Bácsó Sándor – Papp Ildikó

Ciklográfia példatár

Debrecen
2006

Tartalomjegyzék

Bevezetés 2
A ciklografikus leképezés rövid áttekintése 3
Feladatok 8
A lineáris nullsor 29
Feladatok: 29
Apollóniusz feladatának ciklografikus megoldása 35
Feladatok 41
Apollóniusz feladatának általánosítása: adott kört merőlegesen vagy diametrálisan metsző körök keresése 51
Feladatok 53
Az Apollóniusz-feladat további általánosítása: egy ciklust tetszőleges valós vagy képzetes szögben metsző ciklusok keresése 68
Feladatok 72
A ciklografikus leképezés általánosításának lehetőségei 101
  A képsík változtatásával nyert általánosítási lehetőségek: 101
  Feladatok 103
  A vetítő alakzat változtatásával nyert általánosítási lehetőségek: 114
  Feladatok 122

Bevezetés

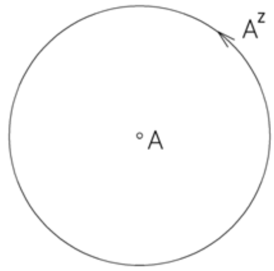
A ciklografikus leképezés segítségével sok olyan síkmértani problémát meg lehet oldani, amelynek a megoldása a síkban nehéz volna, így a feladatot térbeli alakzatok segítségével oldjuk meg, majd a megoldást visszatranszformáljuk a síkra. Ilyen síkmértani probléma volt például Apollóniusz (i.e.260?-190?) feladata. Adott a síkban három kör, amelyek mindegyike helyettesíthető egyenessel vagy ponttal is, és szerkesztendő az a kör, mely a három adott alakzatot érinti. Ez a feladat a ciklografikus leképezés ismeretében egyszerűen megoldható. Ehhez a feladathoz hasonló a következő probléma is. Adott három párhuzamos tengelyű parabola. Szerkesztendő az adott parabolákat érintő parabola. Ezt a feladatot akkor tudjuk megoldani, ha megvizsgáljuk, milyen általánosítási lehetőségei vannak a ciklográfiának.

Az olvasó egy feladatgyűjteményt tart a kézében, de az egyes fejezetek előtt rövid áttekintést is adunk a fejezet elméleti anyagából. Az érdeklődők részletesebb leírást J. Z. Krames: Die Zyklographie című munkájában találnak.

A feladatok bemutatása során feltételezzük, hogy az olvasó a kótás projekció alapvető szerkesztéseivel tisztában van.

A ciklografikus leképezés rövid áttekintése

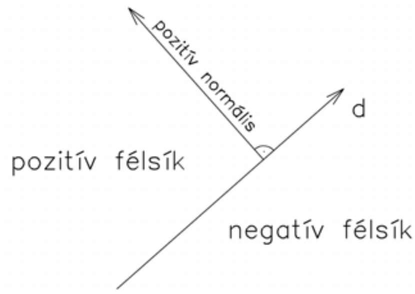
A ciklográfia a nem lineáris leképezések egyik fajtája, amely a tér pontjai, és a sík irányított körei között létesít egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. A ciklográfiában a rajz síkja bármely körének a térben az a pont felel meg, amely a kör középpontjában a rajz síkjára emelt merőlegesen van, a kör középpontjától sugárnyi távolságban. Így minden körnek két pont felel meg, a rajz síkjának két különböző oldalán. Az egyértelműség kedvéért a kört pozitív (óramutató járásával ellentétes) vagy negatív (óramutató járásával megegyező) irányítással látjuk el, aszerint, hogy a neki megfelelő pont a rajz síkja felett vagy alatt helyezkedik el. Az irányított köröket Laguerre nyomán **ciklus**nak nevezzük. A képsík irányított egyeneseit **dárdá**nak hívjuk. Ez felfogható végtelen sugarú ciklusként is. A pontot nulla sugarú ciklusként kell kezelnünk.



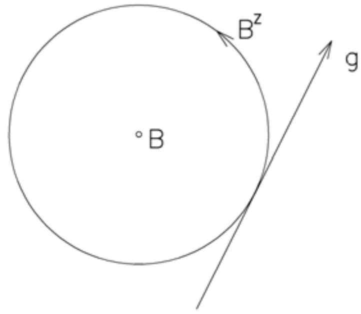
Minden ciklusra és a neki megfelelő térbeli pontra egy 45°-os félnyílásszögű forgáskúp illeszthető. Ezt a kúpot **C-kúp**nak nevezzük.

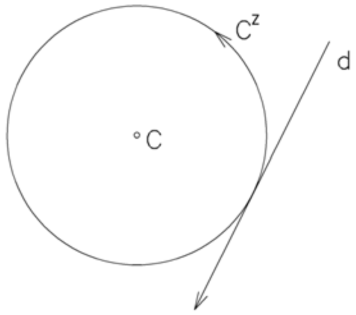
Egy **dárda pozitív normálisá**nak a dárda egy pontjából kiinduló azon félegyenest nevezzük, melybe az adott dárdát a közös pont körül pozitív forgásiránnyal forgathatjuk be és a normális merőleges a dárdára.

A dárda a síkot két félsíkra osztja. Amelyik a pozitív normálisokat tartalmazza azt pozitív félsíknak nevezzük. A ciklushoz hasonló módon a dárdára 45°-os dőlésszögű síkokat illeszthetünk. A két ilyen sík közül azt, amelyre igaz, hogy a képsík fölött lévő pontjainak a merőleges vetületei a dárda által meghatározott pozitív félsíkra esnek, a dárdához tartozó C-síknak hívjuk.



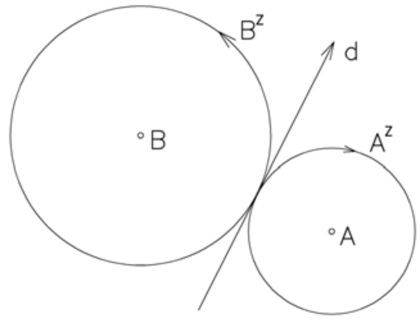
Egy **ciklus érintő dárdája** az a dárda, melynek e ciklussal egyetlen közös pontja van, és a közös pontban a ciklus és az egyenes irányítása megegyezik.





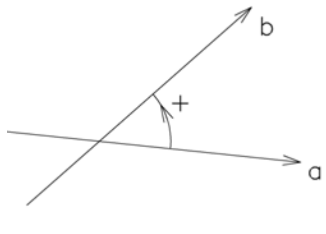
Az a dárda, melynek az irányítása nem egyezik meg a közös pontban a ciklus irányításával, nem valódi érintő.

Két ciklus érinti egymást, ha a hozzájuk tartozó köröknek egyetlen közös pontja van és a közös pontban közös a ciklusok érintődárdája.

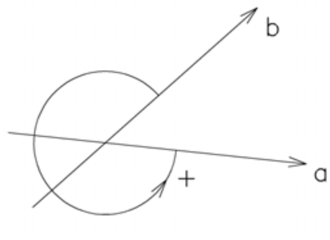


Két dárda szögének értelmezése

Irányított szögekkel fogunk dolgozni. Két dárda hajlásszöge alatt az első félegyenesnek a második félegyenesbe, pozitív forgásiránnyal történő beforgatása által előállt szögtartományt értjük. (A félegyenesek a metszéspontjukból a dárdák irányításával vannak meghatározva.) Két dárda szöge 0° és 360° közötti érték lehet, két dárdát párhuzamosnak tekintünk, ha tartóegyeneseik párhuzamosak és a dárdák irányítása megegyezik. Ha két dárda tartóegyenesei párhuzamosak, de az irányításuk ellentétes, akkora két dárda szöge 180°.



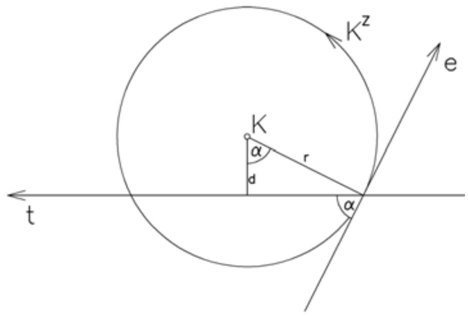
$(a,b)\sphericalangle$



$(b,a)\sphericalangle$

Egy dárda és egy ciklus szögének értelmezése

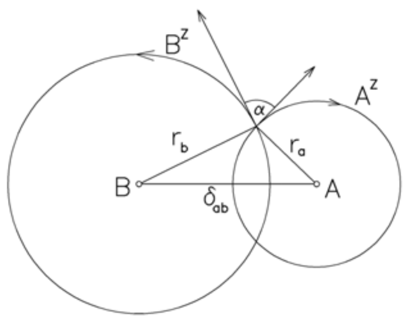
Dárda és ciklus szögét egyenes és kör szögének koszinuszával értelmezzük az egyértelműség miatt. Egyenes és kör szöge alatt a körhöz a közös pontban húzott érintő és az adott egyenes szögét értjük. Így $\cos\alpha = \mathrm{ctg}\,\varphi = \frac{d}{r}$, ahol α az egyenes és a kör szöge, φ a t nyomvonalú sík képsíkszöge, K^Z ezen sík egy pontjának ciklografikus képe. Ebből következik, hogy egy sík pontjainak ciklografikus képei ugyanolyan szög alatt metszik a sík nyomvonalát. Ehhez hasonlóan dárda és ciklus képzetes szög alatt való metszését is értelmezhetjük.



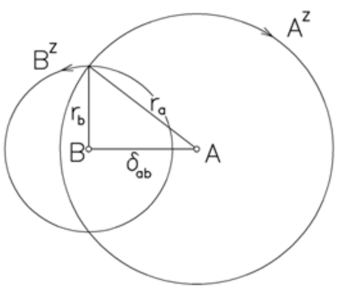
Két ciklus szögének értelmezése

Két ciklus szögén a metszéspontjukban a ciklusokhoz húzott érintődárdák szögét értjük. Két ciklus szögének koszinuszára a következő összefüggés adódik:

$$\cos\alpha = \frac{r_a^2 + r_b^2 - \delta_{ab}^2}{2 r_a r_b}$$



Ehhez a koszinusztételt használtuk fel és a háromszög oldalainak hosszát előjeleseknek tekintettük.



Ha az A^Z sugara valós, B^Z sugara képzetes és a két ciklus szöge 90°, akkor $\cos 90° = 0$ miatt

$$r_a^2 + (i \cdot r_b)^2 - \delta_{ab}^2 = 0$$

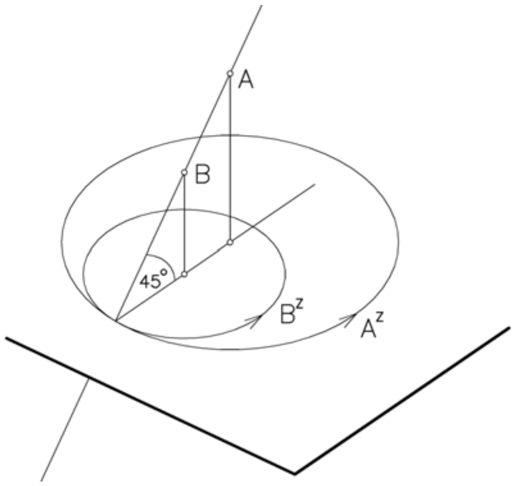
Ebből következik, hogy ha egy valós kör egy képzetes kört merőlegesen metsz, akkor az a valós kör a képzetes kör valós reprezentánsát átellenes pontokban metszi.

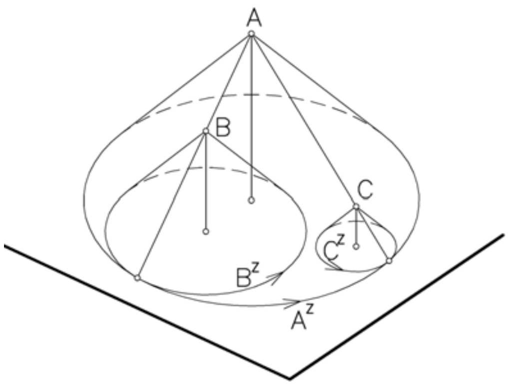
Itt is kiterjesztjük két ciklus hajlásszögét arra az esetre is, amikor a két ciklusnak nincs közös pontja.

Fontos szerepet játszik még az egyenes és a sík ciklografikus képe. Az egyenes ciklografikus képét **lineáris ciklussor**nak nevezzük. Az egyenes képsíkra eső merőleges vetülete a lineáris ciklussor tengelye, a képsíkkal való döféspontja a lineáris ciklussor nullciklusa. A sík ciklografikus képét **lineáris cikluskongruenciá**nak nevezzük. A sík nyomvonala a lineáris cikluskongruencia tengelye.

1.tétel :

Egy C-alkotó bármely két pontjának ciklografikus képei egymást érintő ciklusok. Két érintkező ciklushoz tartozó térbeli pontok egy C-alkotót határoznak meg.



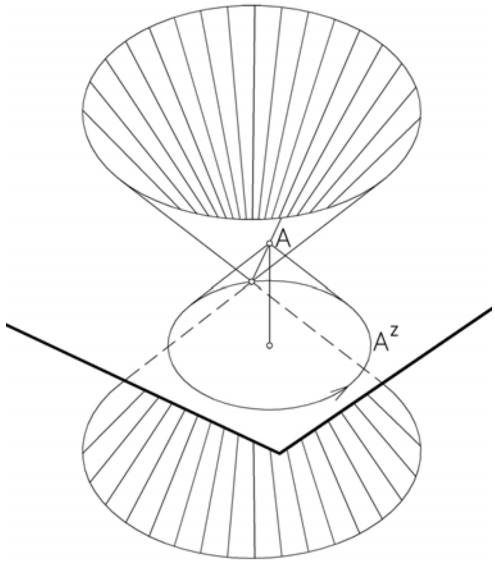


2.tétel:

Az A^z ciklust érintő ciklusokhoz tartozó térbeli pontok az A pontot vetítő kúpfelületen vannak.

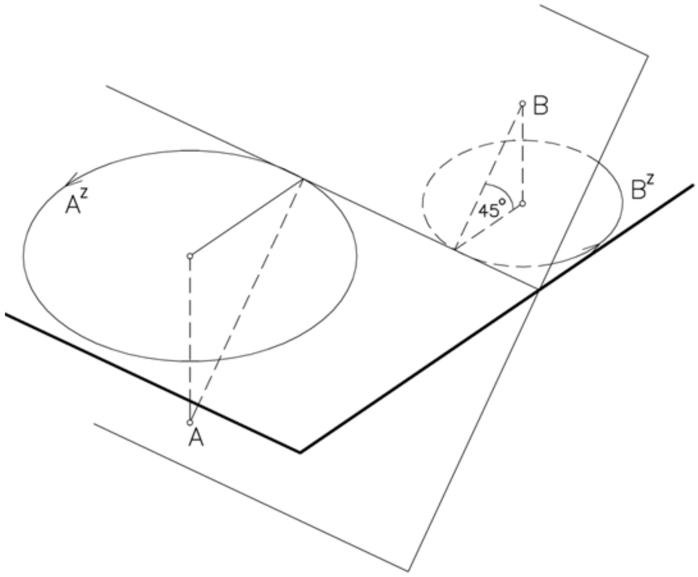
3. tétel:

A képeik egy adott pontján átmenő ciklusok a ponthoz tartozó C-kúp pontjainak ciklografikus képei.



4. tétel :

A C-sík pontjainak ciklografikus képei a C-síkhoz tartozó dárda érintőciklusai.



A tételek megfordítva is igazak.

Feladatok

1) Mi azon pontok mértani helye a térben, melyek ciklografikus képei
   a) két adott dárdát
   b) egy adott dárdát és egy ciklust
   c) két adott ciklust

   érintenek?

Megoldás:

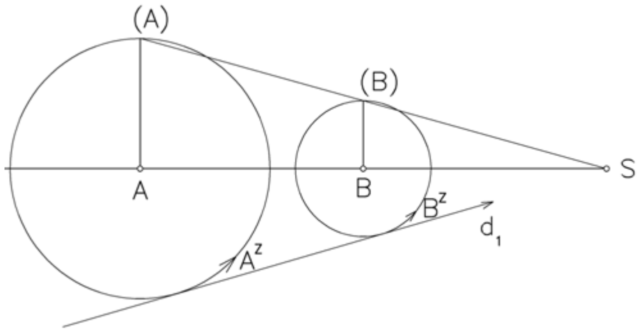
a) A két adott dárdára, mint nyomvonalra illeszthető egy-egy C-sík metszésvonalának ciklografikus képe a kívánt tulajdonsággal rendelkezik. A megoldás tehát egy egyenes.
b) Az adott dárdához tartozó C-sík és az adott ciklushoz tartozó C-kúp áthatása, azaz egy másodrendű görbe a mértani hely.
c) A két adott ciklushoz tartozó két C-kúp áthatásának ciklografikus képei adják a megoldást. Két másodrendű felület áthatása negyedrendű görbe, de mivel minden C-kúp ugyanabban a C-körben metszi a végtelen távoli síkot, ezért a végesben egy másodrendű görbe lesz a két C-kúp áthatása.

2. Adott két ciklus. Hol vannak azok a ciklusok, amelyekhez tartozó térbeli pontok a két adott ciklushoz tartozó pont összekötő egyenesére illeszkednek?

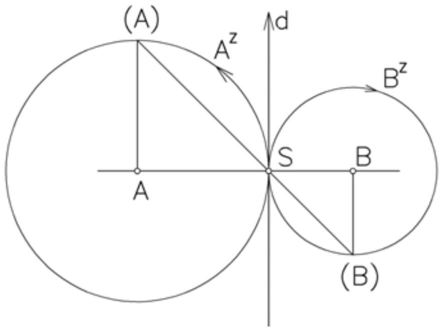
Megoldás:

A ciklusok középpontjai az eredeti két ciklus centrálisán lehetnek. Legyen a térbeli egyenesnek a rajz síkjával való döféspontja S. Az azonos irányítású köröknek az S közös külső hasonlósági pontja, míg az ellentétes irányításúaknak S a közös belső hasonlósági pontja.

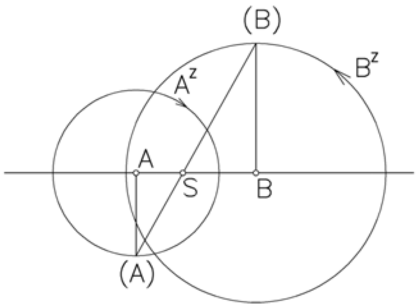
Három esetet különböztethetünk meg aszerint, hogy a két pontot összekötő egyenes képsíkszöge 45°-nál kisebb, egyenlő vele, nagyobb annál. Az első esetben az egyenes S döféspontjából a ciklusokhoz közös érintők húzhatók. Egy-egy ilyen érintő g térbeli egyenessel egy-egy síkot határoz meg.



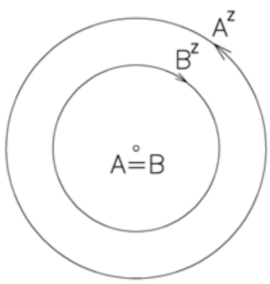
E síkok a térbeli egyenes összes pontjaihoz tartozó vetítőkúpoknak közös érintősíkjai. Ha az egyenesnek a rajz síkjával alkotott szöge 45º-os, akkor az egyenes pontjaihoz tartozó körök az S pontban érintik egymást. A vetítőkúpoknak csak egy közös érintősíkja van. Ennek a rajz síkjával való metszésvonala a körök egyetlen közös érintője.



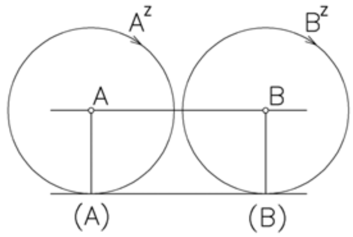
Ha a térbeli egyenes a rajz síkjával 45°-nál nagyobb szöget zárnak be, akkor a közös hasonlósági pont a ciklusokon belül van, így sem közös érintők, sem közös érintősíkok nincsenek.



Koncentrikus köröknek olyan egyenes felel meg, amely a rajz síkjára a ciklusok középpontjában merőleges.



Két egyenlő sugarú, azonos irányítású ciklusnak két olyan pont felel meg, amelyek összekötő egyenese párhuzamos a képsíkkal. Ekkor minden ciklus sugara és irányítása megegyezik.



3) A tér egy általános helyzetű síkja pontjainak milyen ciklusok felelnek meg a képsíkon?

Megoldás:

Itt szintén három esetet kell megkülönböztetnünk aszerint, hogy a síknak a képsíkkal alkotott képsíkszöge 45°-nál nagyobb, egyenlő vele, vagy kisebb nála. Ha a sík képsíkszöge 45°, akkor a sík bármely pontjának megfelelő ciklust érinti a síknak a rajz síkjával való metszésvonala, hiszen a ciklus középpontjának a térbeli ponttól való távolsága egyenlő a ciklus középpontjának a két sík metszésvonalától való távolságával.

Ha a sík képsíkszöge 45°-nál kisebb, akkor a síknak a képsíkkal való metszésvonala a sík pontjainak megfelelő ciklusokat nem metszi.

Ha a sík képsíkszöge 45°-nál nagyobb, akkor a síknak a képsíkkal való metszésvonala a sík pontjainak megfelelő ciklusokat metszi.

A sík bármely két pontjához tartozó ciklusok hasonlósági pontja illeszkedik a sík képsíkkal való metszésvonalára.

Ha olyan sík pontjait ábrázoljuk ciklusokkal, amely sík a rajz síkjával párhuzamos, akkor egyenlő sugarú és azonos irányítású ciklusokat kapunk.

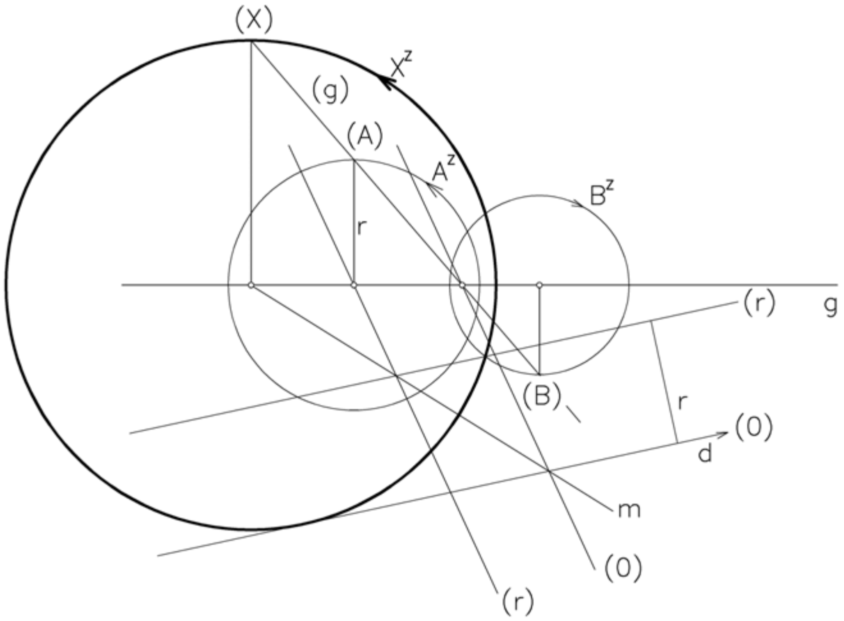
Ha olyan sík pontjait ábrázoljuk ciklusokkal, amely sík merőleges a rajz síkjára, akkor ezeknek olyan ciklusok felelnek meg, melyek középpontja a sík és a képsík metszésvonalán van, sugara és irányítása tetszőleges.

4) Adott két, valós közös érintődárdával nem rendelkező ciklus: A^Z és B^Z, valamint egy d dárda. Szerkesztendő az A^Z és B^Z által alkotott lineáris ciklussor azon X^Z eleme, amely érinti a d dárdát.

Megoldás:

A d dárdához tartozó C-sík pontjainak képei a d dárdát érintő ciklusok, tehát megfelelnek a második feltételnek.

Az A^Z és B^Z által alkotott lineáris ciklussornak a térben megfelel egy egyenes. Ezen egyenes és sík döféspontjának a ciklografikus képe kielégíti a feladat mindkét feltételét. A döféspontot az egyenesre illesztett segédsík felhasználásával kerestük meg. (1. ábra)

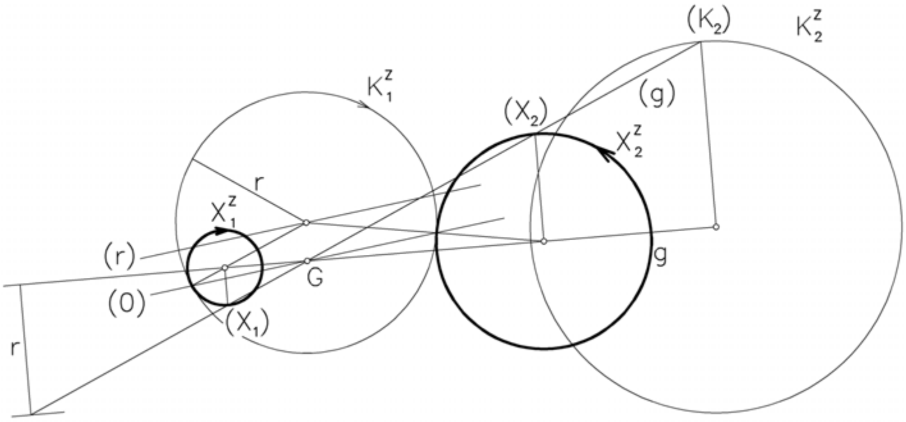


1. ábra

5) Adott két ciklus: K_1^Z és K_2^Z és egy G pont. Szerkesztendők azok az X^Z ciklusok, amelyek K_1^Z-t érintik, K_2^Z-vel a hasonlósági pontjuk G.

Megoldás

A keresett ciklusok a K_2^Z ciklus és a G pont által alkotott lineáris ciklussor elemei. Ennek a térben egy G nyompontú és a K_2^Z-nek megfelelő pontra illeszkedő egyenes felel meg. A K_1^Z-t érintő ciklusoknak a térben a K_1^Z-hez tartozó C-kúp pontjai felelnek meg. A keresett X_1^Z és X_2^Z ciklusok ezen egyenes és C-kúp döféspontjainak ciklografikus képei. A döféspontokat az egyenesre és a C-kúp csúcsára illesztett sík segítségével kerestük meg. (2.ábra)

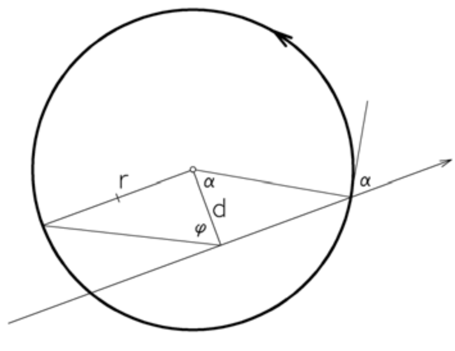


2. ábra

6) Szerkesztendő egy adott t dárdát $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ szög alatt metsző ciklus.

Megoldás

A $\cos\alpha = \mathrm{ctg}\varphi = \frac{1}{2}$ összefüggés alapján X^Z egy megoldása a feladatnak. A feladatnak végtelensok megoldása van, mivel a t dárda és az R^Z ciklushoz tartozó térbeli pont által meghatározott sík minden pontjának ciklografikus képe a kívánt tulajdonsággal rendelkezik. (3. ábra)



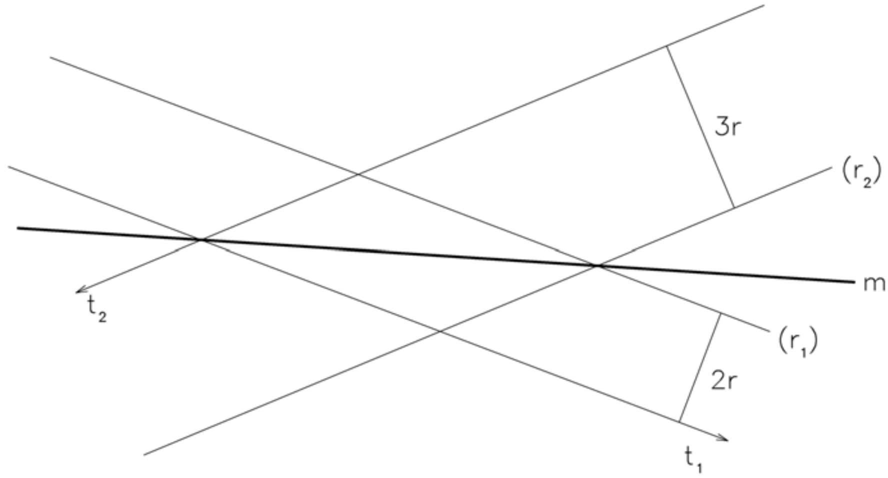
3. ábra

7) Adott két dárda: t_1 és t_2 . Keressük azokat a ciklusokat, melyeknek a dárdákkal bezárt szögei koszinuszainak az aránya adott: $\cos\alpha_1 : \cos\alpha_2 = 2:3$.

Megoldás

A t_1 dárdát $\cos\alpha_1 = 2$ szög alatt metsző ciklusok egy t_1 nyomvonalú, $\mathrm{ctg}\varphi_1 = 2$ képsíkszögű síkot határoznak meg. Ugyanígy tartozik a t_2 dárdához egy t_2 nyomvonalú, $\mathrm{ctg}\varphi_2 = 3$ képsíkszögű sík. A két sík m metszésvonalának ciklografikus képei kielégítik a feladat feltételeit. Megfigyelhetjük még, hogy $\cos\alpha_1 : \cos\alpha_2 = \frac{p_1}{r} : \frac{p_2}{r}$ miatt a feladat feltételeinek minden olyan kör eleget tesz, melynek középpontja az m egyenesre illeszkedik, sugara tetszőleges lehet. Ebből következik:

Azok a ciklusok, melyeknek három adott dárdával bezárt szögeik koszinuszainak az aránya előre adott, egy koncentrikus ciklussort alkotnak. (4. ábra)

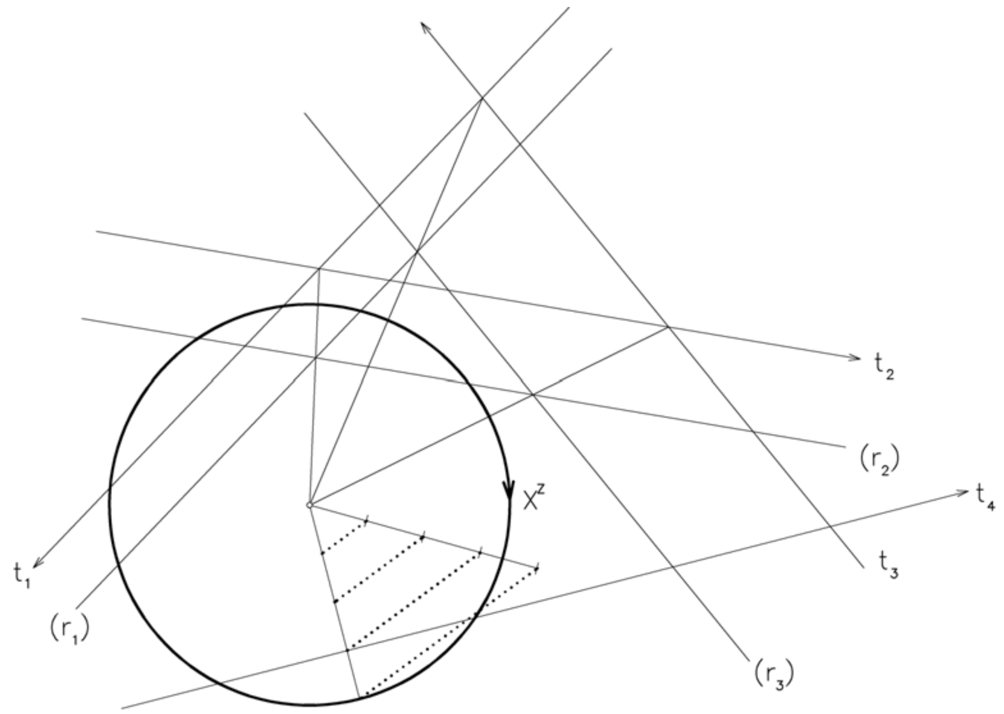


4. ábra

8) Adott négy dárda: t_1, t_2, t_3 és t_4. Szerkesszük meg azt a ciklust, melyre $\cos\alpha_1 : \cos\alpha_2 : \cos\alpha_3 = 2 : (-3) : 5$ és $\cos\alpha_4 = -\frac{3}{4}$!

Megoldás

Az előző feladat szerint az első feltételnek egy koncentrikus ciklussor felel meg. Ezek középpontját megkapjuk a $\cos\alpha_1 = 2$, $\cos\alpha_2 = -3$ és $\cos\alpha_3 = 5$ feltételt kielégítő síkok metszéspontjaként. A feladat mindkét feltételének eleget tévő ciklus sugarát a $\cos\alpha_4 = -\frac{3}{4}$ határozza meg. (5. ábra)

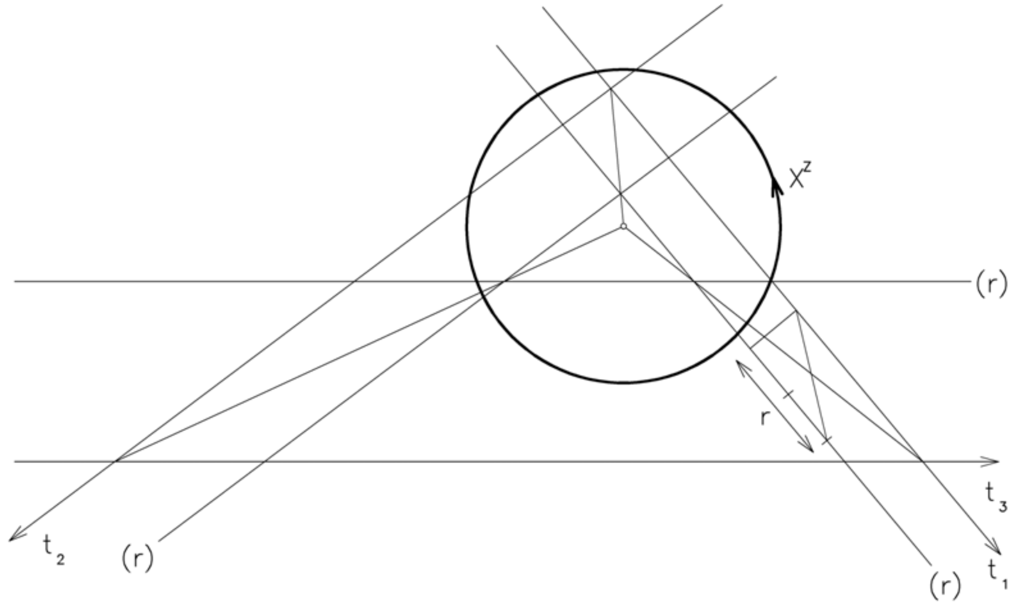


5. ábra

9) Adott három dárda. Szerkesztendő olyan ciklus, mely ezeket adott koszinuszú szögek alatt metszi: $\cos\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha_2 = \frac{3}{4}$, $\cos\alpha_3 = \frac{3}{2}$.

Megoldás:

A három dárdához tartozó három sík közös pontjának ciklografikus képe adja a megoldást. (6.ábra)

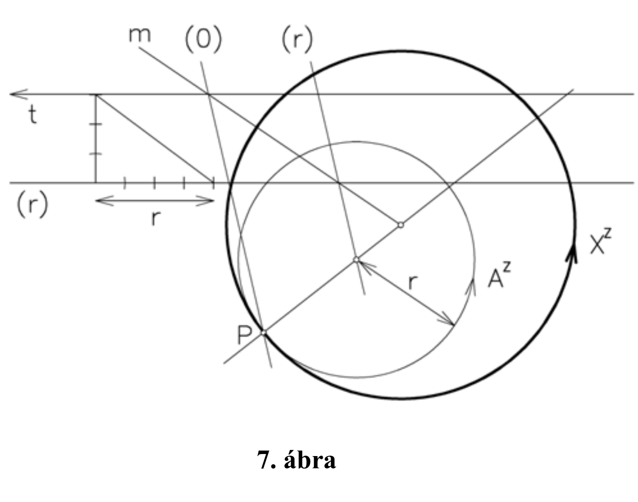


6. ábra

10) Adott egy A^Z ciklus, rajta egy P pont és adott egy t dárda. Szerkesztendő olyan ciklus, amely az A^Z ciklust P-ben érinti, a t dárdát pedig $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ szög alatt metszi.

Megoldás:

Az A^Z ciklushoz tartozó C-kúp P pontba futó alkotójának ciklografikus képe olyan lineáris ciklussor, amelynek minden eleme a P pontban érinti az A^Z ciklust. A $\cos\alpha = \text{ctg}\varphi$ összefüggésből meghatározható a t dárdára illeszkedő, a feltételnek megfelelő sík képsíkszöge. Ezen sík és az említett kúpalkotó metszésének ciklografikus képes az X^Z ciklus a megoldás. (7.ábra)

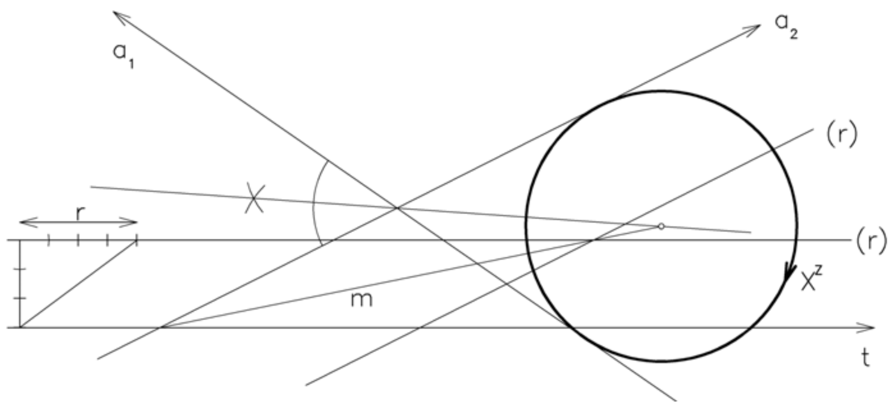


7. ábra

11) Adott egy lineáris ciklussor az elemeihez tartozó közös érintődárdákkal, és egy t dárda. Szerkesztendő a lineáris ciklussor azon eleme, mely a t dárdát adott koszinuszú szög alatt metszi: $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$.

Megoldás:

A lineáris ciklussorhoz tartozó egyenes és a t dárdára helyezett adott képsíkszögű sík döféspontjának ciklografikus képe, X^Z adja a megoldást. (8.ábra)

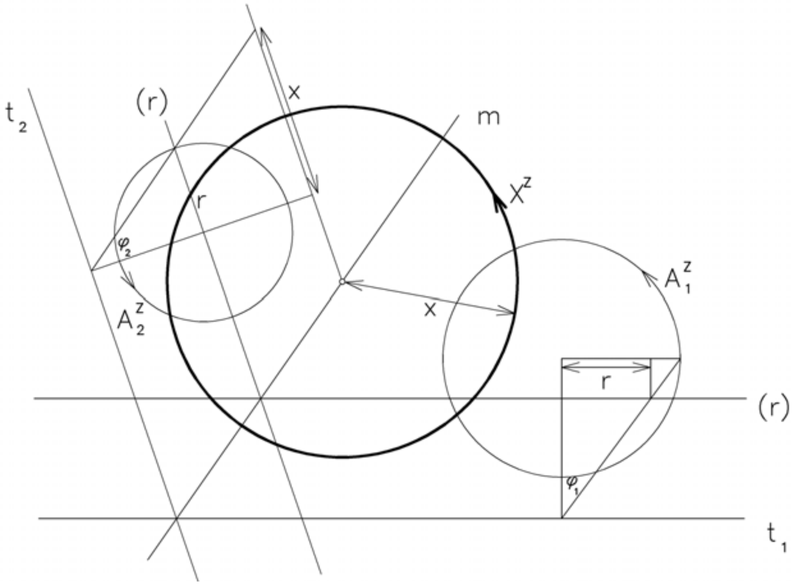


8. ábra

12) Adott két lineáris cikluskongruencia a t_1, t_2 tengelyükkel és az A_1^Z, A_2^Z ciklusukkal. Szerkesztendők azok a ciklusok, melyek mindkét lineáris cikluskongruenciához hozzátartoznak.

Megoldás

A két lineáris cikluskongruenciához tartozó két sík metszésvonalának ciklografikus képe, azaz egy lineáris ciklussor a megoldás. A lineáris ciklussor nullciklusa a t_1 és t_2 tengelyek metszéspontja. Ez a pont és a két sík azonos magasságban lévő egy-egy szintvonalának metszéspontja meghatározza a keresett lineáris ciklussort. A ciklussornak egy tetszőleges eleme X^Z. (9.ábra)

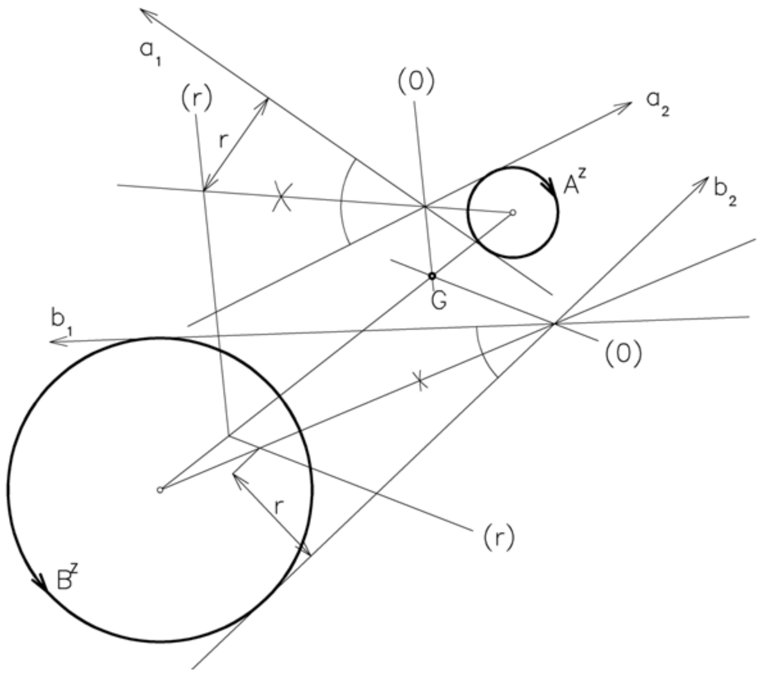


9. ábra

13) Adott két nem konciklikus dárdapár (a hozzájuk tartozó lineáris ciklussoroknak sincs közös elemük): a_1, a_2 és b_1, b_2, valamint egy G pont. Szerkesztendők az A^Z és B^Z ciklusok, amelyek érintik az a_1, a_2 illetve a b_1, b_2 dárdákat és közös hasonlósági pontjuk az adott G pont.

Megoldás

A térbeli feladat két kitérő egyenes-adott ponton áthaladó transzverzálisának a meghatározása. Az adott pontra és egy-egy egyenesre illeszkedő két sík metszésvonala a keresett transzverzális. A transzverzálisnak az egyenesekkel való közös pontjai adják a megoldást. (10.ábra)

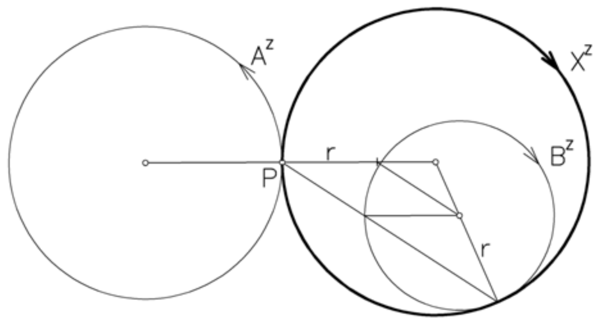


10. ábra

14) Adott az A^Z ciklus és rajta egy P pont, valamint adott egy B^Z ciklus. Szerkesztendő az A^Z-t P-ben érintő, E^Z-t is érintő ciklus.

Megoldás

Egy C-egyenes és egy C-kúp közös pontját kell megkeresni. Ezt az egyenesre és a kúp csúcspontjára illesztett segédsíkkal kereshetjük meg. A feladatnak egy megoldása van, mivel az egyenes párhuzamos egy kúpalkotóval. (11.ábra)

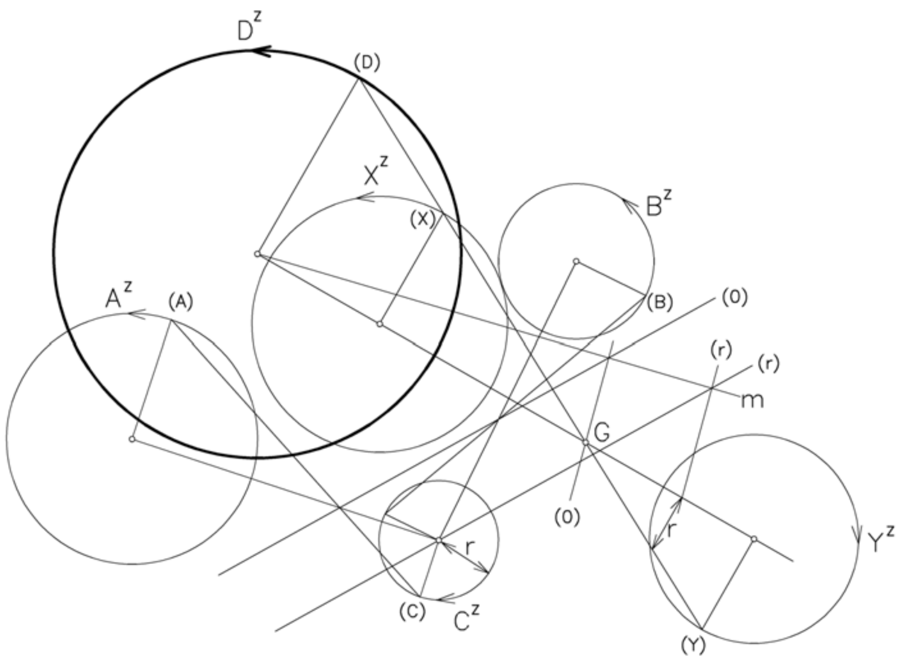


11. ábra

15) Adott egy lineáris cikluskongruencia három ciklusával, valamint egy lineáris ciklussor két ciklusával. Szerkesztendő a lineáris cikluskongruencia azon eleme, amelyet az adott lineáris ciklussor is tartalmaz.

Megoldás:

A lineáris cikluakongruencia legyen az A^Z, B^Z, C^Z ciklusokkal, a lineáris ciklussor pedig az X^Z, Y^Z ciklusokkal megadva. A térbeli feladat sík és egyenes döféspontjának a megszerkesztése. A döféspontot az egyenesre illesztett segédsíkkal kereshetjük meg, D^Z. (12. ábra)

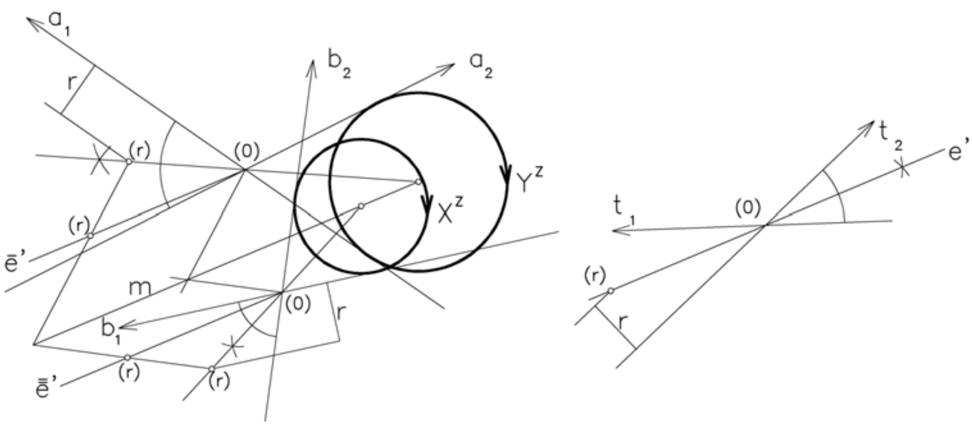


12. ábra

16) Adott két lineáris ciklussor a hozzájuk tartozó érintődárdákkal: a_1, a_2 és b_1, b_2 és egy t_1, t_2 dárdapár. Szerkesztendő a lineáris ciklussorok egy-egy olyan eleme, melyek közös érintő-dárdapárja t_1, t_2-vel párhuzamos.

Megoldás

Az adott t_1, t_2 dárdákhoz tartozó C-síkok metszésvonalával párhuzamos, a két lineáris ciklussor tartóegyeneséhez tartozó transzverzális szerkesztése a feladat. (13. ábra)

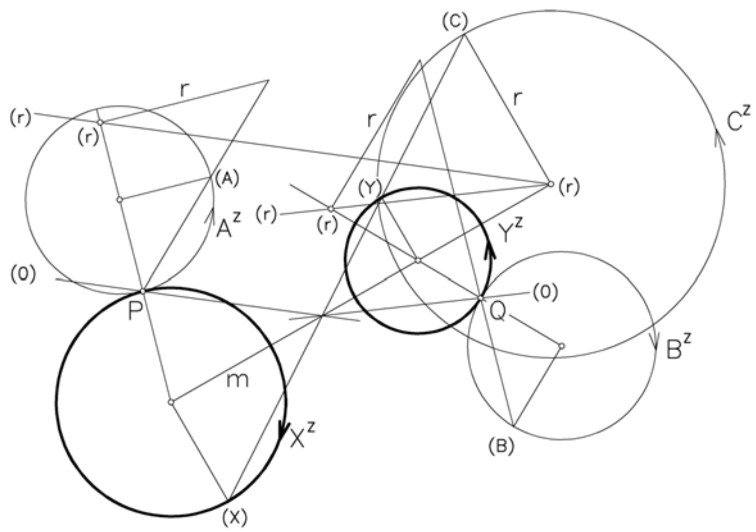


13. ábra

17) Adottak az A^Z, B^Z, C^Z ciklusok és az A^Z-n a P, B^Z-n a Q pontok. Szerkesztendő az A^Z-t P-ben érintő X^Z és B^Z-t Q-ban érintő Y^Z ciklusok, melyeknek C^Z-vel közös a hasonlósági pontjuk.

Megoldás

A megoldás analóg a 13. feladat megoldásával. A különbség az, hogy itt az adott pont nem a képsíkon helyezkedik el. (14.ábra)

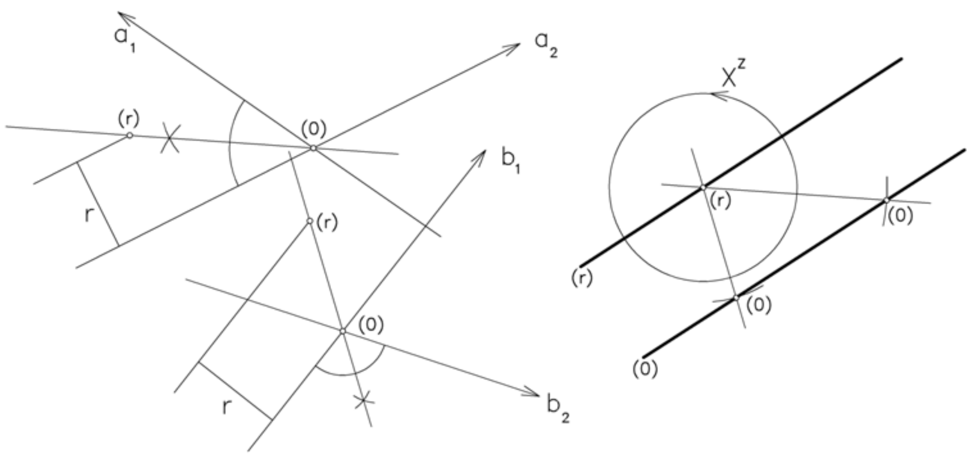


14. ábra

18) Adott két lineáris ciklussor s hozzájuk tartozó érintődárdákkal: a_1, a_2 és b_1, b_2 és egy K^Z ciklus. Szerkesztendő a K^Z-n áthaladó olyan lineáris cikluskongruencia, mely tartalmaz az adott lineáris ciklussorokkal párhuzamos lineáris ciklussorokat.

Megoldás

Egy adott ponton áthaladó, két adott egyenessel párhuzamos sík szerkesztése a térbeli feladat. Az adott egyenesekkel párhuzamos egyeneseket fektetünk az adott pontra. A két metsző egyenes által meghatározott sík adja a megoldást. (15.ábra)

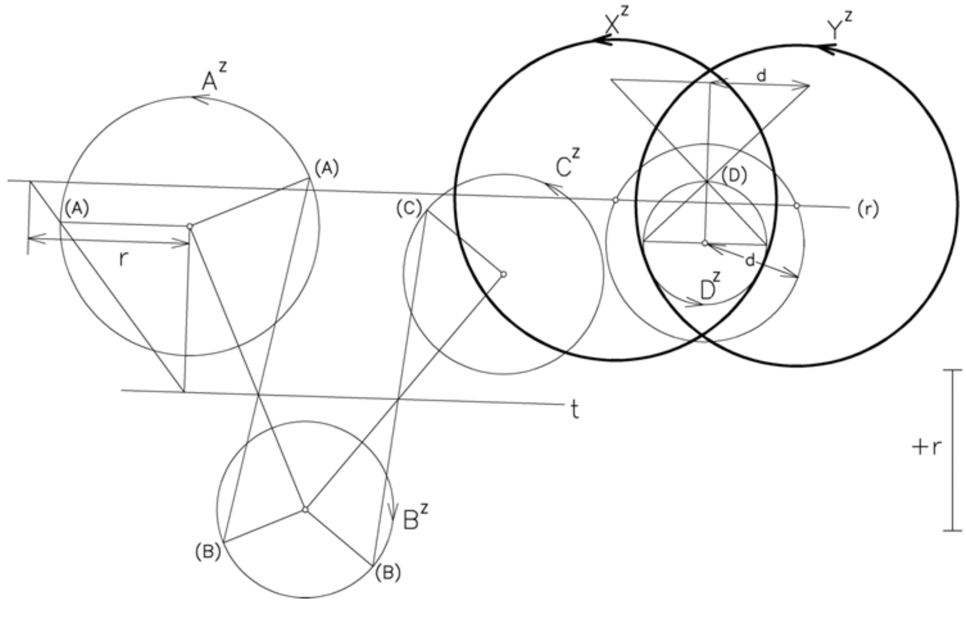


15. ábra

19) Adottak az A^Z, B^Z, C^Z, D^Z ciklusok. Szerkesztendő adott r sugarú ciklus, mely D^Z-t érinti és az A^Z, B^Z, C^Z ciklusok által meghatározott lineáris cikluskongruenciához tartozik.

Megoldás

Az A^Z, B^Z, C^Z ciklusok térbeli megfelelője egy sík. Ezt a síkot metsszük az adott r magasságú szintsíkkal. A metszésvonallal döfjük a D^Z ciklushoz tartozó C-kúpot, a döféspontok ciklografikus képei a keresett ciklusok. Megoldások száma kettő, egy vagy nulla lehet. (16.ábra)

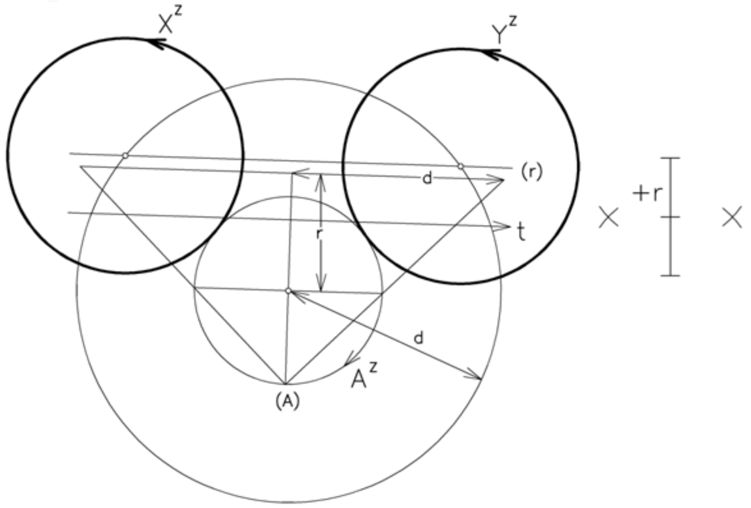


16. ábra

20) Adott egy A^Z ciklus és egy t dárda. Szerkesztendő az A^Z ciklust érintő, a t dárdát adott koszinuszú szög alatt metsző, adott sugarú ciklus.

Megoldás

A dárdához tartozó sík és az adott magasságú szintsík metszésvonalával döfjük az A^Z ciklushoz tartozó C-kúpot. A metszéspontok ciklografikus képei a kívánt tulajdonságú ciklusok. (17.ábra)

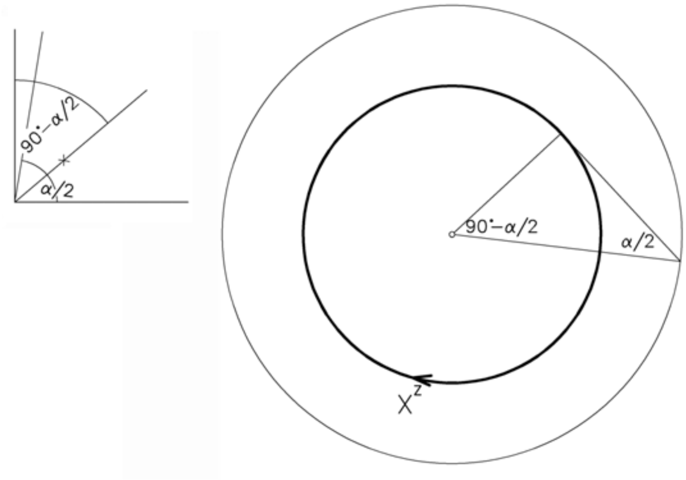


17. ábra

21) Mi azon pontok mértani helye a síkban, amelyekből egy adott K^Z ciklus α szög alatt látszik?

Megoldás:

A mértani hely az adott K^Z ciklussal koncentrikus kör. Ezt a kört a K^Z ciklus d szögű látószögkörének nevezzük. A szerkesztés menete a 18. ábráról leolvasható. Először a K^Z-nek megszerkesztjük egy 90°-α/2 nagyságú középponti szögét. A szögszár két helyen metszi a kört. Az egyik metszéspontban megszerkesztjük az érintőt. Az érintőnek a másik szögszárral való metszéspontja a keresett kör egy pontja, a kör középpontja pedig a ciklus középpontjával azonos. (18.ábra)

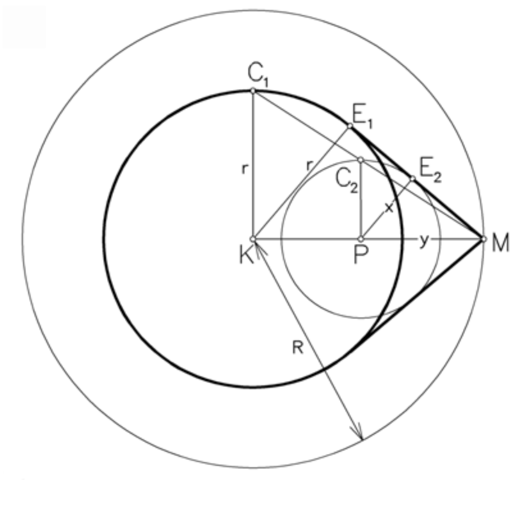


18. ábra

22) Adott a t_1, t_2 dárda és a K^Z ciklus. Szerkesztendők azok a ciklusok, melyek mindkét dárdát érintik és a megadott K^Z ciklussal közös érintődárdáik egy előre adott α szöget zárnak be.

Megoldás

Szerkesszük meg a K^Z ciklus adott α szögű látókörét, jelöljük ennek a sugarát R-rel, az eredeti K^Z ciklus sugara pedig legyen r. Belátható, hogy azon pontok ciklografikus képei, melyek az R sugarú, r magasságú kúp felületén vannak, olyan ciklusok, melyeknek az eredeti r sugarú ciklussal vett közös érintődárdái pontosan α szöget zárnak be. (19.ábra)



19. ábra

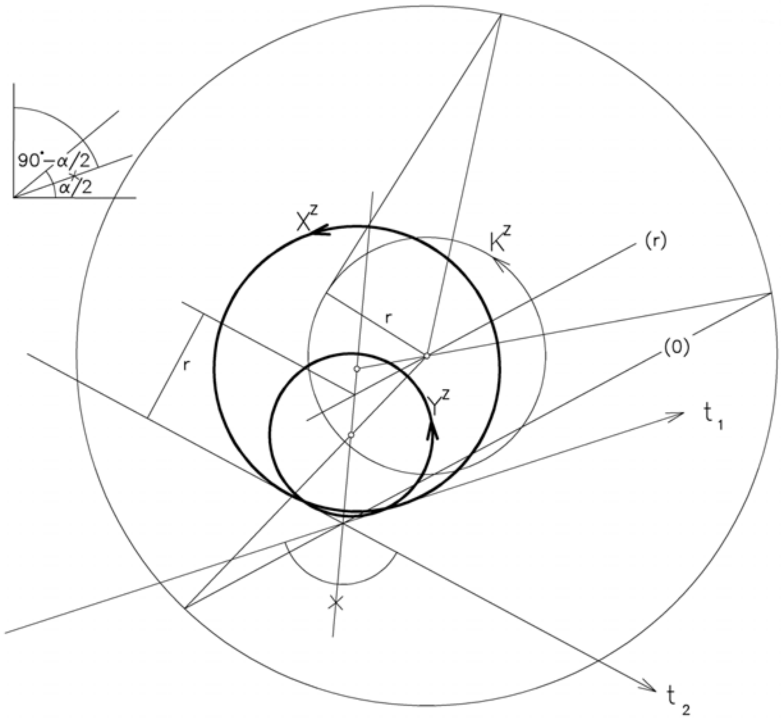
Vezessük be a PM=y és KM=R jelöléseket!

A $KME_1\triangle \sim PME_2\triangle$ hasonlóságból következik, hogy $\frac{r}{x} = \frac{R}{y}$.

A $KMC_1\triangle \sim PMC_2\triangle$ hasonlóságból következik, hogy $\frac{r}{r_1} = \frac{R}{y}$.

Ebből már látható, hogy $x = r_1$.

Ennek alapján az említett kúpot kell döfnünk a két adott dárdához tartozó két C-sík metszésvonalával. Ekkor a keresett ciklusok ezen két döféspont ciklografikus képei. (20.ábra)

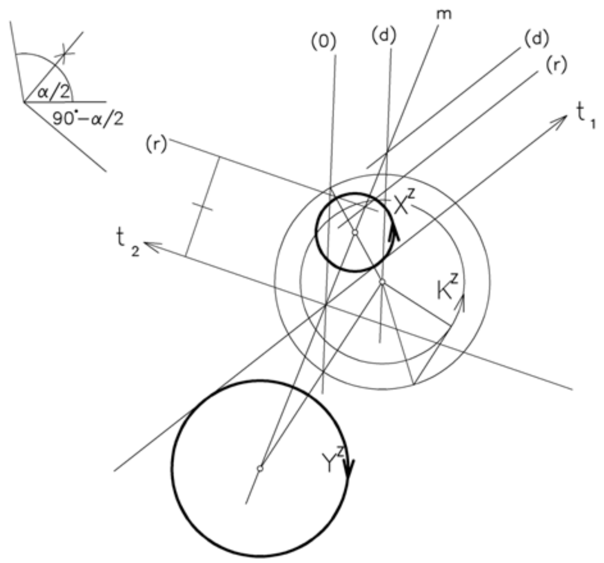


20. ábra

23) Adott egy ciklus, K^Z és két dárda, t_1 és t_2. Szerkesztendő a t_1 dárdát érintő, a t_2 dárdát adott, $\cos\varphi_2 = -2$ alatt metsző ciklus úgy, hogy a megoldás és az adott K^Z ciklus közös érintődárdái egy előre adott α szöget zárjanak be.

Megoldás

Az előbbi feladathoz hasonlóan szerkesztett kúpot kell döfnünk a két dárdához tartozó megfelelő síkok metszésvonalával. (21. ábra)

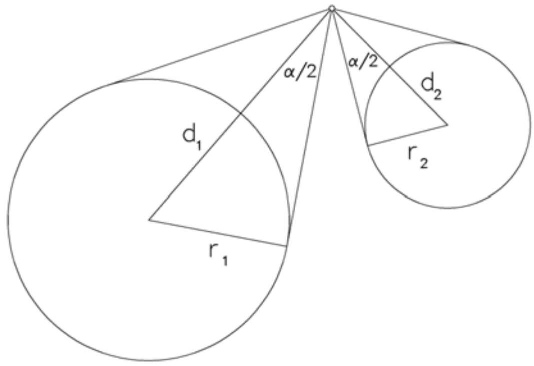


21. ábra

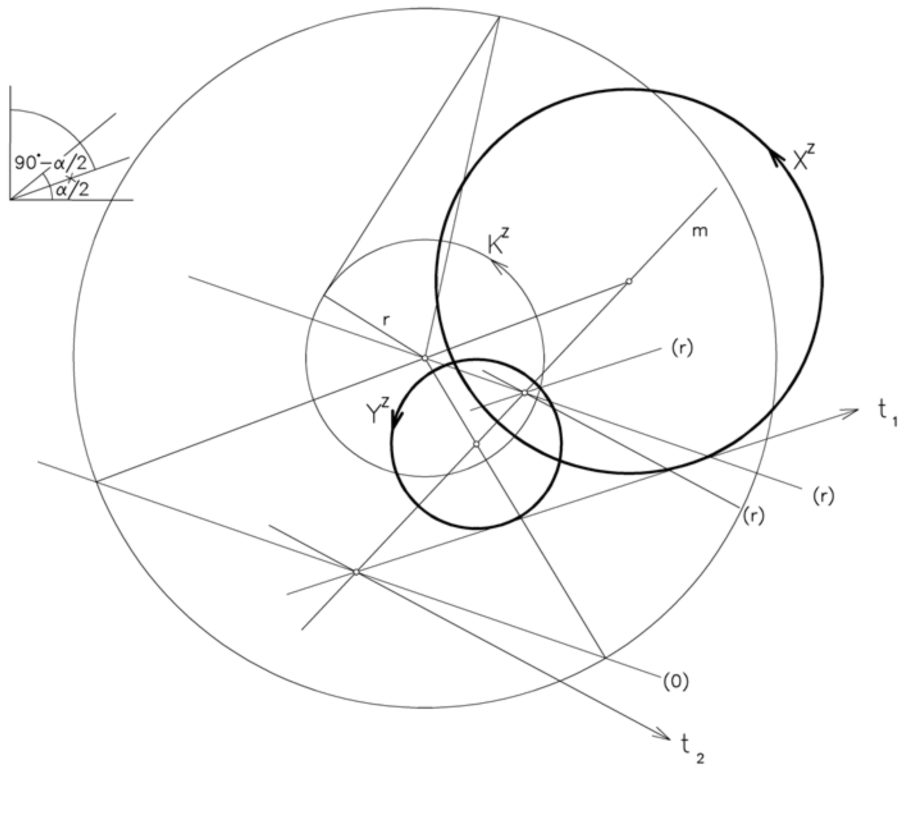
24) Adottak a K_1^2, K_2^2, K_3^2 körök. Szerkesztendő a képsík azon pontja, melyből mindhárom kör azonos szög alatt látszik.

Megoldás

Apollóniusz bebizonyította, hogy azoknak a pontoknak a halmaza a síkban, amelyeknek a sík két adott pontjától való távolságuk aránya adott, 1-től különböző pozitív szám, egy olyan kör, amelyeknek középpontja a két pont egyenesén van, a sugara pedig az arány ismeretében kiszámítható. Ebből belátható, hogy azon pontok mértani helye a síkon, melyekből két kör azonos szög alatt látszik szintén egy kör, mert $\frac{r_1}{r_2} = K$ állandó, ebből d_1-hez szerkeszttető d_2, hogy $\frac{d_1}{d_2} = K$ legyen. Ebből következik, hogy a pontok egy körön helyezkednek el, és $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \text{állandó}$. ($\sin(\alpha/2)$)



Ezt felhasználva megszerkesztjük azt a K_x^2 kört, amelynek pontjaiból a K_1^2 és a K_2^2 körök azonos szög alatt látszanak, majd a K_y^2 kört szerkesztjük meg, melynek pontjaiból a K_2^2 és a K_3^2 körök látszanak azonos szög alatt. A K_x^2 és K_y^2 körök P és Q metszéspontjaiból mindhárom kör ugyanazon szög alatt látszik. (22.ábra)

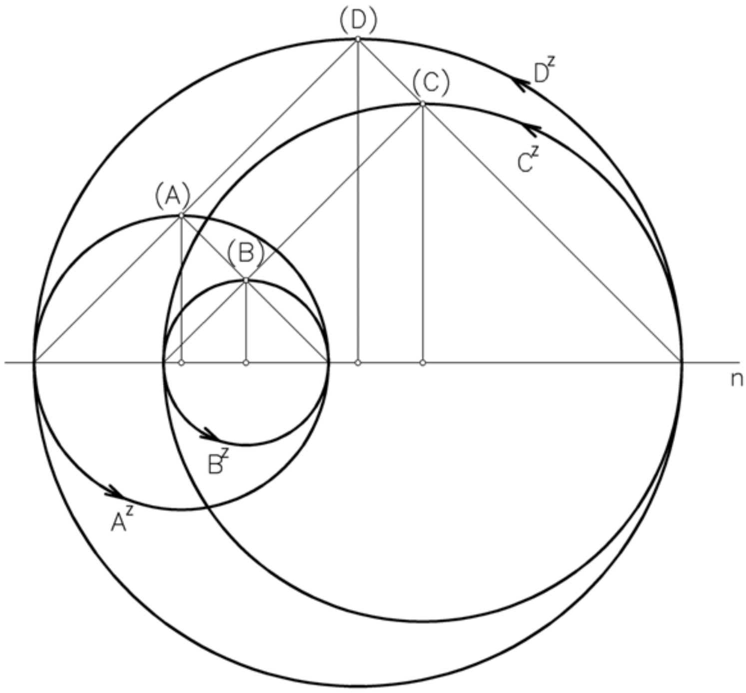


22. ábra

25) Ábrázoljuk egy C-sugarakból álló paralelogramma csúcspontjait ciklografikusan, ha a paralelogramma síkja merőleges a képsíkra.

Megoldás

Ebben az esetben a paralelogramma téglalap vagy négyzet lehet, mivel az oldalai C-sugarak. (23.ábra)

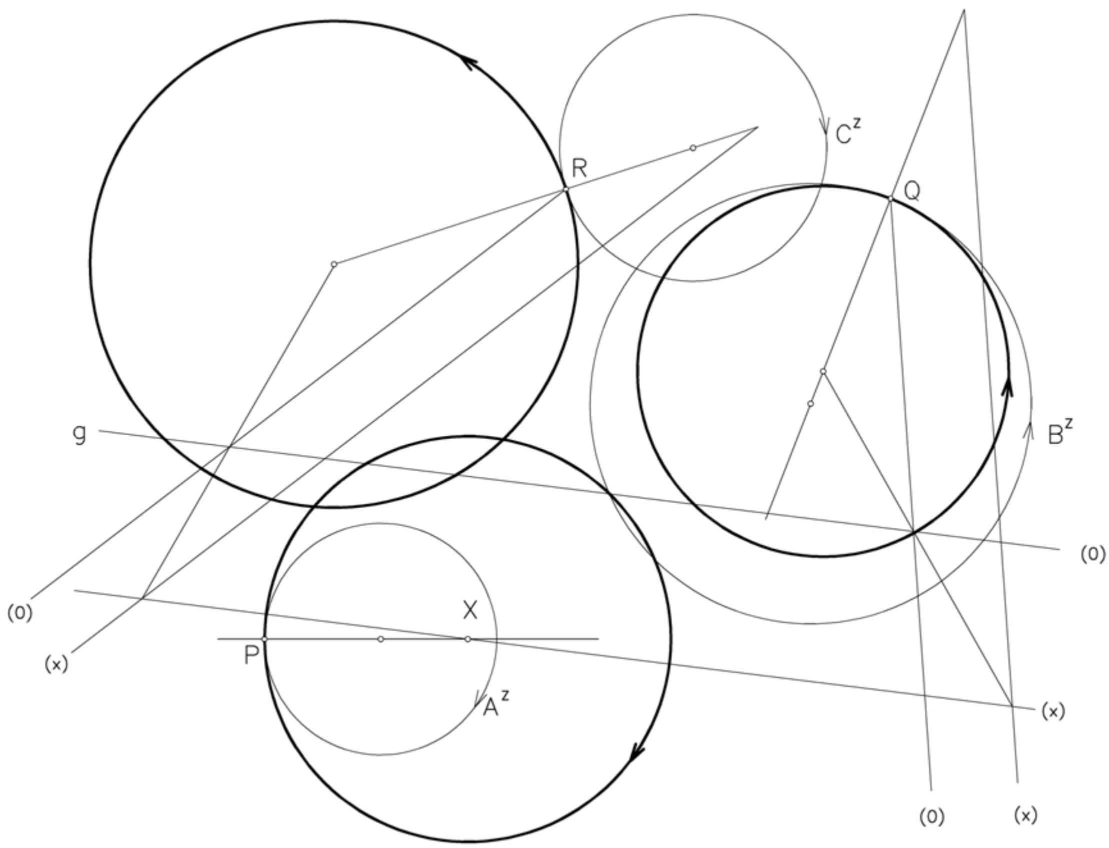


23. ábra

26) Adott egy g egyenes, az A^Z, B^Z, C^Z ciklusok és rajtuk rendre az P, Q, R pontok. Szerkesztendők A^Z-t P-ben, B^Z-t Q-ban, C^Z-t R-ben érintő ciklusok, melyek a g tengelyű cikluskongruenciához tartoznak.

Megoldás

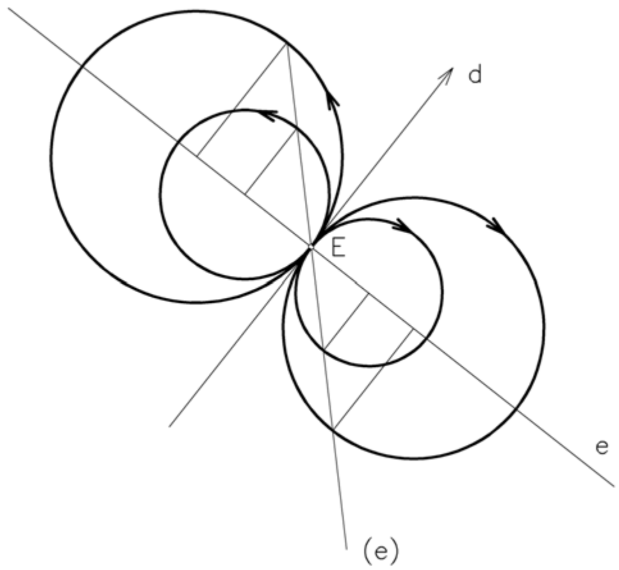
A három C-alkotó közül az egyiken kiválasztunk egy tetszőleges pontot: X. Ez a g egyenessel együtt meghatároz egy síkot. Ezt a síkot döfjük a másik két C-alkotóval. A metszéspontok ciklografikus képei adják a további két megoldást. (24.ábra)



24. ábra

A lineáris nullsor

Az előző fejezetben megismert lineáris ciklussorokat osztályozhatjuk a hozzájuk tartozó térbeli egyenes képsíkszöge szerint. Így megkülönböztethetünk elliptikus, parabolikus és hiperbolikus lineáris ciklussorokat a ciklussorok ciklusaihoz tartozó érintőtávolságok szerint. Elliptikus esetben bármilyen nagy valós érintőtávolság létezik, hiperbolikus esetben nem létezik valós érintőtávolság, parabolikus esetben bármely két ciklus érintőtávolsága nulla. Ezen tulajdonsága miatt a parabolikus lineáris ciklussort lineáris nullsornak is szokták nevezni. A lineáris nullsort egyértelműen megadhatjuk a közös d érintődárdával és rajta a ciklusok közös E érintési pontjával, röviden az (d,E) vonalelemmel. (25.ábra)



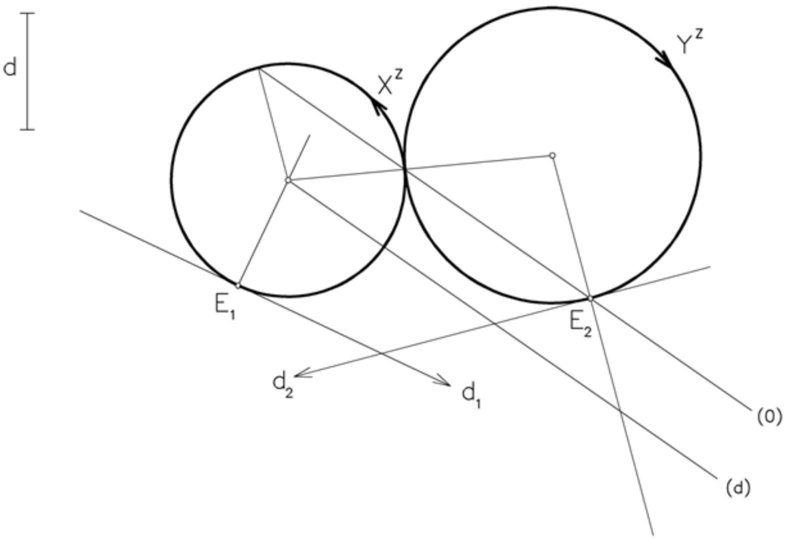
25. ábra

Feladatok:

1) Adott két lineáris nullsor: $\{N_1, N_2\}$. Adjuk meg a nullsorok egy-egy ciklusát úgy, hogy azok érintkezzenek és az egyik ciklus sugara egy előtt adott d távolság legyen!

Megoldás

Az N_1-hez tartozó ciklus sugara legyen az adott d távolság. Ezt a ciklust jelöljük X^Z-vel. Ehhez a ciklushoz tartozó C-kúp és az N_2-höz tartozó C-egyenes metszete adja az Y^Z megoldást. (26.ábra)

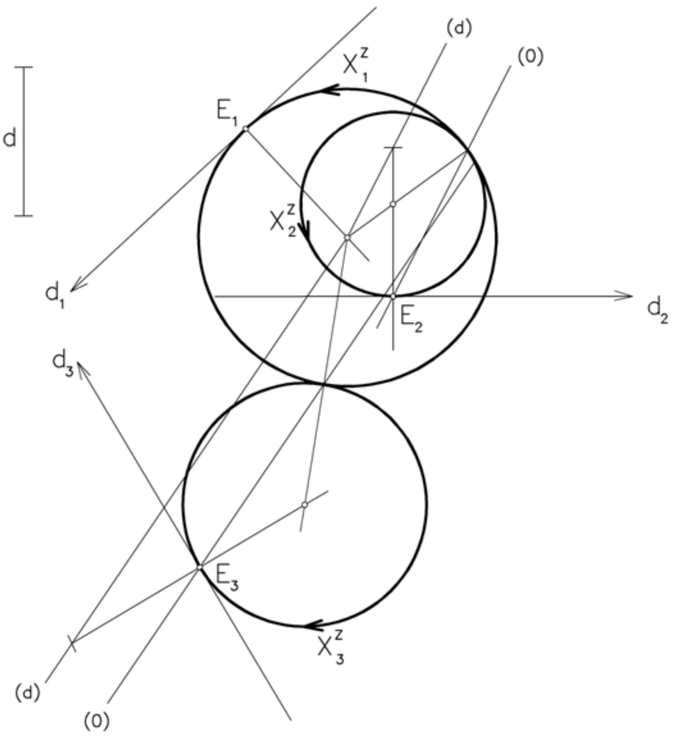


26. ábra

2) Adott három lineáris nullsor: N_1, N_2, N_3. Adjuk meg N_2 és N_3 egy-egy ciklusát úgy, hogy N_1 egy adott d sugarú ciklusát érintsék!

Megoldás

Az N_1 lineáris nullsor d sugarú ciklusa legyen X_1^Z. Az ehhez tartozó C-kúp és az N_2-höz illetve N_3-hoz tartozó C-egyenesek metszéspontjai adják az X_2^Z illetve az X_3^Z megoldásokat. Mivel az egyenesek is C-egyenesek, a C-kúppal egy egyenesnek csak egy közös pontja van. (27.ábra)



27. ábra

3) Adott három lineáris nullsor: N_1, N_2, N_3. Adjuk meg e mullsorok egy-egy ciklusát úgy, hogy azok egy pontban érintkezzenek)

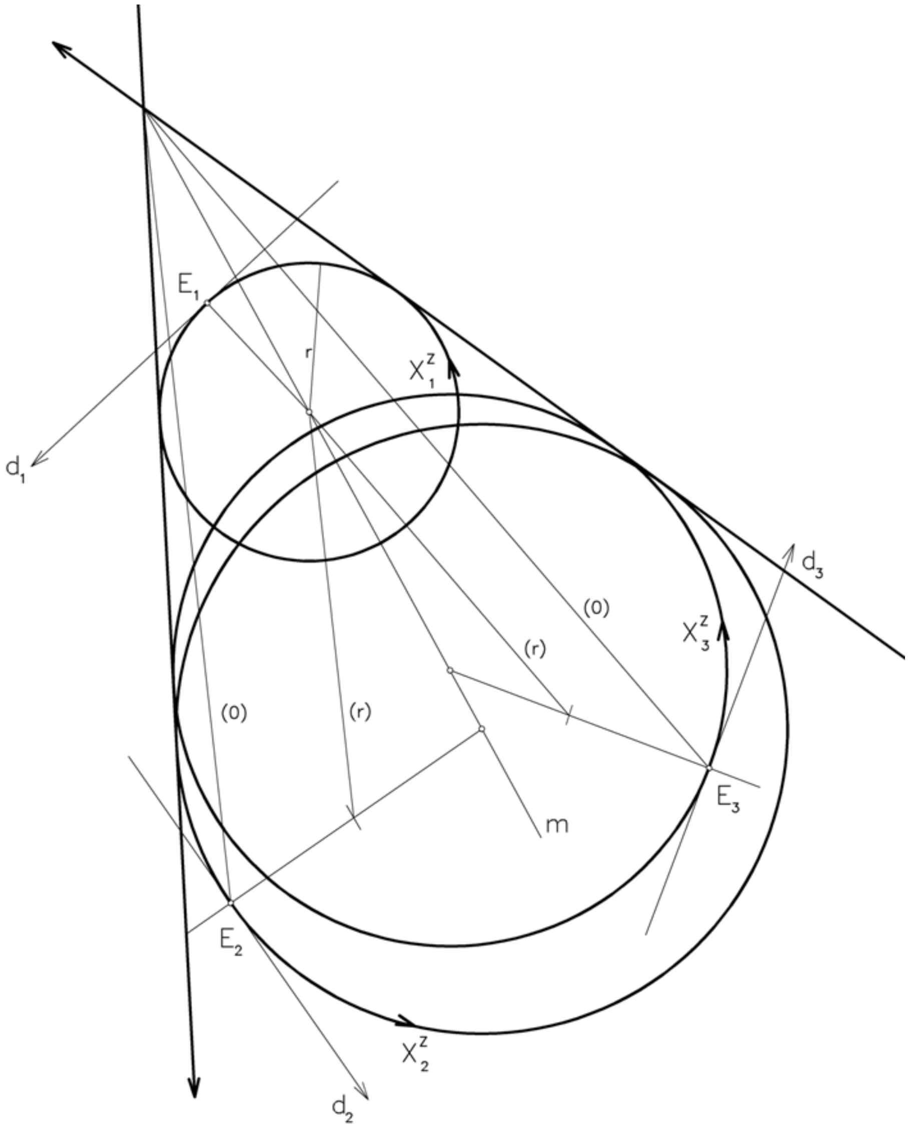
Megoldás

Vegyük az N_1, N_2, N_3-hoz tartozó C-egyenesek C-transzverzálisát! (45°-os képsíkszögű transzverzális,) A C-transzverzális és a C-egyenesek metszéspontjai adják a megoldást.

4) Adott három lineáris mullsor: N_1, N_2, N_3. Adjuk meg s mullsorok egy-egy ciklusát úgy, hogy a három ciklusnak közös legyen a hasonlósági pontja! Mi a mértani helye ezeknek a hasonlósági pontoknak?

Megoldás

Az X_1, X_2, X_3 megoldások a három C-egyenes transzverzálisainak a C-egyeneseken lévő pontjaiból adódnak. Három kitérő egyenes transzverzálisai másodrendű felületet alkotnak. Ha a megoldások között van végtelen távoli egyenes: a transzverzálisok hiperbolikus paraboloidot alkotnak, ha nincs végtelen távoli egyenes a transzverzálisok között, akkor hiperbolikus hiperboloidot alkotnak a transzverzálisok. Mivel a másodrendű felület síkmetszete másodrendű görbe, ezért a hasonlósági pontok mértani helye másodrendű görbe. A feladatnak végtelen sok megoldása van. A 28.ábra egy lehetséges megoldást mutat.



28. ábra

5) Adott négy lineáris nullsor: N_1, N_2, N_3, N_4 . Adjuk meg a nullsorok egy-egy ciklusát úgy, hogy a négy ciklus egy lineáris ciklussorhoz tartozzon!

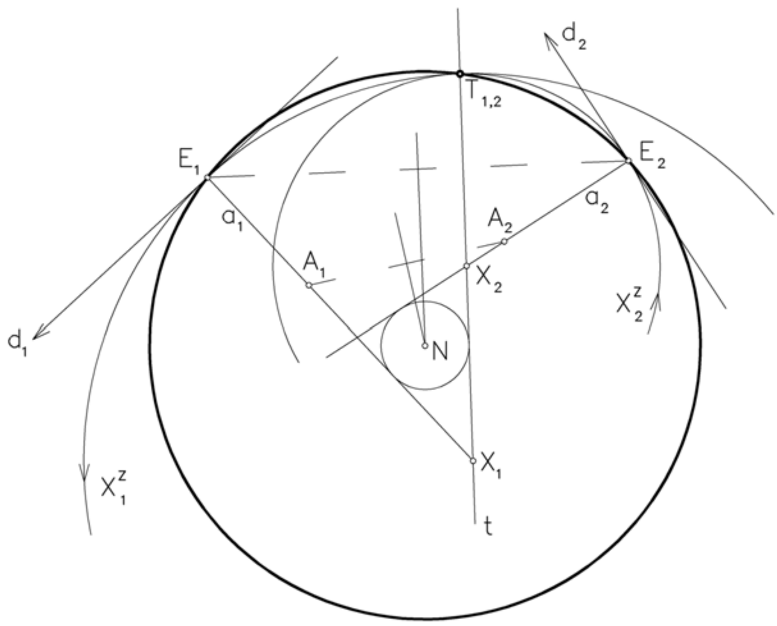
Megoldás

A feladat négy C-egyenes transzverzálisának szerkesztésére vezethető vissza. Kiválasztunk három C-egyenest, ezeknek megkeressük a transzverzálisait, majd a transzverzálisok alkotta másodrendű felületet döfjük a negyedik C-egyenessel. A döféspontan átmenő, a másodrendű felületen lévő, s C-egyenesekkel ellenkező seregbeli egyenes a keresett transzverzális.

6) Adott két lineáris nullsor: N_1, N_2. Adjuk meg a nullsorok egymást érintő ciklusai érintési pontjainak a mértani helyét!

Megoldás

A nullsorok legyenek a (d_1, E_1) illetve (d_2, E_2) vonalelemekkel megadva. A nullsorokhoz tartozó C-egyeneseket jelöljük a_1-gyel illetve a_2-vel. A K_1^Z és K_2^Z jelölje a nullsorok érintkező ciklusait, az érintési pont legyen $T_{1,2}$. A térbeli megfelelőikre illesztett t egyenes átmegy a $T_{1,2}$ ponton, metszi az a_1 és a_2 egyeneseket, és a rajz síkjával 45°-os szöget zár be. Vegyünk fel az a_1, a_2-n egy A_1 illetve egy A_2 pontot úgy, hogy a rajz síkjától való távolságuk egyenlő legyen. Mivel az a_1, a_2 egyenesek a rajz síkjával egyenlő szöget zárnak be, ezért a vetületben $E_1A_1 = E_2A_2$. Vegyük az E_1E_2 távolságot merőlegesen felező síkot és az A_1A_2 távolságot merőlegesen felező síkot. A két sík metszésvonala merőleges a rajz síkjára, hiszen mindkét sík merőleges rá. Jelöljük a metszésvonalat n-nel! Ekkor n körül az a_1 egyenes az a_2 egyenesbe forgatható, hiszen a forgatással az E_1 pont az E_2 pontba, az A_1 pont az A_2 pontba forgatható. Az n egyenes képsíkkal való metszéspontja legyen N. Mivel az E_1NA_1 háromszög egybevágó az E_2NA_2 háromszöggel, ezért magasságaik is egyenlők. Ebből következik, hogy az a_1 ill. a_2 egyenesek vetülete érint egy N középpontú kört. Ha 360°-kal elforgatjuk az a_1-et, hogy visszatérjen önmagába, akkor minden pontja egy olyan kört ír le, melynek síkja párhuzamos a rajz síkjával, és középpontja rajta van a forgási tengelyen. Az így nyert felület egy egyköpenyű forgáshiperboloid. Minden sík, amely a forgástengelyre illeszkedik a felületnek szimmetriasíkja. Ha tehát az a_1 vagy a_2 egyeneseknek egy olyan síkra vesszük a tükörképét, amely az a tengelyre illeszkedik, akkor az így nyert egyenesek szintén rajta van a felületen. Így nyerjük a felület másik seregbeli alkotóit. Visszatérve az eredeti feladatunkhoz: az a_1 és az a_2 a felületnek ugyanazon seregbeli két különböző egyenese. A t transzverzális mindkettőt metszi, és a tengellyel ugyanakkora szöget zárnak be, tehát t a felületnek egy másik seregbeli alkotója, és így ennek a rajz síkjával való metszéspontja rajta van a rajz síkjában lévő körén. Tehát a $T_{1,2}$ pontok mértani helye egy kör. Az a_1, a_2 egyeneseknek végtelen sok 45°-os képsíkszögű t transzverzálisa van, a 29. ábra egy lehetséges megoldást mutat. Először megszerkesztjük az N középpontú, a_1-et és a_2-t érintő kört, majd meghatározzuk az a_1, a_2 egy t transzverzálisát. Az X_1^Z és X_2^Z ciklusok a $T_{1,2}$ pontban érintik egymást. A keresett mértani hely az N középpontú, $T_{1,2}$-n áthaladó kör.



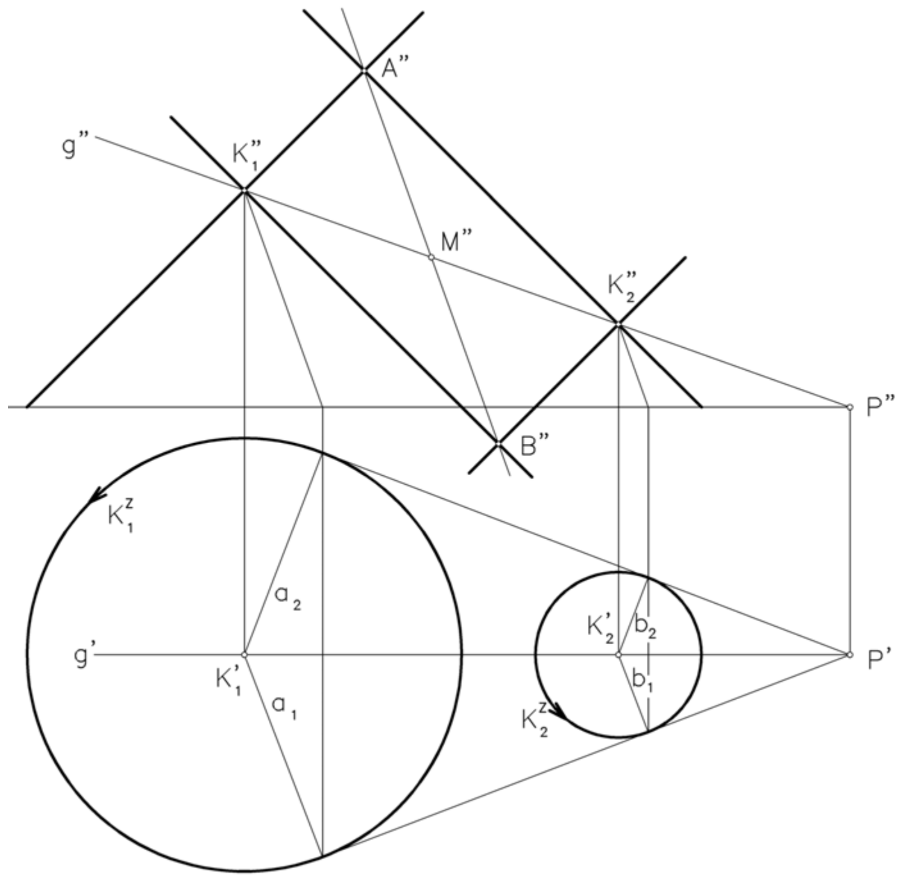
29. ábra

Apollóniusz feladatának ciklografikus megoldása

Az eredeti Apollóniusz feladat így hangzik: adott ugyanazon síkban fekvő három kör. Szerkesztendők azok a körök, melyek mindhárom adott kört érintik. A feladat megoldása leegyszerűsödik, ha a köröket irányítjuk, azaz ciklusokkal dolgozunk. Ekkor adott három ciklust érintő ciklusokat keresünk. Eddigi ismereteink alapján tudjuk, hogy a megoldást a három ciklushoz tartozó C-kúpok közös pontjainak ciklografikus képei adják. A problémát így visszavezettük három C-kúp áthatásának a meghatározására.

Vizsgáljuk először azt, hogy két ilyen kúp áthatása, azaz közös pontjai hogyan helyezkednek el!

Általános esetben két másodrendű kúp áthatása egy negyedrendű térgörbe, ha a két kúpnak van két közös érintősíkja, akkor az áthatás szétesik két kúpszeletre. A ciklografikus vetítőkúpok olyan különleges helyzetűek, hogy mindig van két közös érintősíkjuk, amely a csúcsokon átmenő g egyenesre illeszkedik. Mivel a két kúpnak számtalan sok párhuzamos alkotója van, ezért ezek metszéspontjai szolgáltatják az egyik metszet kúpszeletet. Ez a kúpszelet a végtelen távoli síkban van. A másik kúpszelet megtalálása érdekében vegyünk egy olyan metszetet, amely mindkét kúp tengelyére illeszkedik. (30. ábra) Ez mindegyik kúpot két átellenes és egymásra merőleges alkotóban metszi. A négy alkotó olyan téglalapot határoz meg, amelynek két átellenes csúcsa a kúpok csúcsa K_1, K_2 míg másik két átellenes csúcsa: A és B az áthatás pontjai. Mivel a két kúp tengelyén átmenő síkra mindkét kúp szimmetrikus, ezért az áthatási kúpszelet is szimmetrikus rá, vagyis síkja merőleges a tengelyek síkjára. Az áthatásnak két végtelentávoli pontja van, ezért hiperbola. Az A és a B pontok az áthatási hiperbola csúcspontjai, és M a hiperbola középpontja.



30. ábra

Térjünk vissza a három C-kúp közös pontjainak a meghatározására! Bármely két kúpnak van egy végesben lévő áthatási görbéje (hiperbolája). Ez összesen három kúpszelet. Jelöljük a kúpokat K_1, K_2, K_3-mal és az áthatási hiperbolákat c_1, c_2, c_3-mal oly módon, hogy a K_1, K_2 áthatása legyen c_3 stb. Nézzünk most két ilyen áthatási hiperbolát, c_1-et és c_2-t! Ezek síkjának *m* metszésvonala mindenképpen tartalmazza c_1 és c_2 közös pontjait. De c_1 és c_2 közös pontjai mindhárom kúpra illeszkednek, tehát rajta vannak a c_3-on is. Ez tehát azt jelenti, hogy a három áthatási kúpszelet síkja egy egyenesben metszi egymást, azaz egy *m* sorozóegyenessel bíró síksort alkot.

Két kúp áthatási síkjának a rajz síkjával való metszésvonala tartalmazza a két kúp alapkörének metszéspontjait, tehát nem más, mint a két kör hatványvonala. Ebből következik, hogy az előbb említett *m* egyenesnek a rajz síkjával való döféspontja nem más, mint a három kör hatványpontja.

Legyen a K_1 és K_2 kúpok csúcspontjait összekötő *g* egyenesnek a rajz síkjával való metszéspontja P, akkor a P pontból a kúpok alapköréhez húzott közös érintők a kúpok közös érintősíkjainak nyomvonalai. Ezen közös érintősíkok az egyik kúpot a_1, a_2 a másik kúpot b_1,

b_2 alkotókban érintik, $a_1 \| a_2$ és $b_1 \| b_2$. Ezen párhuzamos alkotók végtelenben lévő metszéspontjai szolgáltatják az áthatási hiperbola végtelen távoli pontjait, tehát az áthatási hiperbola síkja párhuzamos az a_1, a_2 (vagy a b_1, b_2) érintési alkotók síkjával. Az a_1, a_2 valamint a b_1, b_2 alkotópár síkjának nyomvonala nem más, mint a P pontnak a megfelelő kúp alapkörére vonatkozó polárisa. (30. ábra)

Ugyanez a gondolatmenet alkalmazható egy másik kúppárra, mondjuk a K_1 és K_3-ra nézve is. Ekkor a K_1 kúpon kapunk egy másik alkotópárt (a K_1, K_3 közös érintősíkjai ezekben érintik a K_1-t). Ezek síkja és az a_1, a_2 alkotók síkja egy olyan egyenesben metszi egymást, amely párhuzamos a páronként vett áthatási síkok *m* metszésvonalával.

Legyen a K_2 és K_3 kúpok csúcspontjait összekötő egyenes g_1. Ennek a rajz síkjával való döféspontja P_1, és ennek a K_3 kúp alapkörére vonatkozó polárisa p_1. Hasonlóképpen legyen a K_1 és K_3 kúpok csúcspontjait összekötő egyenes g_2. Ennek a rajz síkjával való döféspontja P_2 és ennek ugyancsak a K_3 kúp alapkörére vonatkozó polárisa p_2. Mivel a g_1 és g_2 egyenesek mindhárom kúp csúcsát tartalmazzák, ezért a P_1P_2 egyenes a három kúp csúcspontja által meghatározott síknak nyomvonala. Tehát a p_1, p_2 polárisok metszéspontja, meg a P_1P_2 egyenes pólus-poláris vonatkozásban van a K_3 kúp alapkörére nézve. Ha a polárisok metszéspontját a K_3 kúp csúcsával összekötjük, olyan egyenest kapunk, amely az áthatási síkok *m* sorozóegyenese párhuzamos.

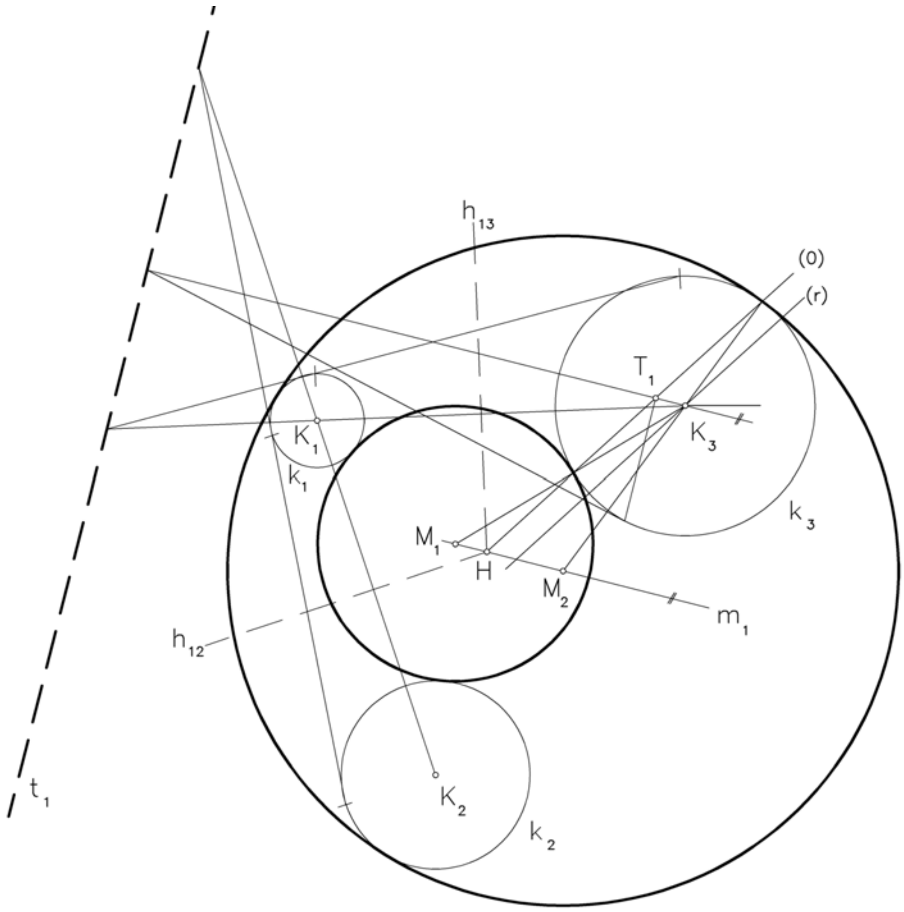
Ezek után a tényleges szerkesztés menete a következő:

I. Meghatározzuk a három ciklus által alkotott lineáris cikluskongruencia tengelyét: t.
II. Megszerkesztjük a három ciklus hatványpontját: H. (Ez lesz az *m* sorozóegyenes nyompontja.)
III. Meghatározzuk t konjugáltját valamelyik felületre nézve, ezzel megkapjuk a három áthatási sík metszésvonalának az állását.
IV. A kapott egyenesállással H-n keresztül párhuzamost húzunk, így megkapjuk az *m* metszésvonalat.
V. Az *m* egyenessel eldöfjük valamelyik kúpot. A döféspontok ciklografikus képei adják a megoldást a körök egyféle irányítása esetén.

Az eredeti Apollóniusz-féle feladatnak nyolc megoldása van. Ez ciklografikus úton történő megoldás esetében a következőképpen adódik:

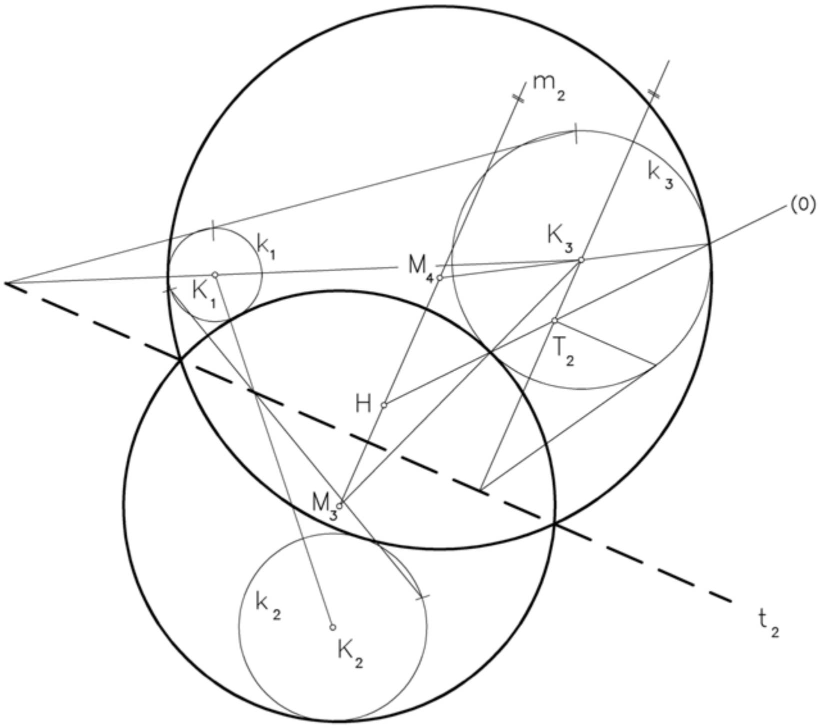
Az adott három kört irányítással látjuk el, ekkor ciklusokként meghatároznak egy-egy C-kúpot. Ezekkel a C-kúpokkal végrehajtjuk az előbbi szerkesztést. A három kört összesen nyolcféleképpen láthatjuk el irányítással, ez összesen 16 megoldást adhatna. De megoldásköröket tekintve mégis 8 megoldásra kell számítani. Például, ha a K_1, K_2, K_3 körök irányítása rendre +, +, - és -, -, +, akkor a szerkesztésben felhasznált térelemek (síkok, kúpok, stb.) a rajz síkjára szimmetrikusak, a megoldásciklusok ellentétes irányításúak, de azonos köröket adnak.

Tekintsük át Apollóniusz feladatának ciklografikus megoldását!



31./a ábra

Adottak a K_1, K_2, K_3 körök, melyek közös hatványpontja a h_{12} és h_{13} hatványvonalak metszéspontja. Ez a H pont a feladat megoldása során többször fel lesz használva. A köröket először azonosan, azaz mindet pozitívan, vagy mindet negatívan irányítjuk. Ezzel előállnak a C-kúpok, melyek csúcspontjára illeszkedő sík nyomvonala t_1. A t_1 pólusa a k_3 körre nézve T_1. A kúpok áthatási síkjainak m_1 sorozóegyenese párhuzamos a T_1-t a k_3 kúp csúcspontjával összekötő egyenessel. Az m_1-gyel a k_3 kúpot metszve kapjuk azokat a térbeli pontokat, melyek a megoldáskörök M_1, M_2 középpontjait adják. A szerkesztést célszerű kótás-projekcióban elvégezni, ekkor a segédsík (0)-s szintvonala a k_3-ból éppen az érintési pontokat metszi ki.

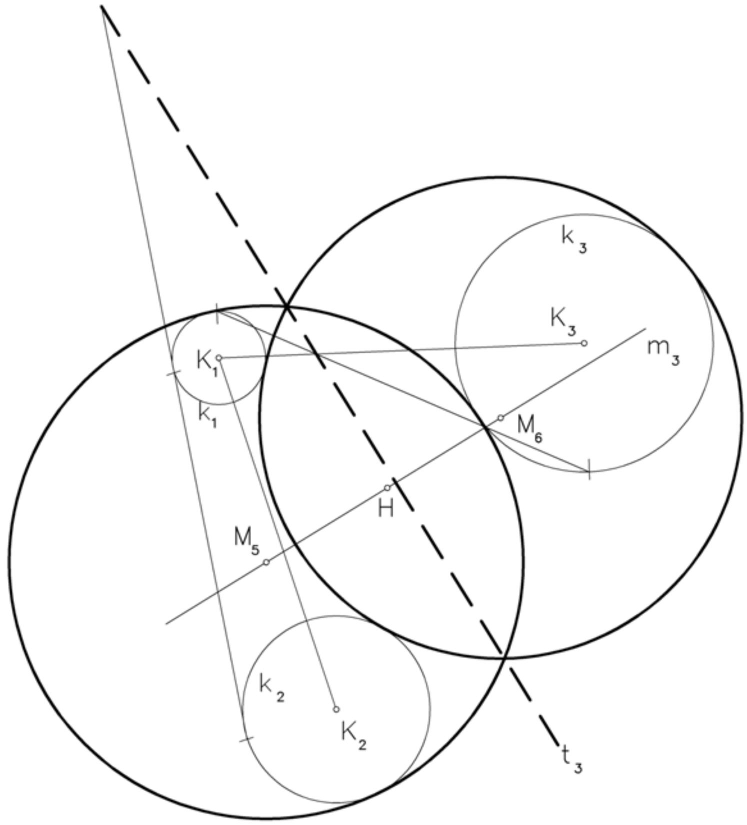


31./b ábra

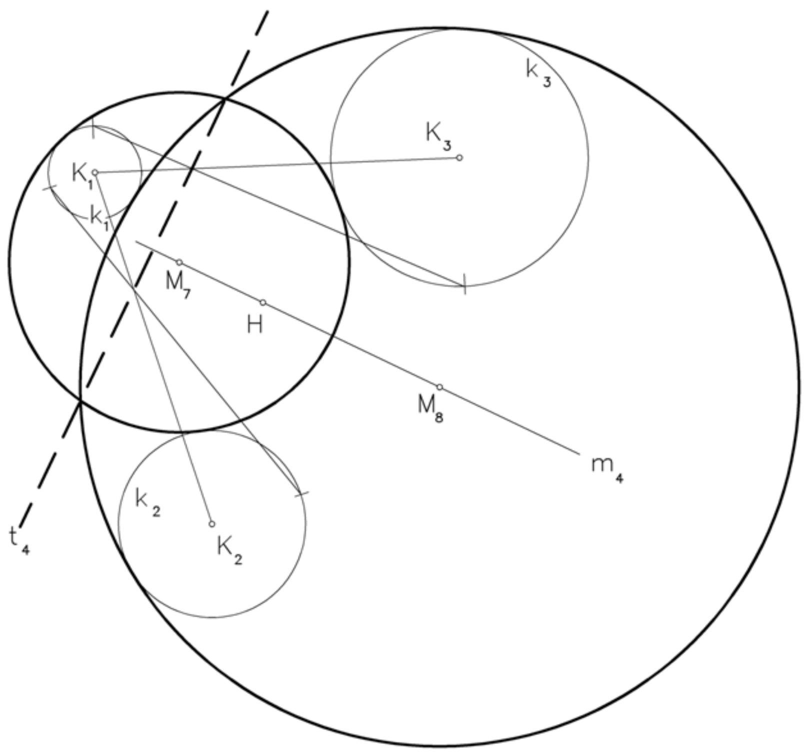
A 31/b. ábrán abban az esetben látjuk a megoldást, ha a k_1 és a k_3 ugyanúgy van irányítva és a k_2 velük ellentétesen. A kúpok csúcspontjára illeszkedő sík nyomvonala t_2. A t_2 pólusa a k_3 körre nézve T_2. A megoldáskörök körök középpontjai: M_3, M_4.

A 31/c. ábrán abban az esetben látjuk a megoldást, ha a k_1 és a k_2 ugyanúgy van irányítva és a k_3 velük ellentétesen. A kúpok csúcspontjára illeszkedő sík nyomvonala t_3. A t_3 pólusa a k_3 körre nézve T_3. A megoldáskörök körök középpontjai: M_5, M_6.

A 31/d. ábrán abban az esetben látjuk a megoldást, ha a k_2 és a k_3 ugyanúgy van irányítva és a k_1 velük ellentétesen. A kúpok csúcspontjára illeszkedő sík nyomvonala t_4. A t_4 pólusa a k_3 körre nézve T_4. A megoldáskörök körök középpontjai: M_7, M_8.



31./c ábra



31./d ábra

Apollóniusz-feladatnak szokták nevezni még azokat a feladatokat, amelyeknél az adott három kör között lehetnek végtelen sugarú körök (egyenesek), és ponttá fajult körök is. Ekkor a feladat szövege így módosul:

Szerkesztendők azok a körök, amelyek ugyanazon síkban fekvő egyenesek, pontok és körök közül hármat érintenek.

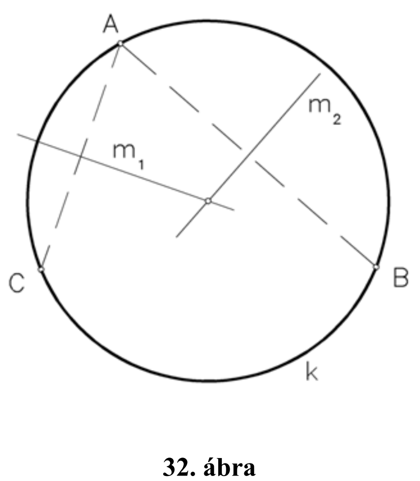
Így három elemből álló ismétléses kombináció adja a tágabb értelemben vett Apollóniusz-feladatok számát. Ezek kkk, ppp, eee, kkp, ppk, eek, eep, ekk, epp, pek. (A megoldások során a három elem mindig különböző lesz, egybeeső vagy illeszkedő nem lehet.)

Feladatok

1) Adott három pont. Szerkesztendő a három ponton átmenő kör. (A három pont nem kollineáris.)

Megoldás

A megoldás a három pont alkotta háromszög köré írt köreként is felfogható. Három pont egy kört határoz meg, így egy megoldása van a feladatnak. A kör középpontját a háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja adja. Ciklografikus úton történő megoldás esetében a pontokhoz tartozó C-kúpok közös pontja adja a megoldást. Két-két C-kúp áthatási síkja merőleges a képsíkra, így a sorozójuk is merőleges a képsíkra. A pontokat összekötő szakasz felezőmerőlegese az áthatási sík képsíkkal való metszésvonala. (32.ábra)

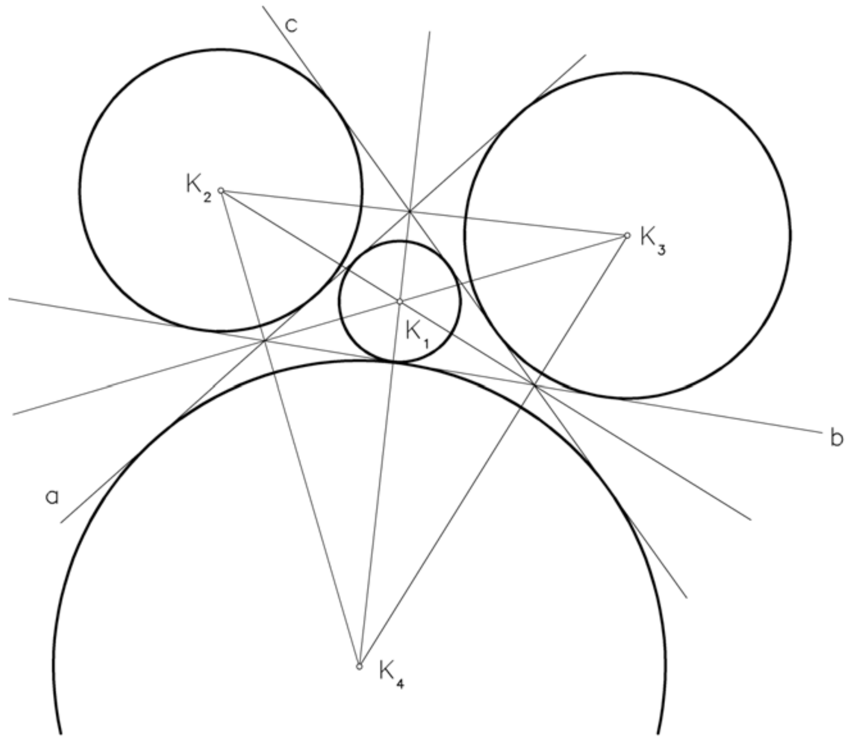


32. ábra

2) Adott három egyenes. Szerkesztendő a három egyenest érintő kör.

Megoldás

Ha a három egyenes párhuzamos, akkor nincs megoldás, hiszen az egyenesekhez tartozó C-síkok is párhuzamosak lesznek, így a végesben nincs közös pontjuk. Ha a három egyenes egy közös P pontra illeszkedik, akkor ez a P pont lesz az egyenesekhez tartozó C-síkok közös pontja, tehát a három egyenest érintő kör nem létezik, csak ez a P pont. Ha az egyenesek közül csak kettő párhuzamos, akkor a három egyeneshez tartozó C-síkok közös pontjának a ciklografikus képe adja a megoldást. Ebben az esetben a megoldások száma kettő. Általános esetben is az egyenesekhez tartozó C-síkok közös pontja adja a megoldást. Az egyenesek különböző irányítása mellett ekkor a megoldások száma négy. A feladatot ilyenkor úgy is felfoghatjuk, hogy a három egyenes alkotta háromszög beírt, és hozzáírt köreit keressük. Ezek középpontjait a háromszög belső illetve két külső és a harmadik belső szögfelezőinek a metszéspontja adja. (33. ábra)



33. ábra

3) Adottak: a K_1^2 és a K_2^2 körök és egy P pont. Szerkesztendők a P ponton áthaladó és a két adott kört érintő körök.

Megoldás

Itt is a körökhöz illetve a ponthoz tartozó C-kúpok áthatásának a megszerkesztése a feladat, csak itt az egyik kúp csúcspontja a képsíkon van. Vizsgáljuk meg, hogy a körök és a pont egymáshoz viszonyított helyzete szerint hány megoldása van a feladatnak!

Nincs megoldása a feladatnak az alábbi esetekben:

- ha az egyik kör tartalmazza a másikat és a pont a kisebb körön belül vagy mindkét körön kívül van.
- ha a két körnek nincs közös pontja és az egyik tartalmazza a P pontot.
- ha kívülről érintkező körök esetén a P az egyik körben van, de nem a centrálison.

Egy megoldása van a feladatnak, ha érintkező körök esetén a P az egyik körben a centrálison van.

Két megoldás van az alábbi esetekben:

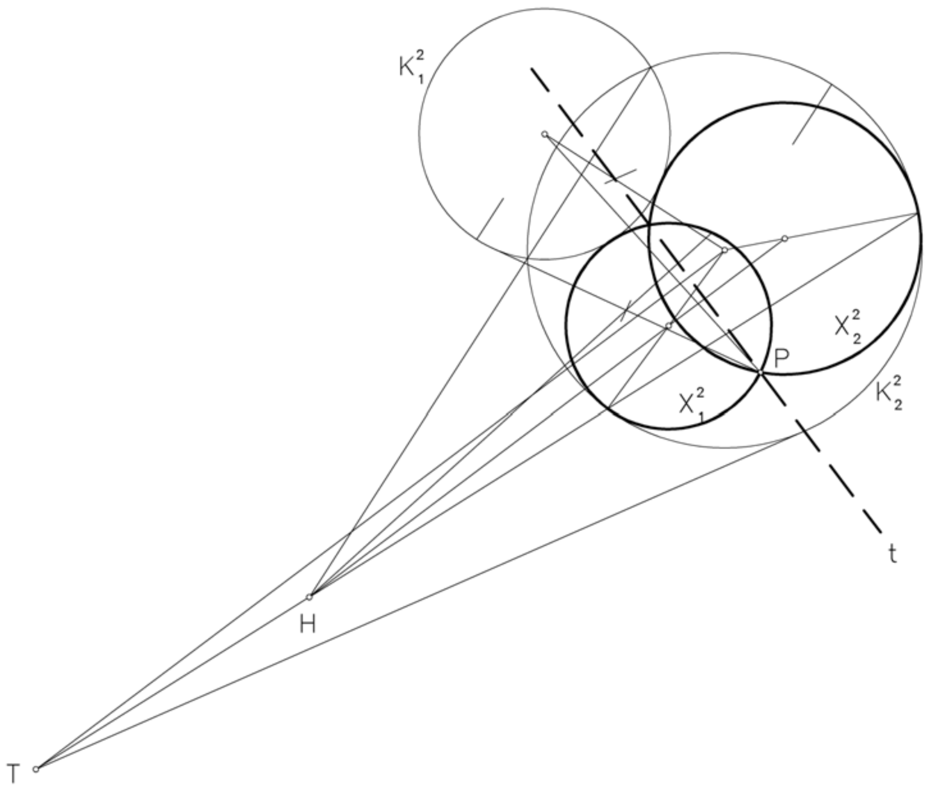
- ha a két kör metszi egymást és a pontot mindkét kör tartalmazza.
- ha a két kör metszi egymást és a pontot mindkét kör tartalmazza. (34. ábra)
- ha a két kör érintkezik és a pont a két kör közös érintőjén helyezkedik el.

Három megoldása van a feladatnak, ha a két kör érintkezik, és a pont a körökön kívül, de nem a közös érintőn van.

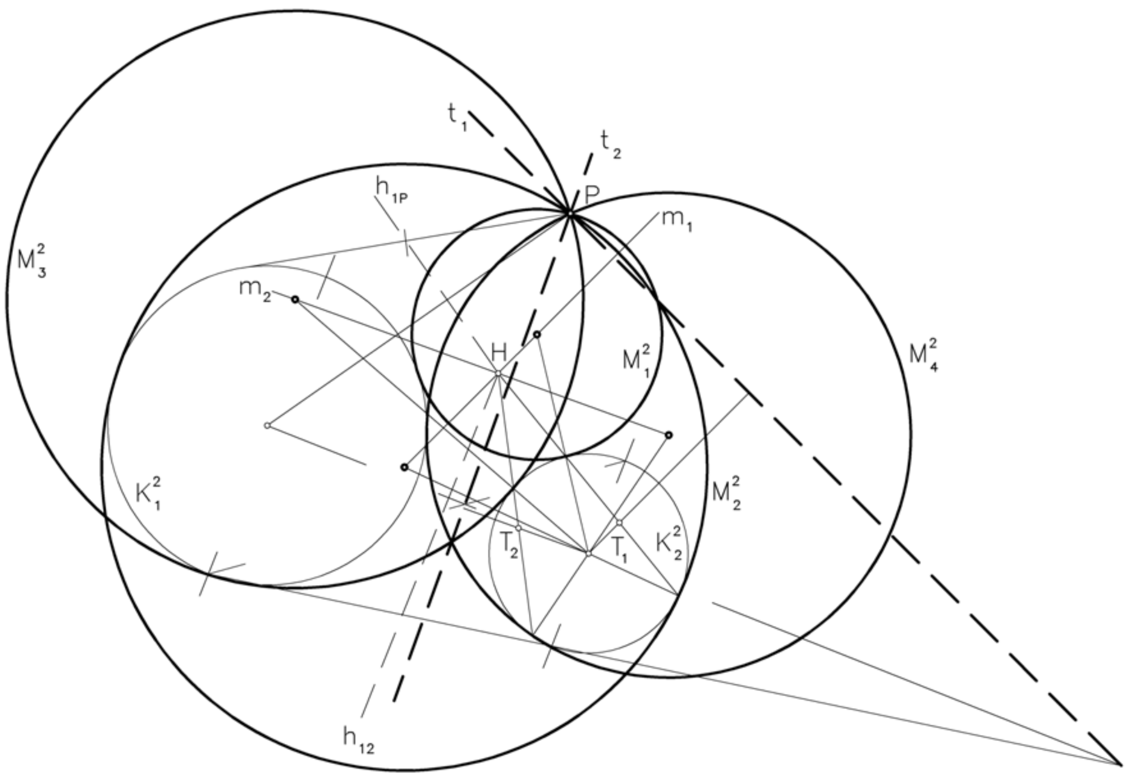
Négy megoldás van általános elhelyezkedés esetén, tehát a két körnek nincs közös pontja, és nem tartalmazza egyik a másikat, és a pont a körökön kívül helyezkedik el. (35. ábra)

A 34. ábrán abban az esetben láthatjuk a megoldást, ha a pontot az egymást metsző körök egyike tartalmazza.

A H hatványpont meghatározása: a P-ből érintőt húzunk a K_1^2 körhöz, és az érintőszakasz felezőpontjából állítunk merőlegest a P-t a középponttal összekötő egyenesre. Ez lesz a P és a K_1^2 hatványvonala. A köröket ellentétesen irányítjuk, ugyanis a K_1^2-t csak kívülről, a K_2^2-t csak belülről érinthetik a megoldások. A kúpok csúcspontjaira illesztett sík nyomvonala *t* (áthalad a megadott P ponton), a T pont a *t* pólusa K_2^2-re nézve.



34. ábra

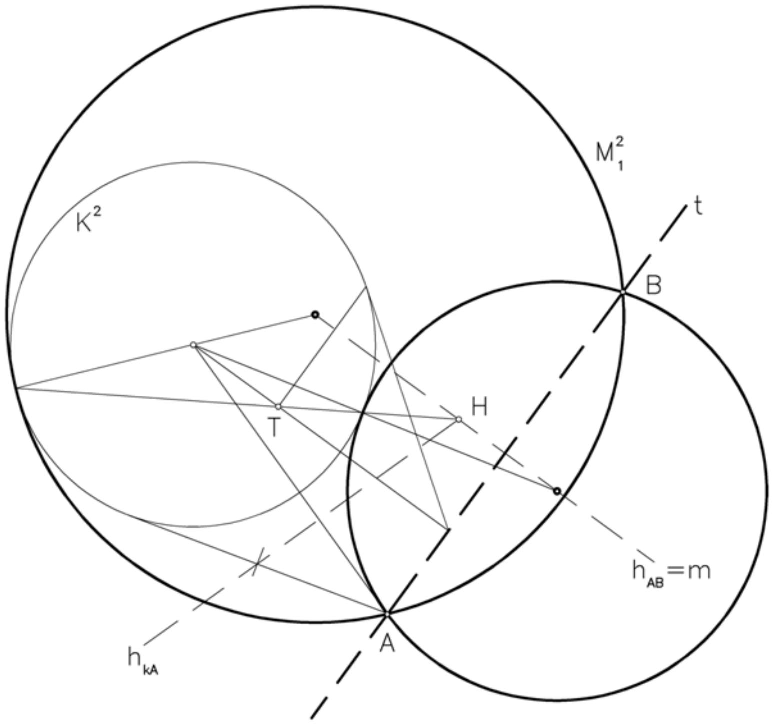


35. ábra

4) Adottak az A, B pontok és a K^2 kör. Szerkesztendők a két ponton átmenő és a kört érintő körök.

Megoldás

Az adott K^2 kör kétféle irányítása nem ad különböző megoldást, mert ekkor a C-kúpok a képsíkra szimmetrikusan helyezkednek el, ezért a feladatnak általában két megoldása van. Tehát a három C-kúp áthatását kell megszerkeszteni, amikor a három kúp közül kettőnek a csúcspontja a képsíkon van. Nincs megoldása a feladatnak, ha a két pont közül az egyik a körön belül, a másik a körön kívül helyezkedik el. (36. ábra)



36. ábra

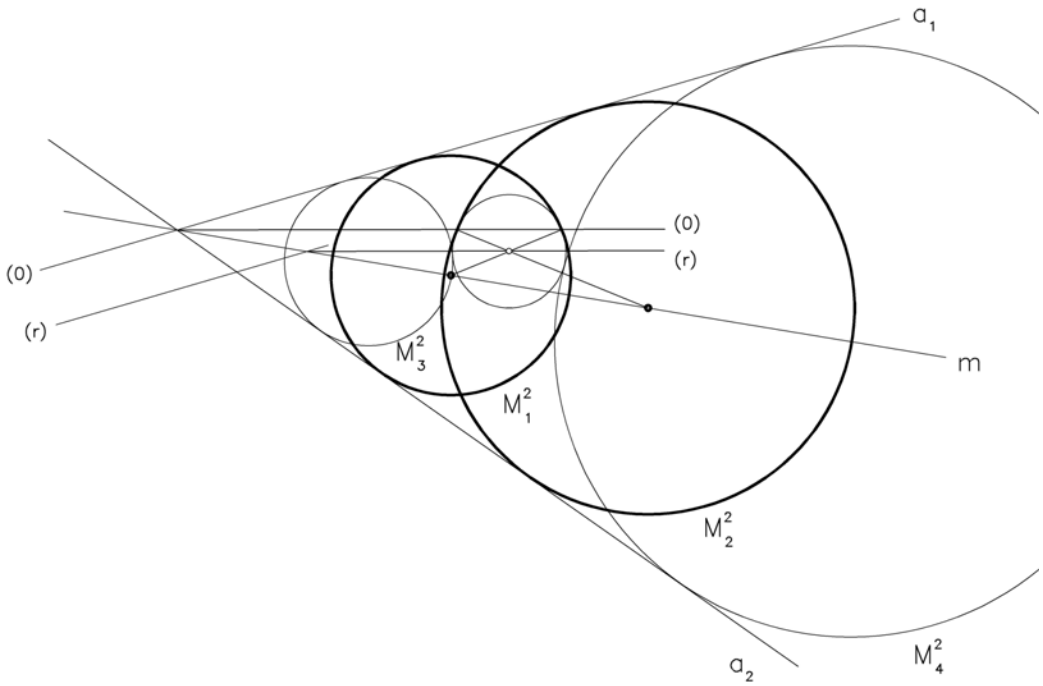
5) Adottak az a_1, a_2 egyenesek és a K^2 kör. Szerkesztendők ezeket érintő körök.

Megoldás

Az irányítással ellátott egyenesekhez C-síkokat rendelünk. Ezek metszésvonalával kell metszenünk az irányított körhöz rendelt C-kúpot. Az egyenesek és a kör elhelyezkedése szerint a következő eseteket különböztethetjük meg:

- Nincs megoldása a feladatnak, ha a két egyenes párhuzamos és a körnek nincs közös pontja az egyenesekkel és azok ugyanazon oldalán helyezkedik el.

- Egy megoldás van, ha az egyik egyenest érinti a kör és mindkét egyenesnek ugyanazon az oldalán helyezkedik el.
- Két megoldás van, ha két egyenes párhuzamos és a kör metszi az egyiket, ha mindkettőt metszi, akkor négy megoldás van.
- Ha a két egyenes párhuzamos és a kör közöttük helyezkedik el és érinti valamelyik egyenest, akkor három megoldás van, ha nem érinti egyiket sem akkor négy megoldása van a feladatnak. Ha a két egyenes párhuzamos és a kör érinti mindkét egyenest, akkor a megoldások száma kettő.
- Ha a két egyenes metsző és a kör metszi mindkét egyenest, akkor a megoldások száma nyolc, egyébként négy. (37. ábra) Az M_1^2 és M_2^2 megoldások szerkesztésekor a K^2-t pozitívan irányítottunk. Az M_3^2 és M_4^2 megoldások szerkesztését az ábra nem tartalmazza.



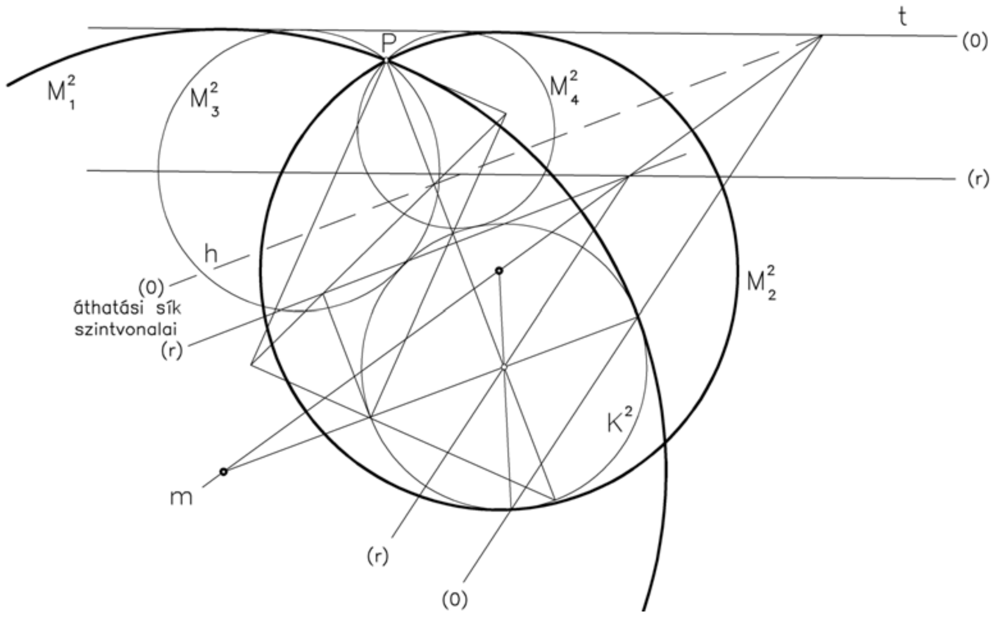
37. ábra

6) Adott a P pont, a K^2 kör és a t egyenes. Szerkesztendők a P-n áthaladó, a kört és az egyenest érintő körök.

Megoldás

A ponthoz és az irányítással ellátott körhöz tartozó kúpok áthatási síkjának és az irányított t egyeneshez tartozó C-sík metszésvonalával döfjük az egyik kúpot.

- Nincs megoldása a feladatnak, ha a P pontot és a K^2 kört a t egyenes különböző oldalán vesszük fel, vagy ha a körnek és az egyenesnek nincs közös pontja és a kör tartalmazza P-t.
- Két megoldása van a feladatnak, ha a kör és az egyenes metszi egymást.
- Egy megoldás van, ha a kör és az egyenes érinti egymást és a pont a körön belül van vagy az egyenesnek a körrel átellenes oldalán.
- Három megoldás van, ha a kör érinti az egyenest és a pont az egyenes ugyanazon az oldalán helyezkedik el, mint a kör.
- A többi esetben, tehát ha a körnek és az egyenesnek nincs közös pontja és a pont és a kör az egyenes ugyanazon az oldalán helyezkedik el, a feladatnak négy megoldása van. (38. ábra)



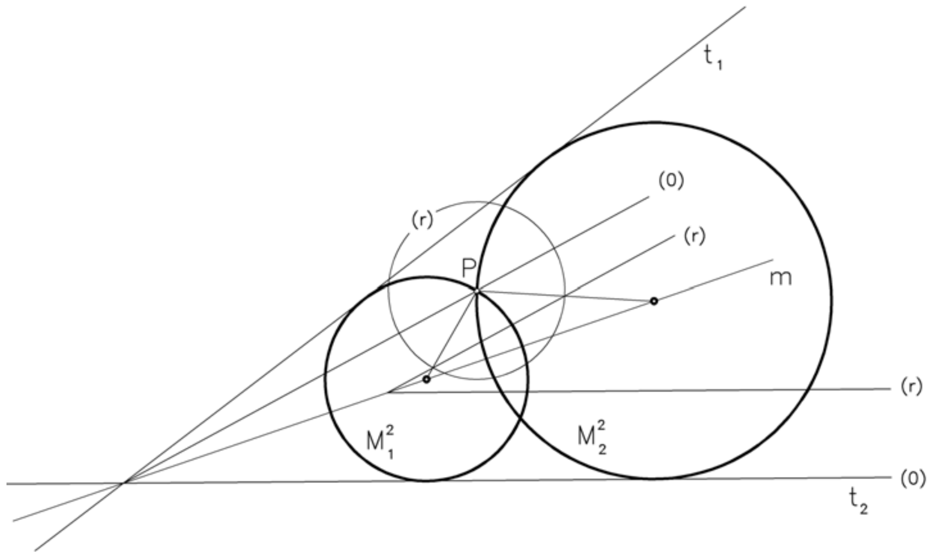
38. ábra

Az M_1^2 és M_2^2 megoldások szerkesztésekor a K^2-t pozitívan irányítottunk. Az M_3^2 és M_4^2 megoldások szerkesztését az ábra nem tartalmazza.

7) Adott a P pont és a t_1, t_2 egyenes. Szerkesztendők s ponton áthaladó és az egyeneseket érintő körök.

Megoldás

Az irányítással ellátott két egyeneshez tartozó C-síkok metszésvonalával döfjük a P ponthoz tartozó C-kúpot. A feladatnak nincs megoldása, ha a két egyenes párhuzamos és a P pont a két egyenes ugyanazon oldalán van, más esetekben a feladatnak két megoldása létezik. (39. ábra)



39. ábra

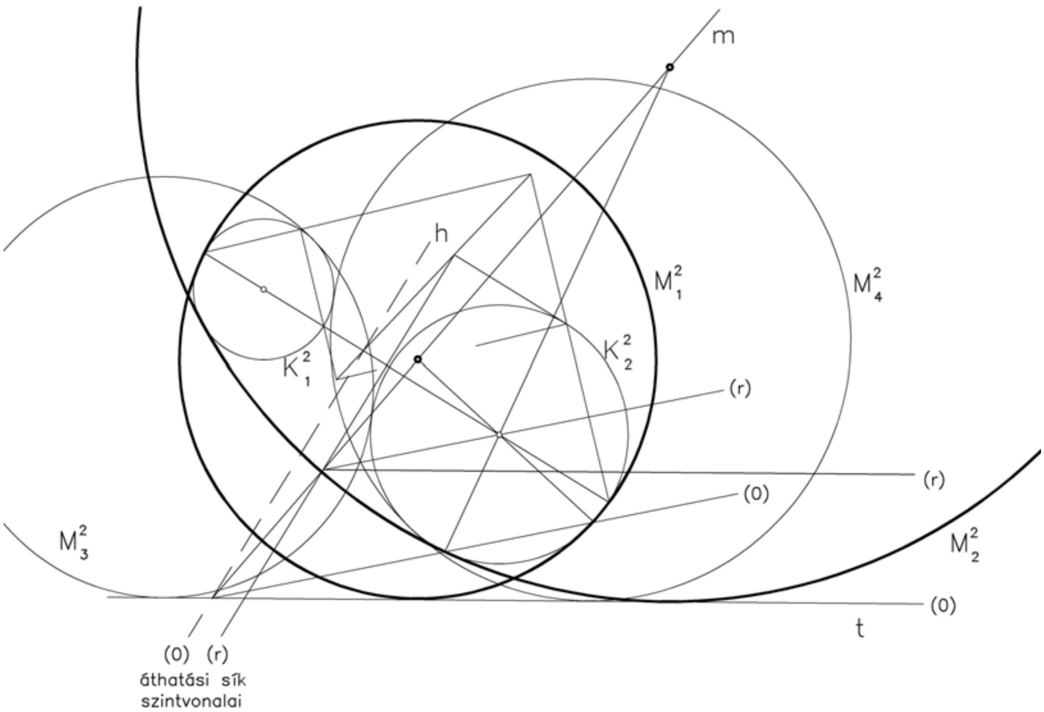
8) Adott a t egyenes és a K_1^2, K_2^2 kör. Szerkesztendők a két kört és az egyenest érintő körök.

Megoldás

A megoldásokat az egyenes és a körök különböző irányítása mellett a C-sík és a C-kúpok közös pontjainak a ciklografikus képei adják.

- A feladatnak nincs megoldása, ha a nagyobb kör tartalmazza a kisebbet és az egyenesnek nincs közös pontja a körökkel, és akkor sincs megoldás, ha a körök az egyenes különböző oldalán helyezkednek el és nincs közös pontjuk az egyenessel.
- Egy megoldás van, ha a körök sugara megegyezik, az egyenest mindkettő érinti és az egyenes ugyanazon az oldalán helyezkednek el.
- Két megoldás van, ha mindkét kör érinti az egyenest, vagy ha az egyik kör tartalmazza a másikat, és az egyenes érinti a külső kört.

– Öt megoldás van, ha az egyik kör érinti az egyenest, a másik pedig metszi a kört és az egyenest is.
– Hat megoldás van, ha az egyik kör érinti az egyenest, a másik kör azzal azonos oldalon van és nincs közös pontja sem a körrel, sem az egyenessel. Hat megoldás van akkor is, ha a két kör érinti egymást, és az egyenesnek nincs közös pontja velük.
– Nyolc megoldás van, ha mindkét kör metszi az egyenest és egymást is, vagy ha a körök az egyenes ugyanazon oldalán vannak, és nincs közös pontjuk sem az egyenessel, sem egymással. (40.ábra)
– Végtelen sok megoldás van, ha a körök az egyenest ugyanabban a pontban érintik. A többi esetben négy megoldása van a feladatnak.



40. ábra

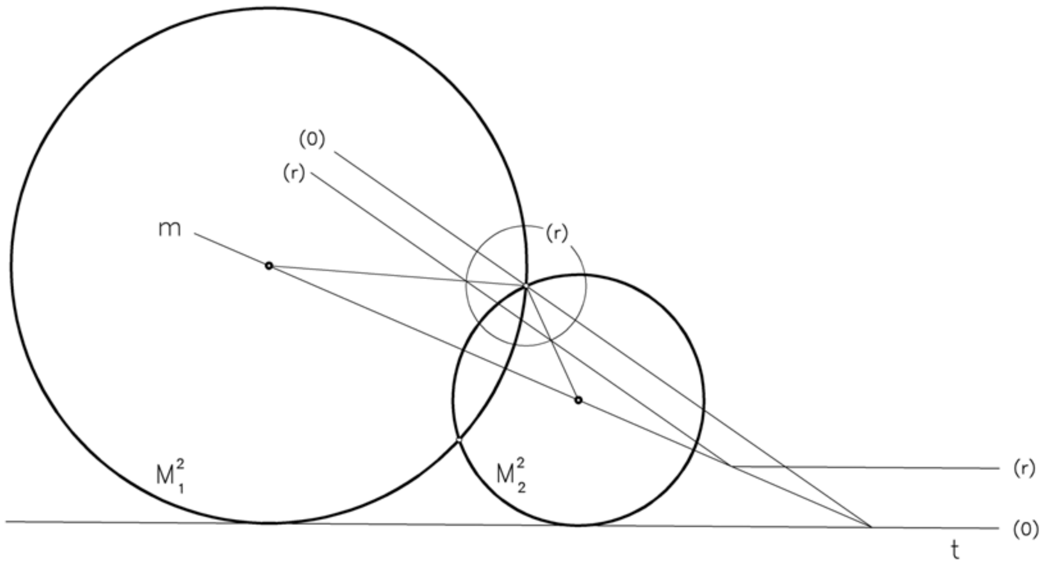
Az M_1^2 és M_1^2 megoldások szerkesztésekor az adott köröket pozitívan irányítottunk. Az M_3^2 és M_4^2 megoldások szerkesztését az ábra nem tartalmazza. A további négy megoldást nem tüntettünk fel.

9) Adott az A, B pont és a t egyenes. Szerkesztendők A, B-n áthaladó és a t egyenest érintő körök.

Megoldás

A megoldást itt is a pontokhoz tartozó C-kúpok és az egyeneshez tartozó C-sík közös pontjainak a ciklografikus képei adják.

- Nincs megoldása a feladatnak, ha a két pont az egyenes különböző oldalán helyezkedik el.
- Egy megoldás van, ha a két pont az egyenes ugyanazon az oldalán, az egyenestől egyenlő távolságra helyezkedik el.
- Két megoldása van a feladatnak minden más esetben. Az egyenes kétféle irányítása ugyanazt a megoldást adja, mivel a közös pontok képsíkra szimmetrikusan helyezkednek el. (41. ábra)



41. ábra

Apollóniusz feladatának általánosítása: adott kört merőlegesen vagy diametrálisan metsző körök keresése

Apollóniusz feladatának általánosításaként fogható fel az a feladat, amikor adott köröket merőlegesen[1] vagy diametrálisan[2] metsző köröket keresünk.

Egy kört két adott, átellenes pontjában metsző körök összessége körsort alkot. Ezt a körsort a síkjában elforgatva környalábot kapunk. A sík egy rögzített körét merőlegesen metsző körökhöz a térben egy egyenlő oldalú hiperboloid[3] rendelhető, amely hiperboloid pontjainak ciklografikus képei a rögzített kört merőlegesen metsző körök, a rögzített kör a hiperboloid torokköre. A torokkör lehet képzetes (a hiperboloid ekkor kétköpenyű) vagy valós (a hiperboloid ekkor egyköpenyű). Ha a torokkör képzetes, akkor az azt merőlegesen metsző kör a képzetes kör valós reprezentánsát átellenesen (diametrálisan) fogja metszeni.

Egy egyenlő oldalú hiperboloid tengelyével párhuzamos síkmetszetei mindig olyan egyenlő oldalú hiperbolát eredményeznek, melynek valós tengelye vagy a képsíkban van, vagy arra merőleges. Két ilyen párhuzamos tengelyű hiperboloid áthatása két másodrendű görbére esik szét, melyek közül az egyik vételen távoli. A végesben fekvő áthatási görbe síkja a hiperboloidok tengelyével párhuzamos, ezért a végesben fekvő áthatási görbe egyenlő oldalú hiperbola.

---

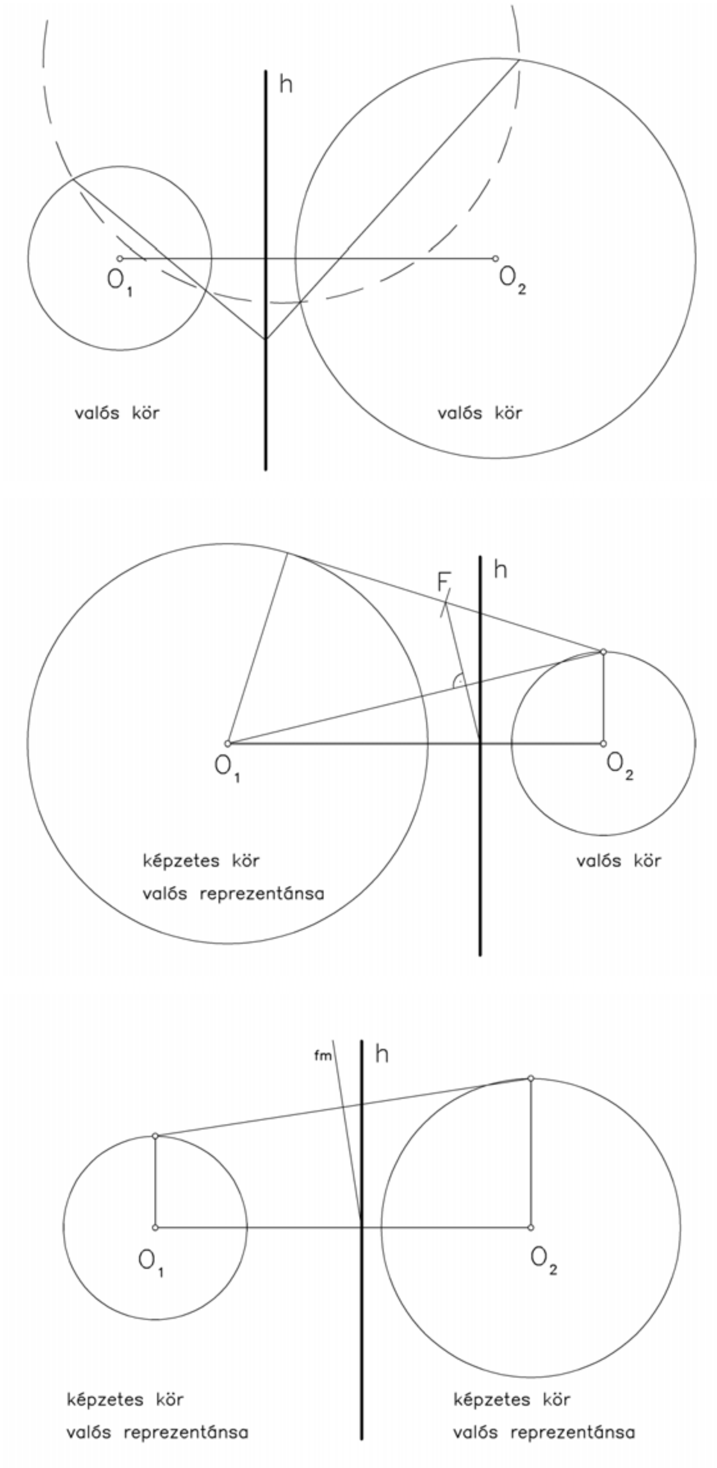
[1] Két kör merőlegesen metszi egymást, ha a közös pontba húzott érintőik egymásra merőlegesek.

[2] Egy kör egy másik kört diametrálisan (átellenes pontokban) metsz, ha a metszéspontokat összekötő szakasz a kisebb sugarú kör átmérője.

[3] Egy hiperboloidot akkor nevezünk egyenlő oldalúnak, ha a valós és képzetes tengelye egyenlő. Ebből az is következik, hogy az aszimptotái egymásra merőleges egyenesek.

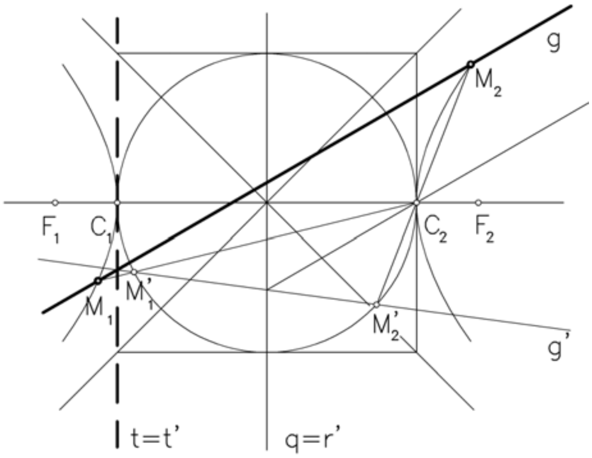
Az áthatási görbe meghatározásánál még felhasználjuk a következő tételt:

Két olyan egyenlő oldalú hiperboloid, melyik torokkörei a képsíkban vannak, áthatási síkja vetítősík, melynek nyomvonala a torokkörök hatványvonala. Hatványvonal szerkesztése a 42. ábrán látható módon végezhető el.



42. ábra

A szerkesztések során gyakran előfordul, hogy egy hiperbola és egy egyenes metszéspontjait kell meghatározni. Ezt mindig a 43. ábrán látható centrális kollineáció segítségével végezhetjük el.



43. ábra

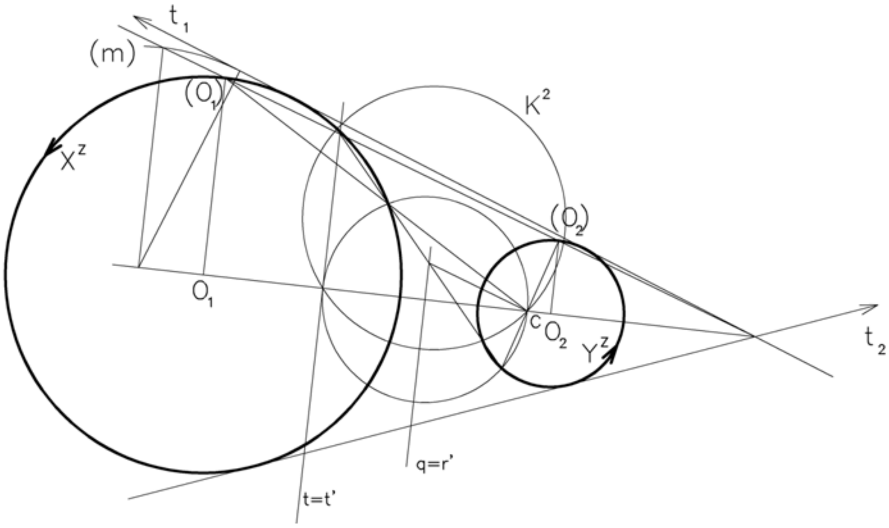
Feladatok

1) Adottak a t_l, t_2 dárdák és a K^2 kör. Szerkesztendők azok a ciklusok, melyek a két dárdát érintik, és a kört merőlegesen metszik.

Megoldás

A két C-sík metszésvonalával döfjük a K^2 körhöz tartozó egyköpenyű hiperboloidot. A szerkesztés menete s következő:

I. a két C-sík metszésvonalára vetítősíkot helyezünk és a hiperboloidot metsszük a vetítősíkkal.
II. A síkmetszetet a képsíkba forgatjuk.
III. Centrális kollineáció segítségével megkeressük a síkmetszet-hiperbola és az m metszésvonal metszéspontjait.
IV. A metszéspontokat visszaforgatjuk. (44.ábra)

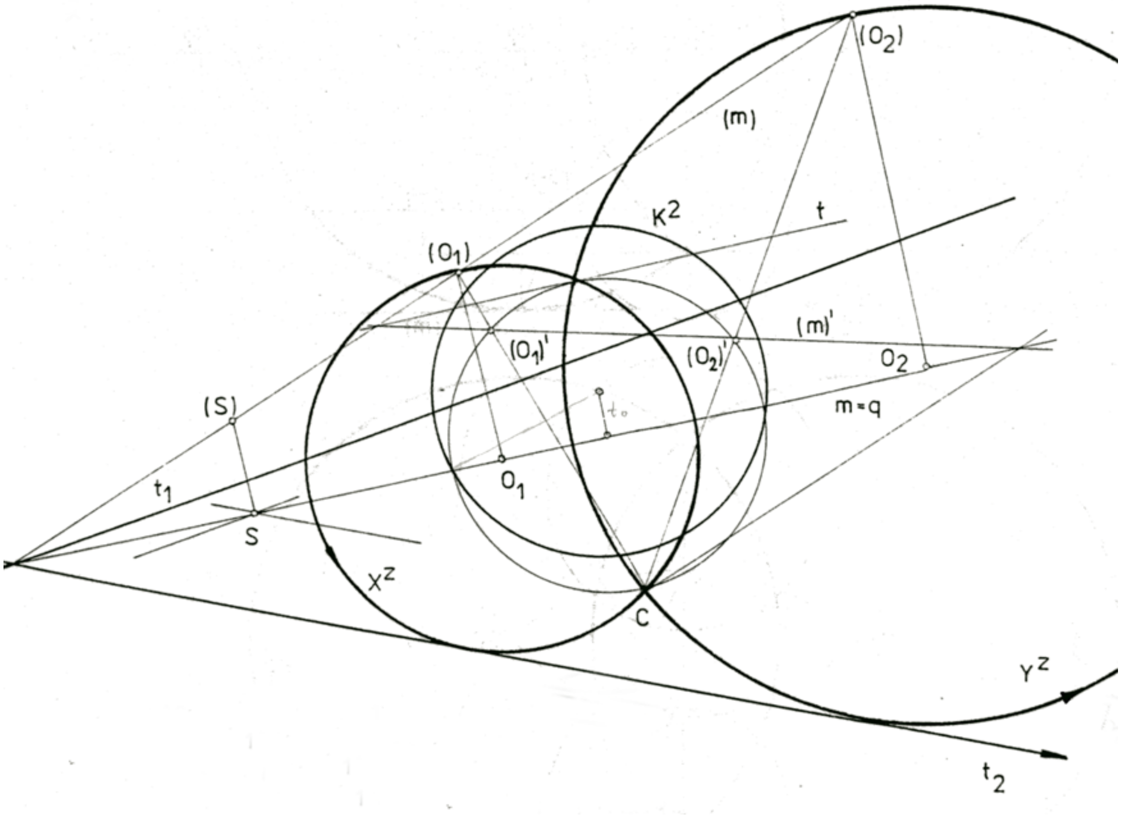


44. ábra

2) Adott a t_l, t_2 dárda és a K^2 kör. Szerkesztendők azok a ciklusok, melyek a t_l dárdát α_1 szög alatt metszik, melyre $\cos\alpha_1 = \frac{1}{3}$, a t_2 dárdát érintik, a kört pedig átellenes pontokban metszik.

Megoldás

A K^2 körhöz tartozó kétköpenyű hiperboloidot a t_l dárdához tartozó C-sík és a t_2 dárdához tartozó adott képsíkszögű sík metszésvonalával döfjük. A közös pontok ciklografikus képe a megoldás ciklus. (45.ábra)

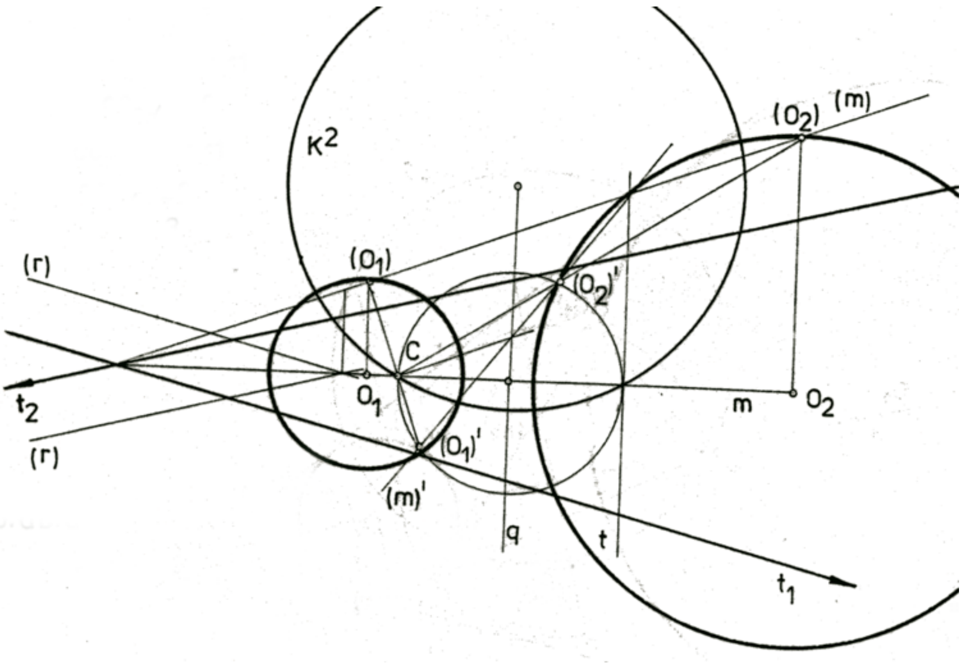


45. ábra

3) Adott a t_l, t_2 dárda és a K^2 kör. Szerkesztendők a dárdákat adott koszinuszú szögek alatt metsző, a kört merőlegesen metsző ciklusok. ($\cos\alpha_1 = \dfrac{2}{3}$ és $\cos\alpha_2 = \dfrac{3}{4}$ legyen)

Megoldás

A dárdákhoz megszerkesztjük az adott képsíkszögű síkokat, majd ezek metszésvonalával döfjük a K^2 körhöz tártotó egyköpenyű hiperboloidot. Ehhez először megkeressük a hiperboloid síkmetszetét a metszésvonal vetítősíkjával, ez egy hiperbola és ennek keressük a metszéspontját a két sík metszésvonalával centrális kollineáció segítségével. (46.ábra)

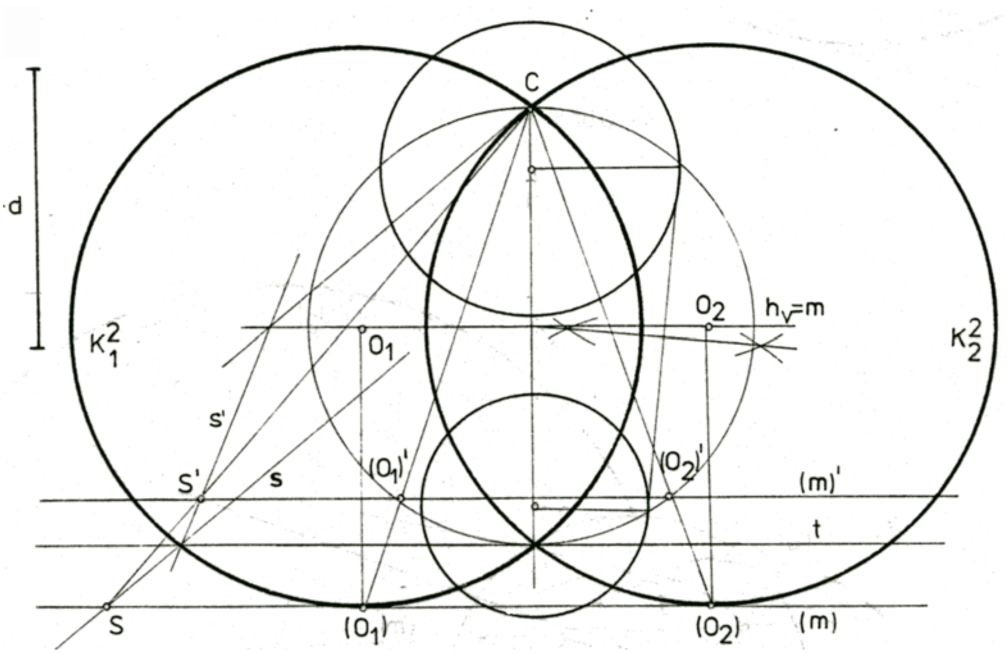


46. ábra

4) Szerkesztendők adott sugarú, adott két kört átellenes pontokban metsző körök.

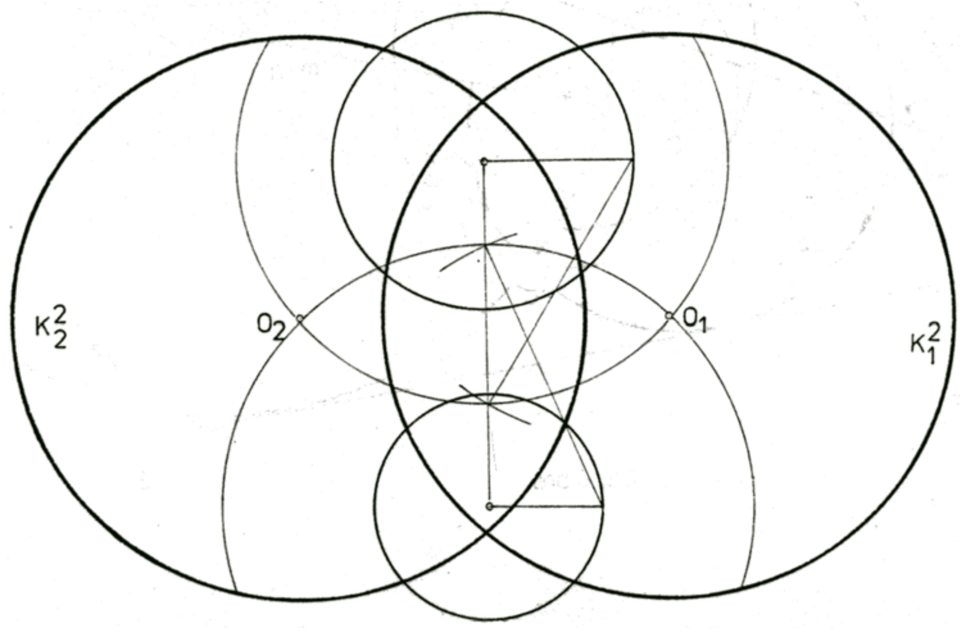
Megoldás

Az adott két körhöz tartozó két kétköpenyű hiperboloid áthatási síkjának és az adott magasságú szintsíknak a metszésvonalával döfjük valamelyik hiperboloidot. Két képzetes kör hatványvonalának szerkesztésével már a bevezetőben találkoztunk. Ez lesz a két hiperboloid áthatási síkjának nyomvonala. Most is centrális kollineáció segítségével szerkesztjük meg a hiperbola és a metszésvonal közös pontjait. A megoldásköröket K_1^2-vel illetve K_2^2-vel jelöltük. (47.ábra)



47./a ábra

A 47/b ábrán adott magasságban lévő metszetkörök segítségével oldottuk meg a feladatot.

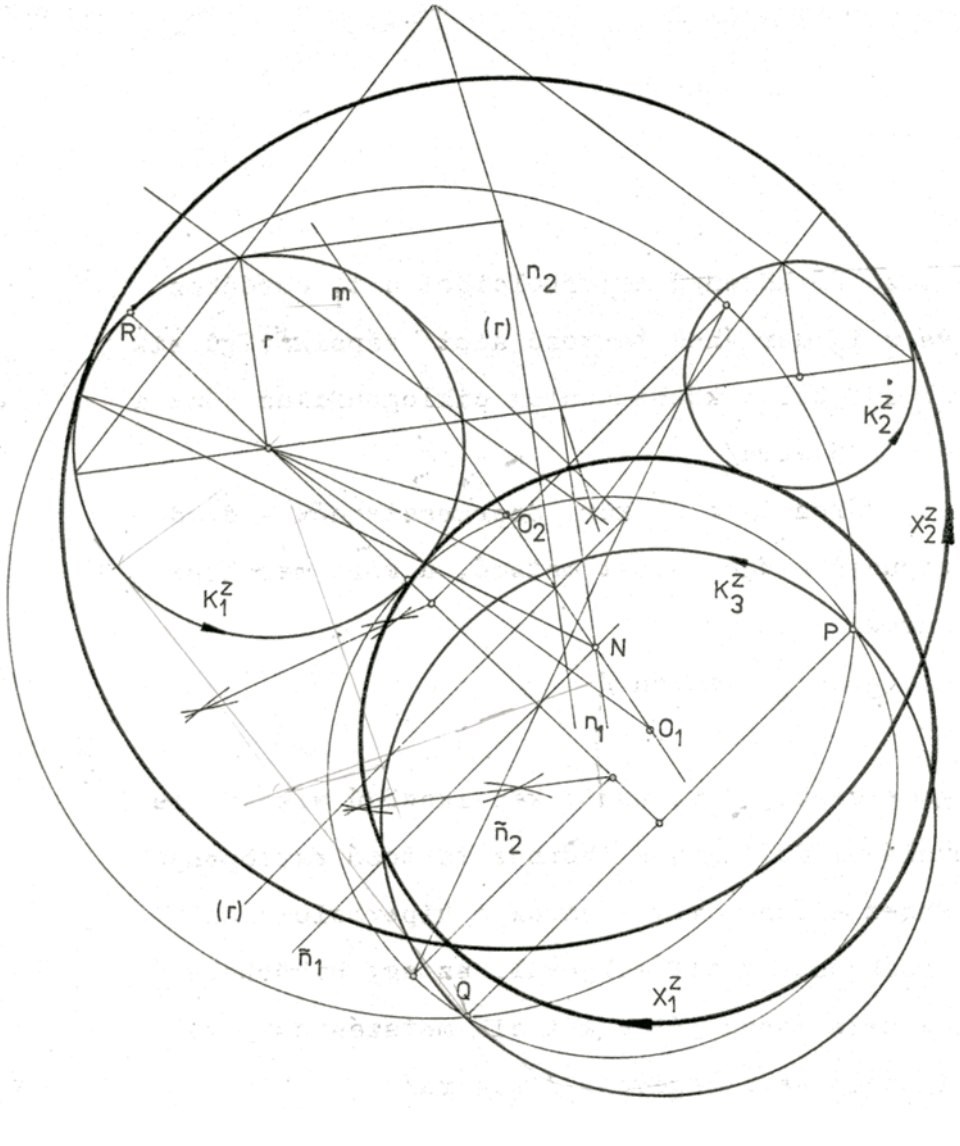


47./b ábra

5) Adottak a K_1^Z, K_2^Z, K_3^Z ciklusok. Szerkesztendők a K_1^Z-t és K_2^Z-t érintő, K_3^Z-t átellenes pontokban metsző ciklusok.

Megoldás

A K_1^Z-hez és K_2^Z-hez tartozó C-kúpok és a K_3^Z-hez tartozó kétköpenyű hiperboloid áthatása adja a megoldásokat. Először a két C-kúp áthatási síkját határozzuk meg, majd egy C-kúp és a kékköpenyű hiperboloid áthatási síkját. A két áthatási sík metszésvonalával döfjük az egyik C-kúpot, a döféspontok ciklografikus képei, X_1^Z és X_2^Z a megoldáscikusok. Az áthatási síkok metszésvonalának meghatározásakor Monge-rendszereket vezettünk be, ezek segítségével a szerkesztés egyszerűbben végezhető el.

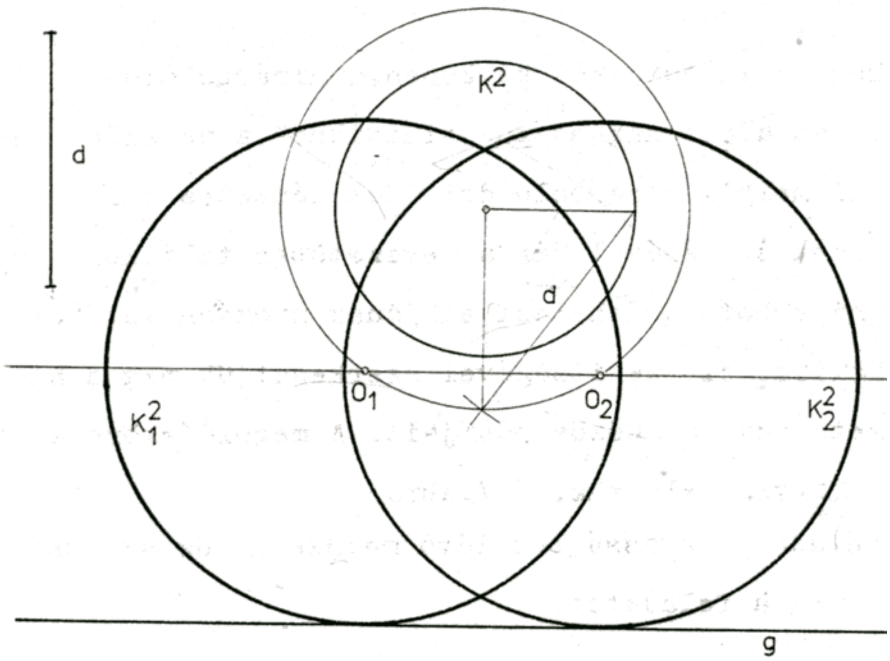


48. ábra

6) Adott a K^2 kör és a g egyenes. Szerkesztendők a kört átellenes pontokban metsző és az egyenest érintő körök, melyek sugara előre adott.

Megoldás

Az egyenesre illeszkedő C-sík és a szintsík metszésvonalával döfjük a körhöz tartozó kétköpenyű hiperboloidot. A hiperboloidnak az adott szintsíkban lévő körmetszetét keressük meg. A feladatnak kettő, egy vagy nulla megoldása van attól függően, hogy a C-sík és a szintsík metszésvonalának kettő, egy vagy nulla közös pontja van a kétköpenyű hiperboloiddal. A megoldásköröket K_1^2-vel illetve K_2^2-vel jelöltük. (49.ábra)

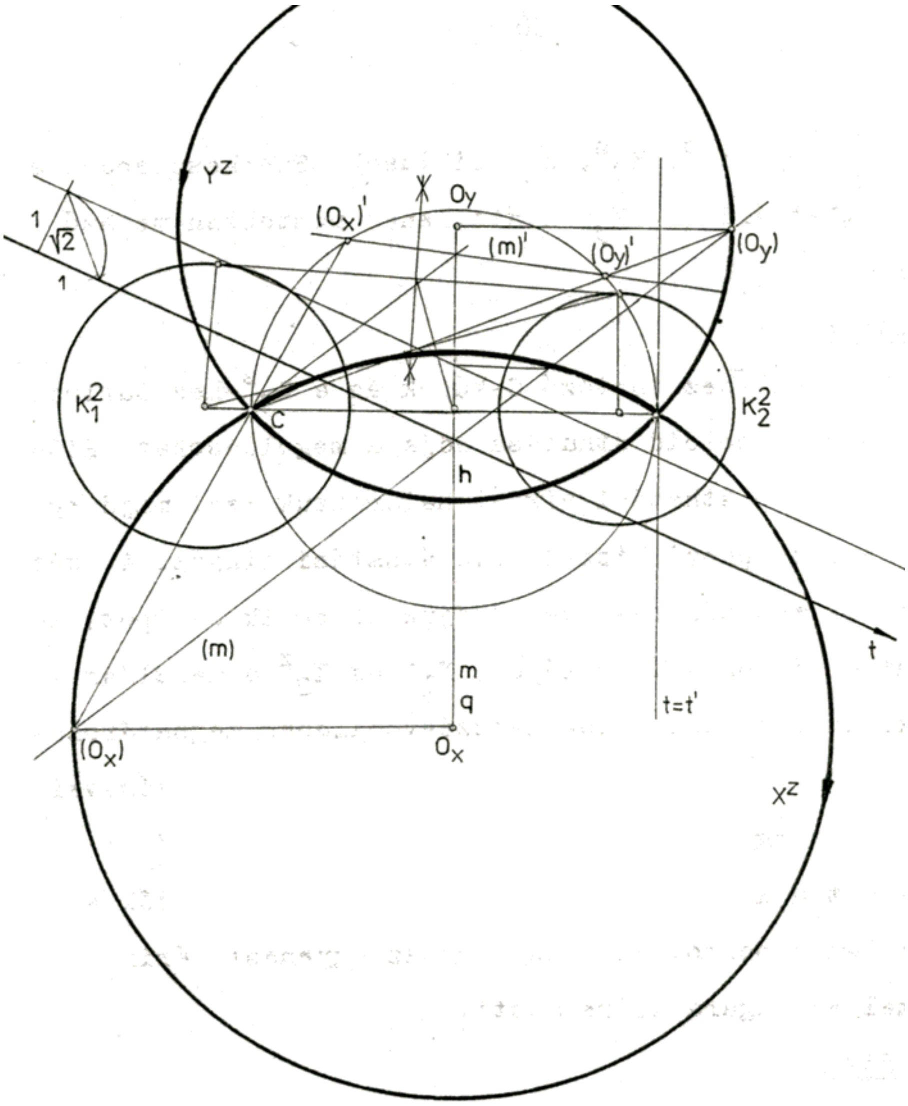


49. ábra

7) Adott a K_1^2, K_2^2 kör és egy t dárda. Szerkesztendők a K_1^2 kört merőlegesen, a K_2^2 kört diametrálisan, a t dárdát adott koszinuszú szög alatt metsző ciklusok. ($\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ legyen)

Megoldás

A K_1^2 körhöz tartozó egyköpenyű hiperboloid és a K_2^2 körhöz tartozó kétköpenyű hiperboloid áthatási síkját kell először meghatározni. Ehhez szükség van egy valós és egy képzetes kör hatványvonalának a meghatározására. Ezzel a szerkesztéssel már találkoztunk a 42. ábrán. Utána meg kell határoznunk ennek az áthatási síknak és a t dárdára illeszkedő adott képsíkszögű síknak a metszésvonalát, majd ezzel az egyenessel döfjük valamelyik hiperboloidot. A döféspont meghatározását centrális kollineáció segítségével hajtjuk végre. A megoldások száma nulla, egy vagy kettő lehet. A szerkesztést az 50. ábrán láthatjuk.

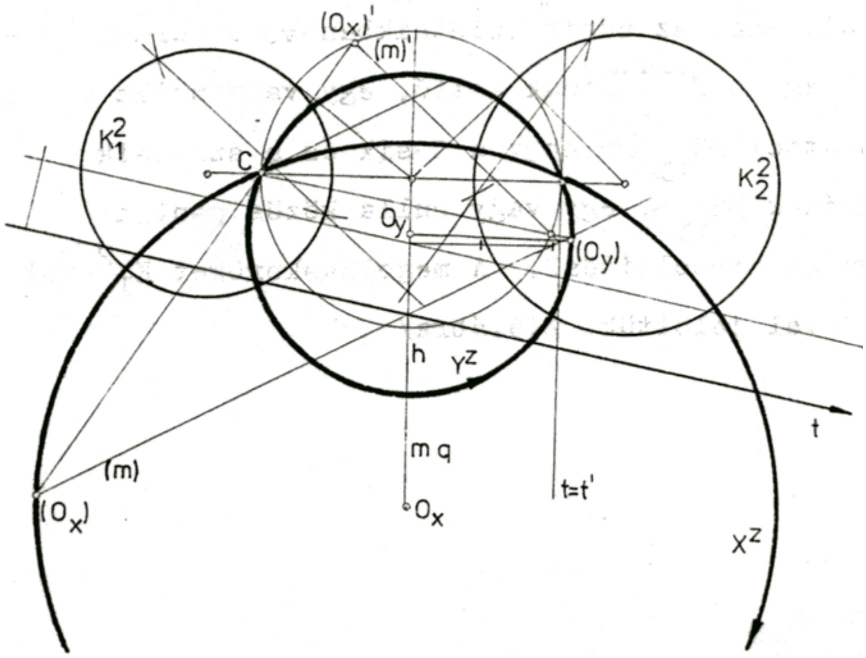


50. ábra

8) Adott a K_1^2, K_2^2 kör és egy t dárda. Szerkesztendők a két kört merőlegesen, és az adott dárdát adott koszinuszú szög alatt metsző ciklusok. ($\cos\alpha = \frac{1}{2}$ legyen)

Megoldás

Meghatározzuk a két körhöz tartozó két egyköpenyű hiperboloid áthatási síkját. Ennek a síknak megkeressük a metszésvonalát a t dárdához tartozó adott képsíkszögű síkkal. Ezzel a metszésvonallal döfjük valamelyik hiperboloidot. A két egyköpenyű hiperboloid áthatási síkjának nyomvonala a hiperboloidok torokköreinek hatványvonala. Ezek most valós körök. Két valós kör hatványvonalának a meghatározását a 42. ábrán láthatjuk. Az egyenes és az egyik hiperboloid döféspontjait most is centrális kollineáció segítségével kerestük meg. A megoldások száma nulla, egy vagy kettő lehet. (51.ábra)

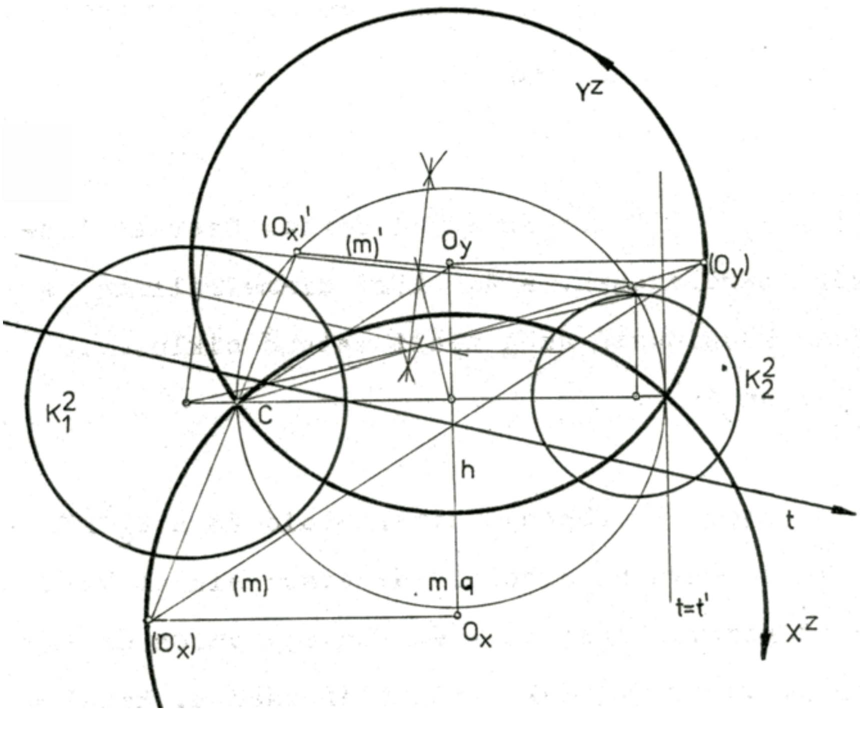


51. ábra

9) Adott egy K_1^2, K_2^2 kör és égy t dárda. Szerkesztendők a K_1^2 kört merőlegesen, K_2^2 kört diametrálisan metsző ciklusok, melyek a t dárdát adott koszinuszú szög alatt metszik. ($\cos\alpha = \frac{2}{3}$ legyen)

Megoldás

Meghatározzuk a K_1^2 körhöz tartozó egyköpenyű hiperboloid áthatási síkját a K_2^2 körhöz tartozó kétköpenyű hiperboloiddal. Az áthatási sík nyomvonala egy valós és egy képzetes kör hatványvonala. A szerkesztést a 42. ábrán láthatjuk. Meghatározzuk az áthatási sík és a dárdához tartozó adott képsíkszögű sík metszésvonalát. Ezzel a metszésvonallal döfjük valamelyik hiperboloidot. A döféspontok ciklografikus képe adja a megoldást. Megoldások száma nulla, egy vagy kettő lehet. (52. ábra)

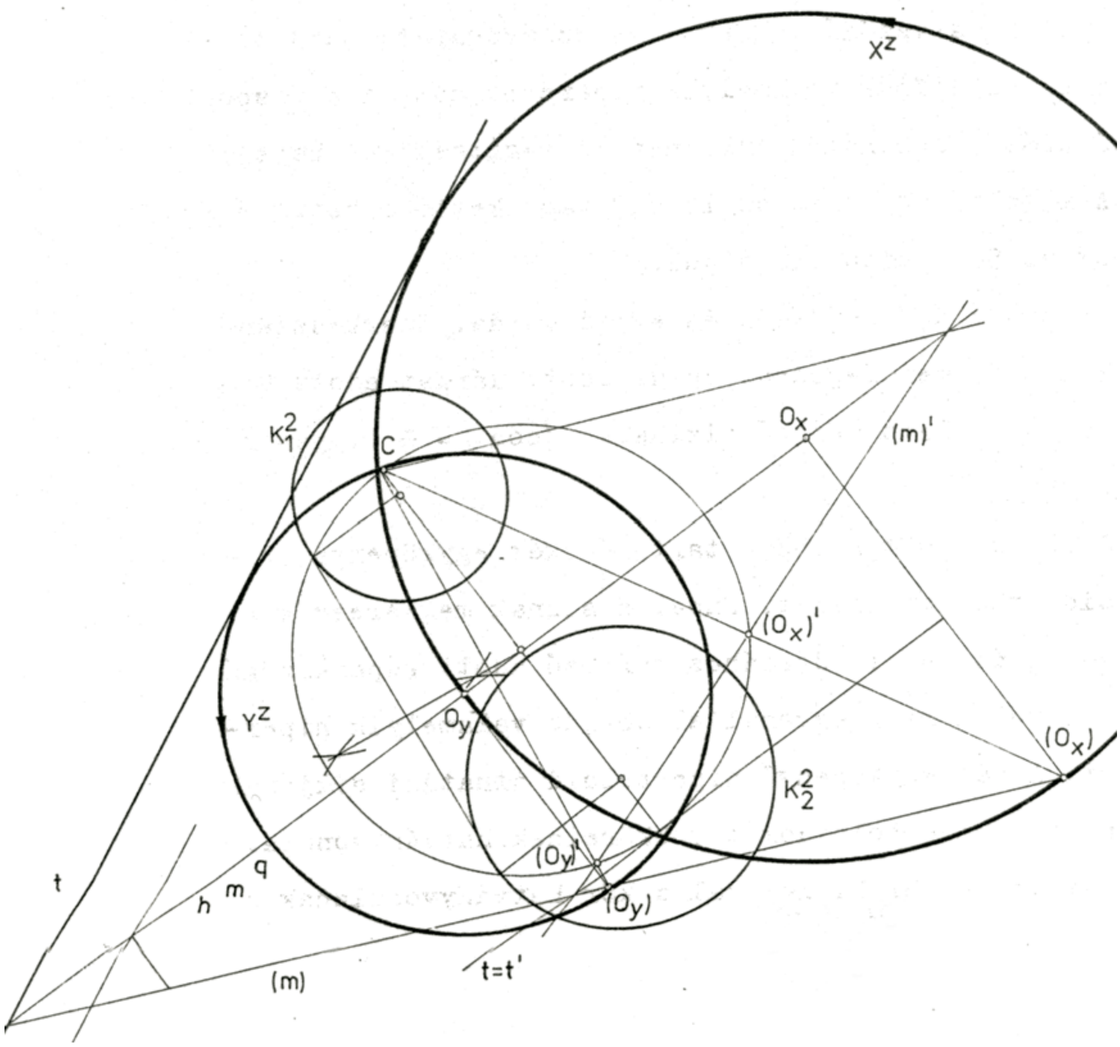


52. ábra

10) Adott egy K_1^2, K_2^2 kör és egy t dárda. Szerkesztendők mindkét kört diametrálisan metsző és a dárdát érintő ciklusok.

Megoldás

Meghatározzuk a két körhöz tartozó kétköpenyű hiperboloidok áthatási síkját. A sík nyomvonala a két képzetes torokkör hatványvonala. A hatványvonal szerkesztését a 42.ábrán figyelhetjük meg. Az áthatási síknak megkeressük a metszésvonalát a dárdához tartozó C-síkkal. A metszésvonallal döfjük valamelyik hiperboloidot. A megoldások száma itt is nulla, egy vagy kettő lehet aszerint, hogy a metszésvonalnak hány közös pontja van a hiperboloiddal. A szerkesztés az 53. ábrán látható.



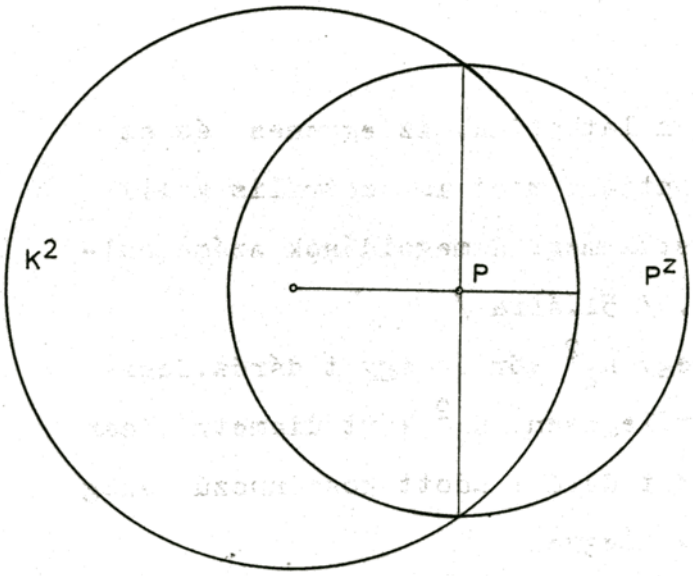
53. ábra

11) Adottak a K_1^2, K_2^2, K_3^2 körök. Szerkesztendő mindhármat diametrálisan metsző kör.

Megoldás

Meghatározzuk két-két körhöz tartozó két-két kétköpenyű hiperboloid áthatási síkjait. A három sík közös pontja adja a megoldást.

A feladatot másféleképpen is megoldhatjuk, Ehhez vizsgáljuk meg, milyen kapcsolat van a gömbi pontok ciklografikus képei és a képsíkban fekvő gömbi főkör között! (A gömb középpontja a képsíkon van.) A gömb felületén válasszunk ki egy tetszőleges P pontot és szerkesszük meg P-nek P^Z ciklografikus képét! Mivel P képe egy akkora sugarú kör, amekkora távolságra van P a képsíktól, ezért a P pont P^Z képét a főkör diametrálisan metszi. Ez tetszőleges gömbi pontra fenn áll. (54.ábra)



54. ábra

Tétel

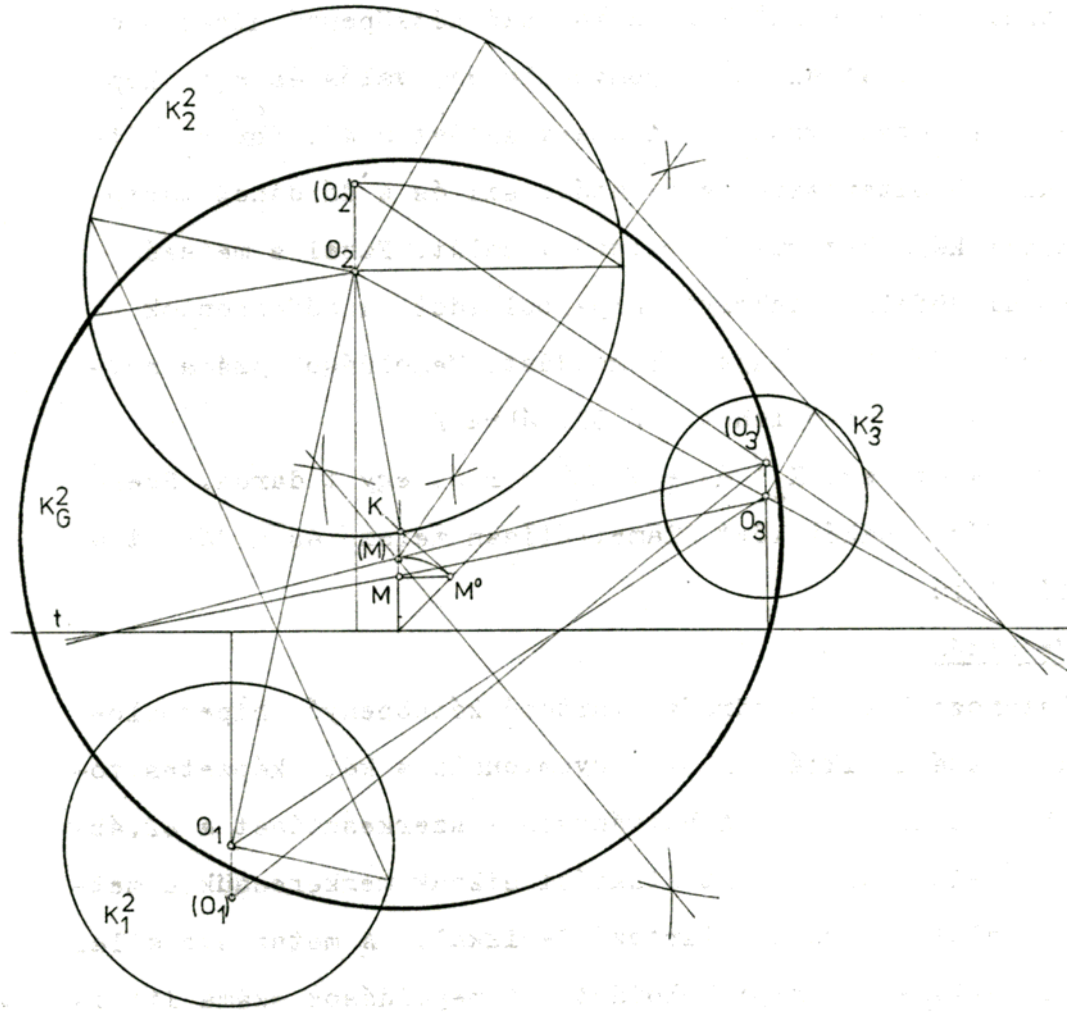
Azon körök összességéhez, melyeket egy adott kör átellenes pontokban metsz, a térben egy olyan gömb tartozik, melynek főköre az adott kör.

Megfordítva

A gömbön lévő pontok ciklografikus képét a gömb egy főköre átellenes pontokban metszi, ha a gömb középpontja a képsíkon van.

Ezek után a 11. feladat megoldása a következő

A három ciklushoz tartozó három pont meghatároz egy síkot. A gömbnek ezzel a síkkal való síkmetszete a három pont által meghatározott háromszög körülírt köre. Ezt a három pont által meghatározott sík képsíkba forgatása után határozzuk meg. Ennek középpontjában merőlegest állítunk a síkjára, ennek a merőlegesnek a képsíkkal való döféspontja adja a gömb főkörének a metszéspontját. (55.ábra)

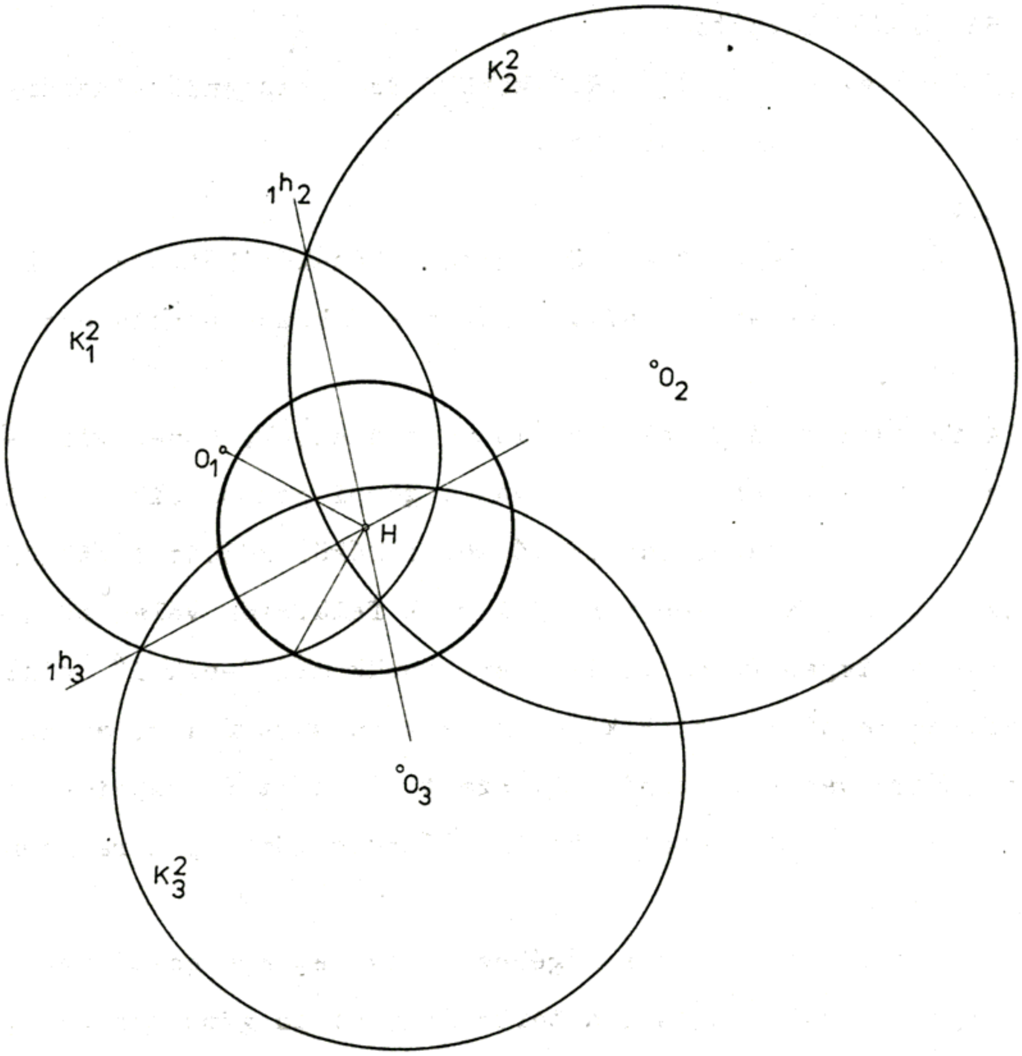


55. ábra

12) Adottak a K_1^2, K_2^2, K_3^2 körök, Szerkesztendő olyan kör, melyet mindhárom adott kör átellenes pontokban metsz

Megoldás

Az adott három körhöz, mint főkörhöz tartozó három gömb közös pontját kell megszerkeszteni. (56.ábra)

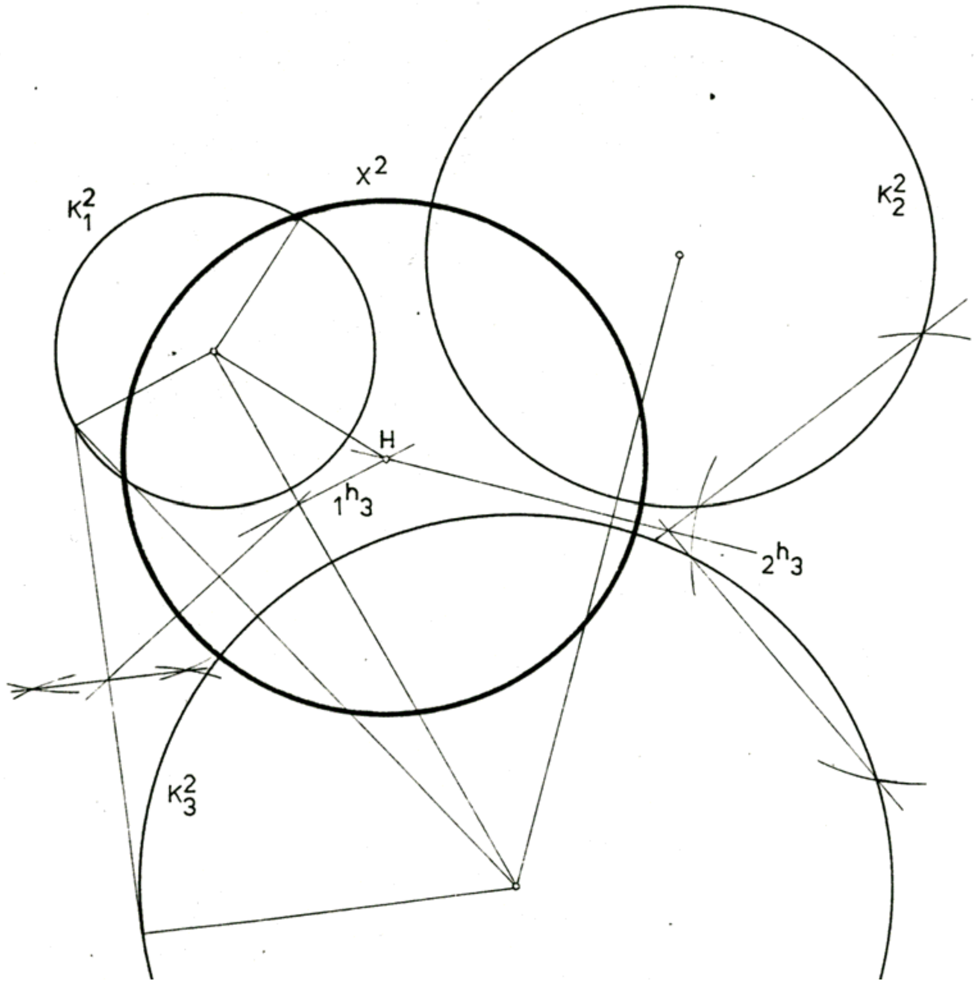


56. ábra

13) Adott a K_1^2 képzetes kör és a K_2^2, K_3^2 valós kör. Szerkesztendők azok a körök, melyek mindhárom kört merőlegesen metszik.

Megoldás

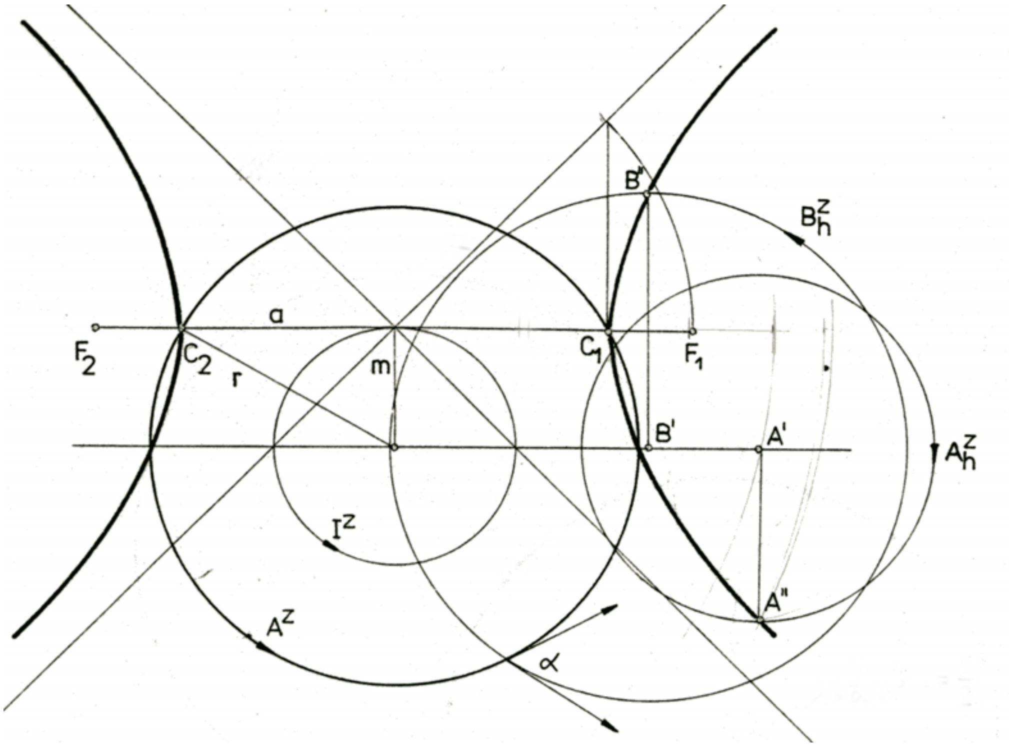
A K_2^2 kört és a K_3^2 kört merőlegesen metsző körökhöz két egyköpenyű forgáshiperboloid tartozik. A K_1^2 képzetes kört merőlegesen metsző körök a képzetes kör valós reprezentánsát átellenes pontokban metszik, tehát K_1^2 kört átellenes pontokban metsző körökhöz egy kétköpenyű forgáshiperboloid tartozik. A három felület közös pontjai adják a megoldást. Két ilyen felület áthatási síkja vetítősík. Meghatározom két-két felület áthatási síkjának metszésvonalát, ez vetítőegyenes. Megkeressük valamelyik hiperboloiddal való döféspontját. Ezek a képsíkra szimmetrikusan helyezkednek el, így a két megoldás egybeesik. (57. ábra)



57. ábra

Az Apollóniusz-feladat további általánosítása: egy ciklust tetszőleges valós vagy képzetes szögben metsző ciklusok keresése

Ebben a fejezetben olyan feladatok szerepelnek, amelyekben egy ciklust tetszőleges valós vagy képzetes szögben metsző ciklusokat keresünk. Ebben a fejezetben foglalkozunk ciklushoz olyan ciklus konstruálásával, amelynek az eredeti ciklussal előre adott nagyságú az érintőtávolsága.



58. ábra

Az 58. ábrán adott egy A^Z ciklus . Keressük azokat a ciklusokat, melyek ezt a ciklust $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ szög alatt metszik. Ezen ciklusokhoz tartozó pontok a térben egy egyenlő oldalú, egyköpenyű forgáshiperboloidot határoznak meg, melynek nyomgörbéje az adott ciklus. Bebizonyítható, hogy teljesülnek a következő összefüggések:

$\cos\alpha = \frac{m}{r}$ és $r^2 = m^2 + a^2$ ahol

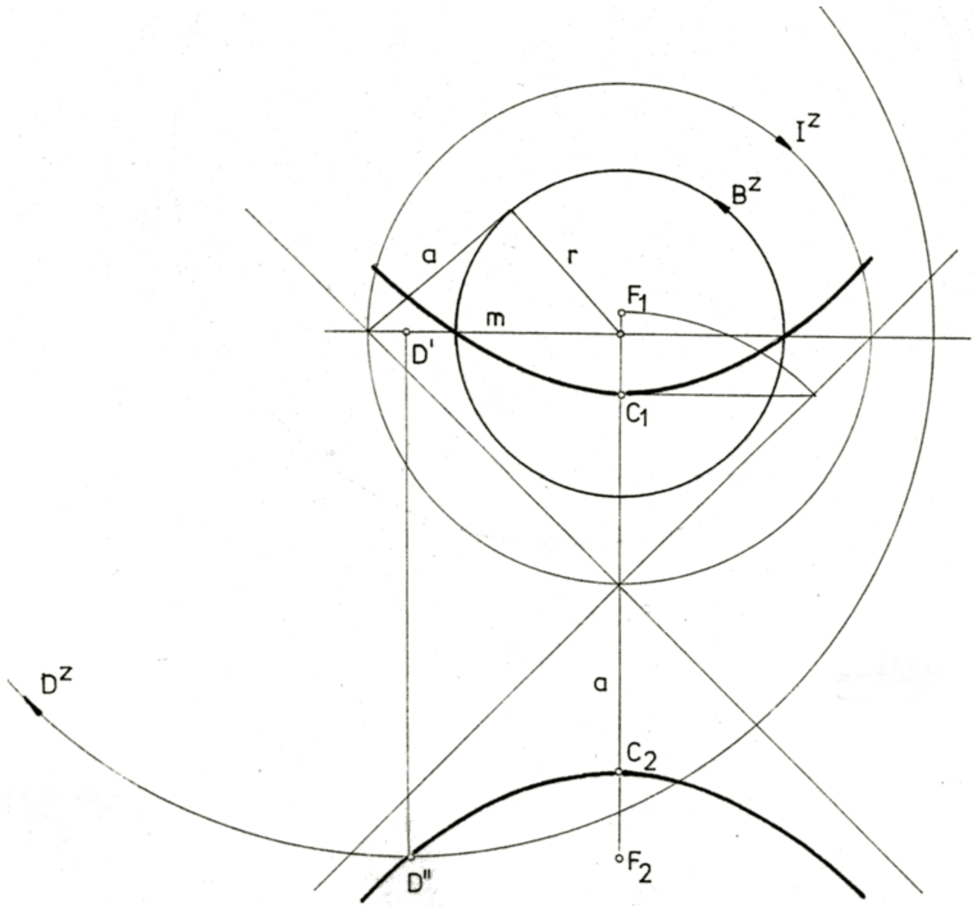
m: az iránykúp alapkörének sugara,

r: az adott ciklus sugara,

a: a hiperboloid torokkörének a sugara.

Ezt a hiperboloidot kell megkonstruálnunk. A hiperboloid pontjainak ciklografikus képei az adott ciklust $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ szög alatt metszik.

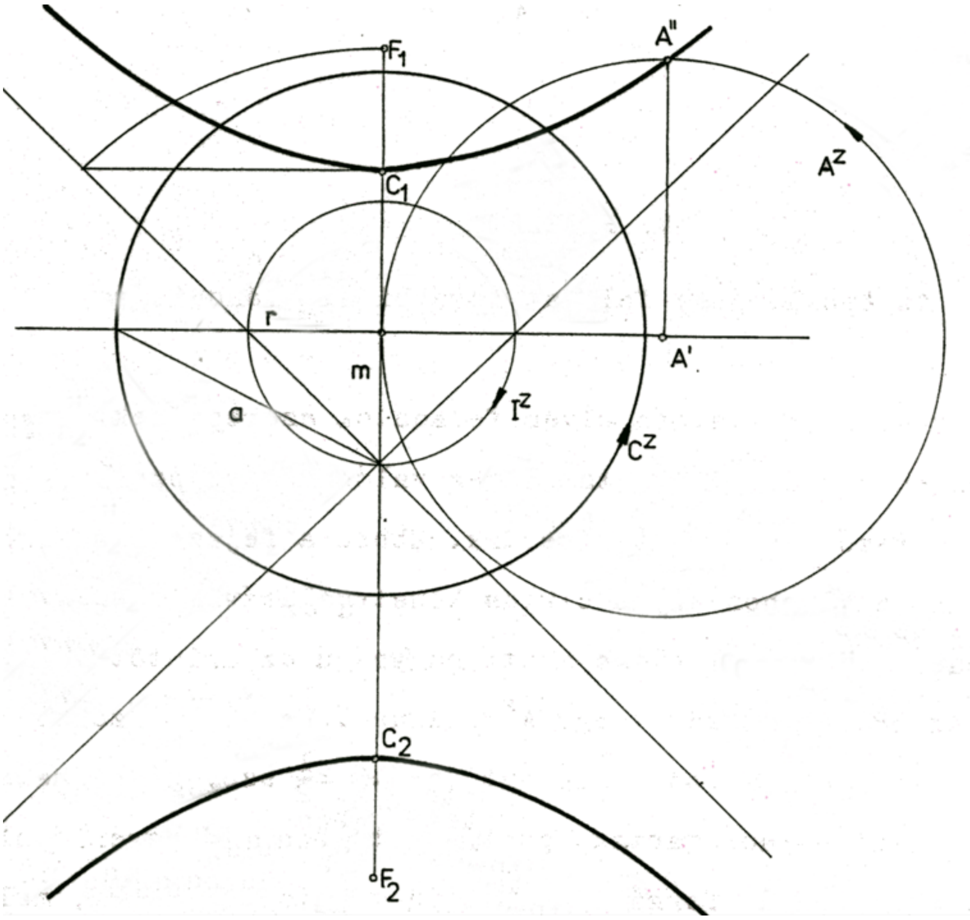
Vizsgáljuk meg azokat az eseteket, amikor egy ciklust képzetes szög alatt metsző ciklusokat keresünk!



59. ábra

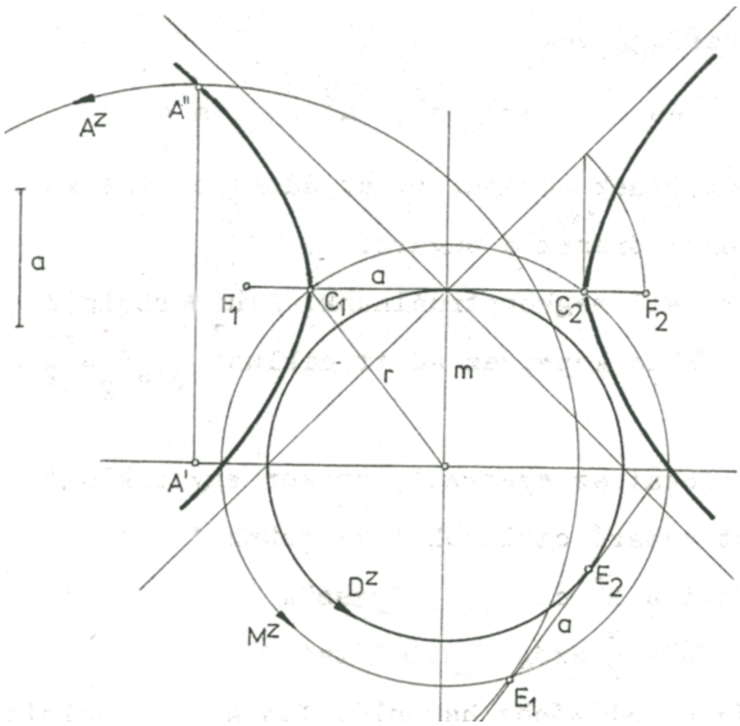
Az 59. ábrán adott a B^Z ciklus. Keressük azokat a ciklusokat, melyek $\cos\beta = -\frac{3}{2}$ szög alatt metszik az adott B^Z ciklust. Az eljárás az előzőhöz hasonló. Itt a hiperboloid egyenlő oldalú, de kétköpenyű. A $\cos\beta = \frac{m}{r}$ és az $m^2 = a^2 + r^2$ összefüggés érvényes. A negatív előjelet a I^Z ciklus B^Z-vel ellentétes irányításával vesszük figyelembe.

Adott egy C^Z képzetes sugarú ciklus. Keressük azokat a ciklusokat, melyek $\cos\gamma = \frac{i}{2}$ szög alatt metszik. Itt is érvényes a $\cos\gamma = \frac{m}{r}$ összefüggés, ebből $\cos\gamma = \frac{i}{2} = \frac{1}{-2i}$ összefüggés alapján megadható az I^Z ciklus sugara. A hiperboloid egyenlő oldalú, kétköpenyű és az $a^2 = m^2 + r^2$ összefüggés érvényes, ahol r a képzetes kör valós reprezentánsának a sugara. A szerkesztést a 60. ábrán végeztük el.



60. ábra

Most szerkesszük meg a D^Z ciklushoz azokat a ciklusokat, melyeknek D^Z-vel előre adott, a nagyságú érintőtávolsága van. Most is konstruálunk egy egyköpenyű hiperboloidot, most D^Z lesz az iránykúp csúcsának a képe és ehhez szerkesztjük meg a hiperboloid nyomgörbéjét az $r^2 = m^2 + a^2$ összefüggés alapján, ahol r a keresett nyomgörbe sugara, m az adott iránykúp sugara, az a az adott érintőtávolság. (61. ábra)



61. ábra

A C-görbére illeszkedő nemelfajuló másodrendű felületeket C-gömböknek nevezzük. A C-gömbök ciklografikus képét ciklusgömbnek hívjuk.

A feladatok megoldása során gyakran meg kell határoznunk három C-gömb közös pontjait. Legyenek adottak az (A^Z,I^Z), (B^Z,J^Z), (C^Z,K^Z) C-gömbök, ahol A^Z, B^Z, C^Z ciklusok a hiperboloidok, az I^Z, J^Z, K^Z ciklusok pedig az iránykúpok nyomgörbéi. Az A^Z, B^Z, C^Z ciklusok között lehetnek képzetesek is. A három C-gömb áthatása általában két pont.

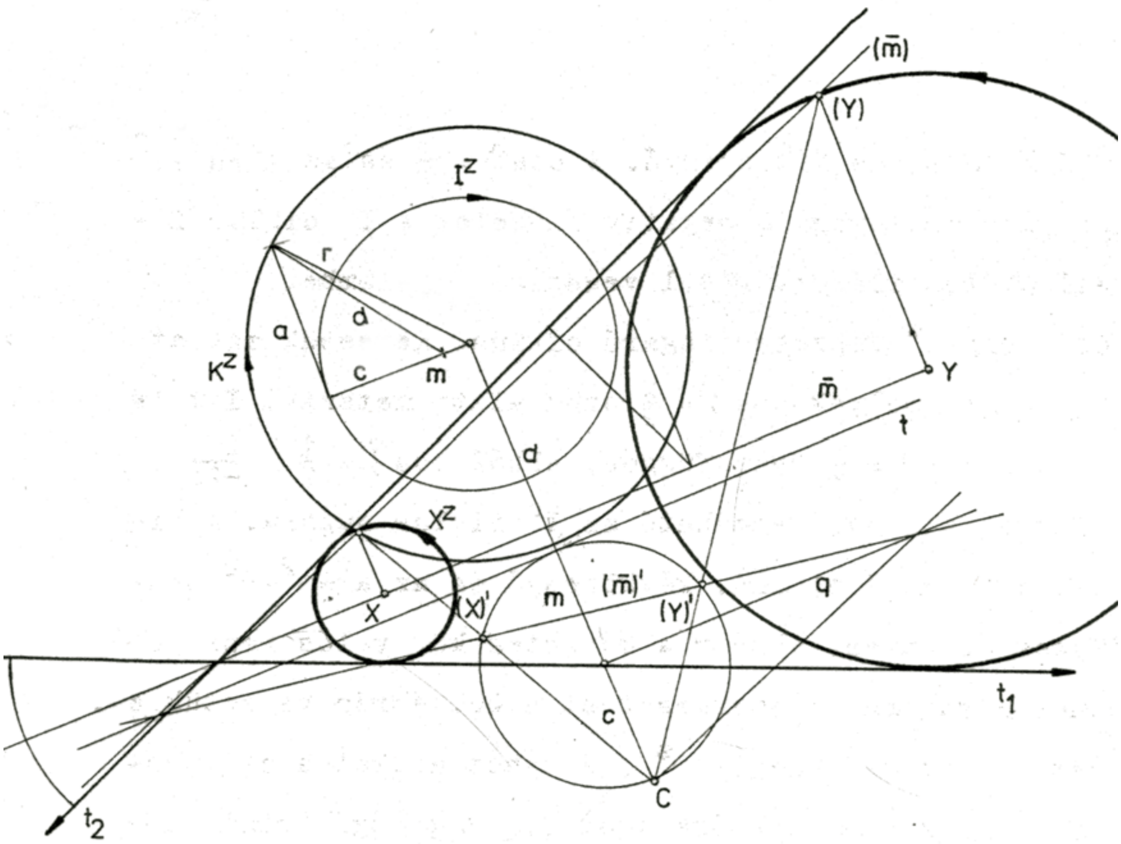
Vesszük az $[I^Z,J^Z,K^Z]$ cikluskongruencia t tengelyének p poláregyenesét az I^Z, J^Z, K^Z ciklusok valamelyikéhez tartozó C-kúpra nézve. Ezt az egyenest eltoljuk az A^Z, B^Z, C^Z ciklusok hatványpontjába. Az így kapott egyenes és valamelyik hiperboloid döféspontjai adják az áthatási pontokat. Ezt most is centrális kollineáció segítségével határozzuk meg.

Feladatok

1) Adott a t_1, t_2 dárda és a K^Z ciklus. Szerkesztendők azok a ciklusok, melyek a t_1, t_2 dárdákat érintik és a K^Z ciklust α szög alatt metszik, ha $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

Megoldás

A t_1, t_2 dárdákhoz tartozó C-síkok metszésvonalának a K^Z ciklushoz tartozó hiperboloiddal való döféspontjai adják a megoldásokat. Az adott ciklus lesz a hiperboloid nyomgörbéje, az aszimptotikus kúp sugarát a $\cos\alpha = \frac{m}{r}$ összefüggésből határozzuk meg. A hiperboloid egyköpenyű lesz, torokkörének sugara az $r^2 = m^2 + a^2$ összefüggésből szerkeszthető. A feladatnak nulla, egy vagy két megoldása van. A szerkesztés a 62. ábrán látható.

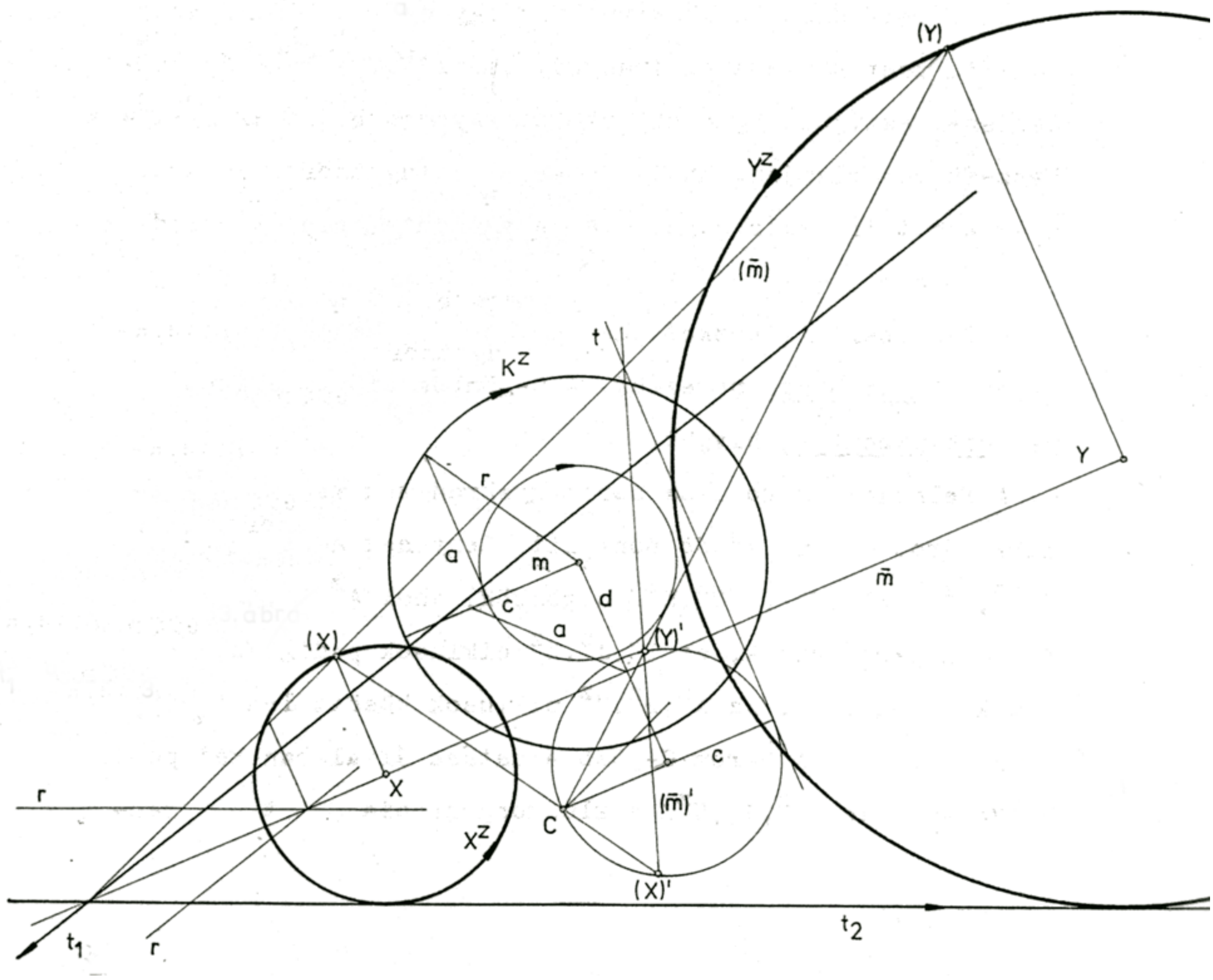


62. ábra

2) Adott a t_1, t_2 dárda és a K^Z ciklus. Szerkesztendők azok a ciklusok, melyek a t_1 dárdát α szögben metszik, a t_2 dárdát érintik és a K^Z ciklust β szögben metszik, ha $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ és $\cos\beta = \frac{1}{2}$.

Megoldás

Megszerkesztjük a t_1 dárdához tartozó sík és a t_2 dárdához tartozó C-sík metszésvonalát, megkonstruáljuk a K^Z ciklushoz tartozó C-gömböt. Az adott ciklus a C-gömb nyomgörbéje lesz. Az iránykúp nyomgörbéjének sugara $\cos\beta = \frac{m}{r}$ összefüggés és $\cos\beta = \frac{1}{2}$ ismeretében megszerkeszthető. A torokkör sugara $r^2 = m^2 + a^2$ segítségével kereshető meg. A megoldás-ciklusokat a két sík metszésvonalának a C-gömbbel való döféspontjainak ciklografikus képei adják. A döféspontokat centrális kollineáció segítségével kereshetjük meg. A megoldások száma kettő, egy vagy nulla lehet. (63. ábra)

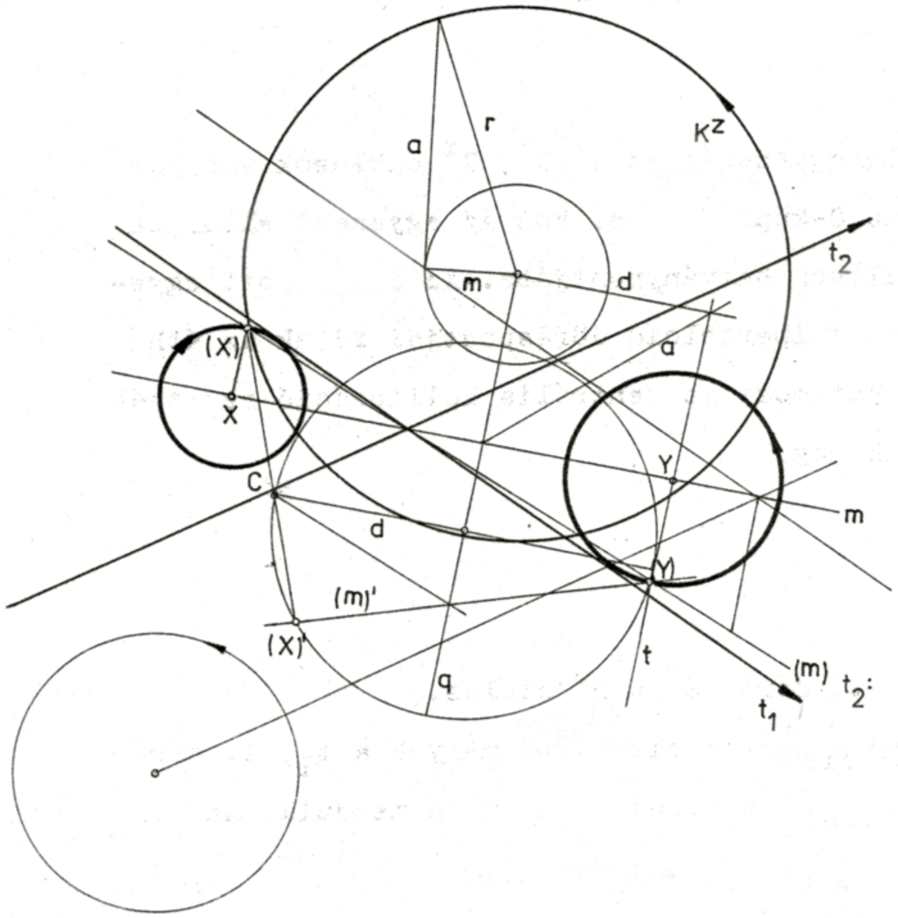


63. ábra

3) Adott a t_1, t_2 dárda és a K^Z ciklus. Szerkesztendők azok a ciklusok, melyek t_1-et érintik, t_2-vel φ szöget zárnak be, és a K^Z ciklust ψ szögben metszik, ha $\cos\varphi = -\frac{3}{2}$ és $\cos\psi = \frac{i}{3}$.

Megoldás

A megoldás menete az előző feladat megoldásmenetével azonos. A különbség az, hogy itt képzetes szögben való metszésekkel találkozunk. Itt a C-gömb kétköpenyű hiperboloid és az $a^2 = r^2 + m^2$ összefüggés érvényes. (64. ábra)

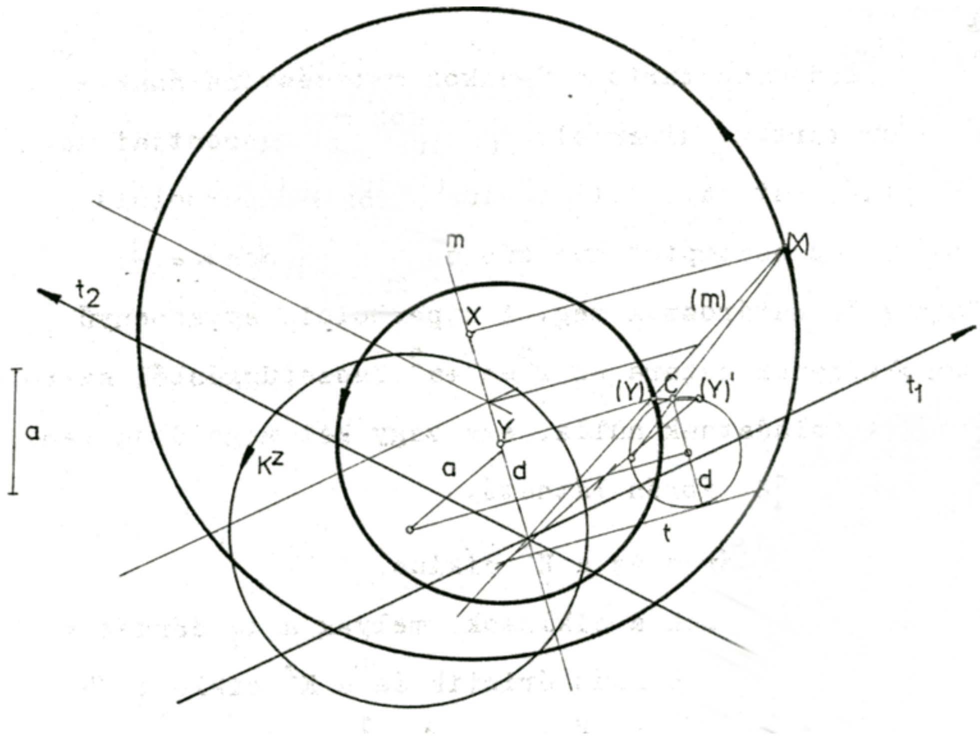


64. ábra

4) Adott a t_1, t_2 dárda és a K^Z ciklus. Szerkesztendők azok a ciklusok, melyek t_1-et α, t_2-t β szögben metszik és K^Z-vel adott **a** nagyságú érintőtávolságuk van, ha $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ és $\cos\beta = -\frac{1}{2}$.

Megoldás

Megszerkesztjük a dárdákhoz tartozó síkok m metszésvonalát. Megkonstruáljuk a ciklushoz tartozó C-gömböt: Az adott ciklus az iránykúp nyomgörbéje lesz, az adott távolság a torokkör sugara. Az $r^2 = m^2 + a^2$ összefüggésből szerkeszthető a C-gömb nyomgörbéjének sugara. A megoldásokat az m metszésvonalnak a C-gömbbel való döféspontjainak ciklografikus képei adják. Megoldások száma nulla, egy vagy kettő lehet. Előfordulhat, hogy az m metszésvonal a C-gömbre illeszkedik. Ebben az esetben végtelen sok megoldás létezik. (65. ábra)

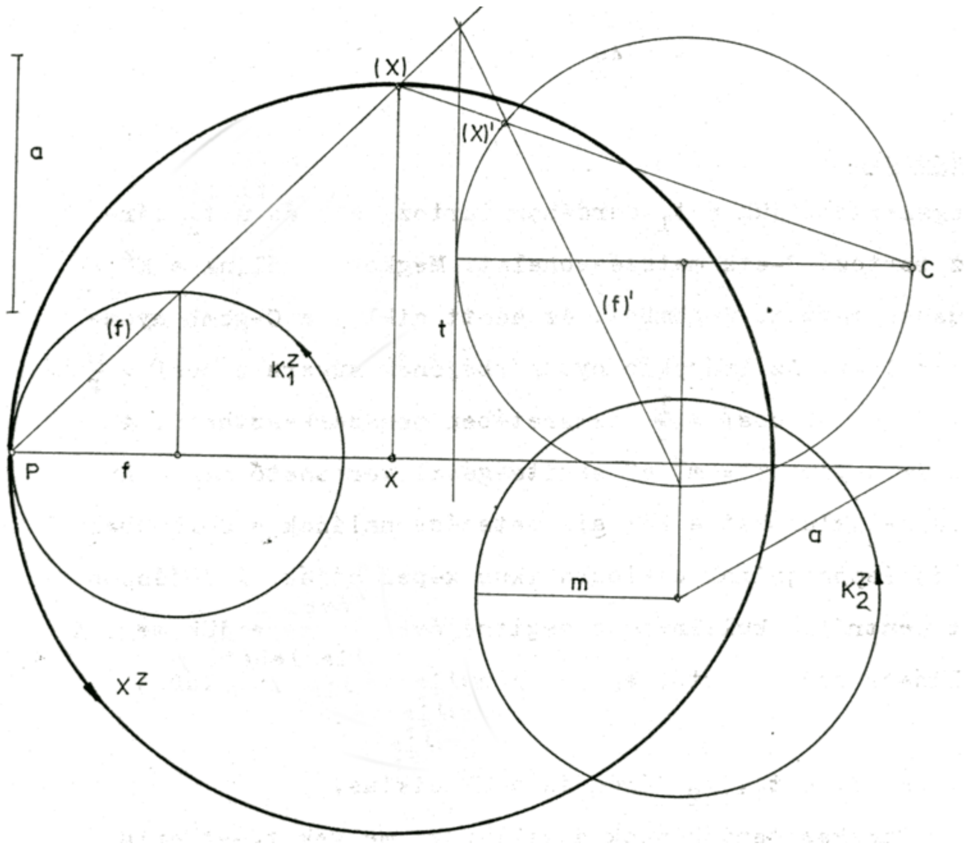


65. ábra

5) Adott a K_1^Z és K_2^Z ciklus, és K_1^Z-n egy P pont. Szerkesztendők azok a ciklusok, melyek K_1^Z-t a P pontban érintik és K_2^Z-vel adott **a** érintőtávolságuk van.

Megoldás

A K_1^Z ciklushoz tartozó C-kúp a ponton áthaladó alkotójával döfjük a K_2^Z-hez tartozó C-gömböt. A C-gömböt az előző feladatban szereplő C-gömbhöz hasonlóan konstruálhatjuk meg. A döféspontokat centrális kollineációval határozzuk meg. (66. ábra)

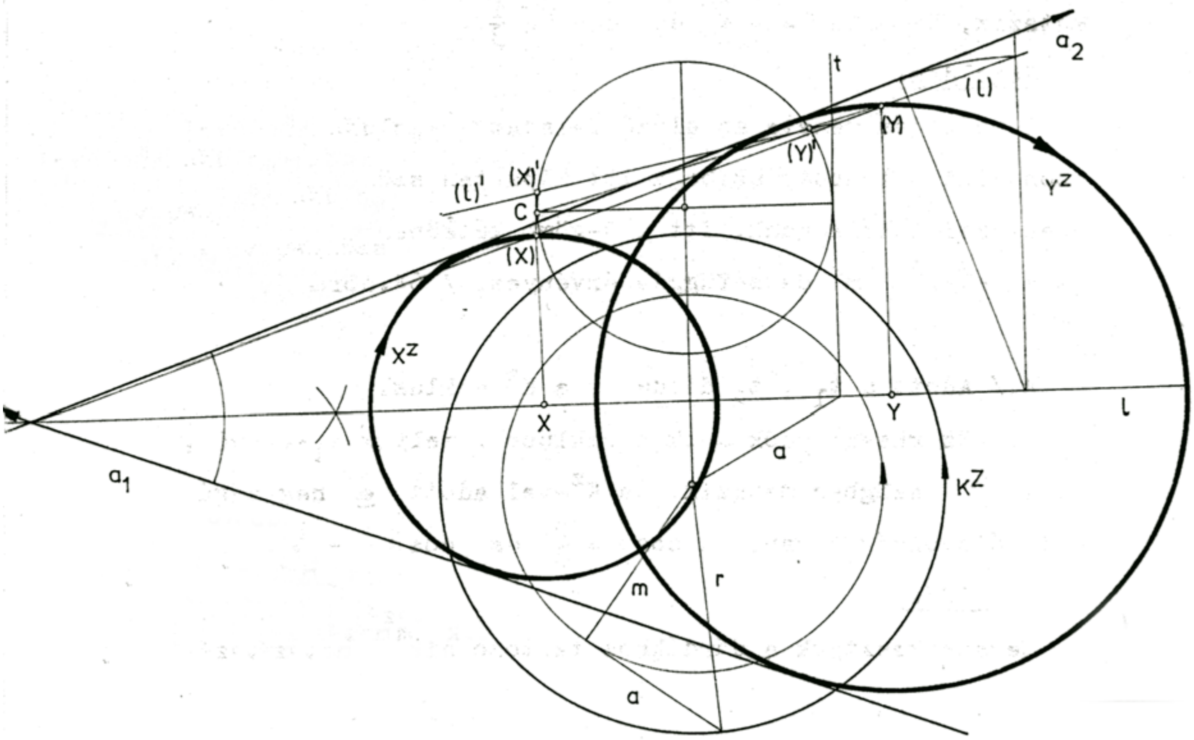


66. ábra

6) Adott egy lineáris ciklussor és egy K^Z ciklus. Szerkesztendők a ciklussor azon elemei, amelyek a K^Z ciklust ψ szögben metszik, ha $\cos\psi = \frac{3}{4}$.

Megoldás

A megoldás-ciklusok a ciklussor tartóegyenesének a C-gömbbel való döféspontjaihoz tartoznak. A C-gömb egyköpenyű forgáshiperboloid. Az adott ciklus a nyomgörbéje. Iránykúpjának sugara $\cos\psi = \frac{3}{4} = \frac{m}{r}$ összefüggés alapján szerkeszthető, a torokkör sugara az $r^2 = m^2 + a^2$ összefüggésből. (67. ábra)

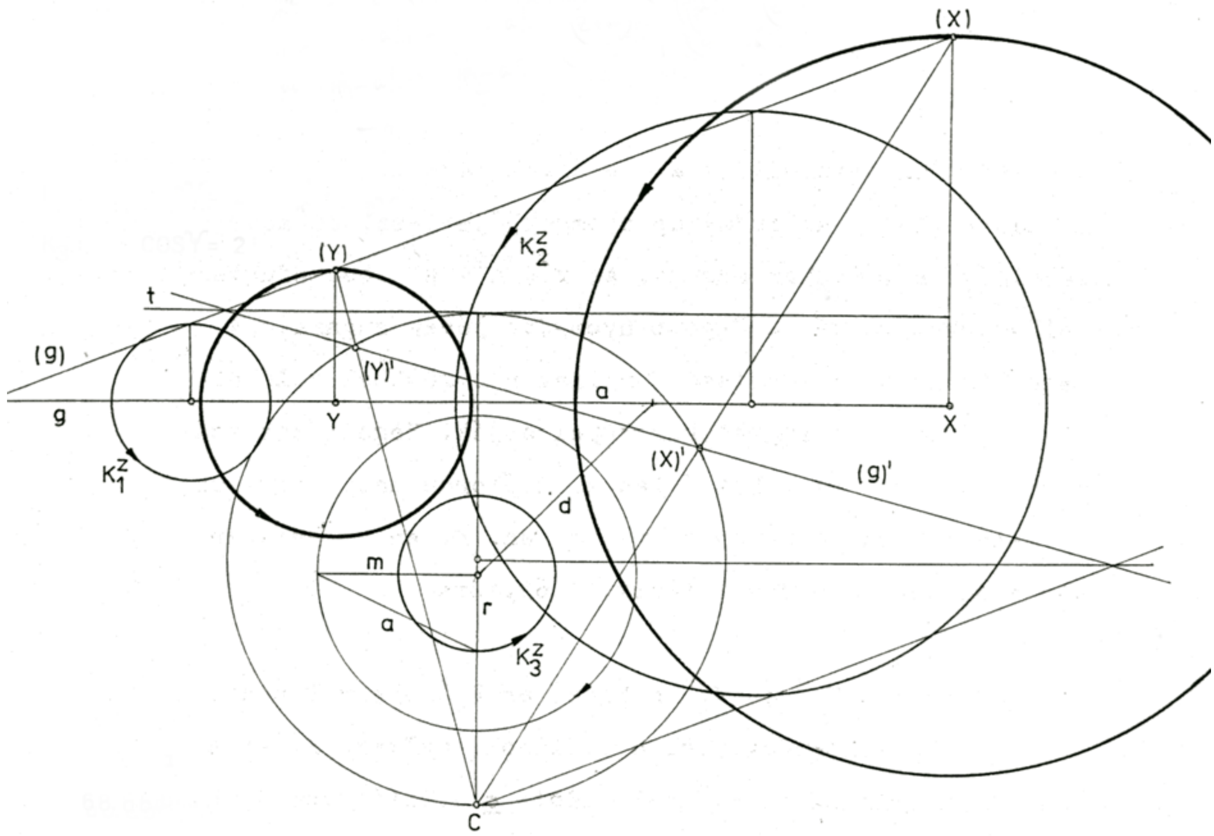


67. ábra

7) Adott három ciklus : K_1^Z ; K_2^Z és K_3^Z . Szerkesztendők azok a ciklusok, melyek K_1^Z-vel és K_2^Z-vel közös hasonlósági pontúak és K_3^Z-t ψ szögben metszik, ha $\cos\psi = 2i$.

Megoldás

A K_1^Z és K_2^Z ciklusokhoz tartozó pontok meghatároznak egy egyenest. Az egyenesnek a K_3^Z ciklushoz tartozó C-gömbbel való döféspontjai adják a megoldást. A C-gömb kétköpenyű hiperboloid. Az adott ciklus a hiperboloid képsíkkal való metszetgörbéjének, ami egy képzetes kör, a valós reprezentánsa. Az iránykúp nyomgörbéjének a sugara a $\cos\psi = \dfrac{m}{r} = 2i = -\dfrac{2}{i}$, s torokkör sugara pedig az $a^2 = r^2 + m^2$ összefüggésből szerkeszthető. A döféspontokat most is centrális kollineáció segítségével kereshetjük meg. (68. ábra)

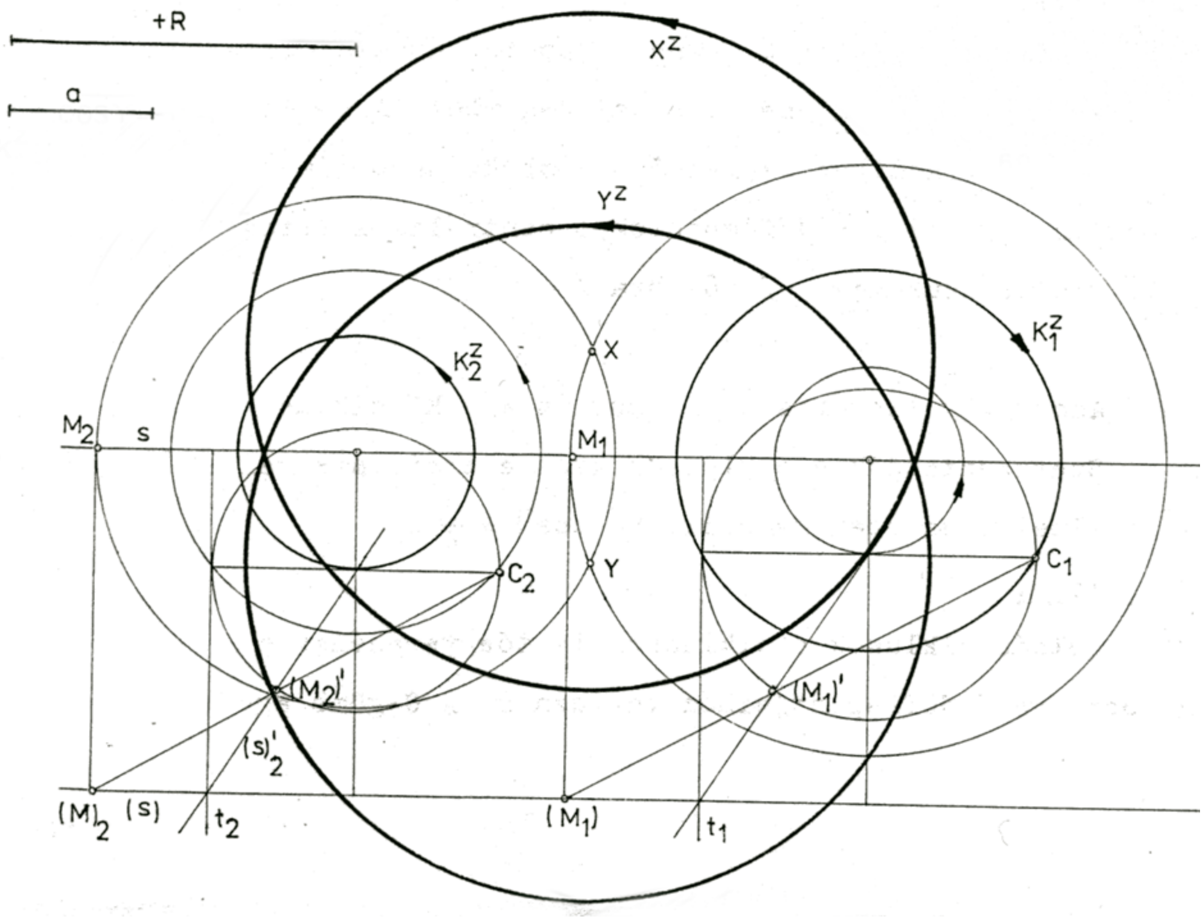


68. ábra

8) Adott két ciklus : K_1^Z és K_2^Z. Szerkesztendők azok a ciklusok, melyek K_1^Z-vel ψ szöget zárnak be, K_2^Z-vel adott **a** érintőtávolságuk van és sugaruk előre adott R nagyságú, ha $\cos\psi = -\frac{1}{2}$. (Az R előjeles távolság.)

Megoldás

K_1^Z-hez és K_2^Z-hez egy-egy hiperboloid tartozik. Ezeket megkonstruáljuk. A K_1^Z a hozzá tartozó egyköpenyű hiperboloid nyomgörbéje lesz, a K_2^Z a hozzá tartozó, szintén egyköpenyű hiperboloid iránykúpjának nyomgörbéje lesz. A többi adatot a $\cos\psi = \frac{m}{r}$ és az $r^2 = m^2 + a^2$ összefüggésből lehet megszerkeszteni. Megkeressük a hiperboloidok adott R magasságú paralelköreit. Ezek metszéspontjaihoz tartozó ciklusok adják az X^Z és Y^Z megoldásokat. A megoldások száma a paralelkörök egymáshoz viszonyított helyzetétől függően nulla, egy vagy kettő lehet. (69. ábra)

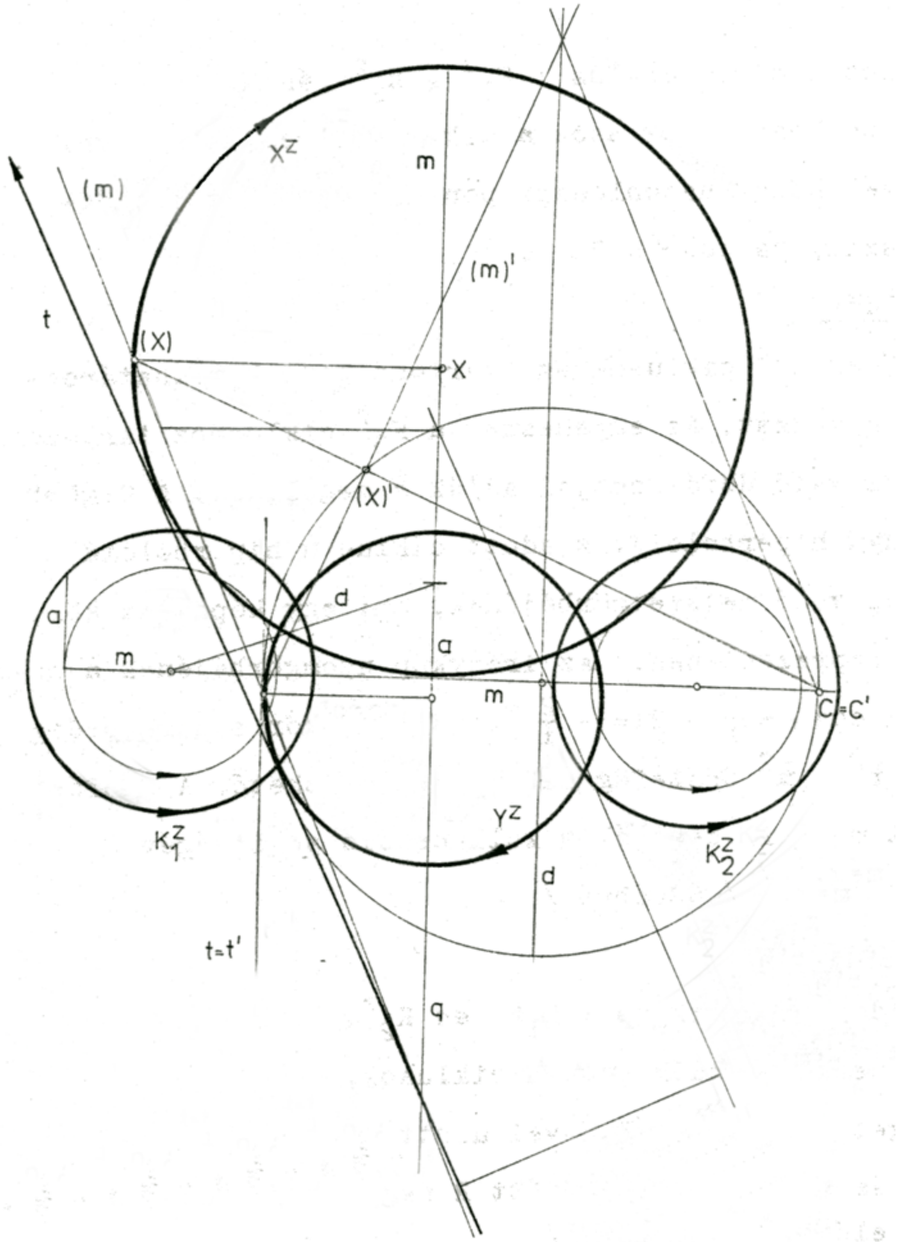


69. ábra

9) Adott a t dárda és a K_1^Z , K_2^Z egyenlő sugarú ciklus. Szerkesztendők azok a ciklusok, melyek K_1^Z-vel és K_2^Z-vel ψ szöget zárnak be, és a t dárdát érintik, ha $\cos\psi = \frac{3}{4}$.

Megoldás

A K_1^Z-hez ás a K_2^Z-hez tartozik egy-egy hiperboloid. A két hiperboloid egybevágó, Megkonstruálásuk ugyanúgy történik, mint s 6. feladatban. Áthatási síkjuk a képsíkra merőleges lesz. Megkeressük ennek a síknak a dárdához tartozó síkkal való metszésvonalát. A megoldásokat valamelyik hiperboloid és az m egyenes döféspontjai adják. A döféspontokat centrális kollineáció segítségével kereshetjük meg. (70. ábra)

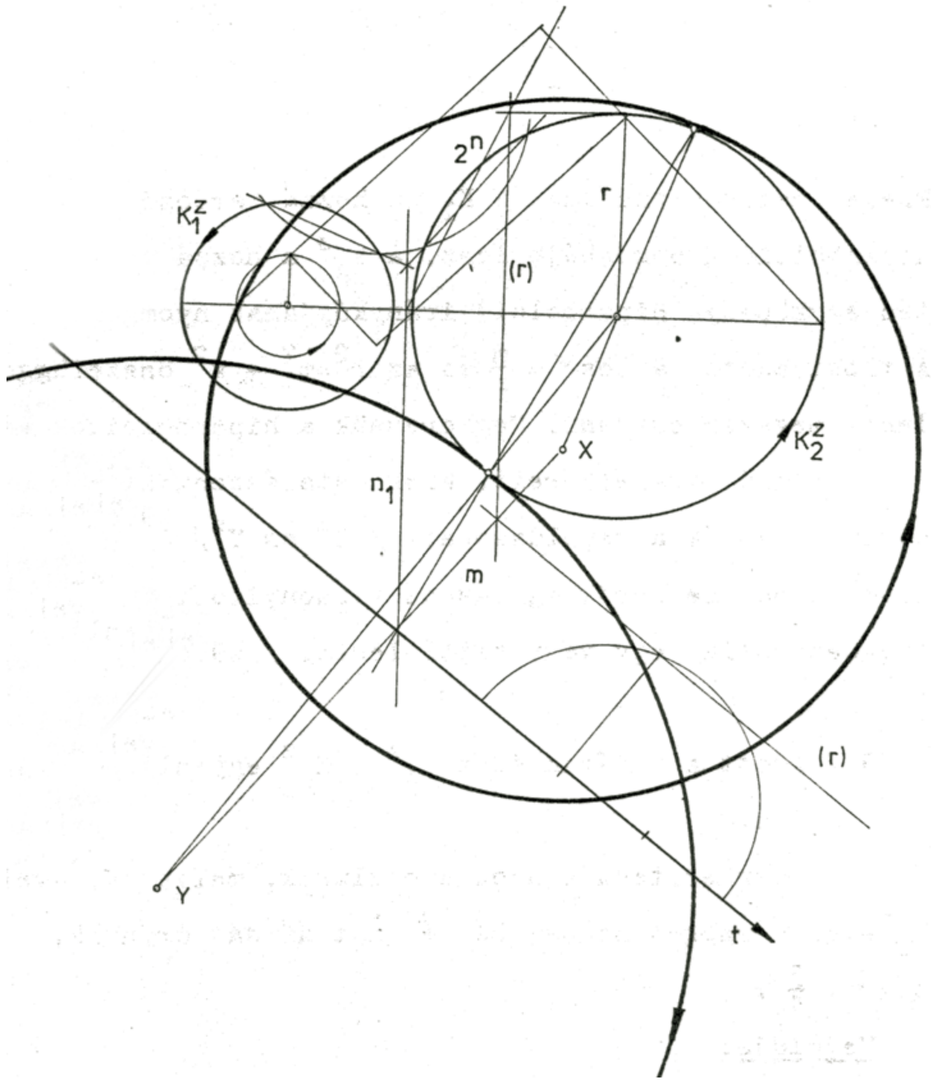


70. ábra

10) Adott a t dárda és a K_1^Z, K_2^Z ciklus. Szerkesztendők azok a ciklusok, melyek a t dárdát α szögben, a K_1^Z ciklust ψ szögben metszik, a K_2^Z ciklust pedig érintik, ha $\cos\psi = \frac{1}{2}$ és $\alpha = 45°$.

Megoldás

A K_1^Z ciklushoz tartozó hiperboloid és a K_2^Z ciklushoz tartozó C-kúp áthatási síkjának és a t dárdához tartozó síknak a metszésvonala az m egyenes. A C-kúp és az m egyenes közös pontjai adják a megoldásokat. A C-kúp és a hiperboloid áthatási síkját Monge-rendszer bevezetésével kerestük meg. Ez az áthatási sík második vetítősík és a C-kúp és az egyköpenyű hiperboloid iránykúpjának az áthatási síkjával párhuzamos, a képsíkkal való metszésvonala az adott két kör hatványvonala. Az adott K_1^Z ciklus a C-gömb nyomgörbéje, iránykúpjának sugara a $\cos\psi = \frac{1}{2} = \frac{m}{r}$ összefüggésből szerkeszthető. (71. ábra)



71. ábra

11) Adott a t dárda és rajta egy P pont, és a K_1^Z, K_2^Z ciklus. Szerkesztendők azok a ciklusok, amelyek a t dárdát a P pontban érintik, a K_1^Z ciklust ψ szögben metszik, a K_2^Z ciklussal adott **a** érintőtávolságuk van. Mikor van megoldása a feladatnak?

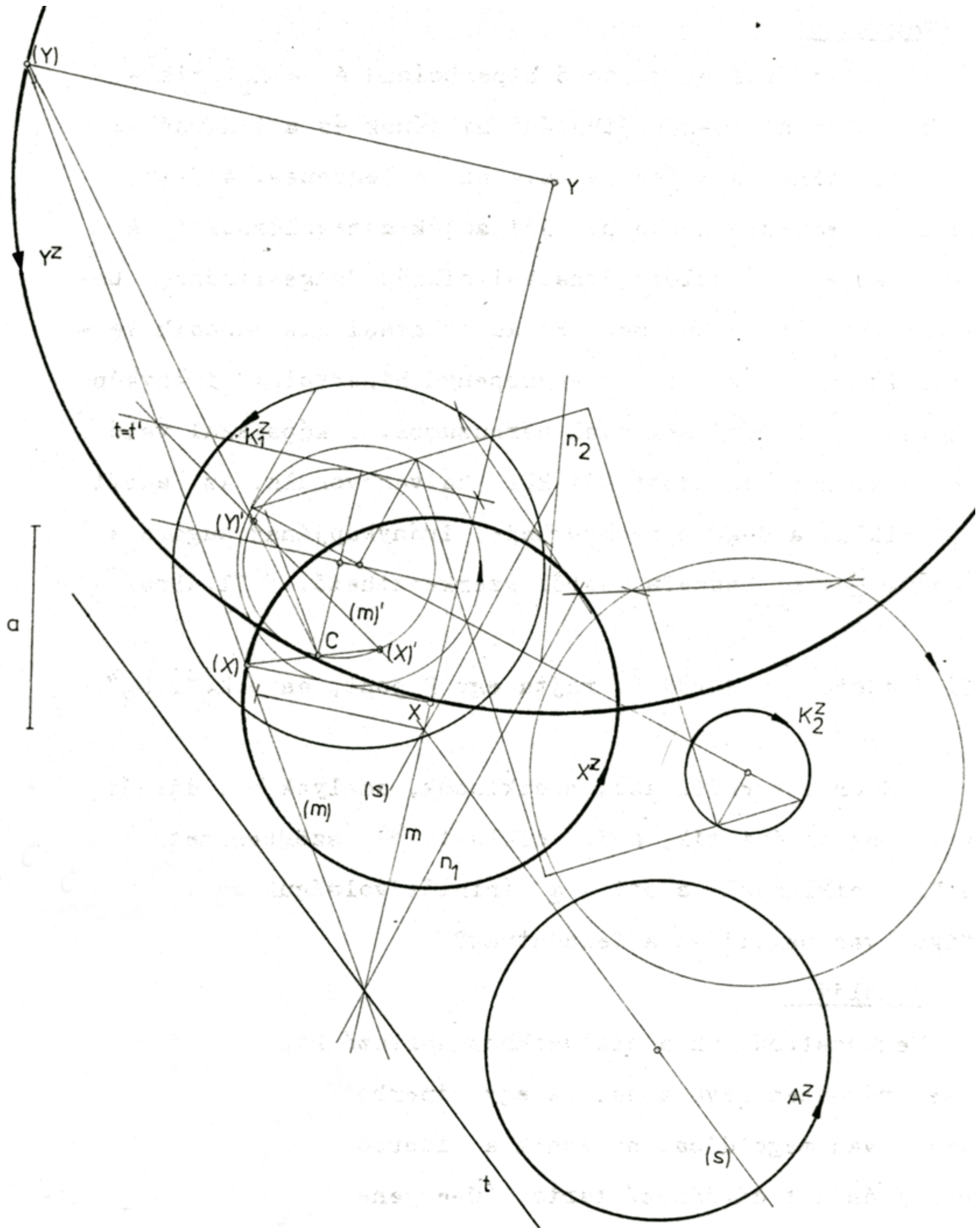
Megoldás

Megkonstruáljuk a ciklusokhoz tartozó hiperboloidokat. Egyek végesben lévő áthatása egy hiperbola. A feladatnak akkor van megoldása, ha ennek a hiperbolának és a P ponthoz és a t dárdához tartozó C-egyenesnek van közös pontja. A megoldásokat ekkor a közös pontok ciklografikus képe adja.

12) Adott egy lineáris cikluskongrucncia és a K_1^Z, K_2^Z ciklus. Szerkesztendők azok a ciklusok, melyek a K_1^Z-t ψ szögben metszik, K_2^Z-vel adott **a** érintőtávolságuk van és az adott kongruencia elemei, ha $\cos\psi = \dfrac{2}{3}$.

Megoldás

A K_1^Z-hez és a K_2^Z-hez tartozó hiperboloidok áthatási síkjának és a cikluskongruencia síkjának metszésvonala m. (A cikluskongruencia a t tengelyével és A^Z ciklusával van megadva.) A megoldásokat az m metszésvonal és valamelyik hiperboloid döféspontjai adják. A hiperboloidok konstruálása az előző feladatokhoz hasonlóan történik. A K_1^Z a hozzá tartozó hiperboloid nyomgörbéje lesz, a K_2^Z a hozzá tartozó hiperboloid iránykúpjának nyomgörbéje. A hiperboloidok áthatási síkja iránykúpjaik áthatási síkjával párhuzamos, nyomvonala a nyomgörbék hatványvonala. Ezt Monge-rendszer bevezetésével kerestük meg. A metszésvonal valamelyik hiperboloiddal való döféspontját centrális kollineációval határoztuk meg. (72. ábra)



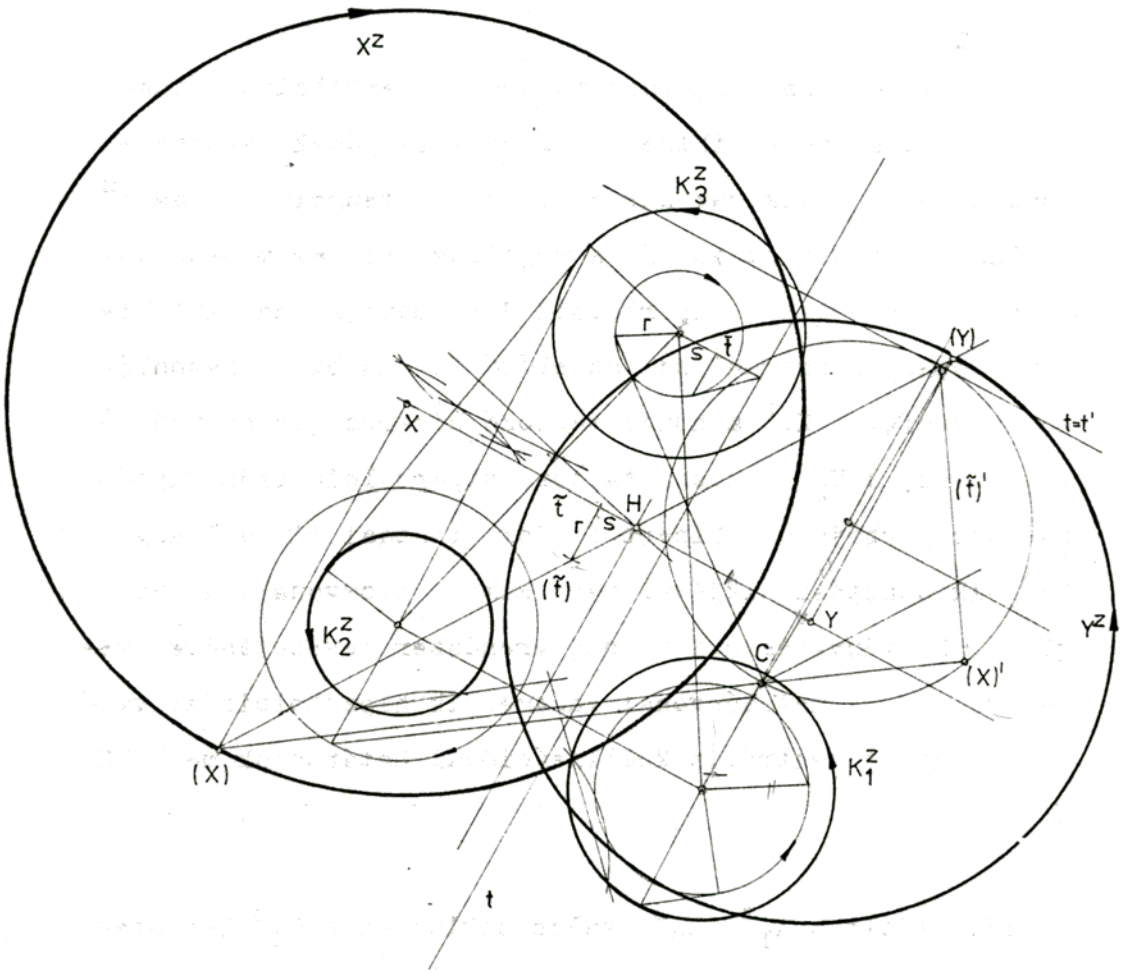
72. ábra

13) Adott a K_1^Z, K_2^Z valós ciklus és a K_3^Z képzetes ciklus valós reprezentánsa. Szerkesztendők azok a ciklusoké melyek K_1^Z-t ψ_1, K_2^Z-t ψ_2, K_3^Z-t ψ_3 szögben metszik, ha $\cos\psi_1 = \frac{4}{5}$, $\cos\psi_2 = -\frac{3}{2}$ és $\cos\psi_3 = \frac{i}{2}$.

Megoldás

Három C-gömb áthatási pontjai adják az X^Z, Y^Z megoldás-ciklusokat. Először megkonstruáljuk a C- gömböket.

Az adott ciklusok a C-gömbök nyomgörbéi lesznek. A megfelelő összefüggések alapján megszerkeszthetők az iránykúpok nyomgörbéi is. Vesszük az iránykúpok alkotta cikluskongruencia t tengelyének valamelyik iránykúpra vonatkozó $\overline{t}$ poláregyenesét. Ezt az egyenest eltoljuk a C-gömbök nyomgörbéinek hatványpontjába. Az így kapott egyenes és valamelyik hiperboloid döféspontjai adják az áthatási pontokat. A hatványpont szerkesztésénél ne felejtsük el, hogy a K_3^Z ciklus képzetes! (73. ábra)



73. ábra

14) Adott a K_1^Z, K_2^Z és K_3^Z ciklus. Szerkesztendők azok a ciklusok, amelyeknek az adott ciklusokkal adott $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ érintőtávolságuk van. Az adott ciklusok között lehetnek nullciklusok, vagy képzetes ciklusok is.

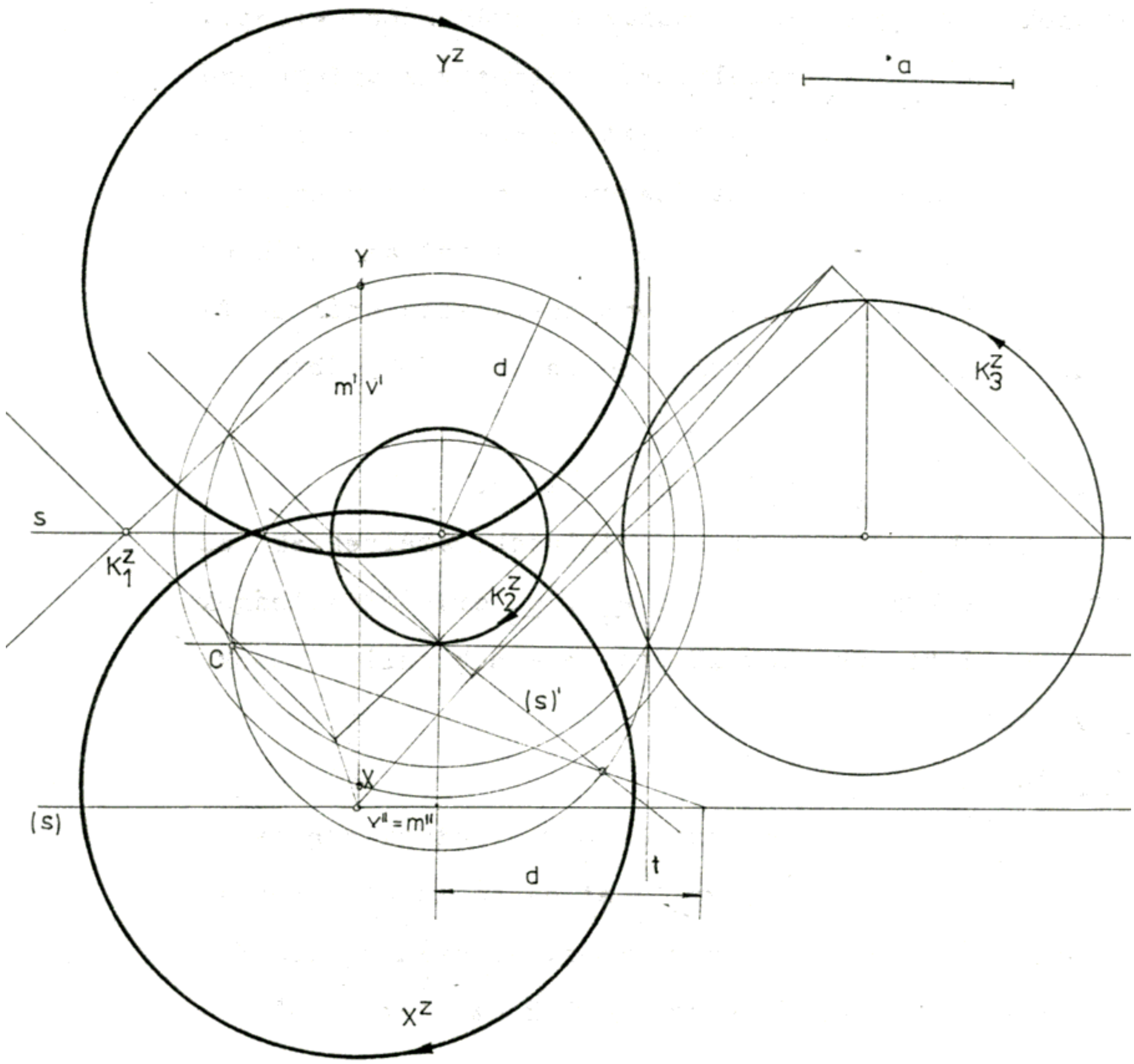
Megoldás

A megoldást most is három C-gömb áthatási pontjai adják. A különbség az, hogy most az adott ciklusok a C-gömbök iránykúpjainak nyomgörbéi, az érintőtávolságok a torokkör sugarai. A nyomgörbék az $r^2 = m^2 + a^2$ segítségével szerkeszthetők.

15) Az előző feladatot oldjuk meg abban az esetben, amikor az adott ciklusok középpontjai egy egyenesre illeszkednek, a K_1^Z nullciklus és az érintőtávolságok egyenlő hosszúak.

Megoldás

A megoldásokat három speciális helyzetű C-gömb áthatása adja. Monge-rendszert vezetünk be. Az áthatási síkok második vetítősíkok, melyek síksort alkotnak és a metszésvonaluk második vetítőegyenes. A képsíkkal párhuzamos m metszésvonalnak valamelyik hiperboloiddal való döféspontjai adják a megoldásokat. Az adott ciklusok a C-gömbök iránykúpjainak nyomgörbéi. A döféspontokat a K_2^Z ciklushoz tartozó hiperboloid adott magasságú paralelköre segítségével szerkesztettük meg, annak sugarát centrális kollineációval határoztuk meg. (74. ábra)



74. ábra

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan helyezkednek el azok a ciklusok, melyeknek két adott ciklussal egyenlő az érintőtávolsága!

A két adott ciklus legyen M_1^Z és M_2^Z. Egy adott d érintőtávolság esetén konstruáljuk meó a megfelelő C-gömböket! Az adott ciklusok most az iránykúpok nyomgörbéi lesznek. A két C-gömb áthatása legyen a h görbe, melynek a képsíkkal való döféspontjai az M_1^Z, M_2^Z hatványvonalára esnek, figyelembe véve a hatványvonal merőlegesen metsző körökkel való megfogalmazását. A két C-gömb áthatási síkja megegyezik ebben az esetben iránykúpjaik áthatási síkjával. Az iránykúpok minden d érintőtávolság esetén ugyanazok, ezért a C-gömbök áthatási síkja minden esetben ugyanaz.

Tétel

Két adott ciklussal egyenlő érintőtávolságú ciklusok egy lineáris cikluskongruenciához tartoznak. A kongruenciának megfelelő sík a két adott ciklushoz tartozó C-kúpok áthatási síkja.

16) Adott három ciklus. Hol helyezkednek el azok a ciklusok, amelyeknek az adott három ciklussal egyenlő érintőtávolságuk van?

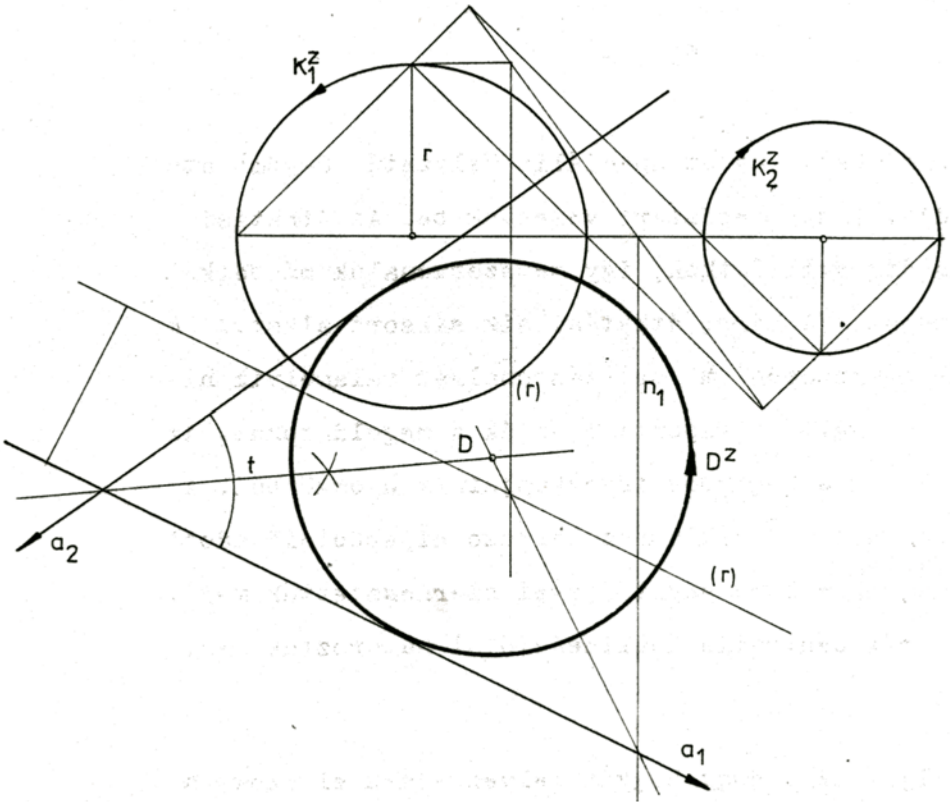
Megoldás

A keresett ciklusok egy lineáris ciklussorhoz tartoznak, melynek térbeli megfelelője két-két ciklushoz tartozó áthatási síkok metszésvonala.

17) Adott a K_1^Z és a K_2^Z ciklus és egy lineáris ciklussor. Szerkesztendő a lineáris ciklussornak az az eleme, melynek K_1^Z-vel és K_2^Z-vel egyenlő érintőtávolsága van.

Megoldás

Az adott ciklusok lesznek a C-gömbök iránykúpjainak a nyomgörbéi. Egyenlő érintőtávolságok esetén az iránykúpok áthatási síkja megegyezik a C-gömbök áthatási síkjával. A feladat megoldását ennek a síknak a lineáris ciklussor tartóegyenesével való döféspontja adja. (75. ábra)

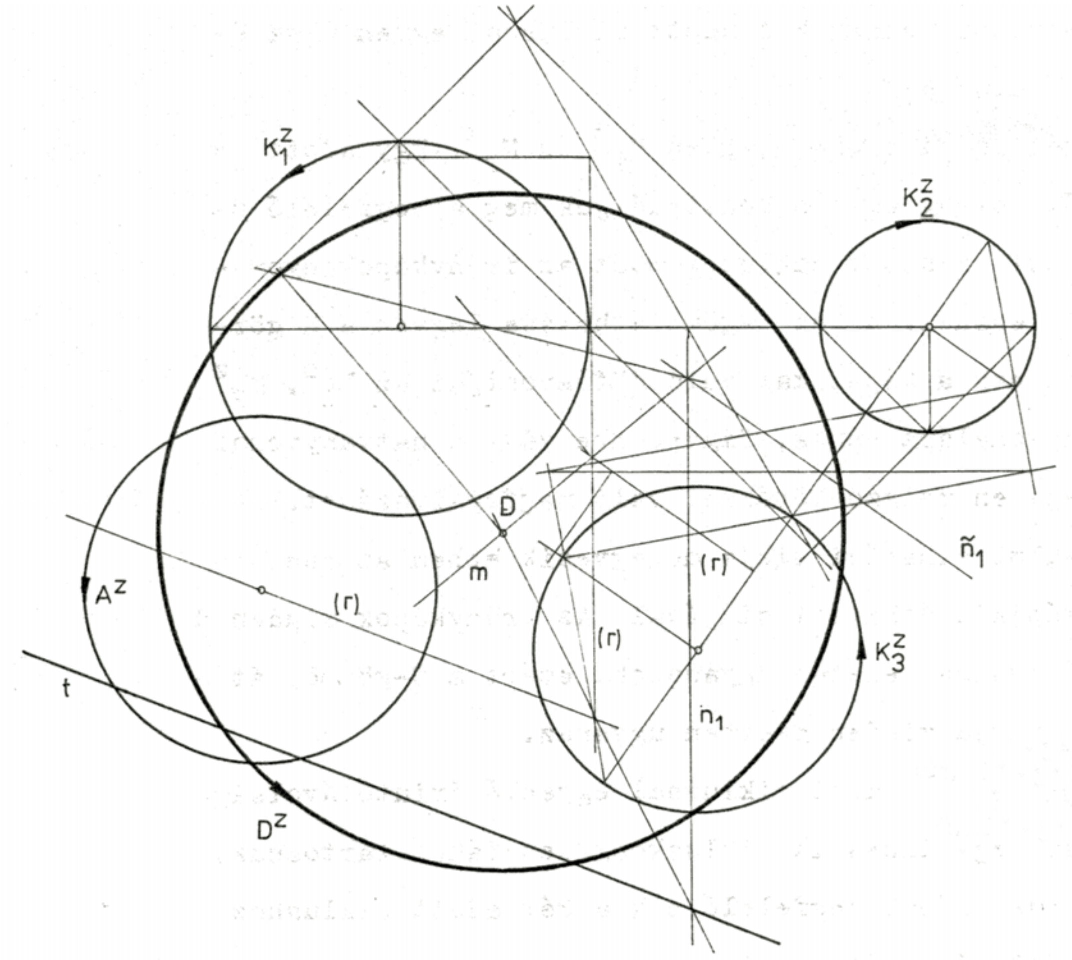


75. ábra

18) Adott egy lineáris cikluskongruencia és a K_1^Z, K_2^Z, K_3^Z ciklusok. Szerkesztendő a cikluskongruenciának az az eleme, amelynek az adott hálom ciklussal egyenlő érintőtávolsága van.

Megoldás

A 16. feladat alapján a megoldást sík és egyenes döféspontja adja. (76. ábra)

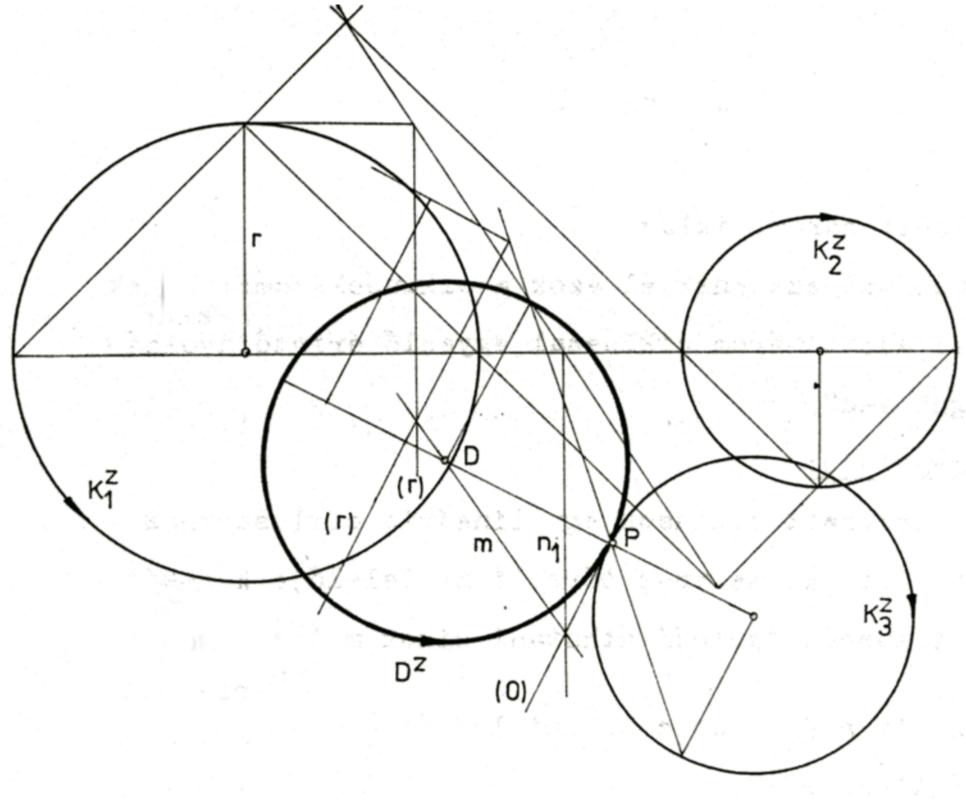


76. ábra

19) Adott a K_1^Z, K_2^Z ciklus és a K_3^Z ciklus, rajta egy P pont. Szerkesztendő az a ciklus, amely érinti a K_3^Z-t a P pontban és a K_1^Z, K_2^Z ciklusokkal egyenlő érintőtávolsága van.

Megoldás

A megoldást a K_1^Z, K_2^Z ciklusokhoz tartozó áthatási sík és a P ponton átmenő, a K_3^Z ciklushoz tartozó C-egyenes döféspontja adja. (77. ábra)

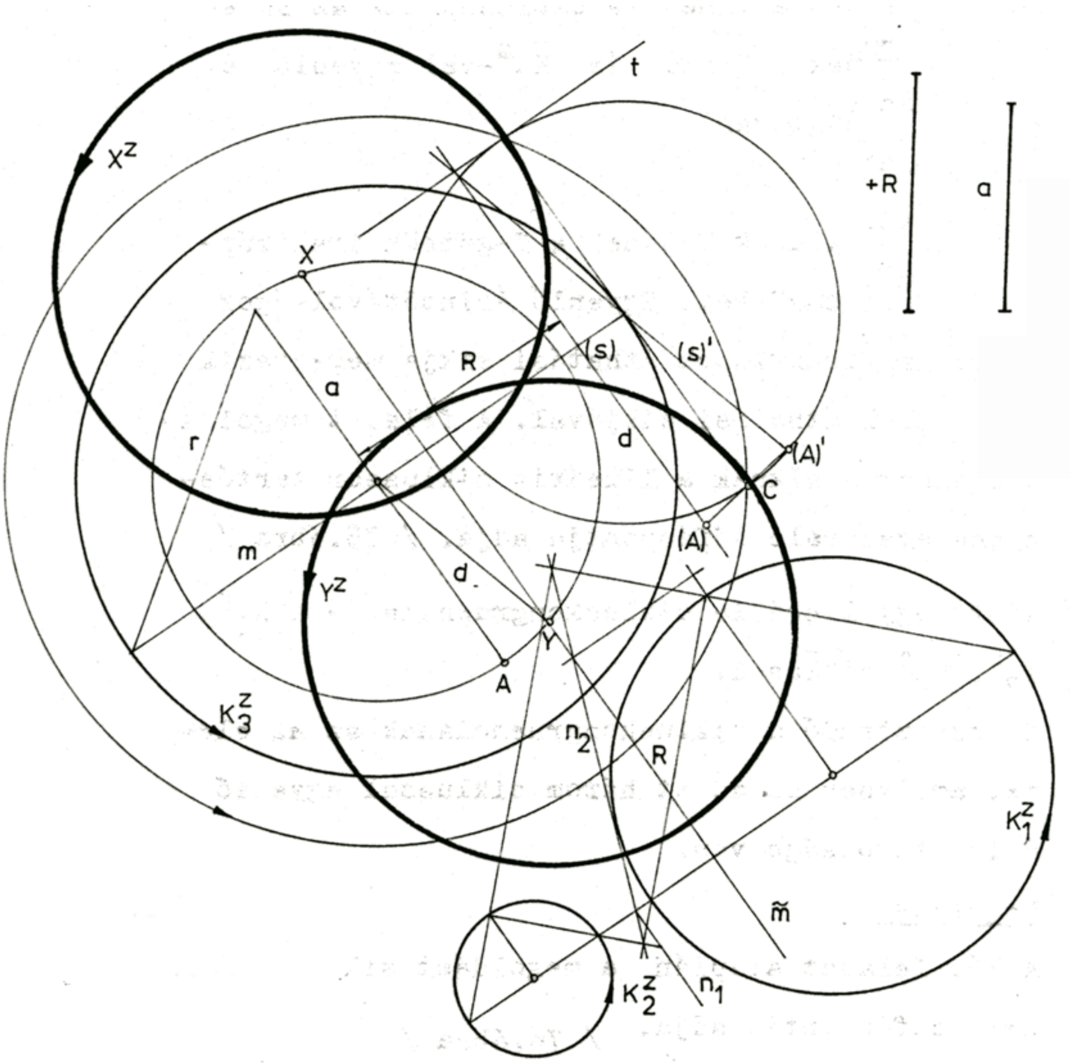


77. ábra

20) Adott a K_1^Z, K_2^Z, K_3^Z ciklus. Szerkesztendők azok a ciklusok, amelyeknek a K_1^Z, K_2^Z ciklusokkal egyenlő érintőtávolságuk van, a harmadik ciklussal pedig adott a nagyságú érintőtávolságuk van, és a szerkesztendő ciklusok sugarának nagysága, R is adott.

Megoldás

A K_1^Z, K_2^Z ciklusokhoz tartozó áthatási sík és a képsíkkal párhuzamos , adott magasságú sík metszésvonala $\tilde{m}$. (Az adott sugárnyi távolság előjeles, ha nem az lenne, akkor a képsík mindkét oldalán meg kellene szerkeszteni az adott magasságú szintsíknak az áthatási síkkal való metszésvonalát!) A K_3^Z ciklushoz megkonstruáljuk az egyköpenyű forgáshiperboloidot az $r^2 = m^2 + a^2$ összefüggés alapján. Az adott ciklus a hiperboloid iránykúpjának nyomgörbéje lesz. A hiperboloid és az $\tilde{m}$ metszésvonal döféspontjai adják a megoldásokat. Ezek az X,Y döféspontok a hiperboloid adott magasságú paralelköre segítségével szerkeszthetők. (78. ábra)

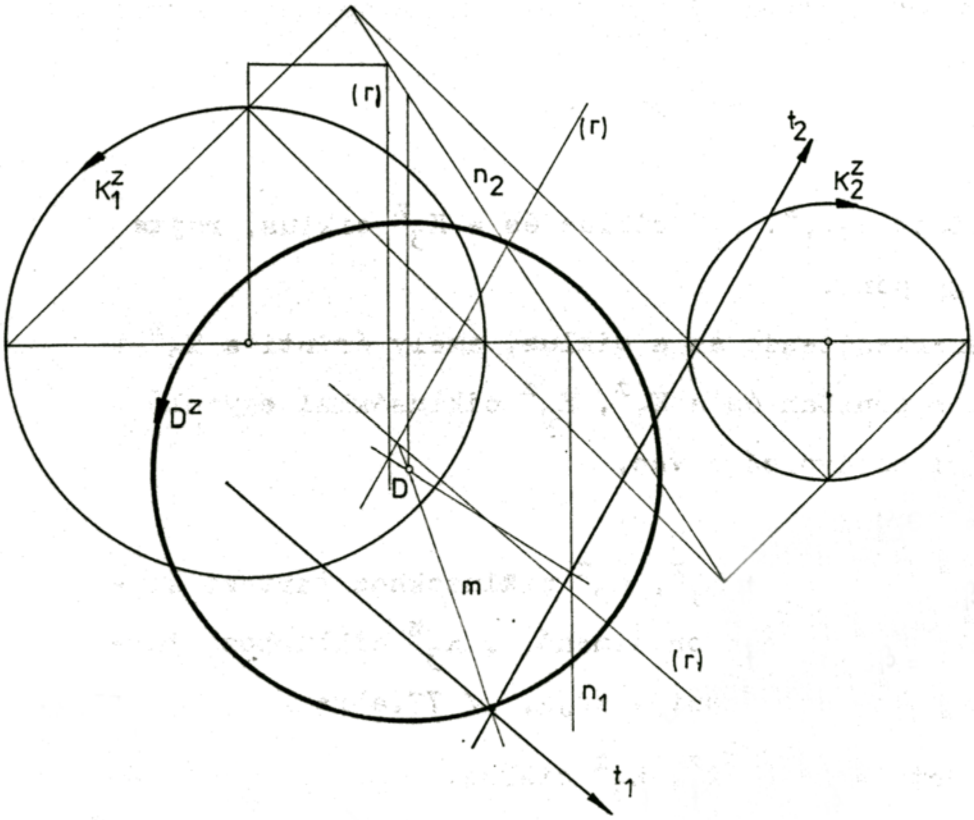


78. ábra

21) Adott a t_1, t_2 dárda és a K_1^Z, K_2^Z ciklus. Szerkesztendő az a ciklus, amelynek K_1^Z-vel és K_2^Z-vel egyenlő érintőtávolsága van, valamint a t_1 dárdát α szögben, a t_2 dárdát β szögben metszi, ha $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ és $\cos\beta = \frac{3}{4}$.

Megoldás

A t_1, t_2 dárdákhoz tartozó síkok metszésvonalának a K_1^Z, K_2^Z ciklusokhoz tartozó áthatási síkkal való döféspontjának ciklografikus képe adja a megoldást. (79. ábra)

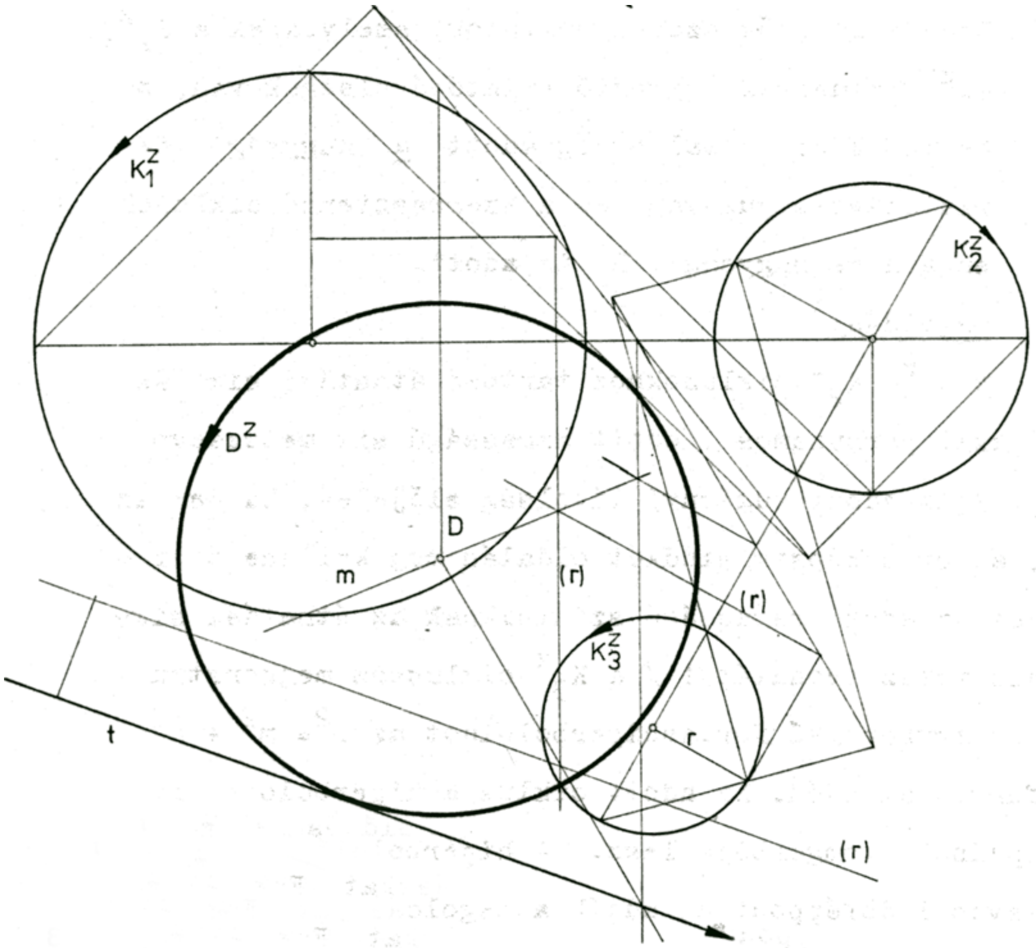


79. ábra

22) Adott a K_1^Z, K_2^Z, K_3^Z ciklus és a t dárda. Szerkesztendő az a ciklus, amely a t dárdát érinti és a három adott ciklussal egyenlő érintőtávolsága van.

Megoldás

A három adott ciklus közül kettőt-kettőt kiválasztva megszerkesztjük azok áthatási síkját. Az így kapott három áthatási sík egy közös egyenesre illeszkedik. A megoldást ennek az egyenesnek az adott t dárdához tartozó C-síkkal való döféspontja adja. (80. ábra)

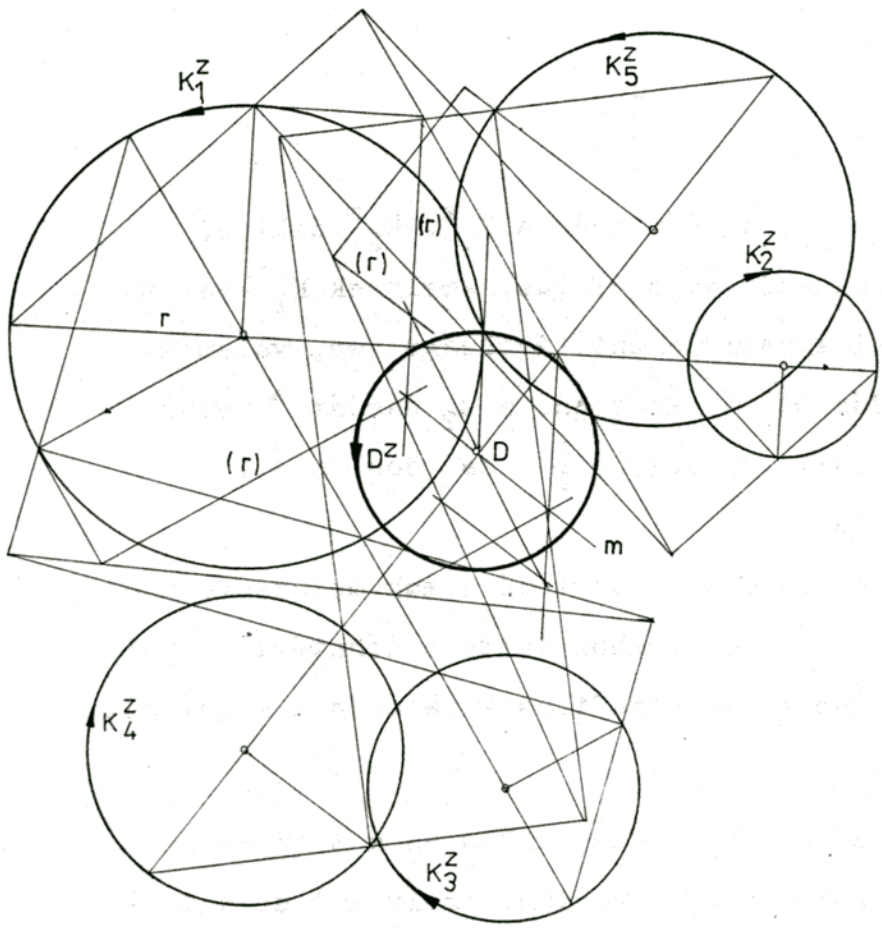


80. ábra

23) Adott a K_1^Z, K_2^Z, K_3^Z, K_4^Z, K_5^Z ciklus. Szerkesztendő az a ciklus, amelynek K_1^Z, K_2^Z és K_3^Z ciklusokkal egyenlő érintőtávolsága van, valamint a K_4^Z, K_5^Z ciklusokkal is egyenlő, az előzővel nem azonos érintőtávolsága van.

Megoldás

Az előző feladathoz hasonlóan megszerkesztjük a K_1^Z, K_2^Z és K_3^Z ciklusokhoz az áthatási síkjaik közös egyenesét. A megoldást ennek az egyenesnek a K_4^Z, K_5^Z ciklusok áthatási síkjával való döféspontjának ciklografikus képe adja. (81. ábra)

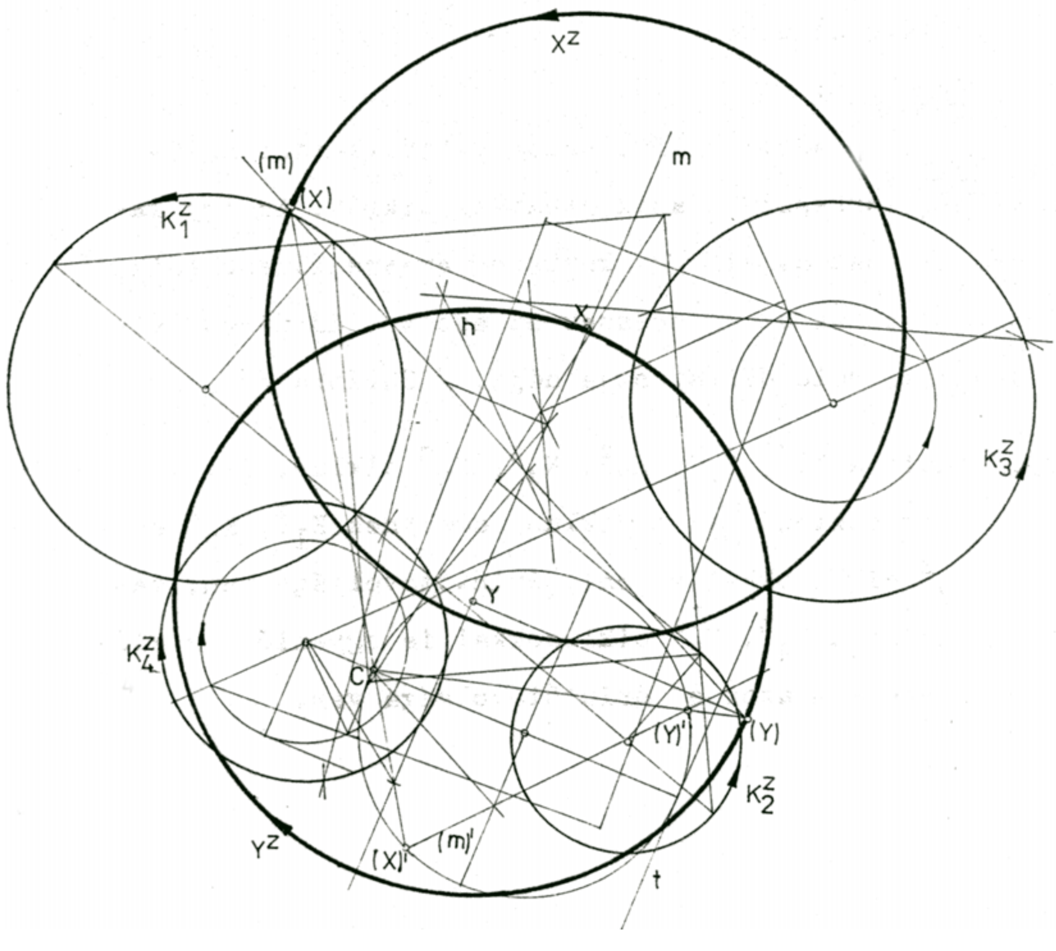


81. ábra

24) Adott a K_1^Z, K_2^Z, K_3^Z és a K_4^Z ciklus. Szerkesztendők azok a ciklusok, amelyeknek a K_1^Z és a K_2^Z ciklusokkal egyenlő érintőtávolságuk van, és a K_3^Z ciklust φ szögben, a K_4^Z ciklust pedig ψ szögben metszik, ha $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ és $\cos\psi = \frac{3}{4}$.

Megoldás

A K_3^Z és a K_4^Z ciklusokhoz megkonstruáljuk az egyköpenyű forgáshiperboloidokat. Az adott ciklusok a hiperboloidok nyomgörbéi lesznek. Az iránykúpok nyomgörbéit a $\cos\varphi = \frac{m}{r}$ alapján szerkeszthetjük meg. A torokkör sugarát pedig mindkét esetben az $r^2 = m^2 + a^2$ összefüggés adja. Megszerkesztjük a hiperboloidok áthatási síkját és a K_1^Z, K_2^Z ciklusokhoz tartozó áthatási síkot. A két áthatási sík metszésvonala m. A megoldást az m metszésvonal és valamelyik hiperboloid döféspontjainak ciklografikus képei adják. Ezek X^Z és Y^Z. A megoldások száma attól függ, hogy az m metszésvonalnak hány közös pontja van a hiperboloidokkal. (82. ábra)

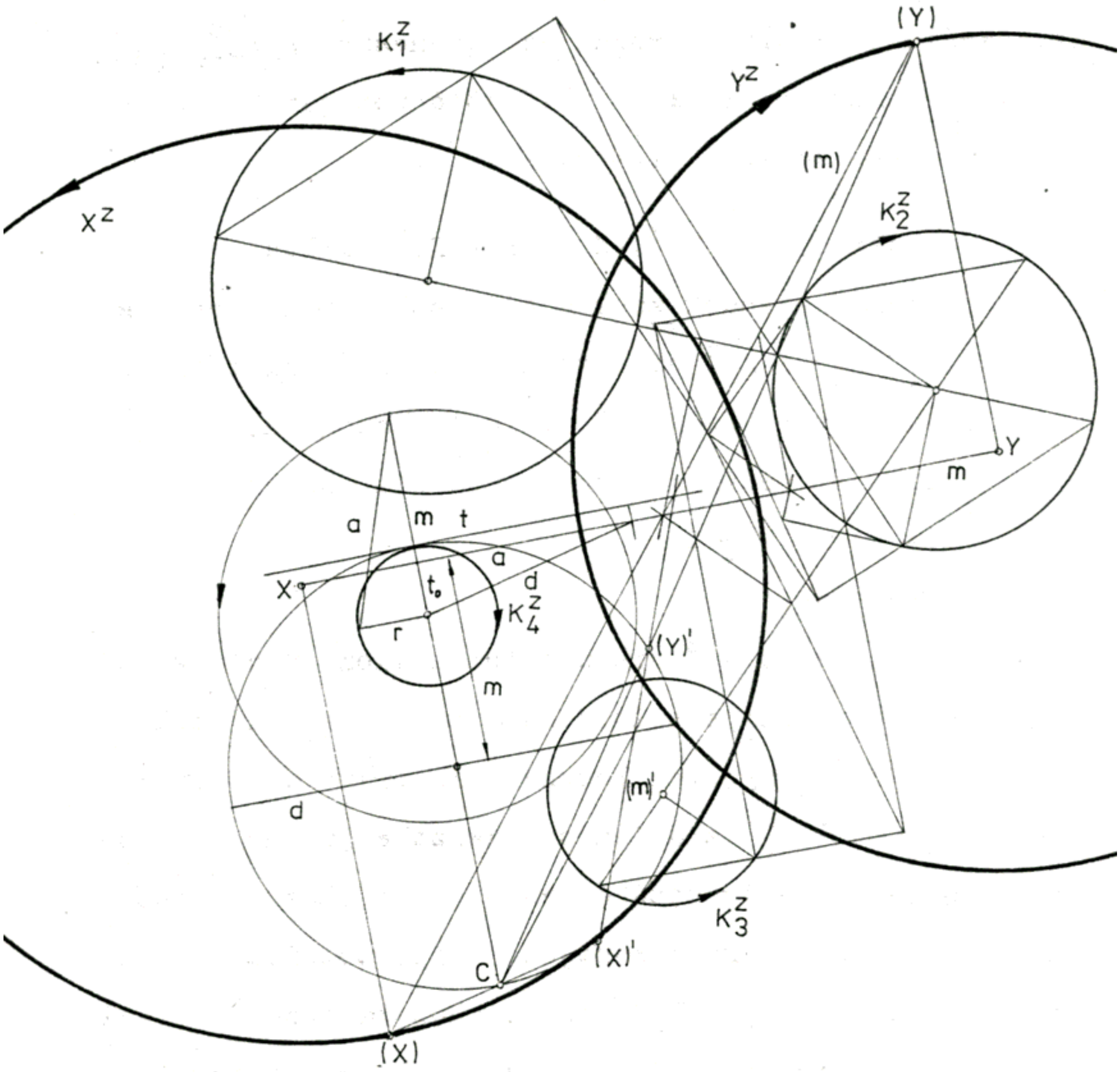


82. ábra

25) Adott a K_1^Z, K_2^Z, K_3^Z és a K_4^Z ciklus. Szerkesztendők azok a ciklusok, amelyeknek K_1^Z, K2z, K_3^Z ciklusokkal egyenlő érintőtávolságuk van, és a K_4^Z ciklust ψ szögben metszik, ha $\cos\psi = 3i$.

Megoldás

A K_4^Z ciklushoz egy kétköpenyű forgáshiperboloid tartozik. A hiperboloidnak a képsíkkal való nyomgörbéjének, valós reprezentánsa az adott görbe. Az iránykúp nyomgörbéjének sugarát most is a $\cos\psi = \frac{m}{r} = 3i = -\frac{3}{i}$ összefüggés alapján szerkeszthetjük. A torokkör sugarát az $a^2 = r^2 + m^2$ összefüggésből kapjuk meg. A megoldás-ciklusokat a hiperboloid és a K_1^Z, K_2^Z, K_3^Z ciklusokhoz tartozó egyenes döféspontjainak ciklografikus képe adja. Ezeket X^Z-vel és Y^Z-vel jelöltük. A megoldások száma most is a hiperboloid és az egyenes közös pontjainak a számától függ. (83. ábra)



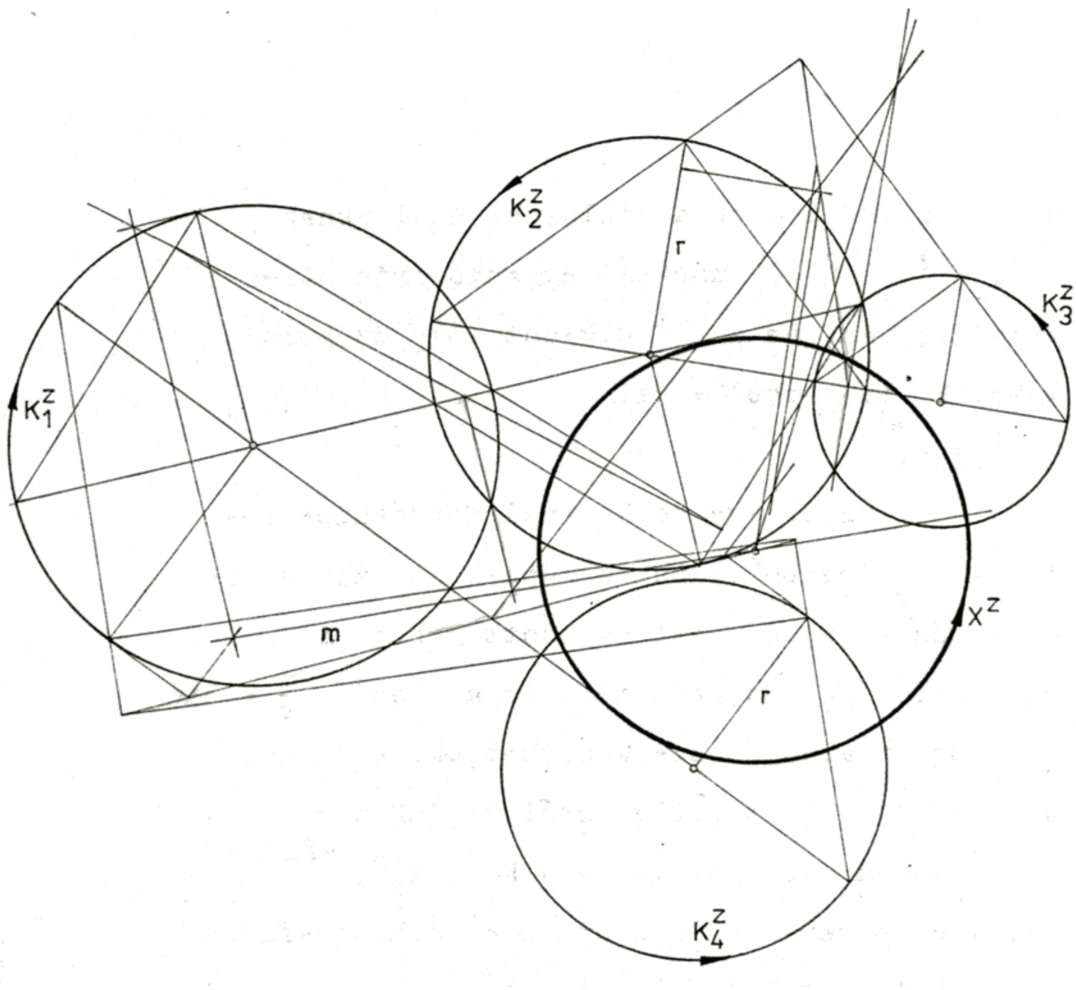
83. ábra

26) Adott a K_1^Z, K_2^Z, K_3^Z, K_4^Z ciklus. Szerkesztendő az a ciklus, amelynek az adott négy ciklussal egyenlő érintőtávolsága van.

Megoldás

A négy ciklus közül kiválaszthatunk három ciklust. Ezek közül kettő-kettőnek megszerkesztjük az áthatási síkját. Ezek metszésvonalán vannak azok a pontok, amelyekhez tartozó ciklusoknak és a kiválasztott három ciklusnak egyenlő érintőtávolsága van. Megszerkesztjük a negyedik és a három másik ciklus közül egy ciklusnak az áthatási síkját. A megoldást ennek a síknak az előző síkok metszésvonalával való döféspontja adja.

A feladat egy másik megoldási módja, hogy a négy ciklus közül kiválasztunk három cikluspárt, melyek mindegyikéhez egy-egy sík tartozik. A megoldást s három sík közös pontjának ciklografikus képe adja. (84. ábra)

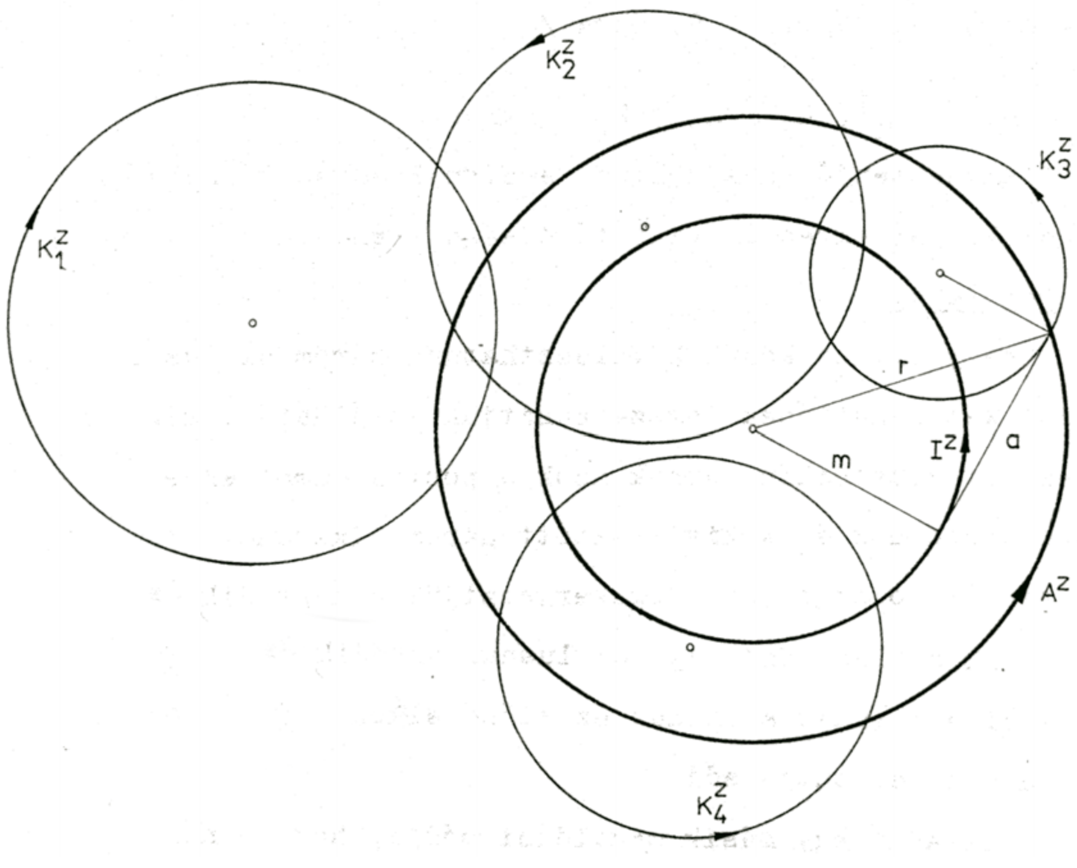


84. ábra

27) Adott négy ciklus: K_1^Z, K_2^Z, K_3^Z, K_4^Z. Szerkesztendő az az (m,r) C-gömb, amelyre illeszkedik a négy ciklushoz tartozó négy pont.

Megoldás

Az előző feladathoz hasonlóan megszerkeszthetjük azt a ciklust, melynek az adott négy ciklussal egyenlő érintőtávolsága van. A ciklus a keresett C-gömb iránykúpjának nyomgörbéje lesz, a közös érintőtávolság pedig a C-gömb torokkörének sugara. A C-gömb nyomgörbéjének a sugara az $r^2 = m^2 + a^2$ összefüggésből nyerhető. Ezek az adatok a keresett C-gömböt már meghatározzák. A szerkesztést a 85. ábrán láthatjuk.



85. ábra

A ciklografikus leképezés általánosításának lehetőségei

Az eredeti Apollóniusz feladattal analóg módon merül fel a kérdés, lehet e három speciális helyzetű ellipszist érintő ellipsziseket, vagy három párhuzamos tengelyű parabolákat érintő parabolákat szerkeszteni. Erre, és ehhez hasonló kérdésekre akkor kapunk választ, ha a ciklográfia általánosítási lehetőségeit megvizsgáljuk. Az általánosítási lehetőségeket a képeik illetve a vetítő alakzat megváltoztatásával kapjuk.

A képsík változtatásával nyert általánosítási lehetőségek:

1. A C-körből vetítjük a tér pontjait egy olyan síkra, mely a C-kúp egyetlen alkotójával sem párhuzamos. Ekkor a térbeli pontok képei ellipszisek. Egy P pontot vetítő C-kúp felületén lévő pontok képei olyan ellipszisek, amelyek érintik a P-hez tartozó ellipszist. Az érintkezést a közös kúpalkotó biztosítja.

   Ekkor azonban felvetődik a következő kérdés:

   > Ha adott egy tetszőleges ellipszis, létezik-e olyan forgáskúp, amelynek az adott ellipszis egy síkmetszete?

   Erre ad választ a következő tétel

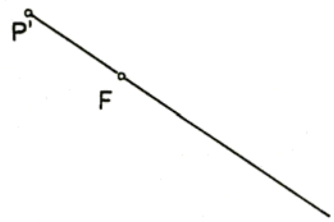
   Tétel

   > Egy adott ellipszisen, hiperbolán vagy parabolán keresztülmenő egyenes körkúpok csúcsai egy olyan hiperbolára, ellipszisre vagy parabolára illeszkedik, melynek síkja az adott kúpszelet síkjára merőleges és annak gyújtópontjai az adott kúpszelet csúcspontjai és viszont.

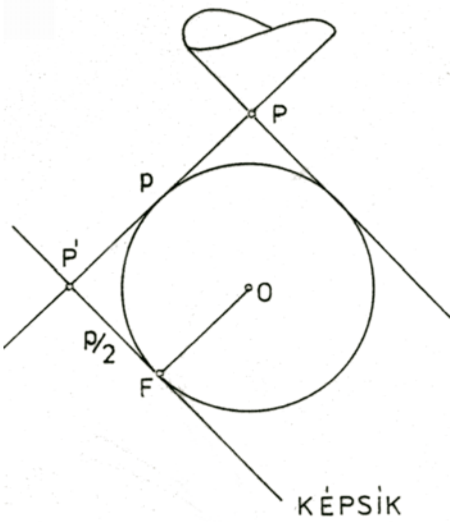
2. A C-körből vetítjük a tér pontjait egy olyan síkra, amely párhuzamos a C-kúp egy alkotójával. Ekkor a pontok képei párhuzamos tengelyű parabolák. A parabola paramétere a pont képsíktól való távolságával egyenlő, a parabola állásából pedig eldönthető, hogy az annak megfelelő térbeli pont a képsík melyik oldalán helyezkedik el. Egy térbeli pont képsíkra eső merőleges vetülete a képparabola csúcspontja. A képsíkon elhelyezkedő pontok önmaguknak felelnek meg az ábrázolás során.

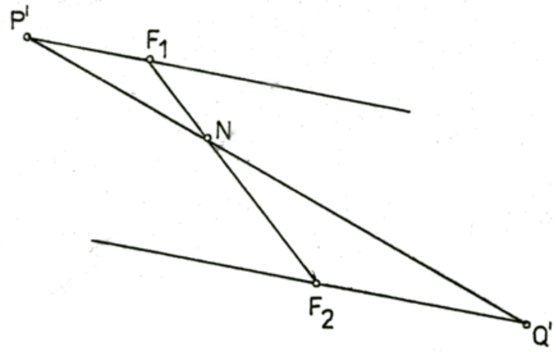
A térbeli pontoknak megfelelő parabolákat csúcspontjaikkal és fókuszaikkal adjuk meg.

Pont ábrázolása



Egyenest két pontja segítségével ábrázolunk. A pontoknak megfelelő parabolák csúcspontjait illetve fókuszait összekötő egyenesek metszéspontja a térbeli egyenes nyompontja.





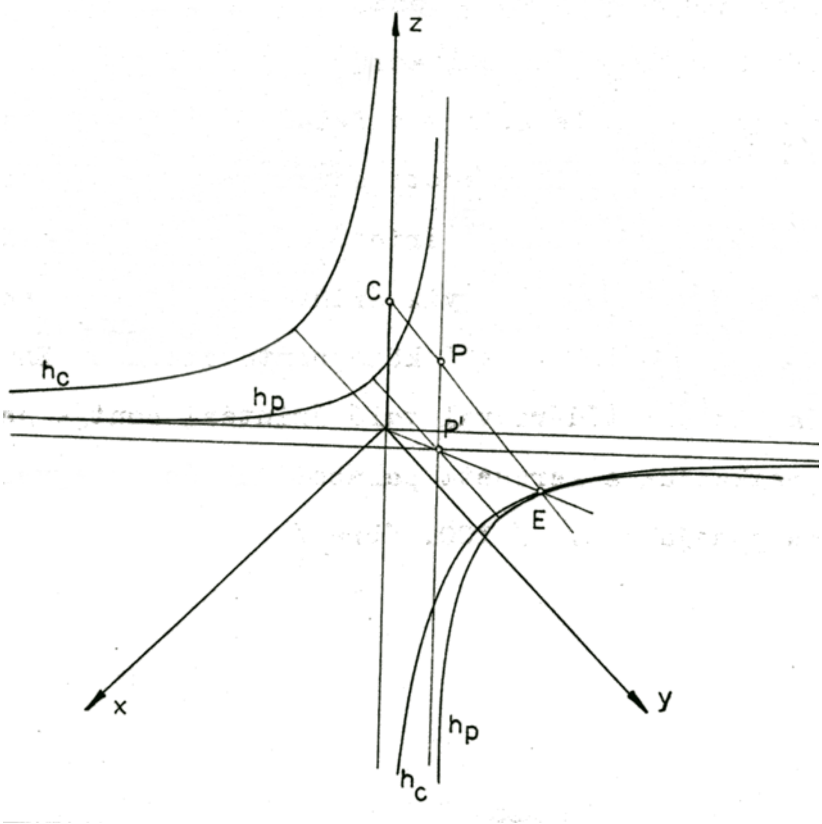
Sík ábrázolása metsző egyenespárral vagy három pontjával történik.

Egy P pontot vetítő kúpfelületen lévő pontok képei a P-hez tartozó parabolát érintik. Az érintkezést itt is a közös kúpalkotó biztosítja.

Megállapíthatjuk, hogy az eredeti ciklografikus kép és az így keletkezett kép között centrálkollineációs vonatkozás áll fenn.

3. A C-körből vetítjük a tér pontjait egy olyan síkra, mely a C-kúp két alkotójával is párhuzamos. A vetítő C-kúpok tengelyei egymással párhuzamosak, így a képsíkkal párhuzamos alkotók egymással is párhuzamosak a vetítőkúpoknál. Ekkor a térbeli pontok képei olyan egyenlő oldalú hiperbolák, amelyek valós tengelyei párhuzamosak, és féltengelyeik akkorák, amekkora távolságra van a pont a képsíktól. Annak eldöntésére, hogy a térbeli pont a képsík melyik oldalán helyezkedik el, a hiperbolákat külön jelöléssel kell ellátni.

Itt is meg kell még vizsgálni az érintkezés feltételét. A hiperbolák érintkezését itt is a vetítőkúpok közös kúpalkotója biztosítja. Az ábrán a C pont képe a h_c hiperbola. A C csúcspontú, h_c alapgörbéjű kúp P felületi pontjának képe a h_p hiperbola. A két hiperbola a CP alkotó E nyompontjában érintkezik.



Nézzünk meg néhány feladatot ebben a 2-es esetben!

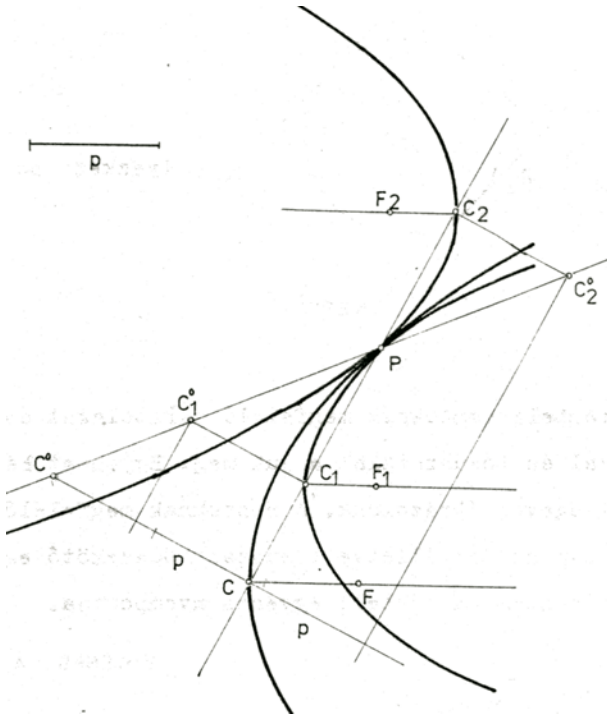
Feladatok

1) Adott egy parabola és rajta egy P pont. Szerkesztendő egy adott paraméterű parabola, amelyik az eredeti parabolát az adott P pontban érinti.

Megoldás

Ha a parabolán kijelölünk egy pontot, és azt összekötjük a parabolát vetítő kúp csúcsával, akkor a kapott egyenes pontjainak a képei olyan parabolák lesznek, amelyek az eredeti parabolát az adott pontban érintik. Ezek közül a parabolák közül kell kiválasztanunk az adott paraméterűt. Ezt a következőképpen oldhatjuk meg:

A P pont a képsíkban van, a parabola C csúcsa a képsík fölött a parabola paraméterének megfelelő magasságban található. A PC egyenest a képsíkba forgatjuk, és meghatározzuk az egyenesnek azt a pontját, amely a képsík fölött van a megadott paraméterrel egyező magasságban. Ezt a C_1^O pontot visszaforgatva a keresett parabola C_1 csúcsát kapjuk. Egy másik megoldást kapunk, ha a PC egyenesnek a képsík alatt lévő, attól paraméter távolságban található pontját vetítjük. (86. ábra)

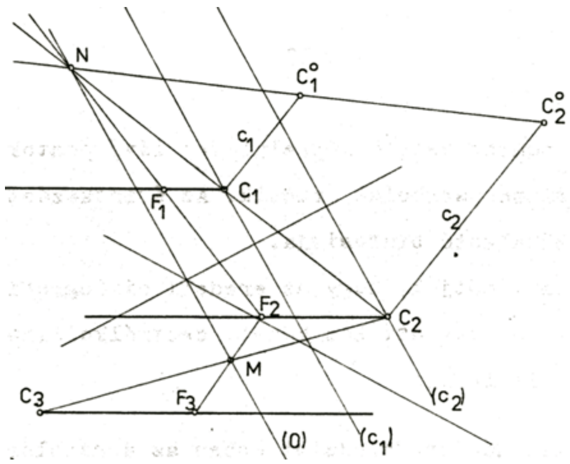


86. ábra

2) Adott egy sík három pontjával. Szerkesszük meg a sík nyomvonalát és néhány szintvonalát!

Megoldás

Ebben az ábrázolási rendszerben a pontoknak párhuzamos tengelyű parabolák felelnek meg. A parabola paramétere a pont képsíktól való távolsága. A C_1C_2 egyenes nyompontja az N pont, a C_2C_3 egyenes nyompontja az M pont. Ezeket a nyompontokat többféle úton megkereshetjük: az adott egyenes képsíkba forgatásával vagy a megfelelő fókuszok és csúcspontok összekötésével. (Korábban már említettük, hogy így az egyenes nyompontját kapjuk.) A nyompontok összekötő egyenese lesz a nyomvonal, azzal párhuzamosan kapjuk a szintvonalakat. (87.ábra)



87. ábra

Az alapfeladatok megoldásánál ugyanúgy járhatunk el, mint kótás projekcióban. A pontok kótái itt a parabolák paraméterei. Ezt felhasználva meg tudjuk szerkeszteni két sík metszésvonalát, egyenes és sík döféspontját.

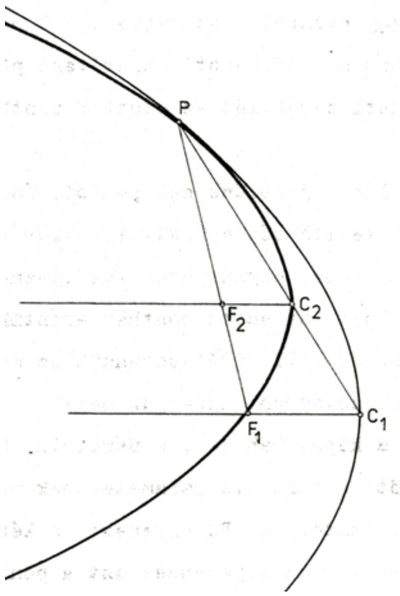
3) Adott egy parabola és egy pont. Szerkesszünk parabolát, amely az adott parabolát érinti és a csúcspontja az adott pont.

Megoldás

Először az adott és a keresett parabola közös pontját keressük meg. Ha két parabola érinti egymást, és a parabolák tengelyei párhuzamosak, akkor az érintési pont a parabolák csúcsait és fókuszait összekötő egyenesek metszéspontja. Ez elemi úton is egyszerűen belátható, felhasználva azt a tételt, hogy a parabola érintője felezi az érintési pontot a fókusszal összekötő egyenes, és az érintési pontból a vezéregyenesre bocsátott merőleges egyenes szögét.[4]

A feladat megoldásához meg kell tehát keresni az adott parabola C_1 csúcsát, és az adott C_2 pontot összekötő egyenes és az adott parabola metszéspontját, ez lesz az érintési pont. A rajzon P-vel jelöltük. Ezután a P pontot összekötjük F_1-gyel. Ennek az egyenesnek, és C_2-n átmenő tengelynek a metszéspontja megadja a keresett parabola fókuszát. (88.ábra)

[4] Most lássuk be az állítást, felhasználva a vetítőalakzatokat! Ha két parabola érinti egymást, akkor a parabolákat vetítő kúpoknak van egy közös alkotója. Ez a közös alkotó csak a C_1C_2 összekötő egyenese lehet. A parabolák közös pontja ennek az egyenesnek a nyompontja, mivel a parabolák a képsíkban vannak. Az előző feladatnál láttuk be, hogy egy egyenes nyompontja az egyenes két pontját vetítő parabola csúcsait és fókuszait összekötő egyenesek metszéspontja.



88. ábra

Az Apollóniusz-feladat néhány általánosítása

A feladat megoldásának általános módszere:

Bevezetünk egy Monge-rendszert, melynek a tengelye a parabolák tengelyével párhuzamos. Ekkor a vetítő-kúpok első képe a parabola. A vetítőkúp csúcspontjának második képét a parabola csúcspontjából az x_{12}-re állított merőlegesen kapjuk, a tengelytől paraméter távolságra. Hogy a pont a tengely fölött vagy alatt lesz, ez a parabola állásától függ. Felveszünk egy K_4 képsíkot a K_2-re merőlegesen úgy, hogy a kúpok tengelyére is merőleges legyen, majd meghatározzuk a vetítőkúpok negyedik képét. Az új nyomgörbe általában kör, ha pedig a kúp csúcsa illeszkedik a K_4-re, akkor egy pont. Így az eredeti Apollóniusz-feladatra vezettük vissza a problémát, egy adott irányítás esetén. Itt a már ismert módon megoldjuk a feladatot, majd a képsíktranszformációt visszafelé alkalmazva megkapjuk a keresett parabolákat.

Nézzünk néhány konkrét esetet!

4) Adott három párhuzamos tengelyű parabola. Szerkesztendők az adott parabolákat érintő parabolák.

Megoldás

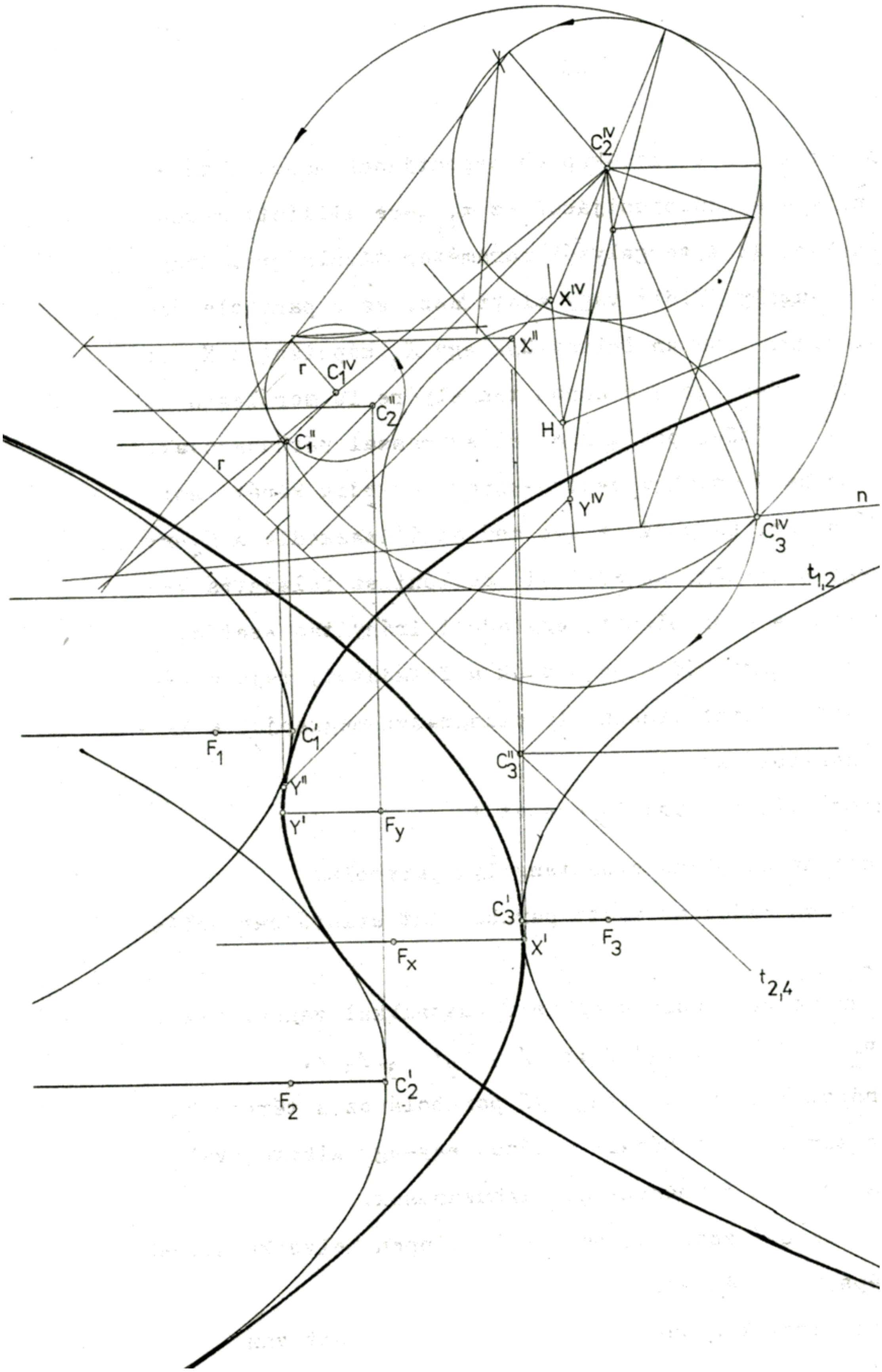
A parabolák csúcsaikkal és fókuszaikkal vannak megadva: $P_1(C_1;F_1)$, $P_2(C_2;F_2)$, $P_3(C_3;F_3)$.

A három párhuzamos tengelyű parabolához a térben három kúp tartozik. A képsík a kúpok egy-egy alkotójával párhuzamos, melyek egymással is párhuzamosak.

A kúpok csúcspontjai négyféle képpen helyezkedhetnek el a képsíkhoz képest:

- mindhárom kúp csúcspontja a képsík felett van
- két kúp csúcspontja a képsík felett, egy alatta van
- egy kúp csúcspontja a képeik felett, kettő alatta
- mindhárom kúp csúcspontja a képeik alatt van

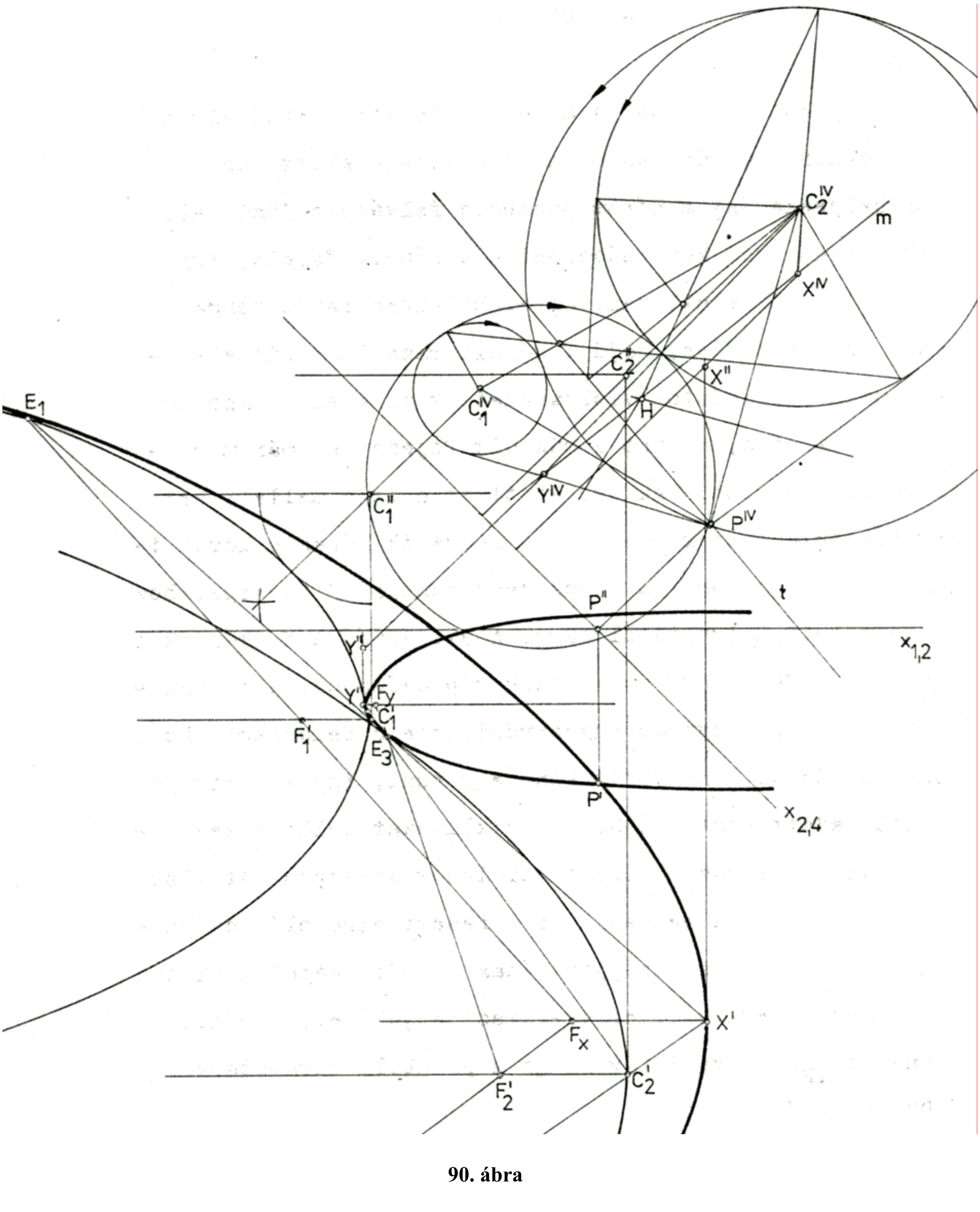
Az elhelyezkedést a három parabola felvétele dönti el. A 89. ábrán két kúp csúcspontja a képsík felett, egy pedig a képsík alatt van. Az előbbiekben leírt Monge-rendszer bevezetése, majd a képsíktranszformáció elvégzése után a feladatot visszavezettük az eredeti Apollóniusz feladatra, melyet a második fejezetben már megoldottunk. Itt most csak egy adott irányítás mellett kell érintő-ciklusokat keresnünk. A negyedik képen a körök irányítása a kúpok csúcspontjainak K_4 képsíkhoz viszonyított helyzetétől függ. A K_4 képsíkot úgy vettük fel, hogy a harmadik kúp csúcspontja illeszkedjen rá. Ez annyiban egyszerűsítette a feladatot, hogy ennek a kúpnak a negyedik képe egy pont, így két ciklust érintő, adott ponton áthaladó ciklusokat kellett keresnünk. Az így megszerkesztett ciklusok középpontját visszatranszformálva megkapjuk a keresett parabolák csúcspontjait. A ciklus középpontjának második képét a ciklus sugarának a segítségével szerkeszthetjük meg. A második képnek t_{12}-től való távolsága a parabola paramétere. (89. ábra)



C_2^{IV}
X^{IV}
X''
r
C_1^{IV}
C_2''
C_1''
r
H
Y^{IV}
n
C_3^{IV}
$t_{1,2}$
C_1'
F_1
C_3''
Y''
Y'
F_y
C_3'
X'
F_3
F_x
$t_{2,4}$
C_2'
F_2

89. ábra

5) Adott két parabola, melyek tengelyei párhuzamosak és egy pont. Szerkesztendő az adott parabolák tengelyeivel párhuzamos tengelyű, az adott ponton áthaladó parabola.



90. ábra

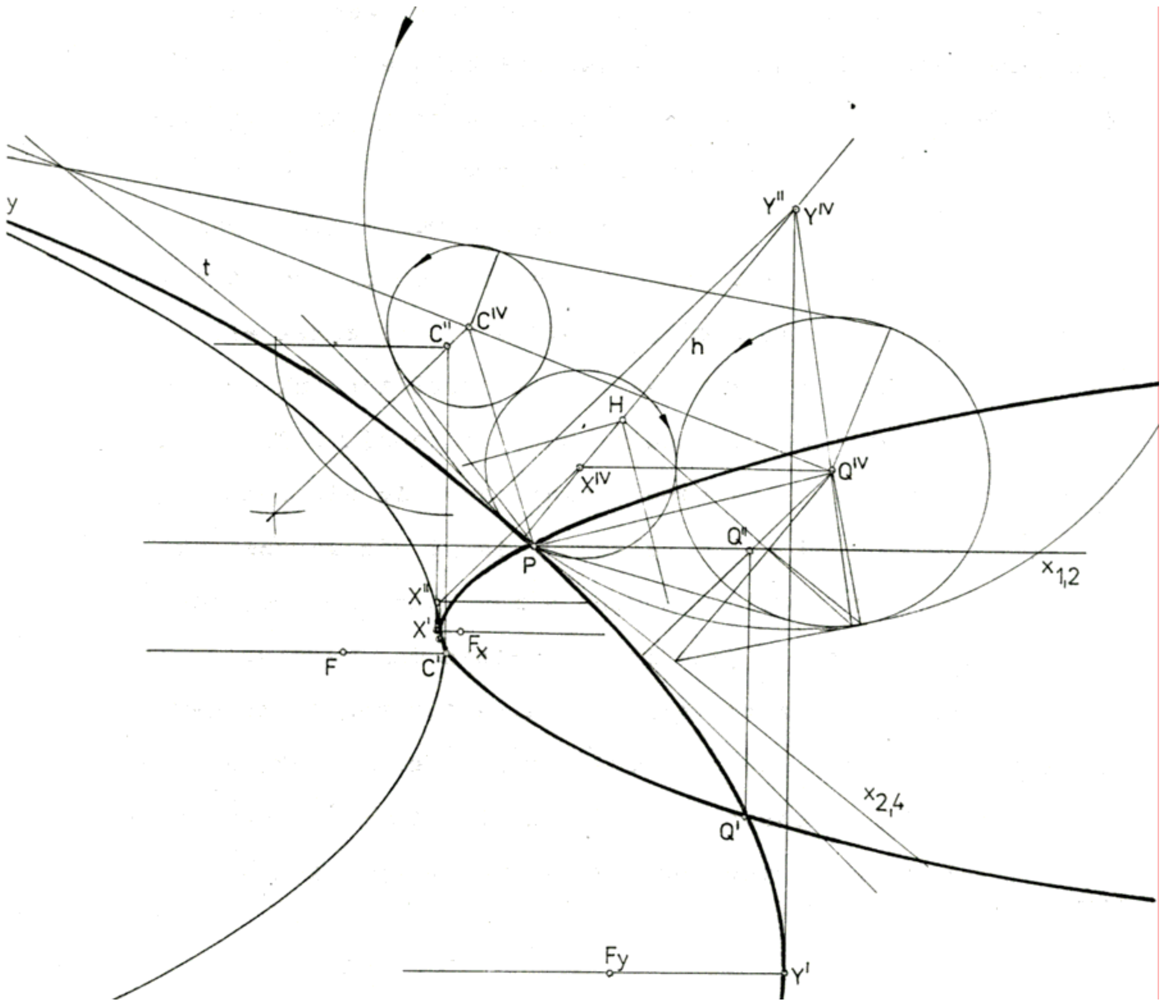
Megoldás

A párhuzamos tengelyű parabolák most is csúcspont és fókusz segítségével legyenek megadva: $P_l(C_1;F_1)$, $P_2(C_2;F_2)$ és P legyen az adott pont. A parabolákhoz a térben most is, kúpok tartoznak. Az előző feladat megoldásához hasonló módon most is bevezetünk egy Monge-rendszert, majd alkalmazzuk a megfelelő képsíktranszformációt. A 90. ábrán az adott parabolákhoz tartozó kúpok csúcspontjai a képsík fölött helyezkednek el. Ebből a szempontból még két esetet különböztethetünk meg: egyik kúp csúcsa a képsík alatt, másik a képsík felett van, vagy mindkettő csúcsa a képsík alatt van. Az alkalmazott képsíktranszformációval a feladatot ismét visszavezettük két ciklust érintő, adott ponton átmenő ciklusok keresésére. Ezt a feladatot a második fejezetben már megoldottuk. A megoldásokat visszatranszformálva kapjuk meg az eredeti feladat megoldását. Két megoldása van a feladatnak, ezek az X illetve az Y csúcspontú parabolák. Az ábrán az adott parabolákkal való érintési pontokat is megszerkesztettük. (90. ábra)

6) Adott egy parabola és két pont. Szerkesztendő az adott parabolával párhuzamos tengelyű és azt érintő, az adott pontokon áthaladó parabola.

Megoldás

Az adott parabola: $P_l(C;F)$, és az adott pontok: P és Q. Bevezetünk egy Monge-rendszert, melynek x_{12} tengelye párhuzamos a parabola tengelyével. Egyszerűsítést jelent, ha a képsíktengelyt az egyik pontra illesztjük, így annak első és második képe egybeesik. További egyszerűsítés, ha K_4-et is erre a pontra illesztjük, így a pont mindhárom képe egybeesik. A képsíktranszformáció elvégzése után most is két ciklust érintő, adott ponton áthaladó ciklusokat keresünk. A feladatnak két megoldása van, melyek csúcspontját az érintőciklusok középpontjának visszatranszformálásával kapjuk meg. A megoldásokat X és Y-nal jelöli. (91. ábra)

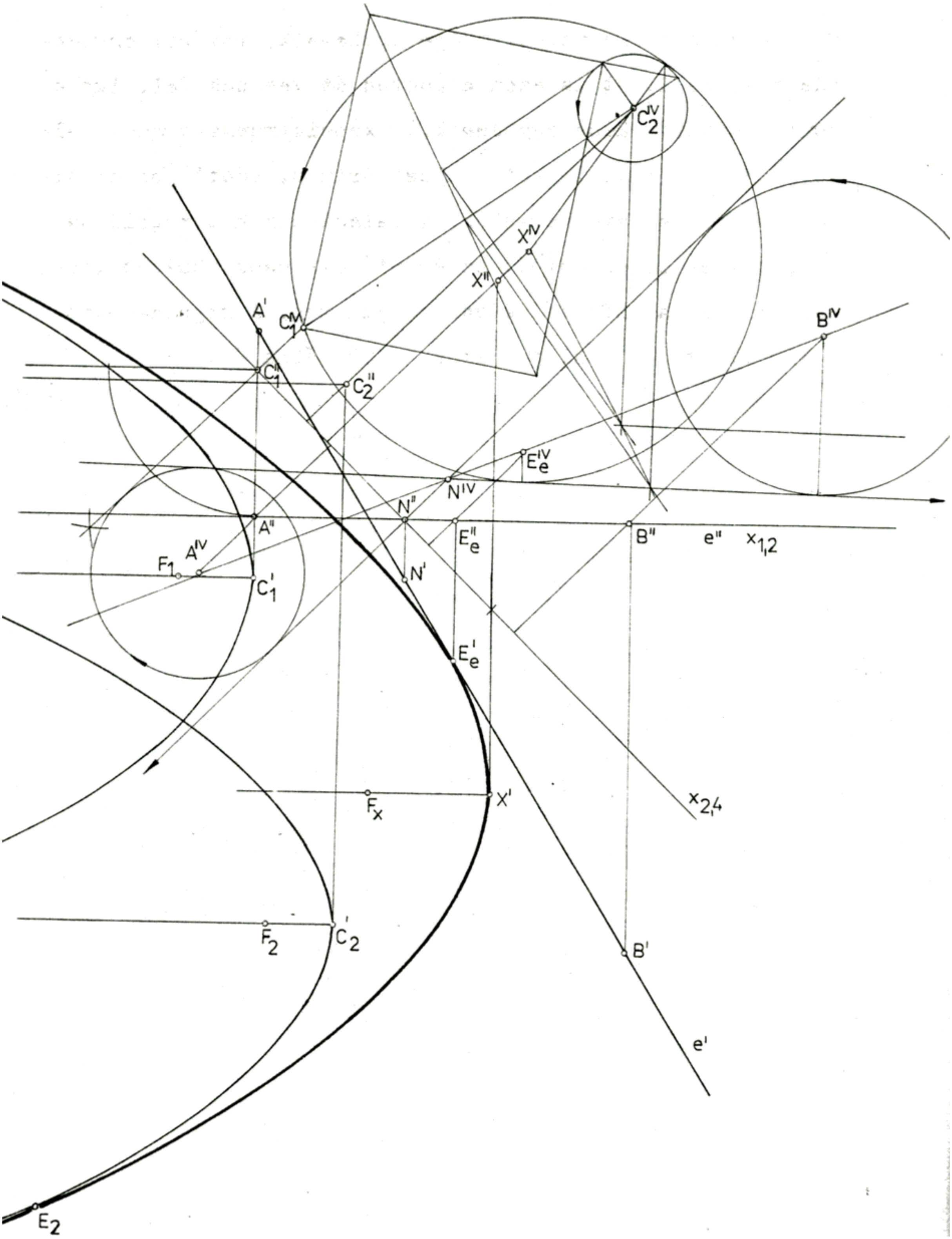


91. ábra

7) Adott két párhuzamos tengelyű parabola és egy egyenes. Szerkesztendő az adott parabolákkal párhuzamos tengelyű, azokat érintő, és az adott egyenest is érintő parabola.

Megoldás

A parabolák csúcspontjaikkal és fókuszaikkal legyenek megadva. A parabolákhoz a térben egy-egy kúp tartozik. A kúpok egy-egy alkotója egymással is és a képsíkkal is párhuzamos. A 92. ábrán mindkét parabolához tartozó kúp csúcspontja a képsík felett helyezkedik el, így a parabolák egy állásúak. Nincs a feladatnak megoldása, ha a parabolák ellentétes állásúak, és az egyenes elválasztja azokat, vagy ha egyállásúak és az egyik parabolát metszi az egyenes. A 92. ábrán a feladatnak egy megoldását figyelhetjük meg. Most is megszerkesztjük a parabolákhoz tartozó kúpok, illetve az egyenes negyedik képét. A K_4 képsík megfelelő elhelyezésével az egyik parabola képe pont lesz, a másiké kör. Az egyenes negyedik képe egy körsor lesz, melynek az egyik érintődárdáját kiválasztjuk. Így a feladatot arra az esetre vezettük vissza, amikor adott dárdát érintő, adott ponton átmenő és adott ciklust érintő ciklusokat keresünk. Így megszerkesztettük az X^{IV} középpontú ciklust. Ennek a ciklusnak az érintődárdával való érintési pontja segítségével megkapjuk a keresett parabolának és az egyenesnek a közös pontját is. (92. ábra)



C_2^{IV}
X^{IV}
X^{II}
B^{IV}
A^{I}
C_1^{IV}
C_1^{II}
C_2^{II}
E_e^{IV}
N^{IV}
N^{II}
A^{II}
E_e^{II}
B^{II}
e^{II}
$x_{1,2}$
F_1
A^{IV}
C_1^{I}
N^{I}
E_e^{I}
$x_{2,4}$
F_x
X^{I}
F_2
C_2^{I}
B^{I}
e^{I}
E_2

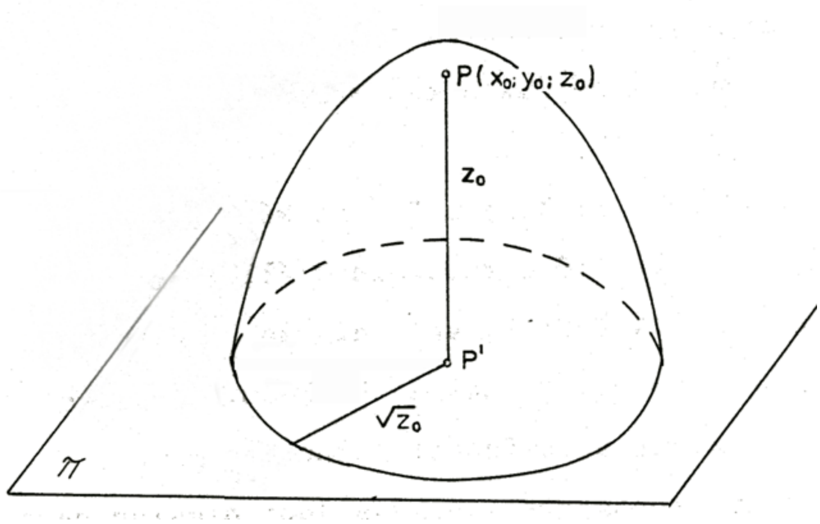
92. ábra

A vetítő alakzat változtatásával nyert általánosítási lehetőségek:

A ciklográfia következő általánosítási lehetőségét K. Rabl osztrák matematikus közölte az Elemente der Mathematik nevű svájci matematikai lap 1974/29. számában.

Ebben az esetben a leképezést nem C-kúpokkal, hanem normálparabolák megforgatásából adódó forgásparaboloidokkal valósítjuk meg. A vetítőparaboloidok tengelye a képsíkra merőleges lesz. Legyen $P(x_0,y_0,z_0)$ a vetítendő pont, egyben a vetítőparaboloid csúcsa is. Ekkor a vetítőfelület egyenlete:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z-z_0=0$$



Vizsgáljuk meg a forgástengellyel párhuzamos síkmetszeteket!

Ha a P pont az origó, akkor a paraboloid egyenlete egyszerűbb: $x^2+y^2+z=0$. Messük el az x = 0 síkkal! Ekkor a síkmetszet egyenlete: $y^2+z=0$, ez a görbe egy parabola. Ha a z tengellyel párhuzamos síkkal. Legyen ez a sík például az $x=x_1$ sík. Ekkor a síkmetszet: $x_1^2+y^2+z=0$. Ez a síkmetszet szintén egy parabola, amely az előző parabolából $-x_1^2$ mértékű eltolással származik. Mivel a paraboloid forgásparaboloid, ezért ebből már megállapíthatjuk, hogy **a paraboloid tengelyével párhuzamos síkok a paraboloidból minden esetben normál parabolát metszenek ki.**

Legyen a $P(x_0,y_0,z_0)$ pont a képsík felett, ekkor tehát $z_0>0$. Messük el a P pontot vetítő $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z-z_0=0$ paraboloidot az [x;y] síkkal! A kapott görbe (amely egy valós kör) legyen a P pont képe. A metszet egyenlete: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=z_0$, amelyből látható, hogy a kör középpontja a P pontnak a képsíkra eső merőleges vetülete, sugara pedig $\sqrt{z_0}$.

A vetítőparaboloidok mindig ugyanolyan állásúak, azaz a legmagasabb pontjuk a csúcspontjuk. Abban az esetben, ha a vetített pont a képsík alatt van ($z_0<0$) a paraboloid nem metszi valós körben a képsíkot, és a metszet az $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=z_0$ egyenletű képzetes kör lesz.

Tehát ha a teret ilyen paraboloidokkal képezzük le

- a képsík felett lévő pont képe olyan valós kör, amely sugara a pont képsíktól való távolságának négyzetgyöke, középpontja pedig a pont képsíkra eső merőleges vetülete,
- a képsík alatt lévő pont képe olyan képzetes kör, amely sugara a pont képsíktól való távolságának négyzetgyöke, (képzetes szám) középpontja pedig a pont képsíkra eső merőleges vetülete,
- minden képsíkbeli pont képe önmaga.

Kimondhatjuk a következő tételt:

Tétel:

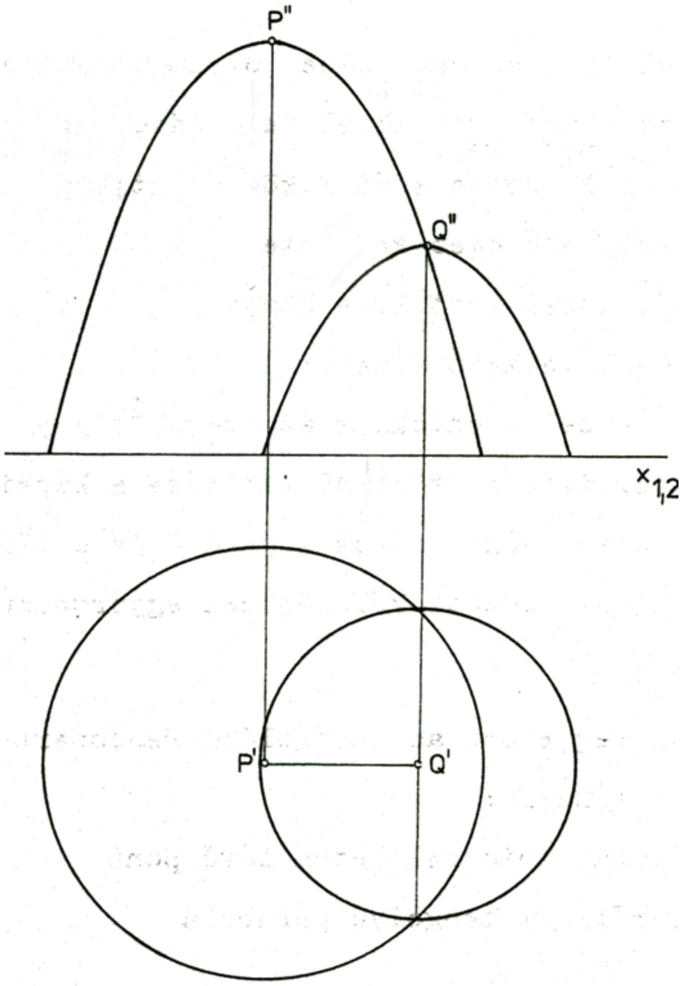
A térbeli pontoknak az $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z-z_0=0$ típusú paraboloidokkal történő vetítése a képsík körei (valós, képzetes vagy zérus sugarú) és a tér végesben fekvő pontjai között kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesít.

Vizsgáljuk meg ebben az ábrázolási rendszerben a következő alakzatok képét!

1. egy vetítőparaboloid felületén lévő pont
2. képsíkra merőleges tengelyű parabola
3. egyenes

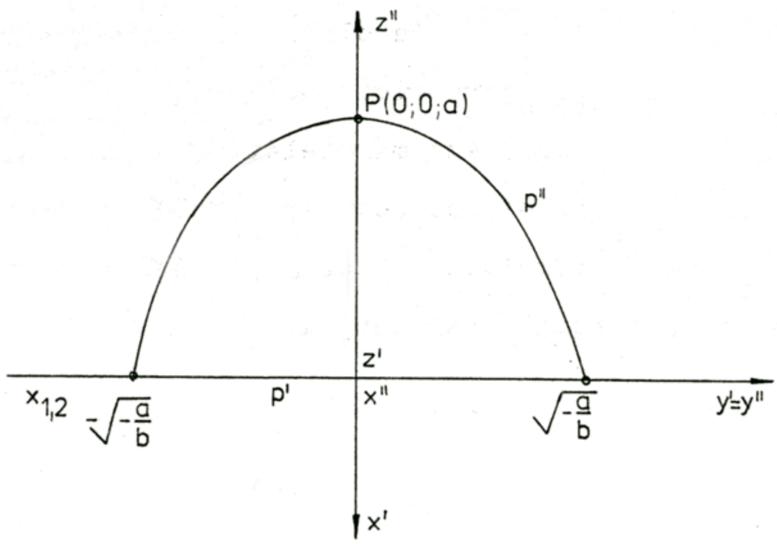
1. Vetítőparaboloid felületén lévő pont képe

Egy vetítőparaboloid felületén lévő pont képe olyan kör, amelyet az eredeti vetítőparaboloid átellenes pontokban metsz. Legyen a vetítőparaboloid pontja Q. Vegyünk fel Q-n át egy vetítősíkot. Azt már beláttuk, hogy a vetítősíkok a vetítőparaboloidból normálparabolát metszenek ki. A Q-t vetítő paraboloidot a Q csúcspontú síkmetszet-normálparabola megforgatásával kapjuk.



2. Képsíkra merőleges tengelyű parabola

Ábrázoljuk Monge-rendszerben ezt a parabolát!



A z tengely a parabola tengelye, a képsík a koordinátarendszer [x, y] síkja, a parabola síkja pedig az [y, z] síkban van.

A p görbe egyenlete: $x = 0 \quad y = t \quad z = a + bt^2$

A parabola t paraméterű pontját leképező felület egyenlete: $x^2 + (y - t)^2 + z - (a + bt^2) = 0$.

Ha a t paramétert futtatva egy paraboloidsort kapunk, mely paraboloidok csúcspontjai a parabolára illeszkednek. Ennek a felületsornak az [x, y] síkkal való metszete lesz a parabolaív képe.

Ennek az egyenlete: $F(x, y, t) = x^2 + (y - t)^2 + z - (a + bt^2) = 0$.

Ez egy körsor, ahol a körök középpontjai az y tengelyre illeszkednek.

Határozzuk meg ennek a körsornak a burkolóját!

Ahhoz, hogy egy $x = x(t)$, $y = y(t)$ egyenletű görbe burkolója legyen az $F(x, y, t) = 0$ görbeseregnek, szükséges, hogy $F(x(t), y(t), t) \equiv 0$ és $F'_t(x(t), y(t), t) \equiv 0$ legyen.

Az első feltétel teljesül, a másodikból pedig a következő egyenletet kapjuk: $F'_t(x(t), y(t), t) = -2(y - t) - 2bt = 0$. Ebből a paraméterre a $t = \dfrac{y}{1 - b}$ összefüggés adódik.

Vizsgáljuk meg, milyen görbét jelent a kijelölt diszkriminánsgörbe!

$$x^2 + \left(y - \frac{y}{1 - b}\right)^2 - a - b\left(\frac{y}{1 - b}\right)^2 = 0$$

Az egyenletet $(1 - b)^2$-nel végigszorozva, majd $(b - 1)$-et kiemelve a következő alakra hozhatjuk:

$$(b - 1) \cdot \left((b - 1)x^2 + by^2 - a(b - 1)\right) = 0.$$

Ez három esetben lehetséges

a. Ha $b - 1 = 0$ és a másik szorzótényező nem nulla. Ebből b=1 összefüggéshez jutunk. Ezt az esetet a paraméterre kapott kifejezés miatt kizárjuk a vizsgálatainkból.

b. Ha mindkét szorzótényező nulla. Ekkor b=1, és a másik tényezőbe ezt beírva $y^2 = 0$ adódik. Ebből y=0, ez egy kettős valós egyenespár, mely burkolóként kezelhető.

c. Ha csak a $(b - 1)x^2 + by^2 - a(b - 1)$ tényező a nulla.

Vizsgáljuk meg ezt a harmadik esetet!

A burkoló létezéséhez még két elégséges feltételnek is teljesülni kell a szükséges feltételeken kívül. Ezek:

$$F_x'^2 + F_y'^2 > 0 \quad \text{és} \quad F_{tt}'' \neq 0 .$$

A jobboldali feltétel teljesül: $F_{tt}'' = 2 - 2b = 2(1-b) \neq 0$, hiszen $b \neq 1$.

A baloldali feltétel:

$F_x'^2 + F_y'^2 = 4x^2 + 4(y-t)^2 = 4 \cdot \left(t^2 b(1-b) + a + b^2 t^2\right) = 4 \cdot \left(bt^2 + a\right) > 0$ Itt $(y-t)$ helyébe -bt szorzatot, az x helyére pedig $\pm\sqrt{t^2 b(1-b) + a}$ összefüggést írjuk.[5] Ebből $t > \sqrt{-\frac{a}{b}}$ vagy $t < -\sqrt{-\frac{a}{b}}$ egyenlőtlenségeket kapjuk.

Vizsgáljuk tovább ezt a harmadik esetet, milyen burkolót kapunk a különböző esetekben!

A parabola csúcspontja a képsíkban van. $\boxed{a=0}$

A burkoló: $(b-1)x^2 + by^2 = 0$, vagy átrendezve: $y = \pm\sqrt{\frac{(1-b)}{b}} \cdot x$.

- ha b > 1 vagy b < 0, akkor a burkoló képzetes egyenespár lesz.
- ha 0 < b < 1, akkor a burkoló valós egyenespár.

A parabola csúcspontja nincs a képsíkban. $\boxed{a\neq 0}$

A burkoló: $(b-1)x^2 + by^2 = a(b-1)$.

- ha b > 1, akkor a burkoló $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{\frac{a(1-b)}{b}} = 1$.

  Ez $a > 0$ esetén valós ellipszis
  $a < 0$ esetén képzetes ellipszis.

- ha 0< b <1, akkor a burkoló $\dfrac{x^2}{a} - \dfrac{y^2}{\frac{a(1-b)}{b}} = 1$.

  Ez a görbe a > 0 és a < 0 esetén is valós hiperbola, a két eset csak abban különbözik, hogy a hiperbolák valós és képzetes tengelyei felcserélődnek.

- Ha b < 0, akkor a burkoló a b > 1 esetben előforduló burkolóval egyezik meg.

[5] Az x-re ezt az összefüggést úgy kaptuk, hogy a körsor egyenletében y helyébe a t(1-b) szorzatot írtuk

Megjegyzés:

Ha a burkoló ellipszis, akkor a fókuszhoz közel eső pontokban a burkoló tulajdonság nem áll fenn.

Összefoglalva egy, a képsíkra merőleges tengelyű parabola pontjaihoz tartozó körsor burkolója képzetes vagy valós metsző egyenespár, képzetes vagy valós ellipszis, vagy hiperbola lehet.

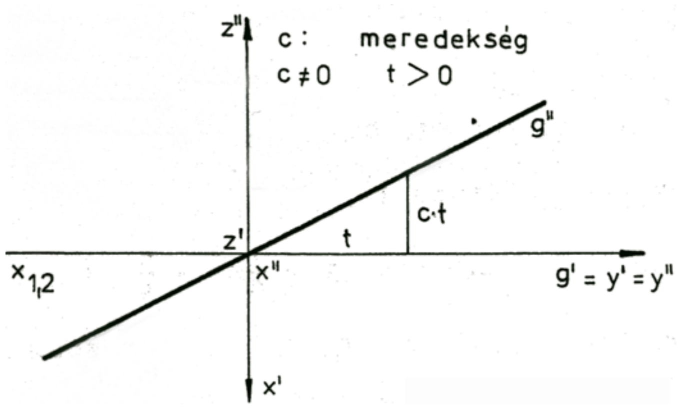
Érdekes a kapcsolat a képsíkra merőleges tengelyű parabolának ($a > 0$ és $b < 0$ esetén) a képsíkkal való metszéspontjai a burkolóalakzat között.

Az előbb már láttuk, hogy a burkoló egy ellipszis, melynek egyenlete: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{\frac{a(1-b)}{b}} = 1$. A féltengely hosszai $\sqrt{a}$ és $\sqrt{\frac{a(1-b)}{b}}$. A fókuszok az ellipszis középpontjától $\sqrt{-\frac{a}{b}}$ távolságra találhatók.

A parabolának a képsíkkal való metszéspontjai: $y_1 = \sqrt{-\frac{a}{b}}$ és $y_2 = -\sqrt{-\frac{a}{b}}$.

Tehát a parabola a burkolóellipszis fókuszaiban metszi a kép síkot.

3. Egyenes képe



Tétel:

Egyenes képe ebben a leképezésben egy körsor, amelynek a burkolója egy olyan parabola, melynek tengelye az egyenes merőleges vetülete, fókusza az egyenes nyompontja, a paramétere az egyenes meredekségének a fele.

Igazoljuk ezt a tételt!

Ábrázoljunk Monge-projekcióban egy g egyenest úgy, hogy az egyenes illeszkedjen a [y, z] síkban, mely egyben a K_2 képsík is.

A g egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x = 0 \quad y = t \quad z = ct^2$.

Ennek pontjait vetítő paraboloidsor egyenlete: $x^2 + (y-t)^2 + z - ct = 0$

Ennek az [x, y] síkkal való metszete: $x^2 + (y-t)^2 - ct = 0$

Ez egy egyparaméteres körsereg egyenlete. Határozzuk meg a burkolót!

Szükséges feltétel: $F'_t = -2(y-t) - c = 0$, ebből $x = \pm\sqrt{c(t-\frac{c}{4})}$ és $y = t - \frac{c}{2}$ $\left(t \geq \frac{c}{4}\right)$.

Ez a burkológörbe egyenlete. A paraméteres egyenletrendszerből $y = \frac{x^2}{c} - \frac{c}{4}$ alakra juthatunk, melyből leolvasható, hogy ez a görbe egy parabola, melynek paramétere $\frac{c}{2}$, csúcspontja ($-\frac{c}{4}$, 0, 0). Az is leolvasható, hogy a fókuszpontja a koordinátarendszer origója, mely egyben az egyenes nyompontja.

Elégséges feltétel: $F''_{tt} = 2 \neq 0$

$F'^2_x + F'^2_y = 4ct > 0$ Ebből c > 0 és t > 0 egyenlőtlenségeknek kell teljesülni.

A burkolóparabolának az egyenes pontjainak képeként jelentkező körvetületekkel két közös pontja van, mivel mind a parabola mind a körsor az y tengelyre szimmetrikus.

Határozzuk meg a közös pontok koordinátáit!

A parabola egyenlete: $y = \frac{x^2}{c} - \frac{c}{4}$.

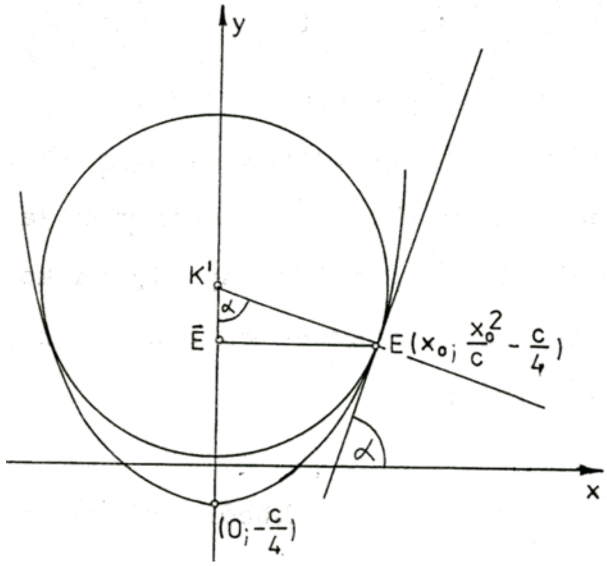
Egy pontja legyen E(x_0, y_0) Határozzuk meg annak a körnek a középpontját, melyet a parabola kettősen érint, és az egyik érintési pont E .

A körnek és parabolának közös az érintője, ezért a kör középpontja a parabola E-beli normálisának és az y tengelynek a metszéspontja. A parabola E-beli érintőjének iránytangense: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2x_0}{c}$.

K'E egyenlete $y = \frac{x_0^2}{c} - \frac{c}{4} = -\frac{c}{2x_0}(x - x_0)$.

Ennek az y tengellyel való metszéspontja: $\left(0, \frac{x_0^2}{c} + \frac{c}{4}\right)$

$\text{tg}\alpha = \dfrac{x_0}{d(K'\bar{E})} \Rightarrow d(K'\bar{E}) = \dfrac{c}{2}$. Tehát a parabolát kettősen érintő kör érintési pontjainak az y tengelyre eső merőleges vetülete és a kör középpontja paraméter távolságra van egymástól.



Feladatok

1) Adott két kör. Szerkesztendő olyan parabola, amely mindkét kört kettősen érinti.

Megoldás

Ha a tér pontjait paraboloidokkal vetítjük, akkor egy egyenes képe körsor, amelynek a burkolója olyan parabola, melynek a paramétere az egyenes meredekségének a fele, fókusza az egyenes nyompontja, tengelye pedig az egyenes merőleges vetülete.

A feladat térbeli tartalma tehát a következő:

A két körhöz tartozó térbeli pontra egyenest illesztünk, és ennek az egyenesnek a megfelelő paramétereivel meg lehet határozni a burkoló parabolát.

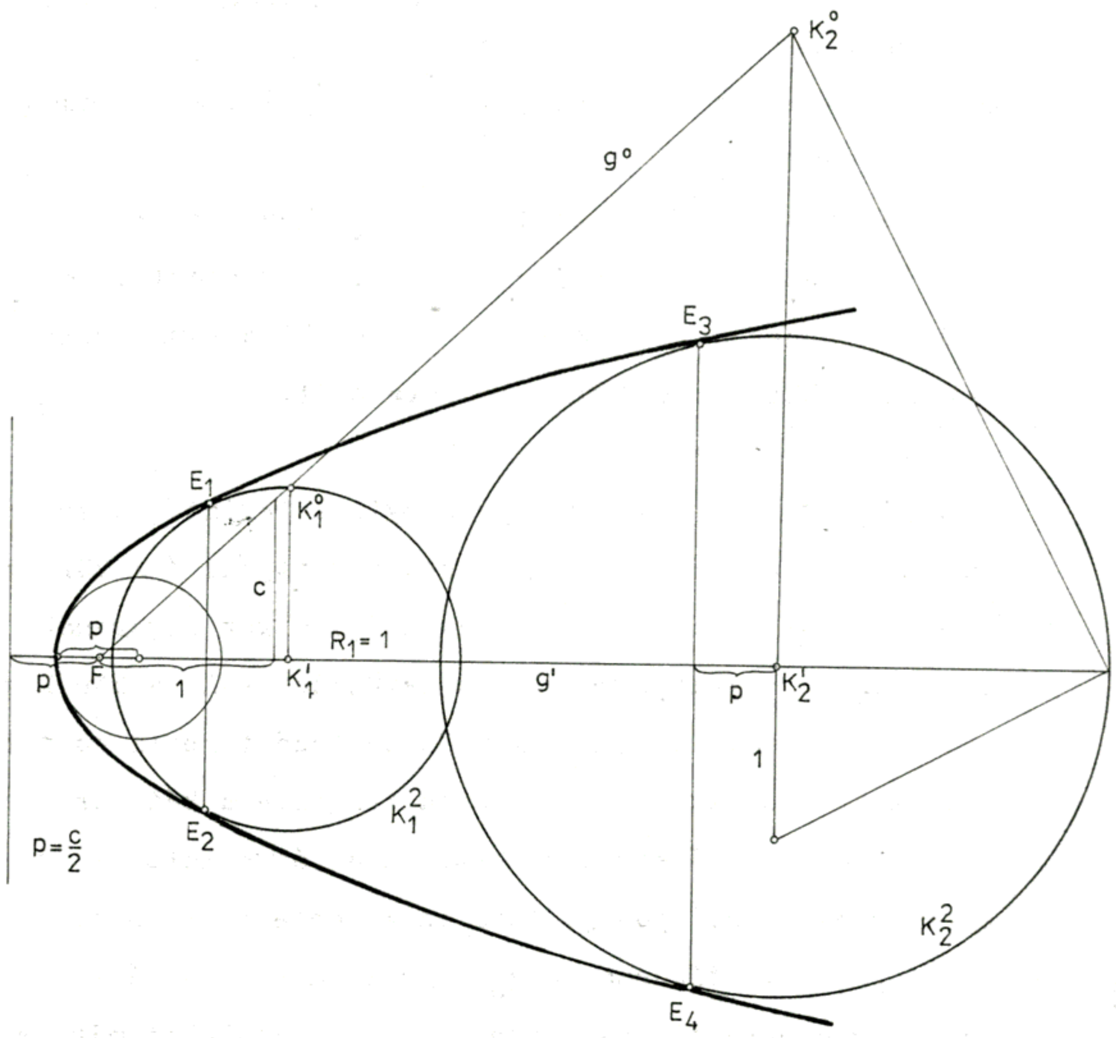
Szerkesztés menete:

A K_1^2 kör R_1 sugarát egységnyinek tekintve a K_1^2 és a K_2^2 körhöz tartozó térbeli pontot a képsíkba forgatjuk.[6] A parabola tengelye a két kör középpontját összekötő egyenes lesz. Ennek és a leforgatott g_0 egyenesnek a metszéspontja lesz az egyenes nyompontja, egyben a parabola fókusza. A g_0 egyenes meredekségének a fele pedig a parabola paramétere. Így a parabolát már meghatároztuk. A fejezet elején talált bevezetőből az is kiderül, hogy parabolát kettősen érintő kör érintési pontjainak a tengelyre eső merőleges vetülete és a kör középpontjának a távolsága a parabola paraméterével megegyezik. (93. ábra)

Egy közös pontja van a parabolával annak a körnek, melynek középpontja a parabola csúcspontjától paraméter távolságra van. Ebből az következik, hogy a parabola csak azoknak a köröknek a burkolója, melyek középpontja a fókuszától, $\frac{c}{4}$-nél nagyobb, egyenlő távolságra van.

(Ezt a feltételt a burkolótulajdonság szükséges feltételeként már megkaptuk.)

[6] A körhöz tartozó pont képsíktól való távolsága a kör sugarának a négyzetével egyenlő, merőleges vetülete pedig a kör középpontja.



93. ábra

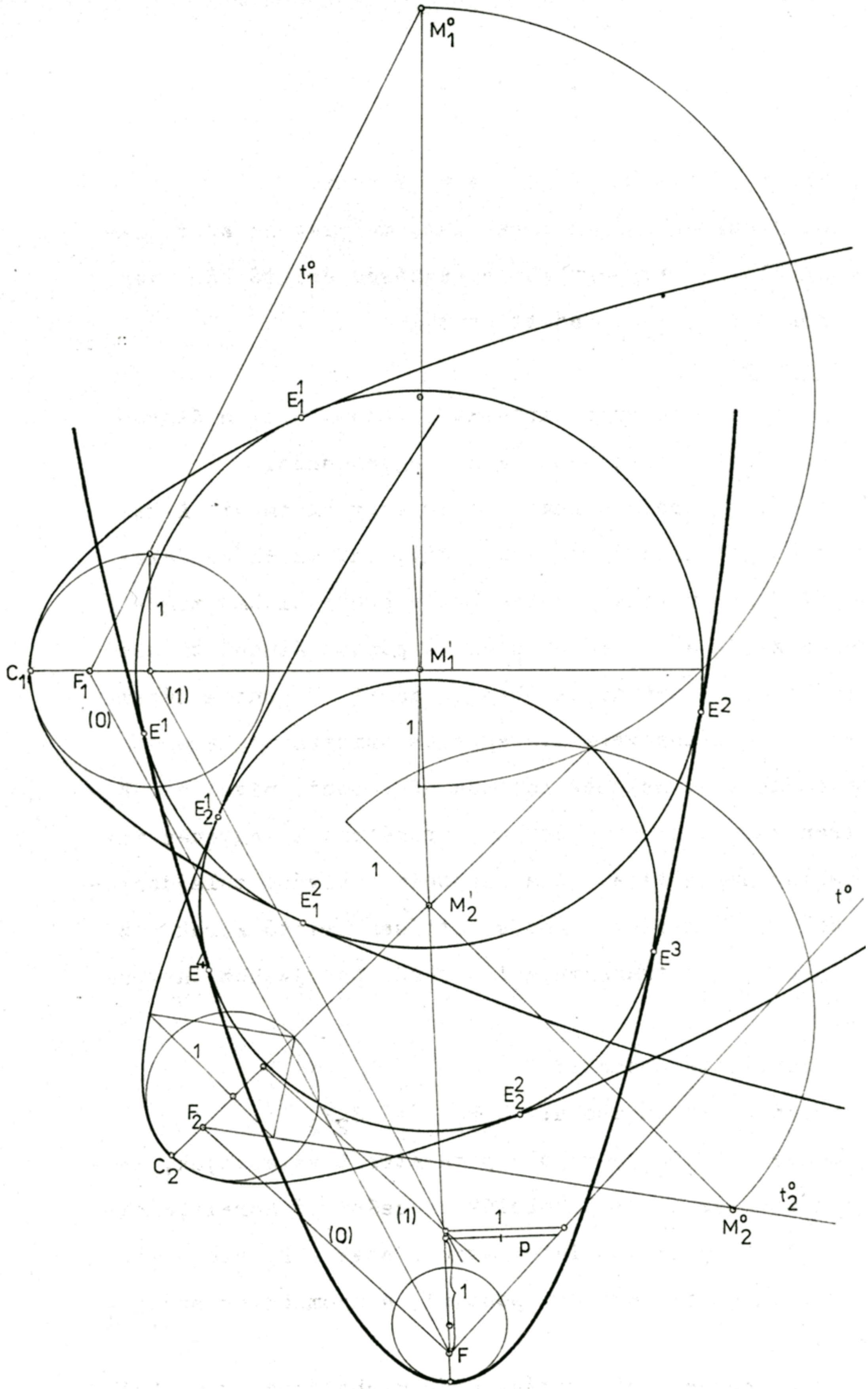
2) Adott két parabola és egy F pont. Szerkesszünk olyan parabolát, melynek az adott parabolákkal egy-egy közös kettősen érintő köre van, fókusza pedig az adott pont.

Megoldás

A feladat térbeli tartalma:

Adott ponton átmenő transzverzális szerkesztése két egyeneshez.

A két parabola meghatároz egy-egy egyenest. A két egyenest képsíkba forgatjuk, és azokat az előző feladat mintájára graduáljuk. Ezután kótás projekcióban megszerkesztjük a két egyenes adott ponton átmenő transzverzálisát. Ebben az esetben az adott F pont a képsíkban van. A transzverzális egyenes szintén meghatároz egy parabolát, melynek fókusza az F pont, mivel az F a transzverzális nyompontja, paramétere az egyenes meredekségének a fele. Ez a parabola a kívánt tulajdonságokkal rendelkezik. A közös kettősen érintő körök az egyenesek és a transzverzális közös pontjaihoz tartoznak.



M_1^o
t_1^o
E_1^1
1
C_1
F_1
(1)
M_1'
(0)
E^1
E^2
1
E_2^1
1
E_1^2
M_2'
t^o
E^4
E^3
1
E_2^2
F_2
C_2
(1)
(0)
1
p
M_2^o
t_2^o
1
F
C

94. ábra

Szerkesztés menete:

Az eredeti két parabola: C_1F_1 és C_2F_2. Egységnek a C_1F_1 parabola paraméterét választjuk, meghatározzuk az adott parabolák csúcsérintő köreit, ezekhez tartozó pontokat leforgatjuk, ezek a keresett forgatott egyenesek egy-egy pontjai, a nyompontok pedig a fókuszok. Az. egyenesek leforgatása után meghatározzuk azok (1)-es kótájú pontjait, a (0)-ás kótájúak a fókuszok.

A keresett transzverzálist az egyenesekre és az F pontra illesztett két sík metszésvonala adja. Ennek ismerjük s (0) -ás és az (1) -es kótájú pontjait, így a képsíkba tudjuk forgatni, hogy a parabola paraméterét meghatározzuk: a (0)-ás kótájú ponttól, azaz a fókusztól egységnyi távolságra lévő pont képsíktól való távolsága a parabola paraméterének kétszerese. (94.ábra)

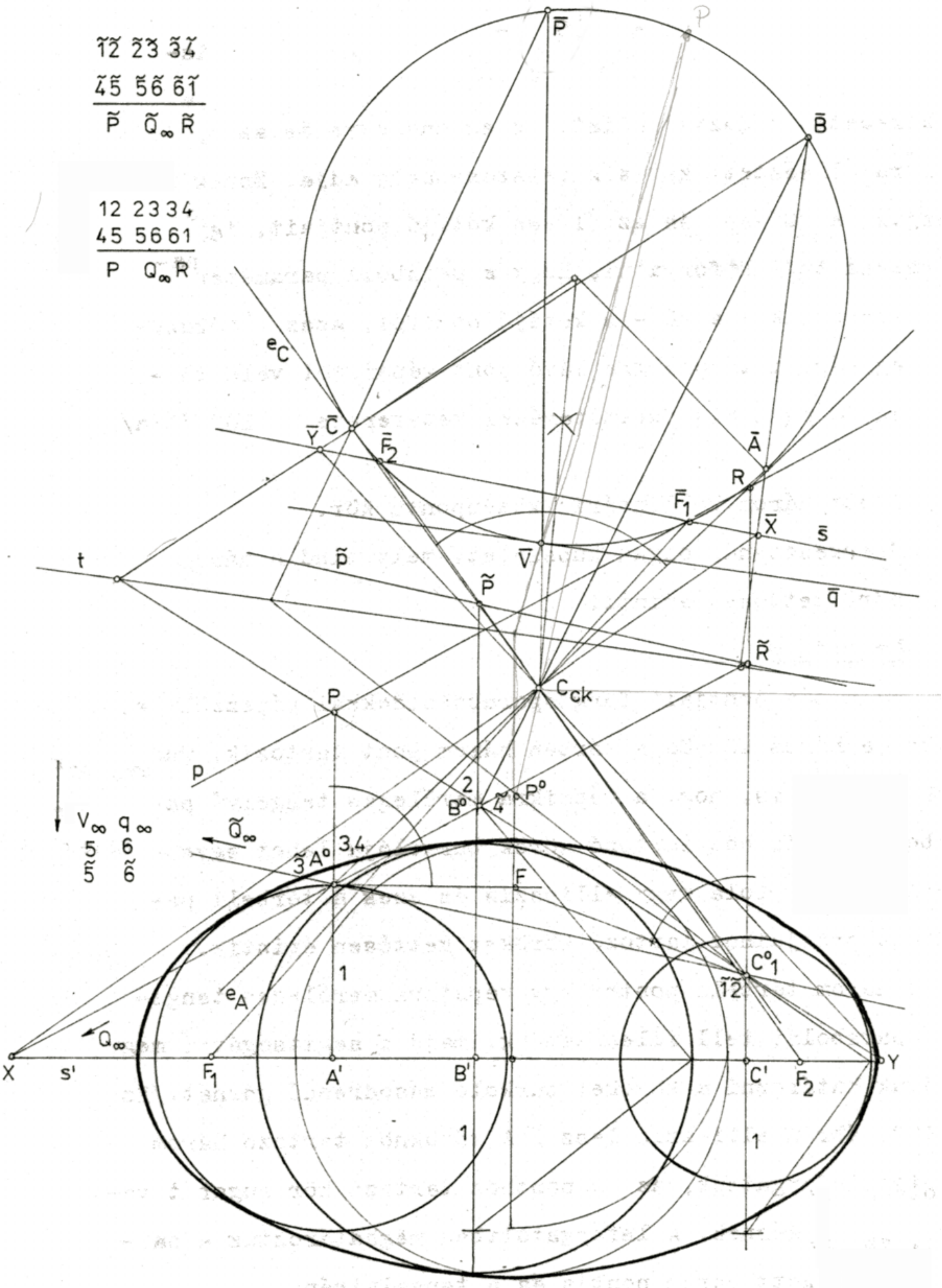
3) Adott három kollineáris középpontú kör. Szerkesztendő olyan kúpszelet, mely mind a három kört kettősen érinti.

Megoldás

Ha a tér pontjait forgásparaboloidokkal képezzük le, akkor a három körhöz a térben három pont tartozik. Tudjuk még azt is, hogy a képsíkra merőleges tengelyű parabola pontjaihoz tartozó körök burkolója lehet egyenespár, hiperbola vagy ellipszis és ezek a térbeli parabola pontjaihoz tartozó köröket kettősen érintik.

A három térbeli pontra egy képsíkra merőleges tengelyű parabolát kell illesztenünk, majd a segítségével meg tudjuk határozni a köröket burkoló másodrendű görbét. (Ez a 95. ábrán ellipszis lesz.) A körökhöz tartozó három pontot leforgattuk, az A ponthoz tartozó kör sugarát választva egységnek. A leforgatottban meghatároztuk a parabolát: adott három pontja és a tengelyirány.

Ennek a parabolának keressük a körök centrálisával való metszéspontját, ez lesz az ellipszis fókusza. Ehhez olyan centrális kollineációt alkalmazunk, amelyben a parabola képe kör lesz. A centrális kollineáció középpontja a parabola két érintőjének metszéspontja legyen. Ehhez meg kell határoznunk a parabola A_o és C_o pontjaihoz tartozó érintőket. Ezeket Pascal tétel segítségével szerkesztjük meg. A parabolának egy olyan kört feleltetünk meg, amely a parabola két érintőjét érinti. A körök centrálisának, s-nek is meghatározzuk a megfelelőjét. Ezt két segédpont, X és Y segítségével keressük meg, melyek az A_oB_o illetve a B_oC_o egyeneseknek az s-sel való metszéspontjai.



$\tilde{1}\tilde{2}$ $\tilde{2}\tilde{3}$ $\tilde{3}\tilde{4}$
$\tilde{4}\tilde{5}$ $\tilde{5}\tilde{6}$ $\tilde{6}\tilde{1}$
$\tilde{P}$ $\tilde{Q}_\infty$ $\tilde{R}$
12 23 34
45 56 61
P Q_∞ R
$\bar{P}$
$\bar{B}$
e_C
$\bar{Y}$ $\bar{C}$
$\bar{F}_2$
$\bar{A}$
R
$\bar{F}_1$
$\bar{X}$
$\bar{s}$
t
$\tilde{p}$
$\bar{V}$
$\bar{q}$
$\tilde{P}$
$\tilde{R}$
C_{ck}
P
p
2
B^o $\tilde{4}$ P^o
V_∞ q_∞
5 6
$\tilde{5}$ $\tilde{6}$
$\tilde{Q}_\infty$
$\tilde{3}$ A^o 3,4
F
C^o_1
$\tilde{1}\tilde{2}$
1
e_A
Q_∞
X s' F_1 A' B' C' F_2 Y
1
1

95. ábra

Meghatározzuk a centrális kollineáció tengelyét, és a parabola centrális kollineációbeli köréhez a tengellyel párhuzamost húzunk; ez lesz a kollineáció ellentengelye, a körrel való érintési pontja pedig a parabola végtelen távoli pontjának a képe. A $C_{ck}\overline{Q}$ egyenesnek a centrálkollineációs körrel való másik metszés pontja pedig a parabola csúcspontjának a képe: $\overline{P}$.

Megkeressük ennek a pontnak a megfelelőjét, majd a kör sugarát, mely a ponthoz tartozik. Ez egyben az ellipszis fél kistengelyének hossza is. Meghatároztuk az ellipszis középpontját, ez a parabola csúcspontjának merőleges vetülete, fókuszait és a kistengely félhosszait. Ezzel az ellipszis már meghatározott. (95. ábra)

4) Adott két azonos tengelyű parabola. Szerkesztendő olyan kör, mely mindkét parabolát kettősen érinti.

Megoldás

A két parabolához a térben két egyenes tartozik. Az, hogy a két parabola azonos tengelyű azt jelenti, hogy a két egyenes ugyanabban a képsíkra merőleges síkban van, mivel merőleges vetületeik adják a parabolák tengelyeit.

Szerkesztés menete:

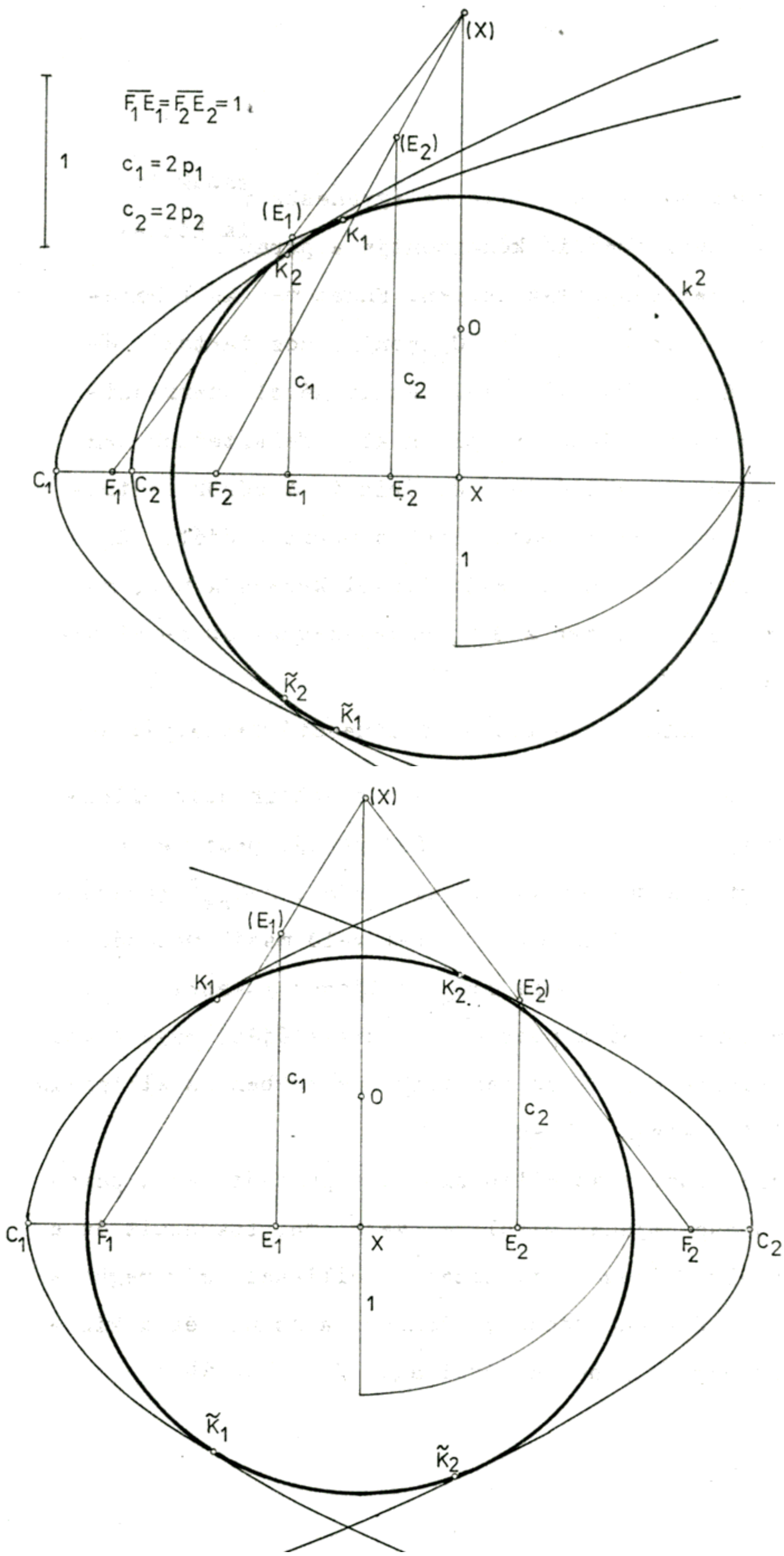
A parabolák paramétereinek segítségével meghatározzuk a térbeli egyeneseket, és a képsíkba forgatjuk azokat: A parabolák fókuszai az egyenesek nyompontjai, az egyenesek meredekségei pedig a megfelelő parabolák paraméterének kétszeresei. A két egyenes metszéspontját így már meg tudjuk határozni. Ennek a pontnak a képe, azaz a vetítőparaboloid képsíkmetszete a keresett kör.

A feladatnak egy megoldása van:

- ha a parabolák ellentétes aranyúak, és $C_1F_1F_2C_2$.
- ha a parabolák egyező irányúak, és a csúcsok és a fókuszok sorrendje: $C_1F_1C_2F_2$, $C_1C_2F_1F_2$, $C_2C_1F_1F_2$ vagy ezek fordítottja, és a P_2 parabola paramétere a nagyobb.

Azaz a két egyenes metszéspontja akkor és csakis akkor megoldás, ha a metszéspont tengelyre eső merőleges vetülete a fókusz által kettéosztott egyenes csúccsal ellentétes félegyenesén van. (Mindig az összetartozó fókuszt és csúcsot kell figyelembe venni.)

A megoldás két azonos és két ellentétes állású parabola estén a 96. ábrán látható.



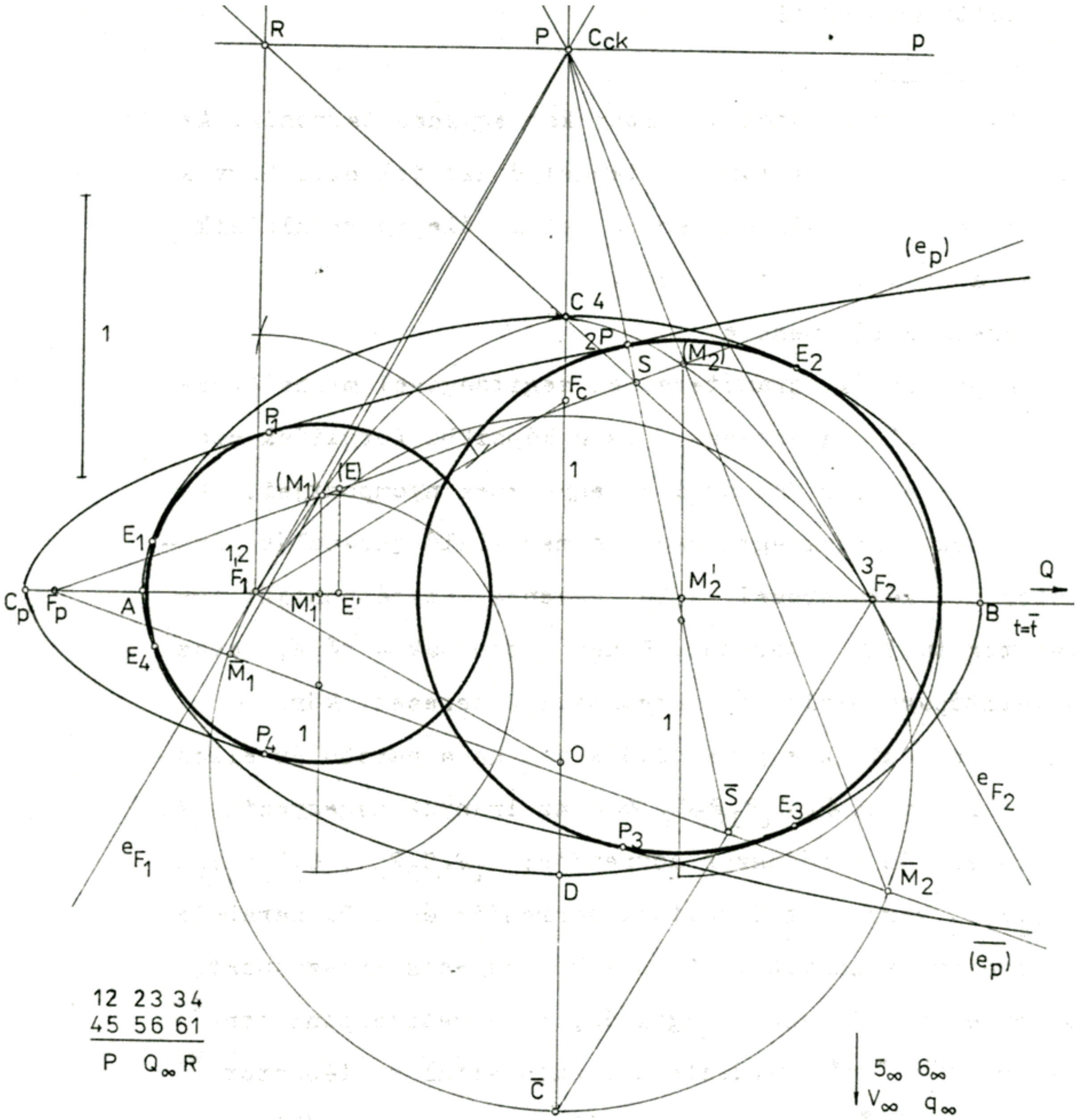
F1E1 = F2E2 = 1
1
c1 = 2 p1
c2 = 2 p2
(X)
(E2)
(E1)
K1
K2
k2
O
c1
c2
C1
F1
C2
F2
E1
E2
X
1
K̃2
K̃1
(X)
(E1)
K1
K2
(E2)
c1
O
c2
C1
F1
E1
X
E2
F2
C2
1
K̃1
K̃2

96. ábra

5) Adott egy ellipszis és egy parabola, melyeknek közös a tengelye. Szerkesztendők olyan körök, amelyek mindkét alakzatot kettősen érintik.

Megoldás

Az ellipszisnek a térben egy parabola felel meg. A parabola pontjainak a képei olyan körök, melyeknek a burkolója az adott ellipszis. A parabolának pedig a térben egy egyenes felel meg, és az adott ellipszis és parabola közös tengelye miatt a térbeli parabola és egyenes közös vetítősíkban van. A megoldásokat a két alakzat metszéspontjaihoz tartozó körök adják.



97. ábra

Szerkesztés menete:

A térbeli parabolát és az egyenest a képsíkba forgatjuk. Az egyenesnél az előző feladatokhoz hasonló módon járunk el, a parabola forgatásánál felhasználjuk, hogy nyompontjai az ellipszis fókuszpontjai, a kistengely félhossz pedig a csúcspontjához tartozó kör sugara. Ezután centrális kollineációval a parabolát körbe visszük át: Ehhez meghatározzuk a parabola két nyompontjában az érintőt Pascal tétellel. (Elég csak az egyiket, a másik az ellipszis kistengelyére szimmetrikusan helyezkedik el.) A két érintő metszéspontja a centrális kollineáció centruma, a parabola centrálkollineációs képének pedig válasszuk azt a kört, amely a parabola két érintőjét a parabola nyompontjaiban érinti. Így a centrális kollineáció tengelye az ellipszis nagytengelye lesz. Az egyenesnek is megkeressük a képét, majd a kör és az egyenes metszéspontjainak megkeressük a megfelelőjét. (97. ábra)

6) Adott egy parabola és egy kör. Szerkesztendők olyan körök, melyek az adott parabolát kettősen érintik és az adott kör átellenes pontokban metszi őket.

Megoldás

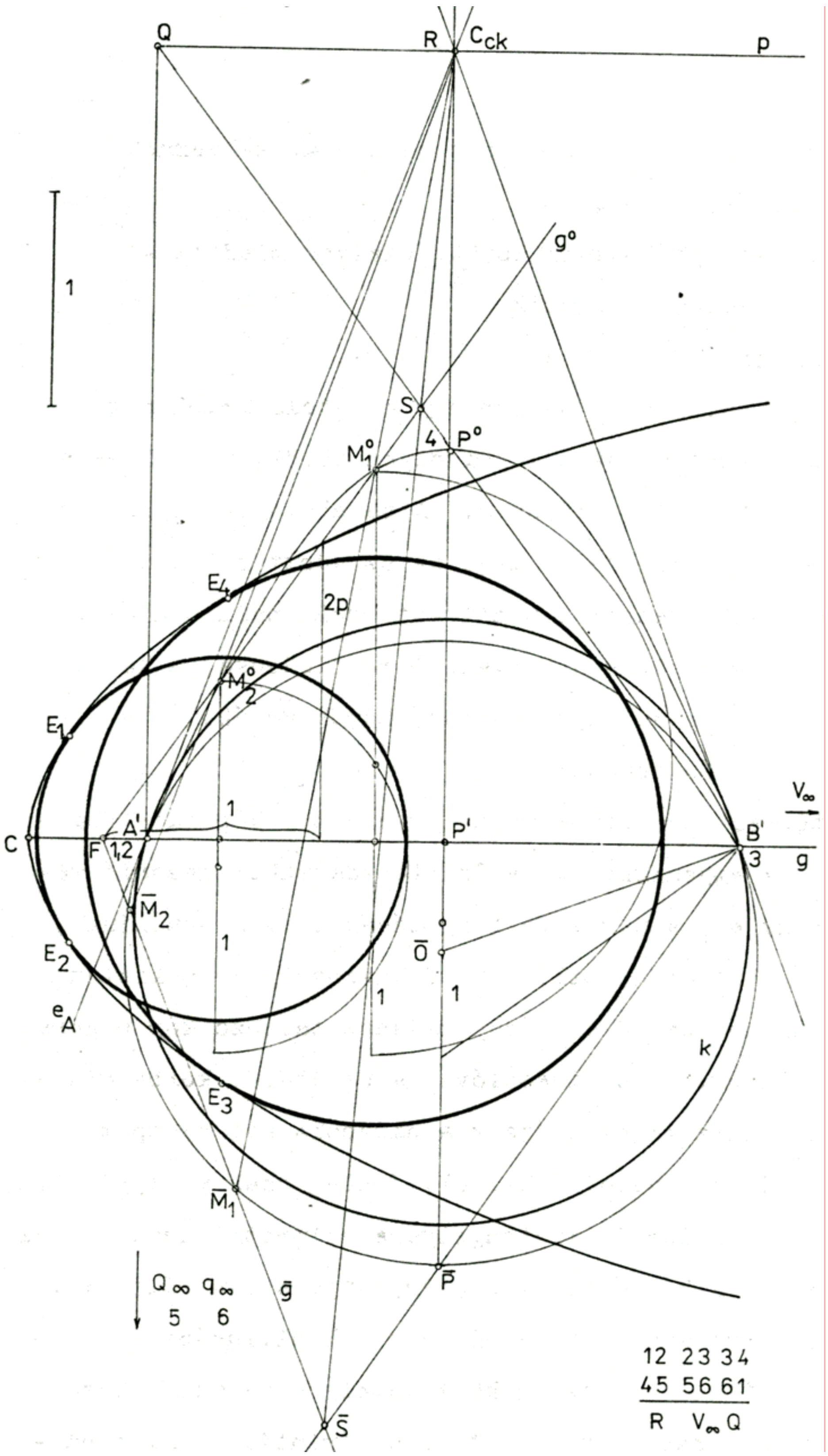
Ha a térbeli pontok leképezése forgásparaboloidokkal történik, akkor a paraboloid felületén lévő pontok körképét az eredeti paraboloid képkörrajza átellenes pontokban metszi. A parabolához a térben egy egyenes tartozik. A megoldást tehát egy paraboloid és egy egyenes közös pontjai adják.

Szerkesztés menete:

A parabolához tartozó g egyenesre vetítősíkot állítunk, amely a paraboloidból egy parabolát metsz ki. Ez a parabola a meridiángörbével egybevágó, azaz nornálparabola. Ezért a csúcspont képsíktól való távolsága a P'B' távolság négyzetével egyenlő. Ennek a segítségével a képsíkba forgatjuk a parabolát. A parabolához tartozó egyenest is a képsíkba forgatjuk. Az előző feladathoz hasonlóan itt centrális kollineáció segítségével határozzuk meg a parabola és az egyenes metszéspontját.

A két metszésponthoz, M_1-hez és M_2-höz tartozó körképek a keresett körök:

A megoldások száma kettő, egy vagy nulla lehet attól függőek, hogy a paraboloidnak és az egyenesnek mennyi közös pontja van. (98. ábra)


Q
R
C_{ck}
p
1
g^o
S
4
P^o
M_1^o
E_4
2p
M_2^o
E_1
V_∞
1
C
F
$1_1 2$
A'
P'
B'
3
g
$\bar{M}_2$
E_2
1
$\bar{O}$
1
1
e_A
k
E_3
$\bar{M}_1$
$\bar{P}$
Q_∞ q_∞
5 6
$\bar{g}$
12 23 34
45 56 61
R V_∞ Q
$\bar{S}$

98. ábra

7) Adott egy parabola és egy egyenes. Szerkesztendők olyan körök, amelyek az egyenest érintik és a parabolát kettősen érintik.

Megoldás

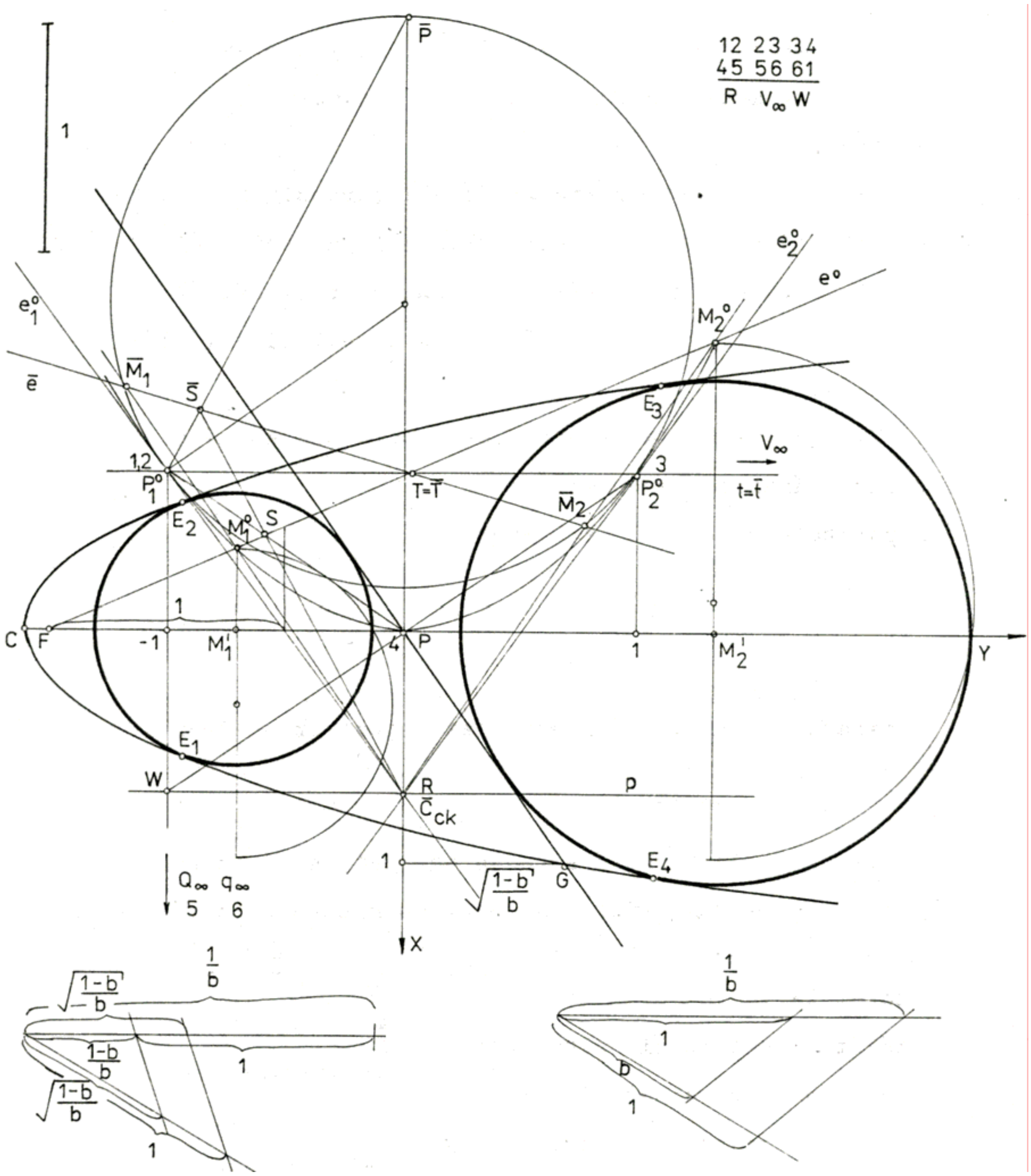
A parabolához a térben egy egyenes tartozik, amely képe egy körsor, és a parabola ennek a körsornak a burkolója. A kérdés az, hegy milyen térbeli alakzat körsor képének burkolója az adott egyenes. Amikor egy képsíkra merőleges tengelyű parabola körsorképének a burkolóit vizsgáltuk, akkor a burkolói között találtunk valós egyenespárt is. Feleltessük most meg az egyenespár valamelyik egyenesének az adott egyenest!

A burkoló egyenlete általánosan: $(b-1)x^2 + by^2 = a(b-1)$

A burkoló akkor volt valós egyenespár, amikor a = 0 és 0 < b < 1 volt. Ebben az esetben a parabola csúcspontja a képsíkban van. Tehát a feladat térbeli tartalma nem más, mint egy egyenes és egy parabola metszéspontjainak a meghatározása. Az előző feladatokhoz képest a nehézséget az okozza, hogy a parabolának a képsíkkal egyetlen közös pontja van, ami egyben csúcspont is és a további pontok meghatározása nehezebb.

Vezessünk be egy koordinátarendszert! Az egyenest és a parabolát figyelembe véve értelemszerűen az adott parabola tengelye legyen az y tengely, az origó pedig az egyenes és a parabola tengelyének a metszéspontja. Az x tengely pedig az origóból az y tengelyre állított merőleges. Válasszunk egy egységet! Az adott parabola paraméterét és az egységet figyelembe véve az egyenest a képsíkba forgatjuk, így kapjuk az e_o egyenest.

Feladatunk másik része a térbeli parabola képsíkba forgatása. Ehhez ismerni kellene a parabola origótól különböző másik két pontjának a koordinátáit (azaz a merőleges vetületét és a képsíktól való távolságát)!



99. ábra

Vizsgáljuk meg a parabola és a parabola körképe burkolójának az egyenletét!

A parabola egyenlete a = 0 esetén:

$$x = 0 \qquad y = t \qquad z = bt^2$$

A parabola burkolójának egyenlete ebben az esetben: $y = \pm\sqrt{\dfrac{(1-b)}{b}} \cdot x$.

Ha tehát a két burkoló egyenes egyikét, azaz az adott g egyenest vizsgáljuk, egy pontjának a koordinátái: $G\left(1, \sqrt{\dfrac{(1-b)}{b}}\right)$.

Ezt a pontot a rajzon megtaláljuk, így a $\sqrt{\frac{(1-b)}{b}}$ értékét le tudjuk olvasni. Ha ebből sikerülne a b értékét meghatározni, akkor megkaphatnánk a parabola két pontjának koordinátáit, mivel $P_1(0, -1, b)$ és $P_2(0, 1, b)$.

A b megszerkesztését a párhuzamos szelők tételét felhasználva a következő aránypár segítségével végezhetjük el:

$1:\sqrt{\frac{(1-b)}{b}}=\sqrt{\frac{(1-b)}{b}}:x$, ebből $x=\frac{1}{b}-1$. Így az b értékét megkaptuk.

Ezután $\frac{1}{b}:1=1:y$, ahonnan y= b

Ezután a térbeli parabola leforgatását el tudjuk végezni: A parabola csúcspontja az origó, így a tengelye a leforgatásban az x tengely. A parabola P_1 pontjának a leforgatásbeli koordinátái: (-b, -1) és a P_2 pont leforgatásbeli koordinátái: (-b, 1).

A Pascal tétel alkalmazásával megszerkesztjük a parabola P_1^o pontjában az e_1^o érintőt, illetve vele az x tengelyre szimmetrikusan az e_2^o érintőt.

A parabola és az egyenes közös pontjait ezután centrális kollineáció segítségével határozhatjuk meg. A parabola centrálkollineációbeli körének válasszuk most az érintőket a P_1^o illetve P_2^o pontokban érintő kört. Keressük meg az egyenes centrálkollineációs képét is. Ennek a körrel való közös pontjai: $\overline{M}_1$ és $\overline{M}_2$. Ezeket a pontokat visszavetítve az egyenesre az egyenes és a parabola M_1 és M_2 metszéspontját kapjuk, amely pontok képei a keresett körök. (99. ábra)

8) Adott egy egyenes és egy ellipszis. Szerkesztendők olyan körök, melyek az ellipszist kettősen érintik, és érintik az egyenest is.

Megoldás

Az ellipszis egy olyan körsornak a burkolója, amely körsor térbeli megfelelője egy képsíkra merőleges tengelyű parabola. Az egyenest tekinthetjük egy egyenespár egyikének, amely egyenespár egy olyan parabola körsor képének burkolója, melynek csúcspontja a képsíkban van. A feladat térbeli tartalma tehát:

Két, egy síkban lévő parabola metszéspontjainak a meghatározása.

Ha a két parabolát úgy tekintjük, mint két körkúp síkmetszetét, akkor a két parabola metszéspontjai a két kúp áthatási síkjára esnek, amit meg tudunk határozni.

A parabolákat először forgassuk be a képsíkba. Az ellipszishez tartozó parabolát az ötödik, az egyeneshez tartozó parabolát pedig a hetedik feladatban leírtak szerint tudjuk a képsíkba forgatni. Tekintsük az egyik parabola tengelyének félegyenesét pozitív irányúnak. Ez alapján az ellipszisnek megfelelő parabolához tartozó kúp csúcspontja g képsík alatt van, a másik kúp csúcspontja a képsík felett van. A kúpok csúcsának képsíktól való távolsága a parabola paraméterével egyezik meg. [7]

A kúpok áthatási síkjának első nyomvonala a leforgatott parabolákat azok közös pontjában metszi. Ahhoz, hogy a parabolákat vetítő kúpok csúcspontjának a képsíktól való távolságát meg tudjuk határozni, előbb meg kell szerkesztenünk a parabolák fókuszait. Ezeket úgy kereshetjük meg, hogy a parabolák egy-egy pontjában meghatározzuk az érintőt a Pascal tétel segítségével, és felhasználjuk, hogy az érintők felezik az érintési pontot a fókusszal összekötő egyenes és az érintési pontból a vezéregyenesre bocsátott merőleges egyenes szögét. Ezek alapján az egyik parabola $C'F_c$, a másik parabola $P'F_p$. A továbbiakban a rajz síkját tekintsük a K_1 képsíknak!

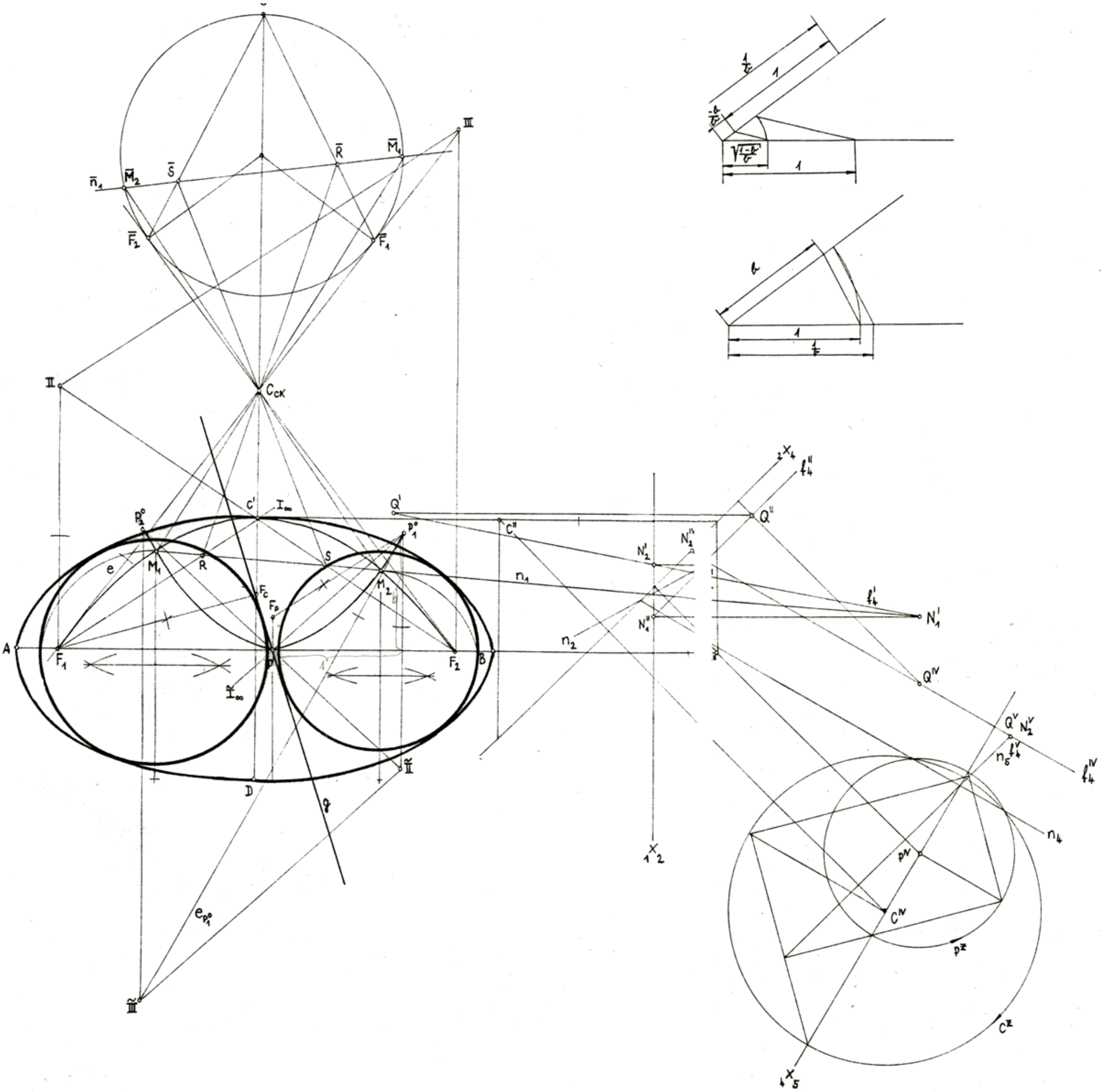
Felvesszük a K_2 képsíkot, a két sík $x_{1,2}$ metszésvonalát, párhuzamosan a parabolák tengelyével. Meghatározzuk a kúpok csúcspontjának második képét: C"-t és P"-t. Vegyünk fel egy K_4 képsíkot a K_2-re merőlegesen oly módon, hogy a kúpok tengelyeire is merőleges legyen: $x_{2,4}$. Ez a képsík két körben metszi a kúpokat. Meghatározzuk a kúpok negyedik képét is! Ez két ciklus lesz. A ciklusok sugarát az $x_{2,4}$ tengelyen olvashatjuk le, a középpontokat pedig az elmaradó rendezők segítségével határozhatjuk meg. A két kör hatványvonala az áthatási sík n_4 nyomvonala. Az áthatási sík második nyomvonalának egy pontja ott lesz, ahol az n_4 nyomvonal döfi a K_2 képsíkot. Ez csak az $x_{2,4}$ egyenesen lehet rajta, tehát a sík második nyomvonalának egy pontja az n_4 és az $x_{2,4}$ metszéspontja. Az áthatási sík ötödik nyomvonalát is meghatározhatjuk. Vegyünk fel egy K_5 képsíkot $x_{4,5}$ metszésvonalával úgy, hogy K_5 a két kúp tengelyére illeszkedjen. Ez a sík két-két alkotóban metszi a kúpokat, amelyeket képsíkba forgathatunk. Az alkotók metszéspontjait összekötő egyenes az áthatási sík n_5 nyomvonala. (Ezzel az eljárással az első fejezetekben gyakran találkoztunk.)

A felvétel alapján az egyik kúp csúcsa a K_4 képsík felett, a másik kúp csúcsa alatta van. Az áthatási sík második nyomvonalának egy újabb pontját kapjuk, ha egy negyedik fővonalnak megkeressük egy második N_2'' nyompontját. Ezzel az áthatási sík n_2 nyomvonalát meghatároztuk. Az első nyomvonal egy pontja n_2-nek $x_{1,2}$-vel való metszéspontja, egy másik pontja az előbbi fővonal első nyompontjának N_1' képe.

Az n_1 és valamelyik parabola metszéspontjait centrális kollineáció segítségével határozhatjuk meg, az előző feladatokhoz hasonló módon. A rajzon az ellipszishez tartozó $C'F_c$ parabolának és az n_1-nek kerestük a közös pontjait. (Ezek egyben a másik parabolának és az n_1-nek a közös pontjai is.)

A megoldás köröket az M_1 illetve az M_2 pontokhoz tartozó körök adják. (100. ábra)

[7] A leforgatott parabolák párhuzamos tengelyű parabolák. A parabolákat vetítő kúpoknak van egy-egy egymással és a képsíkkal is párhuzamos alkotója. A fejezet elején foglalkoztunk ezzel az általánosítási lehetőséggel.



100. ábra

9) Adott négy parabola. Szerkesztendő olyan parabola, amelynek a négy parabola mindegyikével van közös kettősen érintő köre.

Megoldás

A négy parabola mindegyikéhez a térben egy-egy egyenes tartozik. Legyenek ezek az egyenesek: a, b, c, d egyenesek. Olyan egyenest kell meghatároznunk, amelyik a négy kitérő egyenes mindegyikét metszi, azaz a négy kitérő egyenes transzverzálisát kell megszerkeszteni.

Ehhez először három kitérő egyenes transzverzálisait kell meghatározni. Ezek egy hiperbolikus hiperboloidot határoznak meg. Válasszunk ki a négy egyenes közül hármat-hármat, amelyekhez tartozó transzverzálisok egy-egy hiperboloidot határoznak meg. A feladat térbeli tartalma tehát két hiperboloid áthatásának meghatározása.

A két hiperboloidnak a felvételből adódóan van két közös egyenese: a és b. A két hiperboloid másik két közös egyenese az, amelyek mind a négy egyenest metszik.[8] Ennek a két egyenesnek megfelelő parabolák a keresett parabolák.

A szerkesztésnél a parabolákat nem vettük fel, csak a hozzájuk tartozó egyeneseket. Egyenesekhez a hozzájuk tartozó parabolákat, illetve parabolákhoz tartozó egyeneseket már az előző feladatoknál szerkesztettünk. Itt a rajzot áttekinthetetlenné tenné.

Szerkesztés menete

Adott tehát négy egyenes: s, b, c, d, amelyeknek a (0)-ás és az (1)-es kótájú pontjai vannak feltüntetve. Szerkesszük meg a $H_1 = (a, b, c)$ hiperboloidnak a (0)-ás szintgörbéjét, h_1-et, ami a rajzon egy ellipszis. Három pontja az a, b, c egyenesek A_0, B_0, C_0 pontja. További pontjait az a, b, c, egyenesek transzverzálisainak (0)-ás kótájú pontjai adják.

A rajzon megszerkesztettük a , b C_1-en átmenő transzverzálisát:

A $[C_1, a]$ sík (1)-es szintvonala a C_1A_1 egyenes, ezzel párhuzamos (0)-ás szintvonala A_0-on megy át. Ugyanígy a $[C_1, b]$ sík (1)-es szintvonala a C_1B_1 egyenes, a (0)-ás szintvonala pedig vele párhuzamosan B_0-on megy át. A két (0)-ás szintvonal metszéspontja E, ami a h_1 görbének egy újabb pontja. A két sík metszésvonala maga a transzverzális.

A c egyenes 0,5-es kótájú pontját felhasználva szerkesztettük meg az a és b egyeneseknek ezen a ponton átmenő transzverzálisát. A transzverzális (0)-ás kótájú pontja a h_1 nyomgörbe F pontja.

A másik hiperboloid $H_2 = (a, b, d)$. Az előzőhöz hasonlóan ennek is meghatározzuk a nyomgörbéjét, ami szintén egy ellipszis, ami A_0, B_0, D_0, G, H pontjaival van meghatározva. (A G és H pontok a három egyenes egy-egy transzverzálisának (0)-s kótájú pontjai.) Ezt a nyomgörbét jelöljük h_2-vel.

A következő feladat a h_1 és a h_2 nyomgörbe metszéspontjainak a meghatározása. A két nyomgörbének 4 metszéspontja van, ebből kettő, A_0 és B_0 ismert.

A hiányzó két metszéspont meghatározása másodrendű feladat. A célunk az, hogy a két nyomgörbéhez olyan centrális kollineációt létesítsünk, amelynek a tengelye az A_0B_0 egyenes.

Hogyan valósítsuk ezt meg?

A h_1 nyomgörbe E pontjában a Pascal tétel segítségével meghatározzuk az érintőt: e_E. A tételt a következő módon alkalmaztuk:

$A_0 = 2$, $B_0 = 3$, $C_0 = 6$, E=4, 5 és F=1.

Az e_E egyenes metszi az A_0B_0 egyenest egy T pontban. Ha ebből a pontból érintőt húzunk a h_2 nyomgörbéhez, akkor az E pont és a h_2-n meghatározott $\overline{E}$ pont egymásnak megfelelő pontok a keresett kollineációban. Újra elvégezzük ezt a szerkesztést: a h_1 nyomvonal F pontjában szerkesztjük meg az érintőt a Pascal tétel segítségével:

$A_0 = 3$, $B_0 = 5$, $C_0 = 2$, E=4 és F=1,6.

Az e_F érintő az S pontban metszi az A_0B_0 egyenest. Ha az S pontból érintőt húzunk a h_2 nyomgörbéhez, akkor a keletkezett $\overline{F}$ pont és az F pont egymásnak megfelelő pontok. Az $e_{\overline{E}}$ és az $e_{\overline{F}}$ érintőket úgy határozhatjuk meg, hogy a h_2 nyomgörbét centrális kollineáció segítségével körbe visszük át. A centrális kollineáció centruma a h_2 nyomgörbe H és G pontbeli érintőinek metszéspontja: M, tengelye t_M. Az A_0B_0 egyenes T és S pontjából az ellipszisnek megfelelő centrálkollineációs körhöz húzott

[8] Egy hiperboloid alkotói két osztályba sorolhatók: az azonos osztálybeli egyenesek kitérők,

érintő érintési pontjai $\overline{F}'$ és $\overline{E}'$. Az érintési pontokat visszavisszük a h_2 ellipszisre, így megkapjuk a keresett érintési pontokat. Az $E\overline{E}$ egyenes és az $F\overline{F}$ egyenes metszéspontja M_1, amely a keresett közös centrális kollineáció centruma, tengelye pedig A_0B_0 egyenes.

A közös centrális kollineáció M_1 centrumából ugyancsak centrális kollineáció segítségével közös érintőt húzunk a két nyomgörbéhez. Ehhez a h_1 nyomgörbét is körbe vittük egy centrális kollineáció segítségével, melynek a centruma a h_1 nyomgörbe C_0 és E pontbeli érintőinek a metszéspontja, tengelye t_{M_2}.

Ennek segítségével megszerkesztjük M_1-ből a h_1 görbéhez húzott érintőt: Az M_1 pontnak megkeressük az $M_1{}'$ megfelelőjét és ebből a pontból érintőt húzunk a $h_1{}'$ körhöz. Az $\overline{\overline{1}}'$ pont megfelelője a közös érintő h_1 nyomgörbéhez tartozó érintési pontja. Meghatározzuk a közös érintőnek a h_2 nyomgörbével való közös pontját is: $\overline{1}$. Az érintési pontok a centrális kollineációban egymásnak megfelelő pontok.

A szerkesztés elvégzéséhez meg kell még határozni az $E\overline{E}$ egyenes h_1 nyomgörbével való másik metszéspontját is.

A két ellipszishez már meghatároztunk egy közös centrális kollineációt, amelynek centruma M_1, tengelye az A_0B_0 egyenes, megfelelő pontjai: $E \leftrightarrow \overline{E}$; $F \leftrightarrow \overline{F}$; $\overline{\overline{1}} \leftrightarrow \overline{1}$.

Felhasználjuk, hogy a centrális sugarakon a pontpárok felcserélhetőek. Ezek szerint $\overline{E}$ megfelelője $\overline{\overline{E}}$ legyen, ami az $E\overline{E}$ egyenes h_1-el való másik metszéspontja. Határozzuk meg a kollineáció tengelyét ennél a pontpár választásnál!

Az $\overline{E}$ és az $\overline{\overline{E}}$ pontokhoz tartozó érintők a $\boxed{2}$-es pontban metszik egymást, ez a pont a tengely egyik pontja lesz. Az $\overline{1}$ és $\overline{\overline{1}}$ pontok most is egymásnak megfelelő pontok lesznek, tehát az $\overline{E}\overline{1}$ és az $\overline{\overline{E}}\overline{\overline{1}}$ egyenesek metszéspontja a tengely másik pontja. Az új tengely az ellipszisek másik két közös pontján halad át, ezek K_0 és L_0, mely pontokat centrális kollineáció segítségével határoztuk meg.

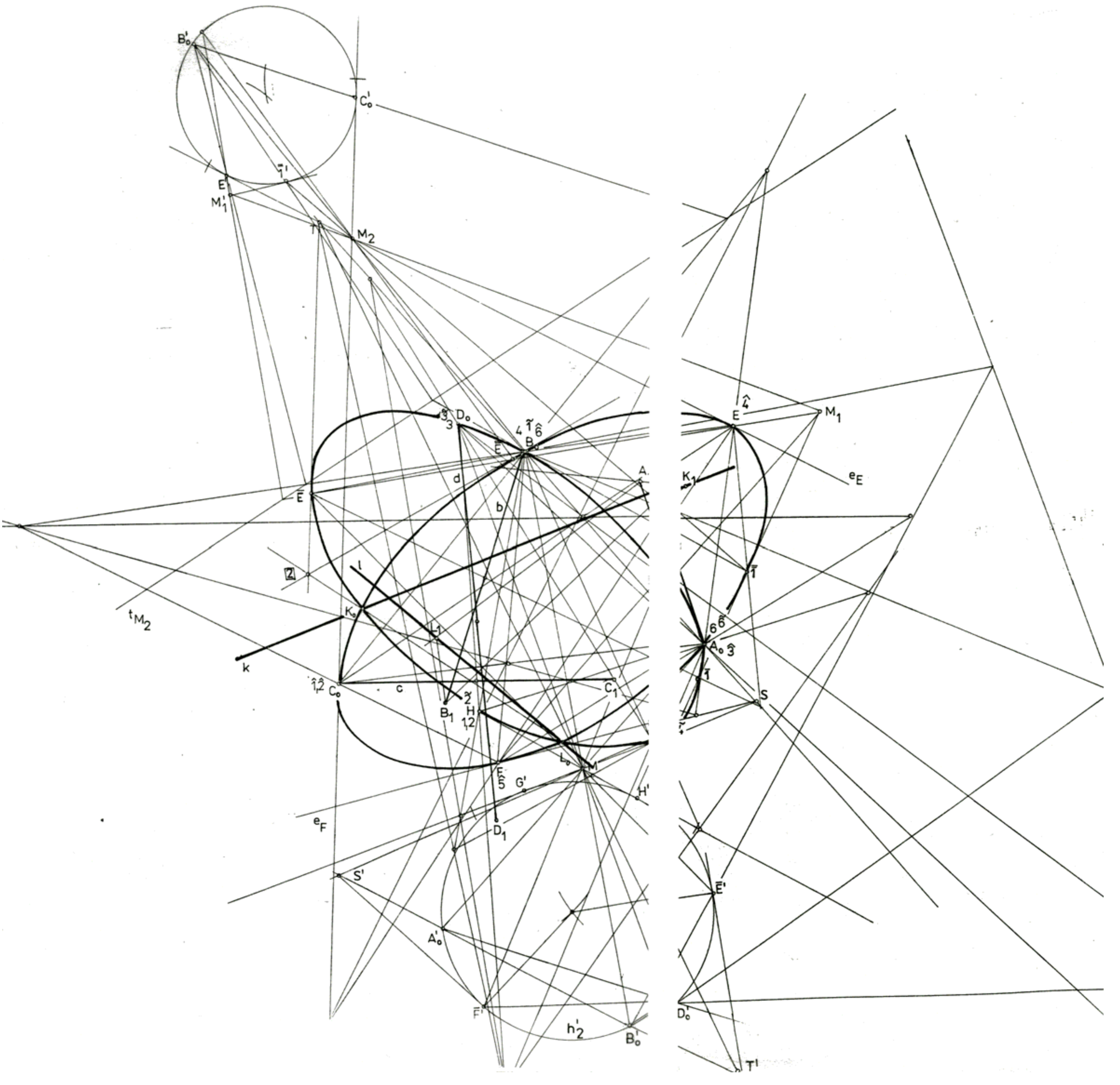
A K_0 és L_0 a keresett két transzverzális nyompontja. A hozzájuk tartozó k és 1 egyenesek szerkesztése a következő:

---

míg bármely két különböző osztálybeli egyenesek metszik egymást.

A K_0A_0 illetve a K_0B_0 a (0)-ás szintvonalai, az ezekkel párhuzamos, A_1-en illetve B_1-en áthaladó egyenesek az (1)-es szintvonalai a $[K_0, a]$ és a $[K_0, b]$ síkoknak. Az (1)-es szintvonalak K_1 metszéspontja a k transzverzális (1)-es kótájú pontja. Hasonlóan határozható meg az l egyenes (1)-es kótájú L_1 pontja.

A két egyeneshez tartozó két parabola olyan, hogy az a, b, c és d egyenesekhez tartozó parabolák mindegyikével van közös kettősen érintő köre. (101.ábra)



101. ábra

10) Adott egy hiperbola és egy kör. Szerkesztendők azok a körök, melyeket a hiperbola kettősen érint és az adott kör átellenes pontokban metszi a keresett köröket.

Megoldás

Ha a térbeli pontok leképezése forgásparaboloidokkal történik, akkor a paraboloid felületén lévő pontok körképét az eredeti paraboloid képkörrajza átellenes pontokban metszi. A hiperbolához a térben egy képsíkra merőleges tengelyű parabola tartozik. Ez a vetítősík a körhöz tartozó paraboloidból egy parabolát metsz ki. Ez a parabola normál parabola lesz. A megoldás-köröket a két parabola metszéspontjaihoz tartozó körök adják. Megoldás tehát akkor van, ha a két, egy síkban lévő párhuzamos tengelyű parabolának van közös pontja. (Ha a parabola vetítősíkjának és a paraboloidnak nincs közös része, akkor az egyik parabola nem jön létre, ilyenkor nincs megoldás.)

Szerkesztés menete:

Vezessünk be egy koordinátarendszert! A hiperbola képzetes tengelye legyen a koordinátarendszer y tengelye, valós tengelyének egyenese pedig legyen az x tengely. Értelemszerűen vegyük fel a z tengelyt is. A parabolák közös vetítősíkja tehát az [y,z] sík lesz. Forgassuk le a parabolákat a képsíkba! Tengelyirányuk ismert, ezen kívül még három-három pontot meg kell határozni!

A vetítőparaboloidhoz tartozó parabolának két pontja a metszetkörnek az y tengellyel, való metszéspontja, az y tengely a vetítősík első nyomvonala.

Ezeken kívül meghatározzuk még s parabola csúcspontjának a forgatottját. Ezt az egység segítségével, és a KM’ szakasz ismeretében tudjuk meghatározni. (KM’ négyzetgyöke az M pont képsíktól való távolságának.)

Az M a keresett parabola csúcspontja, K és L a képsíkka1 való közös pontjai.

Határozzuk meg a másik parabola három pontját! A képsíkra merőleges tengelyű parabola egyenlete: $x = 0 \qquad y = t \qquad z = a + bt^2$

Képének a burkolója abban az esetben volt hiperbola, ha a≠0 és 0<b<1. Ekkor a burkoló egyenlete: $$(b-1)x^2 + by^2 = a(b-1)$$

Ha t=0 akkor a parabola P pontja: (0,0,a), A burkoló ehhez a parabolaponthoz tartozó pontja $$A(-\sqrt{a},0) \text{ és } B(\sqrt{a},0).$$

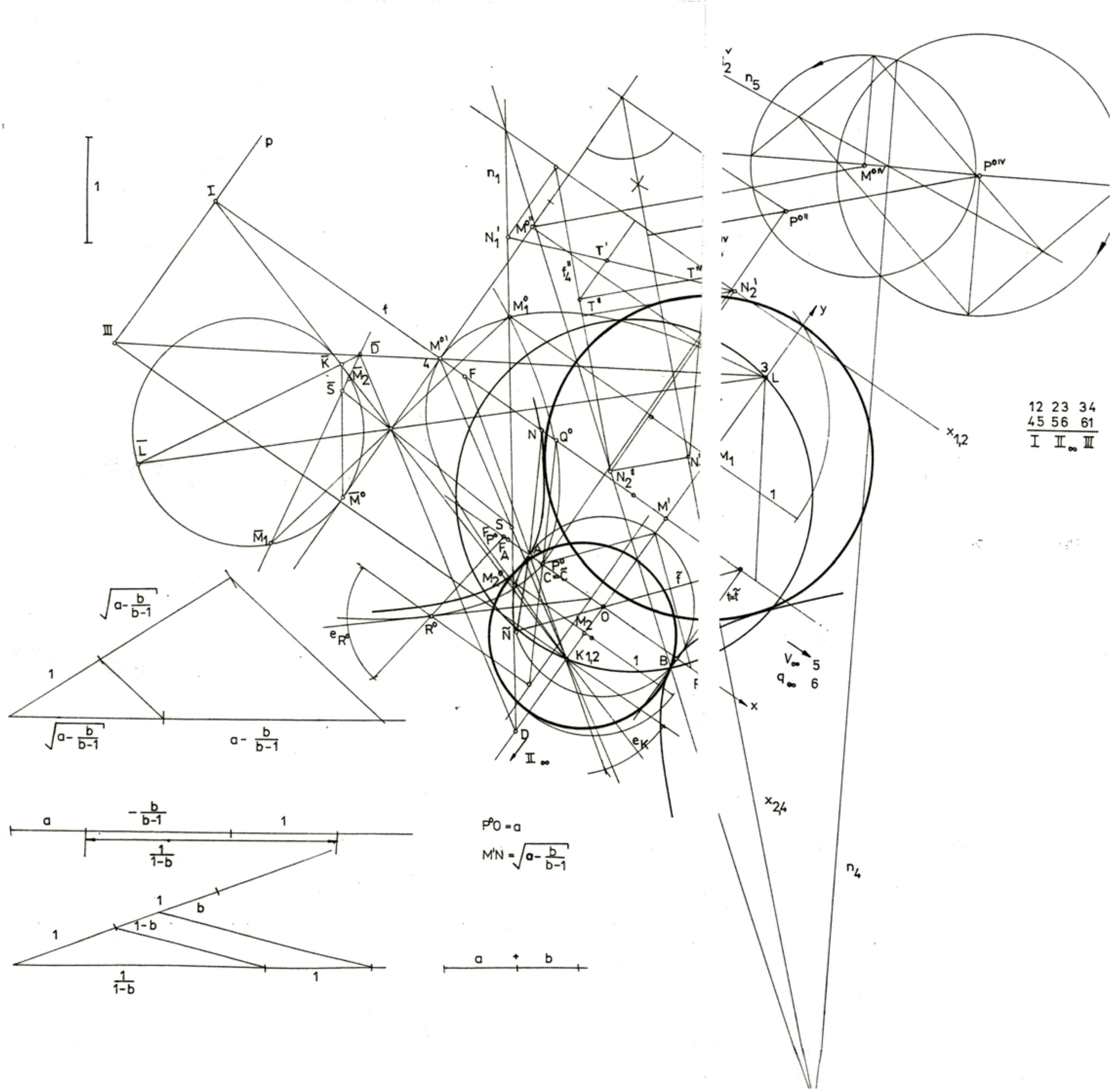
A $\sqrt{a}$ -t le tudjuk olvasni az ábráról, így a P° pontot meg tudjuk szerkeszteni.

Ha t=1, akkor a parabola Q pontja: (0,1,a+b). Hogy azt a pontot a képsíkba tudjuk forgatni, még ismerni kell a b értékét is!

Ha y=1, akkor a hiperbola pontjának az x koordinátája: $x = \pm\sqrt{a - \frac{b}{b-1}}$.

Ezt az ábráról leolvassuk, majd ebből a párhuzamos szelők tételével az egység ismeretében meghatározhatjuk a b értékét. Így megkapjuk a parabolának a Q° pontját. Az x tengelyre szimmetrikusan meg tudjuk határozni a parabola harmadik, R° pontját is.

A képsíkba forgatott két parabola közös pontját ezek után ugyan úgy határozzuk meg, mint a 8. feladatban.



102. ábra