Nagy Gábor – Povilaitis Katalin

A működési kockázatok veszteségeloszlás-alapú modellezésének lehetőségei

Jelen írásunkban összefoglaljuk a működési kockázat veszteségeloszlás-alapú megközelítésének (Loss Distribution Approach – LDA) elméleti alapjait és azokat a lehetőségeket, amelyekkel az éves működési kockázati veszteségeket leíró aggregált veszteségeloszlás meghatározható. Nagyobb figyelmet a közelítéses és a Panjer-féle rekurziós módszernek szenteltünk. A módszerek bemutatása mellett hangsúlyozzuk előnyeiket és hátrányaikat is, ezek átgondolása nagyban hozzájárul sikeres alkalmazásukhoz.

1. Bevezetés

A banki kockázatkezelés egyik új területe a működési kockázatok kezelése. A piaci- és a hitelkockázat-kezelési módszerekhez képest a működési kockázatkezelés módszertana még kevéssé kiforrott, több a nyitott kérdés. Számos olyan részterület van, ahol módszertani szempontból az elméleti és gyakorlati szakemberek álláspontja nem egységes, illetve általánosan elfogadott megoldások sem léteznek. Emiatt a tőkekövetelmény fejlett módszerrel történő meghatározása a működési kockázatkezelés egyik központi problémája.

A Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság 2004. június 26-án tette közzé az *International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards* című ajánlását (Basel Committee on Banking Supervision [2004]), amely már a felülvizsgált tőkekövetelmény számítási módszereket tartalmazza. Ebben az ajánlásban jelent meg az AMA-módszer (Advanced Measurement Approach – fejlett mérési módszer) alkalmazásának lehetősége is a működési kockázatra meghatározott minimálisan szükséges tőke számítására.[1] Az AMA által biztosított módszertani keret a korábban megfogalmazott belső mérési módszernél (Internal Measurement Approach – IMA) összetettebb, kevesebb megkötést tartalmazó modell felépítését teszi lehetővé, és sokkal inkább képes lehet tükrözni a bank valódi kockázatát, hiszen az intézmény által felépített belső modellen alapul. Ahhoz, hogy a hitelintézetek a fejlett módszertant alkalmazhassák, számos előírásnak kell eleget tenniük (Basel Committee on Banking Supervision [2004], 200/2007. [VII. 30.] Korm. r.). Ezeket nem soroljuk fel tételesen, csupán azokat, amelyek a modellépítés szempontjából relevánsak.

1 Fontos megjegyezni, hogy a Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság már korábban is adott ki ajánlásokat a működési kockázatokkal kapcsolatban, azonban az AMA-módszer helyett azokban még a bankoknak modellezés szempontjából kevesebb teret engedő, belső mérési módszer (Internal Measurement Approach – IMA) jelent meg.

1. A belső modellnek mind a várható, mind a nem várt veszteségeket meg kell ragadniuk.
2. A kis valószínűséggel bekövetkező, ugyanakkor potenciálisan nagy hatást okozó eseményekre is fedezetet kell nyújtania a tőkének 99,9 százalékos valószínűséggel, 1 éves időtávon.
3. A belső modellnek figyelembe kell vennie
   - az intézmény saját belső adatait,
   - a külső adatokat,
   - az üzleti környezetet tükröző tényezőket,
   - a forgatókönyv-elemzést (scenario analysis).

Az intézményeknek legalább 5 éves idősort kell figyelembe venniük a tőkekövetelmény-számításhoz.[2] Továbbá a hitelintézet belső veszteségadatainak átfogóaknak[3] kell lenniük. A hitelintézeteknek a veszteség adatokat üzletágaknak és veszteség kategóriáknak kell megfeleltetnie.

A belső adatok gyűjtésének alsó határértékét az intézménynek meg kell határoznia.

A hitelintézet modelljébe beépíthet és alkalmazhat a veszteségadatok között korrelációs feltételezéseket.[4]

Cikkünkben a historikus adatokra épülő veszteségeloszlás-alapú (Loss Distribution Approach – LDA) tőkeképzés lehetőségeit mutatjuk be, illetve röviden kitérünk arra is, hogy a különböző LDA-eljárásokat hol és milyen körülmények között érdemes használni.[5] Négy különböző módszert mutatunk be az aggregált káreloszlás meghatározására:

1. közelítéses módszer,
2. Monte-Carlo-szimuláció,
3. Panjer-rekurzió,
4. Fourier-transzformáció.

Ezek közül részletesebben foglalkozunk a közelítéses és a Panjer-féle rekurziós módszerrel. A másik két módszerbe korábban már betekintést nyerhettek a *Hitelintézeti Szemle* olvasói *Armai* [2007], valamint *Gáll* és *Nagy* [2007] munkái nyomán, így azoknak csupán a kulcselemeit összegezzük. A mélyebben érdeklődő olvasóknak kiváló referenciát jelentenek *Klugman,* Panjer és *Willmot* [2004], Panjer [1981], Panjer [2006], valamint Panjer és Willmot [1986] művei.

2 A fejlett mérési módszer bevezetésekor elegendő 3 évnyi adattal rendelkeznie a hitelintézetnek.

3 Átfogóaknak kell a belső veszteségadatoknak lenniük abban az értelemben, hogy meg kell ragadniuk a vonatkozó alrendszerek és földrajzi régiók összes főbb tevékenységét és a kitettségeit. A hitelintézeteknek bizonyítaniuk kell, hogy a kizárt tevékenységek vagy kitettségek sem egyénenként, sem együttesen nem befolyásolják lényegesen az átfogó kockázati becsléseket.

4 Amennyiben a hitelintézet igazolni képes, hogy a korreláció mérésére alkalmazott módszerei megbízhatóak (azaz mennyiségi és minőségi módszerekkel alá vannak támasztva), továbbá azt, hogy figyelembe veszi a korrelációs becslések ismert hiányosságaiból adódó hibákat (200/2007. [VII. 30.] Korm. r.).

5 Jelen tanulmány alapja Povilaitis [2008] cikke.

2. Tőkekövetelmény LDA esetén[6]

Amikor a működési kockázatokat (tőkekövetelményt[7]) historikus adatokból számítják, a hitelintézet által gyűjtött (illetve külső adatbázisból felhasznált) eseményeket kategorizálni kell a szabályozói előírásoknak megfelelően (200/2007. [VII. 30.] Korm. rendelet, Validációs Kézikönyv, Pénzügyi Szervezetek Állami Felügyelete [2006]).[8] Ez elsősorban a *veszteség-kategóriák* és *üzletágak* szerinti kategorizálást jelent. Amennyiben az intézmény nem kívánja az adatait valamely kategória mentén összevonni, akkor létrejön egy 7 × 8-as méretű mátrix – nevezzük ezt *operációs kockázatok mátrixának* –, amely egy csoportosítását adja a működési kockázati eseményeknek. Ezeket a csoportokat az operációs kockázat *osztályainak* fogjuk nevezni, és a továbbiakban jelölje M a létrehozott osztályok számát.

Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy adott egy operációs kockázati osztály, s az operációs kockázatot erre az osztályra kívánjuk meghatározni. Továbbá feltételezzük, hogy rögzített egy időintervallum (1 év), amelyre meghatározzuk a tőkekövetelményt.

Az LDA módszertana szerint a következőt feltételezzük az operációs veszteségekről. Jelölje X_i a vizsgált időszakban az adott kockázati osztályban bekövetkező i-edik eseményhez tartozó (egyedi) *veszteség* értékét (ahol i pozitív egész). Az egyszerűség kedvéért a későbbiekben azonban azt feltételezzük, hogy egy eseményhez csak egy veszteség tartozik. Ez nem jelent megszorítást, csupán lehetővé teszi számunkra, hogy az esemény és veszteség szavakat szinonimaként használjuk. Ezeket egyedi veszteségeknek is fogjuk a későbbiekben nevezni, hangsúlyozva a teljes veszteségtől való különbséget. Ekkor X_i egy nemnegatív értékű valószínűségi változó. Feltételezzük, hogy $(X_1, X_2, X_3, ...)$ függetlenek és azonos eloszlásúak. Ezek nem túlzottan szűkítő feltételezések, hiszen így a vizsgált időszakban bekövetkező veszteségek egymástól függetlenek, és azonos eloszlásukat azért indokolt feltételeznünk, mert ugyanazon rögzített veszteségkategória és üzletág veszteségei, tehát azonos típusúak. Jegyezzük meg azt is, hogy egyes események akár negatív veszteséggel is járhatnak, ami jelen tanulmányunknak nem tárgya.[9]

Jelölje továbbá η az adott időszakban az adott kockázati osztályban bekövetkező veszteségek számát. Ennélfogva η is egy valószínűségi változó – hiszen nem ismerjük előre a veszteségek számát egy adott időtávon –, amely nemnegatív egész értékeket vehet fel. A továbbiakban η-t egyszerűen *gyakoriságnak* fogjuk nevezni, η eloszlását pedig gyakoriságeloszlásnak. Feltesszük, hogy az X_i változók az η változótól is függetlenek. Jelölje végül S az adott időszakban az adott kockázati osztályban bekövetkezett *összes (vagy teljes) veszteség* értékét. Nyilvánvalóan

6 Gáll és Nagy [2007] alapján.

7 Ez valójában csak egy részét jelenti a tőkének, így valójában tőkekövetelmény hozzájárulásról van szó.

8 További referenciaként szolgálnak a kormányrendelet alapját képező 2006/48/EC és 2006/49/EC EU-direktívák, illetve a számos irányelvet tartalmazó bázeli tanulmányok. Ezek közül néhány jelentősebb: Basel Committee on Banking Supervision [2001], Basel Committee on Banking Supervision [2003], Committee of European Banking Supervisors [2006.].

9 Megjegyezzük, hogy ilyen módon is bővíthetjük a jelen írásban leírt modelleket (például alkalmas feltevésekkel a feltételes veszteségeloszlásokról). Itt említhető az a rokon probléma is, hogy a szabályozó a belső adatokra vonatkozóan veszteségküszöb használatát is lehetővé teszi. Továbbá fontos, hogy az adatbázisból csak azok a veszteségadatok hagyhatók ki, amelyek bizonyíthatóan nem befolyásolják jelentősen sem egyedileg, sem pedig összességében a teljes kockázatot (Validációs Kézikönyv, Pénzügyi Szervezetek Állami Felügyelete [2006]).

$$S = \sum_{i=1}^{\eta} X_i \; .$$

Ahogy hangsúlyoztuk, a fentiekben leírt modell nem a pénzintézet teljes operációs kockázatára, hanem csak egy rögzített (veszteségkategóriák és üzletágak vagy más szempontok alapján kialakított) osztály kockázatára és az ahhoz tartozó tőkekövetelmény meghatározására vonatkozik.

Az összes veszteséghez *(S)* tartozó *tőkekövetelmény-hozzájárulás* alatt annak egy adott biztonsági szinthez tartozó *Value at Risk* értékét (kockáztatott érték – VaR) tekintjük.

Legyen $0 < \alpha < 1$ és tekintsük az $1–\alpha$ biztonsági szinthez tartozó Value at Risk (VaR) értéket, amely megadja az LDA alapján az adott kockázati osztályhoz tartozó tőkekövetelményt. Itt eltekintünk attól a szabályozó adta lehetőségtől, hogy bizonyos esetekben tőkekövetelmény alatt a várható értékkel csökkentett kockáztatott értéket értsük. Az $1–\alpha$ rendű VaR megmutatja azt az összeget, amelynél nagyobb veszteség bekövetkezésének valószínűsége α , azaz $1–\alpha$ biztonsággal mondhatjuk, hogy a vizsgált időszakban a veszteség nem fogja meghaladni a VaR által megadott értéket.[10]

A magyar szabályozás α=0,001 mellett írja elő a tőkekövetelmény meghatározását egyéves időszak során bekövetkező működési kockázati veszteségekre vonatkozóan (200/2007. [VII. 30.] Korm. r.), azaz 99,9 százalékos biztonság mellett kell majd meghatározni a tőkekövetelményt operációs kockázatok esetén az AMA- (így az LDA-) módszertant választóknak.

Amint láttuk, az LDA használata feltételezi a veszteségeloszlás és a gyakoriságeloszlás ismeretét. Ezek együttesen már meghatározzák a teljes veszteség eloszlását, amely pedig nyilvánvalóan meghatározza a kérdéses VaR-értékeket is. A gyakorlatban természetesen nem ismertek az említett (elméleti) eloszlások, így a VaR-értékeket becsülni szükséges valamilyen statisztikai módszerrel. A VaR becslése önmagában egyszerű feladatnak tűnhet, hiszen egy kvantilis becsléséről van szó. Természetesen adódik egy közvetlen módszer: tekintsük a kvantilisnak a statisztikában jól ismert becslését, úgy is mondhatnánk, hogy az empirikus kvantilist. Ezt nevezhetjük egy nemparaméteres módszernek is, hiszen valójában nem feltételezi az eloszlások és azok paramétereinek ismeretét, becslését. Ehhez mindössze a teljes veszteségeket tartalmazó mintára lenne szükség minél több megfigyelt időszakra, azaz minél nagyobb mintaelemszámra.

Ez azonban nem járható út működési kockázatok esetén, hiszen a teljes veszteségadatok száma, azaz a megfigyelt időszakok száma nagyon kevés a magyar pénzintézeteknél, általában néhány év. Ehhez jegyezzük meg, hogy a legtöbb pénzintézetnél az operációs kockázatok számításához szükséges adatbázisok következetes kialakítása is csak néhány, esetenként 2-3 évre nyúlik vissza. Eljátszva azonban a gondolattal, hogy sok megfigyelt évet (időszakot) tartalmazó mintánk van – esetleg több évtizednyi minta –, akkor is láthatnánk, hogy ez a közvetlen kvantilisbecslés statisztikailag nem igazán adna megbízható eredményt. Az egyik probléma, hogy több év adatainak használata során egyáltalán nem lehetünk biztosak abban, hogy a teljes veszteséget leíró eloszlások nem módosultak, így nem garantált, hogy a minta azonos eloszlású marad, ami számos problémát vetne fel. Másrészt jegyezzük meg,

10 A VaR precíz definícióját lásd Acerbi, C. [2004], Delbaen, F. [2000] műveiben. Ezen túl a www.gloriamundi.org számos publikációt tartalmaz a VaR-ral kapcsolatban.

hogy tipikusan 99,9%-os biztonsági szinthez, tehát igen magas szinthez akarunk VaR-t becsülni, ezért nem megengedhető az, hogy csak a teljes veszteségeloszlásokat tartalmazó mintát használjuk, hiszen így rengeteg információt elveszítenénk az egyedi veszteségek és a gyakoriság eloszlásáról. Másképpen úgy is megfogalmazhatjuk ezt a problémát, hogy az intézmény rendelkezésére álló minta (teljes veszteségadatok száma) időszakonként (évente) csupán egy elemmel bővül, így több évtizednyi adatgyűjtés után is csupán néhány tucatnyi elemet tartalmazó mintából kellene meghatározni egy nagyon magas konfidenciaszinthez tartozó empirikus kvantilist.

A tőkekövetelmény becsléséhez így a szakirodalom inkább egy paraméteres, közvetett utat (LDA) javasol. Ennek lényege az, hogy a teljes veszteségeket felépítő egyedi veszteségek eloszlását és a gyakoriság eloszlását próbáljuk meghatározni. Ez esetben adott eloszláscsaládok paramétereinek becslését kell elvégeznünk, majd abból következtetni a teljes veszteség eloszlására és annak kvantiliseire

3. Eloszlás közelítése

Ennél a könnyen alkalmazható módszernél az aggregált káreloszlást *(S)* közvetlenül közelítjük egy előre választott eloszlással. A korábbiakkal ellentétben, ezen módszer használata esetén még a gyakoriság- és egyedi veszteségeloszlások paramétereit sem kell megbecsülnünk, csupán azok néhány jellemzőjét, amelyeket az összetett eloszlás várható értékének és varianciájának a meghatározásához használunk fel. Az aggregált eloszlás közelítésére alkalmazott tipikus eloszlások a normális és a lognormális eloszlás.

Jelölje továbbra is S az összetett eloszlást: $S = X_1 + X_2 + \dots + X_\eta$, ahol X_i jelöli az egyedi veszteségeket, η pedig az események bekövetkezési gyakoriságát. Az S aggregált veszteségeloszlás centrális momentumai felírhatók az egyedi veszteségeloszlás és gyakoriságeloszlás momentumainak segítségével:

$$E(S) = E(\eta)\, E(X) \tag{1}$$

$$Var(S) = E(\eta)\, Var(X) + Var(\eta)[E(X)]^2, \tag{2}$$

ahol E a várható értéket, *Var* pedig a varianciát jelöli.

Miután a gyakoriság és a veszteségeloszlás szükséges jellemzőit megbecsültük, azokat (1) és (2) jobb oldalába behelyettesítettük, miközben az egyenletek bal oldalán az illeszteni kívánt kétparaméteres összetett eloszlás (esetünkben normális vagy lognormális) elméleti jellemzői állnak, az egyenletrendszer megoldásával már számíthatjuk is a választott eloszlás paramétereit (Klugman, Panjer és Willmot [2004]).

A centrális határeloszlás tétele alapján a gyakoriságeloszlás nagy várható értékére az összkár eloszlásának jó közelítése a normális eloszlás. Panjer (2006) alapján ez elsődlegesen a Poisson-, binomiális vagy negatív binomiális gyakoriságeloszlások esetén teljesül. A kárgyakoriság kicsi várható értéke esetén viszont az összetett káreloszlásra az aszimmetrikus eloszlások adhatnak jó közelítést, ilyenkor alkalmazhatjuk pl. a lognormális eloszlást.

Ha tehát az események éves bekövetkezési gyakorisága nagy, akkor a korábbiaknak megfelelően az aggregált eloszlást közelíthetjük a normális eloszlással. Ebben az esetben a normális eloszlás paramétereit a következőképpen kapjuk:

$$\mu = \mathrm{E(S)}, \tag{3}$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var(S)}}. \tag{4}$$

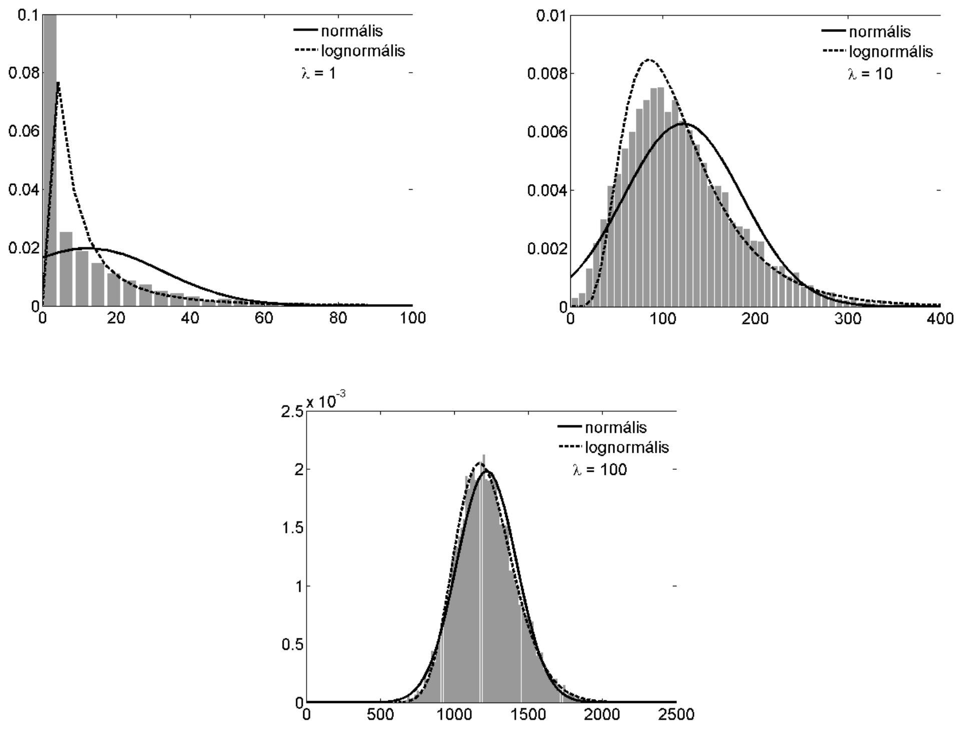
Lognormális eloszlás esetén a következő teljesül:

$$\mu = \ln(\mathrm{E(S)}) - \frac{\sigma^2}{2},$$

$$\sigma = \sqrt{\ln\left(\frac{\mathrm{Var(S)}}{\mathrm{E(S)}}\right) + 1}.$$

1. ábra

Normális és lognormális eloszlások illesztése



Megjegyzés: Normális és lognormális eloszlások illesztése a $\lambda = 1$, $\lambda = 10$ és $\lambda = 100$ paraméterű Poisson-gyakoriságokból és a α=4,8 és β=46 paraméterű Pareto egyedi veszteségeloszlásból generált aggregált veszteségekre.[11]

11 Cikkünk során elsődlegesen a lognormális, Pareto- és exponenciális eloszlásokat használtuk az egyedi veszteségek modellezésére, míg a gyakoriság eloszlást minden esetben Poissonnak feltételeztük. Az egyedi veszteségeloszlások közül a Pareto-eloszlás rendelkezik leginkább fat tail (vastag farkú, vastag szélű – a nagy veszteségek bekövetkezési valószínűsége „szignifikánsan” különbözik nullától) tulajdonsággal, míg az

Szemmel láthatólag $\lambda = 1$ és $\lambda = 10$ esetén a lognormális eloszlás illeszkedik jobban, míg $\lambda = 100$ esetén a két közelítés között csekély a különbség. Az illesztett eloszlásokhoz tartozó VaR-értékeket a következő táblázat foglalja össze.

1. táblázat

Normális és lognormális illesztés Value at Risk értékei különböző konfidenciaszintek mellett

	Eloszlás illesztése						Fourier		
	Normális			Lognormális					
	λ=10	λ=100	λ=1	λ=1	λ=10	λ=100	λ=1	λ=10	λ=100
VaR 90	38	203	1476	28	203	1483	36	206	1481
VaR 95	45	226	1549	42	242	1574	51	240	1567
VaR 99	59	270	1686	91	338	1760	92	318	1742
VaR 99,5	64	286	1736	121	382	1833	112	353	1811
VaR 99,9	74	318	1839	217	492	1994	170	443	1969

Megjegyzés: Az utolsó oszlop tartalmazza a Fourier-transzformációval kapott értékeket, amelyeket – mint a VaR „igazi" értékét – viszonyításképpen használhatunk.[12]

A táblázatból kiolvasható, hogy magasabb konfidenciaszintek mellett a normális eloszlással történő közelítés tipikusan alulbecsli a VaR-t, míg lognormális eloszlás használatával túlbecsüljük azt.

A módszer legnagyobb hátránya, hogy a modellezés pontossága nem tartható ellenőrzés alatt[13], továbbá a biztosítások hatása nem építhető be a modellbe, illetve az egyes üzletágak, veszteségtípusok közötti kapcsolatokat sem tudja kezelni. Ugyanakkor egy meglehetősen egyszerű módszerről van szó, ami lehetővé teszi a gyors előzetes számításokat.

exponenciális eloszlásról ezt egyáltalán nem állíthatjuk. A centrális határeloszlás tételének gyakorlati alkalmazásakor figyelnünk kell arra, hogy különböző eloszlások esetén S (az egyedi veszteségek összege) különböző gyorsasággal konvergál a normális eloszláshoz. Mivel az alkalmazott eloszlások közül a Pareto-eloszlás rendelkezik a leginkább vastag szélekkel, így a konvergencia várhatóan itt a leglassabb (azaz csak λ nagy értéke esetén számítunk elfogadható közelítésre). Ebből az is következik, hogy a normális eloszlással történő közelítés ebben az esetben kevésbé megbízható. Fontos megjegyeznünk, hogy a módszer jósága a választott gyakoriságeloszlástól és az egyedi veszteségeloszlástól egyaránt függ. Az illesztést elvégeztük lognormális eloszlású egyedi veszteségekre is, ahol a fentiekhez hasonló eredményt kaptunk.

12 A későbbiekben adunk választ arra, hogy a Fourier-transzformációval kapott eredményeket adott esetben miért tekinthetjük benchmarknak.

13 Megjegyezzük, hogy amennyiben a modellezés alapját olyan kockázati osztály adja, amelyben mind nagy gyakoriságú, ugyanakkor kis hatású, mind kis gyakoriságú, de nagy hatású események is vannak, az a módszer megbízhatóságát negatív irányban befolyásolja.

4. Monte-Carlo-módszer

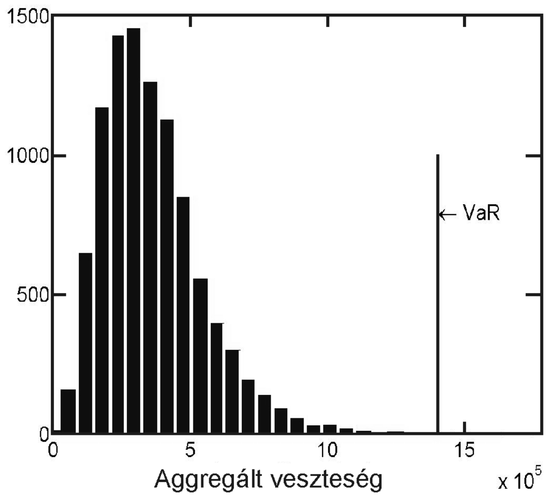
A másik leginkább kézenfekvő és gyakran javasolt módszer a felmerülő matematikai nehézségek miatt a Monte-Carlo-módszer, amelynek a segítségével közvetlenül adhatunk becslést adott biztonsági szint mellett a keresett kvantilisre, azaz a Value at Risk értékre. Ehhez mindössze egy nagyméretű (azaz nagy szimulációszámú) mintát kell generálnunk a teljes veszteségeloszlásra (nyilvánvalóan gyakoriságok és veszteségadatok generálásával); ehhez ismernünk kell az egyedi veszteség- és gyakoriságeloszlásokat. Majd a generált mintából becsülhetjük a keresett kvantilist, amely a tőkekövetelményünk becslése lesz.

Az aggregált veszteségeloszlás meghatározásának lépései szimulációval, feltéve, hogy a gyakoriság és egyedi veszteségeloszlás paramétereit már megbecsültük:

1. Generáljunk egy véletlen számot (n_i) az eseményszám eloszlásból.
2. Generáljunk n_i db véletlen számot $(X_1,...X_{ni})$ az egyedi veszteségeloszlásból.
3. Képezzük az $S_i=X_1+...+X_{ni}$ összeget.
4. 1-3 lépéseket hajtsuk végre R-szer, ahol R egy kellően nagy pozitív valós szám.
5. Az R elemű mintából $(S_1,...S_R)$ határozzuk meg az S eloszlás jellemzőit, köztük annak VaR-ját.

2. ábra

Aggregált eloszlás (R=10000)



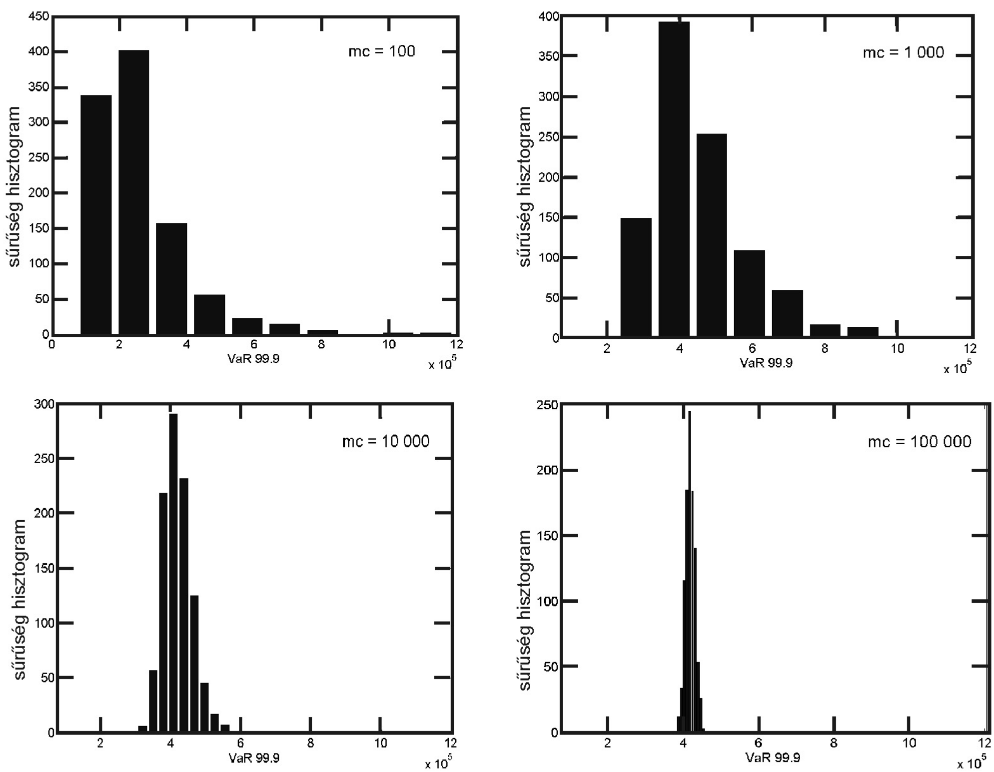
Megjegyzés: λ = 10 paraméterű Poisson és μ = 10, σ = 1 paraméterű lognormális eloszlásokból szimulációval előállított aggregált eloszlás (R=10 000).

Az eljárás használatakor kritikus a szimulációszám nagysága. Újra hangsúlyozzuk, hogy a közelítéses módszernél nem kellett ismernünk a gyakoriságeloszlást és az egyedi veszteségeloszlást, csupán azok momentumait kellett becsülnünk. A Monte-Carlo-módszer esetében tehát pontosabb eredményt várunk, hiszen nemcsak a momentumokat ismerjük/becsüljük, hanem a teljes veszteséget generáló folyamatot (a gyakoriságeloszlást és az egyedi veszteségeloszlást) is, azaz több információt viszünk a modellbe. Ugyanakkor számolnunk kell a modellezési, azaz eloszlásválasztási hibával.

A Monte-Carlo-szimulációs eljárás egy régi, jól ismert módszer, ami nagy rugalmasságot biztosít a modellezés során. Bevezetése könnyű, számos analitikusan nem kezelhető probléma megoldható vele. Fontos, hogy mind a biztosítások hatását, mind az események, eseménytípusok, üzletágak közötti kapcsolatokat képes kezelni. Hátránya, hogy idő- és memóriarabló lehet – a megfelelő pontosság eléréséhez milliós nagyságrendű szimulációszámra lehet szükség, noha néhány egyszerű varianciacsökkentő eljárással (pl. Latin Hypercube minták) csökkenthetjük azt (*McKay, Beckman* és *Conover* [1979]). További irodalomként ajánljuk *Ross* [1997] művét a mélyebben érdeklődő olvasóknak.

3. ábra

A 99.9%-os konfidenciaszinthez tartozó VaR eloszlása különböző szimulációszám (mc) esetén



Megjegyzés: Jól látható, hogy a szimulációszám növelésével az ilyen típusú hiba könnyen kézben tartható.

5. Panjer-rekurzió

5.1. A rekurzió ismertetése

Az összetett veszteségeloszlás Panjer-rekurzióval is meghatározható. A módszer lényege, hogy a diszkrét gyakoriság- és az egyedi veszteségeloszlásokból rekurzióval határozzuk meg az összetett eloszlást. Mindenekelőtt rögzítsünk néhány feltételt Panjer [2006] alapján. Tegyük fel, hogy az egyedi veszteségek eloszlása – jelölje ezt $p_x(x)$ – a *0, 1, 2, ..., m* pontokban van értelmezve. Az m-edik pont a legnagyobb veszteséget jelenti, feltételezve, hogy az tetszőlegesen nagy lehet. A gyakoriságra pedig azt a megkötést alkalmazzuk, hogy a gyakoriságeloszlás, amit p_N jelöl, az *(a, b, 0)* családból[14] származik, azaz Poisson, binomiális vagy negatív binomiális lehet.

2.táblázat

(a, b, 0) típusú eloszlások

Eloszlás	Paraméterek	$P(\eta=k)$	$E(\eta)$	$D^2(\eta)$	a, b értékek
Binomiális	n: pozitív egész, $0 \le p \le 1$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $k=0,1,...,n.$	np	$np(1-p)$	$a=-\frac{p}{1-p}$ $b=\frac{(n+1)p}{1-p}$
Poisson	$\lambda \ge 0$	$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,...\ .$	λ	λ	$a=0$ $a=\lambda$
Negatív binomiális	r: pozitív, $0 \le q < 1$	$\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)k!}(1-q)^r q^k$, $k=0,1,...\ .$	$\frac{rq}{1-q}$	$\frac{rq}{(1-q)^2}$	$a=q$ $b=(r-1)q$

Ezen feltételek fennállása mellett Panjer-rekurzióval a következőképpen határozhatjuk meg S eloszlását (Panjer [1981]):

$$P(S=n)=\sum_{y=1}^{n}\left(a+\frac{by}{n}\right)P(X=y)P(S=n-y)\text{, ahol } n=1,2,..., \qquad (5)$$

14 Az (*a, b, 0*) típusú eloszlások esetén léteznek olyan valós *a, b* paraméterek, hogy az η gyakoriság eloszlására teljesül az alábbi rekurzió:

$$P(\eta=n)=\left(a+\frac{b}{n}\right)P(\eta=n-1),$$

minden pozitív egész n esetén. A 2. táblázat megfelelő *a, b* értékeit a fenti rekurzióba behelyettesítve, rendre a binomiális, Poisson- és negatív binomiális eloszlásokra teljesülő rekurziót kapjuk vissza.

és a rekurziót a $P(S=0)=P(X=0)$ kezdőlépéssel indíthatjuk, ahol X egy egyedi veszteséget jelöl. Speciálisan, λ paraméterű Poisson gyakoriságeloszlás esetén $P(S=0)=e^{-\lambda}$, továbbá

$$P(S=n)=\frac{\lambda}{n}\sum_{y=1}^{n} yP(X=y)\,P(S=n-y),\ \text{ahol}\ n=1,2,... \tag{6}$$

Itt is annak a vizsgálata a legfontosabb, hogy a rekurzív módszerrel kapott tőkekövetelmény-érték mennyire pontos, illetve mekkora hiba adódhat a módszer használata során. Rekurziós számítások során a kerekítésből, számábrázolásból származó hibák felhalmozódhatnak, és jelentős mértékűvé válhatnak. A rekurzió során minden lépésben valamennyire pontatlan eredményt kapunk, hiszen a végtelen tizedesjegyű számokat is csak végesként tudjuk kezelni. Így azt a kérdést kell megvizsgálni, hogy a számítások során milyen gyorsan növekednek ezek a hibák az ilyen egymásra épülő eljárásoknál. Panjer és *Wang* [1993] megmutatta, hogy Poisson- és negatív binomiális eloszlások esetén a rekurzív formula stabil marad, viszonylag lassan növekedő hibákkal.

A rekurzív formula használatának feltétele, hogy mind a gyakoriság, mind a veszteség diszkrét eloszlású legyen. Az események gyakoriságának modellezésére az *(a, b, 0)* eloszláscsalád meg is felel ennek, azonban a veszteség modellezésére alkalmazott eloszlások, mint pl. lognormális, Pareto, Burr, lognormális-gamma stb. folytonos voltuk miatt nem tesznek eleget a feltételnek. Panjer és Willmot [1992] folytonos veszteségeloszlás mellett a teljes eloszlás sűrűségfüggvényére az ún. Volterra-típusú integrálegyenlet alkalmazták. Ez azonban meglehetősen bonyolult eljárás, egyszerűbben járhatunk el, ha a folytonos veszteségeloszlásokat diszkréttté alakítjuk. Erre több módszer is rendelkezésre áll. A következőkben Panjer [2006] alapján a kerekítéses és lokális momentumok illesztésének módszereit mutatjuk be az eloszlások diszkretizálására.

5.2. Diszkretizálási feladat

A diszkretizálás során a folytonos veszteségeloszlás értelmezési tartományán diszkrét pontokat határozunk meg, és azokhoz valószínűségeket rendelünk. A diszkretizálás során azt a célt kell kielégítenünk, hogy a diszkrét eloszlás minél jobban reprezentálhassa az eredeti folytonos eloszlást. Természetesen nem mindegy, hogy milyen értelemben kell jól reprenzentálni az eredeti eloszlást. Legyen a diszkrét eloszlás alakja a folytonoshoz hasonló, vagy rendelkezzen ugyanazokkal a momentumokkal, kvantilisokkal? Önmagukban ezek mind lényegtelenek lehetnek, hiszen esetünkben a cél az, hogy az aggregált eloszlás VaR-ja pontos és stabil legyen. A különböző diszkretizálási eljárások segítségével előállított diszkrét egyedi veszteségeloszlások tehát nem tökéletesen reprodukálják az eredeti folytonos eloszlást, a kérdés csupán, hogy amennyiben egy diszkretizált veszteségeloszlást használunk, mekkora hibát ejtünk a tőkekövetelmény megállapítása során. A következő pontokban bemutatunk néhány diszkretizálási módszert, illetve megvizsgáljuk a módszerek közötti különbségeket is.

5.2.1. Kerekítéses módszer

A módszer alkalmazása során az eloszlás értelmezési tartományán *k* darab pontot jelölünk ki úgy, hogy azok egyenlő *h* távolságra legyenek egymástól. Ezekhez a pontokhoz rendeljük a valószínűségeket. Legyen $j = 0, 1, 2, \ldots$, és az értelmezési tartomány megfelelő pontjai: $j*h$. Az eloszlás $j*h$ pontban felvett valószínűségét (f_j) a következő formulával határozhatjuk meg:

$$f_0 = P\left(X < \frac{h}{2}\right) \tag{7}$$

$$f_j = P\left(jh - \frac{h}{2} \le X < jh + \frac{h}{2}\right), \; j = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Ez azt jelenti, hogy a módszerrel a $j*h$ és a $(j+1)*h$ pontok közötti valószínűséget szétosztjuk ezen pontok között. Innen ered a módszer neve is, hiszen bármely szomszédos két pont közötti valószínűséget ahhoz a ponthoz rendeli, amelyikhez közelebb esik. A kerekítéses módszerrel kapott valószínűségek nemnegatívak, és összegük 1-et ad ki.

5.2.2. Lokális momentumillesztés módszere

A következő diszkretizálási módszernél az eloszlások momentumaira fókuszálunk, azaz úgy határozzuk meg a valószínűségeket, hogy a diszkrét eloszlás első *p* momentuma megegyezzen a tényleges eloszlás első *p* momentumával.

Ehhez vegyünk fel $p \cdot h$ hosszúságú intervallumokat $[x_k, x_k+ph]$ az értelmezési tartományon. Az intervallum $x_k, x_k+h, \ldots, x_k+ph$ pontjaihoz az $m_0^k, m_1^k, \ldots, m_p^k$ súlyokat rendeljük úgy, hogy az első *p* momentumot megőrizzük. Az m_j^k súlyokra Panjer [2006] alapján a következő összefüggést adhatjuk:

$$m_j^k = \int_{x_k}^{x_k+ph} \prod_{i \neq j} \frac{x - x_k - ih}{(j-i)h} \, dF_X(x), \quad j = 0, 1, \ldots, p \tag{9}$$

A diszkrét eloszlás keresett valószínűségei pedig a következők lesznek:

$$\begin{aligned} f_0 &= m_0^0, & f_1 &= m_1^0, \ldots \\ f_p &= m_p^0 + m_0^1, & f_{p+1} &= m_1^1, \ldots \end{aligned} \tag{10}$$

Az intervallumokat úgy határozzuk meg, hogy az $x_{k+1}=x_k+ph$ egyenlőség teljesüljön, és a végpontok egybeessenek. Ekkor a végpontokban meghatározott m_j^k súlyok összeadódnak. A kezdő értékre feltételezzük, hogy $x_0=0$. Az így kapott valószínűségekkel megőrizzük az eloszlás egészének az első *p* momentumát. Valamint az is teljesül, hogy ezeknek a valószínűségeknek az összege 1-et ad ki.

Panjer és *Lutek* [1983] megmutatta, hogy a folytonos eloszlás megfelelő közelítéséhez az első két momentum illesztése általában elegendő. A diszkretizálásból eredő hiba már alig csökken, ha a modellt további momentumok illesztésével bővítjük. A kerekítéses első, illetve első két momentum illesztésének módszere közötti választásnál néhány szempontot azonban figyelembe kell venni. Így, míg a kerekítéses és az egy momentum illesztésénél kapott valószínűségek mindig pozitívak lesznek, addig a kettő vagy több momentum figyelembe vételénél előfordulhat, hogy negatív valószínűségeket kapunk. Azt is fontos megjegyezni, hogy a kerekítéses és az egy momentum illesztésének módszeréből hasonló nagyságrendű hibák adódhatnak, azonban a második momentum illesztésénél ezek a hibák jelentősen csökkennek. Így ezeket a szempontokat mérlegelni kell, amikor azt vizsgáljuk, hogy melyik a leginkább megfelelő módszer a folytonos eloszlás diszkretizálásához.

5.3. Az aggregált veszteségeloszlás tulajdonságai

Az aggregált veszteségeloszlás VaR-jának viselkedését mind a kerekítéses, mind a momentumillesztéses módszerrel teszteltük. Arra kerestük a választ, hogy van-e érdemi különbség az egyes módszerek között. Vizsgálatunk során lognormális, Pareto- és exponenciális eloszlásokat használtunk.

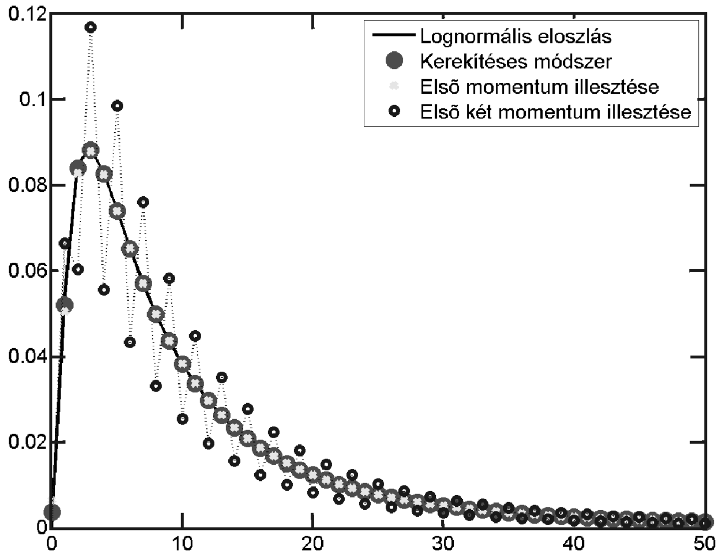
A módszerek alkalmazásakor az intervallumok hosszát kezdetben egy egységnek választottuk. Habár tudjuk Panjer [2006] alapján, hogy az egyes diszkretizálási módszerek közötti különbség elsődlegesen akkor jelentős, ha a folytonos eloszlást néhány diszkrét pontból álló eloszlással akarjuk közelíteni, vizsgálataink kezdetén az ebből adódó eltérések minimalizálására törekedtünk. Ennek az az oka, hogy az ilyen tipusú hiba jól csökkenthető a kellően kicsi h intervallum választásával. Minél sűrűbben helyezkednek el az eloszlás diszkretizált pontjai, annál pontosabb eredményt kapunk, azaz annál jobban tudjuk a diszkretizált valószínűségekkel közelíteni az eredeti folytonos eloszlást. Ugyanakkor megjegyezzük, hogy a számítógépek memóriakapacitása gátat szabhat az egyedi veszteségeloszlás végtelenül finom diszkretizálásának. A kerekítéses módszerrel kapott diszkretizált eloszlás valószínűségeit összegezve, az elvártaknak megfelelően 1-et kaptunk eredményül, és teljesült a kapott értékekre elvárt pozitivitási tulajdonság.

Az első momentum illesztésének módszere esetén a (9) egyenlet leegyszerűsödik, hiszen a produktum részben csak egyetlen tényező szerepel. Mivel ennél a módszernél az első momentumot illesztjük az eloszlásra, azaz p=1, ezért az $[x_k, x_k+ph]$ intervallumoknak a végpontjaikra kerülnek a megfelelő m_0^k, és m_1^k súlyok. Így minden pontban a keresett valószínűségek a megfelelően összeadott m_0^k, és m_1^k, súlyok összegével egyenlők. A diszkretizálás során kapott valószínűségek ismét mind pozitívak lettek és összegük itt is kiadta az egyet.

Az első két momentum illesztésének módszerét használva, (9)-nek megfelelően egy szorzatot kell kiintegrálni, hogy a megfelelő m_0^k, m_1^k súlyokat megkapjuk (p = 2 esetben már három ilyen integrálandó tag van). Ez az eljárás abban is különbözik az előzőtől, hogy az $[x_k, x_k+ph]$ intervallumban van egy belső pont, amelyhez valószínűséget rendelünk. Azaz az intervallum végpontjain két súly összege adja a keresett valószínűséget, míg a belső pontban csak m_1^k megfelelő eleme. Emiatt a diszkretizált valószínűségek ugrálnak, de a kapott diszkrét eloszlás összességében nagyon jól viselkedik az aggregált káreloszlás meghatározásakor. A két momentum illesztésével kapott valószínűségekre az első értéktől eltekintve mindig pozitív értékeket kaptunk.

4. ábra

Lognormális eloszlás (μ=2 és σ =1) diszkretizálása kerekítéses és momentumillesztéses módszerekkel



Az ábráról jól látszik, hogy a kerekítéses és az első momentum illesztésének módszerével kapott értékek szinte teljesen egybeesnek. Az első két momentum illesztésének módszerénél pedig az ugráló valószínűségeket lehet jól megfigyelni.

Megnéztük azt is, hogy a rekurzióval előállított aggregált eloszlás (Poisson λ=10 – lognormális μ=2, σ=1) várható értéke és szórása mennyiben különbözik az elméleti, valamint a Monte-Carlo-szimulációval kapott értékektől. Az összetett eloszlás elméleti várható értékét és varianciáját (1)–(2) alapján határoztuk meg. A Monte-Carlo-szimulációs esetben 100 000-es szimulációszám mellett 1000-szer határoztuk meg az aggregált eloszlást, és azokból átlagoltuk ki az eloszlás jellemzőit. A kapott eredményeket a *3. táblázat* foglalja össze.

3. táblázat

A különböző módszerekkel meghatározott aggregált káreloszlások első két momentumai

	Elméleti	Monte-Carlo	Kerekítéses módszer	Első momentum illesztése	Első két momentum illesztése
Várható érték	121,8249	121,8306	121,8306	121,8262	121,8249
Szórás	63,5160	63,5226	63,5218	63,5283	63,5156

A táblázatból látható, hogy a különböző módszerekkel végzett diszkretizálások során az eloszlások mind várható értéküket, mind szórásukat rendkívül pontosan megőrizték. Már a kerekítéses módszer is nagyon jól közelítette az elméleti várható értéket és szórást (itt újra megjegyezzük, hogy a diszkrét pontok kellően sűrűn helyezkedtek el). Az első két momentum megőrzésével kapott eredmények pedig már szinte minden tizedesre megegyeznek a várt értékekkel. Ezek után megváltoztattuk a lognormális és Poisson-eloszlások paramétereit (μ= [0,5 1 2 5]; σ =[1 2]; λ=[0.05 1 10 100]). Az így kapott eredményekre ugyanúgy teljesültek a fenti megállapítások, azaz a különböző diszkretizálási módszerek segítségével meghatározott aggregált eloszlások meglehetősen pontosan visszaadják az elméleti eloszlás megfelelő momentumait. Ezek közül is az első két momentum megőrzésével kapott eredmények voltak legközelebb az elméleti értékekhez, de a különbség minden esetben elhanyagolható volt.

Az aggregált eloszlásokból meghatároztuk az kockázatott értéket is különböző konfidenciaszintek mellett, ezeket a következő táblázat foglalja össze.

4. táblázat

A különböző diszkretizálási módszerekkel meghatározott aggregált káreloszlások VaR értékei

	Monte-Carlo	Kerekítéses módszer	Első momentum illesztése	Első két momentum illesztése
VaR 90	203.2	204	204	204
VaR 95	238.5	240	240	240
VaR 99	322.8	324	324	324
VaR 99.5	362.2	363	363	363
VaR 99.9	467.5	468	468	468

Megjegyzés: viszonyításképpen a Monte-Carlo-szimulációval kapott értékeket is feltüntetjük.

A táblázatból látható, hogy a három (kerekítéses, első momentum illesztése, első két momentum illesztése) módszer egész számra kerekítve azonos eredményre vezetett, a kockáztatott értékek egymással teljesen megegyeznek. A korábban leírt módon módosított μ, σ és λ paraméterekkel meghatározott aggregált eloszlásoknál is teljesült a fenti állítás. Azaz a különböző diszkretizálási módszerekkel kiszámított VaR-értékek nem különböztek lényegesen egymástól.

A fenti tesztet (diszkretizálásközelítéssel és lokális momentumillesztéssel, majd a rekurzió alkalmazásával és VaR-számítással) megismételtük Pareto- és exponenciális egyedi veszteségeloszlásokkal is, és a korábban vázoltakkal megegyező eredményre jutottunk. Összességében a kockáztatott érték szempontjából a három diszkretizálási módszer ugyanarra az eredményre vezetett, ugyanakkor nem szabad arról megfeledkeznünk, hogy ez egy olyan modellezési környezetben történt, ahol a folytonos eloszlás diszkretizálása egy egységnyi intervallumonként történt. Természetesen a diszkretizálási intervallum növelésével a momentumillesztéses módszerek jobb eredményt adnak.

6. Fourier-transzformáció

Az összetett eloszlás közelítésére egy további, szintén nem triviális mód vezet az eloszlás momentumgeneráló és karakterisztikus függvényének meghatározásán keresztül. Ehhez tudnunk kell, hogy a teljes eloszlás momentumgeneráló függvénye meghatározható a gyakoriság generátorfüggvénye és az egyedi veszteségek momentumgeneráló függvénye segítségével (amennyiben léteznek):

$$G_S(y) = g_\eta\left(G_X(y)\right), \quad y \in R\,, \tag{11}$$

ahol G_X és G_S az egyedi illetve a teljes veszteség eloszlásainak momentumgeneráló függvényét jelöli, míg g_η a gyakoriságeloszlás generátorfüggvénye. Ugyanilyen összefüggés adódik karakterisztikus függvények esetére is. Utóbbi előnye, hogy mindig létezik, továbbá mindig egyértelmű. Ha a fenti módon meghatároztuk a teljes veszteség karakterisztikus függvényét, akkor például a gyors Fourier-transzformáció (Fast Fourier Transform – FFT) módszerét használhatjuk annak érdekében, hogy a karakterisztikus függvényből megkapjuk (becsüljük) a szóban forgó eloszlást (sűrűségfüggvényt).

Az aggregált veszteségeloszlás meghatározásának lépései:

1. A veszteség eloszlás diszkretizálása a Panjer-rekurzió esetében is használt módszerek valamelyikével.
2. A gyors Fourier-transzformáció alkalmazása a diszkrét veszteségeloszlásra. Ezt a legtöbb numerikus matematikai programcsomag ismeri, így ez a lépés is egyszerűen elvégezhető.
3. Az összetett eloszlás karakterisztikus függvényénekmeghatározása: (11) alapján alkalmazzuk a gyakoriságeloszlás generátorfüggvényét a már diszkrét veszteségeloszlás karakterisztikus függvényére. Ez adja meg az aggregált eloszlás karakterisztikus függvényét, ami az összetett eloszlás diszkrét Fourier-transzformációjának felel meg.
4. Az aggregált eloszlás karakterisztikus függvényre az inverz gyors Fourier transzformációt alkalmazva, megkapjuk a keresett összetett eloszlást diszkrét alakban. Numerikus matematikai programcsomagok segítségével ez a lépés is könnyen elvégezhető.
5. Az aggregált eloszlásból határozzuk meg a különböző konfidenciaszintekhez tartozó kockáztatott értékeket és az eloszlás egyéb jellemzőit.

A Fourier-transzformációs eljárás kritikus eleme az egyedi veszteségeloszlás diszkretizálása lehet. Ugyanakkor itt is igaz, hogy amennyiben a diszkretizálást kellően kis lépésközönként végezzük, akkor még a kerekítéses módszer is megállja a helyét, és az eljárás pontos eredményt ad. Természetesen ezt fokozhatjuk a momentumillesztéses módszerekkel. A nagyon finom lépésköz használatának ebben az esetben is a memória szabhat gátat, a köztes pontok száma legyen kisebb, mint 2^{24}. Ebben az esetben ez kiváló eszköz az aggregált eloszlásnak és jellemzőinek a meghatározására. További előnye, hogy gyors; ugyanakkor itt sem egyértelmű, hogyan lehetne bevonni a biztosítások hatását a modellbe. Mivel egydimenziós eljárásról van szó, ezért a dimenziók ex-post aggregációja is szükséges.

7. Következtetések

A cikkben bemutatott módszerek a működési kockázati tőkekövetelmény (VaR) meghatározását szolgálják az LDA keretein belül. Célunk az volt, hogy összefoglaljuk azokat a lehetőségeket, amelyekkel az éves működési kockázati veszteségeket leíró aggregált veszteségeloszlás meghatározható. Nagyobb figyelmet szenteltünk a közelítéses és a Panjer-féle rekurziós módszernek, mivel a Fourier-transzformációs és Monte-Carlo-szimulációs eljárásokat Armai [2007], valamint Gáll és Nagy [2007] cikkei korábban már taglalták. Tapasztalataink alapján a közelítéses módszer kivételével nagy pontossággal becsülhető a tőkekövetelmény (feltéve, hogy a gyakoriság és az egyedi veszteségeloszlás paramétereit ismerjük[15]), numerikus buktatókkal nem találkoztunk sem a rekurziós, sem a Fourier-transzformációs esetben. Ez nem azt jelenti, hogy a lehetséges numerikus problémákkal nem kell foglalkoznunk, csupán hogy az általunk használt eloszlások és paraméterek használata mellett az eljárás stabil volt.[16]

A módszerek tekintetében a legkönnyebben járható út az aggregált eloszlás közelítése, ennek azonban komoly hátránya, hogy a modellezés pontossága nem tartható ellenőrzés alatt.

Ebből adódóan az eredményül kapott Value at Risk pontosságáról nem tudunk semmit állítani. A másik három eljárás (Monte-Carlo-szimuláció, Panjer-rekurzió, Fourier-transzformáció) esetében a pontosság szintje ellenőrzés alatt tartható a szimulációszámnak vagy a diszkretizálás finomságának a meghatározásával. A Monte-Carlo-szimuláció nagy előnye, hogy könnyű implementálni, a biztosítások hatása figyelembe vehető, és az egyes események, eseménytípusok, üzletágak közötti kapcsolat modellezhető. Mindezen előnyök mellett számolnunk kell azzal, hogy igen idő- és memóriaigényes eljárásról van szó. Ezzel szemben a rekurziós és Fourier-transzformációs módszerek lényeges gyorsabbak, ugyanakkor nem egyértelmű, hogyan vonható be a biztosítások hatása a modellbe, illetve az eredmények ex-post aggregációja szükséges.

Irodalomjegyzék

A működési kockázat kezeléséről és tőkekövetelményéről: 200/2007. (VII. 30.) Korm. r., *Magyar Közlöny*, 101., 2007. júl. 30., http://www.magyarkozlony.hu/nkonline/MKPDF/hiteles/MK07101.pdf

Acerbi, C. [2004]: Coherent Representations of Subjective Risk Aversion, in Giorgio Szegö (ed.): Risk Measures for the 21st Century, Wiley, New York.

Arató, M. [1997]: Általános biztosításmatematika, ELTE, Eötvös Kiadó, Budapest.

Armai, Zs. [2007]: Veszteségmegoszlások meghatározása Fourier-transzformációval, *Hitelintézeti Szemle*, 2007/3.

Basel Committee on Banking Supervision [2001]: Consultative Document, Operational Risk, Supporting Document to the New Basel Capital Accord, Issued for comment by 31 May 2001, www.bis.org.

Basel Committee on Banking Supervision [2003]: *Consultative Document, The New Basel Capital Accord*, Issued for comment by 31 July 2003, www.bis.org.

15 Megjegyezzük, hogy az eloszlások paramétereinek a becslése az igazán kritikus része a működési kockázatok modellezésének.

16 A számításokhoz MatLab 7.1-et használtunk.

Committee of European Banking Supervisors [2006]: Quantitative Impact Study 5, Overview on the Results of the EU countries, 2006. júőnius 16., http://www.c-ebs.org/qis5.htm.

Directive 2006/48/EC of the European Parliament and of the Council of 14 June 2006 relating to the taking up and pursuit of the business of credit institutions [recast], *Official Journal of the European Union*, 2006. június 30., L 177/1,
http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/site/en/oj/2006/l_177/l_17720060630en00010200.pdf.

Directive 2006/49/EC of the European Parliament and the Council of 14 June 2006 on the capital adequacy of investment firms and credit institutions [recast], *Official Journal of the European Union*, 2006. június 30., L 177/201, http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/site/en/oj/2006/l_177/l_17720060630en02010255.pdf.

Frachot, A.– Georges, P.–Roncalli, T. [2001]: Loss Distribution Approach for operational risk, Crédit Lyonnais**,** http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/lda.pdf.

Frachot, A.– Roncalli, T.–Salomon, E. [2004]: The Correlation Problem in Operational Risk, Crédit Lyonnais, http://gro.creditlyonnais.fr/content/wp/lda-correlations.pdf.

Gáll, J.–Nagy, G. [2007]: A működési kockázat veszteségeloszlás-alapú modellezése, *Hitelintézeti Szemle*, 2007/4.

Klugman, S.–Panjer, H.–Willmot, G. [2004]: Loss Models, From Data to Decision, Wiley, Hoboken, New Jersey.

Panjer, H. [1981]: Recursive evaluation of compound distributions, *Astin Bulletin*, **12**, 22–26. o.

Panjer, H. [2006]: *Operational Risk, Modeling Analytics*, Wiley, Hoboken, New Jersey.

Panjer, H.–Willmot, G. [1986]: Computational Aspect of Recursive Evaluation of Compound Distributions, *Insurance: Mathematics and Economics*, **5**, 113–116. o.

Panjer, H.–Willmot, G. [1992]: Insurance Risk Models, Society of Actuaries, Chicago

Validációs kézikönyv, Pénzügyi Szervezetek Állami Felügyelete [2006],

http://www.pszaf.hu/engine.aspx?page=pszafhu_validacios&switch-content=pszafhu_validacios_20060331_3&switch-zone=Content%20Zone%204&switch-render-mode=full.

Panjer, H.–Wang, S. [1993]: On the stability of recursive formulas, ASTIN Bulletin.

Panjer, H.–Lutek, B. [1983]: Practical aspects of stop-loss calculations, Insurance: Mathematics and Economics.

Povilaitis, K. [2008]: Aggregált eloszlások a működési kockázatkezelésben, Budapesti Corvinus Egyetem, Közgazdaságtudományi Kar, Befektetések és Vállalati Pénzügyek Tanszék