

Balogh Tamás László

## Állami tulajdonrész duopol piacokon *Játékelméleti modell - a készletre történő termelés esete*

*Jelen tanulmány a Bertrand-Edgeworth duopólium azon változatát vizsgálja, ahol az egyik vállalat tisztán magántulajdonban, míg a másik vállalat részben állami tulajdonban van. Az egytermékes piacon a magántulajdonban lévő vállalat tisztán profitmaximalizáló, míg a részben állami tulajdonú vállalat az állami tulajdonrész arányában társadalmi jólétet maximalizál. Feltesszük, hogy a termelés az eladásokra kötött szerződések megkötését megelőzően, készletre történik. Bemutatjuk a hasonló modellekhez kapcsolódó szakirodalmi eredményeket, majd a vizsgált modellkeretben szimultán és szekvernciális döntési sorrendekre meghatározzuk az egyensúlyi árakat és mennyiségeket. Belátjuk, hogy a vizsgált modellben csak bizonyos feltételek teljesülése esetén létezik tiszta Nash-egyensúly a piaci árra és mennyiségre. Az eredményeket egy számpéldán keresztül illusztráljuk. Vizsgáljuk továbbá az időzítési játék egyensúlyát is, azaz azt a kérdést, hogy a szereplők magára hagyása esetén szimultán vagy szekvernciális döntési sorrend alakulna-e ki a piacon.*

**Kulcsszavak:** Bertrand-Edgeworth, vegyes duopólium, időzítési játék  
**JEL klasszifikáció:** D43, L13

*We investigate a mixed duopoly where, according to the ownership structure, a private firm and a partially public firm is present on the market of a homogenous good. The private firm is assumed to be a pure profit maximizer, while the other firm maximizes social welfare in proportion to its state-owned shares. We assume that production takes place before sales are realized. After the introduction to some important results in the field of mixed duopolies, we determine the Nash equilibrium prices and quantities for all possible orderings of moves in the discussed framework. We show that a pure Nash equilibrium exists only if certain conditions are satisfied and illustrate our findings through a numerical example. Furthermore, we determine the equilibrium of the timing game, i.e. we investigate whether a simultaneous or a sequential ordering of decisions would arise on the market, if the ordering of moves was an endogenous variable.*

**Keywords:** Bertrand-Edgeworth, mixed duopoly, timing game  
**JEL classification codes:** D43, L13

**Balogh Tamás László** a Debreceni Egyetem Közgazdaság- és Gazdaságtudományi karának PhD hallgatója, az MTA Lendület Program Stratégiai Interakciók Kutatócsoportjának tagja. E-mail: [tamas.balogh@econ.unideb.hu](mailto:tamas.balogh@econ.unideb.hu)

*A kutatás az MTA-BCE „Lendület” Stratégiai Interakciók Kutatócsoportjának keretein belül valósult meg.  
Levelezési cím: 1093 Budapest, Fővám tér 13-15.*

Állami részesedéssel rendelkező nagyvállalatra számos példát lehet találni. Elég csak Magyarországon a MOL-ra gondolni, de külföldről is hozhatunk példákat: ilyen a norvég Statoil, vagy az új-zélandi Kiwibank. Azokon a piacokon, ahol ilyen vállalatok is jelen vannak, az állam nemcsak külső szabályozóként, hanem tulajdonosként is befolyásolni tudja a piaci árakat és a termelt mennyiségeket, közvetett módon pedig a társadalmi jólétet. Az ilyen piacok mikroökonómiai modellezésének mára igen széleskörű szakirodalma van. Azonban továbbra is akadnak megoldatlan kérdések, melyek közül az egyikre jelen tanulmány keresi a választ.

Vegyes tulajdonosi szerkezetű oligopólium alatt egy olyan piacot értünk, ahol az egyik vállalat részbeni vagy teljes tulajdonosaként az állam is szerepet játszik a piaci árak és termelési mennyiségek meghatározásában. Az ilyen modellekben az állam célját - a társadalmi jólét maximalizálását – az eladási ár és a termelési mennyiség megfelelő megválasztásán keresztül igyekszik elérni.

Jelen tanulmányban egy olyan duopólium-modell játékelméleti elemzését végezzük el, ahol egy tisztán magánvállalat, valamint egy részben állami tulajdonú vállalat folytat termelést egy homogén jószág piacán.

A tanulmány fókuszának leszűkítése és pontosítása érdekében szükséges egy rövid szakirodalmi áttekintést tennünk a bevezetést követő fejezetben. A további szakaszok a következőképp épülnek fel: az irodalmi áttekintést követő részben leírjuk a vizsgálati keretet, megadjuk a feltételrendszert. Az ezt követő szakaszban bemutatjuk a hasonló modellek főbb eredményeit, melyek a jelen tanulmányban tárgyalt modell elhelyezése érdekében fontosak. Az 5. részt szenteljük a modell megoldásának, azaz a Nash-egyensúlyok meghatározásának a különböző döntési sorrendek esetén. A kapott eredményeket egy számpéldával illusztráljuk. Ezt követően az eredmények alapján bemutatjuk az ún. *időzítési játék* megoldását, végül pedig összegezzük a leírtakat.

Megjegyezzük, hogy a téma tárgyalása olykor erősen technikai jellegű. Jelen tanulmányban ennek ellenére a hangsúlyt az eredmények bemutatására és interpretációjára kívánjuk helyezni, a matematikai bizonyításoknak csak a vázlatát közöljük.

### Irodalmi áttekintés

A vegyes oligopóliumok működését tárgyaló irodalom a döntési változó tekintetében három csoportra osztható: a mennyiségi döntéses modelleknek (ahol a vállalatok döntési változója a termelési mennyiség) és az árdöntéses modelleknek (ahol az eladási ár a vállalatok döntési változója) egyaránt kiterjedt szakirodalma van. A harmadik csoportban az ár és a termelési mennyiség egyaránt döntési változó. A legtöbb nyitott kérdés ehhez a csoporthoz kapcsolódik. Ez a tanulmány is az utóbbi kategóriába sorolható.

Az irodalom kezdetben olyan játékokkal foglalkozott, melyekben a vállalatok döntési sorrendje előre meg volt határozva, és azt vizsgálta, hogy hogyan növelhető a társadalmi jólét egy állami vállalat belépése esetén. *Cremer (1989)* egy szimultán mennyiségi döntéses oligopol piac szabályozását vizsgálta, *DeFraja (1989)* egy vegyes, mennyiségi döntéses, homogén terméket előállító oligopóliumra megmutatja, hogy ha állami vállalat van vezető szerepben, akkor magasabb társadalmi jólét jön létre, mint szimultán döntéses vegyes vagy standard oligopol piacokon<sup>1</sup>.

*Pal (1998)* cikkében azt elemzi, hogy vegyes oligopol piacokon milyen döntési sorrend alakul ki endogén módon, más szóval az időzítési játékot vizsgálja. Lineáris keresleti függvény és állandó határköltségek mellett elemez egy olyan oligopóliumot, melyben egyetlen állami vállalat működik, A cikk fő következtetése az, hogy egy állami vállalat

---

<sup>1</sup> Az állami vállalat nélküli oligopóliumokat gyakran fogjuk standard vagy tisztán magánvállalatos esetnek nevezni, míg az állami szereplős esetre „vegyes”-ként utalunk.

megjelenése megváltoztatja az időzítési játék kimenetelét és növeli a társadalmi jólétet.<sup>2</sup> *Matsumura (2003)* enyhít a *Pal (1998)* cikkben alkalmazott lineáris keresletre és állandó határkölségekre vonatkozó feltételrendszeren. A növekvő határkölségek esetét pedig *Tomaru (2010)* vizsgálta.

Az árdöntéses vegyes oligopóliumok irodalmának egyik építőköve az *Ogawa (2006)* tanulmány. A cikk egy homogén jószág piacán kialakuló vegyes duopol szituációt vesz alapul. Azt a szimmetrikus Bertrand-duoplóliumot elemzi, melyben a vállalatoknak a teljes felmerülő keresletet ki kell elégíteniük. Lineáris kereslet és azonos kvadratikus költségfüggvények feltételezése mellett arra jut, hogy a szekvenciális esetekben egy állami szereplő megjelenése társadalmi jóléti szempontból előnyös és hátrányos is lehet, míg a szimultán esetnél a kimenetel nem változik a tisztán magánvállalatos esethez képest. Ez utóbbira az egyensúlyt *Dastidar (1995)* vezette le. *Dastidar (2011)* az *Ogawa (2006)* cikkben bemutatott eredményt kiterjeszti a csökkenő keresleti- és szigorúan konvex költségfüggvények esetére. Szintén egy friss kutatásban *Roy Chowdhury (2009)* egy árdöntéses vegyes Bertrand-duoplóliumot vizsgál (amelyben minden résztvevőnek ki kell elégítenie a felmerülő keresletet), valamint egy vegyes Fél-Bertrand<sup>3</sup> duoplóliumot is elemez (ahol csak az állami vállalat köteles a teljes felmerülő keresletet kiszolgálni). Mivel azonban a tanulmány csak a szimultán esetre koncentrált, így nem oldja meg az időzítési játékot. Érdeemes megemlítenünk még *Bárcena (2007)* cikkét, melyben a szerző heterogén jószágos vegyes árdöntéses duopol modellt vizsgál. Ebben arra az eredményre jut, hogy az időzítési játék egyensúlyában a vállalatok szimultán módon döntenek.

A *Bertrand-Edgeworth* oligopólium-modellekben az ár és a termelt mennyiség egyaránt döntési változó, a vállalatok pedig kapacitáskorlátokkal rendelkeznek, így nem képesek bármekkora felmerülő keresletet kielégíteni. Ezzel ez a modellkeret kiküszöböli a Cournot-, vagy épp a Bertrand-oligopólium modellek hiányosságait (*Tasnádi 2001*). Jelen tanulmányunkban egy homogén jószágos, kapacitáskorlátos, vegyes Bertrand-Edgeworth duoplóliumot vizsgálunk, ahol az egyik vállalat *részben állami tulajdonban* van, míg a másik vállalat teljes egészében magántulajdonban áll. A szakirodalom a vegyes Bertrand-Edgeworth duoplóliumoknak két típusát tárgyalja. Az egyik típus az ún. rendelésre történő termelés esete. Ebben egy vállalat mennyiségi döntési változójának értéke a keresleti függvény helyettesítési értékével egyezik meg azon a helyen, amekkora árat a vállalat választott. Ennek a vállalat kapacitáskorlátja szab határt. Emiatt ez az eset a gyakorlatban egy tisztán árdöntéses duoplóliummá redukálódik. Ennek a modellnek az egyensúlyai, valamint az időzítési játék megoldása abban az esetben, amikor az egyik vállalat *teljes egészében állami tulajdonú*, megtalálható a *Balogh – Tasnádi (2012)* cikkben. A másik modell típus az ún. *készletre történő termelés* esete. Ekkor a vállalatok előre döntenek az árról és az általuk kínált mennyiségről is. Ez a modellkeret például a romlandó áruk piacának elemzésére szolgál.

Részben állami tulajdonú vállalatot is szerepeltető (ún. *félíg-vegyes*) duoplóliumot először *Matsumura (1998)* vizsgálta. Feltette, hogy a részben állami tulajdonú vállalat profitfüggvénye a vállalat profitjának és a társadalmi jólétnek egy súlyozott összege, ahol a súlyok a magán- és állami tulajdon arányából adódnak. A félíg-vegyes Bertrand-Edgeworth játékot a rendelésre történő esetre *Tasnádi (2013)* tárgyalja.

Jelen tanulmányban a készletre történő termelés esetét vizsgáljuk arra az esetre, amikor az egyik vállalat *részben állami tulajdonú*. Meghatározzuk a Nash-egyensúlyi árakat és termelési mennyiségeket, valamint megoldjuk a bevezetőben több helyen említett időzítési játékot is. Eredményeinket egy számpéldán is illusztráljuk.

---

<sup>2</sup> *Pal (1998)* eredményeinek továbbgondolása, illetve azokhoz fűződő kiegészítések, megjegyzések találhatóak Jacques (2004) és Lu (2007) munkáiban.

<sup>3</sup> angolul: Semi-Bertrand duopoly

A kapacitáskorlátos, vegyes Bertrand-Edgeworth duopóliumokkal foglalkozó szakirodalom struktúráját az alábbi, 1. táblázatban szemléltetjük a könnyebb eligazodás végett.

1. táblázat: Vegyes Bertrand-Edgeworth duopólium-modellek

	Az állami vállalat teljes egészében állami tulajdonban van	Az állami vállalat csak részben van állami tulajdonban
Rendelésre történő termelés	<i>Balogh-Tasnádi (2012)</i>	<i>Tasnádi (2013)</i>
Készletre történő termelés	<i>Balogh-Tasnádi (2014) – folyamatban lévő kutatás</i>	<b>Jelen tanulmány fókusz</b>

A következő részben specifikáljuk a vizsgálandó modellt.

### A modell specifikációja

Ebben a szakaszban összefoglaljuk a fő feltevéseket és definíciókat, valamint az ezekből azonnal adódó következményeket. Két alapelvet követünk: egyrészt az irodalommal való koherencia elvét, másrészt törekszünk a minél általánosabb érvényűség fenntartására.

Előjáróban megjegyzendő, hogy a Bertrand-Edgeworth duopólium-modellben a vállalatok különböző árakat is megadhatnak, és különböző árak mellett is kialakulhat Nash-egyensúlyi pont. Ez ellentétben áll a Cournot- vagy a Bertrand-moddal, melyekben egyetlen piaci egyensúlyi ár alakul ki.

Először bevezetünk néhány, a későbbiekben gyakran használt jelölést:

- $D(p)$ -vel jelöljük a piaci keresleti függvényt
- $p^m$  jelentése: az az árszint, amely akkor állna elő, ha egy vállalat kapacitáskorlát nélküli monopolistaként viselkedne a piacon
- $D_2^r(q_1)$  jelentése: a 2-es vállalatra vonatkozó reziduális keresleti görbe, amennyiben az 1-es vállalat értékesített  $q_1$  mennyiséget ( $D_1^r(q_2)$  jelentése ugyanez, a vállalatok indexeinek felcserélésével)
- $p_2^m(q_1)$  jelentése: a 2-es vállalat  $D_2^r(q_1)$  reziduális keresleti görbéjén profitmaximalizáló árszint  $p_1^m(q_2)$  jelentése ugyanez, a vállalatok indexeinek felcserélésével)
- $q_2^m(q_1)$  jelentése: a 2-es vállalat  $D_2^r(q_1)$  reziduális keresleti görbéjén profitmaximalizáló termelési mennyiség  $q_1^m(q_2)$  jelentése ugyanez, a vállalatok indexeinek felcserélésével)
- $p_2^d(q_1)$  jelentése: az az árszint, amely mellett a 2-es vállalat teljes kapacitásának értékesítése esetén (a piaci keresleti görbén) ugyanakkora profitra tesz szert, mintha a reziduális keresleti görbén a  $p_2^m(q_1)$  áron értékesítene  $q_2^m(q_1)$  mennyiséget
- $p_1^*, q_1^*, p_2^*, q_2^*$  jelentései: a vállalatok Nash-egyensúlybeli árai és termelt mennyiségei

A modell fő feltevései a következők.

1. feltevés: A homogén jószág  $D$ -vel jelölt piaci keresleti függvénye a vízszintes (mennyiség-) tengelyt az  $a$  pontban, míg a függőleges (ár-)tengelyt a  $b$  pontban metszi. Továbbá feltesszük, hogy a  $D$  függvény szigorúan monoton csökkenő, konkáv és kétszer folytonosan differenciálható a  $(0, a)$  intervallumon. Ebből adódik, hogy a  $(0, a)$  a függvény invertálható.  $P(q)$  jelölje az inverz keresleti függvényt a  $(0, a)$  intervallumon, azaz  $P(q) = D^{-1}(q)$ .
2. feltevés: A két vállalat egy előre meghatározott és azonos mértékű, pozitív  $c \in (0, b)$  egységköltséggel termel.
3. feltevés: A két vállalat rendre  $k_1$  és  $k_2$  nagyságú kapacitáskorláttal rendelkezik.  $p^c$  jelentése: a piactisztító ár, azaz az az árszint, ahol  $D(p^c) = k_1 + k_2$ . A tanulmányban végig 1-es indexszel fogjuk jelölni az állami tulajdonrészrel rendelkező vállalatot, míg 2-essel a tisztán magánvállalatot.
4. feltevés: az 1-es számú vállalat állami tulajdonrészének aránya  $\alpha$ , maximalizálandó célfüggvénye pedig egy súlyozott összegként áll elő. Az állami tulajdonrész arányában a célfüggvény a teljes társadalmi többlet (azaz a fogyasztói többlet, valamint a két vállalat összesített termelői többletének – profitjának – összege), a magántulajdon arányában pedig kizárólag az 1-es vállalat termelői többlete (profitja). Formálisan:  $\pi_1 = \alpha(FT_1 + TT_1 + FT_2 + TT_2) + (1 - \alpha)TT_1$ , ahol a  $TT_i$  és az  $FT_i$  jelölések értelemszerűen az  $i$ -edik vállalat termelői- illetve fogyasztói többleteknek felelnek meg. A 2-es vállalat (mely tisztán magántulajdonban van) célfüggvénye a 2-es vállalat termelői többletével (profitjával) egyezik meg.
5. feltevés: a vállalatok háromféle döntési sorrendben adhatják meg az áraikat és termelési mennyiségeiket: szimultán, valamint kétféle szekvenciális sorrendben, ahol az egyik esetben az 1-es vállalat dönt először, a másik esetben pedig a 2-es vállalat.

A következő feltevések technikai jellegűek, a modell korrekt specifikációja miatt szükséges a megadásuk.

6. feltevés: a piacon az ún. hatékony adagolási szabály van érvényben. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy a magasabb áron kínáló vállalat reziduális keresleti görbéje megkapható a piaci keresleti görbe  $q^*$ -gal balra történő párhuzamos eltolásával, ahol  $q^*$  az alacsonyabb áron kínáló vállalat által termelt mennyiség. Formális jelentése pedig az, hogy a fogyasztókat rezervációs áraik csökkenő sorrendjében szolgálják ki a vállalatok.
7. feltevés: ha a két vállalat azonos árat állapít meg, akkor a fogyasztók kiszolgálásának sorrendjét a *törési szabály* adja meg. A törési szabály jelen tanulmányban a következő: azonos árak esetén a két vállalat kapacitásainak arányában osztozik a felmerülő keresleten.

A feltevések után bevezetünk néhány, a későbbiekben gyakran előforduló jelölést.

A fenti feltevések és jelölések mentén vizsgált játék forgatókönyve a következő. Szimultán döntési sorrend esetén a vállalatok egyidejűleg megadnak egy-egy  $(p_1, q_1)$ , illetve  $(p_2, q_2)$  ár-mennyiség párt, és a termelést meg is valósítják (akkor is, ha esetleg az adott áron eladhatatlan készletek keletkeznek). Szekvenciális esetben, ha az 1-es vállalat a vezető, akkor először az 1-es vállalat megad egy  $(p_1, q_1)$  párt, majd a 2-es vállalat követőként – a  $(p_1, q_1)$  pár tudatában – megad egy  $(p_2, q_2)$  párt. Fordított szekvenciális sorrend esetén a 2-es vállalat dönt előbb. Természetesen mindkét vállalat saját akcióit úgy adja meg, hogy saját célfüggvényét maximalizálja ellenfele legjobb döntését – legjobb választát – is figyelembe véve. Ha ez mindkét vállalatnak sikerül, azaz kölcsönösen legjobb válaszokat adnak egymás akcióira, akkor a játék Nash-egyensúlyba kerül.

A Cournot- és Bertrand-modellek Nash-egyensúlyait viszonylag egyszerű meghatározni, a Bertrand-Edgeworth modellek esetében ez valamivel nehezebb feladat. Ez annak tudható be, hogy a feltevések általánosabb érvényűek, mint az egyszerűbb modelleknél.

Mivel a két szereplő célfüggvénye különböző, így a játék megoldása szempontjából releváns a magánvállalat kapacitásától függő befolyásoló képessége. Ezért az egyensúlyokat tárgyaló szakaszban különböző eseteket fogunk vizsgálni annak függvényében, hogy a magánvállalat kapacitása hogyan viszonyul az állami vállalat kapacitásához és a piaci keresleti görbéhez. Bizonyos szélsőséges esetekben a játék a klasszikus Cournot ill. Bertrand-játékra redukálódik.

A Bertrand-Edgeworth duopóliumok különböző specifikációival kapcsolatos korábbi eredményeket mutatja be a következő szakasz, ami után rátérünk az előző bekezdésben leírt játék megoldására.

### Kapcsolódó eredmények

Ebben a részben a témához szorosan kapcsolódó három tanulmány eredményeit foglaljuk össze. *Deneckere és Kovenock (1992)* egy tisztán magánvállalatos (standard) Bertrand-Edgeworth duopol piacot vizsgál. *Balogh és Tasnádi (2012)* az állami szereplős Bertrand-Edgeworth duopólium egyensúlyait írja le a rendelésre történő termelés esetében, a modell azon verziójára, ahol az egyik vállalat teljes egészében állami tulajdonú. *Tasnádi (2013)* pedig ugyanennek a modellnek a megoldását mutatja be arra a verzióra, ahol az egyik vállalat csak részben állami tulajdonú.

*Deneckere és Kovenock (1992)* cikkében két tisztán magántulajdonban lévő vállalat verseng egymással. A cikk a rendelésre történő termelés esetét tárgyalja, ahol – mint azt fentebb kifejtettük – a játék egy tisztán árdöntéses helyzetű alakul. A tanulmány legfontosabb eredménye a következők.

1. Azokban az esetekben, amikor a Bertrand-Edgeworth játék nem redukálódik a klasszikus Cournot- vagy Bertrand-játékra, a játéknak szimultán döntési sorrend mellett csak kevert stratégiákon alapuló Nash-egyensúlya van, a tiszta stratégiák halmazán nem található egyensúlyi pont. Másképp fogalmazva: nem léteznek olyan  $(p_1, q_1)$  és  $(p_2, q_2)$  párok, amelyek kölcsönösen legjobb válaszok lennének.

*Deneckere és Kovenock (1992)* ugyan megadja a játék kevert egyensúlyát, de a tiszta egyensúly hiánya megkérdőjelezi az eredmények gyakorlatban történő alkalmazhatóságát.

2. Ami a szekvenciális döntési sorrendeket illeti, ezekenél létezik tiszta Nash-egyensúlyi pont is: a vállalatok a saját reziduális keresleti görbéjükre vonatkoztatott

profitmaximalizáló árakat ( $p_1^m(k_2)$  és  $p_2^m(k_1)$ ) és az ezekhez tartozó termelési mennyiségeket állapítják meg. Speciális esetekben ezen túlmenően további tiszta Nash-egyensúlyi pontok is találhatóak, de kizárólag szekvenciális döntési sorrendek esetén.

*Balogh és Tasnádi (2012)* szintén a rendelésre történő termelés esetét elemzi azzal a különbséggel, hogy az egyik vállalat tisztán állami tulajdonban van, a másik pedig tisztán magántulajdonban (a struktúra más szóval: vegyes duopólium). A tanulmány részletesen bemutatja a modell Nash-egyensúlyait, tárgyalja az időzítési játék megoldását és a társadalmi jólét kérdését is. A cikknek három fő következtetése van:

1. A *Deneckere és Kovenock (1992)* cikkben bemutatott standard esettel szemben az állami szereplős modellben minden döntési sorrend mellett létezik Nash-egyensúlyi pont a tiszta stratégiák halmazán.
2. Az időzítési játék megoldása nem egyértelmű, ugyanis minden döntési sorrend mellett a megvalósuló egyensúlyok kifizetés-ekvivalensek egymással.
3. Az állami tulajdonú szereplő piacra lépése a Nash-egyensúly szerint történő döntések esetén növeli a társadalmi jólétet a tisztán magánvállalatos helyzethez képest.

A *Tasnádi (2013)* tanulmány feltevései szerint a piacon az egyik vállalat nem teljes egészében, csak részben áll állami tulajdonban. A cikkben tárgyalt modellverzió a rendelésre történő termelés esete. A fő következtetések a következők.

1. A játéknak nem mindig létezik tiszta Nash-egyensúlya. A létezés szükséges és elégséges feltétele, hogy mindkét vállalat reziduális keresleti görbén vett profitmaximalizáló ára alacsonyabb, mint a piactisztító ár (azaz jelöléseinket használva  $\max\{p_1^m(k_2), p_2^m(k_1)\} < p^c$ ). Azonban a játéknak a paraméterektől függetlenül mindig létezik kevert stratégiákon alapuló Nash-egyensúlya.
2. Amennyiben van tiszta Nash-egyensúlyi pontja a játéknak, akkor ebben a pontban minden esetben mindkét vállalat a piactisztító árat állapítja meg.
3. A társadalmi jólét egyensúlyban alacsonyabb, mint a *Balogh és Tasnádi (2012)* bemutatott esetben, ahol az állami vállalat teljes egészében állami tulajdonban van.

A fentiek alapján látható tehát, hogy az állami tulajdon megjelenésével párhuzamosan tiszta Nash-egyensúlyi pontok is megjelennek a duopol játékban. Ez az eredmények gyakorlati alkalmazhatóságát biztosítja. A tiszta Nash-egyensúlyi pontok megjelenésével az időzítési játék is könnyebben kezelhetővé válik. Ugyancsak fontos kérdéskör, hogy az állami tulajdon megjelenése milyen irányba mozdítja az egyensúlyi társadalmi jólétet. Ez utóbbi kérdést bizonyos esetekben könnyű megválaszolni, más esetekben azonban nagyon bonyolult erre vonatkozó egzakt eredményt szolgáltatni. Annyi bizonyos, hogy a rendelésre történő termelés esetében, amennyiben tisztán állami tulajdonú szereplő lép a piacra egy magánvállalat vagy egy részben állami tulajdonú vállalat helyett, akkor meglepő eredmény születik: az egyensúlyi társadalmi jólét növekszik.

A következő szakaszokban bemutatjuk a jelen tanulmány fókuszában álló modell játékelméleti elemzését, hangsúlyosan tárgyalva a tiszta Nash-egyensúlyok létezésének kérdését, a társadalmi jólét kérdéskörét, valamint az időzítési játék megoldását.

### A modell Nash-egyensúlyai

A készletre történő termelés esete abban különbözik az előző szakaszban bemutatott modellektől, hogy a vállalatok előre döntenek egy ár-mennyiség párról, ahol a mennyiség nem feltétlenül az ár keresleti függvénybe történő helyettesítésével adódó érték. A játék tehát nem redukálódik egy tisztán árdöntéses helyzetté, így elemzése némileg bonyolultabb, mint a rendelésre történő termelés esetéé. Az alábbiakban csak az  $\alpha < 1$  esetet elemezzük, azaz kizárjuk a tisztán állami tulajdonban lévő vállalat szereplésének lehetőségét, ez utóbbiról csak említést teszünk, megjegyzésként az elemzés után. Az erre vonatkozó eredményeket a *Balogh és Tasnádi (2014)* munkaanyag tartalmazza.

A játék egyensúlyait a három lehetséges döntési sorrendre külön-külön kellene megadni, de mint látni fogjuk, az egyetlen tiszta Nash-egyensúlyi pont minden döntési sorrendre ugyanaz. A szemléletesség kedvéért az alábbiakban eltekintünk a tömör matematikai tárgyalásmódtól. A bizonyítás *Tasnádi (2013:47)* gondolatmenetéhez hasonló, annak tanulmányozása további segítséget adhat az olvasónak. A *Tasnádi (2013)* írásban szereplő bizonyítás a készletre történő termelés árdöntéseire közvetlenül alkalmazható, a termelési mennyiségekkel kapcsolatos döntésekre az alábbiakban kitérünk.

*Állítás:* Mindhárom döntési sorrendhez egyetlen tiszta Nash-egyensúlyi pont tartozik, melynek szerkezete az alábbi:

$$NEP\ 1: (p_1^*, q_1^*, p_2^*, q_2^*) = (p^c, k_1, p^c, k_2)$$

*NEP 1* egyensúlyi voltának szükséges és elégséges feltétele:  $\max\{p_1^m(k_2), p_2^m(k_1)\} \leq p^c$ , azaz mindkét vállalat reziduális keresleti görbén vett kifizetés-maximalizáló ára alacsonyabb a piactisztító árnál. Ellenkező esetben a játéknak nincs tiszta Nash-egyensúlyi pontja.

*Bizonyítás:* Három esetet vizsgálunk (*Tasnádi (2013:47)* gondolatmenetét alkalmazva): a  $p_1 = p_2$  esetet, a  $p_1 > p_2$  esetet, és a  $p_1 < p_2$  esetet. Mindhárom esetre megmutatjuk, hogy a termelési mennyiségektől függetlenül semmilyen ár-profil mellett nem alakulhat ki Nash-egyensúly, ugyanis mindig van olyan vállalat, amelyik egyoldalú ármódosítással növelni tudja kifizetését. Az egyetlen kivételként a *NEP 1* profil adódik. A bizonyítás hátralévő részében feltételezzük, hogy adva van egy termelési mennyiség-profil, és egy ár-profil. Könnyen látható, hogy amennyiben  $p_1 = p_2$ , és mindkét ár  $p^c$  felett van, akkor nem lehet a játék egyensúlyban. Ugyanis mindkét vállalat egyoldalúan növelni tudja kifizetését, ha az árát egy kicsivel csökkenti, azaz „alávág” versenytársának, így nem szorul a reziduális keresleti görbére. Ez a tény tetszőleges termelési mennyiségek mellett igaz marad. Amennyiben  $p_1 > p_2$ , akkor vagy az 1-es vállalatnak érdemes árat csökkentenie a társadalmi jólét növelése érdekében, vagy a 2-esnek árat emelnie, a profitnövelés érdekében. Ha pedig  $p_1 < p_2$ , akkor a helyzet a következő: vagy az 1-es vállalat áremeléssel a társadalmi jólét változatlanul hagyása mellett növelheti termelői többletét, így végül kifizetését is, vagy pedig a magánvállalat tud elérni árcsökkentéssel kifizetés-növekedést. Az az eset maradt ki, amikor  $p_1 = p_2$ , és mindkét árszint  $p^c$  alatt van. Ekkor nyilván mindkét vállalatnak megéri  $p^c$  árra „felugrania”, és



eladnia teljes kapacitását. A  $p_1 = p_2 = p^c$  árazás a kapacitáskorlátokon történő termelés mellett valóban Nash-egyensúlyi: innen egyik vállalat sem tud egyoldalú stratégiaváltoztatással kifizetés-növekedést elérni. A piactisztító ár alkalmazása mellett a kapacitáskorlátoknál alacsonyabb termelési mennyiséget választani pedig nyilvánvalóan irracionális. Ha azonban a  $\max\{p_1^m(k_2), p_2^m(k_1)\} \leq p^c$  feltétel nem teljesül, akkor nyilvánvaló, hogy NEP1 nem lehet Nash-egyensúlyi pont. Ezzel egyben a feltétel szükségességét és elégségességét is beláttuk.  $\square$

Sajnos – mint látható – a tiszta Nash-egyensúlyi pont létezése egy szükséges (és elégséges) feltételhez kötött, amelynek teljesülése a konkrét paraméterek (keresleti függvény, kapacitáskorlátok, költségértékek) függvénye. Így általánosságban nem mondható ki olyan állítás, hogy minden döntési sorrendre, minden lehetséges paraméter esetén létezik tiszta Nash-egyensúlyi pont.

Megjegyzendő azonban, hogy ha az 1-es vállalat teljes egészében állami tulajdonban van, akkor minden paraméter mellett létezik tiszta Nash-egyensúlyi pont, abban az esetben is, ha  $\max\{p_1^m(k_2), p_2^m(k_1)\} > p^c$ . Belátható (lásd *Balogh és Tasnádi 2014*) a következő: amennyiben  $\alpha = 1$ , akkor amellett, hogy a 2-es vállalat a reziduális keresleti görbén monopolistaként viselkedik, az állami vállalat tetszőleges  $p_1^* \in (0, p_2^d(k_1))$  áron tetszőleges  $q_1^* \in (0, k_1)$  mennyiséget értékesítve Nash-egyensúlyi akciót követ. Azonban ez a Nash-egyensúlyi pont  $\alpha < 1$  esetén eltűnik, ugyanis ekkor az 1-es vállalat egyoldalú áremeléssel növelheti kifizetését a társadalmi többlet változatlanul hagyása mellett – hiszen az  $\alpha < 1$  esetben az 1-es vállalat termelői többlete önmagában is szerepel a kifizetőfüggvényében.

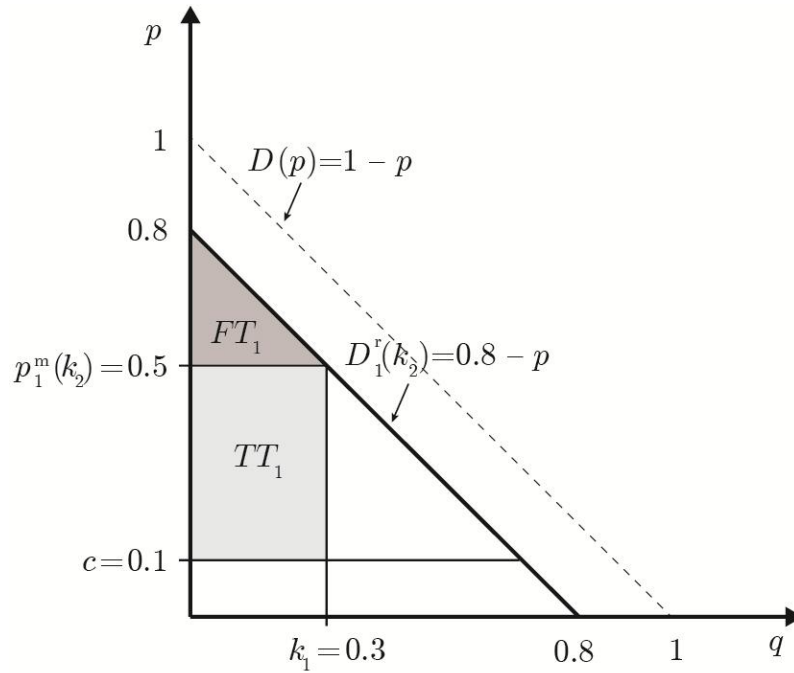
A játék kevert bővítésének ugyan létezhetnek Nash-egyensúlyai, de ezeket – mint fentebb kifejtettük – a gyakorlati alkalmazás megkérdőjelezhetősége miatt nem tárgyaljuk.

### Az eredmények illusztrálása egy számpéldán keresztül

Ebben a szakaszban egy konkrét példán keresztül bemutatjuk a játék NEP 1-gyel jelölt tiszta Nash-egyensúlyhoz tartozó lejátszását. A példa konstruálásakor fontos megvizsgálni, hogy a megadott paraméterek mellett a NEP 1 stratégiaprofil valóban egyensúlyi-e. Ehhez a NEP 1 létezésének feltételét szükséges ellenőrizni.

A példa adatai a következők. A piaci keresleti függvény:  $D(p) = 1 - p$ . Legyen továbbá  $k_1 = 0.3$ ,  $k_2 = 0.2$  és  $c = 0.1$ . Az 1. vállalat állami tulajdonrészét rögzítsük 40%-ban, azaz  $\alpha = 0.4$ . Innen egyenesen számíthatók a következő értékek:  $p_2^m(k_1) = 0.4$ ,  $q_2^m(k_1) = 0.3$  és  $p_1^m(k_2) = 0.5$ . Megjegyzendő, hogy ez utóbbi érték kiszámításakor nem az 1-es vállalat termelői többletét kell maximalizálni a reziduális keresleti görbén, hanem az 1-es vállalat kifizetését, ami a termelői többletének és a társadalmi többletnek a súlyozott összege. Ezt a számítást illusztrálja az alábbi, 1. ábra.

1. ábra:  $p_1^m(k_2)$  meghatározása



Mivel a termelői többlet nagyobb súllyal szerepel, mint a fogyasztói többlet az 1-es vállalat kifizetőfüggvényében, ezért az ábrán látható módon  $p_1^m(k_2)$  értéke a lehető legmagasabb lesz, amely mellett az 1-es vállalat értékesíteni tudja teljes kapacitását.

Könnnyen ellenőrizhető, hogy a megadott paraméterek mellett *A modell specifikációja* című szakasz feltevései fennállnak. Az adatokból a piactisztító ár is közvetlenül számolható:  $p^c = 0.5$ .

A *NEP 1* stratégiaprofilban szereplő árak és mennyiségek a következők:

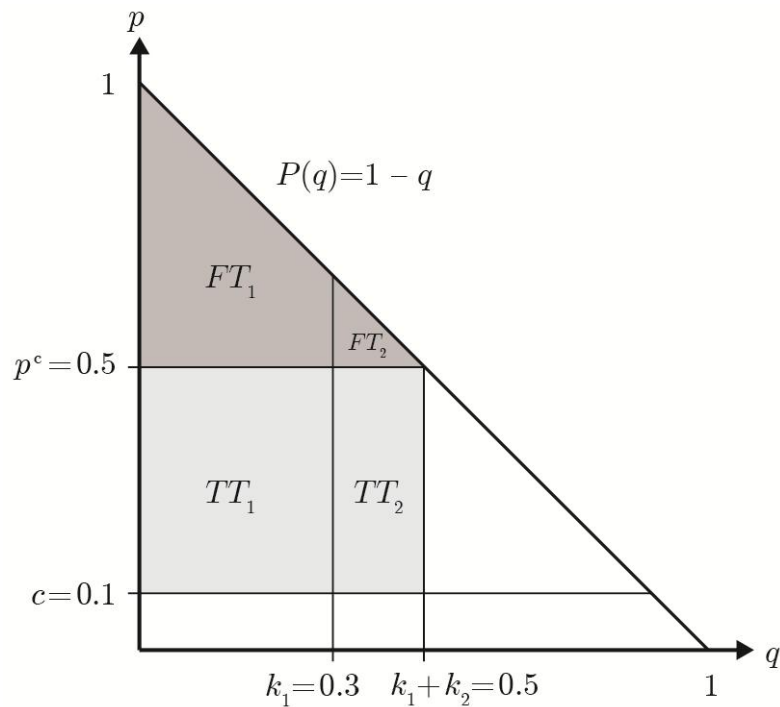
$$p_1^* = p^c = 0.5; q_1^* = k_1 = 0.3; p_2^* = p^c = 0.5; q_2^* = k_2 = 0.2$$

Ahhoz, hogy meggyőződjünk *NEP 1* Nash-egyensúlyi voltáról, ellenőrizni kell az ehhez tartozó külön feltételt, miszerint  $\max\{p_1^m(k_2), p_2^m(k_1)\} \leq p^c$ . Ez a fenti szám adatok alapján fennáll, tehát *NEP 1* valóban Nash-egyensúlyi pont a tiszta stratégiák halmazán.

A stratégiaprofil elemein túl a vállalatok kifizetéseit is meghatározzuk. Ezek a kifizetőfüggvények helyettesítési értékei az egyensúlyi pont által megadott helyen. Ez alapján  $\pi_1 = 0.22$ ,  $\pi_2 = 0.08$ . Az össztársadalmi jólét értéke 0.37.

A vállalatok döntéseit és a kifizetéseket az alábbi, 2. ábra illusztrálja.

2. ábra: a vállalatok döntései a *NEP 1* stratégiaprofil választása esetén



Megjegyzendő, hogy *NEP I* egyensúlyi voltának feltétele – mint ahogy azt korábban jeleztük – nem teljesül tetszőleges paraméter-kombinációkra. Jelen esetben például ellenőrizhető, hogy amennyiben az 1-es vállalat kapacitása  $k_1 > 0.7$  értékre nő, akkor  $p_2^m(k_1) > p^c$  adódik. Azaz ekkor a Nash-egyensúly feltétele már nem áll fenn, így a játéknak ebben az esetben nincs tiszta Nash-egyensúlyi pontja.

### Az időzítési játék megoldása

Az időzítési játék megoldása azt jelenti, hogy megállapítjuk, a különböző exogén döntési sorrendek Nash.-egyensúlyai alapján milyen döntési sorrend alakulna ki endogén módon a piacon, azaz akkor, ha a szereplők magukra lennének hagyva.

Mivel a vizsgált játéknak döntési sorrendtől függetlenül csak egyetlen tiszta Nash-egyensúlyi pontja lehet, ezért az időzítési játék megoldása igen egyszerűvé válik: ha a paraméterek függvényében létezik a fentebb *NEP I* néven definiált Nash-egyensúly, akkor az időzítési játékban mindhárom döntési sorrend egyensúlyi.

### Összefoglalás

Tanulmányunkban a vegyes Bertrand-Edgeworth duopóliumok egyik változatának elemzését végeztük el. Vizsgálatunkat az a tény motiválta, hogy számos gyakorlati szituációban jelenik meg állami tulajdonrész oligopol piacokon.

A vizsgált modellben egy részben állami tulajdonú és egy teljes egészében magántulajdonú vállalat verseng egy homogén termék piacán. A termelés feltevéseink szerint készletre történik.

Munkánkban tárgyaltuk a kapcsolódó szakirodalom fontosabb eredményeit is, ezzel az olvasó egy szélesebb képet kaphatott a témában lezajlott és jelenleg is folyamatban lévő kutatásokról.

A tanulmány legfőbb eredménye a vizsgált modell egyetlen, tiszta stratégiákon alapuló Nash-egyensúlyának bemutatása, valamint a tiszta Nash-egyensúly létezéséhez kapcsolódó feltétel megadása. A leírtak alapján látható, hogy a modellnek nem mindig létezik tiszta Nash-egyensúlya, a létezés a paraméterek függvénye. Az eredményt egy számpéldával is illusztráltuk.

A vegyes oligopol piaci szerkezeteknek az egzakt játékelméleti elemzése adott esetben igen bonyolult feladat, ezért csak jól felépített feltételrendszerrel lehet eredményt elérni. Számos nyitott kérdés található még ezen a területen: ilyen a kevert egyensúlyok kérdéskörére a modellben, valamint a társadalmi jólét összehasonlítása a hasonló modellekkel. Kézenfekvő kérdés az is, hogy mi történik a kettőnél több szereplős vegyes tulajdonosi szerkezetű oligopóliumok esetén. A vállalatok számának növelésével az oligopol modellek elemzése azonban igen nehézkesé válik, így ezen a téren eredmények csak szigorúbb feltételrendszer (pl. lineáris keresleti függvény) mellett várhatók a közeljövőben.

### Hivatkozások

- Balogh Tamás László - Tasnádi Attila. (2012): *Does timing of decisions in a mixed duopoly matter?* Journal of Economics (Zeitschrift für Nationalökonomie), 106: 233—249. o.
- Balogh Tamás László – Tasnádi Attila (2014): *Mixed duopolies with advance production*, munkatanulmány
- Barcena-Ruiz, J.C. (2007): *Endogenous timing in a mixed duopoly: Price competition*. Journal of Economics (Zeitschrift für Nationalökonomie) 91: 263-272. o.
- Cremer, H. – Marchand, M. – Thisse, J. (1989): *The public firm as an instrument for regulating an oligopolistic market*. Oxford Economic Papers 41: 283-301. o.
- Dastidar, K.G. (1995): *On the existence of pure strategy bertrand equilibrium*. Economic Theory 5: 19-32. o.
- Dastidar, K. G. – Sinha, U. (2011): *Price competition in a mixed duopoly*. In: Dastidar, K.G. – Mukhopadhyay, H. – Sinha, U. (szerk.): *Dimensions of Economic Theory and Policy: Essays for Anjan Mukherji*, Oxford University Press, New Delhi
- DeFraja, G. – Delbono, F. (1989): *Alternative strategies of a public enterprise in oligopoly*. Oxford Economic Papers 41: 302-311. o.
- Deneckere, R. – Kovenock, D. (1992): *Price leadership*. Review of Economic Studies 59: 143-162. o.
- Jacques, A. (2004): *Endogenous timing in a mixed oligopoly: a forgotten equilibrium*. Economics Letters 83: 147-148. o.
- Lu ,Y. (2007): *Endogenous timing in a mixed oligopoly: Another forgotten equilibrium*. Economics Letters 94: 226-227.
- Matsumura, T. (1998): *Partial privatization in mixed duopoly*. Journal of Public Economics 70: 473-483. o.
- Matsumura, T. (2003): *Endogenous role in mixed markets: a two production period model*. Southern Economic Journal 70: 403-413. o.
- Ogawa, A. – Kato, K. (2006): *Price competition in a mixed duopoly*. Economics Bulletin 12: 1-5. o.
- Pal, D. (1998): *Endogenous timing in a mixed oligopoly*. Economics Letters 61: 181-185. o.
- Roy Chowdhury, P. (2009): *Mixed duopoly with price competition*. Munich Personal RePEc Archive, MPRA Paper No 9220
- Tasnádi Attila (2001): *A Bertrand-Edgeworth-oligopóliumok*. Közgazdasági Szemle 48 (12): 1081–1092. o.
- Tasnádi Attila (2013): *Duopólium részben állami tulajdonú vállalattal*. In: Matematikai közgazdaságtan: elmélet, modellezés, oktatás - Tanulmányok Zalai Ernőnek. Műszaki Könyvkiadó, 177-186. o.
- Tomaru ,Y. – Kiyono, K. (2010): *Endogenous timing in mixed duopoly with increasing marginal costs*. Journal of Institutional and Theoretical Economics 166: 591-613. o.