y objeto de enseñanza.

En el tercer capítulo, se expone la metodología de la investigación, aquí se indica la población, los instrumentos utilizados, las fases del proceso y los procedimientos realizados en cada una de las actividades planteadas.

El cuarto capítulo contiene el análisis de los resultados obtenidos durante cada una de las fases planteadas y las tareas planificadas. Finalmente, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones de la investigación.

1. PROBLEMA

1.1 Antecedentes

No es un secreto que el proceso de enseñanza y aprendizaje de las fracciones es un reto no superado por los docentes y estudiantes, respectivamente, y que, dentro del mismo, sobresalen varias dificultades. A lo largo de los últimos años, se han proporcionado distintas y variadas opiniones e investigaciones al respecto, algunas de ellas, quizás, apuntando en la misma dirección. Por esta razón, ha sido exacto indagar acerca de los diferentes estudios generales acerca de las fracciones y aquellos específicos, en los cuales se aborda el significado de fracción como operador y la noción de equivalencia de fraccionarios; con el propósito de vislumbrar y precisar el punto de partida de este trabajo.

Centrándonos en los estudios generales acerca de las fracciones tenemos los siguientes trabajos:

- Fandiño (2009) en su obra “Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos”, presenta aspectos conceptuales, históricos, didácticos y epistemológicos de las fracciones. Además, muestra un preciso inventario acerca de las formas de entender el concepto de fracción y las diversas dificultades en el aprendizaje de las fracciones vistas desde los errores típicos de los estudiantes y desde la didáctica. Cabe resaltar la importancia de su obra al señalar 14 significados diferentes acerca de la noción de fracción, entre los cuales se destaca la noción fracción como operador, señalando que este es uno de los significados más usados en la escuela.

- Llinares & Sánchez (1988), en su libro “Fracciones. La relación parte-todo” muestra un panorama acerca de la enseñanza de las fracciones y los diferentes procesos de aprendizaje. A

pesar de que esta obra se centra en la interpretación de la fracción como una relación parte-todo, dedica una sección especial al análisis de las fracciones y los operadores, en la cual sugiere la idea de equivalencia desde dos puntos de análisis, según **los operadores**, en donde, operadores fraccionarios diferentes al actuar sobre el mismo estado inicial produce un mismo estado final y, según **los estados**, en el cual, un mismo operador al actuar sobre estados iniciales diferentes, produce la misma transformación. Cabe mencionar que, para efectos de esta investigación, la idea de equivalencia de estados no es posible de ser considerada, pues según los autores, introducen la idea de proporción.

- Obando (2003) en su estudio “La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo”, presenta algunos aspectos relativos a los procesos de enseñanza y aprendizaje de los números racionales a partir del significado de relación parte-todo, en estudiantes de los grados 4°, 5° y 6°. Para el autor resulta de gran importancia el poder recuperar aquellos aspectos relacionados con la medida, el tipo de magnitud y de unidad, además de las relaciones de orden, equivalencia y operación aditiva de los números racionales. No obstante, señala que desde el punto de vista de las fracciones como relación parte-todo, se evidencia cierta debilidad para conceptualizar aquellos aspectos relativos a la estructura multiplicativa.

- Arteta (2012) en la obra “los fraccionarios en primaria” recoge los escritos de los maestros y maestras, que participaron en la fase piloto de un proyecto de mejoramiento en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en escuela de Barranquilla, Colombia. En este trabajo, entre otros aspectos, se presenta cinco talleres lúdicos para trabajar con material manipulativo cinco significados de fracción, entre los cuales se encuentra el de operador. El autor resalta la

importancia del estudio en términos de procesos de fortalecimiento didáctico a docentes, diseño de actividades específicas relacionadas con la interpretación de fraccionarios y construcción de propuestas innovadoras en el aula.

Mancera (1992) respecto a los diferentes significados que se pueden dar a la idea de fraccionario destaca los siguientes estudios:

- Kieren (Kieren, 1980) quien señala que, respecto a la idea personal de número racional, la existencia de cinco subconstructos (parte-todo, cocientes, medidas, razones, operadores) desde los cuales se fundamenta este constructo (número racional), siendo estas interpretaciones la base para la construcción de estructuras cognitivas y de enseñanza.
- Behr, Lesh, Post & Silver (1983, citado por Mancera, 1992) realizan una redefinición de las categorías de Kieren, ellos mencionan la existencia de siete subconstructos, entre los cuales se encuentra el de operador, definiendo como un transformador.
- Ohlsson (1988, citado por Mancera, 1992) presenta cuatro categorías en las cuales se agrupan diversos significados. Para el autor, la fracción como un operador se encuentra dentro de la categoría de función compuesta y sólo relaciona la interpretación como operador multiplicativo.
- En la misma línea, Barón (2015) en su trabajo “Objeto virtual de aprendizaje para la enseñanza de las fracciones a partir de sus significados” aborda el diseño un objeto virtual de aprendizaje para comprender los significados de la fracción, sus representaciones e interpretaciones. A modo de conclusión y respecto al concepto de fracción, Barón (2010) determinó que los estudiantes no reconocen que un fraccionario está definido por una pareja

ordenada de números naturales que se puede operar de manera independiente, sino que, lo consideran como un solo número. Además, señala que, ajustado a los estándares básicos de competencias en matemáticas, se espera que en grado sexto los estudiantes logren reconocer los números racionales positivos; sin embargo, no contemplan su comprensión como un sistema numérico.

Ahora, respecto a los estudios específicos relacionado al significado de fracción como operador, tenemos:

- Dienes (1972) en su obra “Fracciones”, proporciona un preciso desarrollo de la enseñanza de las fracciones a partir de los estados y operadores, introduciendo las nociones estados y operadores fraccionarios y, las fracciones equivalentes. Debido a la importancia de esta obra en esta investigación, será posteriormente abordada con mayor profundidad.

- Vasco (1994) en su artículo “Archipiélago fraccionario” considera que los diferentes conceptos acerca del número racional se pueden pensar como islas pertenecientes a un gran archipiélago. Según el autor, la isla principal del archipiélago es la de los operadores o transformadores agrandadores y achicadores, allí habitan unos monstruos muy peligrosos que achican o agrandan lo que a ellos se les arrime. También existe el monstruo mansito que no transforma y el monstruo aniquilador que anula.

- Behr, Harel, Post, & Lesh (1993) presentan un análisis semántico acerca del significado de fracción como operador, respecto a las expresiones empleadas para referirse al numerador y denominador de la fracción, tales como ampliador/reductor y agrandador/achicador. Según los

autores, el estudio realizado, determino que la expresión ampliador/reductor parece estar relacionado con la transformación de unidades, mientras que la expresión agrandador/achicador con el tamaño, implicando concepto de medición.

- Quiroz & Vanegas (2009) en su investigación “Las fracciones como medidor, partidor y operador”, hacen un estudio acerca de las relaciones que establecen 43 estudiantes entre los 10 y 12 años, al usar interpretaciones de las fracciones como medidor, partidor y operador. Respecto al objeto de estudio, los autores señalan que, debido a su complejidad, la noción de fracción como operador exige transformar una magnitud relacionada a situaciones concretas y requiere de un nivel de pensamiento avanzado en los estudiantes.

Finalmente, respecto a los estudios realizados acerca de la equivalencia de fraccionarios tenemos los trabajos de:

- Wong (2009), en donde se describe un estudio realizado a 649 estudiantes de los grados 3° a 6° en Sydney, respecto a la comprensión conceptual de la equivalencia de fracciones a partir del uso de modelos de áreas. En el estudio se muestra que el 7% de los estudiantes, respecto a una fracción dada, pueden hallar su fracción equivalente; mientras que, un porcentaje inferior, respecto a una fracción mixta, pueden hallar su equivalente. A pesar de los bajos porcentajes presentados en los niveles superiores, el autor resalta que la investigación permite evidenciar que, el uso de modelos de áreas, puede ser un patrón de desarrollo de la comprensión conceptual de la equivalencia de fracciones (Wong, 2009).

- Jigyl & Afamasaga-Futaí (2007) en el cual se hace un estudio exploratorio acerca de la comprensión de la noción de fracciones equivalentes en 55 niños de 4, 6 y 8 años en una escuela rural de Australia. A través de dicho estudio, se estableció, que los niños optan por las representaciones pictóricas al momento de determinar la equivalencia entre fracciones, no obstante, dicha estrategia no parece ser efectiva cuando se debe establecer la equivalencia para fracciones de tipo $\frac{a}{b}$.

- Post et al. (1985) presentan el análisis de su estudio respecto a la comprensión de las nociones de orden y equivalencia de números racionales en niños de cuarto grado de dos escuelas en Illinois, USA. Según el estudio, la idea de equivalencia de fracciones requiere de una orientación precisa que permita, al estudiante, asociar las representaciones pictóricas con la manipulación del símbolo matemático, al igual que, considerar las transformaciones que sufren estas representaciones dentro del mismo sistema de representaciones y su progresiva independencia que se genera en el proceso, la cual desliga la dependencia de una manipulación de representaciones para determinar la equivalencia.

- Ponte & Quaresma (2014) quienes estudiaron la representación y el razonamiento de los estudiantes de grado sexto en una escuela en Lisboa, Portugal, respecto a la comparación y equivalencia de fracciones, además del uso de la fracción como operador. En el estudio se resalta que los estudiantes al momento de abordar situaciones de equivalencia de fracciones, prefieren utilizar métodos pictóricos para cumplir la tarea señalada. Asimismo, se detectó que la noción de operador fracción se encuentra muy influenciada por la noción de cociente.

- Fuentes (2010) en su trabajo “Enseñanza de fracciones. Una experiencia didáctica en quinto grado de enseñanza primaria” presenta el informe de la propuesta metodológica aplicada a los estudiantes de quinto grado de una escuela en Talca, Chile, para abordar el concepto de fracción, además de establecer criterios de orden y equivalencia entre fracciones. Al respecto se señala, en la investigación, la necesidad de apoyar el acercamiento a la noción de equivalencia de fracciones empleando situaciones cotidianas en las cuales intervengan unidades del sistema de medidas, tales como tiempo, longitudes y pesos, entre otras; además del uso de material concreto como lana o tiras de papel.

Cabe señalar que las investigaciones en torno a la noción de fracción como operador y a la equivalencia de fraccionarios en básica secundaria son escasas, la mayor parte de ellas, corresponde a trabajos en básica primaria.

1.2 Descripción del problema

La calidad de la educación y una educación para todos, ha sido el compromiso de los gobiernos, sociedad civil, agencias de cooperación, bancos de desarrollo y diversas entidades respecto a las futuras generaciones (UNESCO, 2013). De allí, la preocupación de los países de América Latina y el Caribe por disminuir la brecha existente a nivel mundial respecto al logro de aprendizajes, entre otras, en el área de matemáticas.

El Laboratorio Latinoamericano de Evaluación de la Calidad de la Educación (LLECE) ha sido el organismo a nivel regional encargado de medir los logros de aprendizaje en Matemáticas, Lenguaje y Ciencias para los países de América Latina y el Caribe. A través, de los análisis

realizados por LLECE la UNESCO encontró en el 2013 que, “en promedio, aproximadamente un tercio de los alumnos en primaria y casi la mitad en secundaria no parecen haber adquirido los aprendizajes básicos en lectura, y en matemáticas los resultados son incluso menos satisfactorios”(UNESCO, 2013, p.25).

En la última década, LLECE ha realizado dos Estudios Regionales Comparativos y Explicativos (SERCE y TERCE¹) aplicados a estudiantes de grado tercero y sexto. En matemáticas, estos estudios han contemplado cinco dominios conceptuales: el numérico, el geométrico, el de medición, el de tratamiento de la información y el variacional. Respecto al dominio numérico, SERCE señaló que, en Colombia, el 32,35% de los estudiantes de grado sexto (Nivel III) comparan fracciones y resuelven problemas que requieren interpretar los elementos de una equivalencia de medidas, entre otros aspectos; mientras que, solo el 5,46% de los estudiantes (Nivel IV) resuelven problemas que involucran el concepto de fracción, además de otras habilidades (UNESCO, 2008). En TERCE, respecto a los mismos dominios y competencias de SERCE, se encontró que el 33,72% de los estudiantes de grado sexto alcanzaron en Nivel III y el 9,76% el Nivel IV (UNESCO, 2014).

El Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA), en su estudio divulgado en el 2015, mostró un comparativo respecto a los resultados obtenidos en la prueba en los últimos años en Colombia. PISA define tres dimensiones desde las cuales evalúan competencias en el área: los procesos matemáticos, el contenido matemático y los contextos (ICFES, 2015). En la subescala de Cantidad relacionada con el sentido del número, la representación de los números

¹ SERCE, Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo en el año 2006, y TERCE, Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo en 2013.

mediante diferentes maneras, la comprensión del significado de las operaciones y la noción de la magnitud de los números, entre otros aspectos (INEE, 2005), solo el 2% de los estudiantes se ubican en el Nivel 6, cifra que ha sido estática en las cuatro pruebas aplicadas. Asimismo, el 8% de los estudiantes ha alcanzado el Nivel 5 en los años 2006 y 2009, mientras que, en el 2012 y 2015 el porcentaje ha sido del 6% y 10%, respectivamente (ICFES, 2017). A nivel territorial (Bogotá D.C.), en el 2015, el 16% de los estudiantes alcanzó el Nivel 5 y solo el 6% el Nivel 6.

En el plano Nacional, las Pruebas Saber 3°, 5° y 9° suministran algunos datos que sirven como puntos de referencia de los aprendizajes adquiridos por los estudiantes. En el informe ejecutivo Saber del 2009, el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) puso en evidencia serias dificultades en el área de Matemáticas, en los estudiantes de quinto grado, en el que, el 17% de los estudiantes (nivel satisfactorio), además de lograr lo definido para el nivel mínimo, estaban en la capacidad de reconocer diferentes maneras de representar una fracción propia en relaciones parte-todo; mientras que, solo el 8% de los estudiantes (nivel avanzado), además de superar lo definido para los niveles anteriores, se encontraban en la capacidad de solucionar problemas correspondientes a la estructura multiplicativa de los números naturales y, reconocer y utilizar la fracción como operador (ICFES, 2011).

En el 2016, las Pruebas Saber 3°, 5° y 9° señalaron que alrededor del 40% de los estudiantes en Colombia no reconocen ni interpretan números naturales y fracciones en diferentes contextos, además, no reconocen diferentes representaciones de un mismo número (natural o fracción) ni hacen conjeturas entre ellas. Este mismo estudio, en lo referente a Bogotá D.C., muestra que las cifras están cercanas al 32% de la muestra (Ministerio de Educación Nacional, 2017).

En el mismo sentido, en lo referente al colegio Jairo Aníbal Niño IED, el 38% de los estudiantes no reconocen ni interpretan números naturales y fracciones en diferentes contextos, y el 22% no reconocen diferentes representaciones de un mismo número (natural o fracción) ni hacen conjeturas entre ellas (Ministerio de Educación Nacional, 2017).

Tomando como punto de referencia los resultados obtenidos tanto a nivel nacional como internacional, se detectan falencias por parte de los estudiantes en los saberes relacionados con lo numérico, en particular, en los aprendizajes concernientes con la estructura multiplicativa de los números naturales, además de la interpretación y representación de las fracciones en diferentes contextos.

Esta situación advierte la necesidad de fortalecer y evidenciar procesos que contribuyan en el desarrollo de competencias propias del área de Matemáticas, en lo referente al pensamiento numérico y sistemas numéricos y en específico, en aquellos aprendizajes ajustados a las fracciones. Al mismo tiempo, se considera propicio el poder plantear alternativas en cuanto a la enseñanza de este saber matemático y rescatar del proceso aquellos aspectos que develen como construyen, los estudiantes, este concepto.

Ahora, será necesario considerar que el proceso de construcción del concepto de fracción demanda conocer los diversos significados e interpretaciones que el objeto de saber admite y adquiere, como lo pueden ser su expresión vinculada a la parte con el todo, su actuación sobre un conjunto discreto o continuo, su correspondencia como representante de puntos de la recta

numérica, su acción como reparto equitativo o como recurso para comparar dos conjuntos o dos medidas, entre otros (Malet, 2010).

Adicionalmente, “si bien es deseable que *todos* los alumnos construyan el concepto de fracción desde *todas* las interpretaciones que éste admite, también es deseable que los primeros encuentros con el concepto respondan a la interpretación que les sea más cercana” (Malet, 2010). De esta manera, se precisa que esta investigación ha optado, de todos los significados que puede adquirir un número fraccionario, por su interpretación como operador, debido a que se ajusta a los requerimientos curriculares de grado sexto y además, porque la noción de operador puede ser muy cercana al estudiante, si lo entiende como operador o transformador ampliador o reductor e incluso, como monstruo agrandador y achicador (Vasco, 2012).

Si bien la idea de fraccionario nace (aunque no se agota) en contextos de partición (relaciones de partes y todo) y de operadores (en los que se amplían y reducen magnitudes y cantidades y se estudian las relaciones multiplicativas entre las magnitudes y cantidades resultantes y transformadas), hay que elevar el pensamiento del alumno hasta que pueda representarse la idea de fraccionarios en forma abstracta desligada de estas situaciones que le dan origen. El número fraccionario no es simplemente la relación multiplicativa entre la parte y el todo, o tampoco es la de operador, pero estas ideas son un punto de partida para construir la idea abstracta de número fraccionario. Esta idea abstracta no es una definición, es ‘eso’ que surge en el pensamiento de los niños al operar una y otra vez con estas ideas y con otros significados como el de razón, pero sobre todo con sus esfuerzos por establecer relaciones entre los diferentes significados para reconocer lo que permanece invariante en ellos. (Secretaría de Educación Distrital, 2007, pp.57-58)

De igual forma, cabe resaltar, la importancia que presenta, para el estudiante, su aproximación a la noción de equivalencia, pues esta, le permitirá la construcción de otros aspectos fraccionarios, como, la relación de orden, la simplificación de fracciones, los algoritmos de la suma y la resta e incluso, en un nivel mayor, la conceptualización de los números racionales si estos son considerados como clases de fracciones equivalentes, según lo resaltan Dickson, Brown, & Gibson (1991) y Llinares & Sánchez (1988).

No obstante, centra gran interés el observar que la idea de equivalencia de fracciones, no solo corresponde a un desarrollo puramente algorítmico, sino que, su adquisición implica asociar representaciones pictóricas con la manipulación del símbolo matemático, al igual que, considerar las transformaciones que sufren estas representaciones dentro del mismo sistema de representaciones y su progresiva independencia respecto a la manipulación de representaciones (Post et al., 1985).

En este sentido, surge la intención de abordar la equivalencia de fraccionarios a partir de la composición de operadores naturales por algunas razones. Primero, porque la composición de fracciones le permite al estudiante describir el doble convenio que tiene la noción de fracción (orden y estado de cosas) (Llinares & Sanchez, 1988). Segundo, porque los estudiantes pueden aprender, sin mayor dificultad, a determinar cantidades a partir de contextos continuos o discretos. Tercero, por la construcción de estructuras multiplicativas que pueden surgir al no obtener fracciones equivalentes por simples procesos de complicación y simplificación, y finalmente, porque la composición de operadores multiplicativos naturales ofrece la oportunidad

de entender la equivalencia como una transformación sucesiva entre ampliar y reducir, ó, reducir y ampliar.

Basados en las anteriores consideraciones expuestas, el presente trabajo de investigación busca plantear una secuencia didáctica válida para la enseñanza de las fracciones en sexto grado, a partir del significado de fracción como operador, considerando como punto de inflexión la composición de operadores multiplicativos naturales y su aproximación a la equivalencia de fraccionarios. De tal manera, que permita describir ¿Cómo los estudiantes de sexto grado, del colegio Jairo Aníbal Niño IED, componen operadores multiplicativos naturales de la forma $\mathbf{a} \times$ y $\div \mathbf{b}$ (siendo alguno de los números, \mathbf{a} o \mathbf{b} , múltiplo del otro) y cómo se relacionan estos hechos con la comprensión de la noción de equivalencia entre números fraccionarios que son reductibles a la forma $\frac{1}{b}$?

Dada la importancia que tiene el tema, se espera que este trabajo, pueda ser un aporte para visualizar la construcción de la noción de fracción y la equivalencia de fraccionarios, en estudiantes de grado sexto, y que la propuesta didáctica planteada, que gira en torno al significado de fracción como operador y la descomposición de operadores multiplicativos naturales, pueda ser usada como ruta de aprendizaje.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Analizar e interpretar cómo los estudiantes de sexto grado, del colegio Jairo Aníbal Niño IED, componen operadores multiplicativos naturales de la forma $\mathbf{a} \times$ y $\div \mathbf{b}$ (siendo alguno de los números, \mathbf{a} o \mathbf{b} , múltiplo del otro) y cómo se relacionan estos hechos con la comprensión de la noción de equivalencia entre números fraccionarios que son reductibles a la forma $\frac{1}{b}$.

1.3.2 Objetivos específicos

Elaborar una secuencia didáctica que promueva en los estudiantes de sexto grado, del colegio Jairo Aníbal Niño IED, la construcción de relaciones multiplicativas entre operadores naturales de la forma $\mathbf{a} \times$ y $\div \mathbf{b}$, y su composición; y a partir de estos elementos, desarrollar la equivalencia entre números fraccionarios que son reductibles a la forma $\frac{1}{b}$.

Describir cómo los estudiantes construyen la composición de operadores multiplicativos naturales de la forma $\mathbf{a} \times$ y $\div \mathbf{b}$ (siendo alguno de los números, \mathbf{a} o \mathbf{b} , múltiplo del otro).

Describir cómo los estudiantes relacionan la composición de operadores multiplicativos naturales de la forma $\mathbf{a} \times$ y $\div \mathbf{b}$ (siendo alguno de los números, \mathbf{a} o \mathbf{b} , múltiplo del otro) y la noción de equivalencia entre números fraccionarios que son reductibles a la forma $\frac{1}{b}$.

2. MARCO TEORICO

Inicialmente, se contemplarán los aportes teóricos que nos parecen funcionales para este trabajo, se tomarán algunos conceptos de transposición didáctica de Chevallard (1998), la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990), la conversión de las representaciones y el cambio de registro de Duval (2004) y el significado personal e institucional del objeto matemático de Godino, Batanero & Font (2007). Posteriormente, se realizará un acercamiento desde lo teórico al concepto de fracción y equivalencia, por tratarse del saber académico abordado. Luego, será clave reconocer el saber a enseñar a partir de un recorrido histórico en las antiguas civilizaciones y de los diversos significados que ha recibido. Finalmente, se presentan los elementos propios del objeto de enseñanza, desde los cuales se orienta el diseño e implementación de la secuencia didáctica para la construcción de relaciones multiplicativas entre operadores naturales de la forma $a \times$ y $\div b$, su composición y la aproximación a la equivalencia de fraccionarios

2.1 Cuestiones preliminares

A continuación, se presentan algunos aspectos didácticos y propios de la psicología cognitiva, que nos orientaran y facilitaran el análisis de los hechos que ocurren en torno a la construcción del objeto de estudio.

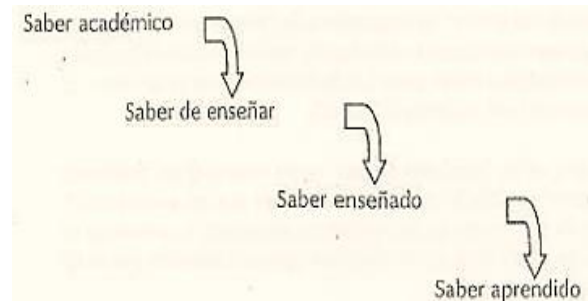
2.1.1 Transposición didáctica

El concepto de transposición didáctica surge de aquella relación existente, en el aula, entre el saber y el docente, con una estrecha relación con el verbo enseñar. Al respecto, se han recogido dos consideraciones, desde el punto de vista de Chevallard (1998) y desde el de Fandiño (2009).

Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar; sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los *objetos de enseñanza*. El “trabajo” que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica. (Chevallard, 1998, p.45)

Fandiño (2009) destaca que el paso del “Saber” al “saber aprendido” es el resultado de un extenso y delicado recorrido, el cual se puede esquematizar así:

FIGURA 1: DEL SABER ACADÉMICO AL SABER APRENDIDO



Fuente: Tomado de Fandiño-Pinilla (2009, p.76)

En esta sucesión de pasajes, el primero, el que transforma el “Saber” en “saber de enseñar”, se llama transposición didáctica y constituye un momento de gran relevancia, un momento en el cual el profesionalismo y la creatividad del maestro se expresan en su más alto nivel. (Fandiño-Pinilla, 2009, pp. 75-76)

Estas consideraciones, nos son ineludibles de ser consideradas en esta investigación, puesto que el principal objetivo de la secuencia didáctica será entregar, al estudiante, ese saber

académico. Propio de los matemáticos, adaptado a la edad del estudiante, grado de escolaridad y capacidad cognitiva.

2.1.2 La teoría de los campos conceptuales

Según Vergnaud (1990):

Un concepto no puede ser reducido a su definición, al menos si se está interesado en su aprendizaje y enseñanza. A través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver es como un concepto adquiere sentido para el niño. (p.1)

Esta declaración, señalada por Vergnaud, nos invita a precisar que es a través del abordaje de situaciones y problemas específicos, que el saber a enseñar adquiere sentido para el estudiante.

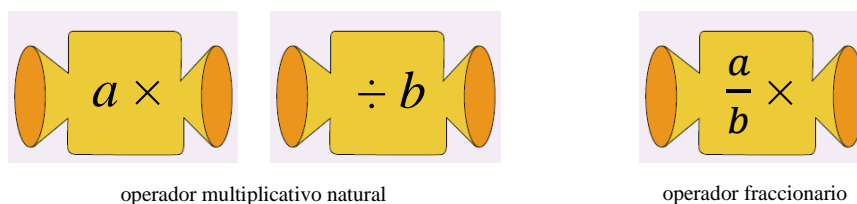
Según el análisis de Vergnaud (1990) un campo conceptual puede considerarse como un conjunto de situaciones vistas como una combinación de tareas con naturaleza y dificultades propias. Sin embargo, un campo conceptual no solo está definido por las situaciones, sino que también intervienen en él los conceptos y teoremas. Es así como, el campo conceptual de las estructuras multiplicativas “es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones...” (p.8).

De esta manera, será clave considerar que cada situación propuesta al estudiante, deberá permitirle cumplir ciertas tareas que involucren no solo el tratamiento operativo, sino el análisis de los conceptos y teoremas que en ella intervienen. Así, el abordaje de los operadores multiplicativos naturales, por parte del estudiante, implicará la realización de tareas algorítmicas

propias de la multiplicación y la división de números naturales, pero también, será imperativo que emplee el análisis conceptual en la composición de dichos operadores y su acercamiento a la noción de equivalencia de fraccionarios.

En este sentido, la propuesta planteada en este trabajo presenta, a los estudiantes, un referente dinámico para el operador multiplicativo natural y fraccionario, representado a través de una máquina. Este hecho le permitirá, al estudiante, que cada vez que se vea enfrentado a una situación problema, ligada a contextos propios de su entorno, puede responder la tarea asignada, al representarla a través de una máquina.

FIGURA 2: REFERENTES DINÁMICOS PARA OPERADORES MULTIPLICATIVOS NATURALES Y FRACCIONARIOS



Nota: Elaboración propia. **Fuente:** Adaptado de (Castaño, Oicatá, Melo, & Gonzalez, 2004)

2.1.3 La conversión de representaciones y el cambio de registro

En la semiosis², según Duval (2004), actúan tres actividades cognitivas de representación: *la formación*, que corresponde a la actualización o sustitución de la mirada que se tiene acerca de un objeto (se origina una representación) ; *el tratamiento*, que corresponde a la transformación dada a una representación pero dentro del mismo registro de representación o sistema y *la conversión*, que concierne a la transformación de una representación, perteneciente a un registro,

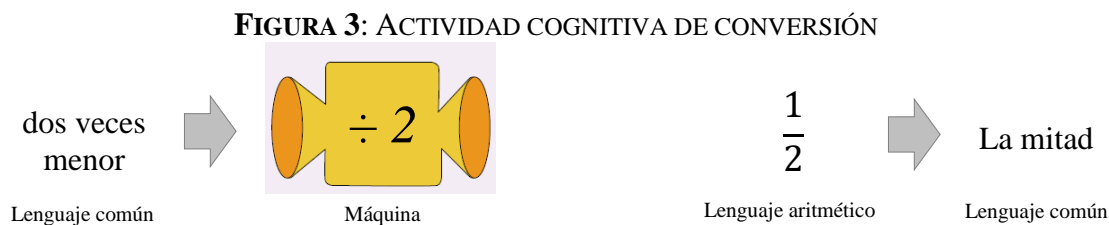
² Semiosis: Aprehensión o producción de una representación semiótica.

a una representación, dada en otro registro. Este autor define como registro de representación semiótica todo sistema semiótico que cumple con estas tres funciones.

En este trabajo será prioritario la actividad de conversión.

La conversión es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro. Las operaciones habitualmente desgastadas con los términos “traducción”, “ilustración”, “transposición”, “interpretación”, “codificación”, etc., son operaciones que hacen corresponder una representación dada en un registro con otra representación en otro registro. (Duval, 2004, p.46)

La distinción de estas actividades cognitivas de representación ligada a la semiosis, deben permitir a los estudiantes realizar conversiones. Por ejemplo, de una representación en el lenguaje común a una representación como máquina o de una representación del lenguaje aritmético a una representación en el lenguaje común.

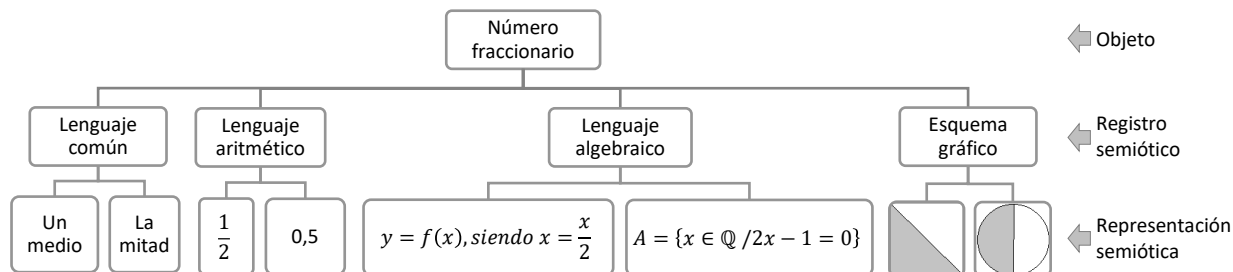


Nota: Elaboración propia

Asimismo, realizar operaciones de tratamiento. Por ejemplo, en el lenguaje común transformar la expresión mitad a un medio o el doble a dos veces mayor.

De esta manera, respecto al concepto de número fraccionario pueden surgir diferentes representaciones semióticas en registros diferentes, así:

FIGURA 4: ALGUNAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS DEL NÚMERO FRACCIONARIO



Nota: Elaboración propia. **Fuente:** Adaptado de Fandiño-Pinilla (2009, pp.133-134)

2.1.4 El objeto matemático y su significado personal e institucional

Godino (2003) señala que la cognición matemática presenta una dualidad, por un lado, se encuentra la cognición individual, correspondiente al resultado y acción del sujeto individual al enfrentarse ante un problema, y por el otro, la cognición institucional, concierne al resultado, emergente en un grupo de individuos, respecto al dialogo, el convenio y la regulación. En este sentido, resulta preciso señalar que existe una actuación (lingüística o no) por parte de alguien al momento de resolver un problema, comunicar su solución, validarla o generalizarla en otros contextos y problemas, la cual se designa como práctica (Godino & Batanero, 1994).

Ahora, si se considera, desde un enfoque pragmático, que el significado de un objeto corresponde al sistema de prácticas asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado, es posible, entonces, determinar la existencia de un significado personal y un significado institucional respecto al objeto matemático. De esta manera, el significado de un

objeto personal, será el sistema de prácticas personales, mientras que, el significado de un objeto institucional, corresponderá al sistema de prácticas institucionales (Godino & Batanero, 1994).

Estos conceptos, estarán presentes en este trabajo, al tratar de observar lo que hace y dice el sujeto al resolver múltiples situaciones problemas, con el propósito de intentar derivar los significados que da, respecto a los fraccionarios, a sus relaciones y las operaciones entre ellos.

2.2 Las fracciones como objeto de saber

El objeto de saber emana del núcleo de la comunidad de sabios a los cuales le corresponde el sistema de enseñanza del objeto (Chevallard, 1998). De esta manera, todo docente tiene el imperioso compromiso de reducir al máximo las deformaciones que puedan tener los saberes, por ello, debe conocer lo mejor posible el objeto matemático que ha de transferir, con el propósito lo lograr una correcta transposición didáctica (Pujadas & Eguiluz, 2000). Por lo tanto, en esta sección de este trabajo, se revisará la construcción formal de los números racionales y en particular, el objeto de estudio y la equivalencia de fraccionarios.

2.2.1 La construcción de los números racionales

A continuación, se mostrará la construcción formal del concepto de fraccionario. Para ello, se tomará como referencia el trabajo de Machado (2014).

El conjunto de los números racionales, se construye a partir del conjunto de los enteros. Para ello, se define la relación \sim , dada por $(a, b) \sim (c, d)$ cuando $ad = bc$. Como la relación \sim definida anteriormente es de equivalencia, entonces,

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a, b) / a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}^*\}$$

Definición 1. Dado $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, denotamos por $\frac{a}{b}$ (a sobre b) a clases de equivalencia para (a, b) por la anterior relación \sim . Así,

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / (x, y) \sim (a, b)\}$$

Teorema 1. (Propiedad Fundamental de las Fracciones) Si $(a, b) \wedge (c, d)$ son elementos de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si, y solo si, $ad = bc$. De esta manera, tenemos,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a, b) \wedge (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

Definición 2. Denotamos por \mathbb{Q} y denominamos por conjunto de los números racionales, al conjunto cociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ por la relación de equivalencia \sim , esto es,

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) / \sim = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Respecto al anterior análisis, es imprescindible enunciar que, para efectos de esta investigación, cada fracción $\frac{a}{b}$ presentada al estudiante, tendrá como restricción que a o b serán números naturales múltiplos uno del otro. Además, todo conjunto de fracciones equivalentes abordado tendrá como representante canónico la fracción irreducible perteneciente a,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{1}{b} / b \in \mathbb{N} \right\}$$

La descripción de la construcción formal de los racionales destaca la importancia que juega la relación de equivalencia entre fracciones, esto es lo que permitirá al estudiante entender que, por ejemplo, $\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}$, no son números fraccionarios diferentes sino representaciones distintas de un mismo objeto matemático (en este caso, un número) que puede representarse por $\frac{3}{4}$. Si esto no se logra, como lo diría Duval, se confunde lo representado con su representación.

2.3 Las fracciones como objeto a enseñar

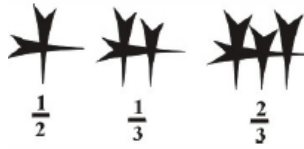
El proceso de aprendizaje de las fracciones se encuentra condicionado por las diferentes interpretaciones que puede tener el concepto (Pujadas & Eguiluz, 2000), es así, como se necesario guiar al estudiante a reconocer que el símbolo $\frac{a}{b}$ (donde a y b son números enteros y $b \neq 0$) guarda relación con varios significados (homonimia), pues puede representar un operador, un cociente, etc.; pero, además, este concepto puede representarse como una fracción o como una expresión decimal (sinonimia) (Mancera, 1992).

Para ganar claridad de la complejidad que supone acceder a estas diversas formas de representación y de significados, algunos datos históricos resultan útiles. Aquí, se exhiben aquellos que están relacionados exclusivamente con objeto de estudio.

2.3.1 Las fracciones bajo la lupa de las antigua civilizaciones

Las primeras formas de escritura de las fracciones corresponden a los babilonios, para quienes una fracción no representaba la división por partes, sino que era el todo o el total (Ortiz F., 2005).

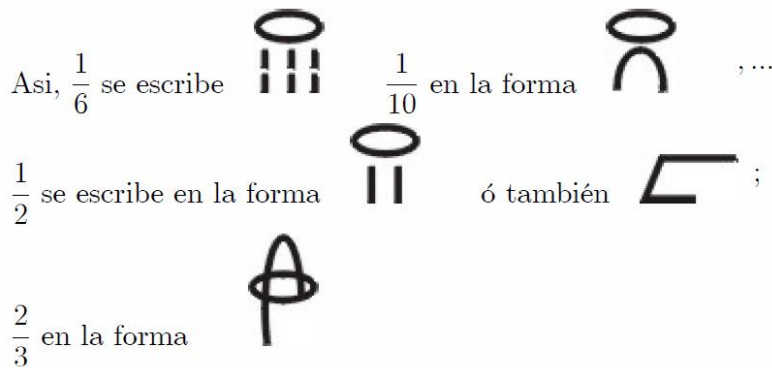
FIGURA 5: REPRESENTACIÓN BABILONIA DE FRACCIÓN



Fuente: Tomado de Ortiz (2005, p.13)

En el antiguo Egipto las fracciones ocuparon un lugar en su desarrollo matemático, siendo el uso de estas con dos objetivos claros, uno de medida y el otro de reparto. Sin embargo, según Maza (2009, citado por Gerván, 2009) en esta antigua civilización “las fracciones nacieron dentro del contexto de reparto” (p.2). Para esta cultura, el uso de las fracciones unitarias fue clave, a tal punto, que todas las fracciones eran reducidas a una suma de fracciones unitarias, a excepción de las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$, que pertenecían a su sistema de numeración (Gerván, 2009).

FIGURA 6: REPRESENTACIÓN EGIPCIA DE FRACCIÓN



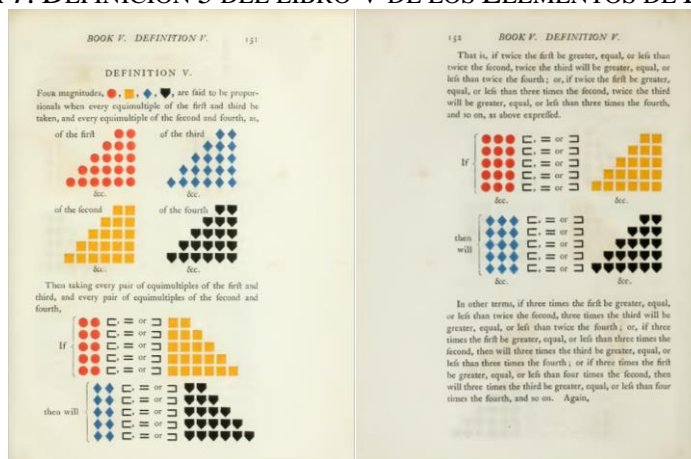
Fuente: Tomado de Ortiz F. (2005)

Para los griegos las fracciones fueron primordiales, en especial, para los pitagóricos. De allí, que Eudoxo de Cnido introdujera por primera vez la idea de equivalencia, al establecerla como una igualdad entre razones. Esta definición dada por Eudoxo, fue recogida y publicada en el libro V de “Los Elementos” de Euclides (González, 2008), así:

“Definición V. Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente “ (p.113).

De esta manera, en palabras de Gonzalez (2008), si a, b y c, d son mágnitudes geométricas, entonces, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son proporcionales, es decir, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si para un par de enteros positivos, n y m , ocurre que, $na > mb \wedge nc > md$, ó, $na > mb \wedge nc > md$, ó, $na > mb \wedge nc > md$.

FIGURA 7: DEFINICIÓN 5 DEL LIBRO V DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES



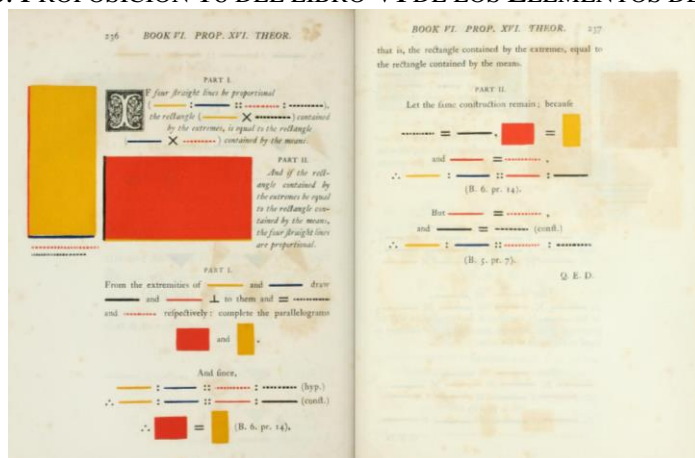
Fuente: Tomado de Byrne (1847, pp.151-152)

Posterior a la definición de Eudoxo, Euclides recoge en su libro VI toda la teoría de proporciones, estableciendo en la proposición XVI³, la relación $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, en donde, $a \cdot d = b \cdot c$ (Ortiz F., 2005), de la siguiente forma: “Si cuatro líneas rectas son proporcionales, el rectángulo

³ En lenguaje de fracciones, el postulado hace referencia a fracciones equivalentes. Así, dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, son equivalentes entre sí, si y sólo si, $a \cdot d = b \cdot c$.

comprendido por los extremos es igual al rectángulo comprendido por las medias; y si el rectángulo comprendido por los extremos es igual al rectángulo comprendido por las medias, las cuatro líneas rectas serán proporcionales” (p.167).

FIGURA 8: PROPOSICIÓN 16 DEL LIBRO VI DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES



Fuente: Tomado de Byrne (1847, pp.236-237)

2.3.2 Formas de interpretar el concepto de fracción

Como se mencionó anteriormente, aunque la noción de fraccionario se oriente a la idea de un par ordenado de números enteros escrito de la forma $\frac{a}{b}$, son diversas las situaciones en las cuales es empleado el concepto y a su vez, diversos los significados que se derivan.

Para Fandiño (2009), varias son las formas en las que se puede entender el concepto de fracción, entre estas formas se encuentran, como parte de una unidad-todo, como cociente, como relación, como operador, en probabilidad, en los puntajes, como número racional, como un punto de una recta orientada, como medida, como indicador de cantidad de elección, como porcentaje, entre otros.

Sin embargo, Kieren (1981, citado por Mancera, 1992) define que son cinco los subconstructos (relación parte-todo, medición, razón, cociente y operador) desde los cuales se puede construir el constructo teórico llamado fracción. Los subconstructos parte-todo y medición, hacen referencia al tratamiento de partición o división (en partes iguales) que se da a las regiones geométricas, cantidades continuas (medibles) o discretas (contables), y la recta numérica. El subconstructo razón corresponde a un índice de comparación entre magnitudes relativas. El subconstructo cociente que está directamente relacionado a los sistemas algebraicos abstractos y corresponde al manejo formal de los números racionales. Por último, el subconstructo operador considerado como una función o regla que le permite al número racional transformar una cantidad o figura geométrica en otra (Mancera, 1992, pp.35-36).

Si bien, es necesario atender la pluralidad de significados que tiene el concepto de fracción, esta investigación está direccionada hacia la interpretación del concepto de fracción como operador pues, por una parte, representa tanto para docentes como para los estudiantes un reto a superar, como se evidenció en los resultados de las Pruebas Saber y estudios como el de Quiroz & Vanegas (2009) y Arteta et al. (2012) y, por otra, nos parece que la idea de equivalencia puede ser construida de forma intuitiva a partir de que se pueden tener transformaciones sucesivas de dos operadores (una secuencia aplica $a \times$ y $\div b$ que produce siempre los mismos efectos que otra secuencia $c \times$ y $\div d$).

2.4 Las fracciones como objeto de enseñanza

Luego, del recorrido realizado hasta el momento, se precisan los parámetros sobre los cuáles se orienta la propuesta didáctica para abordar el objeto de estudio, por ello, en esta sección, profundizaremos la interpretación de fracción como operador, dando luces acerca de los estados y operadores, en máquinas operadoras ampliadoras y máquinas operadoras reductoras.

2.4.1 Estados y operadores⁴

Según Dienes (Dienes, 1972) una fracción puede considerarse de dos modos distintos, el primero, como la descripción de un estado de cosas y el segundo, como el resultado de una ejecución de operaciones. Por ejemplo, si se requieren los dos tercios de un grupo de 36 estudiantes se puede proceder de dos formas diferentes. La primera consistiría en dividir el grupo en tres conjuntos equivalentes y tomar dos de dichos grupos, para obtener 24 estudiantes. La segunda, sería considerar que se tiene un estado inicial de 36 estudiantes y dividirlo por tres, para obtener un estado de 12 estudiantes; ahora, será necesario determinar dos conjuntos equivalentes al estado que tenemos, para lo cual se multiplicara el estado por dos, para conseguir un estado final de 24 estudiantes. Este hecho representa una cadena sucesiva de dos operaciones, división y multiplicación, sobre un estado inicial (estado-unidad) para obtener un estado final (pp.8-9).

Ahora, puede considerarse que el orden de ejecución de esta cadena es necesariamente el mismo, no obstante, es posible alterar el orden de ejecución, es decir, multiplicar primero por dos y luego, dividir entre tres. Si se realiza de esta manera, el estado inicial (estado-unidad) 36 estudiantes será transformado en el estado 72 estudiantes, para llegar luego, al estado final 24

⁴ Basados en Dienes, Z. P. (1972). *Fracciones*. España: Editorial Teide S.A.

estudiantes. De esta manera, queda en evidencia que la relación estado – operador – estado, puede ser realizada en cualquier orden para todas las fracciones (pp.11-12). El anterior proceso, permite determinar que la fracción $\frac{2}{3}$ corresponde a una cadena sucesiva con dos operadores, $\times 2$ y $\div 3$.

FIGURA 9: CADENA SUCESIVA DE OPERACIONES EN CUALQUIER ORDEN

Estado	Operador	Estado	Operador	Estado
36	$\times 2$	72	$\div 3$	24

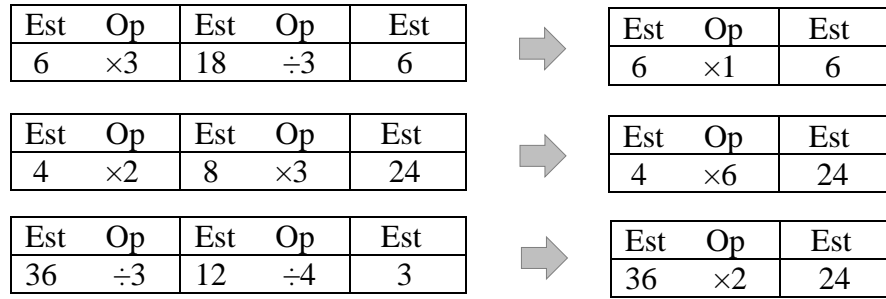
Estado	Operador	Estado	Operador	Estado
36	$\div 3$	12	$\times 2$	24

Nota: Elaboración propia. **Fuente:** Tomado de Dienes (1972, p.12)

Sin embargo, algunas fracciones necesitan un trato particular. Por ejemplo, si tengo una figura conformada por 36 cuadrados y fuera necesario considerar $\frac{1}{3}$ de ella, se tendrían dos visiones al respecto, una que indica que tomo un cuadrado por cada 3 cuadrados y la otra, la cadena $\times 1$ y $\div 3$, donde el único operador que transforma al estado es $\div 3$. Por lo tanto, de forma abreviada se podría señalar que el operador en este tipo de situaciones es $\div 3$ o $\times \frac{1}{3}$ (pp.15-16).

Según Dienes (1972), existen tres cadenas que se comportan de manera particular. La sucesión de una multiplicación y una división por un mismo número, lo que origina el operador por uno. La sucesión de dos multiplicaciones, que ocasiona un operador correspondiente al producto de los multiplicandos. La sucesión de dos divisiones, que equivale al producto de dichos números (p. 20).

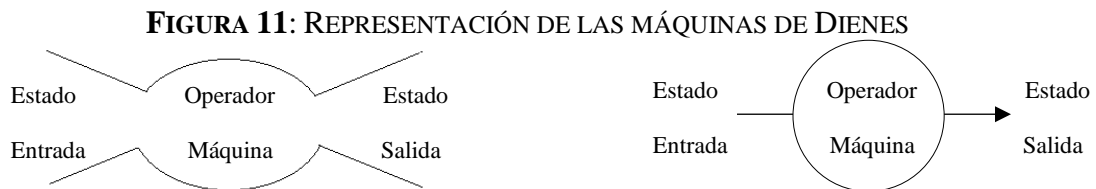
FIGURA 10:COMBINACIÓN DE OPERADORES



Nota: Elaboración propia. **Fuente:** Tomado de Dienes (1972, p.21)

2.4.2 Máquinas operadoras

Para Dienes (1969) un operador puede representarse mediante una máquina abstracta, que configura la relación entrada-máquina-salida análoga a la relación estado-operador-estado. Según Dienes (1971) “podemos considerar este dispositivo, a nivel de números, como una máquina en la que introducimos...y que luego «saca» el número total...” (Dienes, 1971, p.19).



Nota: Elaboración propia. **Fuente:** Tomado de Dienes (1971, p.55)

Dienes (1971) establece la existencia de diferentes tipos de máquinas. Simples, en las que actúa un solo operador. Dobles, en las que los operadores se empalman para realizar combinaciones o composiciones. Máquina equivalente, que corresponde a aquella máquina que puede reemplazar a dos máquinas empalmadas máquina. Máquinas de conjuntos de conjuntos

con y disposición geométrica, la cual establece la correspondencia término a término entre dos conjuntos y dos conjuntos de conjuntos. Máquinas de encoger, que son inversas a las anteriores.

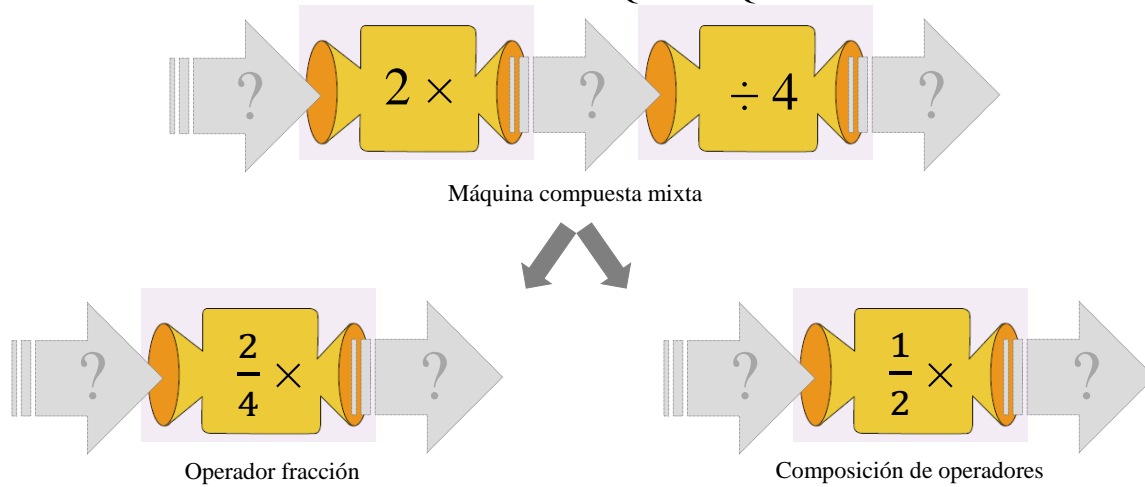
2.4.3 Máquinas ampliadoras y reductoras

Vasco (1994) en sus artículo “El archipiélago fraccionario” sugiere la idea de construir el concepto de fracción positiva a partir de su representación como operador, desde el punto de vista de operadores activos achicadores y agrandadores. Los operadores multiplicativos achicadores se simbolizan como $\frac{a}{b} \times$, $a < b$, mientras que los agrandadores, como $\frac{a}{b} \div$, $a > b$.

Al respecto, Castaño et al. (2004) en su libro “La matemática con Da Vinci”, presenta la construcción de fraccionarios a partir de máquinas ampliadoras (de operador $a \times$) y máquinas reductoras (de operador $\div b$).

Para efectos de esta investigación, consideramos apropiado aproximarnos a la equivalencia de números fraccionarios, a partir de la composición de operadores multiplicativos naturales, bajo la idea de las máquinas ampliadoras y reductoras. Por ejemplo, una máquina compuesta mixta de dos operadores (uno ampliador y otro reductor), puede transformarse en dos máquinas diferentes, una siendo una máquina compuesta con un operador en forma de fracción y la otra, como la composición de los operadores. Como resultado de las dos situaciones, las máquinas obtenidas son equivalentes.

FIGURA 12: OBTENCIÓN DE MÁQUINAS EQUIVALENTES



Nota: Elaboración propia.

Es preciso reiterar que, por razones propias de esta investigación, se ha restringido el estudio de la equivalencia para todas las fracciones, por lo tanto, cada fracción $\frac{a}{b}$ presentada al estudiante, tendrá como restricción que a o b serán números naturales múltiplos uno del otro. Además, todo conjunto de fracciones equivalentes abordado tendrá como representante canónico la fracción reducible a la forma $\frac{1}{b}$ siendo b un número natural.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

3.1 Metodología

Esta investigación basa su metodología en un estudio de carácter mixto, cuantitativo y cualitativo. Se define como cuantitativa porque permite recoger y analizar datos cuantitativos sobre variables, además, de estudiar la asociación o relación entre variables, usando magnitudes numéricas. De esta manera, es preciso señalar que la investigación cuantitativa pretende determinar la fuerza de correlación de las variables, la generalización y objetivación de los resultados a través de una muestra referenciada (Pita & Pértegas, 2002). Los análisis cuantitativos se fundamentan en la utilización y medición de procedimientos estandarizados, los cuales son interpretados respecto a hipótesis y teorías, buscando relaciones y regularidades causales entre elementos (Hernández, Fernández, & Baptista, 2014).

Se concreta como cualitativa porque permite identificar la naturaleza, el sistema de relaciones y la estructura dinámica de las realidades. Para lo cual, se emplean registros narrativos sobre el fenómeno estudiado, empleando técnicas de observación y entrevistas no estructuradas (Pita & Pértegas, 2002). No obstante, resulta preciso señalar que este enfoque usa métodos de recolección no estandarizados, pues se desean conseguir perspectivas respecto a emociones, experiencias, significados u otros aspectos subjetivos. Por tal razón, las técnicas de recolección de datos suelen ser entrevistas, la revisión de documentos, discusiones en grupo, registros de historias de vida, entre otros (Hernández et al., 2014).

En términos generales, tanto la investigación cuantitativa como cualitativa emplean cinco procesos similares, como lo son la observación y evaluación de fenómenos, la generación de

ideas respecto a la observación y evaluación realizada, la indicación del grado de las ideas planteadas, la revisión de las ideas frente a las pruebas o el análisis y la formulación de nuevos elementos para esclarecer, modificar o fundamentar nuevas ideas (Grinell, 1997, citado por Hernández et al., 2014).

Así, según Hernández et al. (2014) la investigación mixta resulta ser la integración de los procesos sistemáticos, empíricos y críticos de los enfoques cuantitativos y cualitativos, a través del cual, como lo manifiesta Chen (2006, citado por Hernández et al., 2014) se puede obtener una fotografía completa del fenómeno, sin llegar a perder la estructura de cada uno de los enfoques. Por lo tanto, la evidencia de las investigaciones mixtas será, cualquier dato numérico, verbal, textual, visual, simbólico o de otro tipo, que permita entender el problema (Creswell, 2013a y Lieber y Weisnes, 2010, citado por Hernández et al., 2014). Resulta clave indicar que cada uno de los enfoques vincula un componente, así, el componente cuantitativo es de tipo descriptivo, mientras que, el componente cualitativo es de tipo descriptivo-interpretativo.

De esta manera, al ser el componente cuantitativo de tipo descriptivo, permitirá según Vara (2008) describir con mayor precisión y fidelidad una posible realidad, empleando técnicas y métodos estadísticos de recolección, que para nuestra investigación corresponde a cuestionarios estructurados. Así, se organizará y clasificará las producciones de los estudiantes del curso 601 del C.E.D Jairo Aníbal Niño, respecto a la prueba de entrada y la sección denominada “actívate” perteneciente a la secuencia didáctica. A través del análisis estadístico, se pretende identificar los conceptos y las formas como los estudiantes solucionan problemas relacionados con las categorías: operadores multiplicativos naturales, operadores multiplicativos naturales sucesivos,

composición de operadores multiplicativos naturales y la equivalencia de fraccionarios. Cabe resaltar que el análisis cuantitativo de la prueba de entrada será realizado y estructurado de acuerdo a las categorías señaladas anteriormente y las subcategorías: cantidades discretas y cantidades continuas.

Por otra parte, al ser el componente cualitativo de tipo descriptivo-interpretativo, supone dos consideraciones, la primera, describir los hechos tal cual como son observados y la segunda, como lo manifiesta Vain (2012) intentar comprender cómo los sujetos interpretan la realidad y cómo construyen socialmente esas realidades. Al respecto, se aplicará, a los estudiantes del curso 601 del C.E.D Jairo Aníbal Niño, una secuencia didáctica compuesta de cinco sesiones, relacionadas con las categorías operadores multiplicativos naturales, composición de operadores multiplicativos naturales y la equivalencia de fraccionarios. Es preciso mencionar, que las sesiones son aplicadas de manera general al grupo, no obstante, el análisis cualitativo se realizará mediante un estudio de tres casos, sobre los cuales se pretende observar, interpretar y describir los cambios, avances u obstáculos que se presenten en la construcción de las nociones abordadas en la secuencia. El seguimiento que se realizará, a los tres casos objeto de estudio, corresponden a las producciones escritas, de los estudiantes, plasmadas en las guías de trabajo de las sesiones de la secuencia didáctica, además, de las entrevistas semiestructuradas, en donde, a cada estudiante le será asignada una tarea y se observará, analizará y describirá como lo señala Godino su “práctica”.

Según Blatter (2008, citado por Hernández et al., 2014) el estudio de caso corresponde a una aproximación investigativa, a profundidad, en la cual son estudiadas una o varias instancias o

unidades de un fenómeno. De esta manera, señala Hernández et al. (2014) que en los estudios cualitativos de caso, no se usan herramientas estandarizadas ni juicios a priori, ya que el contexto se encuentra constituido tanto por el entorno como por el caso, lo cual impide establecer los límites entre el uno y el otro.

En este sentido, se hace necesario establecer, para esta investigación, dos momentos para el estudio de casos. El primer momento, posterior a la aplicación de la prueba de entrada, en donde se establece el primer acercamiento del investigador al objeto de estudio y se analiza tanto el caso (estudiante) como el contexto (prueba de entrada). El segundo momento, corresponde a las entrevistas realizadas a los estudiantes objeto de estudio, posterior a la finalización de cada bloque de actividades perteneciente a las categorías establecidas en la secuencia didáctica. Se establece un análisis intrasujeto, para comparar lo que ocurre con el mismo sujeto en los distintos momentos planteados y, un análisis intersujeto, para comparar las actuaciones de los sujetos en el abordaje de la misma tarea.

3.2. Población

El CED Jairo Aníbal Niño de la Secretaría de Educación Distrital, se encuentra ubicado en la Localidad Octava (Kennedy), exactamente en el barrio Patio Bonito Sector I. Actualmente, cuenta con una planta docente de 50 maestros de ambas jornadas y un grupo de 1.520 estudiantes entre las jornadas mañana y tarde. La población estudiantil pertenece a estratos socioeconómicos 0, 1 y 2, expuestos a las diversas situaciones de riesgo social propias de la localidad y del sector. Cabe resaltar que la población de Patio Bonito presenta altos índices de desempleo, trabajo informal, violencia y desplazamientos.

Para llevar a cabo esta investigación se seleccionó el curso 601 de la jornada tarde, compuesto por 40 estudiantes, de los cuales 22 son niños entre los 10 y 13 años, y 18 son niñas entre los 11 y 13 años.

3.3. Criterios de selección de los tres casos de estudiado

Los sujetos referentes al caso de estudio analizado, corresponden a tres estudiantes que presentan desempeño escolar en tres niveles: alto, medio y bajo. Para su selección, se tuvieron en cuenta dos aspectos,

- Clasificación por parte de la docente titular de matemáticas.
- Resultados de la prueba de entrada

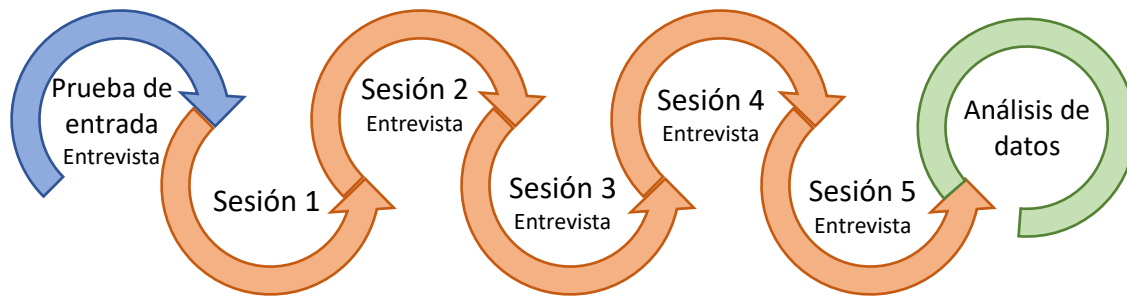
Para proteger la identidad de los menores de edad que participaron en el presente estudio, es preciso señalar que de ahora en adelante nos referiremos a años de la siguiente manera:

- S1 para el estudiante con desempeño en el nivel alto, cuya edad es 11 años.
- S2 para el estudiante con desempeño en el nivel medio, cuya edad es 12 años.
- S3 para el estudiante con desempeño en el nivel bajo, cuya edad es 11 años.

3.4 Descripción global del procedimiento

El siguiente esquema presenta las diferentes fases (prueba de entrada, secuencia didáctica, análisis de datos) de la investigación con sus momentos (sesión, entrevista) correspondientes.

FIGURA 13: DESCRIPCIÓN GLOBAL DEL PROCEDIMIENTO



Nota: Elaboración propia.

3.4.1. Instrumentos de recolección de la información.

Para esta investigación, se utilizaron los siguientes instrumentos de recolección de información basados en las diferentes fases y momentos del estudio.

TABLA 1: INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

Fase	Fuente	Instrumento	Anexo
Prueba de entrada	Estudiantes	Prueba escrita Entrevista	A.1.1
Sesión 1	Estudiantes	Guía de trabajo	A.2.1
Sesión 2	Estudiantes	Guía de trabajo Entrevista	A.2.2
Sesión 3	Estudiantes	Guía de trabajo Entrevista	A.2.3
Sesión 4	Estudiantes	Guía de trabajo Entrevista	A.2.4
Sesión 5	Estudiantes	Guía de trabajo Entrevista	A.2.5

3.4.2. Prueba de entrada.

La prueba de entrada (Anexo A.1.1) fue aplicada a todos los estudiantes del curso 601 del CED Jairo Aníbal Niño. Esta prueba corresponde a un cuestionario estructurado compuesto por 27 preguntas, respecto a las categorías: operadores multiplicativos naturales, operadores multiplicativos naturales sucesivos, composición de operadores multiplicativos naturales y fracciones equivalentes; las subcategorías: cantidad discreta y cantidad continua; con situaciones

de tipo: operador multiplicador, operador divisor y doble operador; y por último, referente al dato desconocido: estado inicial (Ei), estado final (Ef) y operador (Op). Cabe relacionar las combinaciones posibles para las preguntas:

Estado inicial	Operador	Estado final
√	√	?
√	?	√
?	√	√

Las categorías de análisis se definen en la prueba de entrada, teniendo en cuenta los antecedentes y el marco teórico de esta investigación. La siguiente tabla presenta la estructura general de la prueba.

TABLA 2. ESTRUCTURA GENERAL DE LA PRUEBA DE ENTRADA


Categoría	Subcategoría	Situación	Dato desconocido	Pregunta	
<i>Operadores multiplicativos naturales</i>	<i>Cantidad continua</i>	<i>Operador multiplicador</i>	<i>Estado final</i>	1	
			<i>Estado inicial</i>	3	
			<i>Operador</i>	5	
	<i>Cantidad discreta</i>		<i>Estado final</i>	22	
			<i>Estado inicial</i>	23	
			<i>Operador</i>	25	
	<i>Cantidad continua</i>		<i>Operador divisor</i>	<i>Estado final</i>	4
				<i>Estado inicial</i>	2
				<i>Operador</i>	6
	<i>Cantidad discreta</i>			<i>Estado final</i>	18
<i>Estado inicial</i>		13			
<i>Operador</i>		8			
<i>Operadores multiplicativos naturales sucesivos</i>	<i>Cantidad discreta</i>	<i>De doble operador multiplicador</i>		<i>Estado final</i>	17
		<i>De un operador divisor y un operador multiplicador</i>		<i>Estado final</i>	18
		<i>De un operador multiplicador y un operador divisor</i>		<i>Estado final</i>	19
		<i>De doble operador divisor</i>		<i>Estado final</i>	20
<i>Composición de operadores multiplicativos naturales</i>	<i>Cantidad discreta</i>	<i>De doble operador multiplicador</i>	<i>Estado inicial y estado final</i>	7	
		<i>De un operador multiplicador y un operador divisor</i>	<i>Estado inicial y estado final</i>	8	
		<i>De un operador divisor y un operador multiplicador</i>	<i>Estado inicial y estado final</i>	9	

Equivalencia de fraccionarios	Cantidad continua	De doble operador divisor	Estado inicial y estado final	10
		De doble operador divisor	Estado inicial y estado final	13
		De un operador divisor y un operador multiplicador	Estado inicial y estado final	14
		De un operador multiplicador y un operador divisor	Estado inicial y estado final	15
		De doble operador multiplicador	Estado inicial y estado final	16
	Cantidad continua	Equivalencia de operadores	Estado final	11
	Cantidad discreta		Estado final	12

La siguiente tabla muestra un ejemplo del cuadro de categorías establecido para cada pregunta de la prueba de entrada.

TABLA 3. EJEMPLO CUADRO DE CATEGORÍAS PARA LA PRUEBA DE ENTRADA

CATEGORÍA: SITUACIONES DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS

ENUNCIADO GENERAL DE LA SITUACIÓN PLANTEADA	Camilo y su padre son apasionados por las mariposas. Ellos salen cada fin de semana a fotografiarlas para estudiar la envergadura de cada una de ellas.										
	Observa la imagen.										
PREGUNTA	SUBCATEGORÍA	NOMBRE DEL PROBLEMA	POSIBILIDAD DE ESTADO U	ANÁLISIS DE LA RESPUESTA							
				Cantidad continua	De operador multiplicador	Estado final desconocido	Si la envergadura real de cierta especie es 9 cm y en una fotografía es tres veces mayor que la envergadura real, la medida de la envergadura de la mariposa en la foto es:	OPCIÓN DE RESPUESTA	POSIBLE OPERACIÓN	INTERPRETACIÓN DE OPERACIÓN	EXPLICACIÓN DE OPERACIÓN
								a) 27 cm	$9 \times 3 = 27$	Operación realizada de forma correcta, pues la envergadura real se amplía tres veces.	Relaciona correctamente la relación multiplicativa existente entre los datos del problema y aplica el operador adecuado.
								b) 3 cm	$9 \div 3 = 3$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que debe hallar un número que al ser multiplicado por 3 dé como resultado 9.	Relaciona erróneamente los datos del problema. Aunque, reconoce la relación multiplicativa de la situación planteada, no identifica el tipo de operador que debe aplicar.
								c) 12 cm	$9 + 3 = 12$	Confunde la expresión tres veces mayor o tres veces más, con la expresión mayor en tres o tres más en relación a la longitud dada.	Intuye el sentido de la operación, pero, confunde una expresión relacionada con un operador multiplicador con una expresión relacionada con un operador para la adición.
d) 6 cm	$9 - 3 = 6$	Confunde completamente el sentido del problema, quizás pensando que debe hallar un número que al ser mayor en 3 dé como resultado 9.	Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos. Además, confunde un operador multiplicador con un operador para la adición.								

3.4.3. Secuencia didáctica

Considerando cada uno de los elementos teóricos y los objetivos que dirigen nuestra investigación, se ha querido presentar, a los estudiantes, un material rico tanto en aspectos gráficos como en aspectos disciplinares, sin omitir ninguno de los expresados en el marco teórico. De esta manera, se ha dividido cada sesión de la secuencia en diferentes secciones, con el propósito de evidenciar los cambios, avances u obstáculos que se presenten en la construcción de las nociones abordadas.

La sección actívatte, ubicada en las sesiones 3,4 y 5 busca identificar aquellos significados personales e institucionales propios de la noción abordada. Consiste en una serie de preguntas que, los estudiantes, resuelven de manera individual para luego, ser socializadas y validadas al interior del grupo.

FIGURA 14. SECCIÓN ACTÍVATE SECUENCIA DIDÁCTICA

***** ACTIVATE*****

Representa cada problema como máquina y como igualdad, luego, resuélvelo. Observa el ejemplo.

A Nicolás le corresponde la cuarta parte de los 24 dulces que reparte su amigo.
¿Cuántos dulces debe recibir Nicolás?

EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO MÁQUINA

24 dulces $\left[\frac{1}{4} \times \right]$? \Rightarrow 24 dulces $\left[\frac{1}{4} \times \right]$ 6 dulces


EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO IGUALDAD

$\frac{1}{4} [24] = ? \Rightarrow \frac{1}{4} [24] = 6$

Respuesta: Nicolás recibe 6 dulces.

a. Luciana y Camilo están jugando tiro al blanco. El puntaje de Luciana es 35 puntos. Si el puntaje de Camilo es seis veces mayor que el puntaje de Luciana, ¿cuál es el puntaje de Camilo?

EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO MÁQUINA EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO IGUALDAD

 $\square [\square] = \square$

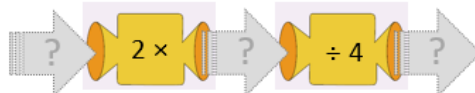
Nota: Tomada de la secuencia didáctica

La sección infórmate, en la cual los estudiantes pueden encontrar las explicaciones, ejemplos resueltos y definiciones propias de la noción abordada. La sección práctica, donde el estudiante realizara todo su trabajo exploratorio respecto de la noción abordada.

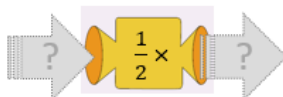
FIGURA 15. SECCIONES INFÓRMATE Y PRÁCTICA DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

***** INFORMATE*****

De acuerdo con los resultados obtenidos se puede concluir que la máquina:



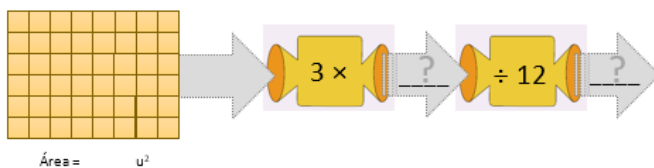
Produce el mismo efecto que la máquina:



Cuando sucede como en este caso que se tienen dos máquinas que siempre producen el mismo efecto se dice que las máquinas son **EQUIVALENTES**.

***** PRACTICA*****

5. Realiza el siguiente experimento para cada máquina dada. **IMPORTANTE:** Para responder, escribe el área del rectángulo correspondiente.



Nota: Tomada de la secuencia didáctica

La secuencia didáctica (Anexo A.2) que aplicamos consta de 5 sesiones, en la primera sesión se trata de que el estudiante establezca una relación entre operadores multiplicativos naturales y máquinas ampliadoras y reductoras utilizando cantidades discretas y continuas. En la segunda sesión se conduce al estudiante a la conversión de máquinas de operadores naturales divisores a representaciones fraccionarias (máquinas reductoras se pueden expresar de la forma $1/a$) entre cantidades discretas y continuas. En la tercera sesión se lleva al estudiante a la composición de operadores multiplicativos naturales a través de las máquinas ampliadoras y reductoras para convertirlas en máquinas compuestas tanto con cantidades discretas como continuas. En la cuarta sesión se trata de que el estudiante de soluciones a diversas situaciones problemas de

composición de operadores multiplicativos. En la última sesión se busca que los estudiantes las construyan máquinas compuestas equivalentes.

La siguiente tabla resume el contenido de la secuencia didáctica, en la que encontramos el número de la sesión, el nombre de la actividad y la descripción global de la sesión

TABLA 4. ESTRUCTURA GENERAL DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

<i>SESION UNO</i>	
<i>Nombre de la actividad</i>	OPERADORES MULTIPLICATIVOS NATURALES “Máquinas ampliadoras y reductoras”
<i>Descripción global de la sesión</i>	Esta sesión se desarrolla en dos momentos: Infórmate: ésta consiste en presentar a los estudiantes de grado sexto una serie de situaciones matemáticas que se desarrolla con un elemento llamado “máquina ampliadora o máquina reductora”; situaciones que los lleva a definir estado inicial (Ei), operador (Op) y estado final (Ef). Práctica: ésta consiste en el desarrollo de un cierto número de situaciones matemáticas con material concreto (cantidades discretas y/o continuas), que nos conduce a nosotros como investigadores empezar a indagar la forma como el estudiante aborda esta clase de situaciones directos e inversos con operadores simples, y como expresa y comprende las relaciones multiplicativas, desarrollando el operador como maquina ampliadora y reductora.
<i>SESION DOS</i>	
<i>Nombre de la actividad</i>	OPERADORES MULTIPLICATIVOS NATURALES “Máquinas reductoras de la forma 1/a”
<i>Descripción global de la sesión</i>	Esta sesión se desarrolla en dos partes y cada parte en dos momentos: Primera parte Infórmate: ésta consiste en presentar a los estudiantes de grado sexto unas situaciones matemáticas sobre como toda máquina reductora con operador multiplicativo divisor natural, también se puede presentar por medio de una fracción de la forma 1/a. Además, como dicha máquina tiene diferentes formas de expresar la relación multiplicativa entre el estado inicial (Ei) y el estado final (Ef). Práctica: ésta consiste en el desarrollo de un cierto número de situaciones matemáticas con material concreto (cantidades discretas y/o continuas), que nos conduce a nosotros como investigadores empezar a indagar la forma como el estudiante aborda esta clase de situaciones directos e inversos con operadores multiplicativos divisores naturales simples, y como lo expresa en la forma 1/a. Segunda parte Infórmate: ésta consiste en presentar a los estudiantes de grado sexto unas situaciones matemáticas sobre cómo se puede expresar una máquina sin hacer gráficos, en la forma $Op[Ei]=Ef$ Práctica: ésta consiste en el desarrollo de un cierto número de situaciones matemáticas, que nos conduce a explorar como los estudiantes solucionan problemas en los que se hace uso de los operadores multiplicativos divisores naturales, desarrollando el operador como maquina reductora.
<i>SESION TRES</i>	
<i>Nombre de la actividad</i>	COMPOSICION DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS NATURALES “Máquinas compuestas”

Descripción global de la sesión

Esta sesión se desarrolla en dos partes y cada parte en uno y dos momentos respectivamente:

Primera parte

Actívate: ésta consiste en presentar a los estudiantes de grado sexto unas situaciones matemáticas tipo problema, donde ellos deben representar cada problema como máquina y como igualdad; y por consiguiente buscar su solución para dar una respuesta numérica y verbal de ella.

Segunda parte

Infórmate: ésta consiste en la presentación a los estudiantes de dos máquinas simples que pueden unirse y transformarse en una máquina más poderosa llamada compuesta.

Formas de presentarlas:

- Máquina compuesta de dos máquinas simples ampliadoras.
- Máquina compuesta de dos máquinas simples reductoras.
- Máquina compuesta de una máquina simple ampliadora y una máquina simple reductora (máquina mixta)

Práctica: ésta consiste en el desarrollo de un cierto número de situaciones matemáticas, que nos conduce a explorar como los estudiantes solucionan problemas en los que se hace uso de las máquinas simples para lograr transformarlas en una máquina compuesta.

SESION CUATRO

Nombre de la actividad

Descripción global de la sesión

COMPOSICION DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS NATURALES

“Máquinas compuestas”

Esta sesión se desarrolla en un solo momento:

Actívate: ésta consiste en presentar a los estudiantes de grado sexto unas situaciones matemáticas tipo problema, donde ellos deben representar cada problema como máquina compuesta; y por consiguiente buscar su solución para dar una respuesta numérica y verbal de ella.

Práctica: ésta consiste en el desarrollo de dos situaciones de composición, en las cuales una de ellas es posible y la otra no.

Infórmate: ésta consiste en la presentación a los estudiantes la relación de equivalencia existente entre una máquina mixta (un operador ampliador y otro reductor) con el operador fracción obtenido de la composición de estas máquinas.

Práctica: ésta consiste en el obtener fracciones equivalentes a partir de la composición de operadores o de la representación de una máquina compuesta como un operador en forma de fracción.

SESION CINCO

Nombre de la actividad

Descripción global de la sesión

MAQUINAS EQUIVALENTES

“Máquinas equivalentes”

Esta sesión se desarrolla en tres momentos:

Actívate: ésta consiste en presentar a los estudiantes de grado sexto unas situaciones matemáticas, donde ellos deben de buscar si es posible encontrar dos máquinas compuestas que sean equivalentes.

Infórmate: ésta consiste en la presentación a los estudiantes de que una máquina compuesta mixta de dos operadores (uno ampliador y el otro reductor), se puede escribir como una máquina de un operador en forma de fracción.

Práctica: ésta consiste en el desarrollo de un cierto número de situaciones matemáticas, que nos conduce a explorar como los estudiantes solucionan situaciones de encontrar máquinas equivalentes a una máquina dada.

3.4.4. La entrevista semiestructurada

Hernández et al. (2014) define la entrevista como el intercambio de información realizado entre un entrevistador y el entrevistado, siendo la entrevista semiestructurada aquella en la cual el entrevistador tiene libertad de introducir aquellas preguntas que le sirvan para obtener información adicional.

Para efectos de nuestra investigación, después de la aplicación de las sesiones de la secuencia didáctica, se realizaron entrevistas a los estudiantes caso de estudio. Estas entrevistas consistían en estudiar la forma como estos estudiantes resolvían tareas representativas de los trabajos en clase.

TABLA 5. ENTREVISTAS SEMIESTRUCTURADAS

Entrevista No.	Indagación sobre
1	Prueba de entrada
2	Máquinas ampliadoras y reductoras
3	Máquinas reductoras de la forma $1/a$
4	Máquinas compuestas (composición de operadores multiplicativos)
5	Máquinas equivalentes

La siguiente tabla muestra la estructura global de una de las entrevistas semiestructuradas llevada a cabo en esta investigación.

TABLA 6: ESTRUCTURA DE UNA ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

Estructura de la entrevista

Tema	Operadores multiplicativos naturales “Máquinas reductoras de la forma $1/a$”
Momentos	Descripción del momento
Actividad de socialización de la prueba de entrada	Esta primera entrevista consiste en tomar la prueba de entrada y empezar a indicar a los estudiantes que expresen de forma verbal y escrita como habían resultado ciertos numerales; además se conduce a que ellos traten de encontrar los errores que hayan presentado durante el desarrollo de la misma. Otro aspecto a tener en cuenta es el de indagar sobre elementos que nos conduzcan al objetivo de esta investigación.
Actividad con fichas enumeradas	Esta actividad consiste en presentar a los estudiantes de grado sexto unas situaciones matemáticas sobre como toda máquina reductora con operador multiplicativo divisor natural, también se puede presentar por medio de una fracción de la forma $1/a$. Para ello se le presenta al estudiante una serie de fichas enumeradas donde tiene que encontrar el (Ef)

después de aplicarle a un (Ei) un operador multiplicativo ($\div a$). Además, se le solicita que exprese dicho operador de la forma $(1/a)$. En la medida que el estudiante realiza la actividad se le va preguntando como lo realiza y como llega a un resultado.

3.4.5. Procedimiento de organización y análisis de la información

Para el estudio acerca de la forma como los estudiantes componen operadores multiplicativos naturales y cómo estos hechos lo aproximan a la noción de equivalencia, se seguirá el siguiente procedimiento:

- En primera instancia, se presentará de manera detallada el análisis cuantitativo de cada una de las preguntas que conforman la prueba de entrada, de igual forma, se realizará un paralelo entre las categorías operadores multiplicativos naturales y sucesión de operadores multiplicativos respecto a los resultados obtenidos en la prueba de entrada y el desarrollo de la secuencia didáctica.
- Se mostrarán algunas tareas realizadas en el desarrollo de la secuencia didáctica que darán luces respecto a manera como, los estudiantes pertenecientes al curso 601, construyeron su aproximación a la equivalencia de fracciones.
- Finalmente, se expondrán la información correspondiente a los tres casos de estudio, analizando las tareas propuestas en el desarrollo de la secuencia didáctica. Para ello, se presentarán algunos aspectos originados a partir de un análisis intersujeto e intrasujeto.

4. ANÁLISIS, SISTEMATIZACIÓN E INTERPRETACIÓN DE LA INFORMACIÓN

Como se describió en 3.4.5, en esta sección, se presentan los dos tipos de análisis realizados. En primer lugar, se muestra el análisis de tipo cuantitativo que se realizó a los resultados de la prueba de entrada y a ciertas tareas que los estudiantes resolvieron en las guías aplicadas a lo largo de la secuencia didáctica. En segundo lugar, se presentan los análisis de tipo cualitativo realizados a la información recopilada en el seguimiento de los tres casos estudiados.

4.1. Análisis prueba de entrada

En la tabla 7, se presenta el porcentaje de éxito de los estudiantes del curso 601 respecto a las preguntas de la prueba de entrada relacionadas con operadores multiplicativos naturales (Preguntas 1 a 6 y 21 a 26. Ver anexo A.1.2).

TABLA 7. RENDIMIENTO EN SITUACIONES DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS NATURALES PRUEBA DE ENTRADA

Subcategoría	Continua		Discreta	
	Directo	Inverso	Directo	Inverso
Problemas				
Resultados	33%	29%	42%	29%

En la subcategoría continua se incluyen las situaciones que involucran magnitudes continuas, es decir, magnitudes que para expresar su cantidad tienen que ser medidas, que no siempre son expresables por un número natural, y en la subcategoría discreta se incluyen situaciones que involucran cantidades que son contables, que siempre son expresadas por un número natural.

Tal como se dijo en el apartado 2.4.1 diremos que un problema de la forma Estado-Operador-Estado, es decir $E_i \rightarrow Op \rightarrow E_f$ es directo cuando al tener el estado inicial (E_i) y el operador (Op) se debe calcular el estado final (E_f); y es inverso en dos casos, el primero, cuando al tener el

estado inicial (Ei) y el operador (Op) se calcula el estado final (Ef), y el segundo, cuando al tener estado inicial (Ei) y el estado final (Ef) se calcula el operador (Op).

De acuerdo con la tabla 7, se puede observar que los estudiantes tienen mayor éxito en los problemas directos que los inversos, independiente del tipo de cantidad.

En la siguiente tabla, se discriminan los porcentajes para cada una de las preguntas correspondientes a aquellas situaciones de operador multiplicador, respecto a cantidades continuas y discretas.

TABLA 8. ANÁLISIS CUANTITATIVO RESULTADOS PRUEBA DE ENTRADA. OPERADOR MULTIPLICATIVO NATURAL DE LA FORMA $A \times$

PRUEBA DE ENTRADA					
SUBCATEGORIA	SITUACION PROBLEMA	OPCION DE RESPUESTA	POSIBLE OPERACIÓN	RESULTADOS (%)	
CONTINUA	DIRECTA	27 cm	9×3	51%	
	P1. Si la envergadura real de cierta especie es 9 cm y en una fotografía es tres veces mayor que la envergadura real, la medida de la envergadura de la mariposa en la foto es:	3 cm	$9 \div 3$	8%	
		12 cm	$9 + 3$	36%	
		6 cm	$9 - 3$	5%	
	INVERSA	56 cm	$63 - 7$	21%	
		P3. Una fotografía de cierta especie de mariposas, ha sido ampliada 7 veces. La envergadura de la mariposa en esta fotografía es igual 63 cm. La envergadura real de la mariposa es:	431 cm	63×7	23%
		9 cm	$63 \div 7$	28%	
		70 cm	$63 + 7$	28%	
P5. Ellos tienen la fotografía de una mariposa cuya envergadura real es 3 cm. Si la envergadura de esta especie en la fotografía es 18 cm, se puede decir que la imagen ha sido ampliada:	15 veces	$18 - 3$	20%		
	6 veces	$18 \div 3$	49%		
	54 veces	18×3	5%		
	21 veces	$18 + 3$	26%		
DISCRETA	DIRECTA	15	$12 + 3$	26%	
		P22. Si en la bolsa hay 12 balotas rojas y el número de balotas blancas es tres veces más que el número de balotas rojas existentes, entonces el premio será de:	4	$12 \div 3$	13%
		9	$12 - 3$	21%	
		36	12×3	38%	
	INVERSA	44	$48 - 4$	15%	
		P23. Un estudiante indica que el número de balotas blancas corresponde al cuádruple de las balotas rojas existentes en la urna. Si en la urna hay 48 balotas blancas, el número de balotas rojas es:	192	48×4	18%
		52	$48 + 4$	31%	
		12	$48 \div 4$	33%	
	16 veces	$24 - 8$	36%		

P25. Si en la bolsa hay 8 balotas rojas y se entregan 24 entradas, entonces el número de balotas blancas respecto a las rojas es:	192 veces	24×8	8%
	3 veces	$24 \div 8$	28%
	32 veces	$24 + 8$	28%
PROMEDIO ACIERTOS OPERADOR MULTIPLICATIVO NATURAL DE LA FORMA $a \times$			38%

Nota: Las respuestas correctas están resaltadas en negrita.

De las preguntas pertenecientes a esta categoría, operador multiplicador de la forma $a \times$, podemos afirmar, en primer lugar, que el 38% de los estudiantes parece identificar situaciones en las cuales se requiere el uso de un operador multiplicador para su solución, mientras que, el porcentaje de estudiantes que interpreta la situación como si se tratara de un operador aditivo (en cualquiera de sus formas $+a$ y $-a$) es relativamente alto. En las situaciones directas, P1 es del 41% y P22 del 47%, y en las situaciones inversas, P3 es del 48%, P5 y P23 del 46% y P25 del 64%. En segundo lugar, se puede identificar que para los estudiantes resultan ser más fáciles aquellas situaciones relacionadas con cantidades continuas, que aquellas en las cuales se involucran cantidades discretas.

En la tabla 9, se discriminan los porcentajes para cada una de las preguntas correspondientes a aquellas situaciones de operador divisor, respecto a cantidades continuas y discretas.

TABLA 9. ANÁLISIS CUANTITATIVO RESULTADOS PRUEBA DE ENTRADA. OPERADOR MULTIPLICATIVO NATURAL DE LA FORMA $\div B$ Y OPERADOR FRACCIÓN DE LA FORMA $1/B$
PRUEBA DE ENTRADA

SUBCATEGORIA	SITUACION PROBLEMA	OPCION DE RESPUESTA	POSIBLE OPERACIÓN	RESULTADOS (%)
CONTINUA	DIRECTA P4. Una fotografía ha sido reducida 6 veces. Si la envergadura real de cierta especie de mariposa es 12 cm, entonces la envergadura de la mariposa en la fotografía es:	6 cm	$12 - 6$	28%
		2 cm	$12 \div 6$	15%
		72 cm	12×6	18%
	INVERSA P2. Si en una fotografía la envergadura de la cierta especie es 35 cm y esta medida es la séptima parte de	18 cm	$12 + 6$	38%
		28 cm	$35 - 7$	26%
		245 cm	35×7	23%
	42 cm	$35 + 7$	33%	

DISCRETA

la envergadura real de la mariposa, entonces la envergadura real es:

P6. En una fotografía la envergadura de una mariposa es igual a 84 cm. Si la envergadura real de la misma es 7 cm, entonces, el número de veces que es menor la envergadura real respecto a la de la fotografía es:

DIRECTA

P21. Si en la bolsa hay 16 balotas y la cuarta parte de ellas son blancas, entonces el número de entradas que se entregarán será de:

INVERSA

P24. Una profesora señala que el número de balotas blancas, es exactamente seis veces menos el número de las balotas rojas existentes en la urna. Si en la urna hay 3 balotas blancas, el número de balotas rojas es:

P26. Si se entregan 36 entradas y en la bolsa hay 6 balotas rojas, entonces el número de balotas blancas respecto a las rojas es:

PROMEDIO ACIERTOS OPERADOR MULTIPLICATIVO
NATURAL DE LA FORMA $\div b$ Y OPERADOR FRACCIÓN DE
LA FORMA $\frac{1}{b} \times$

5cm	$35 \div 7$	18%
77	$84 - 7$	26%
7		26%
91	$84 + 7$	26%
12	$84 \div 7$	20%
12	$16 - 4$	31%
64	16×4	13%
4	$16 \div 4$	46%
20	$16 + 4$	8%
3	$6 - 3$	16%
18	6×3	33%
2	$6 \div 3$	15%
9	$6 + 3$	36%
6 veces	$36 \div 6$	20%
216 veces	36×6	0%
30 veces	$36 - 6$	54%
42 veces	$36 + 6$	26%
		38%

Nota: Las respuestas correctas están resaltadas en negrita.

Respecto a las preguntas de la prueba de entrada en la que hace se referencia al operador divisor de la forma $\div b$ y el operador fracción de la forma $\frac{1}{b} \times$, podemos afirmar, en primer lugar, que este tipo de preguntas resulta de mayor dificultad que las de operador multiplicador, ya que, solo el 26% de los estudiantes parece identificar situaciones en las cuales se requiere el uso de un operador divisor o un operador fracción para su solución, mientras que, el porcentaje de estudiantes que interpreta la situación como si se tratara de un operador aditivo (en cualquiera de sus formas $+a$ y $-a$) es relativamente alto. En las situaciones directas, P4 es del 66% y P21 del 39%, y en las situaciones inversas, P2 es del 59%, P6 y P24 del 52% y P26 del 80%. En segundo lugar, se puede identificar que para los estudiantes resultan ser más fáciles aquellas situaciones

relacionadas con cantidades discretas, que aquellas en las cuales se involucran cantidades continuas, caso contrario a lo ocurrido en las situaciones de operador multiplicador.

Efectivamente, en las sesiones de enseñanza se pudo observar que, en los problemas relacionados con operadores multiplicativos naturales, algunos estudiantes recurren al uso de operadores aditivos (en cualquiera de sus formas) para determinar lo que ellos suponen es el resultado. Cabe resaltar que este proceder se presenta con mayor frecuencia en los problemas relacionados a operadores de la forma $\div b$ o $\frac{1}{b} \times$, que en aquellas situaciones referentes al operador multiplicador $a \times$. Asimismo, se encontraron respuestas en las cuales los estudiantes no parecen identificar correctamente los elementos propios de la relación estado – operador – estado.

A continuación, se presenta algunos de los tipos de respuesta encontrados para este tipo de problemas que se pueden representar como operadores multiplicativos naturales.

- a. Interpretación del problema como si fuera un operador aditivo (en cualquiera de sus formas $+a$ y $-a$)

FOTOGRAFÍA 1. RESPUESTAS A SITUACIONES DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS, TIPO A

c. Observa la imagen. Luego, completa.

Yo tengo 5 veces los puntos de Fernando

Camilo

$$\begin{array}{r} 149 \\ +5 \\ \hline 154 \end{array}$$

Yo tengo 3 veces menor que el de Lorena

Diana

$$\begin{array}{r} 150 \\ -3 \\ \hline 147 \end{array}$$

Yo tengo 150 puntos

Lorena

Mi puntaje es 2 veces mayor que el de Diana

Fernando

$$\begin{array}{r} 147 \\ \times 2 \\ \hline 294 \end{array}$$

• Lorena tiene 150 puntos.

• Fernando tiene 149 puntos.

• Camilo tiene 154 puntos.

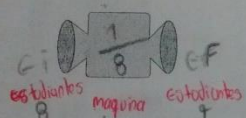
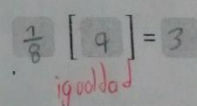
• Diana tiene 147 puntos.

b. Andrea tiene 32 dulces y quiere repartirlos entre sus compañeras de curso. Si a cada niña le corresponde una octava parte del total de dulces, entonces:

- ¿Cuántas compañeras de curso tiene Andrea? $24 \quad 32 - 8 = 24$
- ¿Cuántos dulces le correspondió a cada una?

c. En el grado sexto 8 estudiantes no terminaron la primera prueba de Olimpiadas Matemáticas. Si este número es un noveno del total de estudiantes que presentaron la prueba, entonces, ¿cuántos estudiantes presentaron la prueba?

EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO MÁQUINA EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO IGUALDAD

Respuesta: en laces para hacer operaciones lo no sumas el mayor de estudiantes en laces 32 presentaban la prueba.

8 estudiantes no hicieron la prueba
 17 estudiantes de en que presentaron la prueba

$\begin{array}{r} 10 \\ + 17 \\ \hline 25 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ + 9 \\ \hline 17 \end{array}$
--	--

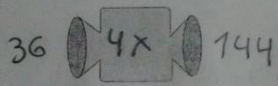
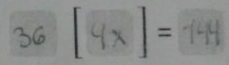
en tres los estudiantes son de 32
 y en total presentaron 9 de los 32 y los de más no

b. Identificación incorrecta de los elementos de la relación estado – operador – estado.

FOTOGRAFÍA 2. RESPUESTAS A SITUACIONES DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS, TIPO B

d. Un depósito de agua contiene 36 L al inicio del día. Si al final del día en el depósito solo hay 4 litros de agua, ¿qué parte del contenido inicial del depósito quedó?

EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO MÁQUINA EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO IGUALDAD

Respuesta: la parte del contenido inicial del depósito quedó en 144

- c. Interpretación del problema a través de un operador multiplicativo (en cualquiera de sus formas $a \times$, $\div b$ o $\frac{1}{b} \times$)

FOTOGRAFÍA 3. RESPUESTAS A SITUACIONES DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS, TIPO C

Observa la imagen. Luego, completa.

• Lorena tiene 150 puntos. • Fernando tiene 700 puntos.
 • Camilo tiene 500 puntos. • Diana tiene 50 puntos.

b. Andrea tiene 32 dulces y quiere repartirlos entre sus compañeras de curso. Si a cada niña le corresponde una octava parte del total de dulces, entonces:

• ¿Cuántas compañeras de curso tiene Andrea? 8

• ¿Cuántos dulces le correspondió a cada una? 4

$$32 \div 8 = 4$$

$$\begin{array}{r} 32 \overline{) 32} \\ \underline{-32} \\ 00 \end{array}$$

a. Luciana y Camilo están jugando tiro al blanco. El puntaje de Luciana es 35 puntos. Si el puntaje de Camilo es seis veces mayor que el puntaje de Luciana, ¿cuál es el puntaje de Camilo?

EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO MÁQUINA EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO IGUALDAD

$$35 \times 6 = 210$$

$$35 [6 \times] = 210$$

Respuesta: El puntaje de Camilo es 210

b. Una empresa ha sido contratada para instalar los postes de alumbrado público. Cada poste tiene bajo tierra un quinto de su longitud. Si la longitud del poste que se encuentra bajo tierra es 100 cm, ¿cuál es la medida real del poste?

EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO MÁQUINA EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO IGUALDAD

$$500 \times \frac{1}{5} = 100$$

$$\frac{1}{5} [100 \times] = 500$$

Respuesta: La medida real del poste es 500 cm

A continuación, se presenta el análisis para cada una de las preguntas correspondientes a aquellas situaciones relacionadas con la sucesión de operadores multiplicativos naturales. Este tipo de problemas requiere, para su solución, de la sucesión de operadores multiplicativos naturales de la forma $E_i \rightarrow Op1 \rightarrow E \rightarrow Op2 \rightarrow E_f$, donde, Op1 y Op2 pueden ser dos operadores multiplicadores, dos operadores divisores o Op1 un operador multiplicador y Op2 uno divisor, o viceversa.

TABLA 10. ANÁLISIS CUANTITATIVO PRUEBA DE ENTRADA. SUCESIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS NATURALES

PRUEBA DE ENTRADA					
SUBCATEGORIA	SITUACION PROBLEMA	CADENA	OPCION DE RESPUESTA	POSIBLE OPERACIÓN	RESULTADOS (%)
DISCRETA	P17. Si el curso 6° C en la segunda semana duplica el puntaje obtenido en la primera semana y luego, en la tercera semana quintuplica el puntaje de la segunda semana, el puntaje al final de la tercera semana es:	De doble operador multiplicador	60 puntos	$6 \times 2 = 12$ $12 \times 5 = 60$	31%
			42 puntos	$6 \times 2 = 12$ $6 \times 5 = 30$ $12 + 30 = 42$	18%
			13 puntos	$6 + 2 = 8$ $8 + 5 = 13$	15%
			16 puntos	$6 \times 2 = 12$ $12 + 5 = 17$	33%
			6 puntos	$6 \times 2 = 12$ $12 + 5 = 17$	33%
	P18. El curso 6° B en la segunda semana reduce a una tercera parte el puntaje obtenido en la primera semana. Si en la tercera semana duplica el puntaje de la segunda semana, el puntaje al final de la tercera semana es:	De un operador divisor y un operador multiplicador	21 puntos	$9 \div 3 = 3$ $9 \times 2 = 18$ $3 + 18 = 21$	26%
			8 puntos	$9 - 3 = 6$ $6 + 2 = 8$	31%
			6 puntos	$9 \div 3 = 3$ $3 \times 2 = 6$	33%
			3 puntos	$2 \times 3 = 6$ $9 - 6 = 3$	8%
	P19. Si el curso 6° A en la segunda semana cuadruplica el puntaje obtenido en la primera semana y luego, en la tercera semana reduce el puntaje de la segunda semana a una sexta parte, el puntaje al final de la tercera semana es:	De un operador multiplicador y un operador divisor	8 puntos	$12 \times 4 = 48$ $48 \div 6 = 8$	25%
			10 puntos	$12 + 4 = 16$ $16 - 6 = 10$	26%
			50 puntos	$12 \times 4 = 48$ $12 \div 6 = 2$ $48 + 2 = 50$	13%
			36 puntos	$4 \times 6 = 24$ $12 + 24 = 36$	28%
	P20. El curso 6° B en la segunda semana reduce a una mitad el puntaje obtenido en la primera semana. Si en la tercera semana lo reduce el puntaje de la segunda semana a la tercera parte, el puntaje al final de la tercera semana es:	De doble operador divisor	15 puntos	$18 \div 2 = 9$ $18 \div 3 = 6$ $9 + 6 = 15$	26%
			3 puntos	$18 \div 2 = 9$ $9 \div 3 = 3$	44%
			13 puntos	$18 - 2 = 16$ $16 - 3 = 13$	18%
			12 puntos	$2 \times 3 = 6$ $18 - 6 = 12$	10%
PROMEDIO ACIERTOS SUCESIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS NATURALES					33%

Nota: Las respuestas correctas están resaltadas en negrita.

Con respecto a la tabla 10 es posible afirmar que:

- En P17, que corresponde a una situación que puede representarse como una cadena de doble operador multiplicador ($E_i \rightarrow Op1(a \times) \rightarrow E \rightarrow Op2(b \times) \rightarrow E_f$), el 31% de los estudiantes resuelven el problema aplicando sucesivamente los dos operadores (primero $2 \times$ y después $5 \times$), el resto de los estudiantes hace la sucesión de operadores pero transforma ambos o uno de ellos en operador aditivo (el 15% resuelve $6 + 2 = 8$ y $8 + 5 = 13$ y, el 33% resuelve $6 \times 2 = 12$ y $12 + 5 = 17$).
- En la cadena de un operador multiplicador y otro operador divisor, los estudiantes reconocieron un orden determinado de operaciones presentes en el problema. Sin embargo, el 26% de los estudiantes parece confundir los operadores multiplicativos naturales con los operadores aditivos naturales. Por ejemplo, el problema 19 lo resuelven con la cadena $9 - 3 = 6$ y $6 + 2 = 8$ en vez de resolverlo con la cadena $9 \div 3 = 3$ y $3 \times 2 = 6$.
- En la cadena de doble operador divisor, el 44% de los estudiantes identifico que la estructura del problema corresponde a la representación $E_i \rightarrow Op1(\div b) \rightarrow E \rightarrow Op2(\div b) \rightarrow E_f$.

En el desarrollo del proceso de enseñanza se encontraron estas dificultades en los estudiantes, algunos de los tipos de respuesta encontrados para este tipo de problemas que se pueden representar como cadenas sucesivas de operadores fueron:

- a. Reducción de la cadena de dos operadores a una de un único operador, omitiendo uno de los operadores.

FOTOGRAFÍA 4. RESPUESTAS A SITUACIONES DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS SUCESIVOS, TIPO A

Compare la longitud de la cuerda que sale de la segunda máquina con la longitud de la cuerda que entra a la primera máquina y responde:

- ¿Es más largo o más corto lo que sale de la segunda máquina que lo que entra a la primera máquina?
Más largo
- ¿Cuántas veces es más largo o más corto lo que sale que lo que entra? 6 veces
- ¿Por qué? porque se multiplica

Compare la longitud de la cuerda que sale de la segunda máquina con la longitud de la cuerda que entra a la primera máquina y responde:

- ¿Es más largo o más corto lo que sale de la segunda máquina que lo que entra a la primera máquina?
El que sale por la segunda -> más largo
- ¿Cuántas veces es más largo o más corto lo que sale que lo que entra? 40 cm.
- ¿Por qué? Porque 20 x 2 es igual a 40 cm.

b. Interpretación de una cadena de dos operadores, pero ambos son transformados a operadores aditivos.

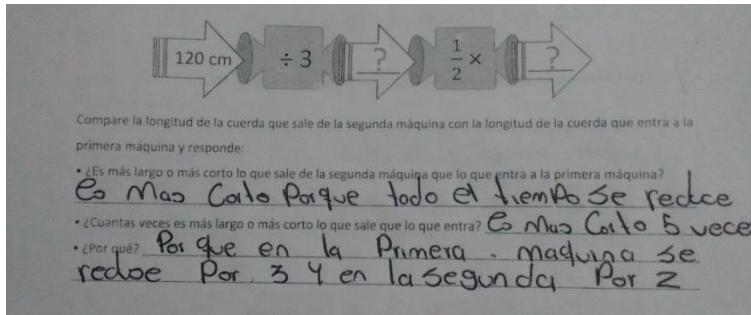
FOTOGRAFÍA 5. RESPUESTAS A SITUACIONES DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS SUCESIVOS, TIPO B

Compare el área de la figura que sale de la segunda máquina con el área de la figura que entra a la primera máquina y responde:

- ¿Es mayor o menor lo que sale de la segunda máquina que lo que entra a la primera máquina?
Es mayor lo que sale porque cuando sale 1 era 36 y cuando entra 18
- ¿Cuántas veces es mayor o menor lo que sale que lo que entra? 5 veces
- ¿Por qué? Porque 3 x + 2 x es = 5 veces

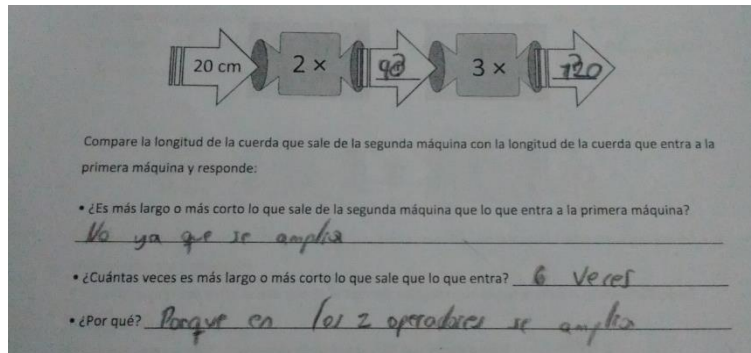
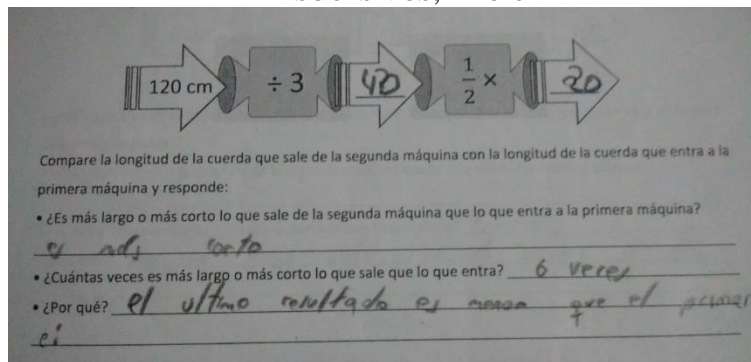
Compare el área de la figura que sale de la segunda máquina con el área de la figura que entra a la primera máquina y responde:

- ¿Es mayor o menor lo que sale de la segunda máquina que lo que entra a la primera máquina?
es menor
- ¿Cuántas veces es mayor o menor lo que sale que lo que entra? 6 veces
- ¿Por qué? porque el 2 de la operación 1 se une con 4 de operación 2 = 6 entonces



c. Interpretación correcta de una cadena de operadores sucesivos.

FOTOGRAFÍA 6. RESPUESTAS A SITUACIONES DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS SUCESIVOS, TIPO C



Respecto a los tres estudiantes pertenecientes al estudio de caso y basados en las tareas asignadas durante la entrevista correspondiente a esta sesión, fue posible establecer que las respuestas dadas por los sujetos S1, S2 y S3 se encuentran ubicadas dentro del tipo de respuesta C. De esta manera, es posible señalar que los estudiantes realizan correctamente cadenas sucesivas de operadores multiplicativos naturales (Ver anexos A.3.1, A.3.2 y A3.3).

En la tabla 11, se muestra el análisis para cada una de las preguntas correspondientes a aquellas situaciones de composición de operadores multiplicativos naturales. Este tipo de problemas requiere, para su solución, identificar que en la estructura $E_i \rightarrow Op1 \rightarrow E \rightarrow Op2 \rightarrow E_f$, los operadores multiplicativos naturales $Op1$ y $Op2$, se componen o transforman en uno solo, por lo tanto, la nueva estructura que adquiere la situación a solución es de la forma $E_i \rightarrow Op3 \rightarrow E_f$. $Op3$ es el operador resultante de la composición de $Op1$ y $Op2$, y produce en un único paso la misma transformación que producen la aplicación sucesiva de $Op1$ y $Op2$. $Op1$ y $Op2$ pueden ser dos operadores multiplicadores ($a \times$ y $b \times$), dos operadores divisores ($\div a$ y $\div b$) u $Op1$ un operador multiplicador ($a \times$) y $Op2$ uno divisor ($\div b$), o viceversa.

TABLA 11. RENDIMIENTO POR PREGUNTA PRUEBA DE ENTRADA. CATEGORÍA: COMPOSICIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS NATURALES
PRUEBA DE ENTRADA

COMPOSICIÓN	SUBCATEGORIA	SITUACION PROBLEMA	OPCION DE RESPUESTA	POSIBLE OPERACIÓN	RESULTADOS (%)
De doble operador multiplicador	DISCRETA	P7. Según el informe, el sector turístico en el año 2015 creció tres veces más con respecto al año 2014 y en el 2016, quintuplicó las cifras con respecto al 2015. De acuerdo con lo anterior, en el año 2016 el sector turístico aumento sus cifras con relación al año 2014:	15 veces	$3 \times 5 = 15$	18%
			8 veces	$3 + 5 = 8$	57%
			18 veces	$3 + (5 \times 3) = 3 + 15 = 18$	10%
			45 veces	$3 \times (5 \times 3) = 3 \times 15 = 45$	10%
	CONTINUA		21 veces mayor	$3 \times (3 + 4) = 3 \times 7 = 21$	18%
			12 veces mayor	$3 \times 4 = 12$	33%
			7 veces mayor	$3 + 4 = 7$	36%
	36 veces mayor	$3 \times (3 \times 4) = 3 \times 12 = 36$	13%		
De doble operador divisor	DISCRETA	P10. El informe indica que el sector agrícola ha disminuido sus cifras, en el 2015 los valores bajaron a 4 veces el valor del año 2014 y en el 2016, los valores bajaron a la mitad del valor que tenían en el 2015. De acuerdo con lo anterior, en el año 2016 el sector agrícola disminuyo sus cifras con relación al año 2014:	16 veces	$8 \times 2 = 16$	15%
			6 veces	$8 - 2 = 6$	31%
			2 veces	$8 - (8 - 2) = 8 - 6 = 2$	33%
			4 veces	$8 \div 2 = 4$	21%

De un operador multiplicador y un operador divisor	CONTINUA	P13. Si la imagen para una tarjeta resulta de reducir tres veces la imagen original y luego, volver la imagen obtenida seis veces menor, se puede afirmar que la imagen usada en una tarjeta respecto a la original es:	3 veces menor	$6 - 3 = 3$	28%
			2 veces menor	$6 \div 3 = 2$	21%
			18 veces menor	$3 \times 6 = 18$	0%
			9 veces menor	$6 + 3 = 9$	51%
	DISCRETA	P8. Según el informe, el sector minero en el año 2015 sextuplicó sus cifras con respecto al 2014 y en el 2016, disminuyó sus cifras a la mitad con respecto al 2015. De acuerdo con lo anterior, en el año 2016 el sector minero varió sus cifras con relación al año 2014:	24 veces	$6 \times (6 - 2) = 6 \times 4 = 24$	10%
			4 veces	$6 - 2 = 4$	15%
		3 veces	$6 \div 2 = 3$	49%	
		12 veces	$6 \times 2 = 12$	26%	
De un operador divisor y un operador multiplicador	CONTINUA	P15. Si la imagen para una carpeta resulta de aumentar dieciocho veces la imagen original y luego, reducir la imagen obtenida a la mitad, se puede afirmar que la imagen usada en una carpeta respecto a la original es:	34 veces mayor	$18 + (18 - 2) = 18 + 16 = 34$	2%
			20 veces mayor	$18 + 2 = 20$	18%
			36 veces mayor	$18 \times 2 = 36$	26%
			9 veces mayor	$18 \div 2 = 9$	54%
	DISCRETA	P9. El informe menciona que el sector energético el año 2015 disminuyó seis veces sus cifras con respecto al 2014 y en el 2016, triplicó las cifras con respecto al 2015. De acuerdo con lo anterior, en el año 2016 el sector energético varió sus cifras con relación al año 2014:	12 veces	$(6 \times 3) - 6 = 18 - 6 = 12$	10%
			9 veces	$6 + 3 = 9$	67%
		18 veces	$6 \times 3 = 18$	18%	
		2 veces	$6 \div 3 = 2$	5%	
	CONTINUA	P14. Si la imagen para un folleto resulta de disminuir veinticuatro veces la imagen original y luego, duplicar la imagen obtenida, se puede afirmar que la imagen usada en un folleto respecto a la original es:	24 veces menor	$(24 \times 2) - 24 = 48 - 24 = 24$	26%
		12 veces menor	$24 \div 2 = 12$	43%	
		26 veces menor	$24 + 2 = 26$	18%	
		48 veces menor	$24 \times 2 = 48$	13%	
	PROMEDIO ACIERTOS SUCESIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS NATURALES				27%

Nota: Las respuestas correctas están resaltadas en negrita.

Respecto a las preguntas de composición de operadores, se observa que, para los estudiantes, resulta más fácil aquellas situaciones de composición donde los dos operadores son multiplicadores en comparación con aquellas situaciones donde los dos operadores son divisores.

Además, resulta menos reconocibles aquellas situaciones en las cuales el operador divisor aparece primero que el operador multiplicador. No obstante, estas situaciones de composición mixta (un operador divisor y otro multiplicador) resultan tener mayor éxito, entre los estudiantes, respecto a las de composición de dos operadores multiplicadores o de dos operadores divisores. En la siguiente sección, analizaremos con más detalle las tareas concernientes a la composición de operadores multiplicativos naturales en lo relacionado desarrollo de la secuencia didáctica.

A continuación, se presentará el análisis concerniente a cada una de las preguntas perteneciente a la categoría de equivalencia. El análisis de los resultados de las preguntas 11 y 12 que corresponden a preguntas que buscan evaluar si los estudiantes tienen la capacidad de reconocer que cadenas de operadores diferentes pueden producir efectos iguales, es decir en las que se busca indagar sobre la equivalencia, se presentan un poco diferente a como se ha hecho con las preguntas anteriores, aquí se presentaran tablas para cada pregunta.

Pregunta 11. Juliana y Sofía juegan a ampliar y reducir sombras. Para ello, cada una usa su lápiz cuyas longitudes son diferentes. Juliana primero amplía la sombra de un lápiz a 4 veces su longitud real y luego esta sombra la reduce a 8 veces. Sofía en cambio primero amplía la sombra de su lápiz a 3 veces su longitud y luego esa sombra la reduce a 6 veces su tamaño.

Si se comparan las longitudes de las segundas sombras producidas por Juliana y Sofía con las longitudes reales de sus propios lápices, la afirmación correcta es:

TABLA 12. ANÁLISIS DE RESPUESTA PREGUNTA 11 DE LA PRUEBA DE ENTRADA

OPCIÓN DE RESPUESTA	POSIBLE OPERACIÓN	INTERPRETACIÓN DE OPERACIÓN	EXPLICACIÓN DE OPERACIÓN
a) Las longitudes de las segundas sombras que obtienen Juliana y	<p>Primero: $\text{Longitud} \times 4 = \text{Sombra1}$</p> <p>Segundo: $\text{Sombra1} \div 8 = \text{Sombra2}$</p>	<p>1º: Calcula el cuádruplo de la longitud real del lápiz.</p> <p>2º: Calcula la octava parte de la primera sombra generada.</p>	Operación realizada de forma correcta, pues reconoce que los operadores multiplicativos

Sofía son la mitad de las longitudes de sus respectivos lápices.

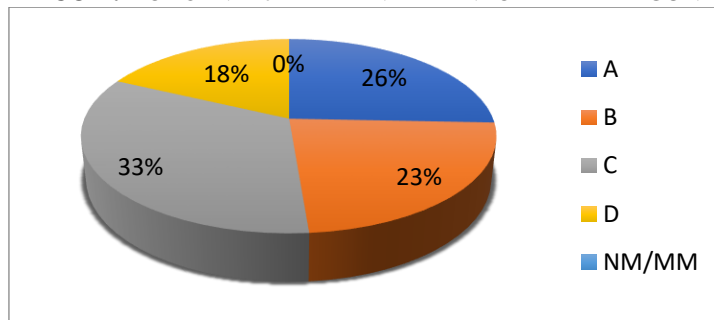
<p>Tercero: Longitud $\div 2$ = Sombra 2 Op₁: $\times 4$ Op₂: $\div 8$ La sucesión de operadores $\times 4$ y $\div 8$ equivale a aplicar $\div 2$</p>	<p>3°: Reconoce que los operadores multiplicativos $\times 4$ y $\div 8$ actúan como una cadena sucesiva sobre la longitud real del lápiz.</p>	<p>actúan como una cadena sucesiva sobre la longitud de los lápices.</p>	
<p>Primero: Longitud $\times 3$ = Sombra1 Segundo: Sombra1 $\div 6$ = Sombra2 Tercero: Longitud $\div 2$ = Sombra 2 Op₁: $\times 3$ Op₂: $\div 6$ La sucesión de operadores $\times 3$ y $\div 6$ equivale a aplicar $\div 2$</p>	<p>1°: Calcula el triple de la longitud real del lápiz. 2°: Calcula la sexta parte de la primera sombra generada. 3°: Reconoce que los operadores multiplicativos $\times 3$ y $\div 6$ actúan como una cadena sucesiva sobre la longitud real del lápiz.</p>	<p>Establece las relaciones multiplicativas existentes y las efectúa en un orden determinado, reconociendo que los operadores (Op\times y \divOp) aunque diferentes son equivalentes y que, al actuar sobre el mismo <i>Ei</i>, producen el mismo <i>Ef</i>.</p>	
<p>b) Las longitudes de los lápices de Juliana y Sofía son la mitad de las longitudes de las segundas sombras.</p>	<p>Primero: Longitud $\times 4$ = Sombra1 Segundo: Sombra1 $\div 8$ = Sombra2 Tercero: Sombra2 $\div 2$ = Longitud Op₁: $\times 4$ Op₂: $\div 16$ La sucesión de operadores $\times 4$ y $\div 16$ equivale a aplicar $\div 4$</p>	<p>1°: Calcula el cuádruplo de la longitud real del lápiz. 2°: Calcula la octava parte de la primera sombra generada. 3°: Calcula la mitad de la segunda sombra generada.</p>	<p>1°: Establece la relación multiplicativa solo para el criterio de la primera sombra. 2°: Establece la relación multiplicativa solo para el criterio de la segunda sombra. 3°: Relaciona erróneamente los operadores multiplicativos.</p>
<p>Primero: Longitud $\times 3$ = Sombra1 Segundo: Sombra1 $\div 6$ = Sombra2 Tercero: Sombra2 $\div 2$ = Longitud Op₁: $\times 3$ Op₂: $\div 12$ La sucesión de operadores $\times 3$ y $\div 12$ equivale a aplicar $\div 4$</p>	<p>1°: Calcula el triple de la longitud real del lápiz. 2°: Calcula la sexta parte de la primera sombra generada. 3°: Calcula la mitad de la segunda sombra generada.</p>	<p>Se concluye que establece las relaciones multiplicativas existentes, pero las efectúa de manera independiente. Además, desconoce que los operadores (Op\times y \divOp) aunque diferentes son equivalentes y que, al actuar sobre el mismo <i>Ei</i>, producen el mismo <i>Ef</i>.</p>	
<p>c) La longitud de la segunda sombra que produce Juliana es la cuarta parte de la longitud de su propio lápiz y la longitud de la segunda sombra producida por Sofía es la tercera parte de la longitud de su propio lápiz.</p>	<p>$8 - 4 = 4$</p>	<p>Intuye la presencia de una sucesión de operaciones. Pero, confunde los operadores presentes en la situación, quizás pensando que existe una relación de tipo aditivo.</p>	<p>Reconoce un orden determinado de operaciones presente en el problema. Pero confunde las expresiones relacionadas con operadores multiplicativos con expresiones relacionadas con operadores aditivos. Además, relaciona la expresión con la longitud de las segundas sombras.</p>
<p>$6 - 3 = 3$</p>	<p>Intuye la presencia de una sucesión de operaciones. Pero, confunde los operadores presentes en la situación, quizás pensando que existe una relación de tipo aditivo.</p>	<p>Reconoce un orden determinado de operaciones presente en el problema. Pero confunde las expresiones relacionadas con operadores multiplicativos con expresiones relacionadas con operadores aditivos. Además, relaciona la expresión con la longitud de las segundas sombras.</p>	

d) La longitud del lápiz de Juliana es la cuarta parte de la longitud de la segunda sombra que ella produce y la longitud del lápiz de Sofía es la tercera parte de la longitud de la segunda sombra que ella produce.

$8 - 4 = 4$	Intuye la presencia de una sucesión de operaciones. Pero, confunde los operadores presentes en la situación, quizás pensado que existe una relación de tipo aditivo.	<p>Se concluye, que desconoce que los operadores ($Op\times$ y $\div Op$) aunque diferentes son equivalentes y que, al actuar sobre el mismo Ei, producen el mismo Ef.</p> <p>Reconoce un orden determinado de operaciones presente en el problema. Pero confunde las expresiones relacionadas con operadores multiplicativos con expresiones relacionadas con operadores aditivos. Además, relaciona la expresión con la longitud de los lápices.</p>
$6 - 3 = 3$	Intuye la presencia de una sucesión de operaciones. Pero, confunde los operadores presentes en la situación, quizás pensado que existe una relación de tipo aditivo.	
		<p>Se concluye, que desconoce que los operadores ($Op\times$ y $\div Op$) aunque diferentes son equivalentes y que, al actuar sobre el mismo Ei, producen el mismo Ef.</p>

Nota: Las respuestas correctas están resaltadas en negrita.

GRÁFICO 1: PORCENTAJE DE RENDIMIENTO DE LA PREGUNTA 11



Pregunta 12. El día de hoy se abrió la inscripción para los talleres de Artes Plásticas y de Música, que ofrecerán los profesores Dalila y Beto, respectivamente, a los niños de los grados primero y segundo. Para saber la cantidad de alumnos, de cada grado, que recibirían este año, ellos acordaron:

I. Que el número de estudiantes que cada profesor recibiría en su taller fuera el mismo.

II. Que la profesora Dalila recibiera la tercera parte de los estudiantes, de su taller, del grado primero y que 9 veces esa cantidad de estudiantes de primero, sean los estudiantes de grado segundo.

III. El profesor Beto dijo que la mitad de los estudiantes de su taller fueran de grado primero y que 6 veces esa cantidad de estudiantes de primero sean de grado segundo.

Es correcto decir:

TABLA 13. ANÁLISIS DE RESPUESTA PREGUNTA 12 DE LA PRUEBA DE ENTRADA

OPCIÓN DE RESPUESTA	POSIBLE OPERACIÓN	INTERPRETACIÓN DE OPERACIÓN	EXPLICACIÓN DE OPERACIÓN
a) La cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe la profesora Dalila es la sexta parte del total de estudiantes de su taller y que, la cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe el profesor Beto es la cuarta parte del total de estudiantes de su taller.	<p>Primero: $- 3$ Segundo: $+ 9$ Tercero: $9 - 3 = 6$</p>	<p>1°: Relaciona la expresión “tercera parte” con la expresión tres menos cierto valor. 2°: Relaciona la expresión “nueve veces” con la expresión nueve más. 3°: Intuye la presencia de una sucesión de operaciones. Pero, confunde los operadores presentes en la situación, quizás pensado que existe una relación de tipo aditivo.</p>	<p>Reconoce un orden determinado de operaciones presente en el problema. Pero confunde las expresiones relacionadas con operadores multiplicativos con expresiones relacionadas con operadores aditivos.</p> <p>Se concluye, que desconoce que los operadores ($Op \times$ y $\div Op$) aunque diferentes son equivalentes y que, al actuar sobre el mismo Ei, producen el mismo Ef.</p>
	<p>Primero: $- 2$ Segundo: $+ 6$ Tercero: $6 - 2 = 4$</p>	<p>1°: Relaciona la expresión “mitad” con la expresión dos menos cierto valor. 2°: Relaciona la expresión “seis veces” con la expresión seis más. 3°: Intuye la presencia de una sucesión de operaciones. Pero, confunde los operadores presentes en la situación, quizás pensado que existe una relación de tipo aditivo.</p>	
b) Que la cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe cada profesor, es la tercera parte de la cantidad de estudiantes de sus talleres.	<p>Primero: Total $\div 3 =$ Est primero Segundo: Est primero $\times 9 =$ Est segundo La sucesión de operadores $\times 3$ y $\div 9$ equivale a aplicar $\div 3$</p>	<p>1°: Calcula el número de estudiantes de primero, el cual es la tercera parte del total de estudiantes. 2°: Calcula el número de estudiantes de segundo, el cuál es nueve veces el número de estudiantes de primero. 3°: Confunde la función de los operadores, quizás pensando que debe formar una fracción.</p>	<p>1°: Establece la relación multiplicativa solo para el criterio de la primera sombra. 2°: Establece la relación multiplicativa solo para el criterio de la segunda sombra. 3°: Relaciona erróneamente los operadores multiplicativos.</p>

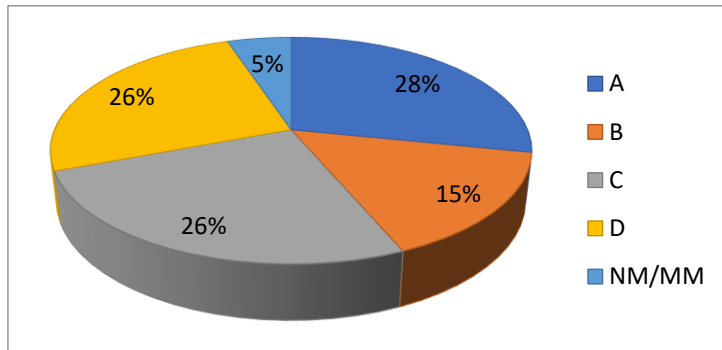
c) Que la cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe cada profesor es 3 veces la cantidad de estudiantes de sus talleres.

<p>Primero: Total $\div 2 =$ Est primero Segundo: Est primero $\times 6 =$ Est segundo La sucesión de operadores $\times 2$ y $\div 6$ equivale a aplicar $\div 3$</p>	<p>1°: Calcula el número de estudiantes de primero, el cual es la tercera parte del total de estudiantes. 2°: Calcula el número de estudiantes de segundo, el cuál es nueve veces el número de estudiantes de primero. 3°: Confunde la función de los operadores, quizás pensando que debe formar una fracción.</p>	<p>Se concluye que establece las relaciones multiplicativas existentes, pero, desconoce que los operadores ($Op \times$ y $\div Op$) aunque diferentes son equivalentes y que, al actuar sobre el mismo Ei, producen el mismo Ef.</p>
<p>Primero: Total $\div 3 =$ Est primero Segundo: Est primero $\times 9 =$ Est segundo $Op_1: \times 9$ $Op_2: \div 3$ La sucesión de operadores $\times 9$ y $\div 3$ equivale a aplicar $\times 3$</p>	<p>1°: Calcula el número de estudiantes de primero, el cual es la tercera parte del total de estudiantes. 2°: Calcula el número de estudiantes de segundo, el cuál es nueve veces el número de estudiantes de primero. 3°: Reconoce que los operadores multiplicativos $\times 9$ y $\div 3$ actúan como una cadena sucesiva sobre el total de estudiantes del taller.</p>	<p>Operación realizada de forma correcta, pues reconoce que los operadores multiplicativos $\div 3$ y $\times 6$ actúan como una cadena sucesiva sobre el total de estudiantes.</p> <p>Establece las relaciones multiplicativas existentes y las efectúa en un orden determinado, reconociendo que los operadores ($Op \times$ y $\div Op$) aunque diferentes son equivalentes y que, al actuar sobre el mismo Ei, producen el mismo Ef.</p>
<p>Primero: Total $\div 2 =$ Est primero Segundo: Est primero $\times 6 =$ Est segundo $Op_1: \div 2$ $Op_2: \times 6$ La sucesión de operadores $\times 6$ y $\div 2$ equivale a aplicar $\times 3$</p>	<p>1°: Calcula el número de estudiantes de primero, el cual es la tercera parte del total de estudiantes. 2°: Calcula el número de estudiantes de segundo, el cuál es nueve veces el número de estudiantes de primero. 3°: Reconoce que los operadores multiplicativos $\times 6$ y $\div 2$ actúan como una cadena sucesiva sobre el total de estudiantes del taller.</p>	<p>1°: Intuye la relación multiplicativa de la operación para el año 2015. 2°: Intuye la relación multiplicativa de la operación para el año 2016. 3°: Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos.</p>
<p>Total $\div 9 =$ Est segundo</p>	<p>Intuye la presencia de un operador multiplicativo. Pero, confunde completamente el sentido de la operación y los datos del problema.</p>	<p>1°: Intuye la relación multiplicativa de la operación para el año 2015. 2°: Intuye la relación multiplicativa de la operación para el año 2016.</p>
<p>Total $\div 6 =$ Est segundo</p>	<p>Intuye la presencia de un operador multiplicativo. Pero, confunde completamente el sentido de la operación y los datos del problema.</p>	<p>3°: Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos.</p>

d) La cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe la profesora Dalia es la novena parte del total de estudiantes de su taller y que la cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe el profesor Beto es la sexta parte del total de estudiantes de su taller.

Nota: Las respuestas correctas están resaltadas en negrita.

GRÁFICO 2: PORCENTAJE DE RENDIMIENTO PREGUNTA 12



Los resultados de las preguntas 11 y 12 muestran que un poco más de la cuarta parte de los estudiantes seleccionan la opción correcta. Y que más o menos la misma cantidad selecciona la opción que resuelve la composición de los operadores mediante la sustracción y no mediante la división. El análisis que más adelante se realizará de las respuestas que den los estudiantes sobre este tipo de tareas ofrecerá alguna luz sobre cómo proceden en estos casos.

Los resultados en esta tarea presentan cierta correspondencia con los de la tabla 11, en ésta se pudo evidenciar que menos de la mitad de los estudiantes logró resolver satisfactoriamente las preguntas relacionadas con la categoría de composición de operadores multiplicativos.

4.2. Análisis de algunas tareas de composición de operadores multiplicativos y de equivalencia

En 4.1, se analizaron algunas de las respuestas dadas por los estudiantes en la prueba inicial, especialmente en tareas relacionadas a los operadores multiplicativos naturales y sus sucesiones. En esta sección, se analizan las producciones de los estudiantes en algunas tareas directamente relacionadas con el objeto de esta investigación; relación entre composición de operadores multiplicativos y equivalencia de fraccionarios de la forma $\frac{1}{b}$. Por eso, abordaremos de manera

puntual algunas tareas específicas de las sesiones 4 y 5 de la secuencia didáctica, concernientes a la composición de operadores multiplicativos y fracciones equivalentes.

4.2.1 Análisis de algunas tareas de composición de operadores multiplicativos

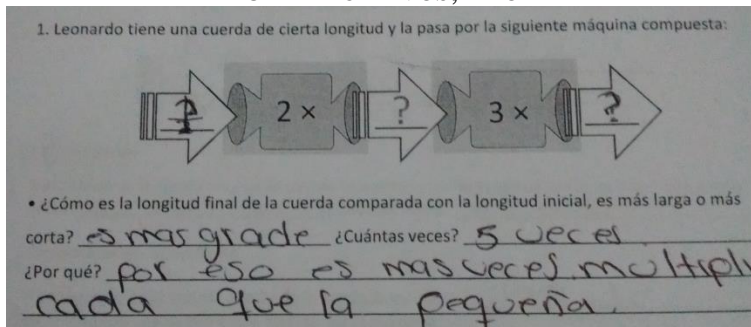
En la segunda parte de la sesión cuatro (numerales 1, 2 y 4) (Ver anexo A.2.4), se solicitó a los estudiantes establecer la relación multiplicativa existente entre dos operadores. De esta manera, se buscaba que, los estudiantes, omitieran el procedimiento de sucesión de operadores y transformasen a través de la composición los dos operadores dados en uno sólo.

En el numeral 1, se propone a los estudiantes una situación en la cual se espera que, para llegar al resultado, realice la composición de los operadores $Op1(2\times)$ y $Op2(3\times)$, determinando que la relación multiplicativa entre los dos operadores es correspondiente al operador $Op3(6\times)$. Se pudo observar que la mayoría de los estudiantes pudieron expresar de manera correcta el esquema $Ei \rightarrow Op1 \rightarrow E \rightarrow Op2 \rightarrow Ef$ en su composición $Ei \rightarrow Op1Op2 \rightarrow Ef$. No obstante, algunos estudiantes no pudieron cumplir la tarea.

Con relación a lo ocurrido en este numeral, se pudieron identificar tres tipos de respuesta.

- a. Composición de los operadores, pero interpretando que son de tipo aditivo.

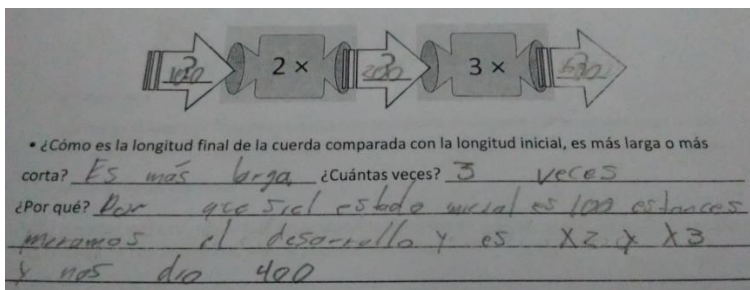
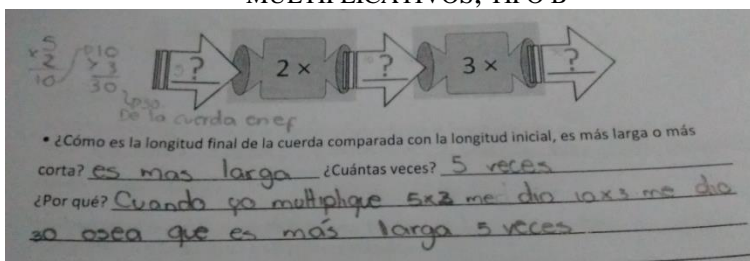
FOTOGRAFÍA 7. RESPUESTA SITUACIÓN 1 DE COMPOSICIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS, TIPO A



El estudiante considera que la longitud final de la cuerda comparada con la longitud inicial “es 5 veces más grande”, quizás interpretando que se deben sumar los operadores.

- b. Solución del problema a través de un ejemplo, sin anticipar el resultado por medio de la composición de operadores.

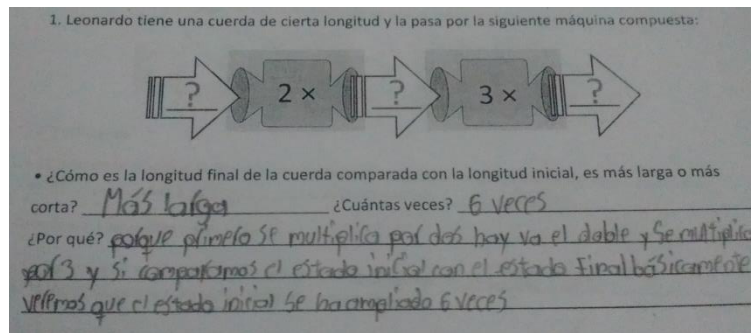
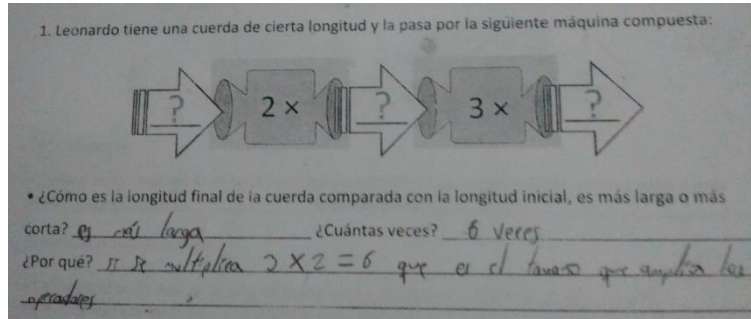
FOTOGRAFÍA 8. RESPUESTAS SITUACIÓN 1 DE COMPOSICIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS, TIPO B



Se observa que los estudiantes necesitan ejemplificar la situación planteada para poder dar algún tipo de respuesta. Aunque el ejemplo propuesto, por ellos mismos, es correcto, parece ser que no logran establecer la relación multiplicativa existente al comparar la longitud final de la cuerda con la longitud inicial. Este hecho puede indicar que, el estudiante, no anticipa el resultado usando la composición de operadores.

c. Composición correcta de los operadores.

FOTOGRAFÍA 9. RESPUESTA SITUACIÓN 1 DE COMPOSICIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS, TIPO C

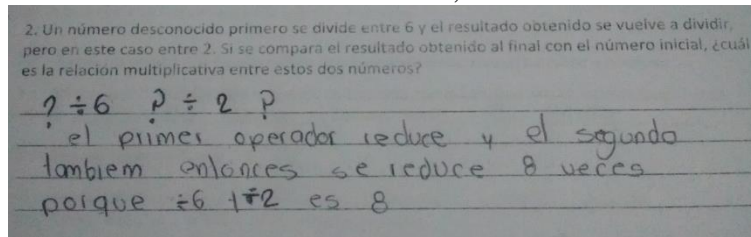


El estudiante considera que la longitud final de la cuerda comparada con la longitud inicial “es 6 veces más larga”, justificando que “es el tamaño que amplían los operadores”.

En el numeral 2, se pide, a los estudiantes la composición de los operadores $Op1(\div 2)$ y $Op2(\div 6)$ y se espera que, los estudiantes, determinen que la relación multiplicativa entre los dos operadores es correspondiente al operador $Op3(\div 12)$. Aunque aproximadamente la mitad de los estudiantes pudieron cumplir la tarea, se pudieron observar dos tipos más de respuesta, como los mostrados a continuación.

- a. Composición de los operadores, pero interpretando que son de tipo aditivo.

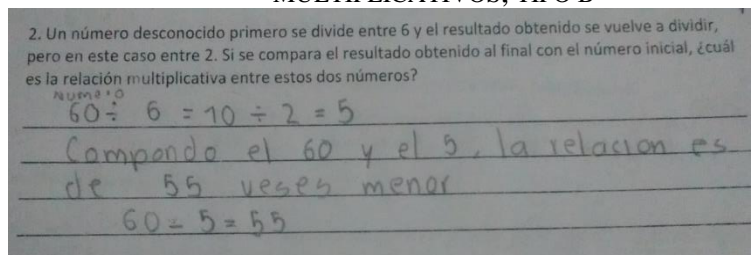
FOTOGRAFÍA 10. RESPUESTA SITUACIÓN 2 DE COMPOSICIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS, TIPO A



El estudiante considera que el resultado final comparado con el inicial es 8 veces más corto, interpretando que primero reduce en seis y luego, en dos, de esta manera, reduce en ocho.

- b. Solución del problema a través de un ejemplo, sin anticipar el resultado por medio de la composición de operadores.

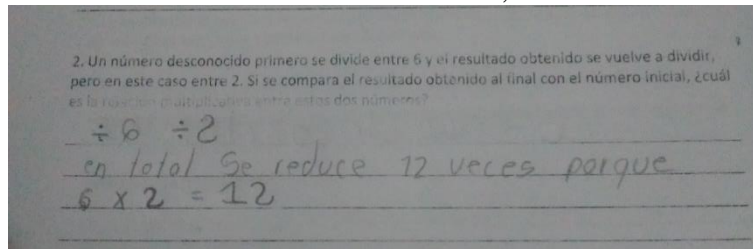
FOTOGRAFÍA 11. RESPUESTA SITUACIÓN 2 DE COMPOSICIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS, TIPO B



El estudiante recurre a un ejemplo para dar respuesta a la situación planteada. Si bien, el ejemplo planteado es correcto, parece ser que no establece la relación multiplicativa existente ni anticipa el resultado usando la composición de operadores.

- c. Composición correcta de los operadores.

FOTOGRAFÍA 12. RESPUESTA SITUACIÓN 2 DE COMPOSICIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS, TIPO C

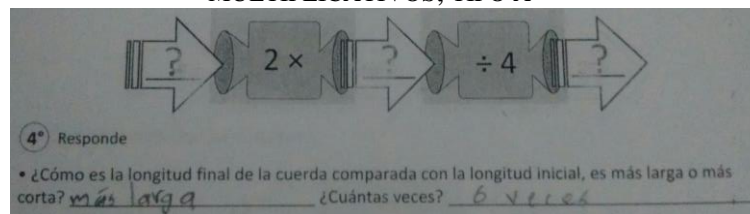


El estudiante considera que el resultado final comparado con el inicial es 12 veces más corto, interpretando que primero reduce en seis y luego, en dos, de esta manera, reduce en doce.

En el numeral 4, se pide, a los estudiantes la composición de los operadores $Op1(2\times)$ y $Op2(\div 4)$ y se espera que, los estudiantes, determinen que la relación multiplicativa entre los dos operadores es correspondiente al operador $Op3(\div 2)$. Si bien, algunos de los estudiantes pudieron cumplir la tarea, se observó un tipo de respuesta diferente a los presentados en los problemas anteriores.

- a. Composición de los operadores, pero interpretando que son de tipo aditivo.

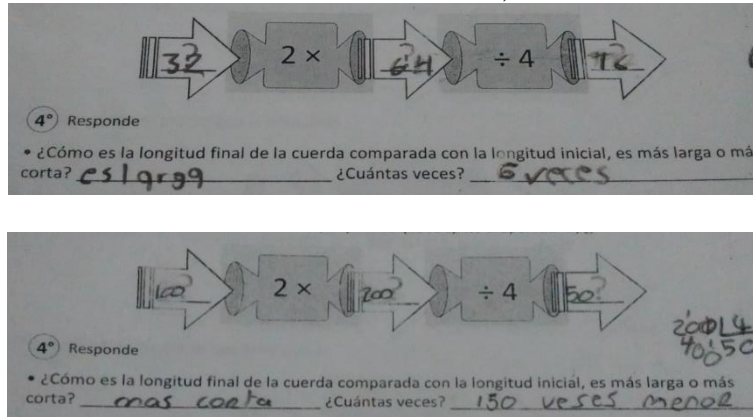
FOTOGRAFÍA 13. RESPUESTA SITUACIÓN 3 DE COMPOSICIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS, TIPO A



El estudiante considera que la longitud final de la cuerda comparada con la longitud inicial “es 6 veces más larga”, quizás interpretando que se deben suman los operadores.

- b. Solución del problema a través de un ejemplo, sin anticipar el resultado por medio de la composición de operadores.

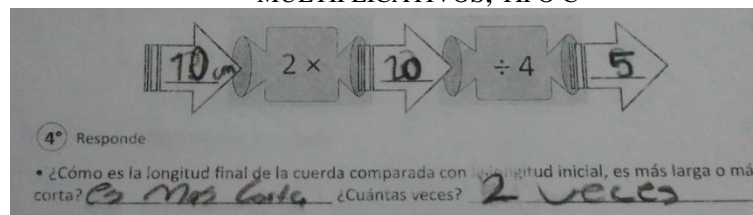
FOTOGRAFÍA 14. RESPUESTAS SITUACIÓN 3 DE COMPOSICIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS, TIPO B



Se observa que los estudiantes proponen, ellos mismos, un ejemplo respecto a la situación planteada para poder dar respuesta al problema. Aunque el ejemplo es correcto, parece ser que no establecen la relación multiplicativa existente al comparar la longitud final de la cuerda con la longitud inicial, ni tampoco, logran anticipar el resultado usando la composición de operadores.

- c. Composición correcta de los operadores.

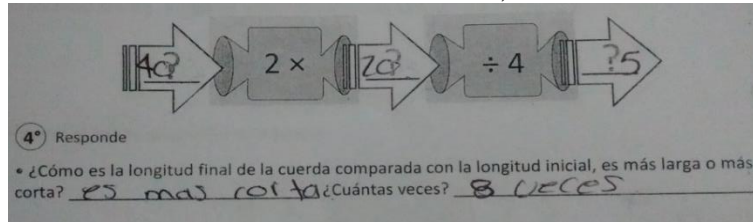
FOTOGRAFÍA 15. RESPUESTA SITUACIÓN 3 DE COMPOSICIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS, TIPO C



El estudiante considera que la longitud final de la cuerda comparada con la longitud inicial “es 2 veces más corta”, interpretando que primero amplía dos veces y luego, reduce cuatro veces, de esta manera, reduce en dos.

- d. Composición de los operadores, pero ambos son interpretados como operadores de la misma forma (los dos operadores multiplicadores o divisores).

FOTOGRAFÍA 16. RESPUESTA SITUACIÓN 3 DE COMPOSICIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS, TIPO D



El estudiante recurre a un ejemplo para dar respuesta a la situación planteada. Se observa que el ejemplo planteado no es correcto, quizás interpreta que los dos operadores son de la misma forma (los dos operadores divisores) y realiza la composición, por lo tanto, considera que la longitud final de la cuerda comparada con la longitud inicial “es 8 veces más corta”.

Respecto a los tres estudiantes pertenecientes al estudio de caso y basados en las tareas asignadas durante la entrevista correspondiente a esta sesión, fue posible establecer que las respuestas dadas por el sujeto S1 se encuentran ubicadas dentro del tipo de respuesta C, lo cual permite señalar que el estudiante puede realizar composiciones de las formas $Op1(a \times)$ y $Op2(b \times)$, $Op1(\div a)$ y $Op2(\div b)$, y, $Op1(a \times)$ y $Op2(\div b)$ (Ver anexo A.3.1).

Por otra parte, las respuestas dadas por sujetos S2 y S3, indican que los mismos, parecen realizar correctamente de la composición de operadores de la forma $Op1(a \times)$ y $Op2(b \times)$, mientras que presentan dificultad al realizar composiciones de las formas $Op1(\div a)$ y $Op2(\div b)$, y, $Op1(a \times)$ y $Op2(\div b)$ (Ver anexos A.3.2 y A.3.3).

4.2.2 Análisis de algunas tareas de equivalencia de fracciones

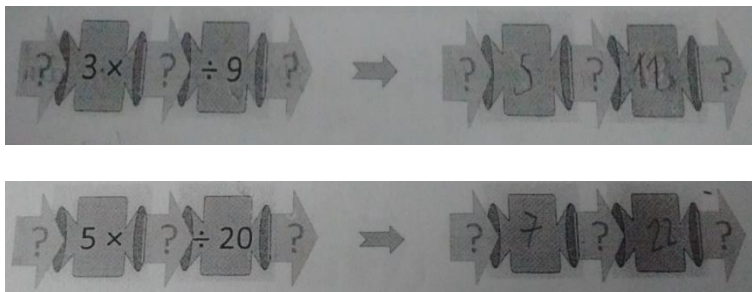
En el apartado anterior 4.2.1, se describieron las respuestas y dificultades que los estudiantes presentaron al resolver tareas de composición, ahora, en esta sección se ilustra el proceso que siguen los estudiantes al abordar algunas tareas de equivalencia. Estas tareas son de dos tipos, equivalencia de máquinas compuestas de operadores multiplicativos y equivalencia de máquinas de operadores fraccionarios (recuérdese que esta investigación solo estudia la equivalencia entre un tipo particular de fracciones: las reductibles a la forma $\frac{1}{b}$).

En la sesión cinco (Ver anexo A.2.5) sección “actívate” se pide a los estudiantes encontrar una máquina equivalente a una dada (compuesta de dos operadores de la forma $a \times$ y $\div b$) y con base a estas tres situaciones se les solicitar escribir “un método que permita obtener una máquina compuesta equivalente a una máquina dada”.

Con relación a lo ocurrido en este numeral, se pudieron identificar algunos tipos de respuesta.

- a. Uso de relaciones aditivas para encontrar máquinas equivalentes.

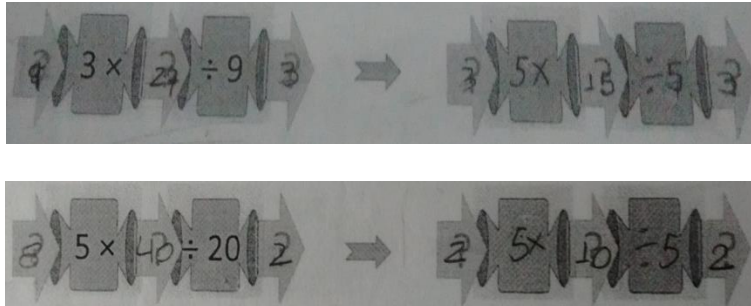
FOTOGRAFÍA 17. RESPUESTAS SITUACIONES DE EQUIVALENCIA DE FRACCIONARIOS, TIPO A



El estudiante parece considerar que la manera correcta de obtener una máquina equivalente a la dada es adicionar el mismo número (en este caso el número 2) a cada uno de los operadores. De esta manera, a cada uno de los operadores $Op1(a \times)$ y $Op2(\div b)$, se les adiciona el número 2.

- b. Uso de un ejemplo para encontrar máquinas equivalentes.

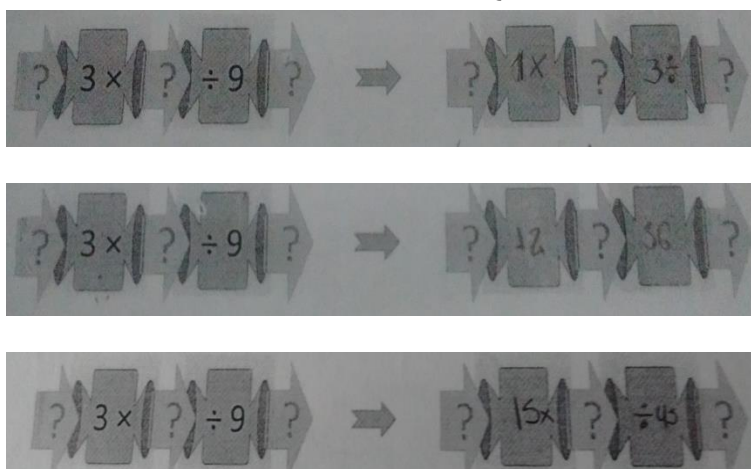
FOTOGRAFÍA 18. RESPUESTAS SITUACIONES DE EQUIVALENCIA DE FRACCIONARIOS, TIPO B



Se observa que, el estudiante, propone un ejemplo respecto a la situación planteada para poder dar respuesta al problema. Aunque los efectos producidos por las máquinas son correctos, parece ser que el estudiante interpreta que una máquina equivalente es aquella que produce el mismo estado final, más no la misma transformación, por ello, omite que el estado inicial debe ser también el mismo.

- c. Uso de relaciones multiplicativas para encontrar máquinas equivalentes.

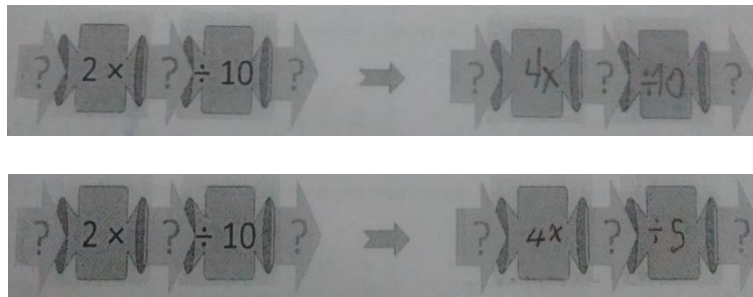
FOTOGRAFÍA 19. RESPUESTAS SITUACIONES DE EQUIVALENCIA DE FRACCIONARIOS, TIPO C



Los estudiantes usan relaciones multiplicativas (multiplica o divide por el mismo número cada operador) para encontrar máquinas equivalentes.

d. Otras formas de encontrar máquinas equivalentes.

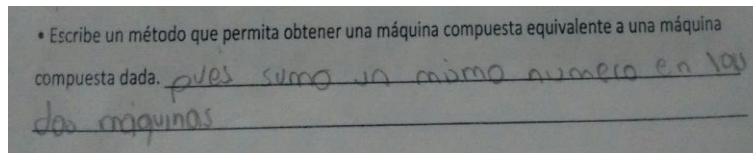
FOTOGRAFÍA 20. RESPUESTAS SITUACIONES DE EQUIVALENCIA DE FRACCIONARIOS, TIPO D



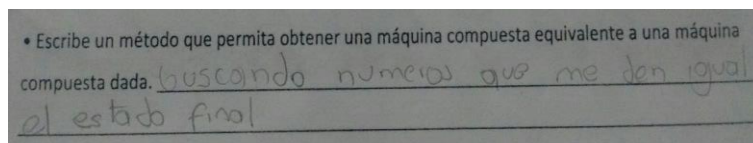
En las anteriores respuestas se pueden evidenciar dos situaciones diferentes. En la primera, parece ser que el estudiante omite en el proceso uno de los dos operadores, en este caso, multiplica por 2 a Op1, pero deja igual a Op2. En el segundo caso, el estudiante usa el mismo número para operar, o sea 2, pero parece que interpreta que el operador define el tipo de operación que se realiza sobre él, por ello, multiplica a Op1 y divide a Op2.

Ahora, con relación al método que permita obtener una máquina compuesta equivalente a una máquina dada, algunos tipos de respuestas son:

FOTOGRAFÍA 21. MÉTODO PARA RESPUESTAS TIPO A



FOTOGRAFÍA 22. MÉTODO PARA RESPUESTAS TIPO B



FOTOGRAFÍA 23. MÉTODO PARA RESPUESTAS TIPO C

• Escribe un método que permita obtener una máquina compuesta equivalente a una máquina compuesta dada. Multiplícalos por un número que queramos y así nos da

• Escribe un método que permita obtener una máquina compuesta equivalente a una máquina compuesta dada. multiplícalos por un mismo número con operador de la primera máquina compuesta

• Escribe un método que permita obtener una máquina compuesta equivalente a una máquina compuesta dada. multiplícalos las máquinas por 2, por 8, 5, etcétera y me da la máquina respuesta que da el mismo el de la máquina dada

De acuerdo con el análisis que se ha venido haciendo en esta sección 4.2.2 puede verse que si bien no existe una relación exacta entre ser capaz de componer correctamente operadores naturales multiplicativos (en particular de la forma $a \times y \div b$) y ser capaz de obtener una máquina compuesta equivalente a una dada, también, compuesta con dos operadores de este tipo, en tanto que se encontraron casos en los que el estudiante habiendo compuesto correcta o incorrectamente dos operadores naturales daba muestra de obtener una máquina equivalente a una dada, si se puede apreciar cierta relación entre la claridad y precisión como el estudiante da cuenta del método que puede seguirse para obtener máquinas equivalentes y la claridad que tiene para componer operadores y la sistematicidad de obtener máquinas equivalentes.

Respecto a los tres estudiantes pertenecientes al estudio de caso y basados en las tareas asignadas durante la entrevista correspondiente a esta sesión, fue posible establecer que las respuestas dadas por los sujetos S1 y S2 se encuentran ubicadas dentro del tipo de respuesta C. De esta manera, es posible señalar que los estudiantes realizan correctamente tareas de

equivalencia de fraccionarios (tipo particular de fracciones reductible a la forma $\frac{1}{b}$) (Ver anexos A.3.1 y A.3.2).

Asimismo, el sujeto S3 presenta dificultad para realizar tareas de equivalencia tanto para máquinas compuestas de operadores multiplicadores como para máquinas de operadores fraccionarios (tipo particular de fracciones reductible a la forma $\frac{1}{b}$) (Ver anexo A.3.3).

4.2.3 Análisis de situaciones contextuales que involucran el concepto de equivalencia de fraccionarios

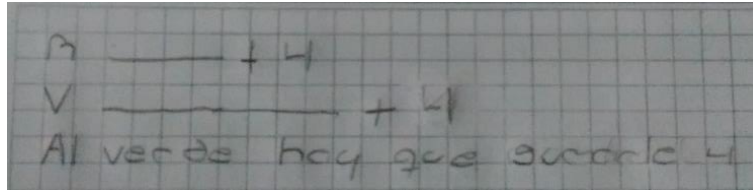
En la misma sesión 5, en la sección “practica”, se proponen algunos problemas que exigen de los estudiantes aplicar la noción de equivalencia de fracciones, ya no basta aplicar un procedimiento para obtener fracciones equivalentes, sino que, requiere un nivel de comprensión de esta noción más allá de un procedimiento. En este apartado, se analizarán las respuestas que ofrecen los estudiantes y se relacionan con las respuestas que ofrecieron a las tareas de composición y de equivalencia de máquinas.

A continuación, se presentarán los problemas propuestos y algunos tipos de respuestas encontradas.

Problema propuesto. Se dibujan dos segmentos de recta, uno rojo y el otro verde. La longitud del segmento rojo es $\frac{1}{5}$ de la longitud del segmento verde. Si el segmento rojo se amplía hasta tener 4 veces su longitud, ¿qué debe hacerse con el verde para que el segmento rojo ampliado siga siendo $\frac{1}{5}$ de la longitud del verde?

- a. Interpretación de la situación como relación aditiva.

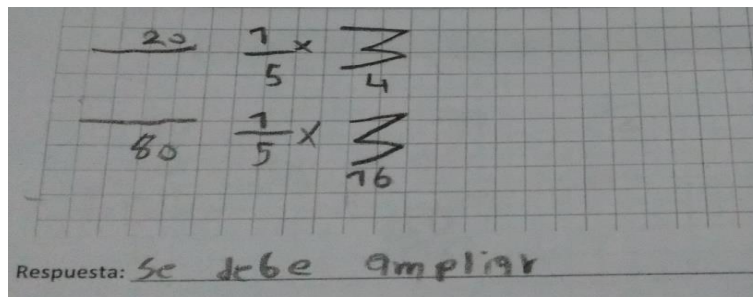
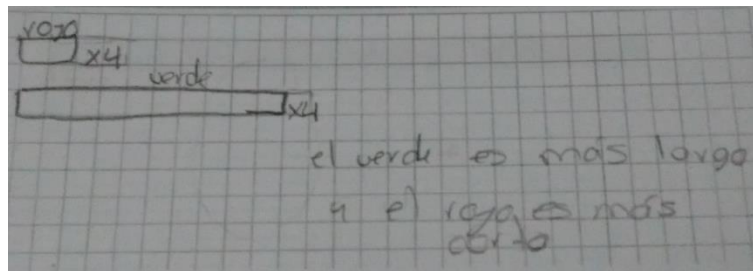
FOTOGRAFÍA 24. RESPUESTA SITUACIÓN CONTEXTUAL 6 DE EQUIVALENCIA DE FRACCIONARIOS, TIPO A



Al igual que en los casos de composición de operadores y de máquinas equivalentes, el estudiante parece interpretar el problema se resuelve mediante una suma o una resta. Se observa que el estudiante advierte que “al verde hay que sumarle 4”.

- b. Uso de un ejemplo para resolver el problema.

FOTOGRAFÍA 25. RESPUESTAS SITUACIÓN CONTEXTUAL 6 DE EQUIVALENCIA DE FRACCIONARIOS, TIPO B



Al igual que en los casos de composición de operadores y de máquinas equivalentes, los estudiantes necesitan ejemplificar la situación planteada para emitir algún tipo de respuesta y aunque, el ejemplo puede ser correcto, parece ser que no tienen una idea clara sobre la equivalencia.

- c. Interpretación de la situación como relación multiplicativa.

FOTOGRAFÍA 26. RESPUESTA SITUACIÓN CONTEXTUAL 6 DE EQUIVALENCIA DE FRACCIONARIOS, TIPO C

Rojo $\frac{1}{5} \times 4 = \frac{4}{20}$
Verde $\times 4$

El estudiante usa una relación multiplicativa (multiplica por 4 cada operador) para encontrar una fracción equivalente a la dada. Luego, parece indicar que, para conservar la equivalencia entre las longitudes de los segmentos, el segmento verde también debe ser ampliado cuatro veces su longitud.

Problema propuesto. La cantidad de mujeres que trabajan en la fábrica A son los $\frac{3}{9}$ de la cantidad de hombres que trabajan allí. En la fábrica B, la cantidad de mujeres que trabajan allí son los $\frac{12}{36}$ de la cantidad de hombres. ¿En una de las dos fábricas la proporción de mujeres es mayor? ¿Si es así, en cuál? ¿Por qué?

- a. Reducción de los operadores a uno solo.

FOTOGRAFÍA 27. RESPUESTA SITUACIÓN CONTEXTUAL 9 DE EQUIVALENCIA DE FRACCIONARIOS, TIPO A

$\frac{4}{3}$ $\frac{3}{12}$
Verde $\times 4$
Respuesta: hay más mujeres en la B porque 12 es mayor que 3

El estudiante parece interpretar en el problema solo interviene uno de los operadores, omitiendo el otro, por ello señala que “hay más mujeres en la B porque 12 es mayor que 3”.

b. Interpretación de la situación como relación multiplicativa.

FOTOGRAFÍA 28. RESPUESTAS SITUACIÓN CONTEXTUAL 9 DE EQUIVALENCIA DE FRACCIONARIOS, TIPO B

$$\frac{3 \times 4}{9 \times 4} = \frac{12}{36}$$

Respuesta: Son iguales o tambien equivalentes

comparar los 2 resultados

$$\frac{12 \div 4}{36 \div 4} = \frac{3}{9} = \frac{3}{9}$$

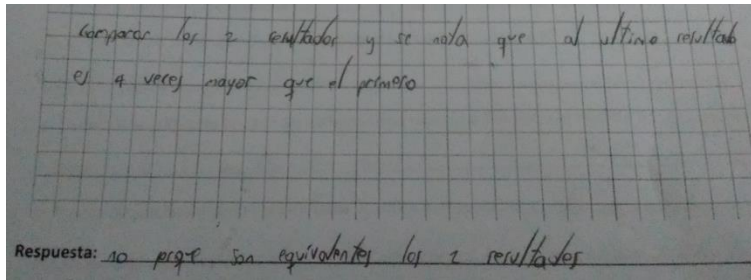
Respuesta: si porque en ambas expresiones hay equivalencia

Los estudiantes usan una relación multiplicativa (multiplican y dividen por el 4 cada operador) para determinar la equivalencia entre las fracciones dadas.

Problema propuesto. En una fábrica acostumbran a empaclar dos sabores de dulces en un mismo paquete, unos de leche y los otros de coco. Se sabe que los $\frac{5}{15}$ del total de dulces son de leche y los restantes de coco. Un empacador dice que él va a cambiar la proporción de dulces, que va a incorporar en cada bolsa $\frac{20}{60}$ de dulces de leche y los restantes de coco. ¿Realmente cambio la proporción de dulces de cada sabor? Justifica la respuesta.

- a. Interpretación de la situación como relación multiplicativa.

FOTOGRAFÍA 29. RESPUESTAS SITUACIÓN CONTEXTUAL 10 DE EQUIVALENCIA DE FRACCIONARIOS, TIPO A



Los estudiantes usan una relación multiplicativa para determinar la equivalencia entre las fracciones dadas.

De acuerdo con el análisis desarrollo, se posible considerar que si bien ser capaz de componer y de obtener máquinas y fraccionarios equivalentes no supone que se pueda extender la noción de equivalencia para resolver problemas que involucran esta noción, si es cierto que quienes tienen mejores comprensiones para resolver los dos primeros tipos de tareas están en mejores condiciones para comprender la idea de equivalencia de fraccionarios que involucran los problemas.

5. CONCLUSIONES

Aproximadamente la mitad de los estudiantes parece identificar situaciones en las cuales se requiere el uso de un operador multiplicativo (en cualquiera de sus formas $a \times$, $\div b$ y $\frac{1}{b} \times$) para su solución. No obstante, existen algunos casos en donde los estudiantes interpretan la situación como si se tratará de un operador aditivo (en cualquiera de sus formas $+a$ y $-a$).

Es indispensable fortalecer la diferenciación entre la sucesión de operadores multiplicativos y la composición de operadores multiplicativos, pues, aunque la estructura de los dos corresponda a la expresión $E_i \rightarrow Op_1 \rightarrow E \rightarrow Op_2 \rightarrow E_f$, en donde, Op_1 y Op_2 pueden ser dos operadores multiplicadores, dos operadores divisores o Op_1 un operador multiplicador y Op_2 uno divisor, o viceversa, su estructura es completamente diferente.

La aplicación de la secuencia didáctica permitió, a los docentes, identificar como los estudiantes construyen relaciones multiplicativas entre operadores naturales de la forma $a \times$ y $\div b$, y su composición; y como a partir de estos elementos, determinaban la equivalencia entre números fraccionarios que son reductibles a la forma $\frac{1}{b}$.

Se identificó que los estudiantes que realizan correctamente las tareas propias de la composición de operadores multiplicativos, tienen una mayor inclinación a conseguir el éxito al enfrentarse a aquellas situaciones de equivalencia.

Se evidenció que la composición de operadores multiplicativos naturales de la forma $\mathbf{a} \times$ y $\div \mathbf{b}$ (siendo alguno de los números, \mathbf{a} o \mathbf{b} , múltiplo del otro) facilita la construcción de la noción de equivalencia entre números fraccionarios que son reductibles a la forma $\frac{1}{b}$.

A manera de recomendación, queda abierta la posibilidad de estudiar la equivalencia para números fraccionarios de la forma $\frac{a}{b}$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arteta, J., Escudero, R., Rojas, C., Martínez, R., Jiménez, M., Rodríguez, M., ... Bulla, M. (2012). *Los fraccionarios en primaria. Retos, experiencias didácticas y alianzas para aprender matemáticas con sentido*. Universidad del Norte. Recuperado a partir de [http://www.acofacien.org/images/files/BIBLIOTECA/Libros/LOS FRACCIONARIOS EN PRIMARIA.pdf](http://www.acofacien.org/images/files/BIBLIOTECA/Libros/LOS_FRACCIONARIOS_EN_PRIMARIA.pdf)
- Barón B., O. (2015). *Objeto virtual de aprendizaje para la enseñanza de las fracciones a partir de sus significados*. Universidad Nacional de Colombia. Recuperado a partir de <http://www.bdigital.unal.edu.co/52339/>
- Behr, M., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1993). Rational numbers: toward a semantic analysis - emphasis on the operator construct. *rational numbers: an integration of research*, 13–47. Recuperado a partir de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/93_1.html
- Byrne, O. (1847). *The first six books of the elements of Euclid whit coloured diagrams and symbols*. London: William Pickering. Recuperado a partir de <https://ia800502.us.archive.org/9/items/firstsixbooksofe00byrn/firstsixbooksofe00byrn.pdf>
- Castaño, J., Oicatá, A., Melo, S., & Gonzalez, M. (2004). *La matemática con Da Vinci*. Bogotá: Editorial Saberes y Escuela - FUNDEMAR.
- Chevallard, Y. (1998). La transposición Didáctica. Del Saber sabio al saber enseñado, 45–66. Recuperado a partir de <http://cesee.edu.mx/assets/plan-de-la-ens.-y-ev.-del-aprend.-i.pdf>
- Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Editorial Labor, S.A.
- Dienes, Z. P. (1969). Estados y operadores. 3: Operadores multiplicativos. España: Editorial Teide S.A.
- Dienes, Z. P. (1971). *Estados y operadores. 1: Operadores aditivos*. España: Editorial Teide S.A.
- Dienes, Z. P. (1972). *Fracciones*. España: Editorial Teide S.A.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros y Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.
- Fandiño-Pinilla, M. I. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá D.C.:

Editorial Magisterio.

Fuentes F., R. (2010). Enseñanza de fracciones . Una experiencia didáctica en quinto año de enseñanza primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 22, 169–182.

Recuperado a partir de

http://www.fisem.org/www/union/revistas/2010/22/Union_022.pdf#page=166

Gerván, H. H. (2009). Las fracciones unitarias en la matemática del Antiguo Egipto, 1–8.

Recuperado a partir de

http://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/32071241/Las_fracciones_unitarias_en_la_matematica_del_Antiguo_Egipto_-_GERVAN__Hector.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1493882404&Signature=tHmM%2ByCPIGskM8%2FvqX5jXSV92JM%3D&response-content-

Godino, J. (2003). *Teoría de las Funciones Semióticas*. Facultad de Educación Universidad de Granada. Granada. Recuperado a partir de <http://www.ugr.es/local/jgodino/>

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325–355. Recuperado a partir de <http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/viewArticle/428>

González, P. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. *Sigma* 33, 33, 101–130. Recuperado a partir de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_33/8_solucion_eudoxo_33.pdf

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. *Journal of Chemical Information and Modeling* (Vol. 53). México: McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V.

ICFES. (2011). *Informe Técnico Saber 5° y 9° 2009*. Bogotá D.C. Recuperado a partir de <http://www.icfes.gov.co/instituciones-educativas-y-secretarias/informes-de-resultados-evaluaciones-nacionales/saber-3-5-y-9>

ICFES. (2015). *Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes PISA 2015. Guía de orientación estudio principal*. Bogotá D.C.: ICFES. Recuperado a partir de <http://www.icfes.gov.co/instituciones-educativas-y-secretarias/evaluaciones-internacionales-inves/programa-para-la-evaluacion-internacional-de-estudiantes-pisa>

- ICFES. (2017). *Informe nacional de resultados. Colombia en PISA 2015*. Bogotá D.C.: ICFES. Recuperado a partir de <http://www.icfes.gov.co/instituciones-educativas-y-secretarias/evaluaciones-internacionales-inves/programa-para-la-evaluacion-internacional-de-estudiantes-pisa>
- INEE. (2005). *PISA para docentes. La Evaluación como Oportunidad de Aprendizaje*. México: INEE. Recuperado a partir de http://www.educacionbc.edu.mx/departamentos/evaluacion/descargas/Archivos/PISA_docentes.pdf
- Jigyel, K., & Afamasaga-Fuataí, K. (2007). models of fractions. *Australian Mathematics Teacher*, 63(4), 17–25. Recuperado a partir de <http://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ779072.pdf>
- Kieren, T. E. (1980). The rational number construct. Its elements and mechanics. *Recent Research on Number Learning*, 125–147. Recuperado a partir de <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED212463.pdf>
- Llinares, S., & Sánchez, M. V. (1988). *Fracciones. La relación parte-todo*. Madrid: Editorial Síntesis S.A.
- Machado, G. M. (2014). *A construção dos números*. São Carlos. Recuperado a partir de <http://www.dm.ufscar.br/dm/index.php/component/attachments/download/43>
- Malet, O. (2010). Los significados de las fracciones: una perspectiva fenomenológica. *Revista Mendom@tica*, 21, 1–18. Recuperado a partir de <http://www.mendoza.edu.ar/wp-content/uploads/2017/04/MATEMÁTICA-Y-CURRICULUM-Los-significados-de-las-fracciones.pdf>
- Mancera, E. (1992). Significados y significantes relativos a las fracciones. *Educación Matemática*, 4(2), 30–54. Recuperado a partir de <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol4/vol4-2/vol4-2-4.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Recuperado a partir de <http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/siemprediae/86404>
- Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Resultados Pruebas Saber 3°, 5° y 9°*. Bogotá D.C. Recuperado a partir de <http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/informes>
- Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA*, 8(2), 157–182. Recuperado a partir de <http://funes.uniandes.edu.co/1521/>
- Ortiz F., A. (2005). *Historia de la matemática*. Lima: PUCP. Recuperado a partir de

- <http://textos.pucp.edu.pe/pdf/2389.pdf>
- Pita, S., & Pértegas, S. (2002). Investigación cuantitativa y cualitativa. *Cadena Atención Primaria*, 9(9), 76–78. Recuperado a partir de https://www.fisterra.com/mbe/investiga/cuanti_cuali/cuanti_cuali2.pdf
- Ponte, J., & Quaresma, M. (2014). Representações e raciocínio matemático dos alunos na resolução de tarefas envolvendo números racionais numa abordagem exploratória. *Uni-Pluri/Versidad*, 14(2), 102–114. Recuperado a partir de <http://hdl.handle.net/10451/22621>
- Post, T., Wachsmuth, I., Lesh, R., & Behr, M. (1985). Order and equivalence of rational numbers: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(1), 18–36. Recuperado a partir de <http://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&db=psyh&AN=1986-10419-001&site=ehost-live>
- Pujadas, M., & Eguiluz, M. L. (2000). Fracciones ¿Un quebradero de cabeza? Sugerencias para el aula.pdf. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.
- Quiroz, B., & Vanegas, J. (2009). *Las fracciones como medidor, partidor y operador*. Universidad de Antioquia. Recuperado a partir de <http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/1698/1/JC0641.pdf>
- Secretaría de Educación Distrital. (2007). *Colegios Públicos de excelencia para Bogotá. Orientaciones curriculares para el campo de Pensamiento Matemático*. Bogotá. D.C. Recuperado a partir de http://www.educacionbogota.edu.co/Centro_Documentacion/anexos/publicaciones_2004_2008/99198-Pensamientomate_bja.pdf
- UNESCO. (2008). *Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo. SERCE*. Santiago: UNESCO. Recuperado a partir de <http://unesdoc.unesco.org/images/0016/001606/160659S.pdf>
- UNESCO. (2013). Situación Educativa De América Latina Y El Caribe para todos al 2015. *Orealc/Unesco*, 209. Recuperado a partir de http://works.bepress.com/cgi/viewcontent.cgi?article=1009&context=cesar_guadalupe
- UNESCO. (2014). Primera entrega de resultados. Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo. TERCE, 1–56. <https://doi.org/10.1787/9789264215696-en>
- Vain, P. D. (2012). El enfoque interpretativo en investigación educativa: algunas consideraciones

- teórico-metodológicas. *Revista de Educación*, 4(4), 37–45. Recuperado a partir de http://fh.mdp.edu.ar/revistas/index.php/r_educ/article/view/83
- Vara, A. (2008). La tesis de maestría en educación, *Tomo I*, 357. Recuperado a partir de http://formaciondocente.com.mx/06_RinconInvestigacion/01_Documentos/14 La Tesis de Maestria en Educacion.pdf
- Vasco, C. (2012). Problemas y retos de la educación por competencias en las matemáticas de 5° grado. *Los fraccionarios en primaria. Retos, experiencias didácticas y alianzas para aprender matemáticas con sentido*, 19–54. Recuperado a partir de <http://www.acofacien.org/images/files/BIBLIOTECA/Libros/LOS FRACCIONARIOS EN PRIMARIA.pdf>
- Vasco U., C. E. (1994). El archipiélago fraccionario. *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas*, 2, 23–45.
- Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales (Juan Godino, trad.). *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(3), 133–170. Recuperado a partir de http://ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf
- Wong, M. (2009). Equivalent Fractions : Developing a Pathway of Students ' Acquisition of Knowledge and Understanding, (2001), 673–680. Recuperado a partir de <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED521016.pdf>

ANEXOS

Anexo 1. Prueba de entrada

A.1.1 Instrumento



PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
PRUEBA DE ENTRADA

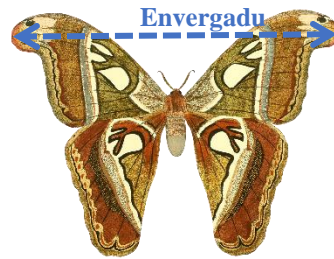


Nombre: _____

Responde las preguntas 1 a 6, de acuerdo con el siguiente enunciado.

Camilo y su padre son apasionados por las mariposas. Ellos salen cada fin de semana a fotografiarlas para estudiar la envergadura de cada una de ellas.

Observa la imagen.



1. Si la envergadura real de cierta especie es 9 cm y en una fotografía es tres veces mayor que la envergadura real, la medida de la envergadura de la mariposa en la foto es:

- a) 27 cm b) 3 cm c) 12 cm d) 6 cm

2. Si en una fotografía la envergadura de la cierta especie es 35 cm y esta medida es la séptima parte de la envergadura real de la mariposa, entonces la envergadura real es:

- a) 28 cm b) 245 cm c) 42 cm d) 5 cm

3. Una fotografía de cierta especie de mariposas, ha sido ampliada 7 veces. La envergadura de la mariposa en esta fotografía es igual 63 cm. La envergadura real de la mariposa es:

- a) 56 cm b) 431 cm c) 9 cm d) 70 cm

4. Una fotografía ha sido reducida 6 veces. Si la envergadura real de cierta especie de mariposa es 12 cm, entonces la envergadura de la mariposa en la fotografía es:

- a) 6 cm b) 72 cm c) 2 cm d) 18 cm

5. Camilo y su padre tienen la fotografía de una mariposa cuya envergadura real es 3 cm. Si la envergadura de esta especie en la fotografía es 18 cm, se puede decir que la imagen ha sido ampliada:

- a) 15 veces b) 6 veces c) 54 veces d) 21 veces

6. En una fotografía la envergadura de una mariposa es igual a 84 cm. Si la envergadura real de la misma es 7 cm, entonces, el número de veces que es menor la envergadura real respecto a la de la fotografía es:

- a) 77 b) 7 c) 91 d) 12

Responde las preguntas 7 a 10, de acuerdo con el siguiente enunciado.

El Departamento de Análisis Empresarial ha revelado, en su último informe, el decrecimiento de los sectores económicos del país en los últimos años. Entre los sectores que más están en decrecimiento están el agrícola, el minero, el turístico y el energético.



7. Según el informe, el sector turístico en el año 2015 creció tres veces con respecto al 2014 y en el 2016, quintuplicó las cifras con respecto al 2015. De acuerdo con lo anterior, en el año 2016 el sector turístico aumentó sus cifras con relación al año 2014:

- a) 15 veces b) 8 veces c) 18 veces d) 45 veces

8. Según el informe, el sector minero en el año 2015 sextuplicó sus cifras con respecto al 2014 y en el 2016, disminuyó sus cifras a la mitad con respecto al 2015. De acuerdo con lo anterior, en el año 2016 el sector minero varió sus cifras con relación al año 2014:

- a) 24 veces b) 4 veces c) 3 veces d) 12 veces

9. El informe menciona que el sector energético el año 2015 disminuyó seis veces sus cifras con respecto al 2014 y en el 2016, triplicó las cifras con respecto al 2015. De acuerdo con lo anterior, en el año 2016 el sector energético varió sus cifras con relación al año 2014:

- a) 12 veces b) 9 veces c) 18 veces d) 2 veces

10. El informe indica que el sector agrícola ha disminuido sus cifras, en el 2015 los valores bajaron a 4 veces el valor del año 2014 y en el 2016, los valores bajaron a la mitad del valor que tenían en el 2015. De acuerdo con lo anterior, en el año 2016 el sector agrícola disminuyó sus cifras con relación al año 2014:

- a) 16 veces b) 6 veces c) 2 veces d) 4 veces

Responde la pregunta 11 de acuerdo con el siguiente enunciado.

Juliana y Sofía juegan a ampliar y reducir sombras. Para ello, cada una usa su lápiz cuyas longitudes son diferentes. Juliana primero amplía la sombra de un lápiz a 4 veces su longitud real y luego esta sombra la reduce a 8 veces. Sofía en cambio primero amplía la sombra de su lápiz a 3 veces su longitud y luego esa sombra la reduce a 6 veces su tamaño.



11. Si se comparan las longitudes de las segundas sombras producidas por Juliana y Sofía con las longitudes reales de sus propios lápices, la afirmación correcta es:

- a) Las longitudes de las segundas sombras que obtienen Juliana y Sofía son la mitad de las longitudes de sus respectivos lápices.
- b) Las longitudes de los lápices de Juliana y Sofía son la mitad de las longitudes de las segundas sombras.
- c) La longitud de la segunda sombra que produce Juliana es la cuarta parte de la longitud de su propio lápiz y la longitud de la segunda sombra producida por Sofía es la tercera parte de la longitud de su propio lápiz.
- d) La longitud del lápiz de Juliana es la cuarta parte de la longitud de la segunda sombra que ella produce y la longitud del lápiz de Sofía es la tercera parte de la longitud de la segunda sombra que ella produce.

Responde la pregunta 12 de acuerdo con el siguiente enunciado.

El día de hoy se abrió la inscripción para los talleres de Artes Plásticas y de Música, que ofrecerán los profesores Dalila y Beto, respectivamente, a los niños de los grados primero y segundo. Para saber la cantidad de alumnos, de cada grado, que recibirían este año, ellos acordaron:



- I. Que el número de estudiantes que cada profesor recibiría en su taller fuera el mismo.
- II. Que la profesora Dalila recibiera la tercera parte de los estudiantes, de su taller, del grado primero y que 9 veces esa cantidad de estudiantes de primero, sean los estudiantes de grado segundo.
- III. El profesor Beto dijo que la mitad de los estudiantes de su taller fueran de grado primero y que 6 veces esa cantidad de estudiantes de primero sean de grado segundo

12. Es correcto decir que:

a) La cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe la profesora Dalila es la sexta parte del total de estudiantes de su taller y que, la cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe el profesor Beto es la cuarta parte del total de estudiantes de su taller.

b) Que la cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe cada profesor, es la tercera parte de la cantidad de estudiantes de sus talleres.

c) Que la cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe cada profesor es 3 veces la cantidad de estudiantes de sus talleres.

d) La cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe la profesora Dalia es la novena parte del total de estudiantes de su taller y que la cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe el profesor Beto es la sexta parte del total de estudiantes de su taller.

Responde las preguntas 13 a 16, de acuerdo con el siguiente enunciado.

Paola es diseñadora y realiza tareas de publicidad para empresas. Su último trabajo consiste en diseñar el logo de una empresa de productos cosméticos y dejarlo listo para ser publicado en carteles, carpetas, folletos y tarjetas. Para no cometer errores, Paola realiza diferentes modificaciones sobre la imagen.



13. Si la imagen para una tarjeta resulta de reducir tres veces la imagen original y luego, volver la imagen obtenida seis veces menor, se puede afirmar que la imagen usada en una tarjeta respecto a la original es:

- a) 3 veces menor b) 2 veces menor c) 18 veces menor d) 9 veces menor

14. Si la imagen para un folleto resulta de disminuir veinticuatro veces la imagen original y luego, duplicar la imagen obtenida, se puede afirmar que la imagen usada en un folleto respecto a la original es:

- a) 24 veces menor b) 12 veces menor c) 26 veces menor d) 48 veces menor

15. Si la imagen para una carpeta resulta de aumentar dieciocho veces la imagen original y luego, reducir la imagen obtenida a la mitad, se puede afirmar que la imagen usada en una carpeta respecto a la original es:

- a) 34 veces mayor b) 20 veces mayor c) 36 veces mayor d) 9 veces mayor

16. Si la imagen para un cartel resulta de triplicar la imagen original y luego, volver la imagen obtenida cuatro veces mayor, se puede afirmar que la imagen usada en un cartel respecto a la original es:

- a) 21 veces mayor b) 12 veces mayor c) 7 veces mayor d) 36 veces mayor

Responde las preguntas 17 a 20, de acuerdo con el siguiente enunciado.

En el colegio Ambiental realizan un concurso de reciclaje. Cada día se pesa la cantidad de material reciclado que tenga cada salón y de acuerdo con las medidas se establece la puntuación. En la tabla, se presentan los puntajes de cada salón terminada la primera semana.

CURSO	PUNTAJE PRIMERA SEMANA
6° A	12 puntos
6° B	9 puntos
6° C	6 puntos
6° D	18 puntos

17. Si el curso 6° C en la segunda semana duplica el puntaje obtenido en la primera semana y luego, en la tercera semana quintuplica el puntaje de la segunda semana, el puntaje al final de la tercera semana es:

- a) 60 puntos b) 13 puntos c) 42 puntos d) 16 puntos

18. El curso 6° B en la segunda semana reduce a una tercera parte el puntaje obtenido en la primera semana. Si en la tercera semana duplica el puntaje de la segunda semana, el puntaje al final de la tercera semana es:

- a) 21 puntos b) 8 puntos c) 6 puntos d) 3 puntos

19. Si el curso 6° A en la segunda semana cuadruplica el puntaje obtenido en la primera semana y luego, en la tercera semana reduce el puntaje de la segunda semana a una sexta parte, el puntaje al final de la tercera semana es:

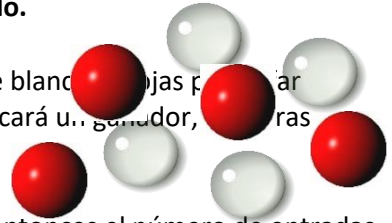
- a) 8 puntos b) 10 puntos c) 50 puntos d) 36 puntos

20. El curso 6° B en la segunda semana reduce a una mitad el puntaje obtenido en la primera semana. Si en la tercera semana lo reduce el puntaje de la segunda semana a la tercera parte, el puntaje al final de la tercera semana es:

- a) 15 puntos b) 3 puntos c) 13 puntos d) 12 puntos

Responde las preguntas 21 a 26, de acuerdo con el siguiente enunciado.

En una urna, el profesor David deposita cierto número de balotas entre blancas y rojas para repartir las entradas al parque de diversiones de la ciudad. Cada balota blanca indicará una ganadora, y cada una balota roja será una oportunidad perdida.



21. Si en la bolsa hay 16 balotas y la cuarta parte de ellas son blancas, entonces el número de entradas que se entregarán será de:

- a) 12 b) 64 c) 4 d) 20

22. Si en la bolsa hay 12 balotas rojas y el número de balotas blancas es tres veces más que el número de balotas rojas existentes, entonces el premio será de:

- a) 15 entradas b) 4 entradas c) 9 entradas d) 36 entradas

23. Un estudiante indica que el número de balotas blancas corresponde al cuádruple de las balotas rojas existentes en la urna. Si en la urna hay 48 balotas blancas, el número de balotas rojas es:

- a) 44 b) 192 c) 52 d) 12

24. Una profesora señala que el número de balotas blancas, es exactamente seis veces menos el número de las balotas rojas existentes en la urna. Si en la urna hay 3 balotas blancas, el número de balotas rojas es:

- a) 3 b) 18 c) 2 d) 9

25. Si en la urna hay 8 balotas rojas y 24 balotas blancas, entonces el número de balotas blancas respecto a las rojas es mayor:


- a) 16 veces b) 192 veces c) 3 veces d) 32 veces

26. Si en la urna hay 36 balotas blancas y 6 balotas rojas, entonces el número de balotas blancas respecto a las rojas es menor:

- a) 6 veces b) 216 veces c) 30 veces d) 42 veces

A.1.2 Cuadro de categorías

SITUACIONES PROBLEMA 1 AL 6

CATEGORÍA: SITUACIONES DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS								
ENUNCIADO GENERAL DE LA SITUACIÓN PLANTEADA		<p>Camilo y su padre son apasionados por las mariposas. Ellos salen cada fin de semana a fotografiarlas para estudiar la envergadura de cada una de ellas.</p> <p>Observa la imagen.</p>						
PREGUNTA	SUBCATEGORÍA	NOMBRE DEL PROBLEMA	POSIBILIDAD DE ESTADO U OPERADOR	ENUNCIADO DE LA PREGUNTA	ANÁLISIS DE LA RESPUESTA			
					OPCIÓN DE RESPUESTA	POSIBLE OPERACIÓN	INTERPRETACIÓN DE OPERACIÓN	EXPLICACIÓN DE OPERACIÓN
1	Cantidad continua	De operador multiplicador	Estado final desconocido	Si la envergadura real de cierta especie es 9 cm y en una fotografía es tres veces mayor que la envergadura real, la medida de la envergadura de la mariposa en la foto es:	a) 27 cm	$9 \times 3 = 27$	Operación realizada de forma correcta, pues la envergadura real se amplía tres veces.	Relaciona correctamente la relación multiplicativa existente entre los datos del problema y aplica el operador adecuado.
					b) 3 cm	$9 \div 3 = 3$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que debe hallar un número que al ser multiplicado por 3 dé como resultado 9.	Relaciona erróneamente los datos del problema. Aunque, reconoce la relación multiplicativa de la situación planteada, no identifica el tipo de operador que debe aplicar.
					c) 12 cm	$9 + 3 = 12$	Confunde la expresión tres veces mayor o tres veces más, con la expresión mayor en tres o tres más en relación a la longitud dada.	Intuye el sentido de la operación, pero, confunde una expresión relacionada con un operador multiplicador con una expresión relacionada con un operador para la adición.
					d) 6 cm	$9 - 3 = 6$	Confunde completamente el sentido del problema, quizás pensando que debe hallar un número que al ser mayor en 3 dé como resultado 9.	Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos. Además, confunde un operador multiplicador con un operador para la adición.
2	Cantidad continua	De operador divisor	Estado final desconocido	Si en una fotografía la envergadura	a) 28 cm	$35 - 7 = 28$	Confunde la expresión séptima parte o siete veces menos, con la expresión siete menos.	Intuye el sentido de la operación, pero, confunde una expresión relacionada con un operador

				de cierta especie es 35 cm y esta medida es la séptima parte de la envergadura real de la mariposa, entonces la envergadura real es:				divisor con una expresión relacionada con un operador para la sustracción.
					b) 245 cm	$35 \times 7 = 245$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que la envergadura de la fotografía es la séptima parte de la real, por ello, multiplica la longitud por 7.	Relaciona erróneamente los datos del problema. Aunque, reconoce la relación multiplicativa de la situación planteada, no identifica el tipo de operador que debe aplicar.
					c) 42 cm	$35 + 7 = 42$	Confunde completamente el sentido del problema, quizás pensando que debe hallar un número que al restarle 7 de cómo resultado 35.	Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos. Además, confunde un operador divisor con un operador para la sustracción.
					d) 5 cm	$35 \div 7 = 5$	Operación realizada de forma correcta, pues la envergadura real es la séptima parte de la envergadura de la fotografía.	Relaciona correctamente la relación multiplicativa existente entre los datos del problema y aplica el operador adecuado.
3	Cantidad continua	De operador multiplicador	Estado inicial desconocido	Si una fotografía ha sido ampliada 7 veces y como resultado la envergadura de cierta especie de mariposa es igual 63 cm, entonces la envergadura real de la mariposa es:	a) 56 cm	$63 - 7 = 56$	Confunde completamente el sentido del problema, quizás pensando que debe hallar un número que al ser mayor en 7 dé como resultado 63.	Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos. Además, confunde un operador divisor con un operador para la sustracción.
					b) 431 cm	$63 \times 7 = 431$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que la longitud dada debe ser ampliada 7 veces.	Relaciona erróneamente los datos del problema. Aunque, reconoce la relación multiplicativa de la situación planteada, no identifica el tipo de operador que debe aplicar.
					c) 9 cm	$63 \div 7 = 9$	Operación realizada correctamente, pues la longitud dada es la séptima parte de una longitud inicial.	Relaciona correctamente la relación multiplicativa existente entre los datos del problema y aplica el operador adecuado.
					d) 70 cm	$63 + 7 = 70$	Confunde la expresión siete veces mayor o siete veces más, con la expresión mayor en siete o siete más en relación a la longitud dada.	Intuye el sentido de la operación, pero, confunde una expresión relacionada con un operador multiplicador con una expresión relacionada con un operador para la adición.

4	Cantidad continua	De operador divisor	Estado inicial desconocido	Una fotografía ha sido reducida 6 veces. Si la envergadura real de cierta especie de mariposa es 12 cm, entonces la envergadura de la mariposa en la fotografía es:	a) 6 cm	$12 - 6 = 6$	Confunde el sentido de la operación y los datos del problema, pensando quizás que debe hallar un número que al ser mayor en 6 dé como resultado 12. Intercambia los datos pues en el orden correcto no puede realizar la operación.	Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos. Además, confunde un operador divisor con un operador para la sustracción.
					b) 2 cm	$12 \div 6 = 2$	Operación realizada de forma correcta, pues la envergadura real es la doceava parte de envergadura de la fotografía.	Relaciona correctamente la relación multiplicativa existente entre los datos del problema y aplica el operador adecuado.
					c) 72 cm	$6 \times 12 = 72$	Confunde el sentido de la operación y los datos del problema, pensando quizás que la longitud dada ha sido ampliada. Intercambia los datos pues en el orden correcto no puede realizar la operación.	Relaciona erróneamente los datos del problema. Aunque, reconoce la relación multiplicativa de la situación planteada, no identifica el tipo de operador que debe aplicar.
					d) 18 cm	$6 + 12 = 18$	Confunde la expresión doce veces, con la expresión doce más en relación a la longitud dada.	Intuye el sentido de la operación, pero, confunde una expresión relacionada con un operador multiplicador con una expresión relacionada con un operador para la adición.
5	Cantidad continua	De operador multiplicador	Operador desconocido	Ellos tienen la fotografía de una mariposa cuya envergadura real es 3 cm. Si la envergadura de esta especie en la fotografía es 18 cm, se puede decir que la	a) 15 veces	$18 - 3 = 15$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que debe hallar un número que al ser mayor en 3 dé como resultado 18.	Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos. Además, confunde un operador divisor con un operador para la sustracción.
					b) 6 veces	$18 \div 3 = 6$	Operación realizada de forma correcta, pues relaciona que x veces la longitud real corresponde a la longitud de la fotografía.	Relaciona correctamente la relación multiplicativa existente entre los datos del problema y aplica el operador adecuado.
					c) 54 veces	$18 \times 3 = 54$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que el producto de ambas	Relaciona erróneamente los datos del problema. Aunque, reconoce la relación multiplicativa de la situación planteada, no identifica

				imagen ha sido ampliada:			longitudes representa la ampliación de la imagen.	el tipo de operador que debe aplicar.
					d) 21 veces	$3 + 18 = 21$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que la suma de ambas longitudes representa la ampliación de la imagen.	Relaciona erróneamente los datos del problema. Además, confunde una expresión relacionada con un operador multiplicativo con una expresión relacionada con un operador aditivo.
6	Cantidad continua	De operador divisor	Operador desconocido	En una fotografía la envergadura de una mariposa es igual a 84 cm. Si la envergadura real de la misma es 7 cm, entonces, el número de veces que es menor la envergadura real respecto a la de la fotografía es:	a) 77	$84 - 7 = 77$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que la diferencia de ambas longitudes representa la reducción de la imagen.	Relaciona erróneamente los datos del problema. Además, confunde una expresión relacionada con un operador divisor con una expresión relacionada con un operador para la sustracción.
					b) 7		Asimila la expresión “si la envergadura real de la misma es 7 cm”, con la opción correcta de la situación. ⁵	Relaciona erróneamente los datos del problema.
					c) 91	$84 + 7 = 91$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que debe hallar un número que al ser menor en 7 dé como resultado 84.	Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos. Además, confunde un operador multiplicador con un operador para la adición.
					d) 12	$84 \div 7 = 12$	Operación realizada de forma correcta, pues relaciona que x veces la longitud de la foto corresponde a la longitud real.	Relaciona correctamente la relación multiplicativa existente entre los datos del problema y aplica el operador adecuado.

⁵ No se considera la operación $7 \times 84 = 588$, pues esta opción es descartada de manera inmediata por los estudiantes.

SITUACIONES PROBLEMA 7 AL 10

CATEGORÍA: SITUACIONES DE COMPOSICIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS								
ENUNCIADO GENERAL DE LA SITUACIÓN PLANTEADA		El Departamento de Análisis Empresarial ha revelado, en su último estudio, las cifras de crecimiento y decrecimiento de los sectores económicos del país en los últimos años. Entre los sectores analizados están el agrícola, el minero, el turístico y el energético.						
PREGUNTA	SUBCATEGORÍA	NOMBRE DEL PROBLEMA	POSIBILIDAD DE ESTADO U OPERADOR	ENUNCIADO DE LA PREGUNTA	ANÁLISIS DE LA RESPUESTA			
					OPCIÓN DE RESPUESTA	POSIBLE OPERACIÓN	INTERPRETACIÓN DE OPERACIÓN	EXPLICACIÓN DE OPERACIÓN
7	Cantidad discreta	De doble operador multiplicador	Estado inicial y estado final desconocidos	Según el informe, el sector turístico en el año 2015 creció tres veces más con respecto al año 2014 y en el 2016, quintuplico las cifras con respecto al 2015. De acuerdo con lo anterior, en el año 2016 el sector turístico aumento sus cifras con relación al año 2014:	a) 15 veces	$3 \times 5 = 15$ Op ₁ : 3× Op ₂ : 5× Op ₁ Op ₂ : 15×	Operación realizada de forma correcta, pues entiende que los operadores 3× y 5× se relacionan mediante el operador 15×.	Relaciona correctamente la composición de doble operador multiplicador.
					b) 8 veces	3 + 5 = 8	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que la suma de los datos conlleva a la respuesta.	No reconoce la composición de operadores multiplicadores y la confunde con una suma entre estos valores.
					c) 18 veces	Primero: 3 + Segundo: 5 × 3 Tercero: $3 + (5 \times 3)$ $= 3 + 15$ $= 18$	1°: Confunde la expresión tres veces más con la expresión tres más. 2°: Calcula el quintuple de tres, pues es el dato que encuentra como referencia para el año 2015. 3°: Adiciona las situaciones, pues quizás piensa que la adición de las mismas conlleva al resultado.	1°: Confunde una expresión de operador multiplicador con una expresión de operador para la adición. 2°: Intuye la relación multiplicativa de la operación para el año 2016. 3°: Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos.
					d) 45 veces	Primero: 3 × Segundo: 5 × 3 Tercero: $3 \times (5 \times 3)$ $= 3 \times 15$ $= 45$	1°: Relaciona la expresión tres veces más con la expresión tres por. 2°: Calcule el quintuple de tres, pues es el dato que encuentra como referencia para el año 2015. 3°: Multiplica las situaciones, pues quizás piensa en la	1°: Intuye la relación multiplicativa de la operación para el año 2015. 2°: Intuye la relación multiplicativa de la operación para el año 2016. 3°: Relaciona erróneamente los datos del problema y la

							dependencia multiplicativa del problema.	dependencia multiplicativa existente entre ellos.
8	Cantidad discreta	De operador multiplicador y operador divisor	Estado inicial y estado final desconocidos	Según el informe, el sector minero en el año 2015 sextuplico sus cifras con respecto al 2014 y en el 2016, disminuyo sus cifras dos veces con respecto al 2015. De acuerdo con lo anterior, en el año 2016 el sector minero varió sus cifras con relación al año 2014:	a) 24 veces	<p>Primero: $6 \times$ Segundo: $6 - 2$ Tercero: $6 \times (6 - 2) = 6 \times 4 = 24$</p>	<p>1°: Relaciona la expresión sextuplico con el operador $6 \times$. 2°: Calcula la diferencia entre seis y dos, pues quizás piensa que la expresión “disminuyo...dos veces” en este caso indica sustraer en el valor referencia del año 2015 con el valor referencia del año 2016 (no tiene en cuenta el contexto). 3°: Multiplica las situaciones, pues quizás piensa que el operador $6 \times$ determina la relación entre ellas.</p>	<p>1°: Establece la relación multiplicativa de la operación para el año 2015. 2°: Intuye erróneamente la relación multiplicativa de la operación para el año 2016. 3°: Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos.</p>
					b) 4 veces	$6 - 2 = 4$	<p>Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que la diferencia de los datos conlleva a la respuesta. Intercambia las expresiones pues en el orden correcto no puede realizar la operación.</p>	No reconoce la composición entre un operador multiplicador y un operador divisor; además de confundirla con una diferencia entre estos valores.
					c) 3 veces	<p>$6 \div 2 = 3$ Op₁: $6 \times$ Op₂: $\div 2$ Op₁Op₂: $3 \times$</p>	<p>Operación realizada de forma correcta, pues entiende que los operadores $6 \times$ y $\div 2$ se relacionan mediante el operador $3 \times$.</p>	Relaciona correctamente la composición entre un operador multiplicador y un operador divisor.
					d) 12 veces	<p>Primero: $6 \times$ Segundo: $\div 2$ Tercero: $6 \times 2 = 12$</p>	<p>1°: Relaciona la expresión “sextuplico” con el operador $6 \times$. 2°: Relaciona la expresión “disminuyo...dos veces” con el operador $\div 2$. 3°: Multiplica las situaciones, pues quizás piensa que la dependencia multiplicativa la define el operador multiplicador.</p>	<p>1°: Establece la relación multiplicativa de la operación para el año 2015. 2°: Establece la relación multiplicativa de la operación para el año 2016. 3°: Relaciona erróneamente los operadores multiplicativos.</p>

9	Cantidad discreta	De operador divisor y operador multiplicador	Estado inicial y estado final desconocidos	El informe menciona que el sector energético el año 2015 disminuyo seis veces sus cifras con respecto al 2014 y en el 2016, triplico las cifras con respecto al 2015. De acuerdo con lo anterior, en el año 2016 el sector energético varió sus cifras con relación al año 2014:	a) 12 veces	<p>Primero: $6 -$ Segundo: 6×3 Tercero: $(6 \times 3) - 6 = 18 - 6 = 12$</p>	<p>1°: Relaciona la expresión “disminuyo seis veces” con la expresión seis menos cierto valor. 2°: Calcula el triple de seis, pues es el dato que encuentra como referencia para el año 2015. 3°: Sustrae las situaciones, pues quizás piensa que la expresión “disminuyo” indica sustracción. Intercambia las expresiones pues en el orden correcto no puede realizar la operación.</p>	<p>1°: Confunde una expresión de operador divisor con una expresión de operador para la sustracción. 2°: Intuye la relación multiplicativa de la operación para el año 2016. 3°: Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos.</p>
					b) 9 veces	$6 + 3 = 9$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que la suma de los datos conlleva a la respuesta.	No reconoce la composición entre un operador divisor y un operador multiplicador; además de confundirla con una suma entre estos valores.
					c) 18 veces	<p>Primero: $\div 6$ Segundo: $3 \times$ Tercero: $6 \times 3 = 18$</p>	<p>1°: Relaciona la expresión “disminuyo...seis veces” con el operador $\div 6$. 2°: Relaciona la expresión “triplico” con el operador $3 \times$. 3°: Multiplica las situaciones, pues quizás piensa que la dependencia multiplicativa la define el operador multiplicador.</p>	<p>1°: Establece la relación multiplicativa de la operación para el año 2015. 2°: Establece la relación multiplicativa de la operación para el año 2016. 3°: Relaciona erróneamente los operadores multiplicativos.</p>
					d) 2 veces	<p>$6 \div 3 = 2$ Op₁: $\div 6$ Op₂: $3 \times$ Op₁Op₂: $\div 2$</p>	Operación realizada de forma correcta, pues entiende que los operadores $\div 6$ y $3 \times$ se relacionan mediante el operador $\div 2$.	Relaciona correctamente la composición entre un operador divisor y un operador multiplicador.
10	Cantidad discreta	De doble operador divisor	Estado inicial y estado final desconocidos	El informe indica que el sector agrícola ha disminuido sus cifras, en el 2015 las	a) 16 veces	<p>$8 \times 2 = 16$ Op₁: $\div 8$ Op₂: $\div 2$ Op₁Op₂: $\div 16$</p>	Operación realizada de forma correcta, pues entiende que los operadores $\div 8$ y $\div 2$ se relacionan mediante el operador $\div 16$.	Relaciona correctamente la composición de doble operador divisor.
					b) 6 veces	$8 - 2 = 6$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás	No reconoce la composición de operadores divisores y la

				bajo ocho veces con respecto al año 2014 y en el 2016, dos veces menos con respecto al 2015. De acuerdo con lo anterior, en el año 2016 el sector agrícola disminuyo sus cifras con relación al año 2014:			que la diferencia de los datos conlleva a la respuesta.	confunde con una diferencia entre estos valores.
					c) 2 veces	<p>Primerο: $8 - 2$</p> <p>Segundo: $8 - 2$</p> <p>Tercero: $8 - (8 - 2) = 8 - 6 = 2$</p>	<p>1°: Relaciona la expresión "bajo ocho veces" con la expresión ocho menos cierto valor.</p> <p>2°: Calcula la diferencia entre ocho y dos, pues quizás piensa que la expresión "dos veces menos" en este caso indica sustraerle dos al valor referencia del año 2015 (no tiene en cuenta el contexto).</p> <p>3°: Sustraer las situaciones, pues quizás piensa que la expresión "disminuyo" indica sustracción.</p>	<p>1°: Confunde una expresión de operador divisor con una expresión de operador para la sustracción.</p> <p>2°: Intuye erróneamente la relación multiplicativa de la operación para el año 2016.</p> <p>3°: Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos.</p>
					d) 4 veces	<p>Primerο: $\div 8$</p> <p>Segundo: $\div 2$</p> <p>Tercero: $8 \div 2 = 4$</p>	<p>1°: Relaciona la expresión "bajo ocho veces" con el operador $\div 8$.</p> <p>2°: Relaciona la expresión "dos veces menos" con el operador $\div 8$.</p> <p>3°: Divide las situaciones, pues quizás piensa que la dependencia multiplicativa del problema.</p>	<p>1°: Establece la relación multiplicativa de la operación para el año 2015.</p> <p>2°: Establece la relación multiplicativa de la operación para el año 2016.</p> <p>3°: Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos.</p>

SITUACIONES PROBLEMA 11

CATEGORÍA: SITUACIONES DE EQUIVALENCIA								
ENUNCIADO GENERAL DE LA SITUACIÓN PLANTEADA			Juliana y Sofia juegan a ampliar y reducir sombras. Para ello, cada una usa su lápiz cuyas longitudes son diferentes. Juliana primero amplía la sombra de un lápiz a 4 veces su longitud real y luego esta sombra la reduce a 8 veces. Sofia en cambio primero amplía la sombra de su lápiz a 3 veces su longitud y luego esa sombra la reduce a 6 veces su tamaño.					
PREGUNTA	SUBCATEGORÍA	NOMBRE DEL PROBLEMA	POSIBILIDAD DE ESTADO U OPERADOR	ENUNCIADO DE LA PREGUNTA	ANÁLISIS DE LA RESPUESTA			
					OPCIÓN DE RESPUESTA	POSIBLE OPERACIÓN	INTERPRETACIÓN DE OPERACIÓN	EXPLICACIÓN DE OPERACIÓN
11	Cantidad continua	De operadores	Estado final desconocido	Si se comparan las longitudes de las segundas sombras producidas por Juliana y Sofia con las longitudes reales de sus propios lápices, la afirmación correcta es:	<p>a) Las longitudes de las segundas sombras que obtienen Juliana y Sofia son la mitad de las longitudes de sus respectivos lápices.</p>	Primero: Longitud $\times 4 =$ Sombra1 Segundo: Sombra1 $\div 8 =$ Sombra2 Tercero: Longitud $\div 2 =$ Sombra 2 Op ₁ : $\times 4$ Op ₂ : $\div 8$ Op ₁ Op ₂ : $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$	1°: Calcula el cuádruplo de la longitud real del lápiz. 2°: Calcula la octava parte de la primera sombra generada. 3°: Reconoce que los operadores multiplicativos $\times 4$ y $\div 8$ actúan como una cadena sucesiva sobre la longitud real del lápiz.	Operación realizada de forma correcta, pues reconoce que los operadores multiplicativos actúan como una cadena sucesiva sobre la longitud de los lápices. Establece las relaciones multiplicativas existentes y las efectúa en un orden determinado, reconociendo que los operadores (Op \times y \div Op) aunque diferentes son equivalentes y que, al actuar sobre el mismo <i>Ei</i> , producen el mismo <i>Ef</i> .
						Primero: Longitud $\times 3 =$ Sombra1 Segundo: Sombra1 $\div 6 =$ Sombra2 Tercero: Longitud $\div 2 =$ Sombra 2 Op ₁ : $\times 3$ Op ₂ : $\div 6$ Op ₁ Op ₂ : $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	1°: Calcula el triple de la longitud real del lápiz. 2°: Calcula la sexta parte de la primera sombra generada. 3°: Reconoce que los operadores multiplicativos $\times 3$ y $\div 6$ actúan como una cadena sucesiva sobre la longitud real del lápiz.	

					<p>b) Las longitudes de los lápices de Juliana y Sofía son la mitad de las longitudes de las segundas sombras.</p>	<p>Primero: $\text{Longitud} \times 4 = \text{Sombra1}$ Segundo: $\text{Sombra1} \div 8 = \text{Sombra2}$ Tercero: $\text{Sombra2} \div 2 = \text{Longitud}$ $\text{Op}_1: \times 4$ $\text{Op}_2: \div 16$ $\text{Op}_1\text{Op}_2: \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$</p>	<p>1°: Calcula el cuádruplo de la longitud real del lápiz. 2°: Calcula la octava parte de la primera sombra generada. 3°: Calcula la mitad de la segunda sombra generada.</p>	<p>1°: Establece la relación multiplicativa solo para el criterio de la primera sombra. 2°: Establece la relación multiplicativa solo para el criterio de la segunda sombra. 3°: Relaciona erróneamente los operadores multiplicativos.</p>
						<p>Primero: $\text{Longitud} \times 3 = \text{Sombra1}$ Segundo: $\text{Sombra1} \div 6 = \text{Sombra2}$ Tercero: $\text{Sombra2} \div 2 = \text{Longitud}$ $\text{Op}_1: \times 3$ $\text{Op}_2: \div 12$ $\text{Op}_1\text{Op}_2: \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$</p>	<p>1°: Calcula el triple de la longitud real del lápiz. 2°: Calcula la sexta parte de la primera sombra generada. 3°: Calcula la mitad de la segunda sombra generada.</p>	<p>Se concluye que establece las relaciones multiplicativas existentes, pero las efectúa de manera independiente. Además, desconoce que los operadores ($\text{Op} \times$ y $\div \text{Op}$) aunque diferentes son equivalentes y que, al actuar sobre el mismo Ei, producen el mismo Ef.</p>
					<p>c) La longitud de la segunda sombra que produce Juliana es la cuarta parte de la longitud de su propio lápiz y la longitud de la segunda sombra producida por Sofía es la tercera parte de la longitud de</p>	<p>$8 - 4 = 4$</p>	<p>Intuye la presencia de una sucesión de operaciones. Pero, confunde los operadores presentes en la situación, quizás pensado que existe una relación de tipo aditivo.</p>	<p>Reconoce un orden determinado de operaciones presente en el problema. Pero confunde las expresiones relacionadas con operadores multiplicativos con expresiones relacionadas con operadores aditivos.</p>
						<p>$6 - 3 = 3$</p>	<p>Intuye la presencia de una sucesión de operaciones. Pero, confunde los operadores presentes en la situación, quizás pensado que existe una relación de tipo aditivo.</p>	<p>Además, relaciona la expresión con la longitud de las segundas sombras.</p> <p>Se concluye, que desconoce que los operadores ($\text{Op} \times$ y $\div \text{Op}$) aunque diferentes son</p>

					su propio lápiz.			equivalentes y que, al actuar sobre el mismo <i>Ei</i> , producen el mismo <i>Ef</i> .
					d) La longitud del lápiz de Juliana es la cuarta parte de la longitud de la segunda sombra que ella produce y la longitud del lápiz de Sofía es la tercera parte de la longitud de la segunda sombra que ella produce.	$8 - 4 = 4$	Intuye la presencia de una sucesión de operaciones. Pero, confunde los operadores presentes en la situación, quizás pensado que existe una relación de tipo aditivo.	Reconoce un orden determinado de operaciones presente en el problema. Pero confunde las expresiones relacionadas con operadores multiplicativos con expresiones relacionadas con operadores aditivos. Además, relaciona la expresión con la longitud de los lápices. Se concluye, que desconoce que los operadores ($Op \times$ y $\div Op$) aunque diferentes son equivalentes y que, al actuar sobre el mismo <i>Ei</i> , producen el mismo <i>Ef</i> .
						$6 - 3 = 3$	Intuye la presencia de una sucesión de operaciones. Pero, confunde los operadores presentes en la situación, quizás pensado que existe una relación de tipo aditivo.	

SITUACIONES PROBLEMA 12

CATEGORÍA: SITUACIONES DE EQUIVALENCIA								
ENUNCIADO GENERAL DE LA SITUACIÓN PLANTEADA		<p>El día de hoy se abrió la inscripción para los talleres de Artes Plásticas y de Música, que ofrecerán los profesores Dalila y Beto, respectivamente, a los niños de los grados primero y segundo. Para saber la cantidad de alumnos, de cada grado, que recibirían este año, ellos acordaron:</p> <p>I. Que el número de estudiantes que cada profesor recibiría en su taller fuera el mismo.</p> <p>II. Que la profesora Dalila recibiera la tercera parte de los estudiantes, de su taller, del grado primero y que 9 veces esa cantidad de estudiantes de primero, sean los estudiantes de grado segundo.</p> <p>III. El profesor Beto dijo que la mitad de los estudiantes de su taller fueran de grado primero y que 6 veces esa cantidad de estudiantes de primero sean de grado segundo</p>						
PREGUNTA	SUBCATEGORÍA	NOMBRE DEL PROBLEMA	POSIBILIDAD DE ESTADO U OPERADOR	ENUNCIADO DE LA PREGUNTA	ANÁLISIS DE LA RESPUESTA			
					OPCIÓN DE RESPUESTA	POSIBLE OPERACIÓN	INTERPRETACIÓN DE OPERACIÓN	EXPLICACIÓN DE OPERACIÓN
12	Cantidad discreta	De operadores	Estado final desconocido	Es correcto decir que:	<p>a) La cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe la profesora Dalila es la sexta parte del total de estudiantes de su taller y que, la cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe el profesor Beto es la cuarta parte del total de estudiantes de su taller.</p>	<p>Primero: – 3 Segundo: + 9 Tercero: $9 - 3 = 6$</p>	<p>1°: Relaciona la expresión “tercera parte” con la expresión tres menos cierto valor. 2°: Relaciona la expresión “nueve veces” con la expresión nueve más. 3°: Intuye la presencia de una sucesión de operaciones. Pero, confunde los operadores presentes en la situación, quizás pensado que existe una relación de tipo aditivo.</p>	<p>Reconoce un orden determinado de operaciones presente en el problema. Pero confunde las expresiones relacionadas con operadores multiplicativos con expresiones relacionadas con operadores aditivos.</p> <p>Se concluye, que desconoce que los operadores (Op\times y Op\div) aunque diferentes son equivalentes y que, al actuar sobre el mismo Ei, producen el mismo Ef.</p>
					<p>Primero: – 2 Segundo: + 6 Tercero: $6 - 2 = 4$</p>	<p>1°: Relaciona la expresión “mitad” con la expresión dos menos cierto valor. 2°: Relaciona la expresión “seis veces” con la expresión seis más.</p>		

						<p>3°: Intuye la presencia de una sucesión de operaciones. Pero, confunde los operadores presentes en la situación, quizás pensando que existe una relación de tipo aditivo.</p>	
				<p>b) Que la cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe cada profesor, es la tercera parte de la cantidad de estudiantes de sus talleres.</p>	<p>Primerο: Total \div 3 = Est primero Segundo: Est primero \times 9 = Est segundo Tercero: $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$</p>	<p>1°: Calcula el número de estudiantes de primero, el cual es la tercera parte del total de estudiantes. 2°: Calcula el número de estudiantes de segundo, el cuál es nueve veces el número de estudiantes de primero. 3°: Confunde la función de los operadores, quizás pensando que debe formar una fracción.</p>	<p>1°: Establece la relación multiplicativa solo para el criterio de la primera sombra. 2°: Establece la relación multiplicativa solo para el criterio de la segunda sombra. 3°: Relaciona erróneamente los operadores multiplicativos.</p>
					<p>Primerο: Total \div 2 = Est primero Segundo: Est primero \times 6 = Est segundo Tercero: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$</p>	<p>1°: Calcula el número de estudiantes de primero, el cual es la tercera parte del total de estudiantes. 2°: Calcula el número de estudiantes de segundo, el cuál es nueve veces el número de estudiantes de primero. 3°: Confunde la función de los operadores, quizás pensando que debe formar una fracción.</p>	<p>Se concluye que establece las relaciones multiplicativas existentes, pero, desconoce que los operadores (Op\times y \divOp) aunque diferentes son equivalentes y que, al actuar sobre el mismo <i>Ei</i>, producen el mismo <i>Ef</i>.</p>

					<p>c) Que la cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe cada profesor es 3 veces la cantidad de estudiantes de sus talleres.</p>	<p>Primero: Total \div 3 = Est primero Segundo: Est primero \times 9 = Est segundo Op₁: \times9 Op₂: \div3 Op₁Op₂: $\frac{9}{3} = 3$</p>	<p>1°: Calcula el número de estudiantes de primero, el cual es la tercera parte del total de estudiantes. 2°: Calcula el número de estudiantes de segundo, el cuál es nueve veces el número de estudiantes de primero. 3°: Reconoce que los operadores multiplicativos \times9 y \div3 actúan como una cadena sucesiva sobre el total de estudiantes del taller.</p>	<p>Operación realizada de forma correcta, pues reconoce que los operadores multiplicativos \div3 y \times6 actúan como una cadena sucesiva sobre el total de estudiantes.</p>
						<p>Primero: Total \div 2 = Est primero Segundo: Est primero \times 6 = Est segundo Op₁: \div2 Op₂: \times6 Op₁Op₂: $\frac{6}{2} = 3$</p>	<p>1°: Calcula el número de estudiantes de primero, el cual es la tercera parte del total de estudiantes. 2°: Calcula el número de estudiantes de segundo, el cuál es nueve veces el número de estudiantes de primero. 3°: Reconoce que los operadores multiplicativos \times6 y \div2 actúan como una cadena sucesiva sobre el total de estudiantes del taller.</p>	<p>Establece las relaciones multiplicativas existentes y las efectúa en un orden determinado, reconociendo que los operadores (Op\times y \divOp) aunque diferentes son equivalentes y que, al actuar sobre el mismo <i>Ei</i>, producen el mismo <i>Ef</i>.</p>
					<p>d) La cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe la profesora Dalía es la novena parte del total de</p>	<p>Total \div 9 = Est segundo</p>	<p>Intuye la presencia de un operador multiplicativo. Pero, confunde completamente el sentido de la operación</p>	<p>Relaciona erróneamente los datos del problema. Aunque, reconoce la relación multiplicativa de la situación planteada, no identifica el tipo de</p>

					estudiantes de su taller y que la cantidad de estudiantes de segundo grado que recibe el profesor Beto es la sexta parte del total de estudiantes de su taller.		y los datos del problema.	operador que debe aplicar.
						Total \div 6 = Est segundo	Intuye la presencia de un operador multiplicativo. Pero, confunde completamente el sentido de la operación y los datos del problema.	Se concluye, que desconoce que los operadores ($Op \times$ y $\div Op$) aunque diferentes son equivalentes y que, al actuar sobre un Ei , producen el mismo Ef .

SITUACIONES PROBLEMA 13 AL 16

CATEGORÍA: SITUACIONES DE COMPOSICIÓN DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS								
ENUNCIADO GENERAL DE LA SITUACIÓN PLANTEADA		Paola es diseñadora y realiza tareas de publicidad para empresas. Su último trabajo consiste en diseñar el logo de una empresa de productos cosméticos y dejarlo listo para ser publicado en carteles, carpetas, folletos y tarjetas. Para no cometer errores, Paola realiza diferentes modificaciones sobre la imagen.						
PREGUNTA	SUBCATEGORÍA	NOMBRE DEL PROBLEMA	POSIBILIDAD DE ESTADO U OPERADOR	ENUNCIADO DE LA PREGUNTA	ANÁLISIS DE LA RESPUESTA			
					OPCIÓN DE RESPUESTA	POSIBLE OPERACIÓN	INTERPRETACIÓN DE OPERACIÓN	EXPLICACIÓN DE OPERACIÓN
13	Cantidad continua	De doble operador divisor	Estado inicial y estado final desconocidos	Si la imagen para una tarjeta resulta de reducir tres veces la imagen original y luego, volver la imagen obtenida seis veces menor, se puede afirmar que la imagen usada en una tarjeta respecto a la original varía:	a) 3 veces menor	Primero: $3 -$ Segundo: $6 - 3$	1°: Relaciona la expresión "reducir tres veces" con la expresión tres menos cierto valor. 2°: Calcula la diferencia entre seis y tres, pues quizás piensa que la expresión "seis veces menor" en este caso indica sustracción (no tiene en cuenta el contexto). Intercambia los valores pues en el orden correcto no puede realizar la operación. 3°: Sustrahe las situaciones, pues quizás piensa que la expresión "reducir" indica sustracción.	1°: Confunde una expresión de operador divisor con una expresión de operador para la sustracción. 2°: Intuye erróneamente la relación multiplicativa para la segunda modificación. 3°: Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos.
					b) 2 veces menor	$6 \div 3 = 2$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que el cociente de los datos conlleva a la respuesta.	No reconoce la composición de operadores divisores y la confunde con una división entre estos valores.
					c) 18 veces menor	$3 \times 6 = 18$ Op ₁ : $\div 3$ Op ₂ : $\div 6$ Op ₁ Op ₂ : $\div 18$	Operación realizada de forma correcta, pues entiende que los operadores $\div 3$ y $\div 6$ se relacionan mediante el operador $\div 18$.	Relaciona correctamente la composición de doble operador divisor.
					d) 9 veces menor	Primero: $\div 3$ Segundo: $\div 6$ Tercero: $5 + 3 = 8$	1°: Relaciona la expresión "reducir tres veces" con el operador $\div 3$.	1°: Establece la relación multiplicativa para la primera modificación.

							<p>2°: Relaciona la expresión “seis veces menor” con el operador $\div 6$.</p> <p>3°: Suma las situaciones, pues quizás olvida la dependencia multiplicativa del problema.</p>	<p>2°: Establece la relación multiplicativa para la primera modificación.</p> <p>3°: Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos.</p>
14	Cantidad continua	De operador divisor y operador multiplicador	Estado inicial y estado final desconocidos	Si la imagen para un folleto resulta de disminuir veinticuatro veces la imagen original y luego, duplicar la imagen obtenida, se puede afirmar que la imagen usada en un folleto respecto a la original varía:	a) 24 veces menor	<p>Primero: $24 -$</p> <p>Segundo: 24×2</p> <p>Tercero: $(24 \times 2) - 24 = 48 - 24 = 24$</p>	<p>1°: Relaciona la expresión “disminuyo veinticuatro veces” con la expresión veinticuatro menos cierto valor.</p> <p>2°: Calcula el doble de veinticuatro, pues es el dato que encuentra como referencia para la primera modificación.</p> <p>3°: Sustrahe las situaciones, pues quizás piensa que la expresión “disminuir” indica sustracción. Intercambia las expresiones pues en el orden correcto no puede realizar la operación.</p>	<p>1°: Confunde una expresión de operador divisor con una expresión de operador para la sustracción.</p> <p>2°: Intuye la relación multiplicativa de la operación para la segunda modificación.</p> <p>3°: Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos.</p>
					b) 12 veces menor	<p>$24 \div 2 = 2$</p> <p>Op₁: $\div 24$</p> <p>Op₂: $2 \times$</p> <p>Op₁Op₂: $\div 12$</p>	Operación realizada de forma correcta, pues entiende que los operadores $\div 24$ y $2 \times$ se relacionan mediante el operador $\div 12$.	Relaciona correctamente la composición entre un operador divisor y un operador multiplicador.
					c) 26 veces menor	$24 + 2 = 26$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que la suma de los datos conlleva a la respuesta.	No reconoce la composición entre un operador divisor y un operador multiplicador; además de confundirla con una suma entre estos valores.
					d) 48 veces menor	<p>Primero: $\div 24$</p> <p>Segundo: $2 \times$</p> <p>Tercero: $24 \times 2 = 48$</p>	<p>1°: Relaciona la expresión “disminuir veinticuatro veces” con el operador $\div 24$.</p> <p>2°: Relaciona la expresión “duplicar” con el operador $2 \times$.</p>	<p>1°: Establece la relación multiplicativa para la primera modificación.</p> <p>2°: Establece la relación multiplicativa para la primera modificación.</p>

							3°: Multiplica las situaciones, pues quizás piensa que la dependencia multiplicativa la define el operador multiplicador.	3°: Relaciona erróneamente los operadores multiplicativos.
15	Cantidad continua	De operador multiplicador y operador divisor	Estado inicial y estado final desconocidos	Si la imagen para una carpeta resulta de aumentar dieciocho veces la imagen original y luego, reducir la imagen obtenida a la mitad, se puede afirmar que la imagen usada en una carpeta respecto a la original varía:	a) 34 veces mayor	<p>Primero: $18 +$</p> <p>Segundo: $18 - 2$</p> <p>Tercero: $18 + (18 - 2) = 18 + 16 = 34$</p>	<p>1°: Relaciona la expresión “aumentar dieciocho veces” con la expresión dieciocho más cierto valor.</p> <p>2°: Calcula la diferencia entre dieciocho y dos, pues quizás piensa que la expresión “mitad” en este caso indica sustraer en el valor referencia para la primera modificación el valor referencia de la segunda modificación (no tiene en cuenta el contexto).</p> <p>3°: Adiciona las situaciones, pues quizás piensa que la expresión “aumentar” indica adición.</p>	<p>1°: Confunde una expresión de operador multiplicador con una expresión de operador para la adición.</p> <p>2°: Intuye erróneamente la relación multiplicativa para la segunda modificación.</p> <p>3°: Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos.</p>
					b) 20 veces mayor	$18 + 2 = 20$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que la suma de los datos conlleva a la respuesta.	No reconoce la composición entre un operador multiplicador y un operador divisor; además de confundirla con una diferencia entre estos valores.
					c) 36 veces mayor	<p>Primero: $18 \times$</p> <p>Segundo: $\div 2$</p> <p>Tercero: $18 \times 2 = 36$</p>	<p>1°: Relaciona la expresión “aumentar dieciocho veces” con el operador $18 \times$.</p> <p>2°: Relaciona la expresión “la mitad” con el operador $\div 2$.</p> <p>3°: Multiplica las situaciones, pues quizás piensa que la dependencia multiplicativa la define el operador multiplicador.</p>	<p>1°: Establece la relación multiplicativa para la primera modificación.</p> <p>2°: Establece la relación multiplicativa para la primera modificación.</p> <p>3°: Relaciona erróneamente los operadores multiplicativos.</p>
					d) 9 veces mayor	<p>$18 \div 2 = 9$</p> <p>Op₁: $18 \times$</p> <p>Op₂: $\div 2$</p>	Operación realizada de forma correcta, pues entiende que los operadores $18 \times$ y $\div 2$ se	Relaciona correctamente la composición entre un

						$Op_1Op_2: 9\times$	relacionan mediante el operador $9\times$.	operador multiplicador y un operador divisor.
16	Cantidad continua	De doble operador multiplicador	Estado inicial y estado final desconocidos	Si la imagen para un cartel resulta de triplicar la imagen original y luego, volver la imagen obtenida cuatro veces mayor, se puede afirmar que la imagen usada en un cartel respecto a la original varia:	a) 21 veces mayor	<p>Primero: $3 \times$ Segundo: $3 + 4$ Tercero: $3 \times (3 + 4) = 3 \times 7 = 21$</p>	<p>1°: Relaciona la expresión "triplicar" con el operador $3\times$. 2°: Calcula la suma entre tres y cuatro, pues quizás piensa que la expresión "mayor" en este caso indica sumar en el valor referencia para la primera modificación el valor referencia de la segunda modificación (no tiene en cuenta el contexto). 3°: Multiplica las situaciones, pues quizás piensa que operador multiplicador de la primera expresión define la operación.</p>	<p>1°: Calcula la diferencia entre dieciocho y dos, pues quizás piensa que la expresión "mitad" en este caso indica sustraer en el valor referencia para la primera modificación el valor referencia de la segunda modificación (no tiene en cuenta el contexto). 2°: Intuye erróneamente la relación multiplicativa para la segunda modificación. 3°: Intuye la dependencia multiplicativa existente entre los datos del problema.</p>
					b) 12 veces mayor	<p>$3 \times 4 = 12$ $Op_1: 3\times$ $Op_2: 4\times$ $Op_1Op_2: 12\times$</p>	Operación realizada de forma correcta, pues entiende que los operadores $3\times$ y $4\times$ se relacionan mediante el operador $12\times$.	Relaciona correctamente la composición de doble operador multiplicador.
					c) 7 veces mayor	$3 + 4 = 7$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que la suma de los datos conlleva a la respuesta.	No reconoce la composición de operadores multiplicadores y la confunde con una suma entre estos valores.
					d) 36 veces mayor	<p>Primero: $3 \times$ Segundo: 3×4 Tercero: $3 \times (3 \times 4) = 3 \times 12 = 36$</p>	<p>1°: Relaciona la expresión "triplicar" con la expresión tres por. 2°: Calcule el cuádruple de tres, pues es el dato que encuentra como referencia para la primera modificación. 3°: Multiplica las situaciones, pues quizás piensa en la dependencia multiplicativa del problema.</p>	<p>1°: Establece la relación multiplicativa para la primera modificación. 2°: Establece la relación multiplicativa para la primera modificación. 3°: Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos.</p>

SITUACIONES PROBLEMA 17 AL 20

CATEGORIA: SITUACIONES DE OPERADORES MULTIPLICATIVOS SUCESIVOS																		
ENUNCIADO GENERAL DE LA SITUACIÓN PLANTEADA			<p>En el colegio Ambiental realizan un concurso de reciclaje. Cada día se pesa la cantidad de material reciclado que tenga cada salón y de acuerdo con las medidas se establece la puntuación. A continuación, se presentan los puntajes de cada salón terminada la primera semana.</p>				<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="text-align: left;">CURSO</th> <th style="text-align: left;">PUNTAJE PRIMERA SEMANA</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>6° A</td> <td>12 puntos</td> </tr> <tr> <td>6° B</td> <td>9 puntos</td> </tr> <tr> <td>6° C</td> <td>6 puntos</td> </tr> <tr> <td>6° D</td> <td>18 puntos</td> </tr> </tbody> </table>		CURSO	PUNTAJE PRIMERA SEMANA	6° A	12 puntos	6° B	9 puntos	6° C	6 puntos	6° D	18 puntos
CURSO	PUNTAJE PRIMERA SEMANA																	
6° A	12 puntos																	
6° B	9 puntos																	
6° C	6 puntos																	
6° D	18 puntos																	
PREGUNTA	SUBCATEGORÍA	NOMBRE DEL PROBLEMA	POSIBILIDAD DE ESTADO U OPERADOR	ENUNCIADO DE LA PREGUNTA	ANÁLISIS DE LA RESPUESTA													
					OPCIÓN DE RESPUESTA	POSIBLE OPERACIÓN	INTERPRETACIÓN DE OPERACIÓN	EXPLICACIÓN DE OPERACIÓN										
17	Cantidad discreta	Cadena: doble operador multiplicador	Estado final desconocido	<p>Si el curso 6° C en la segunda semana duplica el puntaje obtenido en la primera semana y luego, en la tercera semana quintuplica el puntaje de la segunda semana, el puntaje al final de la tercera semana es:</p>	<p>a) 60 puntos</p>	<p>$6 \times 2 = 12 \times 5 = 60$</p>	<p>Operación realizada de forma correcta, pues entiende que los operadores $2 \times$ y $5 \times$ hacen parte de la cadena: $6 \rightarrow 2 \times \rightarrow E \rightarrow 5 \times \rightarrow E_f$.</p>	<p>Relaciona correctamente la cadena de operadores multiplicativos, bajo el esquema: $E_i \rightarrow Op \rightarrow E \rightarrow Op \rightarrow E_f$.</p>										
					<p>b) 42 puntos</p>	<p>Primero: $6 \times 2 = 12$ Segundo: $6 \times 5 = 30$ Tercero: $12 + 30 = 42$</p>	<p>1°: Calcula el doble del puntaje de la primera semana. 2°: Calcula el quintuple del puntaje de la primera semana. 3°: Adiciona las situaciones, pues quizás piensa que la adición de las mismas conlleva al resultado.</p>	<p>1°: Establece la relación multiplicativa para la segunda semana. 2°: Establece erróneamente la relación multiplicativa para la tercera semana. 3°: Relaciona erróneamente los operadores multiplicativos.</p> <p>Se concluye que establece las relaciones multiplicativas existentes, pero las efectúa de manera independiente. Además, desconoce que la cadena de operadores multiplicativos actúa como una sucesión de dos operadores multiplicativos</p>										

							simples. Es decir, cumple el esquema: $E_i \rightarrow Op \rightarrow E \rightarrow Op \rightarrow E_f$.	
					c) 13 puntos	$6 + 2 + 5 = 13$	Intuye la presencia de una sucesión de operaciones. Pero, confunde el operador multiplicador $2\times$ con el operador aditivo $+2$ y el operador multiplicador $5\times$ con el operador aditivo $+5$.	Reconoce un orden determinado de operaciones presente en el problema. Pero confunde las expresiones relacionadas con operadores multiplicativos con expresiones relacionadas con operadores aditivos.
					d) 16 puntos	<p>Primero: $2 \times 5 = 10$</p> <p>Segundo: $6 + 10 = 16$</p>	<p>1°: Calcula el producto entre 2 y 5, que son los dos valores referencia para cada semana, quizás pensando que debe sacar un único valor.</p> <p>2°: Adiciona al puntaje de la primera semana el resultado del único valor determinado.</p>	<p>Establece erróneamente el orden y las relaciones multiplicativas existentes en el problema.</p> <p>Además, desconoce que la cadena de operadores multiplicativos actúa como una sucesión de dos operadores multiplicativos simples. Es decir, cumple el esquema: $E_i \rightarrow Op \rightarrow E \rightarrow Op \rightarrow E_f$.</p>
18	Cantidad discreta	Cadena: operador divisor y operador multiplicador	Estado final desconocido	El curso 6° B en la segunda semana reduce a una tercera parte el puntaje obtenido en la primera semana. Si en la tercera semana duplica el puntaje de la segunda semana, el puntaje al final de la	a) 21 puntos	<p>Primero: $9 \div 3 = 3$</p> <p>Segundo: $9 \times 2 = 18$</p> <p>Tercero: $3 + 18 = 21$</p>	<p>1°: Calcula la tercera parte del puntaje de la primera semana.</p> <p>2°: Calcula el doble del puntaje de la primera semana.</p> <p>3°: Adiciona las situaciones, pues quizás piensa que la adición de las mismas conlleva al resultado.</p>	<p>1°: Establece la relación multiplicativa para la segunda semana.</p> <p>2°: Establece erróneamente la relación multiplicativa para la tercera semana.</p> <p>3°: Relaciona erróneamente los operadores multiplicativos.</p> <p>Se concluye que establece las relaciones multiplicativas existentes, pero las efectúa de manera independiente. Además, desconoce que la cadena de operadores multiplicativos actúa como una sucesión de dos operadores multiplicativos</p>

				tercera semana es:			simples. Es decir, cumple el esquema: $E_i \rightarrow Op \rightarrow E \rightarrow Op \rightarrow E_f$.	
					b) 8 puntos	$9 - 3 = 6 + 2 = 8$	Intuye la presencia de una sucesión de operaciones. Pero, confunde el operador divisor $\div 3$ con el operador aditivo -3 y el operador multiplicador $2 \times$ con el operador aditivo $+2$.	Reconoce un orden determinado de operaciones presente en el problema. Pero confunde las expresiones relacionadas con operadores multiplicativos con expresiones relacionadas con operadores aditivos.
					c) 6 puntos	$9 \div 3 = 3 \times 2 = 6$	Operación realizada de forma correcta, pues entiende que los operadores $\div 3$ y $2 \times$ hacen parte de la cadena: $9 \rightarrow \div 3 \rightarrow E \rightarrow 2 \times \rightarrow E_f$.	Relaciona correctamente la cadena de operadores multiplicativos, bajo el esquema: $E_i \rightarrow Op \rightarrow E \rightarrow Op \rightarrow E_f$.
					d) 3 puntos	Primero: $2 \times 3 = 6$ Segundo: $9 - 6 = 3$	1°: Calcula el producto entre 3 y 2, que son los dos valores referencia para cada semana, quizás pensando que debe sacar un único valor. 2°: Sustraer al puntaje de la primera semana el resultado del único valor determinado, quizás pensando que la expresión "reduce" indica sustracción.	Establece erróneamente el orden y las relaciones multiplicativas existentes en el problema. Además, desconoce que la cadena de operadores multiplicativos actúa como una sucesión de dos operadores multiplicativos simples. Es decir, cumple el esquema: $E_i \rightarrow Op \rightarrow E \rightarrow Op \rightarrow E_f$.
19	Cantidad discreta	Cadena: operador multiplicador y operador divisor	Estado final desconocido	Si el curso 6° A en la segunda semana cuadruplica el puntaje obtenido en la primera semana y luego, en la tercera semana reduce el	a) 8 puntos	$12 \times 4 = 48 \div 6 = 8$	Operación realizada de forma correcta, pues entiende que los operadores $4 \times$ y $\div 6$ hacen parte de la cadena: $12 \rightarrow 4 \times \rightarrow E \rightarrow \div 6 \rightarrow E_f$.	Relaciona correctamente la cadena de operadores multiplicativos, bajo el esquema: $E_i \rightarrow Op \rightarrow E \rightarrow Op \rightarrow E_f$.
					b) 10 puntos	$12 + 4 = 16 - 6 = 10$	Intuye la presencia de una sucesión de operaciones. Pero, confunde el operador multiplicador $4 \times$ con el operador aditivo $+4$ y el operador divisor $\div 6$ con el operador aditivo -6 .	Reconoce un orden determinado de operaciones presente en el problema. Pero confunde las expresiones relacionadas con operadores multiplicativos con expresiones relacionadas con operadores aditivos.

				puntaje de la segunda semana a una sexta parte, el puntaje al final de la tercera semana es:	c) 50 puntos	<p>Primero: $12 \times 4 = 48$ Segundo: $12 \div 6 = 2$ Tercero: $48 + 2 = 50$</p>	<p>1°: Calcula el cuádruple del puntaje de la primera semana. 2°: Calcula la sexta parte puntaje de la primera semana. 3°: Adiciona las situaciones, pues quizás piensa que la adición de las mismas conlleva al resultado.</p>	<p>1°: Establece la relación multiplicativa para la segunda semana. 2°: Establece erróneamente la relación multiplicativa para la tercera semana. 3°: Relaciona erróneamente los operadores multiplicativos.</p> <p>Se concluye que establece las relaciones multiplicativas existentes, pero las efectúa de manera independiente. Además, desconoce que la cadena de operadores multiplicativos actúa como una sucesión de dos operadores multiplicativos simples. Es decir, cumple el esquema: $E_i \rightarrow Op \rightarrow E \rightarrow Op \rightarrow E_f$.</p>
					d) 36 puntos	<p>Primero: $4 \times 6 = 24$ Segundo: $12 + 24 = 36$</p>	<p>1°: Calcula el producto entre 4 y 6, que son los dos valores referencia para cada semana, quizás pensando que debe sacar un único valor. 2°: Adiciona los valores, pues quizás piensa que la adición de las mismas conlleva al resultado.</p>	<p>Establece erróneamente el orden y las relaciones multiplicativas existentes en el problema.</p> <p>Además, desconoce que la cadena de operadores multiplicativos actúa como una sucesión de dos operadores multiplicativos simples. Es decir, cumple el esquema: $E_i \rightarrow Op \rightarrow E \rightarrow Op \rightarrow E_f$.</p>
20	Cantidad discreta	Cadena: doble operador divisor	Estado final desconocido	El curso 6° B en la segunda semana reduce a una mitad el puntaje obtenido en	a) 15 puntos	<p>Primero: $18 \div 2 = 9$ Segundo: $18 \div 3 = 6$ Tercero: $9 + 6 = 15$</p>	<p>1°: Calcula la mitad del puntaje de la primera semana. 2°: Calcula la tercera parte del puntaje de la primera semana. 3°: Adiciona las situaciones, pues quizás piensa que la</p>	<p>1°: Establece la relación multiplicativa para la segunda semana. 2°: Establece erróneamente la relación multiplicativa para la tercera semana.</p>

				la primera semana. Si en la tercera semana lo reduce el puntaje de la segunda semana a la tercera parte, el puntaje al final de la tercera semana es:			adición de las mismas conlleva al resultado.	3°: Relaciona erróneamente los operadores multiplicativos. Se concluye que establece las relaciones multiplicativas existentes, pero las efectúa de manera independiente. Además, desconoce que la cadena de operadores multiplicativos actúa como una sucesión de dos operadores multiplicativos simples. Es decir, cumple el esquema: $E_i \rightarrow Op \rightarrow E \rightarrow Op \rightarrow E_f$.
					b) 3 puntos	$18 \div 2 = 9 \div 3 = 3$	Operación realizada de forma correcta, pues entiende que los operadores $\div 2$ y $\div 3$ hacen parte de la cadena: $18 \rightarrow \div 2 \rightarrow E \rightarrow \div 3 \rightarrow E_f$.	Relaciona correctamente la cadena de operadores multiplicativos, bajo el esquema: $E_i \rightarrow Op \rightarrow E \rightarrow Op \rightarrow E_f$.
					c) 13 puntos	$18 - 2 = 16 - 3 = 13$	Intuye la presencia de una sucesión de operaciones. Pero, confunde el operador divisor $\div 2$ con el operador aditivo -2 y el operador divisor $\div 3$ con el operador aditivo -3 .	Reconoce un orden determinado de operaciones presente en el problema. Pero confunde las expresiones relacionadas con operadores multiplicativos con expresiones relacionadas con operadores aditivos.
					d) 12 puntos	Primero: $2 \times 3 = 6$ Segundo: $18 - 6 = 12$	1°: Calcula el producto entre 2 y 6, que son los dos valores referencia para cada semana, quizás pensando que debe sacar un único valor. 2°: Sustrahe al puntaje de la primera semana el resultado del único valor determinado, quizás pensado que la expresión "reduce" indica sustracción.	Establece erróneamente el orden y las relaciones multiplicativas existentes en el problema. Además, desconoce que la cadena de operadores multiplicativos actúa como una sucesión de dos operadores multiplicativos simples. Es decir, cumple el esquema: $E_i \rightarrow Op \rightarrow E \rightarrow Op \rightarrow E_f$.

SITUACIONES PROBLEMA 21 AL 26

CATEGORÍA: SITUACIONES DE OPERADOR MULTIPLICATIVOS								
ENUNCIADO GENERAL DE LA SITUACIÓN PLANTEADA			En una urna, el profesor David deposita cierto número de balotas entre blancas y rojas para rifar entradas al parque de diversiones de la ciudad. Cada balota blanca indicará un ganador, mientras que una balota roja será una oportunidad perdida.					
PREGUNTA	SUBCATEGORÍA	NOMBRE DEL PROBLEMA	POSIBILIDAD DE ESTADO U OPERADOR	ENUNCIADO DE LA PREGUNTA	ANÁLISIS DE LA RESPUESTA			
					OPCIÓN DE RESPUESTA	POSIBLE OPERACIÓN	INTERPRETACIÓN DE OPERACIÓN	EXPLICACIÓN DE OPERACIÓN
21	Cantidad discreta	De operador divisor	Estado final desconocido	Si en la bolsa hay 16 balotas y la cuarta parte de ellas son blancas, entonces el número de entradas que se entregaran será de:	a) 12	$16 - 4 = 12$	Confunde la expresión cuarta parte o cuatro veces menos, con la expresión cuatro menos.	Intuye el sentido de la operación, pero, confunde una expresión relacionada con un operador divisor con una expresión relacionada con un operador para la sustracción.
					b) 64	$16 \times 4 = 64$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que el número de balotas es la cuarta parte del número de entradas, por ello, multiplica el número de balotas por 4.	Relaciona erróneamente los datos del problema. Aunque, reconoce la relación multiplicativa de la situación planteada, no identifica el tipo de operador que debe aplicar.
					c) 4	$16 \div 4 = 4$	Operación realizada de forma correcta, pues el número de entradas es la cuarta parte del número de balotas en la bolsa.	Relaciona correctamente la relación multiplicativa existente entre los datos del problema y aplica el operador adecuado.
					d) 20	$16 + 4 = 20$	Confunde completamente el sentido del problema, quizás pensando que debe hallar un número que al restarle 4 de cómo resultado 16.	Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos. Además, confunde un operador divisor con un operador para la sustracción.
22	Cantidad discreta	De operador multiplicativo	Estado final desconocido	Si en la bolsa hay 12 balotas rojas y se entregara, en entradas,	a) 15 entradas	$12 + 3 = 15$	Confunde la expresión tres veces mayor o tres veces más, con la expresión mayor en tres o tres más en relación al número de balotas rojas.	Intuye el sentido de la operación, pero, confunde una expresión relacionada con un operador multiplicador con una expresión relacionada con un operador para la adición.

				tres veces más que el número de balotas rojas existentes, entonces el premio será de:	b) 4 entradas	$12 \div 3 = 4$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que debe hallar un número que al ser multiplicado por 3 dé como resultado 12.	Relaciona erróneamente los datos del problema. Aunque, reconoce la relación multiplicativa de la situación planteada, no identifica el tipo de operador que debe aplicar.
					c) 9 entradas	$12 - 3 = 9$	Confunde completamente el sentido del problema, quizás pensando que debe hallar un número que al ser mayor en 3 dé como resultado 12.	Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos. Además, confunde un operador multiplicador con un operador para la adición.
					d) 36 entradas	$12 \times 3 = 36$	Operación realizada de forma correcta, pues el número de entradas es tres veces el número de balotas rojas.	Relaciona correctamente la relación multiplicativa existente entre los datos del problema y aplica el operador adecuado.
23	Cantidad discreta	De operador multiplicativo	Estado inicial desconocido	Un estudiante indica que el número de entradas que se entregaran, corresponde exactamente al cuádruple de las balotas rojas existentes en la urna. Si el profesor David entrega 48 entradas, el número de balotas rojas en la urna es:	a) 44	$48 - 4 = 44$	Confunde completamente el sentido del problema, quizás pensando que debe hallar un número que al ser mayor en 4 dé como resultado 48.	Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos. Además, confunde un operador divisor con un operador para la sustracción.
					b) 192	$48 \times 4 = 192$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que el número de entradas debe ser cuadruplicado.	Relaciona erróneamente los datos del problema. Aunque, reconoce la relación multiplicativa de la situación planteada, no identifica el tipo de operador que debe aplicar.
					c) 52	$48 + 4 = 52$	Confunde la expresión cuádruple o cuatro veces más, con la expresión mayor en cuatro o cuatro más en relación al número de entradas.	Intuye el sentido de la operación, pero, confunde una expresión relacionada con un operador multiplicador con una expresión relacionada con un operador para la adición.
					d) 12	$48 \div 4 = 12$	Operación realizada correctamente, pues el número de balotas rojas es la cuarta parte del número de entradas entregadas.	Relaciona correctamente la relación multiplicativa existente entre los datos del problema y aplica el operador adecuado.

24	Cantidad discreta	De operador divisor	Estado inicial desconocido	Una profesora señala que el número de entradas que se entregaran, es exactamente seis veces menor al número de las balotas rojas existentes en la urna. Si el profesor David entrega 3 entradas, el número de balotas rojas en la urna es:	a) 3	$6 - 3 = 3$	Confunde el sentido de la operación y los datos del problema, pensando quizás que debe hallar un número que al ser mayor en 3 dé como resultado 6. Intercambia los datos pues en el orden correcto no puede realizar la operación.	Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos. Además, confunde un operador divisor con un operador para la sustracción.
					b) 18	$3 \times 6 = 18$	Operación realizada de forma correcta, pues el número de entradas en la sexta parte del número de balotas rojas existentes en la urna.	Relaciona correctamente la relación multiplicativa existente entre los datos del problema y aplica el operador adecuado.
					c) 2	$6 \div 3 = 2$	Confunde el sentido de la operación y los datos del problema, pensando quizás que el número de entradas ha sido ampliado. Intercambia los datos pues en el orden correcto no puede realizar la operación.	Relaciona erróneamente los datos del problema. Aunque, reconoce la relación multiplicativa de la situación planteada, no identifica el tipo de operador que debe aplicar.
					d) 9	$3 + 6 = 9$	Confunde la expresión seis veces, con la expresión más en relación al número de entradas dado.	Intuye el sentido de la operación, pero, confunde una expresión relacionada con un operador multiplicador con una expresión relacionada con un operador para la adición.
25	Cantidad discreta	De operador multiplicativo	Operador desconocido	Si en la bolsa hay 8 balotas rojas y se entregan 24 entradas, entonces el número de balotas blancas respecto a las rojas es:	a) 16 veces	$24 - 8 = 16$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que debe hallar un número que al ser mayor en 8 dé como resultado 24.	Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos. Además, confunde un operador divisor con un operador para la sustracción.
					b) 192 veces	$24 \times 8 = 192$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que el producto de ambas expresiones representa la relación entre las balotas.	Relaciona erróneamente los datos del problema. Aunque, reconoce la relación multiplicativa de la situación planteada, no identifica el tipo de operador que debe aplicar.

					c) 3 veces	$24 \div 8 = 3$	Operación realizada de forma correcta, pues relaciona que x veces el número de balotas rojas corresponde al número de balotas blancas.	Relaciona correctamente la relación multiplicativa existente entre los datos del problema y aplica el operador adecuado.
					d) 32 veces	$8 + 24 = 32$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que la suma de ambas expresiones representa la relación entre las balotas.	Relaciona erróneamente los datos del problema. Además, confunde una expresión relacionada con un operador multiplicativo con una expresión relacionada con un operador aditivo.
26	Cantidad discreta	De operador divisor	Operador desconocido	Si se entregan 36 entradas y en la bolsa hay 6 balotas rojas, entonces el número de balotas blancas respecto a las rojas es:	a) 6 veces	$36 \div 6 = 6$	Operación realizada de forma correcta, pues relaciona que x veces el número de balotas rojas corresponde al número de balotas blancas.	Relaciona correctamente la relación multiplicativa existente entre los datos del problema y aplica el operador adecuado.
					b) 216 veces	$36 \times 6 = 216$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que relación multiplicativa indica multiplicación entre los valores.	Relaciona erróneamente los datos del problema. Aunque, reconoce la relación multiplicativa de la situación planteada, no identifica el tipo de operador que debe aplicar.
					c) 30 veces	$36 - 6 = 30$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que la diferencia entre ambas balotas representa la relación entre ellas.	Relaciona erróneamente los datos del problema. Además, confunde una expresión relacionada con un operador divisor con una expresión relacionada con un operador para la sustracción.
					d) 42 veces	$36 + 6 = 42$	Confunde el sentido de la operación, pensando quizás que debe hallar un número que al ser menor en 6 dé como resultado 36.	Relaciona erróneamente los datos del problema y la dependencia multiplicativa existente entre ellos. Además, confunde un operador multiplicador con un operador para la adición.

Anexo 2. Secuencia didáctica

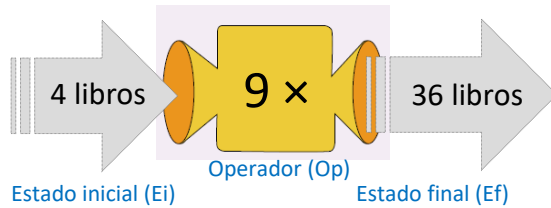
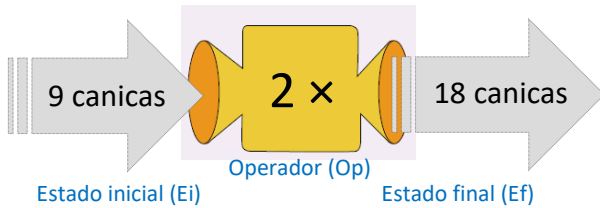
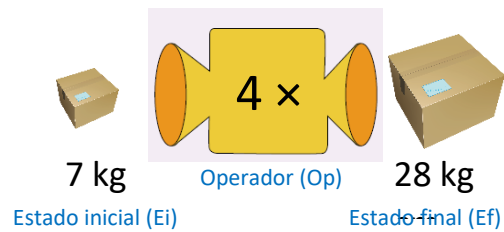
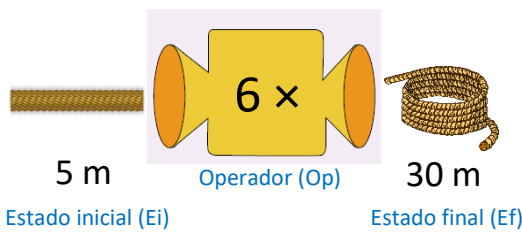
A.2.1 Sesión 1

Operadores multiplicativos naturales

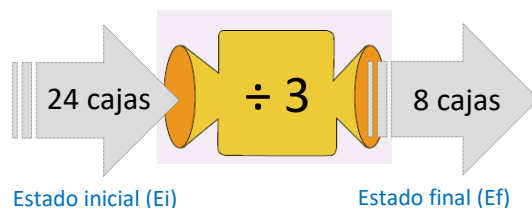
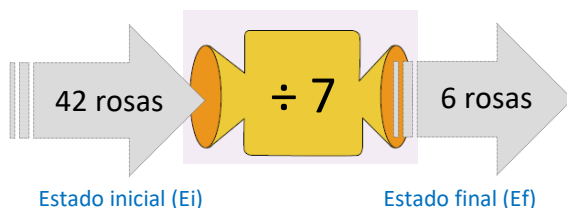
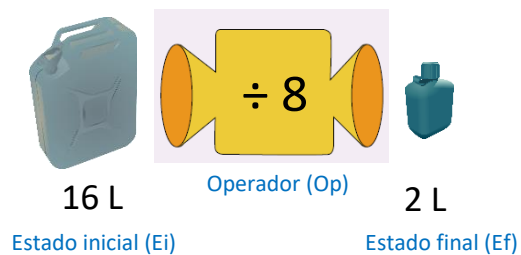
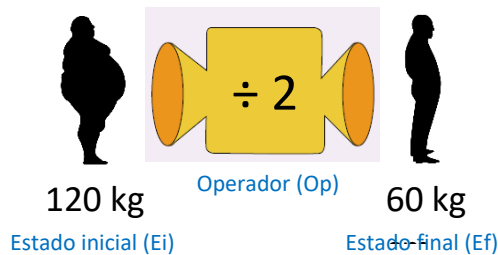
»»»»»»»»»» INFORMATE »»»»»»»»»»»»

MÁQUINAS AMPLIADORAS O REDUCTORAS

Una **máquina ampliadora** es aquella que permite ampliar 1, 2, 3 o más veces el valor de la medida de una magnitud o la cantidad de elementos de una colección. Por ejemplo,

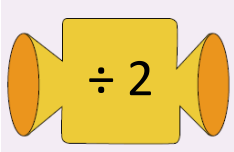
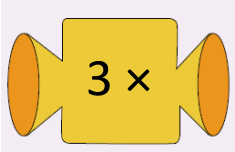
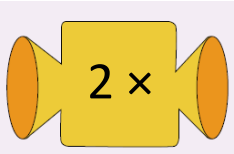
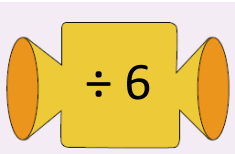
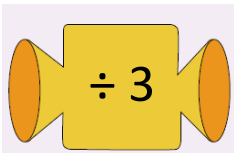
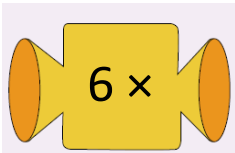


Una **máquina reductora** es aquella que permite reducir 1, 2, 3 o más veces el valor de la medida de una magnitud o la cantidad de elementos de una colección. Por ejemplo,



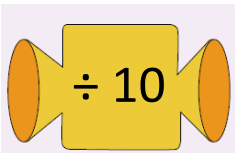
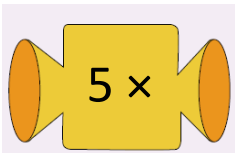
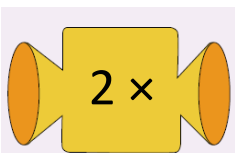
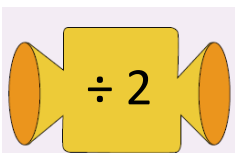
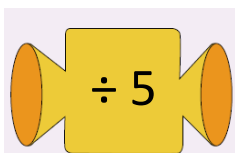
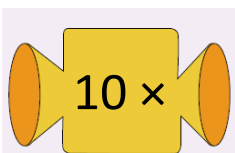
»»»»»»»»»» PRACTICA »»»»»»»»»»

1. En la bolsa de materiales No.1, se dan cuerdas de diferentes longitudes. Las cuerdas de la misma longitud tienen el mismo color. Encuentra los pares de cuerdas que se pueden colocar como Ei y Ef en cada una de las máquinas que se presentan a continuación. **IMPORTANTE:** Ten cuidado al escoger los pares de cuerdas, ya que al final todas las máquinas deben estar completas. Para responder, escribe el color de la cuerda correspondiente.

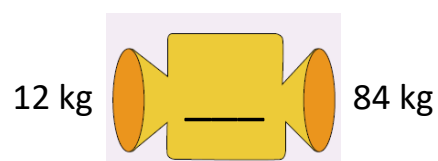
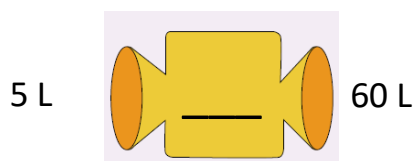
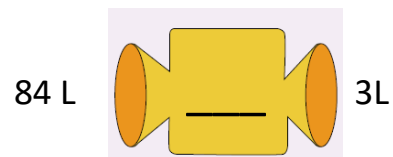
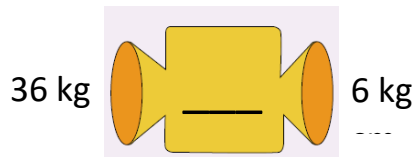
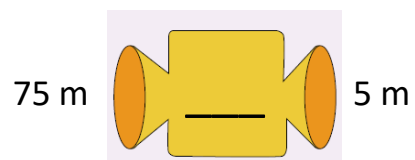
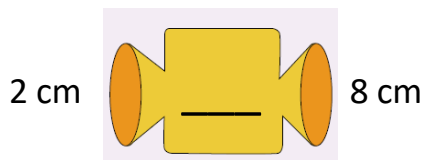
	
	
	

2. En la bolsa de materiales No. 2, hallarás tarjetas con los números 2, 5, 10, 20, 50, 100. Encuentra los pares de tarjetas que se pueden colocar como Ei y Ef en cada una de las máquinas que se presentan a continuación.

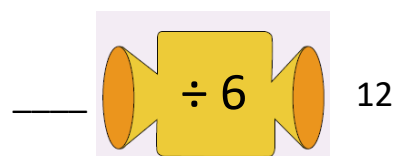
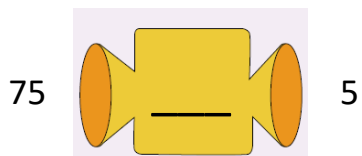
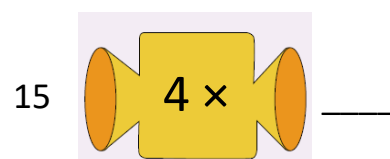
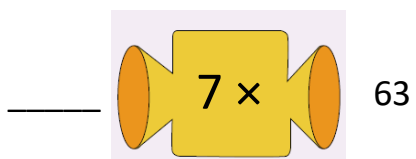
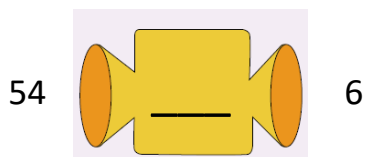
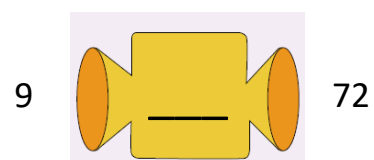
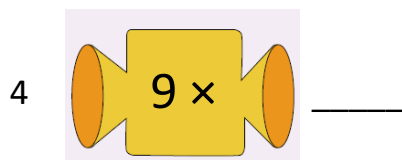
IMPORTANTE: Ten en cuenta que todas las máquinas deben quedar completas al final.

3. Encuentra el operador (Op) de cada máquina simple ampliadora o reductora que permite la transformación dada.

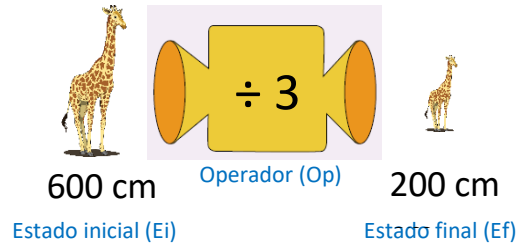
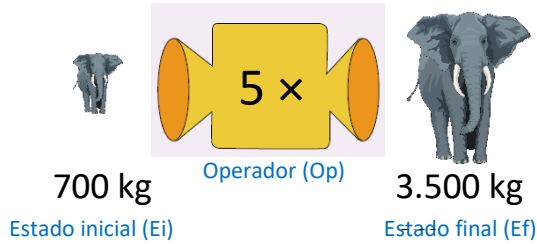


4. Escriba el Ei, el Op o el Ef que hace falta en cada máquina.



RELACIONES MÚLTIPlicATIVAS ENTRE LOS ESTADOS DE UNA MÁQUINA

Toda **máquina** tiene diferentes formas de expresar la relación multiplicativa entre el estado inicial (Ei) y el estado final (Ef), observa:



En esta máquina:
 El Ef es cinco veces el Ei
 El Ef es cinco veces mayor que el Ei
 El Ef es el quíntuplo del Ei

En esta máquina:
 El Ef es la tercera parte del Ei
 El Ef es tres veces menor que el Ei

»»»»»»»»»» **PRACTICA** »»»»»»»»»»

5. Usa las tarjetas de la bolsa de materiales No. 3. Coloca la tarjeta que debe ir en el Ei, en el Ef y en la relación multiplicativa existente entre el Ei y el Ef. Observa el ejemplo. **IMPORTANTE:** Ten presente que debes escoger bien las fichas que van en cada máquina para que logres llenar la tabla en su totalidad.

Estado inicial	Operador	Estado final
Tarjeta # 1	Relación multiplicativa	Tarjeta # 2
	es la tercera parte de	
	es el triplo de	

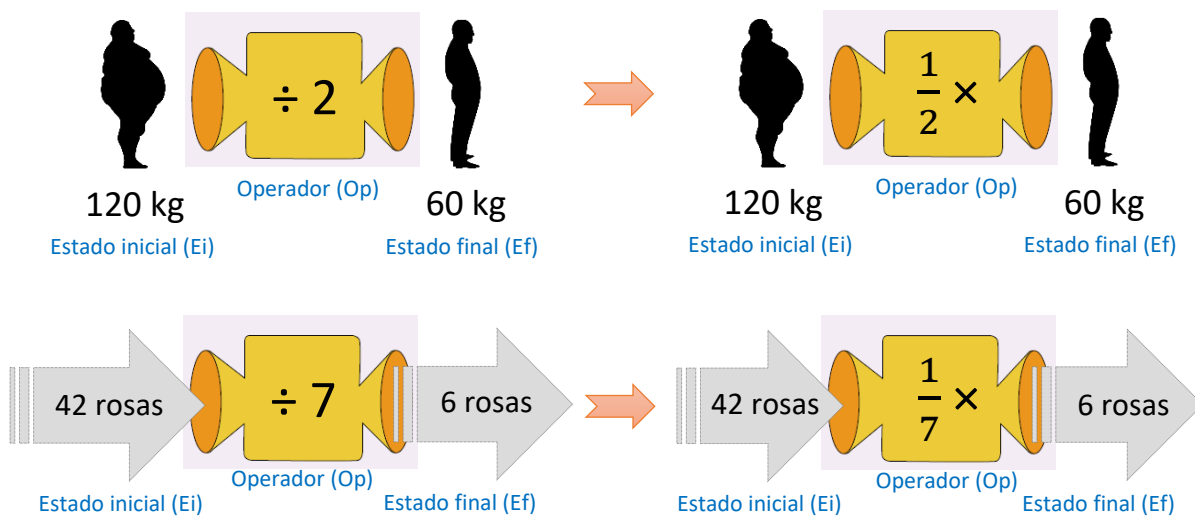
Estado inicial	Operador	Estado final
<i>Tarjeta # 1</i>	<i>Relación multiplicativa</i>	<i>Tarjeta # 2</i>

Operadores multiplicativos naturales

»»»»»»»»»» INFORMATE »»»»»»»»»»»»

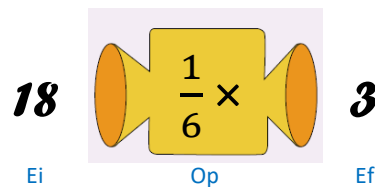
MÁQUINAS REDUCToras EN FORMA DE FRACCIÓN

Toda **máquina reductora** también puede representarse por medio de una fracción. Por ejemplo,



RELACIONES MÚLTIPlicativas EN UNA MÁQUINA REDUCTORA

Una **máquina reductora** tiene diferentes formas de expresar la relación multiplicativa entre el estado inicial (Ei) y el estado final (Ef), observa:



Relaciones multiplicativas entre Ef y Ei

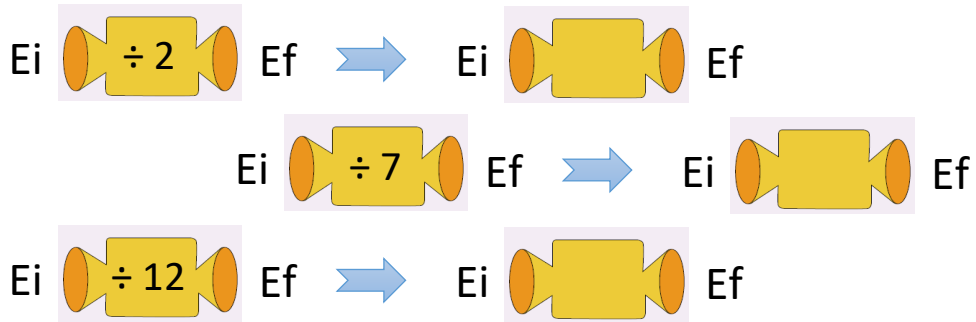
- 3 es **seis veces menor** que el 18
- 3 es **un sexto** del 18
- 3 es **la sexta parte** del 18
- 3 está **contenido seis veces** en el 18

Relaciones multiplicativas entre Ei y Ef

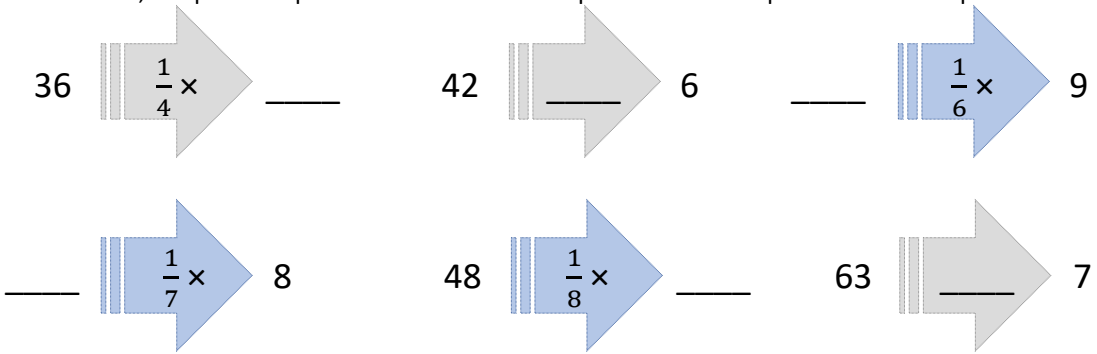
- 18 es **seis veces** 3
- 18 es **seis veces mayor** que el 3
- 18 es **el séxtuplo** del 3
- 18 **contiene seis veces exactas** a 3

»»»»»»»»»» PRACTICA »»»»»»»»»»»»

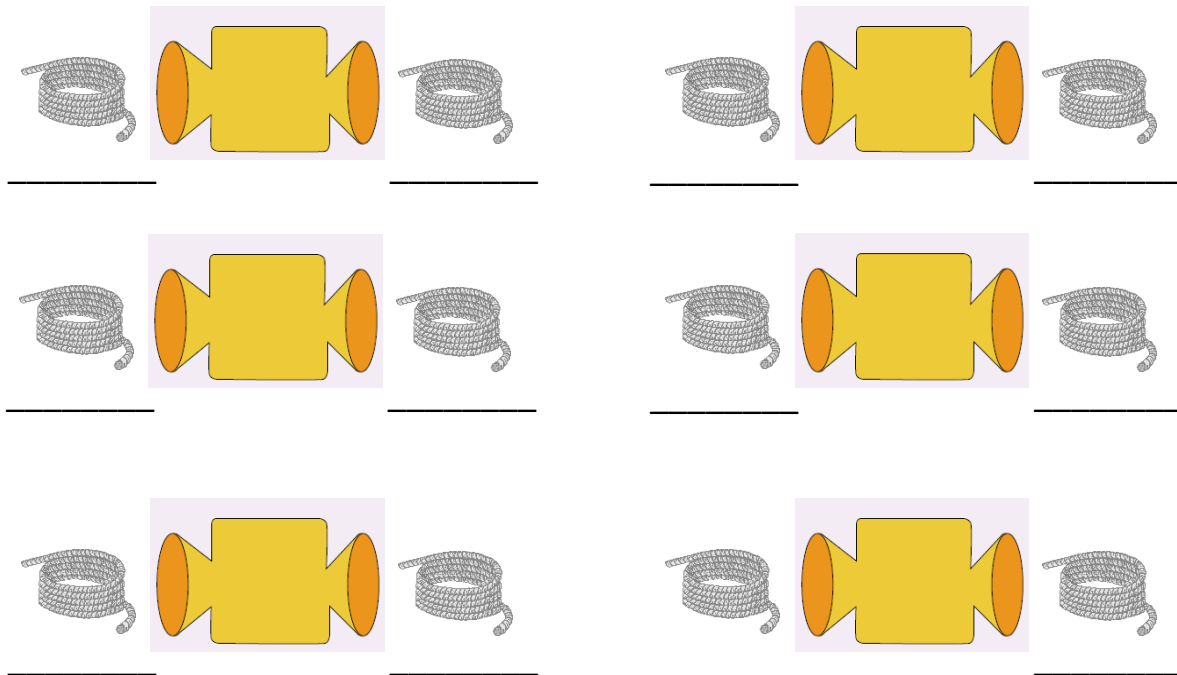
1. Convierte cada máquina reductora con operador divisor en una máquina con operador fraccionario.



2. Escriba el E_i , el Op o el E_f que hace falta en cada máquina. Escriba el operador de la máquina como fracción.



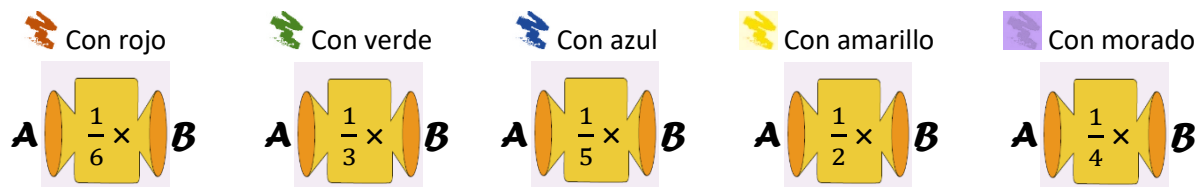
3. En la bolsa de materiales No.1, se dan cuerdas de diferentes longitudes y tarjetas con operadores de máquinas reductoras. Encuentra los pares de cuerdas que se pueden colocar como E_i y E_f en cada una de las máquinas y los operadores que relacionan los estados. **IMPORTANTE:** Ten cuidado al escoger los pares de cuerdas, ya que al final todas las máquinas deben estar completas.



4. Marca **V** si la afirmación es verdadera o **X** si la afirmación es falsa.

- | | |
|--|---|
| <input type="radio"/> 54 es ocho veces 9. | <input type="radio"/> 32 es cuatro veces mayor que 8. |
| <input type="radio"/> 15 contiene cinco veces exactas a 3. | <input type="radio"/> 24 es la cuarta parte de 8. |
| <input type="radio"/> 7 es el óctuplo de 56. | <input type="radio"/> 9 está contenido cinco veces en 40. |
| <input type="radio"/> 6 es un séptimo de 42. | <input type="radio"/> 18 es el séxtuplo de 9. |
| <input type="radio"/> 9 es cuatro veces menor que 36. | <input type="radio"/> 18 es tres veces 6. |

5. Colorea con el color que se asocia a cada máquina, las tarjetas que contienen alguna expresión que indica alguna afirmación verdadera que se puede hacer a partir de la máquina. Vea el ejemplo.



B es la mitad de A	A es el triple de B	B es un quinto de A
A es cinco veces mayor que B	B es cuatro veces menor que A	A es el duplo de B
B es un tercio de A	A es el séxtuplo de B	B es la tercera parte de A
B es la quinta parte de B	A es dos veces mayor que B	B es la sexta parte de A
A es cuatro veces mayor que B	A es tres veces mayor que B	B es la sexta parte de A
A es el triple de B	B es cinco veces menor que A	B es dos veces menor que A
B es un medio de A	A es el doble de B	A es el cuádruplo de B
B es un sexto de A	A es el quíntuplo de B	B es tres veces menor que A

OTRA FORMA DE EXPRESAR UNA MÁQUINA

Para agilizar la forma de expresar una máquina sin hacer gráficos, esta se puede representar así:

7

Estado inicial (Ei)

Operador (Op)

56

Estado final (Ef)

→

8 [7] = 56

Op Ei Ef

Se lee:
 El óctuplo de 7 es 56
 56 es el óctuplo de 7
 56 es ocho veces mayor que 7

18

Estado inicial (Ei)

Operador (Op)

3

Estado final (Ef)

→

1/6 [18] = 3

Op Ei Ef

Se lee:
 Un sexto de 18 es 3
 3 es un sexto de 18
 3 es la sexta parte de 18

6. Completa la siguiente tabla. Para ello, escribe cada expresión como una máquina reductora y su respectiva relación multiplicativa entre los estados Ef y Ei.

Expresión	Máquina	Relación multiplicativa entre Ef y Ei
$\frac{1}{3} [12] = 4$	$12 \xrightarrow{\div 3} 4$	Un tercio de 12 es 4 4 es un tercio de 12 4 es la tercera parte de 12
$4 [5] = 20$		
$\frac{1}{5} [30] = 6$		
$6 [7] = 42$		

Expresión	Máquina reductora	Relación multiplicativa entre Ef y Ei
$\frac{1}{4} [36] = 9$		
$8 [9] = 72$		
$\frac{1}{7} [35] = 5$		

7. Escribe el Ei, el Op o el Ef que hace falta en cada máquina.

$$\frac{1}{9} [45] = \underline{\quad}$$

$$6 [9] = \underline{\quad}$$

$$\frac{1}{5} [50] = \underline{\quad}$$

$$5 [12] = \underline{\quad}$$

$$\frac{1}{8} [32] = \underline{\quad}$$

$$8 [15] = \underline{\quad}$$

$$3 [\underline{\quad}] = 36$$

$$\underline{\quad} [49] = 7$$

$$4 [\underline{\quad}] = 80$$

$$\frac{1}{9} [\underline{\quad}] = 6$$

$$\underline{\quad} [9] = 63$$

$$\frac{1}{9} [\underline{\quad}] = 12$$

»»»»»»»»»» **SOLUCIONA** »»»»»»»»»»

8. Resuelve los siguientes problemas.

a. Un electricista gana \$ 24.000 por una hora de labor. Si el electricista gana 3 veces lo que gana su ayudante, ¿cuánto gana su ayudante en una hora laborada?

b. Andrea tiene 32 dulces y quiere repartirlos entre sus compañeras de curso. Si a cada niña le corresponde una octava parte del total de dulces, entonces:

- ¿Cuántas compañeras de curso tiene Andrea?
- ¿Cuántos dulces le correspondió a cada una?

c. Observa la imagen. Luego, completa.



- Lorena tiene _____ puntos.
- Fernando tiene _____ puntos.
- Camilo tiene _____ puntos.
- Diana tiene _____ puntos.

d. Luis realiza arreglos florales, para los cuales emplea rosas. Si cada arreglo floral cuenta con 12 rosas y este número corresponde a la quinta parte del total de rosas que tiene Luis, entonces, ¿cuántas rosas tiene Luis en total?

e. Juan colecciona tarjetas de animales y acaba de adquirir un grupo de 36 tarjetas. De este grupo de tarjetas, se sabe que un sexto del total son tarjetas de reptiles, la cuarta parte del total son tarjetas de aves, una novena parte son tarjetas de peces y el resto son tarjetas de animales en vía de extinción.

- ¿Qué número de tarjetas son de reptiles?
- ¿Cuántas tarjetas son de aves?
- ¿Cuántas tarjetas son de peces?
- ¿Cuántas de animales en vía de extinción?

f. En el salón de 6°A hay 36 estudiantes. Se sabe que $\frac{1}{6}$ del total de los estudiantes reprobó el examen de matemáticas, $\frac{1}{9}$ el examen de lenguaje, $\frac{1}{4}$ el examen de biología y $\frac{1}{12}$ el examen de sociales. Determina que el número de estudiantes que reprobó cada uno de los exámenes.

Matemáticas: _____ Lenguaje: _____ Biología: _____ Sociales: _____

g. Une con una línea, cada fracción de hora con su respectiva representación en minutos.

20 minutos	5 minutos	10 minutos	30 minutos	15 minutos
$\frac{1}{6}$ de hora	$\frac{1}{2}$ hora	$\frac{1}{3}$ de hora	$\frac{1}{4}$ de hora	$\frac{1}{12}$ de hora

Composición de operadores multiplicativos

»»»»»»»»»» **ACTIVATE** »»»»»»»»»»

Representa cada problema como máquina y como igualdad, luego, resuélvelo. Observa el ejemplo.

A Nicolás le corresponde la cuarta parte de los 24 dulces que reparte su amigo.
¿Cuántos dulces debe recibir Nicolás?

EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO MÁQUINA

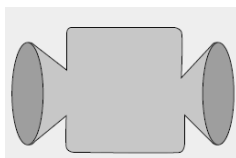
EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO IGUALDAD

$$\frac{1}{4} [24] = ? \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4} [24] = 6$$

Respuesta: Nicolás recibe 6 dulces.

a. Luciana y Camilo están jugando tiro al blanco. El puntaje de Luciana es 35 puntos. Si el puntaje de Camilo es seis veces mayor que el puntaje de Luciana, ¿cuál es el puntaje de Camilo?

EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO MÁQUINA

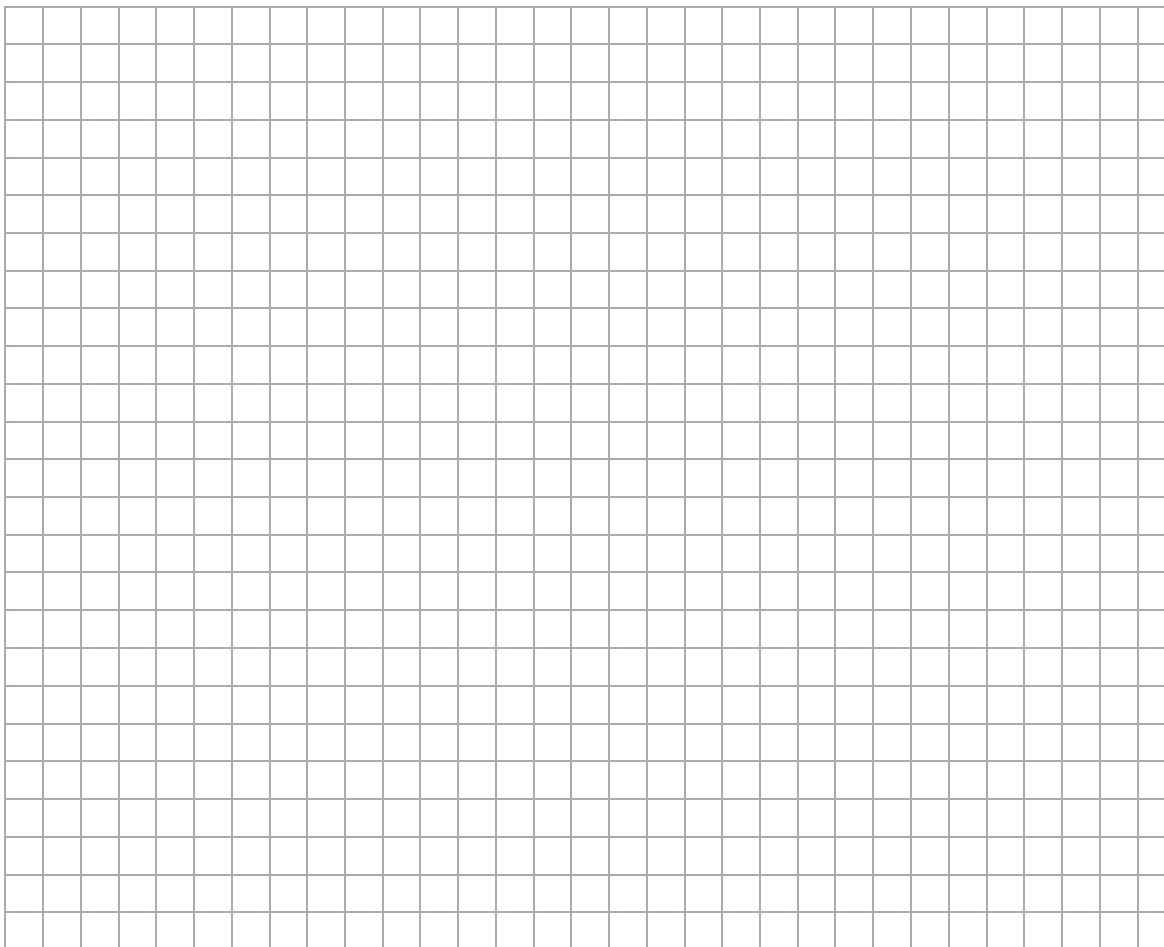


EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO IGUALDAD

$$\square [\square] = \square$$

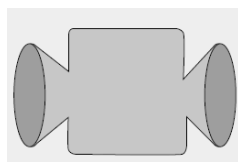
Respuesta: _____

Escribe aquí el procedimiento empleado para resolver el problema



b. Una empresa ha sido contratada para instalar los postes de alumbrado público. Cada poste tiene bajo tierra un quinto de su longitud. Si la longitud del poste que se encuentra bajo tierra es 100 cm, ¿cuál es la medida real del poste?

EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO MÁQUINA

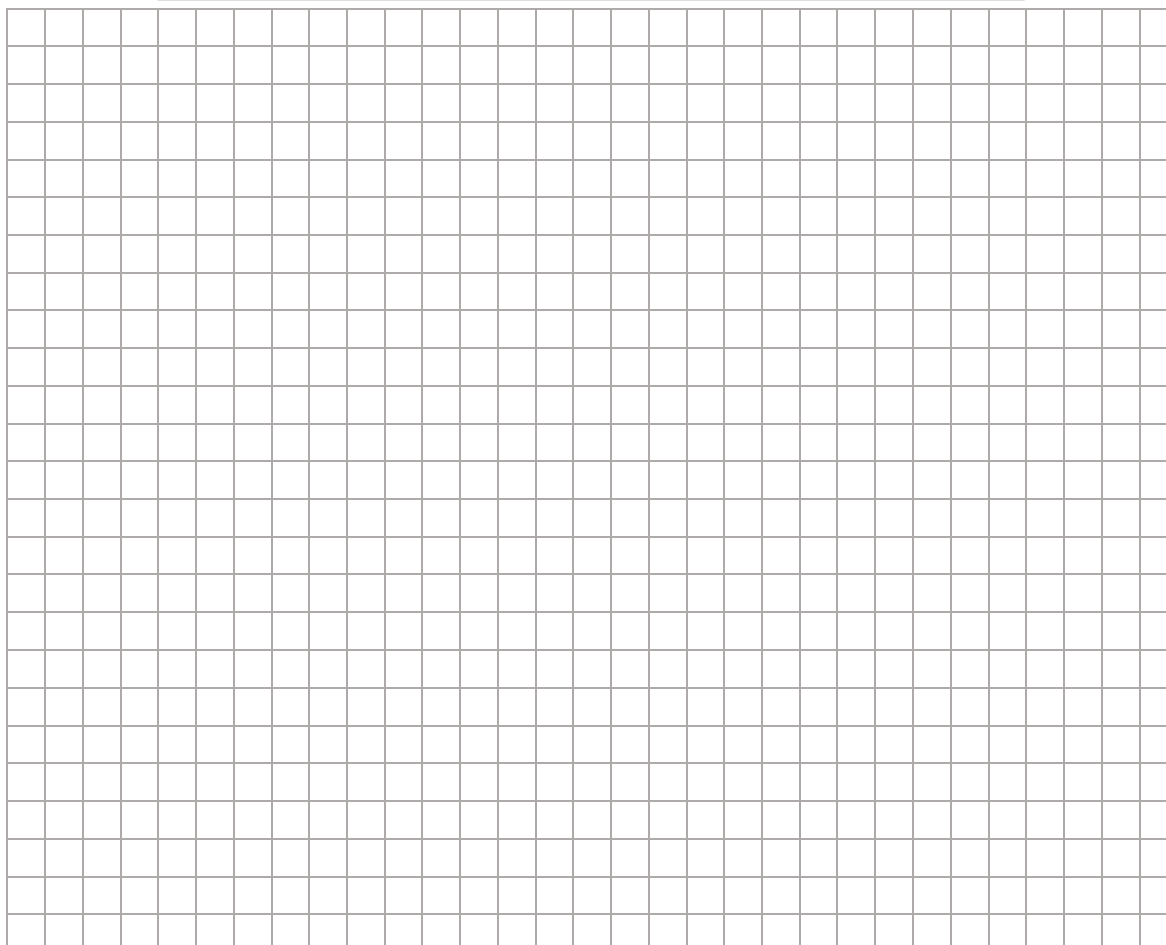


EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO IGUALDAD

$$\square \left[\square \right] = \square$$

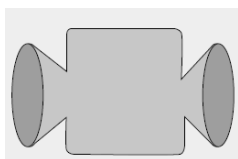
Respuesta: _____

Escribe aquí el procedimiento empleado para resolver el problema



d. Un depósito de agua contiene 36 L al inicio del día. Si al final del día en el depósito solo hay 4 litros de agua, ¿qué parte del contenido inicial del depósito quedó?

EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO MÁQUINA



EL PROBLEMA REPRESENTADO COMO IGUALDAD



Respuesta: _____

Composición de operadores multiplicativos

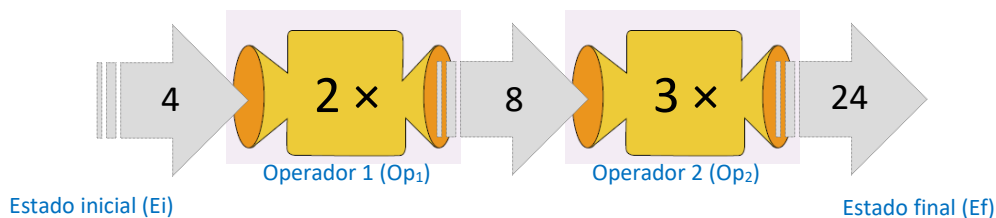
»»»»»»»»»» INFORMATE »»»»»»»»»»»»

MÁQUINAS COMPUESTAS

Dos o más máquinas simples pueden unirse en serie para formar una más poderosa, una **máquina compuesta**. Esta máquina puede estar compuesta de dos o más máquinas ampliadoras o reductoras, aunque también puede ser mixta (con unas máquinas que amplían y otras que reducen).

MÁQUINAS COMPUESTAS DE DOS MÁQUINAS SIMPLES AMPLIADORAS

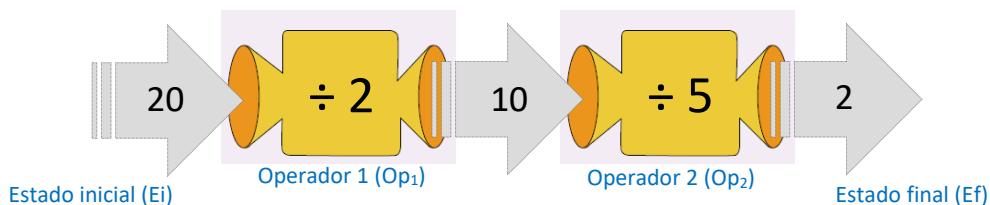
Una **máquina compuesta de máquinas simples ampliadoras** permite realizar procesos consecutivos de ampliación, así:



Se puede observar, que el **Ei** al ingresar a la primera máquina sale ampliado 2 veces. Luego, ingresa a la segunda máquina y el valor obtenido en la primera máquina, sale ampliado 3 veces, produciendo así el **Ef**.

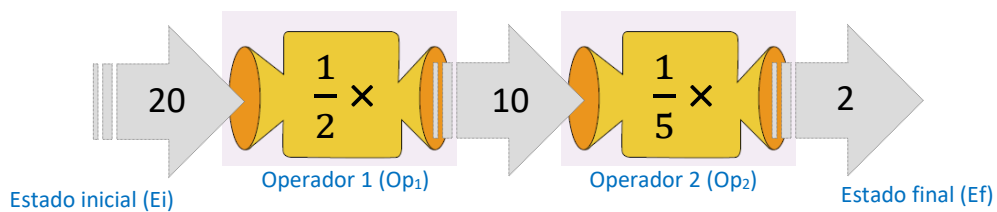
MÁQUINAS COMPUESTAS DE DOS MÁQUINAS SIMPLES REDUCTORAS

Una **máquina compuesta de máquinas simples reductoras** permite realizar procesos consecutivos de reducción, así:



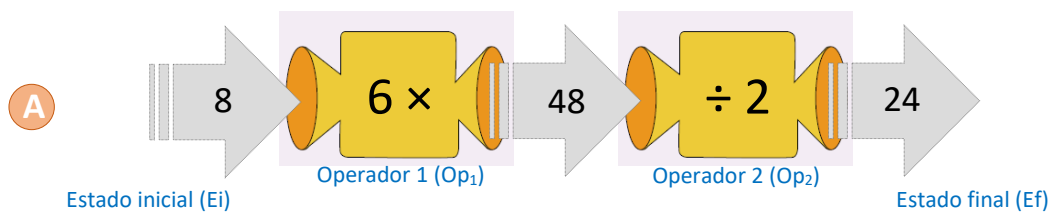
Se puede observar, que el **Ei** al ingresar a la primera máquina sale reducido 2 veces. Luego, ingresa a la segunda máquina y el valor obtenido en la primera máquina, sale reducido 5 veces, produciendo así el **Ef**.

Otra forma de expresar esta máquina compuesta consiste en escribir los operadores en forma de fracción, es decir, escribir $\frac{1}{2}$ en lugar de $\div 2$ y en lugar de $\div 5$ escribir $\frac{1}{5}$, así:



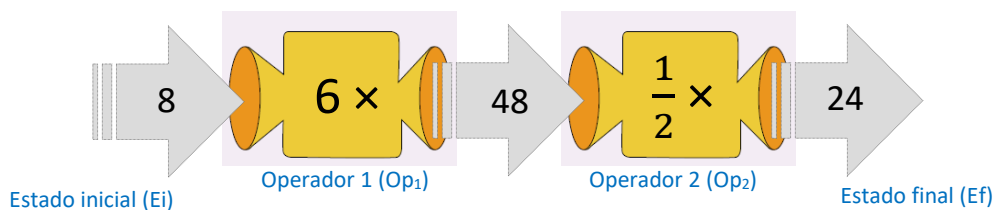
MÁQUINAS COMPUESTAS DE UNA MÁQUINA SIMPLE AMPLIADORA Y UNA MÁQUINA SIMPLE REDUCTORA (MÁQUINA MIXTA)

Algunas **máquinas compuestas amplían y reducen** en procesos consecutivos. Por ejemplo,

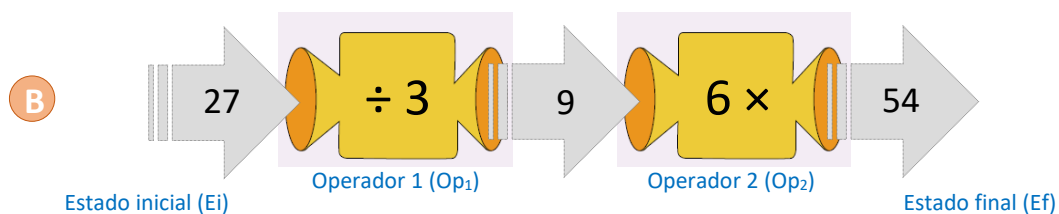


Se puede observar, que el **Ei** al ingresar a la primera máquina sale ampliado 6 veces, pero luego, ingresa a la segunda máquina y el valor obtenido en la primera máquina, sale reducido 2 veces, produciendo así el **Ef**.

Otra forma de expresar esta máquina compuesta consiste en escribir el operador divisor en forma de fracción, es decir, escribir $\frac{1}{2}$ en lugar de $\div 2$, así:

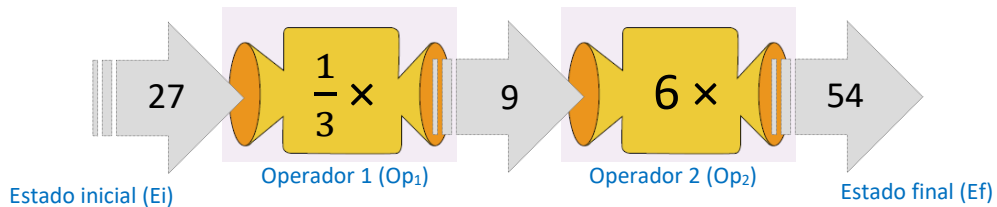


Otras **máquinas compuestas reducen y amplían** en procesos consecutivos. Por ejemplo,



Se puede observar, que el E_i al ingresar a la primera máquina sale reducido 3 veces, pero luego, ingresa a la segunda máquina y el valor obtenido en la primera máquina, sale ampliado 6 veces, produciendo así el E_f .

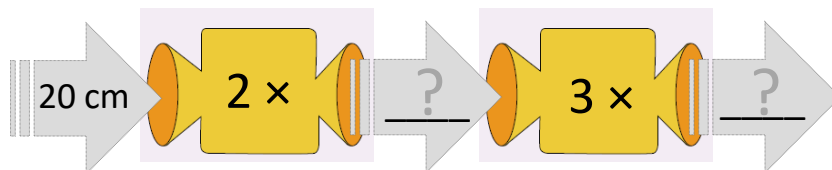
Otra forma de expresar esta máquina compuesta consiste en escribir el operador divisor en forma de fracción, es decir, escribir $\frac{1}{3}$ en lugar de $\div 3$, así:



»»»»»»»»»» PRACTICA »»»»»»»»»»

1. Realiza el siguiente experimento para cada máquina compuesta dada. **IMPORTANTE:** Para responder, escribe en el lugar de la interrogación la longitud de la cuerda correspondiente.

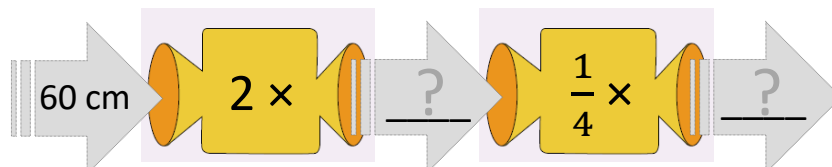
- 1° Corta una cuerda cuya longitud sea la que indica el E_i
- 2° Corta otra cuerda cuya longitud corresponda a lo que debe salir de la primera máquina (después de que se aplica el operador Op_1)
- 3° Corta otra cuerda cuya longitud corresponda a lo que debe salir de la segunda máquina (después de que se aplica el operador Op_2)



Compare la longitud de la cuerda que sale de la segunda máquina con la longitud de la cuerda que entra a la primera máquina y responde:

- ¿Es más largo o más corto lo que sale de la segunda máquina que lo que entra a la primera máquina?

- ¿Cuántas veces es más largo o más corto lo que sale que lo que entra? _____
- ¿Por qué? _____

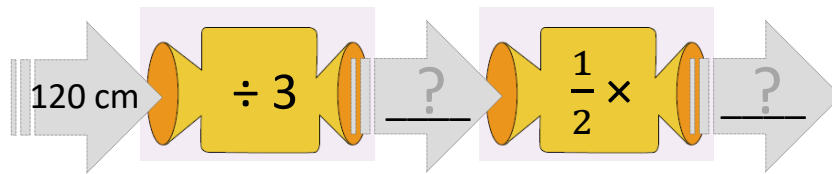


Compare la longitud de la cuerda que sale de la segunda máquina con la longitud de la cuerda que entra a la primera máquina y responde:

- ¿Es más largo o más corto lo que sale de la segunda máquina que lo que entra a la primera máquina?

- ¿Cuántas veces es más largo o más corto lo que sale que lo que entra? _____

- ¿Por qué? _____

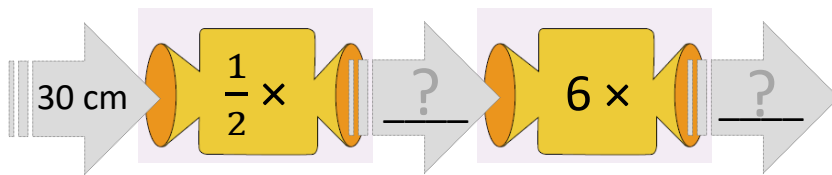


Compare la longitud de la cuerda que sale de la segunda máquina con la longitud de la cuerda que entra a la primera máquina y responde:

- ¿Es más largo o más corto lo que sale de la segunda máquina que lo que entra a la primera máquina?

- ¿Cuántas veces es más largo o más corto lo que sale que lo que entra? _____

- ¿Por qué? _____



Compare la longitud de la cuerda que sale de la segunda máquina con la longitud de la cuerda que entra a la primera máquina y responde:

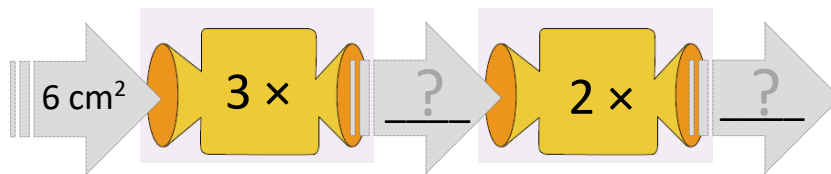
- ¿Es más largo o más corto lo que sale de la segunda máquina que lo que entra a la primera máquina?

- ¿Cuántas veces es más largo o más corto lo que sale que lo que entra? _____

- ¿Por qué? _____

2. Realiza el siguiente experimento para cada máquina compuesta dada. Para esta actividad utiliza los rectángulos de la bolsa de materiales No. 5. **IMPORTANTE:** Si es necesario, corta los rectángulos o únelos con cinta. Pega los diseños realizados en el pliego de papel craft.

- 1° Usa uno o más rectángulos para construir una figura cuya área corresponda al valor dado como estado inicial (Ei)
- 2° Usa otros rectángulos para construir la figura que debe salir de la primera máquina (después de que se aplica el operador Op_1)
- 3° Usa otros rectángulos para construir la figura que debe salir de la segunda máquina (después de que se aplica el operador Op_2)

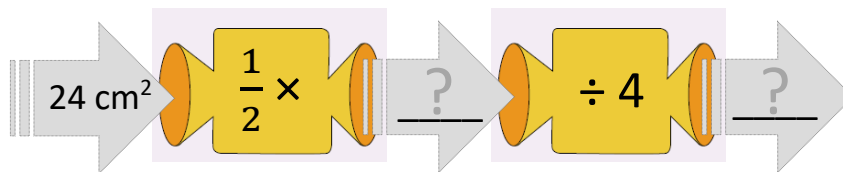


Compare el área de la figura que sale de la segunda máquina con el área de la figura que entra a la primera máquina y responde:

- ¿Es mayor o menor lo que sale de la segunda máquina que lo que entra a la primera máquina?

- ¿Cuántas veces es mayor o menor lo que sale que lo que entra? _____

- ¿Por qué? _____

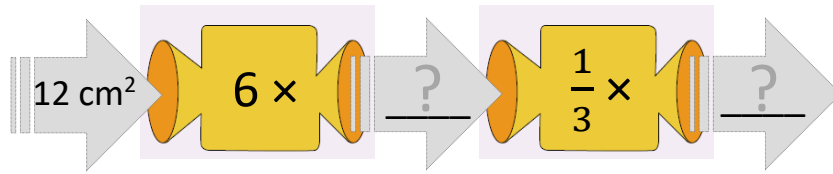


Compare el área de la figura que sale de la segunda máquina con el área de la figura que entra a la primera máquina y responde:

- ¿Es mayor o menor lo que sale de la segunda máquina que lo que entra a la primera máquina?

- ¿Cuántas veces es mayor o menor lo que sale que lo que entra? _____

- ¿Por qué? _____

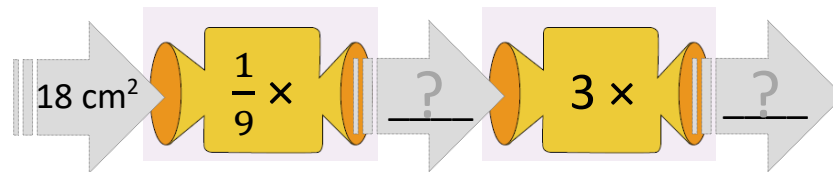


Compare el área de la figura que sale de la segunda máquina con el área de la figura que entra a la primera máquina y responde:

- ¿Es mayor o menor lo que sale de la segunda máquina que lo que entra a la primera máquina?

- ¿Cuántas veces es mayor o menor lo que sale que lo que entra? _____

- ¿Por qué? _____
-



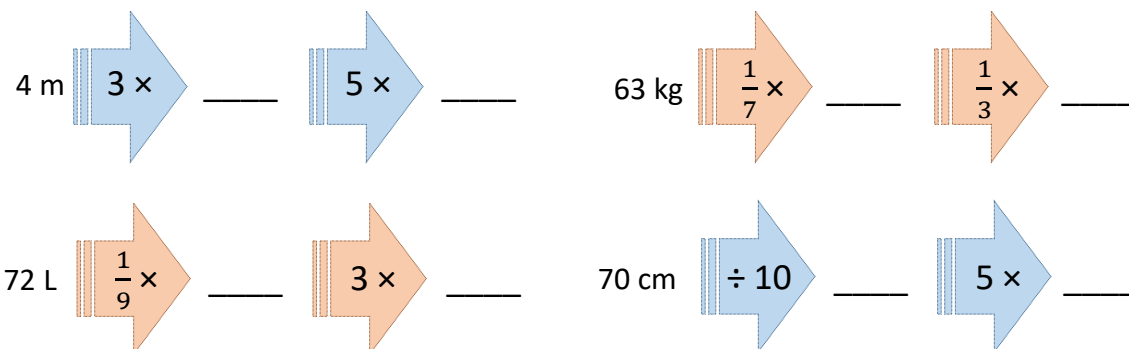
Compare el área de la figura que sale de la segunda máquina con el área de la figura que entra a la primera máquina y responde:

- ¿Es mayor o menor lo que sale de la segunda máquina que lo que entra a la primera máquina?

- ¿Cuántas veces es mayor o menor lo que sale que lo que entra? _____

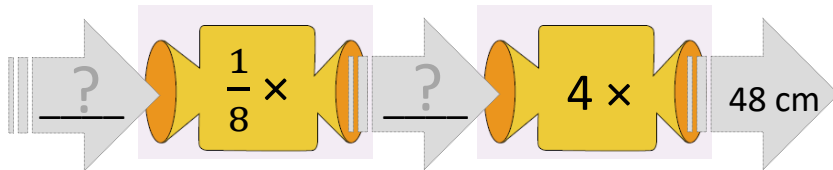
- ¿Por qué? _____
-

3. Completa los valores que hacen falta en las máquinas compuestas.



4. Realiza el siguiente experimento para cada máquina compuesta dada. **IMPORTANTE:** Para responder, escribe la longitud de la cuerda correspondiente.

- 1° Corta una cuerda cuya longitud sea la que indica el Ef
- 2° Corta otra cuerda cuya longitud corresponda a lo que debe entrar a la segunda máquina para que después de aplicarle Op_2 se obtenga el Ef
- 3° Corta otra cuerda cuya longitud corresponda a lo que debe entrar en la primera máquina, es decir, el Ei de la primera máquina

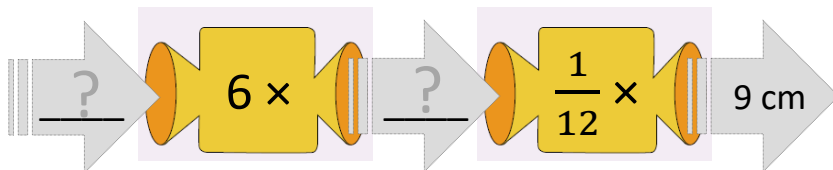


Compare la longitud de la cuerda que entra en la primera máquina con la longitud de la cuerda que sale de la segunda máquina y responde:

- ¿Es más largo o más corto lo que entra a la primera máquina que lo que sale de la segunda máquina?

- ¿Cuántas veces es más largo o más corto lo que entra que lo que sale? _____

- ¿Por qué? _____



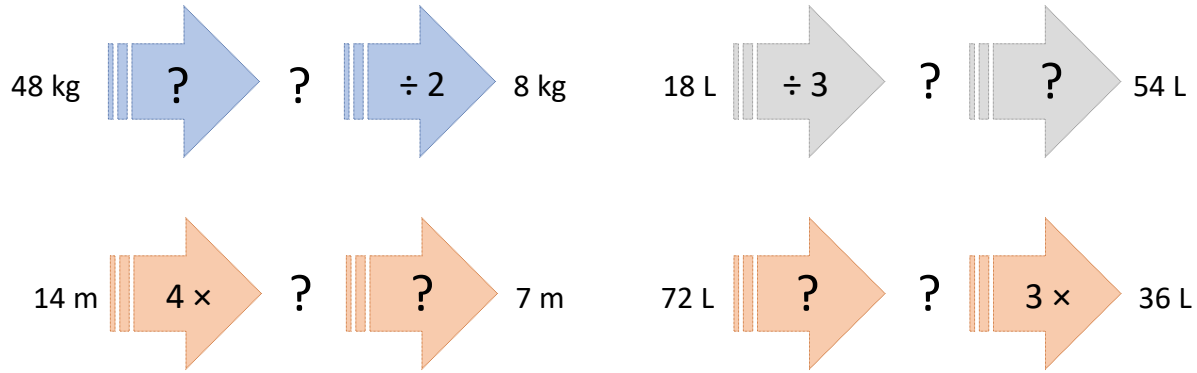
Compare la longitud de la cuerda que entra en la primera máquina con la longitud de la cuerda que sale de la segunda máquina y responde:

- ¿Es más largo o más corto lo que entra a la primera máquina que lo que sale de la segunda máquina?

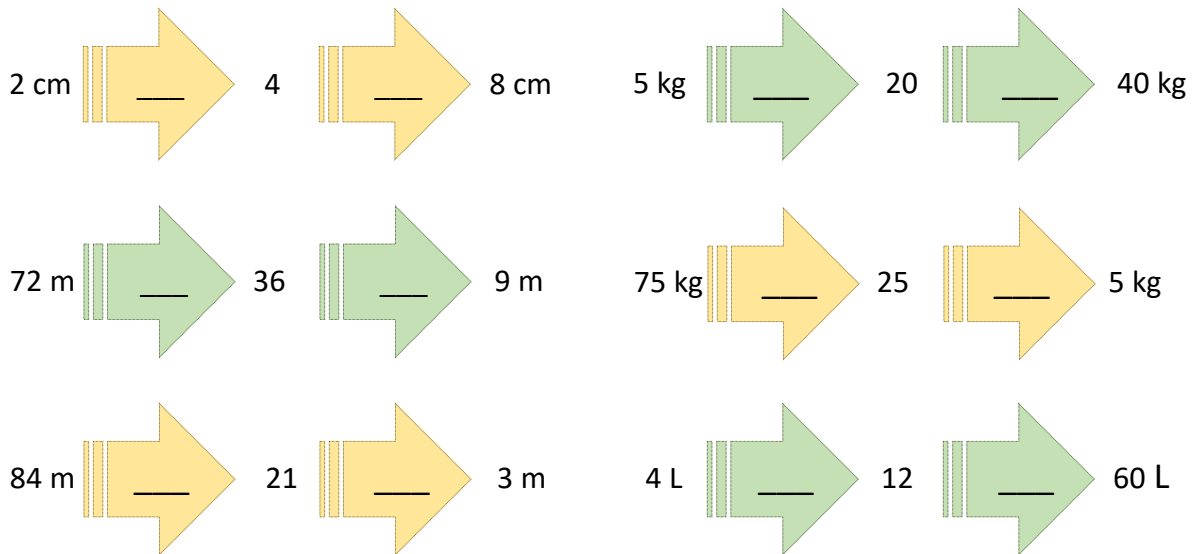
- ¿Cuántas veces es más largo o más corto lo que entra que lo que sale? _____

- ¿Por qué? _____

5. Escribe el valor que debe ir en cada interrogación.



6. Encuentra los operadores de las máquinas simples que permiten las transformaciones dadas.



Composición de operadores multiplicativos

»»»»»»»»»» **ACTIVATE** »»»»»»»»»»

1. Representa los problemas cómo máquinas compuestas y resuélvelos. Observa el ejemplo.

En una empresa trabajan 126 personas. Se sabe que un tercio son mujeres y que la séptima parte de ellas son mayores de 50 años. ¿Cuántas mujeres mayores de 50 años trabajan en la empresa?

Número de trabajadores de la empresa

126 personas $\times \frac{1}{3}$? $\times \frac{1}{7}$?

Número de mujeres de la empresa

126 personas $\times \frac{1}{3}$ 42 $\times \frac{1}{7}$?

Número de mujeres de la empresa mayores de 50 años

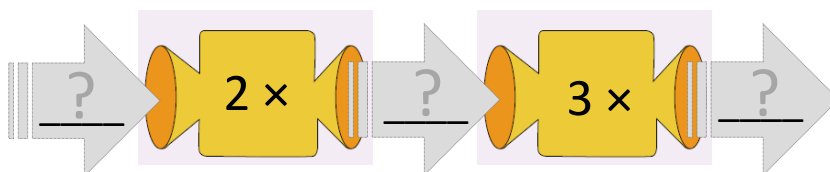
126 personas $\times \frac{1}{3}$ 42 $\times \frac{1}{7}$ 6 personas

Respuesta: En la empresa, trabajan 6 personas mayores de 50 años.

Composición de operadores multiplicativos

»»»»»»»» PRACTICA »»»»»»»»

1. Leonardo tiene una cuerda de cierta longitud y la pasa por la siguiente máquina compuesta:



- ¿Cómo es la longitud final de la cuerda comparada con la longitud inicial, es más larga o más corta?

_____ ¿Cuántas veces? _____

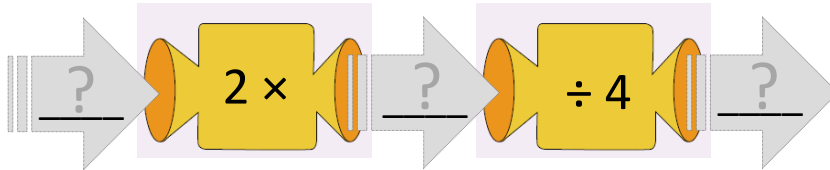
¿Por qué? _____

2. Un número desconocido primero se divide entre 6 y el resultado obtenido se vuelve a dividir, pero en este caso entre 2. Si se compara el resultado obtenido al final con el número inicial, ¿cuál es la relación multiplicativa entre estos dos números?

3. Un número desconocido primero se multiplica por 4 y el resultado obtenido se vuelve a dividir, pero en este caso entre 12. Si se compara el resultado obtenido al final con el número inicial, ¿cuál es la relación multiplicativa entre estos dos números?

4. Realiza el siguiente experimento para la máquina compuesta dada. **IMPORTANTE:** Para responder, escribe la longitud de la cuerda correspondiente.

- 1° Corta una cuerda cuya longitud sea la que tú quieras. Este valor será el E_i
- 2° Corta otra cuerda cuya longitud corresponda a lo que debe salir de la primera máquina (después de que se aplica el operador Op_1)
- 3° Corta otra cuerda cuya longitud corresponda a lo que debe salir de la segunda máquina (después de que se aplica el operador Op_2)



4° Responde

- ¿Cómo es la longitud final de la cuerda comparada con la longitud inicial, es más larga o más corta? _____ ¿Cuántas veces? _____

Completa las siguientes frases

- La longitud de la cuerda al salir de la segunda máquina es _____ de la longitud con la que entra en la primera máquina.
- La longitud de la cuerda al entrar a la primera máquina es _____ de la longitud con la que sale de la segunda máquina.

5° Repite los pasos 1 a 3 con otra cuerda cuya longitud sea diferente a la anterior y responde

- ¿Cómo es la longitud final de la cuerda comparada con la longitud inicial, es más larga o más corta? _____ ¿Cuántas veces? _____

Completa las siguientes frases

- La longitud de la cuerda al salir de la segunda máquina es _____ de la longitud con la que entra en la primera máquina.
- La longitud de la cuerda al entrar a la primera máquina es _____ de la longitud con la que sale de la segunda máquina.

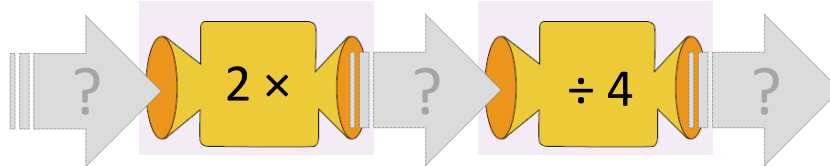
6° Compara lo que sucedió en 4 con lo que sucede en el paso 5

- ¿Después de trabajar con la nueva cuerda escogida en el punto 5, fue necesario cambiar las respuestas dadas en el punto 4? _____
- ¿Será que si se mantienen los dos operadores ($2 \times$ y $\div 4$) la relación entre la longitud de la cuerda que sale de la segunda máquina y la de la cuerda que entra a la primera máquina, siempre será la misma, sin importar que tan larga sea la cuerda que entra a la primera máquina? _____

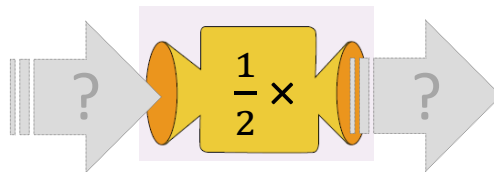
- ¿Por qué crees que ocurre este hecho? _____

»»»»»»»»»» **INFORMATE** »»»»»»»»»»

De acuerdo con los resultados obtenidos se puede concluir que la máquina:



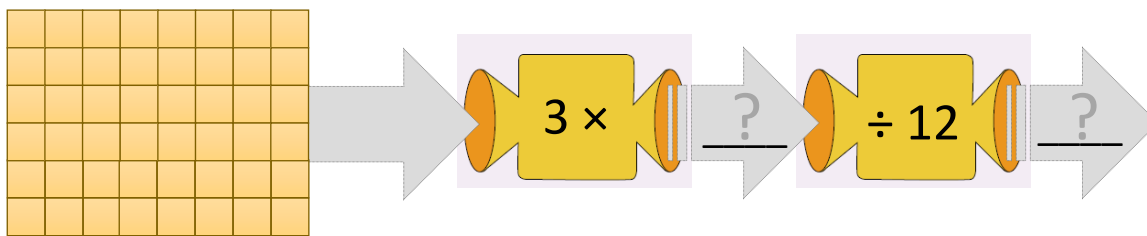
Produce el mismo efecto que la máquina:



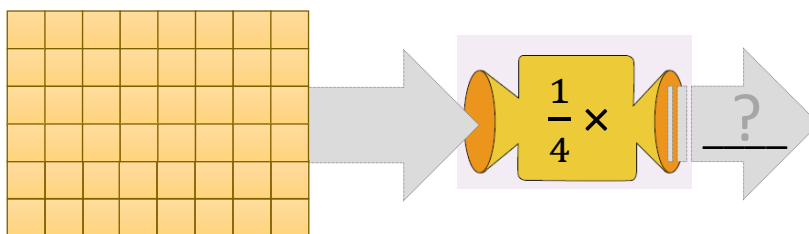
Cuando sucede como en este caso que se tienen dos máquinas que siempre producen el mismo efecto se dice que las máquinas son **EQUIVALENTES**.

»»»»»»»»»» **PRACTICA** »»»»»»»»»»

5. Realiza el siguiente experimento para cada máquina dada. **IMPORTANTE:** Para responder, escribe el área del rectángulo correspondiente.



Área = _____ u²



Área = _____ u²

- ¿Cómo es el área del rectángulo final comparada con el área del rectángulo inicial, es mayor o menor?
 _____ ¿Cuántas veces? _____

Completa las siguientes frases

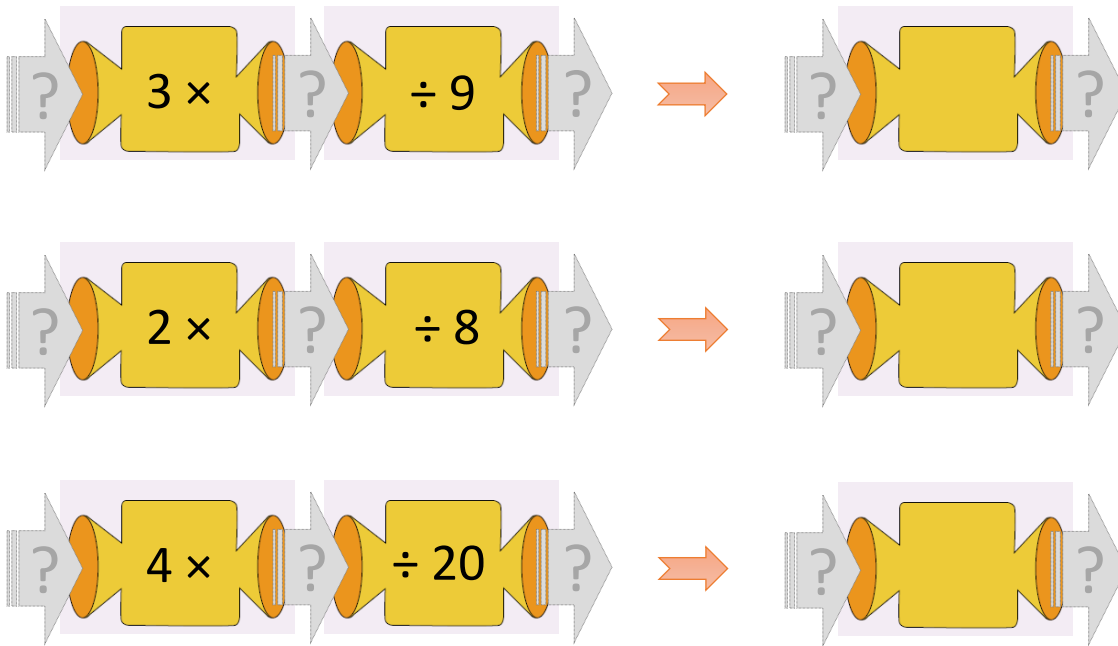
- El área del rectángulo al salir de la segunda máquina es _____ del área del rectángulo que entra en la primera máquina.
- El área del rectángulo al entrar a la primera máquina es _____ del área del rectángulo que sale de la segunda máquina.

Responde

- ¿Será que si se mantienen los dos operadores ($3 \times$ y $\div 12$) la relación entre el área del rectángulo que sale de la segunda máquina y el área del rectángulo que entra a la primera máquina, siempre será la misma, sin importar el área del rectángulo que entra a la primera máquina?

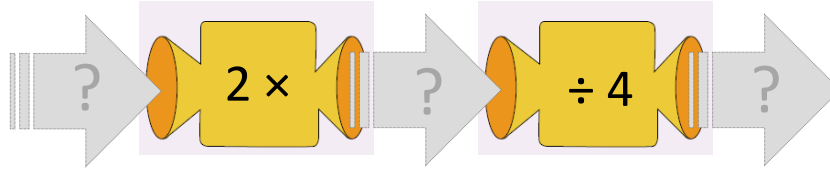
- ¿Por qué crees que ocurre este hecho? _____

6. Escribe una máquina simple que sea equivalente a la máquina dada.

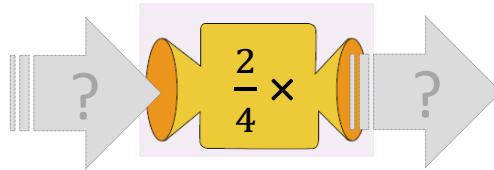


»»»»»»»»»» **INFORMATE** »»»»»»»»»»

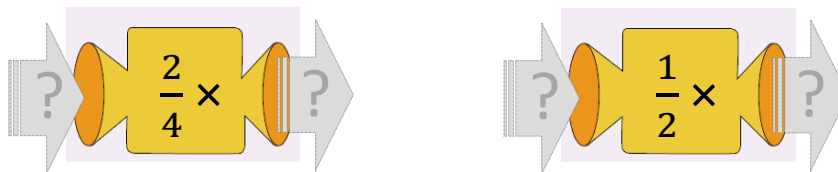
Una forma más corta de escribir la máquina compuesta:



Es usar la máquina simple:

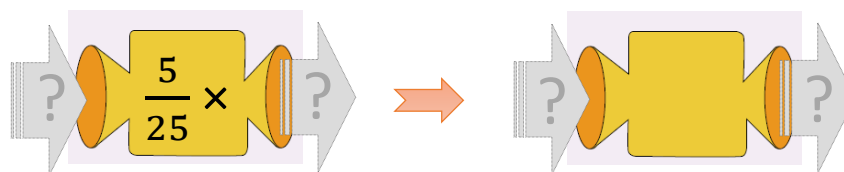
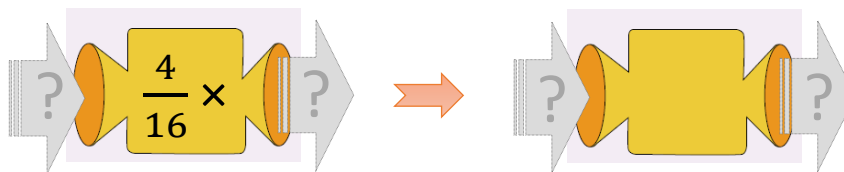
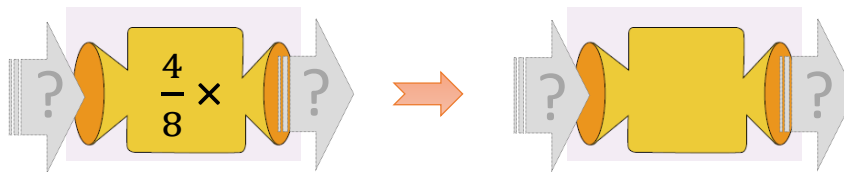


De esta manera, tenemos dos máquinas simples que producen el mismo efecto. Es decir, son máquinas **EQUIVALENTES**.



»»»»»»»»»» **PRACTICA** »»»»»»»»»»

7. Obtén una máquina simple que sea equivalente a la dada. **IMPORTANTE:** en este caso los dos operadores se escriben como fracción.

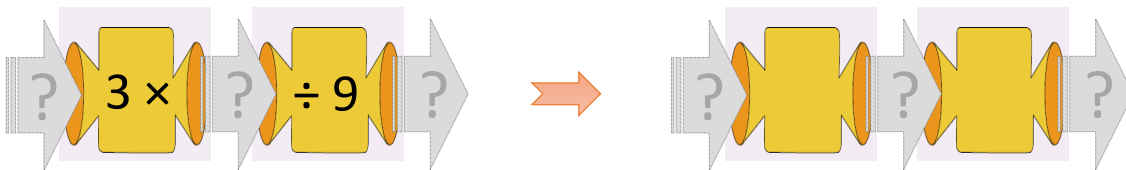


Máquinas equivalentes

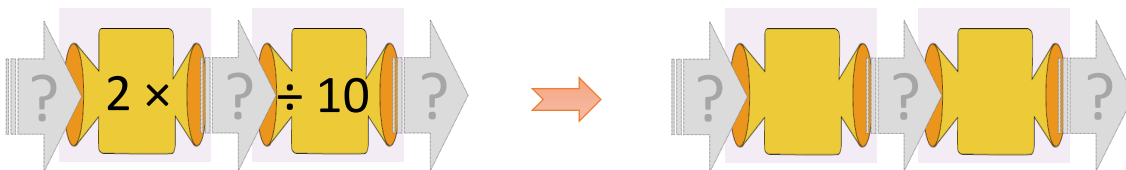
»»»»»»»»»» **ACTIVATE** »»»»»»»»»»

Hemos aprendido a transformar algunas máquinas compuestas en máquinas simples que son equivalentes. Ahora nos vamos a preguntar, ¿es posible encontrar dos máquinas compuestas que sean equivalentes?

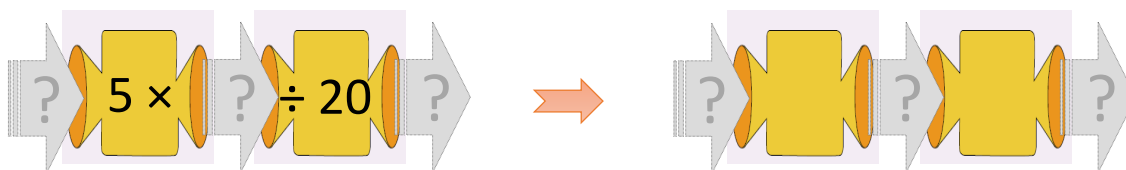
- Intenta encontrar otra máquina que sea equivalente a la máquina dada. Justifica tu respuesta.



¿Por qué? _____



¿Por qué? _____

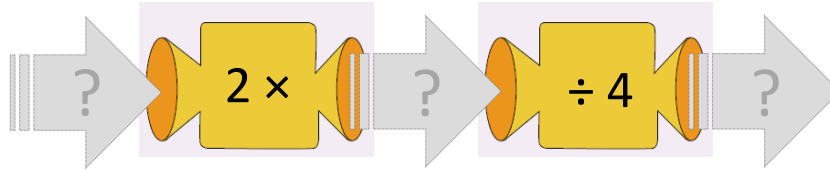


¿Por qué? _____

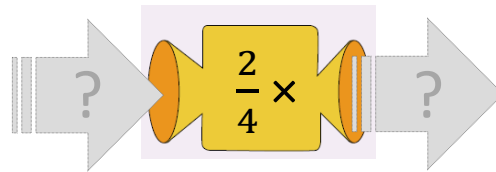
- Escribe un método que permita obtener una máquina compuesta equivalente a una máquina compuesta dada. _____
-
-

»»»»»»»»»» **INFORMATE** »»»»»»»»»»

Recuerda que una máquina compuesta mixta de dos operadores (uno ampliador y el otro reductor), se puede escribir como una máquina de un operador en forma de fracción. Por ejemplo:

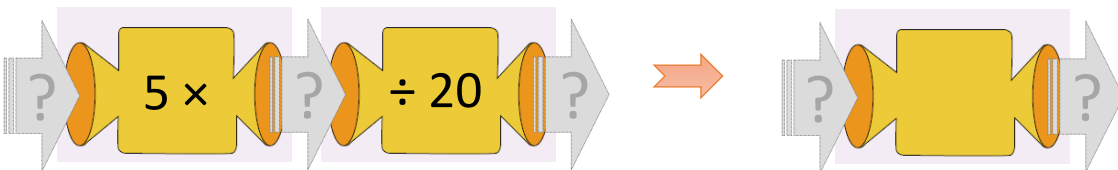
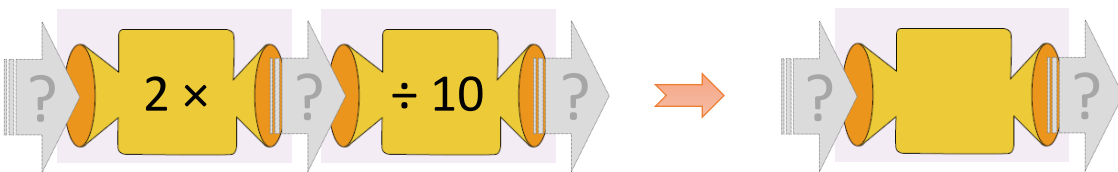
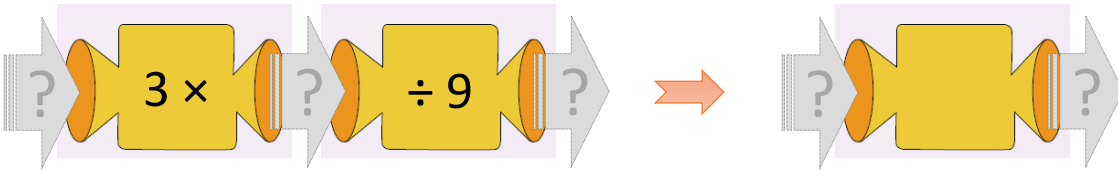


Se puede representar como una máquina en forma de fracción.



»»»»»»»»»» **PRACTICA** »»»»»»»»»»

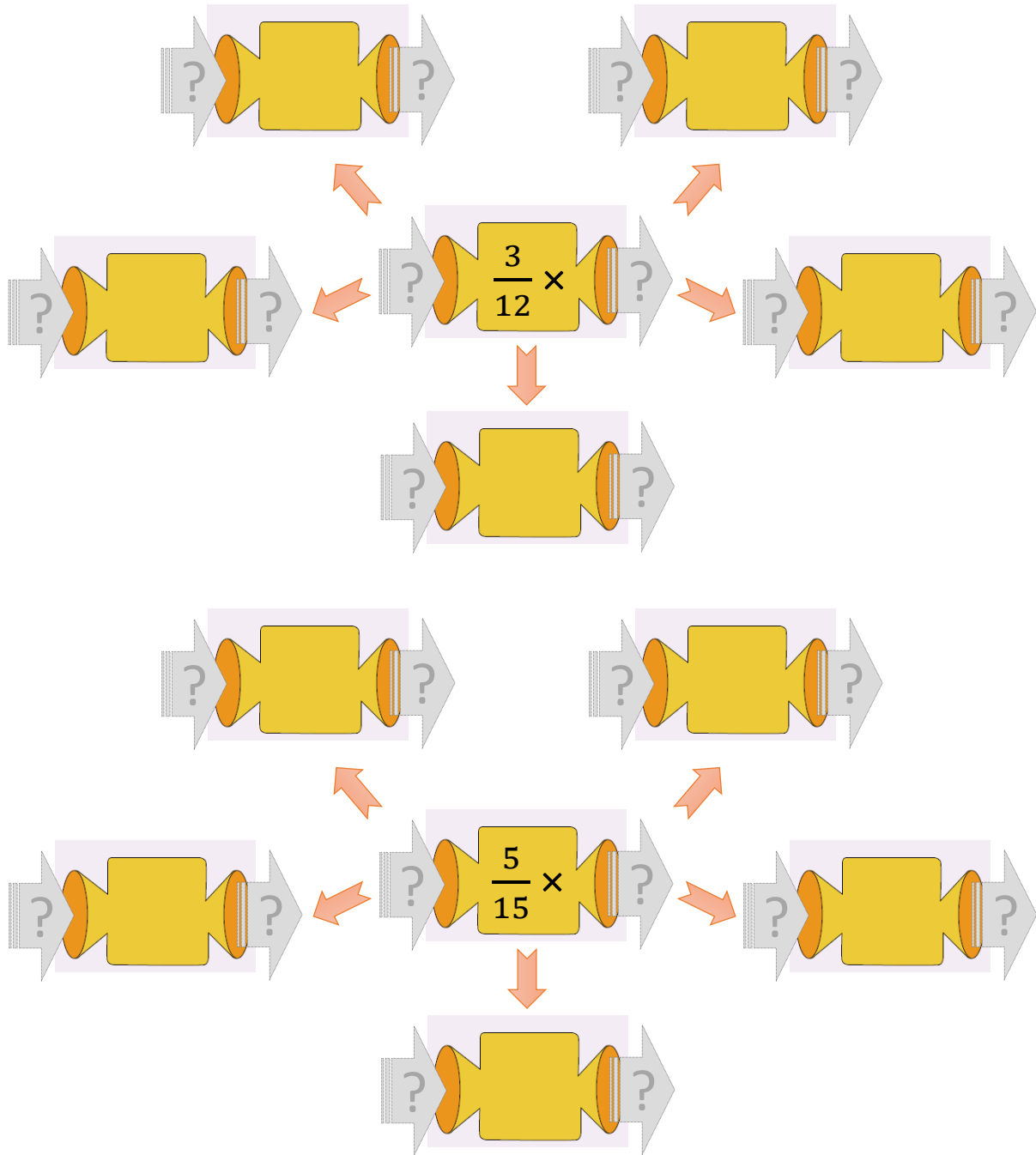
1. Escribe cada máquina compuesta como una máquina con operador en forma de fracción.



4. Reemplaza, en las siguientes igualdades, el signo de interrogación por su valor correspondiente.

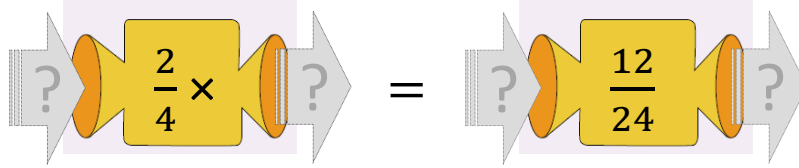
$$\frac{1}{3} [\mathbf{27}] = ? \quad ? [\mathbf{24}] = 12 \quad \frac{1}{5} [?] = 90$$

5. Encuentra cinco máquinas que sean equivalentes a la máquina dada



»»»»»»»»»» **INFORMATE** »»»»»»»»»»

Para representar dos máquinas equivalentes las escribiremos como la igualdad de dos máquinas. Por ejemplo:



También se puede representar como la igualdad de dos fracciones.

$$\frac{2}{4} = \frac{12}{24}$$

»»»»»»»»»» **PRACTICA** »»»»»»»»»»

11. Reemplaza, en las siguientes igualdades, el signo de interrogación por el valor correspondiente, de tal forma que se cumpla la equivalencia.

$$\frac{1}{3} = \frac{15}{?}$$

$$\frac{11}{33} = \frac{?}{99}$$

$$\frac{2}{?} = \frac{4}{36}$$

12. Se sabe que un número A es $\frac{1}{5}$ de un número B. Contesta las siguientes preguntas:

a. ¿Cómo es el doble del número A con relación al doble del número B? _____

b. ¿Cómo será el triplo del número A con relación al triplo del número B? _____

c. ¿Cómo será 100 veces el valor del número A con relación a 100 veces el número B? _____

d. Escriba la conclusión que se puede sacar. Justifica tu respuesta. _____

Anexo 3. Sujeto 1

A.3.1 Análisis intra-sujeto S1 (Estudiante Nivel: Alto)

Tarea a analizar	Prueba de entrada	Entrevistas
Operadores multiplicativos naturales sucesivos	El estudiante identifica correctamente la sucesión de dos operadores multiplicativos naturales. Por ejemplo, cinco veces y tres veces (EP_A1_S3_L16-L19) (Ver anexo A.3.2)	<p>ENTREVISTA 2</p> <p>El estudiante identifica los operadores sucesivos cuando se le plantea situaciones con dos operadores multiplicativos (E2_A1_S1_L1-L3) (Ver anexo A.3.3). Identifica los operadores sucesivos cuando se le plantea situaciones con dos operadores divisores (E2_A1_S2_L4) (Ver anexo A.3.3). Además, desarrolla correctamente diferentes opciones que se le presentan (E2_A1_S3_L5-L8)(Ver anexo A.3.3).</p> <p>ENTREVISTA 3</p> <p>Y reconoce de inmediato dos operadores multiplicativos y divisores sucesivos (E3_A1_S1_L1-E3_A1_S1_L6) (Ver anexo A.3.4).</p>
Composición de operadores multiplicativos naturales	El estudiante compone correctamente operadores multiplicativos naturales, y lo expresa como un producto entre dichos operadores (EP_A1_S3_L20-L24) (Ver anexo A.3.2)	<p>ENTREVISTA 2</p> <p>El estudiante después de varios intentos utilizando los algoritmos básicos con números naturales. Convierte dos operadores en un solo operador natural equivalente (E2_A1_S4_L9-L10) (Ver anexo A.3.3).</p> <p>ENTREVISTA 3</p> <p>El estudiante compone correctamente dos operadores multiplicativos en un operador multiplicativo natural (E3_A1_S1_L1-L4) (Ver anexo A.3.4). Realiza correctamente la composición de dos operadores uno multiplicativo y uno divisor (E3_A1_S2_L5-L10) (Ver anexo A.3.4).</p>
Equivalencia entre números fraccionarios		<p>ENTREVISTA 4</p> <p>El estudiante se le facilita encontrar correctamente máquinas equivalentes a una dada, a partir de multiplicar tanto en el numerador como el denominador por un mismo número natural (E4_A1_S1_L1-L10) (Ver anexo A.3.5).</p>

A.3.2 Entrevista S1 – Prueba de entrada

Transcripción

S1: L1-L6 (0:40” - 1:17”). video 1

1. D: En el número uno ¿cómo hiciste para resolverla?

2. A1: Si la envergadura real de cierta especie es 9 cm y en una fotografía es tres veces mayor que la envergadura real, la medida de la envergadura de la mariposa en la foto es: 3 cms.

3. D: para tí, ¿qué es tres veces mayor?

4. A1: Entonces que es tres, o sea, es una, dos y tres veces más grande que el tamaño que ella tiene.

5. D: ¿Qué operación estarías haciendo ahí?

6. A1: Estaría multiplicando o sumando

S2: L7-L15 (1:53" - 2:30")

7. A1: Si en una fotografía la envergadura de la cierta especie es 35 cm y esta medida es la séptima parte de la envergadura real de la mariposa, entonces la envergadura real es: 5 cm

8. D: ¿por qué?

9. A1: Porque séptima parte

10. D: qué significa séptima parte?

11. A1: Siete veces más, como decirlo como la siete vez del tamaño

12. D: multiplicas o divides?

13. A1: Pues lo que más hice fue encontrar en la tabla de multiplicar estos números, y pues, cinco por siete da treinta y cinco.

14. D: ¿Pero también puedes hacer la operación contraria, que es cuál?

15. A1: eh si multiplique puedo dividir.

S3: L16 - L24 (2:01" - 2:28") video 2.

16. A1: Según el informe, el sector turístico en el año 2015 creció tres veces más con respecto al año 2014 y en el 2016, quintuplicó

17. D: o sea qué significa quintuplicó?

18. A1: que aumentó cinco veces

19. D: Muy bien

20. A1: las cifras con respecto al 2015. De acuerdo con lo anterior, en el año 2016 el sector turístico aumentó sus cifras con relación al 2014. quince veces

21. D: ¿o sea ahí qué operación?

22. A1: Multiplique

23. D: ¿Multiplicó?

24. A1: Sí señora.

A.3.3 Entrevista S1 – Sesión 3

Transcripción

S1. L1-L3 (0:06" 0:42") audio 1

1. D: Cuéntanos ahora sí

2. A1: Pues acá aparece el estado inicial que es veinte, y aparece el operador tres multiplicado, así que, veinte por tres sesenta (*realiza por escrito la operación*)

3. A1: Ahora sesenta se multiplica por dos, así quedaría ciento veinte (*realiza por escrito la operación*)

S2. L4 (0:55" 1:20") audio 1

4. A1: Acá todos los estados iniciales veinte, tenemos veinte dividido en dos, así que da diez y dice que diez dividido en cinco da dos

S3. L5-L8 (5:03" 6:37") audio 1

5. D: Nárrame que fue lo que hiciste

6. A1: Pues me dice que mi estado inicial es veinte y mi primer operador es tres, así me dice que es tres multiplicado, o sea que se amplía mi estado inicial, entonces multiplicó veinte por tres, veinte, cuarenta y sesenta, pero ahora tengo el sesenta que es mi estado final del operador uno se convierte en el estado inicial del operador final, entonces si acá tenemos sesenta me dice que lo multiplique dos veces, así que sesenta multiplicado dos veces da ciento veinte.

7. D: qué relación hay entre este estado inicial y este estado final (*se muestra el estado inicial y el estado final*), es más grande o es más pequeño

8. A1: la relación que yo entienda es muy diferente porque a pesar de que era un número pequeño después de pasar por este proceso, por decirlo así, eh quedó convertido en un ciento veinte que es un número alto por decirlo así, y pues una forma para hacerlo más fácil con los dos operadores es multiplicar los dos operadores, según esto me da un resultado, y con este resultado se convertiría en un operador para mi estado inicial

S4. L9-L10 (16:22" 17:20") audio 1

9. D: ¿Cómo escribiría esta máquina en forma de fracción? (*se muestran dos máquinas $8x$ y $\div 4$*)

10. A1: Si lo resto me da cuatro, ahí sí que no y si lo multiplicó no me da dos, y si lo divido, ah creo que si lo divido ocho en cuatro me da dos.

A.3.4 Entrevista S1 – Sesión 4

Transcripción

S1. L1-L4 (0:32" - 0:55") audio 1

1. D: en la primera tenemos el primer operador $4x$ y el segundo $2x$, entonces ¿cuál sería la composición de esa máquina?
2. A1: bueno primero que todo tengo mis dos operadores, lo que tocaría hacer es multiplicar cuatro por dos da ocho
3. D: ¿cuál sería el operador de la máquina?
4. A1: ocho por

S2. L5-L10 (1:21" - 2:00") audio 1

5. D: Ahora vamos con esta
6. A1: eh bueno, está dividido en dos un cuarto, entonces me tocaría si no me equivoco dividir esto en dos
7. D: demuéstalo
8. A1: (el estudiante lo resuelve en una hoja)
9. D: ¿cuál sería el operador de la máquina composición?
10. A1: sería un medio

S3. L11-L (4:20" - 4:42") audio 1

11. D: ¿y esta? (*se muestra dos operadores uno multiplicativo y otro divisor*)
12. A1: esta es de multiplicación y esta es de división, pero como la división tiene un número mayor así que se tiene que dividir, tengo que hacer lo mismo dividir este con este, nueve dividido entre tres me da tres
13. D: ¿entonces el operador sería cuál?
14. A1: un tercio

A.3.5 Entrevista S1 – Sesión 5

Transcripción

S1. L1 - L10 (0:38” - 2:40”) audio1

1. D: ¿qué significa para ti esa máquina equivalente? (*muestra un operador $\frac{1}{4}$*)
2. A1: un cuarto es una forma de representar un dividido por cuatro, como cuatro divisor
- 3.D: si yo te solicitará que escribieras máquinas equivalentes a esas, tú que empezarías a hacer
4. A1: empezaría a multiplicar cada denominador y cada numerador, por ejemplo, multiplicar el numerador y denominador por dos, por tres, por cuatro, por el número que yo quiera
- 5.D: ¿escribame dos máquinas equivalentes a ella?
6. A1: tenemos un cuarto, yo quiero multiplicar por dos, entonces una por dos da dos, y cuatro por dos da ocho, dos octavos, entonces tenemos lo mismo y otra forma de representarlo. ahora lo voy a multiplicar por tres, una por tres y cuatro por tres doce, tres doceavos
7. D: ¿qué tienen en común esas tres máquinas?
8. A1: esas tres máquinas, que se amplían
9. D: ¿todas amplían?
10. A1: no, porque lo que tienen en común, esto es un cuarto que como decirlo todos forman parte de una sociedad

Anexo 4. Sujeto 2

A.4.1 Análisis intra-sujeto S2 (Estudiante Nivel: Medio)

Tarea a analizar	Prueba de entrada	Entrevistas
Operadores multiplicativos naturales sucesivos	El estudiante reconoce los operadores multiplicativos naturales como son en este caso el (tres veces) y (cinco veces) (EP_A2_S2_L10-L12) (Ver anexo A.4.2).	<p>ENTREVISTA 2</p> <p>El estudiante identifica los operadores sucesivos cuando se le plantea situaciones matemáticas con operadores, por ejemplo, multiplicó por 3 (3x) y multiplicó por dos (2X) (E2_A2_S1_ L1-L2 E2_A2_S2_ L3-L8) (Ver anexo A.4.3). Define e identifica los operadores sucesivos cuando se le plantea situaciones matemáticas con operadores, por ejemplo, dividir por dos ($\div 2$) y dividir por 5 ($\div 5$) (E2_A2_S2_ L9-L12) (Ver anexo A.4.3)</p> <p>ENTREVISTA 3</p> <p>El estudiante reconoce de inmediato los dos operadores multiplicadores sucesivos (E3_A2_S1_L2) (Ver anexo A.4.4).</p>
Composición de operadores multiplicativos naturales	El estudiante se le dificulta la composición de operadores multiplicativos naturales, y lo demuestra sumando dichos operadores, es decir (tres veces) más ((cinco veces) igual a ocho (EP_A2_S2_L12-L14) (Ver anexo A.4.2).	<p>ENTREVISTA 2</p> <p>El estudiante después de varios intentos utilizando los algoritmos básicos con números naturales convierte dos operadores en un solo operador natural equivalente (E2_A2_S3_L13-L30) (Ver anexo A.4.3).</p> <p>ENTREVISTA 3</p> <p>El estudiante compone correctamente dos operadores multiplicativos en un operador multiplicativo natural (E3_A2_S1_L5-L8) (Ver anexo A.4.4). No comprende ni realiza correctamente la composición de dos operadores uno multiplicativo y uno divisor (E3_A2_S2_L11-L14) (Ver anexo A.4.4) (E3_A2_S3_L15-L21) (ver anexo A.4.4).</p>
Equivalencia entre números fraccionarios		<p>ENTREVISTA 4</p> <p>El estudiante está en la capacidad de encontrar correctamente máquinas equivalentes a una dada, a partir de multiplicar tanto en el numerador como el denominador por un mismo número natural (E4_A2_S1_L1-L6) (Ver anexo A.4.5) (E4_A2_S2_L7-L12) (Ver anexo A.4.5).</p>

A.4.2 Entrevista S2 – Prueba de entrada

Transcripción

S1; L1 - L8 (0:42"- 2:34'") audio 1.

1. D: Observa la imagen, entonces ahí nos dice cuál es la envergadura listo
2. A2: Si la envergadura real de cierta especie es 9 cm y en una fotografía es tres veces mayor que la envergadura real, la medida de la envergadura de la mariposa en la foto es: Pues aquí

básicamente, pues yo decía que como lo ampliaba en la foto, entonces yo básicamente lo multipliqué por tres, porque era tres veces mayor a la medida de la envergadura, entonces yo lo multipliqué y me dio veintisiete.

3. D: Veintisiete, listo muy bien

4. A2: Segunda, Si en una fotografía la envergadura de la cierta especie es 35 cm y esta medida es la séptima parte de la envergadura real de la mariposa, entonces la envergadura real es: Pues aquí pues se me complicó un poquito. entonces pues básicamente.

5. D: ¿Por qué se te complicó?

6. A2: Porque es que era como en vez de sumar restar, o sea, entonces no comprendía muy bien la pregunta, pero ya entendí y entonces básicamente qué número multiplicado siete veces para que me dé esto (*señala con el dedo en la prueba el número 35*).

7. A2: Entonces cinco, digamos yo dije 2 por 7 no me daba, 2 por 4 y así, y era 2 por 5 o sea, la real pues para según yo eh mide 5 cm y por siete sería 35 cm

8. D: Listo

S2. L9 - L15 (9:24"- 11:12") Audio 1

9. D: Entonces vamos de la 7 a la 10. (*el docente lee el enunciado de la guía*)

10. D: Entonces dice siete.

11. A2: (*el estudiante lee completamente el enunciado de la pregunta 7*).

12. A2: Aquí pues yo tuve que pues volver a leer para entender, entonces, si acá dice que creció tres veces en el 2015, que o sea que tres veces más que el del 2014, y que creció o sea que quintuplicó es decir creció cinco veces más en el 2016 que en el 2015. Entonces la pregunta es qué cuánto ha aumentado con relación al 2014. Pues básicamente yo ahí pensé pues toca sumar pues ahí dice tres veces y cinco veces da ocho con respecto a.

13. D: Entonces sumaste tres y cinco

14. A2: Sí.

15. D: de acuerdo a los otros años

A.4.3 Entrevista S2 – Sesión 3

Transcripción

S1. L1- L2 (0:40" - 1:05") audio 1

1. D: ¿Cómo resolverías el primero? (*se muestra unas fichas y un tablero con estado inicial y operadores*)

2. A2: el estado inicial es veinte y se debe multiplicar por tres, entonces la respuesta digamos que veinte por tres serían sesenta,

S2. L3- L12 (4:06''- 4:53'') audio 1

3. D: Bueno, ¿ahora qué hiciste?

4. A2: pues, lo que estamos trabajando básicamente veinte por tres da sesenta y sesenta por dos da ciento veinte

5. D: ¿Esa máquina qué función cumplió?

6. A2: la de ampliar

7. D: ¿En ambas ocasiones amplio?

8. A2: Sí

9. D: Sigamos

10. A2: veinte dividido entre dos da diez, y diez dividido entre cinco da dos

11. D: ¿Entonces ambas máquinas que hicieron?

12. A2: Redujeron

S3. L13- L20 (7:23''- 9-:18'') audio 1

13. D: ¿Quiero cambiar estas dos más por una sola? ¿Con qué operador quedaría esa máquina solita?

14. A2: *(se quedó en silencio pensando por 15 segundos)*

15. D: ¿te pongo los resultados y tú me dices?

16. A2: sí

17. D: qué operador le pondría ahí a esa máquina que ahora va a reducir los dos en uno solo, o sea va a transformar en una máquina simple otra vez. que operador tendría?

18. A2: la multiplicación

19. D: ¿por qué?

20. A2: porque básicamente yo pues yo sumo estas dos, pero básicamente me haría falta un numero por eso era que no me daba

21. D: ¿para hacer la composición lo que necesitamos es sumar estas dos?

22. A2: pues según yo si

23. D; ahora tenemos veinte y ciento veinte y si sumamos estas dos *(muestra los dos operadores $2x$ y $3x$)* nos daría cinco, entonces el operador sería cinco, veinte por cinco daría

24. A2: veinte por cinco da cien

25. D: entonces tendríamos ese problema

26. A2: sí pero no se... podría multiplicarlos

27. D: ¿multiplicar los dos?

28. A2: tres por dos da seis

29. D: y si colocamos este operador nos servirá

30.A2: sí porque veinte por seis da ciento veinte.

A.4.4 Entrevista S2 – Sesión 4

Transcripción

S1. L1-L8 (0:50"- 1:40") audio 1

1. D: ¿entonces en la primera que tenemos? (*muestra dos operadores $2x$ y $4x$*)

2. A2: tenemos en el operador uno cuatro por y el operador dos, dos por. bueno hay que multiplicarlo. con base en lo que vi hoy según yo hay que multiplicarlo cuatro por dos

3. D: esa sería la forma

4. A2: aja (*mueve la cabeza para afirmar*)

5. D: ¿entonces daría un valor mucho más grande o más pequeño?

6. A2: más grande

7. D: ¿cuántas veces?

8. A2: cuatro por dos ocho

S2. L9-L14 (1:57"- 2:56") audio 1

9. D: ¿cómo quedaría esta máquina? (*muestra dos operadores uno multiplicativo y uno divisor*)

10. A2: uno divide y el otro está multiplicando

11. D: ¿si necesitamos reemplazar estas dos máquinas por una sola, que operador tendría esa máquina?

12. A2: como creo que esta, sería dividir esta por esta

13. D: ¿hazlo a ver qué ocurriría?

14. A2: (*se demora diez segundos en tratar de hacerlo*), no se

S3. L15-L21(5:58"- 6:20") audio 1

15. D: ¿la primera máquina que hace?

16. A2: la primera reduce y la segunda amplía

17. D: y si tuviéramos que reemplazar estas dos por una sola, ¿cómo podríamos hacerlo?

18. A2: (se queda pensando la pregunta por diecisiete segundos), la máquina debe ser ampliadora

19. D: ¿cuántas veces sería?

20. A2: (se queda pensando por nueve segundos), (mueve la cabeza diciendo no)

21. D: No, bueno

A.4.5 Entrevista S2 – Sesión 5

Transcripción

S1. L1 - L6 (0: 35” - 1:35”) audio 1

1. D: ¿si tú me puedes dar dos máquinas equivalentes a esta máquina de acá? (*muestra el operador 1/4*). para ti que son máquinas equivalentes?

2. A2: las que hacen el mismo procedimiento con diferentes operadores

3. D: hacen el mismo proceso con diferentes operadores. si yo te digo que me encuentres una máquina equivalente a un cuarto, muéstrame dos máquinas equivalentes y que es lo que haces para encontrarlas?

4. A2: (*demora siete segundos en realizar la operación en una hoja*), me dio dos octavos

5. D: ¿por qué te dio dos octavos?

6. A2: pues multiplique el cuatro y el uno dos veces.

S2. L7 - L12 (1:54” - 2:20”) audio 1

7. D: ahora hacemos otra

8. A2: (*el estudiante realiza el ejercicio de multiplicar por tres en la hoja*),

9. D: ¿ese sería cuál?

10. A2: seria tres doceavos

11. D: ¿y qué operación hiciste ahí?

12. A2: lo mismo, pero multiplique por tres

Anexo 5. Sujeto 3

A.5.1 Análisis intra-sujeto S3 (Estudiante Nivel: Bajo)

Tarea a analizar	Prueba de entrada	Entrevistas
Operadores multiplicativos naturales sucesivos	La estudiante no identifica la sucesión de operadores multiplicativos naturales. Porque los relaciona con el mayor número que aparece en las posibles respuestas (EP_A3_S2_L12-L15) (Ver anexo A.5.2).	<p>ENTREVISTA 2</p> <p>La estudiante identifica los operadores sucesivos cuando se le plantea situaciones con dos operadores multiplicativos. Porque al Ei (20) primero le aplica el primero operador ($3x$) y luego con la respuesta (60) le aplica el segundo operador ($2x$) dando como Ef (120) (E2_A3_S1_L1-L10) (Ver anexo A.5.3). Identifica los operadores sucesivos cuando se le plantea situaciones con dos operadores divisores. Porque al Ei (20) primero le aplica el primero operador ($\div 2$) y luego con la respuesta (10) le aplica el segundo operador ($\div 5$) dando como Ef (5) (E2_A3_S2_L11-L17) (Ver anexo A.5.3).</p> <p>ENTREVISTA 3</p> <p>La estudiante reconoce de inmediato dos operadores multiplicativos sucesivos. Ya sea cuando se le muestra los operadores ($2x$) y ($4x$), y/o los operadores ($\div 3$) y ($\div 4$).</p>
Composición de operadores multiplicativos naturales	La estudiante no compone operadores multiplicativos naturales. Porque no comprende qué relación matemática guardan dichos operadores (EP_A3_S2_L12-L20) (Ver anexo A.5.2).	<p>ENTREVISTA 2</p> <p>La estudiante después de varios intentos utilizando los algoritmos básicos con números naturales, convierte dos operadores naturales multiplicativos en uno equivalente. Porque primero suma los operadores ($2x$) y ($3x$), pero después se le dice que cuantas veces es mayor 120 de 20 y lo respondió 6 veces (E2_A3_S3_L18-L23) (Ver anexo A.5.3)</p> <p>ENTREVISTA 3</p> <p>La estudiante compone correctamente los operadores multiplicativos en un operador multiplicativo natural. Por ejemplo, con los operadores ($2x$) y ($4x$) los multiplica y el resultado lo escribe ($8x$) (E3_A3_S1_L2-L4) (Ver anexo A.5.4). No comprende la composición de dos operadores divisores. Por ejemplo, con los operadores ($\div 3$) y ($\div 4$) los relaciona como una división entre ellos (E3_A3_S1_L13-L14) (Ver anexo A.5.4).</p>
Equivalencia entre números fraccionarios		<p>ENTREVISTA 4</p> <p>La estudiante expresa correctamente el concepto de máquinas equivalentes, porque afirma que hacen lo mismo, pero con diferentes números (E4_A3_L11-14) (Ver anexo A.5.5). Se le dificulta encontrar correctamente máquinas equivalentes a una dada. Porque trata de dividir por (2) la fracción $\frac{1}{4}$, pero después de varios intentos y no obtener una respuesta, dice que no sabe (E4_A3_S1_L1-L10) (E4_A3_S2_L11-L18) (Ver anexo A.5.5).</p>

A.5.2 Entrevista S3 – Prueba de entrada

TRANSCRIPCIÓN

S1. L1 - L11(0:06"- 0:50") audio 1.

1. D: Cuéntanos que hiciste en la pregunta no. 1. ¿Qué operaciones realizaste?

2. A3: Una suma, me dice tres veces nueve me da veintisiete.

3. D: ¿En la número dos que hiciste?

4. A3: Pues dividí

5. D: ¿dividiste?

6. A3: aja (*mueve la cabeza afirmando la acción*)

7. A3: dividí el siete por el treinta y cinco

8. D: Treinta y cinco entre, entre siete

9. A3: En siete

10. D: y esto te dio, ¿cuánto?

11. A3: novecientos y cuarenta y cinco.

S2. L12 - L-20 (4:05" 4:35") audio

12. D: ¿Cómo contestaste la número siete? cómo la entendió?

13. A3: La entendí como que, en las cifras, estaban el mayor número, entonces puse el dieciocho

14. D: ¿en las cifras estaba el mayor?

15. A3: aja, el mayor número.

16. D: Ya, ¿y te dio cuánto?

17. A3: dieciocho

18. D: Dieciocho veces

19. A3: aja, (*mueve la cabeza afirmando la acción*)

20. D: Estamos manejando veces

A.5.3 Entrevista S3 – Sesión 3

Transcripción

S1. L1- L10 (0:53" - 1:29") audio 1

1. D: En esta primera máquina que toca hacer (*se muestra el estado inicial y los operadores en un cuadro escrito en una hoja*)

2. A3: pues toca multiplicar veinte por tres nos da sesenta

3. D: bueno entonces escríbelo

4. A3: (*escribe el sesenta en el papel*)

5. D: listo, ¿pasa por la otra máquina y que toca hacer?

6. A3: ampliarla

7. D: ¿en cuánto?

8. A3: dos veces

9. D: ¿entonces cuánto nos daría?

10. A3: ciento veinte

S2. L11- L (1:48" - 3:28") audio 1

11. A3: el veinte se divide por dos, (*no da la respuesta inmediatamente*)

12. D: tranquila, si quieres hazlo (*se le indica que lo haga en la hoja*)

13. A1: (*realiza la división y dura diez segundos*) da diez

14. D: ¿y la siguiente que hace?

15. A3: es un fraccionario que es otra manera que se reduce, entonces el diez se reduce a cinco por cinco, entonces sería diez dividido en cinco (*se demora quince segundos en realizar la operación en una hoja*) veinte

16. D: ¿veinte, segura? porque si se reduce entonces se vuelve más grande o más pequeño el número.

17. A3: más pequeño sería cinco, ¿no?

S3. L18- L (9:50"- 10:15") audio 1

18. D: tú me podrías decir cuántas veces es mayor (*se muestra el estado inicial 20 y el estado final 120*)

19. A3: seis veces

20. D: y si tuviéramos que cambiar estas dos máquinas, y tú las cambiaras a una sola. que operador le pondrías?

21. A3: seis

22. D: seis, o sea por seis

23. A3: aja (*mueve la cabeza afirmando*)

A.5.4 Entrevista S3 – Sesión 4

TRANSCRIPCIÓN

S1. L1-L14 (0:30” - 3:07”) audio 1

1. D: ¿aquí tenemos dos operadores como lo convertirás en uno solo?
2. A3: pues yo si es multiplicando, pues multiplicas los números que hay, en este caso cuatro por dos, o se puede al revés dos por cuatro y daría ocho
3. D: muy bien entonces, ¿cómo te quedaría?
4. A3: *(ella escribe en la hoja el número 8x)*
5. D: ¿ahora como manejas estos dos operadores para que te quede uno solo? *(se muestra un operador $\div 4$ y $\div 3$)*
6. A3: como esta es otra manera de representar una división en fracciones, entonces significa lo mismo entonces dividiendo
7. D: entonces como nos queda la forma como lo estás diciendo
8. A3: entonces sería tres sería al revés cuatro en tres
9. D: ¿este primer operador dividido entre tres, que otra forma hay para poderlo expresar?
10. A3: un tercio
11. D: ¿y este operador como esta?
12. A3: un cuarto
13. D: puedes expresar estos dos en uno solo?
14. A3: dividiéndolos

A.5.5 Entrevista S3 – Sesión 5

TRANSCRIPCIÓN

S1. L1 - L10 (0:20” - 1:00”) audio 1

1. D: yo tengo este operador un cuarto, si, ¿un cuarto que tipo de máquina es?
2. A3: divisor
3. D: ¿la podríamos reemplazar por cuál?
4. A3: dividido cuatro
5. D: ¿y ambas máquinas harían la misma función, cual función sería?

6. A3: dividir

7. D: ¿dividir o?

8. A3: ampliar

9. D: ¿amplían o reducen? las máquinas que dividen?

10. A3: reducen

S2. L11 - L18 (1:10" - 2:10") audio 1

11. D: ayúdame a encontrar por lo menos tres máquinas equivalentes a esta (*muestra el operador $\frac{1}{4}$*), ¿qué significan que sean máquinas equivalentes?

12. A3: que sean las mismas

13. D: ¿que sean las mismas o que hagan lo mismo?

14. A3: que hagan lo mismo con diferente número

15. D: bien Angie, ayúdame a encontrar por lo menos dos, ¿una máquina que sea equivalente a esta?

16. A3: ehhhh, dos dividido, puedo

17. D: bueno si quieres

18. A3: (*demora veinte segundos en tratar de iniciar el ejercicio*), lo divido por dos, no se