Kétlépcsős Riemann-nilsokaságok geodetikusairól és izometriáiról

On geodesics and isometries of two-step Riemannian nilmanifolds

Doktori (PhD) értekezés tézisei

Homolya Szilvia

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Debrecen, 2006.

Tartalomjegyzék

1 Bevezetés

Az értekezésben a topologikus csoportok egy nagyon speciális csoportjával, a *Lie-csoportokkal*, ezen belül az úgynevezett kétlépcsős nilpotens Lie-csoportokkal foglalkozunk. Az első részben speciális 6- illetve 7-dimenziós kétlépcsős nilsokaságok *geodetikus gráfját* adjuk meg explicit módon. A következő fejezetben a balinvariáns $\langle .,. \rangle$ Riemann-metrikával ellátott kétlépcsős nilpotens N Lie-csoport geodetikusait jellemezzük, felhasználva a $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ fibrumnyaláb Riemann *szubmerzió* struktúráját (ahol $\mathcal{Z}$ jelöli az N Lie-csoport centrumát). Továbbá megadjuk annak feltételét, mikor lesz egy kétlépcsős nilsokaság geodetikusainak összes projektált görbéje az $N/\mathcal{Z}$ alapsokaságon (amely egyben euklideszi tér is) síkgörbe. Az utolsó részben az 5-dimenziós, egyszeresen összefüggő kétlépcsős nilsokaságokat osztályozzuk izometria erejéig, miközben megadjuk a teljes izometria-csoportjaikat.

Az itt közölt eredmények jelentős része publikálásra került. A 2. fejezet alapjául a szerző [1] dolgozata szolgált, kiegészítve a 7-dimenziós eset tárgyalásával. A következő fejezet a [2] munkánk alapján íródott. A 4. fejezet a [4] cikkünkön alapul.

Alapvető fogalmak

Egy $\mathfrak{n}$ Lie-algebrát *kétlépcsős nilpotens Lie-algebrának* nevezünk, ha

$$[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \neq \{0\} \text{ és } [[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], \mathfrak{n}] = \{0\}.$$

A $\mathfrak{z}$ jelöli a továbbiakban az $\mathfrak{n}$ Lie-algebra centrumát és $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}^{\perp}$ a $\mathfrak{z}$ centrum ortogonális komplementumát. Így az $\mathfrak{n}$ Lie-algebrára az $\mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{z}$ ortogonális direkt összeg felbontást kapjuk. Jelölje $so(\mathfrak{a})$ az $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ metrikus Lie-algebra $(\mathfrak{a}, \langle , \rangle_{\mathfrak{a}})$ euklideszi alterében a ferdén szimmetrikus endomorfizmusok Lie-algebráját.

Tetszőleges $Z \in \mathfrak{z}$ elemre definiálja a $j(Z) \in so(\mathfrak{a})$ endomorfizmust a

$$\langle j(Z)X, Y \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle \tag{1}$$

összefüggés, ahol $X, Y \in \mathfrak{a}$. Az $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ algebrai tulajdonságai kifejezhetőek a $j(Z)$ leképezés segítségével.

Kétlépcsős nilpotens Lie-csoport alatt olyan Lie-csoportot értünk, melynek Lie-algebrája kétlépcsős nilpotens. A balinvariáns metrikával ellátott kétlépcsős nilpotens Lie-csoportok között a Heisenberg-típusú Lie-csoportok különös jelentőséggel bírnak, így a disszertációban is többször példaként szolgálnak. A balinvariáns $\langle .,. \rangle$ metrikával ellátott N Lie-csoport *Heisenberg-típusú* (H-típusú) *Lie-csoport,* ha

$$[j(Z)]^2 = -\langle Z, Z \rangle id_{\mathfrak{a}}$$

teljesül tetszőleges $Z \in \mathfrak{z}$ esetén.

A H-típusú feltétel gyengítésével a kétlépcsős nilsokaságok egy újabb osztálya kapható meg (lásd [21]). Az $(N, \langle .,. \rangle)$-t *módosított H-típusú csoport*nak nevezzük, ha

$$(2) \qquad [j(Z)]^2 = -h(Z) id_{\mathfrak{a}}$$

teljesül minden $Z \in \mathfrak{z}$ esetén, ahol $h(Z)$ egy pozitív definit kvadratikus forma a $\mathfrak{z}$ Lie-algebrán.

Mivel az értekezésben a geodetikus pályatereket is vizsgáljuk, megjegyezzük, hogy a legfeljebb 6-dimenziós balinvariáns metrikával ellátott kétlépcsős nilpotens Lie-csoportok közül azok, amelyek Riemann-geodetikus pályaterek, egyben módosított Heisenberg-típusú csoportok is.

Legyen (M, g) összefüggő, homogén Riemann-sokaság, melyen adott egy g Riemann-metrika. Ha G az M sokaság izometriáinak tetszőleges összefüggő, tranzitív csoportja és H pedig egy $p \in M$ rögzített pontbeli izotrópia részcsoport, akkor M természetes módon azonosítható a G/H balinvariáns Riemann-metrikával ellátott faktortérrel. Jelölje a továbbiakban $\mathfrak{g}$ és $\mathfrak{h}$ a G izometria-csoport, illetve a H izotrópia-csoport megfelelő Lie-algebráit. A G/H homogén teret *geodetikus pályatér*nek vagy geodetikus orbit térnek (röviden g.o. térnek) nevezzük, ha minden M sokaságbeli geodetikus G egyparaméteres részcsoportjának pályája. Azaz minden M-beli geodetikus $\exp(tX) \cdot p$ alakban áll elő, ahol $X \in \mathfrak{g}$, $p \in M$.

Az (M, g) Riemann-sokaságot geodetikus pályatérnek vagy geodetikus orbit térnek nevezzük, ha a maximálisan összefüggő G izometria-csoport esetén $(G = I_0(M))$ a G/H faktortér g. o. tér az előző definíció értelmében.

A $\mathfrak{g}$ Lie-algebra egy $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ ortogonális dekompozícióját *reduktív dekompozíció*nak nevezzük, ha $ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Az (M, g) Riemann-sokaság *természetesen reduktív,* ha valamely G tranzitívan összefüggő izometria-csoport, valamint az előbb definiált $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ felbontás esetén az $ad(X)$ leképezés ferdén szimmetrikus tetszőleges $X \in \mathfrak{m}$ esetén.

A természetesen reduktív homogén terek a g.o. sokaságok részhalmazát képezik, mivel a g.o. feltétel nyilvánvalóan gyengébb, mint a természesen reduktív terekre vonatkozó. Az első példát olyan geodetikus pályatérre, amely semmilyen módon sem természetesen reduktív, A. Kaplan adta (lásd [15]).

A g.o. terek tanulmányozásának egyik alapvető technikája Szenthe Jánostól származik (lásd [30]). A következő állítás Szenthe János fő eredményének Riemann esetre vonatkozó átfogalmazása.

Legyen $(M, g) = G/H$ geodetikus pályatér és $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ egy $ad(H)$-invariáns felbontás. Ekkor

1. Létezik legalább egy olyan *kanonikus* $ad(H)$-ekvivariáns $\xi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{h}$ leképezés (az úgynevezett "geodetikus gráf") úgy, hogy minden $X \in \mathfrak{m} \backslash \{0\}$ esetén az
$$\exp t(X + \xi(X))(p)$$
görbe geodetikus.

2. A geodetikus gráf vagy lineáris (amely ekvivalens valamely $ad(H)$-invariáns $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{h}$ felbontás természetes reduktivitásával) vagy nem differenciálható az $\mathfrak{m}$ origójában.

A $\mathfrak{g}$ Lie-algebra nemzérus X elemét *geodetikus vektor*nak nevezzük, ha az $\exp(tX) \cdot p$ geodetikus. Felhasználva a geodetikus vektorokat, a G/H geodetikus pályatérre vonatkozó számolásokat algebrai számításokra redukálhatjuk.

E. Wilson [33] cikkében bebizonyította, hogy ha adott egy M homogén nilsokaság, akkor létezik az $I(M)$ izometria-csoportnak olyan N nilpotens Lie részcsoportja, amely egyszeresen tranzitívan hat M-en és normális részcsoportja az $I(M)$-nek. Így az M Riemann-sokaság azonosítható a balinvariáns $\langle ., . \rangle$ metrikával ellátott N csoporttal. Az N-beli balinvariáns $\langle ., . \rangle$ metrika egy $\langle , \rangle$ belsőszorzatot határoz meg a megfelelő $\mathfrak{n} = T_e N$ Lie-algebrán és ez fordítva is teljesül. A [33] cikknek megfelelően az $(N, \langle ., . \rangle)$ teljes izometria-csoport kifejezhető az

$$I\left(N, \langle ., . \rangle\right) = K \ltimes N$$

szemidirekt szorzat alakban, ahol a $K = Aut\left(\mathfrak{n}\right) \cap O\left(\mathfrak{n}, \langle , \rangle\right)$ az e egységelembeli izotrópia részcsoport és N baleltolásként hat. Így a K izotrópia-részcsoport meghatározza a teljes izometria-csoport szerkezetét.

2 Geodetikus vektorok

Az A. Kaplan által bevezetett első példa geodetikus pályatérre, amely nem természetesen reduktív egy speciális balinvariáns metrikával ellátott 6-dimenziós, kétlépcsős Riemann-nilsokaság, melynek centruma 2-dimenziós. Ebben az esetben meghatározzuk a fent említett $\xi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{h}$ leképezést, melynek leírásakor C. Gordon úgynevezett tranzitív normalizátori feltételét (lásd [9]) is használjuk.

A 2-dimenziós centrumú 6-dimenziós kétlépcsős Riemann-nilsokaság esetén legyen

$$\mathfrak{a} = \mathbb{R}^4 = H, \mathfrak{z} = V^2 \subset so\,(4) = so^{(1)}(3) + so^{(2)}(3).$$

A tranzitív normalizátori feltétel alapján az $so\,(4)$ olyan kétdimenziós altereit, melyeknél a megfelelő nilsokaság geodetikus pályatér, de nem természetesen reduktív, csak az $so(3)$ ideálok egyike tartalmazhatja.

1. TÉTEL. *Tetszőleges $(N, \langle .,. \rangle)$ balinvariáns Riemann-metrikával ellátott 2-dimenziós centrumú, kétlépcsős 6-dimenziós homogén nilsokaság esetén létezik olyan $ad(H)$-invariáns $\xi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$ leképezés, melynél tetszőleges $Y = X + Z \in \mathfrak{n} \backslash \{0\}$ elem esetén (ahol $X \in \mathfrak{a}, Z \in \mathfrak{z}$) az $Y + \xi(Y)$ geodetikus vektor, azaz az*

$$\exp(t(Y + \xi(Y))) \cdot p$$

görbe geodetikus.

A tételben szereplő leképezés a következő módon adható meg.

1. Ha $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq 0 \in \mathfrak{a}$ és $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}$, akkor

$$\xi(X + Z) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & -\gamma & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \gamma & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ -\gamma & -\beta & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

ahol

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{-z_1(x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2)-2z_2(x_1x_2+x_0x_3)}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2},\\
\beta &= \frac{z_2(x_3^2+x_1^2-x_2^2-x_0^2)-2z_1(x_1x_2-x_0x_3)}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2},\\
\gamma &= \frac{2z_2(x_0x_1-x_2x_3)-2z_1(x_0x_2+x_1x_3)}{x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2}.
\end{aligned}$$

2. Ha $X = 0 \in \mathfrak{a}$ és $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}$, akkor

$$\xi(Z) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$.

Az előző tételhez hasonlóan bizonyíthatjuk a 7-dimenziós esetre vonatkozó állításunkat.

2. Tétel. *Tetszőleges $(N, \langle .,. \rangle)$ balinvariáns Riemann-metrikával ellátott 3-dimenziós centrumú, kétlépcsős 7-dimenziós homogén nilsokaság esetén létezik olyan $ad(H)$-invariáns $\xi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$ leképezés úgy, hogy tetszőleges $Y \in \mathfrak{n} \backslash \{0\}$ elem esetén az $Y + \xi(Y)$ geodetikus vektor, azaz az*

$$\exp(t(Y + \xi(Y))) \cdot p$$

görbe geodetikus.

3 Szubmerzió

Tetszőleges $\pi : M \to B$ (ahol M és B Riemann-sokaságok) a szubmerzió tulajdonságai megadhatóak az úgynevezett *fundamentális tenzor*ainak a segítségével. Két ilyen alaptenzor létezik, az egyiket, amelyet a továbbiakban T-vel jelölünk a $\pi^{-1}(b)$ fibrumok m*ásodik alapformá*ja határoz meg, a másik, az A tenzor nem más, mint az M-beli $\mathfrak{H}$ horizontális disztribúció *integrábilitási tenzora.*

Legyen az N egyszeresen összefüggő kétlépcsős nilpotens Lie-csoport, melynek Lie-algebrája $\mathfrak{n}$. Jelölje $\mathcal{Z}$ az $\mathfrak{n}$ Lie-algebra $\mathfrak{z}$ centrumának megfelelő Lie-csoportot. Az $\exp : \mathfrak{n} \to N$ diffeomorfizmus segítségével az $\mathfrak{n}$ vektorteret az N Lie-csoporttal, az $\mathfrak{n}\times\mathfrak{n}$ szorzatteret pedig a TN érintőnyalábbal azonosíthatjuk.

Megmutatjuk, hogy a $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ leképezés Riemann-szubmerzió. Először a következő eredményt kapjuk:

3. Lemma. *Legyen $X(t)$ az $N/\mathcal{Z}$ faktortér egy differenciálható görbéje. Jelölje*

$$\tau_{t_0,t} : \pi^{-1}(X(t_0) \oplus 0) \to \pi^{-1}(X(t) \oplus 0)$$

az $X(t)$ alapgörbe N-beli horizontális liftjei által meghatározott leképezést. Ekkor tetszőleges $Z \in \mathfrak{z}$ esetén

$$\tau_{t_0,t}(X(t_0) \oplus Z) = X(t) \oplus \left(Z + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} [X(u), X'(u)] du \right).$$

Tetszőleges $X \in \mathfrak{a}$ és $U \in \mathfrak{z}$ elemek esetén a $T_{X\oplus U}N$ érintőtér direkt összege a

$$T^{(h)}_{X\oplus U}N = \left\{ Y \oplus \frac{1}{2} [X, Y] \, ; Y \in \mathfrak{a} \right\}$$

horizontális és a

$$T^{(v)}_{X\oplus U}N = \{0 \oplus Z; Z \in \mathfrak{z}\}$$

vertikális altereknek. Mivel a $T^{(h)}_{X\oplus U}$ horizontális disztribúció független az $U \in \mathfrak{z}$ elemtől, teljesül, hogy a $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ leképezés Riemann szubmerzió.

Jelölje az $X \in \mathfrak{a}$ elem esetén a $\bar{g}_X$ azt az $\mathfrak{a}$-beli Riemann-metrikát, amely megfelel az $N/\mathcal{Z}$-beli faktortérnek. Legyen $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{a}$ és jelölje λ a baleltolást. Az eddig elmondottakat felhasználva adódik:

$$\begin{aligned}\bar{g}_X(Y_1, Y_2) &= \left\langle (\lambda^{-1}_{X\oplus 0})_*(Y_1 \oplus \frac{1}{2}[X, Y_1]), (\lambda^{-1}_{X\oplus 0})_*(Y_2 \oplus \frac{1}{2}[X, Y_2]) \right\rangle \\ &= \langle Y_1 \oplus 0, Y_2 \oplus 0\rangle = \langle Y_1, Y_2\rangle_{\mathfrak{a}}.\end{aligned}$$

Az előzőekből következik, hogy a Riemann-skaláris szorzat konstans az $N/\mathcal{Z}$ faktortéren, így az $N/\mathcal{Z}$ euklideszi tér.

4. LEMMA. *A $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ Riemann-szubmerzió $e \in N$ egységelembeli $T|_e$ és $A|_e$ alaptenzoraira a*

$$\begin{aligned} T|_e &= 0 \quad \textit{és} \\ (A|_e)_{X+U}(Y+V) &= -\frac{1}{2}j(V)X \oplus \frac{1}{2}[X,Y] \end{aligned}$$

összefüggések teljesülnek, ahol $X, Y \in T_e^{(h)}N \cong \mathfrak{a}$ és $U, V \in T_e^{(v)}N \cong \mathfrak{z}$.

Mivel a T tenzormező balinvariáns, az előző lemmából következik, hogy T identikusan eltűnik. Az A tenzormező szintén balinvariáns, így egyszerű meggondolás alapján adódik:

5. LEMMA. *A $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ Riemann-szubmerzió totálgeodetikus fibrumokkal rendelkezik, azaz a T tenzormező identikusan eltűnik.*
Az A tenzormező tetszőleges $X, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{a}$ és $U, Z_1, Z_2 \in \mathfrak{z}$ elemek esetén

$$\begin{aligned} &(A|_{X\oplus U})_{Y_1 \oplus Z_1}(Y_2 \oplus Z_2) \\ &= \left(-\frac{1}{2}j(Z_2)Y_1 + \frac{1}{4}j([X,Y_2])Y_1\right) \\ &\oplus \left(\frac{1}{2}[Y_1,Y_2] - \frac{1}{4}[X, j(Z_2)Y_1] + \frac{1}{8}[X, j([X,Y_2])Y_1]\right) \end{aligned}$$

alakban áll elő.

A tenzorok explicit megadása, valamint O'Neill geodetikusokra vonatkozó egyenletei (lásd [28]) segítségével kapjuk a következő eredményt.

6. LEMMA. *Ha az $X(s) \oplus U(s)$ görbe az N kétlépcsős Riemann-nilsokaság geodetikusa, akkor ez nem más, mint a*

$$\{\psi(s, sW_0);\ s \in \mathbb{R}\} = \{\tau_{s_0,s} sW_0;\ s \in \mathbb{R}\}$$

képgörbe az $\mathbb{R} \times \pi^{-1}(\pi^{-1}(X(s_0) \oplus 0))$ euklideszi tér $\{(s, sW_0);\ s \in \mathbb{R}\}$ egyenesének $\bigcup_{s\in\mathbb{R}} \pi^{-1}(X(s) \oplus 0) \subset N$ részsokaságában.

Tetszőleges N-beli $\alpha(s)$ geodetikus esetén a $\pi \circ \alpha(s)$ görbe $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ görbületeit kifejezve adódik, hogy a $\pi \circ \alpha(s)$ konstans görbületű az $N/\mathcal{Z}$ euklideszi térben. Ez utóbbi tényből kapjuk meg az N kétlépcsős nilsokaság geodetikusainak alábbi jellemzését:

7. KÖVETKEZMÉNY. *Az $\alpha(s) = X(s) \oplus U(s)$ geodetikus $\pi \circ \alpha(s)$ projektált görbéje az $N/\mathcal{Z}$ euklideszi térben akkor és csak akkor egyenes, ha*

$$j(U(s_0))X(s_0) = 0$$

teljesül valamely s_0 pontban.

8. ÁLLÍTÁS. *Legyen $(N, \langle .,. \rangle)$ egy kétlépcsős nilpotens Lie-csoport. Ekkor a geodetikusok $N/\mathcal{Z}$-beli projektált görbéi akkor és csak akkor pontok, egyenesek, körök, ha*

$$j(U)^2 = -q(U) id_{\mathfrak{a}},$$

ahol a $q(U)$ egy pozitív szemidefinit kvadratikus forma a $\mathfrak{z}$ centrumon.

Az előző állítások, valamint az a P. Eberleintól (lásd [7]) származó eredmény, amely szerint minden kétlépcsős nilpotens Lie-algerából leválasztható egy Abel-faktor, vezetnek a következő állítás bizonyításához.

9. TÉTEL. *Az N geodetikusainak a $N/\mathcal{Z}$ euklideszi térbeli összes projekciója pontosan akkor síkgörbe, ha az N egy módosított Heisenberg-típusú csoport direkt összege az N euklideszi de Rahm-faktorával. Ebben az esetben a geodetikusok projekciói pontok, egyenesek vagy körök.*

4 Izometria-csoportok

Az utolsó fejezetben az 5-dimenziós, egyszeresen összefüggő nilsokaságok osztályozását adjuk meg izometria erejéig. Ez ekvivalens a megfelelő metrikus Lie-algebrák osztályozásával. Mivel az 5-dimenziós kétlépcsős nilpotens Lie-algebrák centruma legfeljebb 3-dimenziós lehet, 3 esetet vizsgálunk.

Metrikus (λ,μ)*-típusú Heisenberg-algebra* alatt olyan 5-dimenziós metrikus Lie-algebrát értünk, melynek egy $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ortonormált bázisára teljesülnek az

$$[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = \lambda\, e_5, \quad [e_3, e_4] = -[e_4, e_3] = \mu\, e_5, \tag{3}$$

$$[e_1, e_3] = [e_1, e_4] = [e_2, e_3] = [e_2, e_4] = 0. \tag{4}$$

összefüggések, ahol $\lambda \geq \mu > 0$. Az előző módon definiált algebrát $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$-vel fogjuk jelölni.

10. Állítás. *Tetszőleges* 5*-dimenziós kétlépcsős nilpotens* $\mathfrak{n}$ *metrikus Lie-algebra esetén, melynek centruma* 1*-dimenziós, léteznek olyan* $\lambda \geq \mu > 0$ *valós számok, hogy az* $\mathfrak{n}$ *izomorf a* $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ *metrikus Heisenberg-algebrával. A* $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ *és* $\mathfrak{h}_5(\lambda', \mu')$ *metrikus Heisenberg-algebrák akkor és csakis akkor izometrikusan izomorfak, ha* $\lambda = \lambda'$ *és* $\mu = \mu'$*.*

Az előző állítás, valamint a a [18] cikk segítségével kapjuk a következő eredményt.

11. Következmény. *Minden* 5*-dimenziós* N *Heisenberg-csoport, amely egy* $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ *metrkus algebrának felel meg, módosított H-típusú csoport és természetesen reduktív is. Továbbá akkor és csakis akkor H-típusú csoport, ha* $\lambda = \mu$*.*

A $j^2(Z)$ lineáris operátor explicit megadását felhasználva megadjuk a megfelelő izometria-csoportot is, mégpedig:

12. Állítás. *A* $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ *metrikus Lie-algebra ortogonális automorfizmusainak a csoportja*

$$\begin{aligned} \lambda &\neq \mu \text{ esetén az } O(2) \times SO(2) \text{ csoporttal,} \\ \lambda &= \mu \text{ esetén az } U(2) \times \mathbb{Z}_2 \text{ csoporttal} \end{aligned}$$

izomorf.

A második esetben jelöljön $\mathfrak{n}_5$ egy 5-dimenziós Lie-algebrát, melynek $\mathfrak{z}$ centruma 2-dimenziós és legyen N_5 a megfelelő egyszeresen összefüggő Lie-csoport. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{n}_5$ el van látva egy $\langle , \rangle$ belső szorzattal. Bebizonyítható, hogy az $\mathfrak{n}_5$ Lie-algebrának létezik olyan $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ortonormált bázisa, melyre

$$[e_1, e_2] = \lambda\, e_4, \quad [e_1, e_3] = \mu\, e_5, \text{ ahol } \lambda \geq \mu > 0. \tag{5}$$

Jelöljük a fent leírt 5-dimenziós metrikus Lie-algebrát $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$-vel. Az előző számolások alapján bizonyíthatjuk a következőket.

13. ÁLLÍTÁS. *Tetszőleges 5-dimenziós kétlépcsős nilpotens $\mathfrak{n}$ metrikus Lie-algebra esetén, melynek centruma 2-dimenziós, léteznek olyan $\lambda \geq \mu > 0$ valós számok, hogy az $\mathfrak{n}$ izomorf a $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$ metrikus algebrával.*
Az $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$ és $\mathfrak{n}_5(\lambda', \mu')$ metrikus algebrák akkor és csakis akkor izometrikusan izomorfak, ha $\lambda = \lambda'$ és $\mu = \mu'$.

A következőekben az $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$ ortogonális automorfizmusait határozzuk meg. Tetszőleges φ ortogonális automorfizmus megőrzi a $\mathfrak{z}$ centrumot, az $\mathfrak{a}$ ortogonális komplementumot, annak 2-dimenziós kommutatív $\mathfrak{a}_2$ részalgebráját, továbbá $\mathfrak{a}_2$ ortogonális komplementumát ($\mathbb{R}e_1$-t) $\mathfrak{a}$-ban.

14. ÁLLÍTÁS. *Az $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$ metrikus Lie-algebra ortogonális automorfizmusainak a csoportja*

$$\begin{aligned} \lambda &\neq \mu \textit{ esetén a } \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \textit{ csoporttal,} \\ \lambda &= \mu \textit{ esetén az } O(2) \times \mathbb{Z}_2 \textit{ csoporttal} \end{aligned}$$

izomorf.

Könnyen belátható, hogy az $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$ metrikus Lie-algebráknak megfelelő 5-dimenziós csoportok nem módosított H-típusú csoportok.

Végül legyen az 5-dimenziós $\mathfrak{n}$ metrikus Lie-algebra centruma 3-dimenziós. Jelölje $\mathfrak{b}$ az $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ kommutátorra vonatkozó ortogonális komplementumot $\mathfrak{z}$ centrumban. Bebizonyítható, hogy az $\mathfrak{n}$ metrikus Lie-algebra felbomlik a $\mathfrak{h}_3$ metrikus Heisenberg-algebra és a $\mathfrak{b}$ kommutatív metrikus algebra direkt összegére, azaz $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{b}$.
Legyen $\{e_1, e_2\}$ az $\mathfrak{a}$ egy ortonormált bázisa és $e_3 \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ egységvektor úgy, hogy

$$[e_1, e_2] = -\,[e_2, e_1] = \lambda\, e_3 \tag{6}$$

teljesül valamely $\lambda > 0$ esetén. Továbbá jelöljük $\{e_4, e_5\}$-tel a $\mathfrak{b}$ egy ortonormált bázisát, az előzőekben leírt Lie-algebrát pedig jelölje $(\mathfrak{h}_3)(\lambda) \oplus \mathbb{R}^2$. Egyszerű számolások alapján kapjuk:

15. Állítás. *Tetszőleges 5-dimenziós kétlépcsős nilpotens $\mathfrak{n}$ metrikus Lie-algebra esetén, melynek centruma 3-dimenziós, létezik olyan $\lambda > 0$ valós szám, hogy az $\mathfrak{n}$ izomorf a $\mathfrak{h}_3(\lambda) \oplus \mathbb{R}^2$ metrikus algebrával.*
A $\mathfrak{h}_3(\lambda) \oplus \mathbb{R}^2$ és $\mathfrak{h}_3(\lambda') \oplus \mathbb{R}^2$ metrikus Heisenberg-algebrák akkor és csakis akkor izometrikusan izomorfak, ha $\lambda = \lambda'$.

Mivel a Lie-algebra ortogonális automorfizmusa megőrzi a (6) összefüggést, így a következő állítást kapjuk.

16. Állítás. *A $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^2$ metrikus Lie-algebra ortogonális automorfizmusainak csoportja izomorf az $O(2) \times O(2)$ csoporttal.*

Azon 5-dimenziós csoportok, melyek a $\mathfrak{h}_3(\lambda) \oplus \mathbb{R}^2$ metrikus algebrának felelnek meg, nem módosított Heisenberg-típusú csoportok.

Az előző eredményeket a következő tételben összegezzük.

17. Tétel. *Az 5-dimenziós egyszeresen összefüggő kétlépécsős homogén nilsokaságok izometria erejéig az alábbiak lehetnek:*

$$\begin{aligned} (H_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &: \lambda \geq \mu > 0, \\ (N_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &: \lambda \geq \mu > 0, \\ \left(H_3 \times \mathbb{R}^2, \langle .,. \rangle_{\lambda}\right) &: \lambda > 0. \end{aligned}$$

Továbbá a megfelelő nilsokaságok teljes izometria-csoportjai

$$\begin{aligned} I(H_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &= \begin{cases} (U(2) \times \mathbb{Z}_2) \ltimes H_5, & ha\ \lambda = \mu, \\ (O(2) \times SO(2)) \ltimes H_5, & ha\ \lambda \neq \mu, \end{cases} \\ I(N_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &= \begin{cases} (O(2) \times \mathbb{Z}_2) \ltimes N_5, & ha\ \lambda = \mu, \\ (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \ltimes N_5, & ha\ \lambda \neq \mu, \end{cases} \\ I\left(H_3 \times \mathbb{R}^2, \langle .,. \rangle_{\lambda}\right) &= (O(2) \times O(2)) \ltimes \left(H_3 \times \mathbb{R}^2\right) \end{aligned}$$

alakban fejezhetőek ki.

5 Thesis

The aim of this PhD dissertation is to investigate geodesics and isometries of some two-step Riemannian nilmanifolds.

A large part of the dissertation has already published by the author. Chapter 2 is based on the paper [1]. It is extended here by the investigation of the 7-dimensional case. The next chapter is built on the work [2], which is a joint paper with Professor P. T. Nagy. Chapter 4 follows the exposition of our article [4] with Professor O. Kowalski.

A Lie algebra $\mathfrak{n}$ is said to be *two-step nilpotent* if

$$[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] \neq \{0\} \;\text{ but } [[\mathfrak{n},\mathfrak{n}],\mathfrak{n}] = \{0\}\,.$$

We denote by $\mathfrak{z}$ the center of $\mathfrak{n}$ and by $\mathfrak{a} = \mathfrak{z}^{\perp}$ the orthogonal complement of $\mathfrak{z}$. Then we have the orthogonal direct sum decomposition $\mathfrak{n} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{z}$. We denote by $so(\mathfrak{a})$ the Lie algebra of skew-symmetric endomorphisms of the Euclidean vector subspace $(\mathfrak{a}, \langle , \rangle_{\mathfrak{a}})$ of $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$.

For each element Z of $\mathfrak{z}$, define an endomorphism $j(Z) \in so(\mathfrak{a})$ by

$$\langle j(Z)X, Y\rangle = \langle [X,Y]\,, Z\rangle \text{ for all } X, Y \in \mathfrak{a}. \tag{1}$$

The algebraic properties of $(\mathfrak{n}, \langle , \rangle)$ can be expressed in terms of the maps $j(Z)$.

Among two-step nilpotent Lie groups with left-invariant metrics, the Heisenberg type Lie groups are of particular significance. A two-step nilpotent Lie group N with a left-invariant metric $\langle ., . \rangle$ is said to be an *Heisenberg type* (H-type) *Lie group* if $[j(Z)]^2 = -\langle Z, Z\rangle id_{\mathfrak{a}}$ for any $Z \in \mathfrak{z}$.

More generally, $(N, \langle ., . \rangle)$ is called a *modified H-type group* if $[j(Z)]^2 = -h(Z) id_{\mathfrak{a}}$ for any $Z \in \mathfrak{z}$, where $h(Z)$ is a positive definite quadratic form on $\mathfrak{z}$ (see [21]).

Let (M, g) be a connected homogeneous Riemannian manifold endowed with a Riemannian metric g. If G is any connected transitive group of isometries of M and H is the isotropy subgroup at a fixed point $p \in M$, then M is naturally identified with the coset space G/H with a left-invariant Riemannian metric. Let us denote by $\mathfrak{g}$ and $\mathfrak{h}$ the corresponding Lie algebras of G respectively H.

We say that the homogeneous space G/H is a *geodesic orbit (g.o.) space* if every geodesic in M is an orbit of a one-parameter subgroup of G. I.e. every geodesic in M is of the form $\exp(tX) \cdot p$ with $X \in \mathfrak{g}$, $p \in M$.

The Riemannian manifold (M, g) is said to be a *g. o. space* if taking for G the maximal connected group of isometries, $G = I_0(M)$, the space G/H is a g.o. space.

It is known that naturally reductive spaces form a proper subclass of the class of geodesic orbit spaces, the difference can be described in terms of "geodesic vectors" and "geodesic graphs".

One of the basic techniques for studying g. o. spaces comes from J. Szenthe (c.f. [31]. The last author discovered the interesting geometrial background for those g. o. spaces which are in no way naturally reductive without knowing any concrete examples. He studied g. o. spaces also in the affine case. The following statement is the (reformulated) Riemannian version of his main result.

Let $(M, g) = G/H$ be a g. o. space and $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ an ad(H)-invariant decomposition. Then:

1. There exists a *canonical* ad(H)-equivariant map $\xi : \mathfrak{m} \to \mathfrak{h}$ (the "geodesic graph") such that, for any $X \in \mathfrak{m}\backslash\{0\}$, the curve $\exp t(X + \xi(X))(p)$ is a geodesic.

2. A geodesic graph is either linear (which is equivalent to the natural reductivity with respect to some ad(H)-invariant decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}' \oplus \mathfrak{h}$) or it is non-differentiable at the origin of $\mathfrak{m}$.

If $(G/H, g)$ is a Riemannian g.o. space, then a vector $X \in \mathfrak{g}\backslash\{0\}$ is called a *geodesic vector* if the curve $\exp(tX)(p)$ is a geodesic, where p is a fixed point. Hence the *geodesic graph* is an $ad(H)$-equivariant map

$$\xi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$$

such that for any $X \in \mathfrak{n}\backslash\{0\}$

$$X + \xi(X)$$

is a geodesic vector.

In the first part we describe the geodesic graphs of some two-step Riemannian nilmanifolds, namely in the case of a 6-dimensional two-step nilmanifold with 2-dimensional center (which was introduced by A. Kaplan, c.f. [15]), in the case of its generalization in dimension 6 and in the case of a 7-dimensional two-step nilmanifold, which was constructed by C. Gordon (c.f. [9]) in the framework of the general theory of g.o. spaces. These manifolds are examples for Riemannian geodesic orbit spaces which are in no way naturally reductive, hence the geodesic graphs are non-linear, more precisely:

1. Theorem *If* $(N, \langle .,. \rangle)$ *is a* 6*-dimensional Riemannian two-step nilmanifold with a* 2*-dimensional center, then there exists an* $ad(H)$*-equivariant* $\xi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$ *map such that for any* $X + Z \in n \backslash \{0\}$ *the curve*

$$\exp(t((X+Z) + \xi(X+Z))) \cdot p$$

is geodesic, i. e.

$$(X+Z) + \xi(X+Z)$$

is a geodesic vector.

The above-mentioned map we can express in the following way:

1. If $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \neq 0 \in \mathfrak{a}$ and $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}$ then

$$\xi(X+Z) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & -\gamma & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \gamma & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ -\gamma & -\beta & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

where

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-z_1(x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) - 2z_2(x_1x_2 + x_0x_3)}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ \beta &= \frac{z_2(x_3^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_0^2) - 2z_1(x_1x_2 - x_0x_3)}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \\ \gamma &= \frac{2z_2(x_0x_1 - x_2x_3) - 2z_1(x_0x_2 + x_1x_3)}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \end{aligned}$$

2. If $X = 0 \in \mathfrak{a}$ and $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{z}$ then

$$\xi(Z) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Similar to the 6-dimensional case we can give the explicit expression of the *$ad(H)$-equivariant $\xi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{h}$ map* of the 7-dimensional two-step nilmanifold with 3-dimensional center which was introduced in [9].

In the second part of the dissertation we describe (according to the paper [2]) the geodesics of two-step nilpotent Lie groups N with respect to left invariant Riemannian metrics $\langle ., . \rangle$ using the Riemannian submersion structure of the fiber bundle

$$\pi : N \to N/\mathcal{Z},$$

where $\mathcal{Z}$ denotes the center of N. Then we can identify the vector space $\mathfrak{n}$ with N and the product space $\mathfrak{n} \times \mathfrak{n}$ with the tangent bundle TN via the diffeomorphism $\exp : \mathfrak{n} \to N$. We can see that the points of the base space $N/\mathcal{Z}$ can be identified with the vectors of the space $\mathfrak{a}$. First we get:

2. LEMMA *Let $X(t)$ be a differentiable curve in the factor space $N/\mathcal{Z}$. We denote by*

$$\tau_{t_0,\,t} : \pi^{-1}(X(t_0) \oplus 0) \to \pi^{-1}(X(t) \oplus 0)$$

the map which is determined by the horizontal lifts to N of the base curve $X(t)$. Then we have for arbitrary $Z \in \mathfrak{z}$

$$\tau_{t_0,\,t}(X(t_0) \oplus Z) = X(t) \oplus \left(Z + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} [X(u), X'(u)] du \right).$$

For arbitrary $X \in \mathfrak{a}$ and $U \in \mathfrak{z}$ the tangent space $T_{X \oplus U} N$ is the orthogonal direct sum of the horizontal subspace

$$T^{(h)}_{X \oplus U} N = \{ Y \oplus \frac{1}{2}[X, Y];\ Y \in \mathfrak{a} \}$$

and of the vertical subspace

$$T^{(v)}_{X \oplus U} N = \{ 0 \oplus Z;\ Z \in \mathfrak{z} \}.$$

The horizontal subspace $T^{(h)}_{X\oplus U}N$ is independent of $U \in \mathfrak{z}$, hence the map $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ is a Riemannian submersion.

Let $\bar{g}_X$ denote the Riemannian metric in $\mathfrak{a}$, at $X \in \mathfrak{a}$, which corresponds to the Riemannian metric of the factor space $N/\mathcal{Z}$. Let $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{a}$ and let λ denote the left translation. The lifts of Y_i to $T^{(h)}_{X\oplus 0}N$ are

$$\{Y_i \oplus \frac{1}{2}[X, Y_i]\},\ i = 1, 2,$$

from which follows $(\lambda^{-1}_{X\oplus 0})_*(Y_i \oplus \frac{1}{2}[X, Y_i]) = Y_i \oplus 0$. Thus we get

$$\begin{aligned}\bar{g}_X(Y_1, Y_2) &= \left\langle (\lambda^{-1}_{X\oplus 0})_*(Y_1 \oplus \frac{1}{2}[X, Y_1]), (\lambda^{-1}_{X\oplus 0})_*(Y_2 \oplus \frac{1}{2}[X, Y_2]) \right\rangle \\ &= \langle Y_1 \oplus 0, Y_2 \oplus 0\rangle = \langle Y_1, Y_2\rangle_{\mathfrak{a}}.\end{aligned}$$

It follows, that the Riemannian scalar product on the factor space $N/$ is constant and hence $N/$ is an Euclidean space.

The character of a submersion can be described by its fundamental tensors T and A. The tensor T is determined by the *second fundamental form* of the fibers $\pi^{-1}(b)$ and A is the *integrability tensor* of the horizontal distribution $\mathfrak{H}$ on M. Using the properties of T and A one can express these tensors in our case. More precisely we have the following proposition:

3. LEMMA *The fundamental tensors $T|_e$ and $A|_e$ of the Riemannian submersion $\pi : N \to N/\mathcal{Z}$ at the identity element $e \in N$ satisfy*

$$T|_e = 0 \quad \textit{and} \quad (A|_e)_{X+U}(Y + V) = -\frac{1}{2}j(V)X \oplus \frac{1}{2}[X, Y]$$

for all $X, Y \in T^{(h)}_e N \cong \mathfrak{a}$ and $U, V \in T^{(v)}_e N \cong \mathfrak{z}$.

Since the tensorfield T is left invariant, it follows from the above-mentioned result that T vanishes identically. The tensorfield A is also left invariant, hence one can express $(A|_{X\oplus U})_{Y_1\oplus Z_1}(Y_2 \oplus Z_2)$ at an arbitrary point $X \oplus U$ using the shape of the left multiplication map. This map satisfies the following relation:

$$(\lambda_{X\oplus U})_*|_{0\oplus 0}(Y \oplus V) = Y \oplus (V + \frac{1}{2}[X, Y]).$$

Using the shape of the tensors T respectively A and the results of O'Neill on the differential equations of geodesics of the total space N of $\pi : N \to N/Z$ (cf. [28]), we obtain:

4. LEMMA *If the curve $X(s) \oplus U(s)$ is a geodesic of the Riemannian two-step nilmanifold N then it is the image*

$$\{\psi(s, sW_0);\ s \in \mathbb{R}\} = \{\tau_{s_0, s} sW_0;\ s \in \mathbb{R}\}$$

in the submanifold

$$\bigcup_{s \in \mathbb{R}} \pi^{-1}(X(s) \oplus 0) \subset N$$

of a line

$$\{(s, sW_0);\ s \in \mathbb{R}\}$$

of the Euclidean space

$$\mathbb{R} \times \pi^{-1}(\pi^{-1}(X(s_0) \oplus 0)).$$

Then we define the curvatures $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ of the curve $\pi \circ \alpha(s)$ recursively and we can show the following result.

5. LEMMA *The projection $\pi \circ \alpha(s)$ of any geodesic $\alpha(s)$ has constant curvatures in the Euclidean space $N/\mathcal{Z}$.*

Moreover we obtain:

6. COROLLARY *The projection $\pi \circ \alpha(s)$ of a geodesic $\alpha = X(s) \oplus U(s)$ into the Euclidean space $N/\mathcal{Z}$ is an Euclidean line if and only if*

$$j(U(s_0))X(s_0) = 0$$

is satisfied in a point t_0.

To characterize two-step nilmanifolds $(N, \langle ., . \rangle)$ which have the property that the projections of geodesics of N onto the factor space N/Z are points, Euclidean lines or circles, we prove:

7. PROPOSITION *The projections of geodesics are points, lines or circles in the Euclidean space $N/\mathcal{Z}$ if and only if*

$$j(U)^2 = -q(U) id_{\mathfrak{a}},$$

where $q(U)$ is a positive semidefinite quadratic form on $\mathfrak{z}$.

We apply the previous proposition and the fact that one may always split off an Abelian factor from a two-step nilpotent Lie-algebra and we are able to prove one of our main result:

8. THEOREM *All projections of the geodesics of N onto the Euclidean space $N/\mathcal{Z}$ are planar curves if and only if N is a direct sum of a modified H-type group with the Euclidean de Rahm factor of N. In this case the projections of geodesics are points, lines or circles.*

In the third part of our dissertation we have classified all simply connected two-step nilpotent Lie groups of dimension 5 equipped with left-invariant metrics ("two-step nilmanifolds") up to isometry. E. Wilson proved in [33] that, when given a homogeneous nilmanifold M, there exists a unique nilpotent Lie subgroup N of $I(M)$ acting simply transitively on M, and N is normal in $I(M)$. Hence the Riemannian manifold M can be identified with the group N equipped with a left-invariant metric $\langle .,. \rangle$. A left-invariant metric $\langle .,. \rangle$ on N determines an inner product $\langle , \rangle$ on the corresponding Lie algebra $\mathfrak{n} = T_e N$ and conversely. According to [33], the full group of isometries of $(N, \langle .,. \rangle)$ can be expressed as a semi-direct product

$$I\left(N, \langle .,. \rangle\right) = K \ltimes N, \tag{2}$$

where $K = Aut\left(\mathfrak{n}\right) \cap O\left(\mathfrak{n}, \langle , \rangle\right)$ is the isotropy subgroup at the identity element e and N acts by left translations. K is the full group of automorphisms of the Lie algebra $\mathfrak{n}$ which preserve the inner product $\langle , \rangle$. Thus the structure of the full isometry group is completely determined by the isotropy subgroup K. Moreover, if N is simply connected, then the exponential mapping $\exp : \mathfrak{n} \to N$ is a diffeomorphism. We need not make distinction between automorphisms of $\mathfrak{n}$ and those of N.

Hence we have to classify the corresponding metric Lie-algebras. Clearly, the dimension of the center of a 5-dimensional two-step nilpotent Lie-algebra is not greater than 3, we consider separately the cases where the dimension of the center is $1, 2$ or 3.

In the first case we denote by $\mathfrak{h}_5$ a 5-dimensional Lie-algebra the center $\mathfrak{z}$ of which is one-dimensional. We assume that $\mathfrak{h}_5$ is equipped with an inner product $\langle , \rangle$. Let e_5 be a unit vector in $\mathfrak{z}$ and let $\mathfrak{a}$ be the orthogonal complement of $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{h}_5$. We show there exists an orthonormal basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ of $\mathfrak{a}$ such that

$$[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = \lambda\, e_5, \quad [e_3, e_4] = -[e_4, e_3] = \mu\, e_5, \tag{3}$$

$$[e_1, e_3] = [e_1, e_4] = [e_2, e_3] = [e_2, e_4] = 0. \tag{4}$$

Moreover we can assume that $\lambda \geq \mu > 0$. A *metric Heisenberg algebra of type* (λ, μ) is defined as a 5-dimensional metric Lie-algebra having an orthonormal basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ satisfying the commutation relations (3) and (4), where $\lambda \geq \mu > 0$. We will denote it by $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$. Then we get the following proposition:

9. Proposition *For any* 5*-dimensional* 2*-step nilpotent metric Lie-algebra* $\mathfrak{n}$ *with* 1*-dimensional center there exist real numbers* $\lambda \geq \mu > 0$ *such that* $\mathfrak{n}$ *is isomorphic to the metric Heisenberg algebra* $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$.
The metric Heisenberg algebras $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ *and* $\mathfrak{h}_5(\lambda', \mu')$ *are isometrically isomorphic if and only if* $\lambda = \lambda'$ *and* $\mu = \mu'$.

From the computations of the proof and also from [18] we get the following:

10. Corollary *Each* 5*-dimensional Heisenberg group space* N *corresponding to a metric algebra* $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ *is a modified H-type group and it is naturally reductive. It is an H-type group if and only if* $\lambda = \mu$.

Moreover using the shape of the linear operator $j^2(Z)$ we obtain:

11. Proposition *The group of orthogonal automorphisms of the metric Lie-algebra* $\mathfrak{h}_5(\lambda, \mu)$ *is isomorphic to the group* $O(2) \times SO(2)$ *for* $\lambda \neq \mu$, *and it is isomorphic to the group* $U(2) \times \mathbb{Z}_2$ *for* $\lambda = \mu$.

Let $\mathfrak{n}_5$ denote a 5-dimensional Lie-algebra the center $\mathfrak{z}$ of which is two-dimensional. We assume that $\mathfrak{n}_5$ is equipped with an inner product $\langle , \rangle$. One can show there is an orthonormal basis $\{e_4, e_5\}$ of $\mathfrak{z}$ such that

$$[e_1, e_2] = \lambda\, e_4, \quad [e_1, e_3] = \mu\, e_5, \quad \lambda \geq \mu > 0. \tag{5}$$

We denote a 5-dimensional metric Lie-algebra described above by $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$. Similar to the first case we obtain at once:

12. Proposition *For any* 5*-dimensional* 2*-step nilpotent metric Lie-algebra* $\mathfrak{n}$ *having a* 2*-dimensional center there exist real numbers* $\lambda \geq \mu > 0$ *such that* $\mathfrak{n}$ *is isomorphic to the metric algebra* $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$. *Moreover the metric Heisenberg Lie-algebras* $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$ *and* $\mathfrak{n}_5(\lambda', \mu')$ *are isometrically isomorphic if and only if* $\lambda = \lambda'$ *and* $\mu = \mu'$.

We see that the 5-dimensional group spaces corresponding to the metric algebras $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$ are not modified H-type groups. From [18] we also see easily that these spaces are never naturally reductive. Moreover we prove, that

13. PROPOSITION *The group of orthogonal automorphisms of the metric Lie-algebra $\mathfrak{n}_5(\lambda, \mu)$ is isomorphic to the group $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ for $\lambda \neq \mu$, and it is isomorphic to the group $O(2) \times \mathbb{Z}_2$ for $\lambda = \mu$.*

Finally we deal with 5-dimensional metric Lie-algebras with 3-dimensional center. In this case the metric Lie-algebra $\mathfrak{n}$ decomposes into the orthogonal direct sum $\mathfrak{n} = \mathfrak{h}_3 \oplus \mathfrak{b}$ of the metric Heisenberg subalgebra $\mathfrak{h}_3$ and of the abelian metric algebra $\mathfrak{b}$, where $\mathfrak{b}$ denotes the orthogonal component of $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ in the center $\mathfrak{z}$.
Let $\{e_1, e_2\}$ be an orthonormal basis for $\mathfrak{a}$ and $e_3 \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ a unit vector such that

$$[e_1, e_2] = -[e_2, e_1] = \lambda\, e_3 \tag{6}$$

with $\lambda > 0$. Moreover we denote by $\{e_4, e_5\}$ an orthonormal basis for $\mathfrak{b}$. The corresponding Lie-algebra will be denoted by $(\mathfrak{h}_3)(\lambda) \oplus \mathbb{R}^2$. Then we get:

14. PROPOSITION *For any 5-dimensional 2-step nilpotent metric Lie-algebra $\mathfrak{n}$ having a 3-dimensional center there exist a real number $\lambda > 0$ such that $\mathfrak{n}$ is isomorphic to the metric algebra $\mathfrak{h}_3(\lambda) \oplus \mathbb{R}^2$. The metric Heisenberg Lie-algebras $\mathfrak{h}_3(\lambda) \oplus \mathbb{R}^2$ and $\mathfrak{h}_3(\lambda') \oplus \mathbb{R}^2$ are isometrically isomorphic if and only if $\lambda = \lambda'$.*

15. PROPOSITION *The group of orthogonal automorphisms of the metric Lie-algebra $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}^2$ is isomorphic to the group $O(2) \times O(2)$.*

The 5-dimensional group spaces corresponding to the metric algebras $\mathfrak{h}_3(\lambda) \oplus \mathbb{R}^2$ are not modified H-type groups.

Using the one-to-one correspondence between simply connected two-step nilmanifolds and metric Lie-algebras we can summarize our results in the main theorem of the last section:

16. THEOREM *The simply connected two-step homogeneous nilmanifolds of dimension 5 are, up to isometry,*

$$\begin{aligned}
(H_5, \langle ., . \rangle_{\lambda,\mu}) &\;:\; \lambda \geq \mu > 0, \\
(N_5, \langle ., . \rangle_{\lambda,\mu}) &\;:\; \lambda \geq \mu > 0, \\
\left(H_3 \times \mathbb{R}^2, \langle ., . \rangle_{\lambda}\right) &\;:\; \lambda > 0.
\end{aligned}$$

Furthermore the full isometry groups of the corresponding nilmanifolds are expressed by:

$$
\begin{aligned}
I(H_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &= \begin{cases} (U(2) \times \mathbb{Z}_2) \ltimes H_5, & \text{if } \lambda = \mu, \\ (O(2) \times SO(2)) \ltimes H_5, & \text{if } \lambda \neq \mu, \end{cases} \\
I(N_5, \langle .,. \rangle_{\lambda,\mu}) &= \begin{cases} (O(2) \times \mathbb{Z}_2) \ltimes N_5, & \text{if } \lambda = \mu, \\ (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \ltimes N_5, & \text{if } \lambda \neq \mu, \end{cases} \\
I\left(H_3 \times \mathbb{R}^2, \langle .,. \rangle_{\lambda}\right) &= (O(2) \times O(2)) \ltimes \left(H_3 \times \mathbb{R}^2\right).
\end{aligned}
$$

Irodalomjegyzék

[1] W. AMBROSE, I. M. SINGER, *On homogeneous Riemannian manifolds*, Duke Math. J. 25 (1958), 647-669.

[2] J. BERNDT, F. TRICERRI and L. VANHECKE, *Generalized Heisenberg Groups and Damek-Ricci Harmonic Spaces*, Lecture Notes in Mathematics 1598, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1995).

[3] Z. DUSEK, O. KOWALSKI and S. Z. NIKCEVIC, *New examples of Riemannian g. o. nilmanifolds in dimension* 7, Diff. Geom. Appl. 21 (2004), 65-78.

[4] J. E. D'ATRI, W. ZILLER, *Naturally reductive metrics and Einstein metrics on compact Lie groups*. Mem. Amer. Math. Soc. 18, 215 (1979).

[5] L. DeMEYER *Closed geodesics in compact nilmanifolds*, manuscripta math. 105 (2001), 283-310.

[6] P. EBERLEIN, *Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.,4^e série, t. 27 (1994), 611-660.

[7] P. EBERLEIN, *Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric II*, Trans. Amer. Math. Soc. 343 (1994), 805-828.

[8] P. EBERLEIN, *Riemannian submersions and lattices in 2-step nilpotent Lie groups*, Comm. Analysis and Geom. 11 (2003), 441-488.

[9] C. S. GORDON, *Homogeneous Riemannian manifolds whose geodesics are orbits*, Topics in Geometry, in Memory of Joseph D'Atri, Birkhauser (1996), 155-174.

[10] R. GORNET, M. B. MAST, *The length spectrum of Riemannian two-step nilmanifolds*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.,4^e série, t. 33 (2000), 181-209.

[11] S. HOMOLYA, *Geodesic vectors of the six-dimensional spaces*, Steps in Differential Geometry, Proc. of the Coll. on Diff. Geom. Debrecen (2001), 139-146.

[12] S. HOMOLYA, O. KOWALSKI, *Simply connected two-step homogeneous nilmanifolds of dimension 5*, Note di Matematica, 26(1) (2006).

[13] S. HOMOLYA, P. T. NAGY, *Submersions on nilmanifolds and their geodesics*, Publ. Math. Debrecen, 62/3-4 (2003), 415-428.

[14] A. KAPLAN, *Riemannian nilmanifolds attached to Clifford modules*, Geometriae Dedicata 11 (1981), 127-136.

[15] A. KAPLAN, *On the geometry of groups of Heisenberg type*, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), 35-42.

[16] S. KOBAYASHI, K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry II.* Interscience Publishers, New York, 1980.

[17] O. KOWALSKI , *Spaces with volume-preserving symmetries and related classes of Riemannian manifolds*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Fascicolo Speciale Settembre (1983), 131-158.

[18] O. KOWALSKI and L. VANHECKE, *Classification of five-dimensional naturally reductive spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 97 (1985), 445-463.

[19] O. KOWALSKI and L. VANHECKE, *Riemannian manifolds with homogeneous geodesics*, Boll. Un. Math. Ital. B(7) 5 (1991), 189-224.

[20] J. LAURET, *Homogeneous nilmanifolds of dimension 3 and 4*, Geometriae Dedicata 68 (1997), 145-155.

[21] J. LAURET, *Modified H-type groups and symmetric-like Riemannian spaces*, Diff. Geom. Appl. 10 (1999), 121-143.

[22] K. LEE and K. PARK *Smoothly closed geodesics in 2-step nilmanifolds*, Indiana Univ. Math. J. 45 (1996), 1-14.

[23] L. MAGNIN, *Sur les algébres de Lie nilpotents de dimension* ≤ 7, J. Geom. Phys. 3/1 (1986), 119-144.

[24] M. MAST *Closed geodesics in 2-step nilmanifolds*, Indiana Univ. Math. J. 43 (1994), 885-911.

[25] Z. MUZSNAY and P. T. NAGY, *Invariant Shen connections and geodesic orbit spaces*, Periodica Math. Hung. 51(1) (2005), 37-51.

[26] P. T. NAGY, *Non-horizontal geodesics of a Riemannian submersion*, Acta Sci. Math. 45 (1983), 347-355.

[27] K. NOMIZU, *Invariant affine connections on homogeneous spaces,* Amer. J. Math. 76 (1954), 33-65.

[28] B. O'NEILL, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J. 13 (1966), 459-469.

[29] B. O'NEILL, *Submersions and geodesics*, Duke Math. J. 34 (1967), 363-373.

[30] J. SZENTHE, *A homogén terek elméletének egyes kérdéseiről*, Budapest (1976).

[31] J. SZENTHE, *Sur la connection naturelle a torsion nulle*, Acta Sci. Math. (Szeged) 38 (1976), 383-398.

[32] F. TRICERRI, L. VANHECKE, *Homogeneous structures on Riemannian manifolds*. London Math. Soc. Lecture Note Ser. 83 (1983), Cambridge University Press, Cambridge.

[33] E. WILSON, *Isometry groups on homogeneous nilmanifolds*, Geometriae Dedicata 12 (1982), 337-346

Publikációk

Referált kiadványokban megjelent dolgozatok

[1] S. HOMOLYA, *Geodesic vectors of the six-dimensional spaces*, Steps in Differential Geometry, Proc. of the Coll. on Diff. Geom. Debrecen (2001), 139-146.

[2] S. HOMOLYA, P. T. NAGY, *Submersions on nilmanifolds and their geodesics*, Publ. Math. Debrecen, **62/3-4** (2003), 415-428.

[3] S. HOMOLYA *Totally geodesic submanifolds of two-step nilmanifolds*, MicroCAD 2004 International Scientific Conference, vol. Section E, Miskolci Egyetem, Miskolc (2004), 41-45.

[4] S. HOMOLYA, O. KOWALSKI, *Simply connected two-step homogeneous nilmanifolds of dimension 5*, Note di Matematica, **26(1)** (2006), 66-77.

Előadások

[1] *Geodesic vectors of the six-dimensional spaces*, Colloquium on Differential Geometry, Debrecen, 2000, July 25-30.

[2] *Geodesics of two-step nilpotent Lie groups*, János Bolyai Conference on Hyperbolic Geometry, Budapest, 2002, July 8-12

[3] *Submersions on nilmanifolds and their geodesics*, 5^{th} Conference Geometry and Topology of Manifolds, Krynica-Zdrój, Poland, 2003, April 27-May 3.

[4] 5-*dimenziós Heisenberg-típusú nilsokaságok*, Doktoranduszok Fóruma, Miskolc, 2003. november.

[5] *Totally geodesic submanifolds of two-step nilmanifolds*, MicroCAD 2004 International Scientific Conference, Miskolc, 2004, March 18-19.

[6] *Simply connected two-step homogeneous nilmanifolds of dimension 5*, Conference on Differential Geometry and Physics, Budapest, 2005, August 29-September 2.