Szakdolgozat

Krakkó Ferenc

Debreceni Egyetem

2007

Debreceni Egyetem

Természettudományi Kar

Matematikai Intézet

Számelmélet a középiskolában

Témavezető:
Dr. Bérczes Attila
Egyetemi adjunktus
Algebra és Számelmélet Tanszék

Készítette:
Krakkó Ferenc
Informatika tanár – Matematika tanár

Debrecen

2007

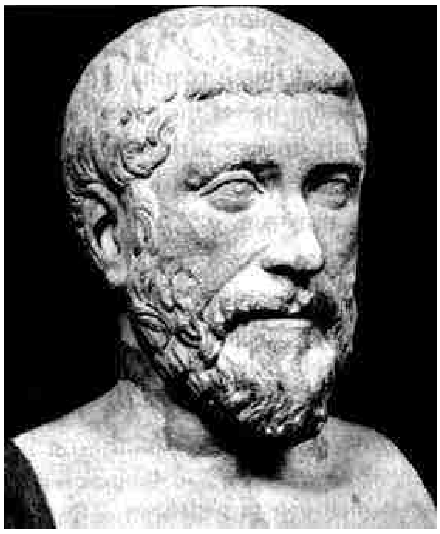
Tartalomjegyzék

Bevezetés ... 3
1. Matematika tantárgypedagógia ... 6
1.1. A matematikadidaktika fontosabb vizsgálati területei ... 6
1.2. A matematikatanítás cél-, feladat- és követelményrendszere ... 7
1.3. Fogalomalkotás, ismeretszerzés az iskolai matematikaórán ... 10
1.4. Motiváció a matematikaórákon ... 14
2. A számelméleti fogalmak előkészítése ... 19
2.1. Alsó tagozat ... 19
2.2. Felső tagozat ... 20
3. A középiskolában oktatott számelmélet ... 24
3.1. Osztó, oszthatóság, többszörös ... 24
A definícióból következő legfontosabb oszthatósági tulajdonságok: ... 25
Oszthatósági szabályok ... 27
3.2. Prímszámok ... 30
Tökéletes számok ... 34
3.3. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös ... 36
3.4. Euklideszi algoritmus ... 41
Euklideszi algoritmus ... 41
4. Kapcsolódási lehetőségek ... 44
4.1. *Halmazok, logika* ... 44
4.2. *Relációk, függvények* ... 44
4.3. *Mérés, geometria* ... 45
4.4. *Számtan, algebra* ... 45
4.5. *Kombinatorika* ... 45
5. Néhány érdekesebb számelméleti feladat ... 46
Összegzés ... 48
Irodalomjegyzék ... 49

„A matematika a tudományok királynője,
és a matematika királynője a számelmélet.”
C. F. Gauss

Bevezetés

Pitagorasz és tanítványai a világ örök igazságait a számok közötti törvényekben vélték felfedezni. Ezért kezdték el tanulmányozni a számokat, ezzel megalapítva a matematika egyik legszebb ágát. A legtöbb számelméleti probléma könnyen érthető, egy részük megoldásához csak néhány "szép" ötlet kell, míg más feladatok évezredek óta megoldatlanok.



Pitagorasz (Kr.e. 582 – 496). A pitagoreusok szerint az „egy” a számok eredete, amely részekre nem bontható, amelyet osztani nem lehet, csak szorozni. Így az egynél kisebb szám nincs. Az egynél nagyobb számok az egyből keletkeznek, annak megsokszorozásával.

A számelmélet a matematika egyik legrégebbi ága, mely elsősorban a természetes számok tulajdonságait vizsgálja. E tudományterület kibontakozása egészen a számmisztikáig vezethető vissza. Már az ókori matematikusok is, mint például Eukleidész, Erasztothenész foglalkoztak számelméleti problémákkal. A mai számelmélet lényegében a számokról és számolásról szerzett évszázados tapasztalatok tudományos eredménye. Bizonyos részei a matematika igen komoly fejezeteivé váltak, tudományos nyelvezetük a diákok számára nehéz. Más területei viszont a számokkal való játékok során szórakoztatóak és közérthetőek. Ennek következtében sok eleme az alapfokú oktatás anyagába beépíthető.

Az additív számelmélet egyik központi problémáját, például a Goldbach-sejtést, konkrét számok prímszámok összegeként történő előállításával a tanulók képesek megérteni.

Kiváló matematikusok így vélekednek a számelméletről:

Erdős Pál:

„A számelmélet azért is érdekes fejezete a matematikának, mert olyan problémákat fogalmaz meg, amit egy csecsemő is képes megérteni, de még a legnagyobb matematikus sem tud megoldani.”

G. H. Hardy:

„Az elemi számelmélet kevés előismeretre épül, módszerei egyszerűek, tárgya közismert és kézzelfogható. Alkalmas arra, hogy a természetes emberi kíváncsiságot ébresztgesse."

A fenti gondolatok megerősítik az elemi számelméleti ismeretek fontosságát. Szükséges és hasznos a témakör tanítása a 10-16 éves korosztály minden évfolyamán.

A számelmélettel való foglalkozás kiválóan alkalmas arra, hogy felkeltse a tanulók matematika iránti érdeklődését, bemutassa a matematika szépségeit, titkait, kutatásra ösztönözze a tehetséges tanulókat. A tanulók számára érthető és szellemi erőfeszítést igénylő feladatok megoldása során fejlődik a problémalátó és problémamegoldó képesség, számolási készség, kreativitás (problémaérzékenység, ötletgazdagság, eredetiség, rugalmasság).

A tanulók bizonyítási igényét fejleszthetjük, ha felismertetjük velük, hogy olyan állítások igazolására, mint „nem minden egész szám írható fel három négyzetszám összegeként" – elegendő egy ellenpéldát találni: például a 7 számra nem teljesül. Akárhány példa sem igazolja az olyan kijelentést, mint: „10-nek minden pozitív egész kitevős hatványa előállítható két négyzetszám összegeként".

Szakdolgozatom első fejezetében a *matematika tantárgypedagógiával* foglalkozom. Sajnos a hely szűke miatt nem tudok kitérni minden témakörre, ehelyett a számomra fontos, érdekesnek tartott részekről beszélek, melyekkel a tanítási gyakorlat során is találkoztam, s amelyek a számelmélet tanításakor is jelen vannak.

A második fejezetben a *számelméleti fogalmak előkészítésével* foglalkozom. Ebben a részben tárgyalom, milyen tudással érkeznek a tanulók a középiskolába, melyet a későbbiekben a tanárok megerősítenek, elmélyítenek.

A harmadik fejezetben a középiskolában oktatott számelmélet egy részéről írok. Főleg a törzsanyaggal foglalkozom, de néhol kitérek a szakkörökön, fakultációkon tanítható anyagrészre is, melyek felkelthetik a diákok érdeklődését a számelmélet iránt. Ebben a fejezetben az alábbiakkal foglalkozom: *oszthatóság*, *prímszámok*, *legnagyobb közös osztó*, *legkisebb közös többszörös, euklideszi algoritmus*.

A negyedik fejezetben azt vizsgálom, hogy a számelmélet a matematika más területeihez hogyan kapcsolódhat.

Az utolsó fejezetben néhány érdekesebb számelméleti feladatot sorolok fel.

Dolgozatomban elsősorban a tanítási, gyakorlati oldalt emelem ki, de nagy hangsúlyt fektetek az elméleti ismeretek bemutatására és a feladatokra is.

1. Matematika tantárgypedagógia

1.1. A matematikadidaktika fontosabb vizsgálati területei

a. A matematikatanítás céljai

   Célrendszerek, taxonómiák és kritikájuk. Operacionalizálás. Képzettségek, minősítések, ellenőrzés, értékelés.

b. A matematikai tartalmak és módszerek elemzése a matematika tanulásának és tanításának szempontjából

   A matematizálás és a „kész” matematika viszonya. Heurisztika, fogalomalkotás és definiálás. Axióma, definíció, tétel, bizonyítás, következtetési módszerek. Matematikatörténeti és matematikaalkalmazási vonatkozások

c. A munkaformák és eszközök kidolgozása, didaktikai tervezés

   A matematika tartalma és struktúrája. (Elementarizálási, civilizációs, tudományos világnézeti, képesség- és személyiségfejlesztési, fejlődéslélektani, hatékonysági, hasznossági szempontok összhangjában.)

d. A matematikatanulás, -tanítás folyamata

   i. A tanulói aktivitás, viselkedés. Tanulási nehézségek:

      - a matematikai információk átvétele és asszimilálása;
      - elemi matematikai begyakorlottságok (algoritmusok, logikai műveletek, szerkesztések, stb.);
      - a típusfeladatok helye, szerepe a folyamatban;
      - a matematikai anyag megfogalmazása, leírása, illusztrálása, kódolása;
      - a matematika nyelvi formáinak használata
      - ismeretrendezés, emlékezet, rögzítés
      - speciális alkotótevékenység (problémák észlelése, megfogalmazása, megoldása; új fogalmak konstruálása és definiálása; tételek megsejtése, megfogalmazása, bizonyítása stb.)

   ii. Ellenőrzés, értékelés a tanítási folyamatban

      - matematikai tesztek, vizsgák;
      - a tanulói előremenetel értékelése

iii. Dokumentumok, tankönyvek, programok, taneszközök. Szerepük a tanítási, tanulási folyamatban.
iv. A matematika tanulási-tanítási folyamat modellezésére vonatkozó vizsgálatok.

e. A felnőttképzés, posztgraduális képzés, felsőoktatás matematikadidaktikája. Speciálisan a matematikatanár-képzés didaktikája.

1.2. A matematikatanítás cél-, feladat- és követelményrendszere

Minden országban, minden társadalomban döntő kérdés, hogy mire nevel, mit tanít az iskola. Ebből az is következik, hogy az oktatás tartalmát, formáját, követelményeit, céljait a társadalom elvárásai határozzák meg, de ezeket még pedagógiai és pszichológiai szempontok is befolyásolják.

A nevelési oktatási tervek készítésénél azt is figyelembe kell venni, hogy az egyes tantárgyak milyen pszichés tulajdonságokat, milyen pszichológiai képességeket alakítanak ki, fejlesztenek. A tanárok bizonyos tantervi kínálatokból választhatnak, melyek számukra, az iskola és a tanulók számára a legmegfelelőbb, s ezeket adaptálhatják a helyi körülményekre. Azonban bármilyen társadalmi rendszerben, akármilyen követelményeknek megfelelően is tanítunk, ha ezt nem céltudatosan, célorientáltan végezzük, nagy valószínűséggel eredménytelen lesz a tanítás.

A matematikatanításban talán még a többi tárgynál is erősebben kell érvényesülni a céltudatosságnak. (Elég, ha a fogalmak közti szoros kapcsolatra, a fokozatosságra gondolunk.)

A tanítási-tanulási folyamat céljait három területre oszthatjuk:

- nevelési célok, célrendszerek
- oktatási célok, célrendszerek
- képzési célok, célrendszerek

Ezek szétválasztása kissé mesterkélt, hiszen minden oktatási cél megvalósítása egyben nevelési, képzési célokat is megvalósít és viszont. Tehát a három célrendszer együtt irányítja a pedagógiai folyamatot. Mégis, azért kezeljük őket külön, mert jobban rávilágíthatunk az egyes célok specifikumára.

Nevelési cél: a társadalmi beilleszkedéshez, tevékenységhez nélkülözhetetlen pszichés tulajdonságok kialakítása, fejlesztése. A nevelési célok megvalósíthatóságának területei:

- a tananyag tartalma (matematikai feladatok szövegezése, tételek bizonyítása, állítások logikai értéke stb.)
- a választott munkaforma, módszer, eszköz (a tanulók közös tevékenysége, vitakészség, manipulatív készség stb.)
- a tanár személyisége (pontosság, egyszerűség, következetesség stb.)

A nevelés tartalma szerint a matematikatanításban megkülönböztetünk:

- tudományos nevelést,
- világnézeti nevelést,
- erkölcsi nevelést,
- esztétikai nevelést;

a pszichikus tartományok szerint:

- értelmi tartományt,
- érzelmi-akarati tartományt,
- pszichomotoros tartományt.

Végül nézzük, hogy a nevelési-oktatási-képzési célok tervezésénél milyen szempontokat kell figyelembe venni:

1) Iskolatípus
   Más-más iskolatípusban változhat a tananyag tartalma, a feldolgozás sorrendje, módszere stb., így ennek megfelelően más és más lesz az elsajátítandó cél is, mások lesznek a nevelési feladatok is.
2) A tananyag elemzése az elért pszichés tulajdonságok szemszögéből
   Az adott tananyagrész tanításakor, ha több azonos tartalmú feladat van, akkor azt célszerű a tanórán feldolgozni, mellyel több célt tudunk megvalósítani. Például Pitagorasz tételét úgy is lehet tanítani, hogy kimondjuk a tételt, aztán bebizonyítjuk, vagy úgy is, hogy előtte hegyes-, derék- és tompaszögű háromszögekre megvizsgáltatjuk a tanulókkal az oldalak négyzete közötti összefüggést, majd ebből következtetéseket vonunk le. A első esetbe a diák valószínűleg passzív befogadó lesz, elfogadja a tanári magyarázatot. Második esetben a tanuló aktívan részt vesz a feladat megoldásában, sejtést fogalmaz meg, majd tanári segítséggel megoldja.

3) Kitekintés az egységet megelőző és követő célrendszerre

   Az ismeretek rendszere, egymásra-építettsége, az induló szint és a végeredmény az, amit szem előtt kell tartanunk.

4) A tananyag elemzése a témakörök fontossága szemszögéből

   Minden tanulóval megtanítani mindent nem lehet. A tanárnak okosan kell választani, figyelembe véve, hogy mik a továbbhaladás követelményei, milyen a tanulók irányultsága, milyen a tanulók képessége stb.

5) A tanulási tevékenység elemzése

   Meg kell nézni, hogy melyik tanulónak, milyen szinten szükséges és melyiknek nem a tárgyi tevékenység, melyik tanuló igényel segítséget, melyik nem stb.

6) Módszerek, munkaformák, eszközök

   Az iskola felszereltsége, a tanulók szintje, a tanárok felkészültsége megszabja, hogy melyik osztályban lehet és milyen szinten csoportmunkát alkalmazni, hol van lehetőség és szükség egyéni foglalkoztatásra, hol képes a tanuló önálló munkára és hol tud csak tanári segítséggel továbbhaladni.

7) Szociális háttér

   Azokkal a tanulókkal, akik rendezett környezettel, jó szülői háttérrel rendelkeznek, sokkal könnyebben és gyorsabban lehet eredményeket elérni, mint a hátrányos helyzetűekkel. A tanári munkát nagyban befolyásolja, hogy milyenek a tanulók otthoni körülményei. Azokkal a diákokkal, akik gyengébb szociális háttérrel rendelkeznek, többet kell foglalkozni, jobban rájuk kell figyelni.

A számelmélet alkalmas arra, hogy fejlesszük a tanulók problémalátó készségét, problémamegoldó gondolkodását.

A számelméleti problémamegoldó gondolkodásnak jelentős szerepe van az oktatásban, de a hétköznapi életben is. Gondoljunk csak arra, hogy a ma emberének naponta szembe kell néznie problémaszituációkkal, amelyek egy része számelméleti alapon oldható meg. Fontos, hogy a tanulókat az iskolában is a probléma meglátására és a problémamegoldó gondolkodásra tanítsuk, neveljük.

A számelméleti problémamegoldó gondolkodás fejlődése sok kérdést vethet fel a kutatók számára, amivel érdemes foglalkozni. Felvetődhet a kérdés, hogy mely képességek mennyire befolyásolják a problémamegoldó gondolkodás fejlődését, vannak-e külső befolyásoló tényezők.

A téma kutatásának nagy jelentősége van a gyakorlatban is, kiemelten az oktatásban, hiszen a pedagógusnak a legjobb eredmények elérése érdekében ismernie kell a tanulók képességeit, készségeit, és tudnia kell, hogy egy adott terület fejlesztéséhez melyik képességet kell fejleszteni, formálni. A kutatási eredmények összegzésével a kutatók jelentősen segítenék a tanárok munkáját.

1.3. Fogalomalkotás, ismeretszerzés az iskolai matematikaórán

A fogalom – jelentését leegyszerűsítve – gondolati absztrakció. R. R. Skemp szerint a fogalmaknak két csoportját különböztetjük meg.

Egyszerű fogalmak: azok a tapasztalatok vagy jelenségek adott csoportjának közös tulajdonságait tükröző gondolati absztrakciók, amelyek az ismételten előforduló érzékszervi, mozgásos tapasztalatok eredményeként közvetlenül kialakíthatók.

Fölérendelt vagy magasabbszintű fogalmak: azok az absztrakciók, melyek egyéb fogalmakból, azok kapcsolatainak feltárása révén alakíthatók ki.

A matematikában vezető szerepet játszik a definiálás művelete. Érdemes Skemp két hipotézisét idézni, melyekkel a definíciókat „helyükre” tudjuk rakni a matematikai fogalomalkotásban.

1. „Definíció segítségével senkinek nem közvetítünk az általa ismerteknél magasabb rendű fogalmakat, hanem csakis oly módon, hogy a meglevő példák sokaságát nyújtjuk.”
2. „Minthogy a matematikában az előbb említett példák majdnem mind különböző fogalmak, ezért mindenekelőtt meg kell győződnünk arról, hogy a tanuló már rendelkezik ezekkel a fogalmakkal.”

Ezt a két alapelvet könnyen beláthatjuk; elég arra gondolni, hogy a sorozatok konvergenciáját, vagy az algebrai struktúrák fogalmának definícióját a diákok egészen addig nem értik, míg egy-két frappáns példával rá nem világítunk a lényegére.

Mikor nevezünk egy példát „megfelelőnek”? Akkor, ha a fogalom minden lényeges jegyét tartalmazza, de lehetőleg legkevesebb olyan jegyet, ami nem sajátja a fogalomnak.

Ilyen példát lehetetlen találni, hiszen minden példában sok egyéb tulajdonság is megtalálható. Ezért akkor járunk el helyesen, ha több példát mutatunk be, és ezek mindegyikében megtalálhatóak a fogalomra jellemző jegyek, de a többi tulajdonság csak egy-egy különböző példában.

Így elérhetjük, hogy a lényeges jegyek „megerősödjenek", míg a lényegtelenek elhalványulnak. Ha nem tudjuk kiszűrni a lényegtelen jegyeket, akkor a fogalom „zajos" lesz. Ez azt jelenti, hogy olyan jegyet is a fogalom sajátjának tud be a diák, amire ez nem igaz. A fogalmak kialakításánál ajánlatos a következő utat követni:

1. A fogalom kialakításának kezdetén kevés zaj kívánatos
2. A fogalom kialakítása után, a vele való dolgozás során folyamatosan növelni kell a zajszintet, hiszen az a célunk, hogy a tanuló képes legyen a lényegest a lényegtelentől megkülönböztetni.

Az általános pszichológia a szellemi struktúrákat szkémáknak nevezi. A matematikatanításban szkémákon a matematika komplex fogalmi struktúráit, fogalomrendszerét értjük.

Skemp szerint egy szkémának két fő funkciója van: „integrálja a meglevő tudást és szellemi eszközként szolgál az új tudás elsajátításához."

Ez azt jelenti, hogy mikor egy fogalmat kialakítunk, rögtön be kell illeszteni a meglevő fogalmak rendszerébe, illetve a meglévőkkel tudunk kialakítani új fogalmakat. Például a természetes számokat használjuk fel az egészek, a törtek fogalmának kialakításához.

Az értelmes tanulás feltétele a megértés, amihez szükséges

- az asszimiláció vagy az
- akkomodáció megléte.

Piaget asszimiláción azt érti, hogy egy-egy új fogalom beépül a kialakult szkémába, anélkül, hogy azt módosítaná, akkomodáción pedig azt, hogy az új fogalom beilleszkedéséhez szükséges a meglevő szkéma módosulása. A matematikatanulásban – de általában a tanításban is – mindkettő előfordul.

A matematika, mint tudomány és a matematika felhasználása rendkívül gyorsan változik. Mindent nem lehet megtanítani. Helyette inkább segíteni kell a tanulóknak, hogy keressék és megtalálják az alapvető rendszereket; meg kell tanítani őket arra, hogy szkémáikat tudják akkomodálni, azaz legyenek képesek átalakítani a rendszereiket az új befogadása érdekében. Röviden ez annyit jelent, hogy meg kell tanítani tanulni a tanulókat.

A matematikai ismeret nem azonos a fogalommal, több ennél. Magába foglalja a fogalomrendszereket, a velük végzett műveleteket, a szabályokat, tételeket, ezek bizonyítását, az algoritmusokat is. Az ismeretek kialakításának fontos alapja a fogalomalkotás. Dr. Nagy Sándor szerint a jól kialakított ismeretek jellemzői a következők:

1. Tudományos

   A tudományosság viszonyítottan értendő. Például 5. osztályban a merőleges-rajzolás vonalzóval tudományos, de 7. osztályban már nem az. Olyan pontos ismereteket kell elsajátíttatnunk a tanulókkal, amilyenekre – fejlettségükből adódóan – képesek.
2. Rendszeres

   Érvényesül az egymásraépítettség, kialakul az ismeretek között a kapcsolatok sokasága. (Descartes-szorzat – relációk – függvények).
3. Nyitott

   Bármikor a vele kapcsolatban levő ismerettel bővíthető legyen (természetes számok – egészek – törtek – racionális számok).
4. Aktív

   Bármikor előhívható, felhasználható legyen (feladatmegoldások – tételek – bizonyítások).
5. Életszerűség

   Ne legyen a gyakorlati élettől elrugaszkodott, látsszon a társadalmi hasznossága (szöveges feladatok – algoritmusok – százalékszámítás).

A definíciónak az a szerepe, hogy segítségével egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy egy adott tárgy, dolog, objektum, fogalom beletartozik-e a definíció által meghatározott halmazba vagy sem. A definíciónak nagyon fontos szerepe van a matematikai ismeretszerzésben. A definícióknak több fajtáját ismerjük, ezeket dr. Vörös György a következőképpen rendszerezi:

- klasszikus tárgymeghatározás
- keletkezést, származást leíró meghatározás
- megnevező meghatározás
- hozzárendelő meghatározás
- a halmaz elemei közös tulajdonságával való meghatározás
- a halmaz elemeinek vagy összes részhalmazának megadásával való meghatározás
- rekurzív meghatározás

A helytelen fogalomalkotás leggyakoribb módja a hibás definíció adása. Ezek között van olyan, amelyik tartalmilag is hibás és van olyan, amelyik „csak” metodikailag. Mindkettőt el kell kerülni. Néhány definiálási hiba:

- olyan fogalommal határozunk meg egy másik fogalmat, amit még nem definiáltunk
- homályos meghatározás
- tagadó meghatározás
- körbenforgó meghatározás
- tág/szűk meghatározás

A matematikai ismeretelsajátítás korábbi tárgyalása azt sugallja, hogy a fogalomalkotás, a helyes ismeretszerzés átgondolt tervező munkát követel a pedagógustól. Ha az ott leírt alapelveket nem tartjuk – és nem tartatjuk – be, akkor gondolkodásfejlesztő munkánkba hiba csúszik. Ilyen hibák lehetnek dr. Vörös György csoportosítása szerint:

- készen nyújtott fogalmak
- nem teremt erős ismeretbázist
- kifogásolható kérdésfelvetés
- rutinfeladatok túlzott használata
- időzavar problémája
- nem differenciál
- magatartásbeli fogyatékosságok

A számelmélet tanítása során előforduló alapfogalmak közül ki kell emelni az oszthatóság, a prím- vagy törzsszám, az összetett szám fogalmának kialakítását. Fontos az, hogy a tanuló tisztában legyen az alapfogalmakkal, tudja a számelmélet alaptételét, meg tudja határozni kettő vagy több szám legnagyobb közös osztóját, legkisebb közös többszörösét, el tudja dönteni számokról, hogy azok relatív prímek vagy sem. Alapkövetelményként szerepel még az oszthatóság és az oszthatósági szabályok ismerete is.

A számelméleti fogalmak kialakítása során fontos, hogy többlépcsős absztrakciót alkalmazzunk, és a feladatok megválasztásánál szem előtt tartsuk a sokoldalú tapasztalatszerzést és a fokozatosság elvét. A fogalomrendszer akkor lesz tartós és alkalmazható, ha a tananyagot koncentrikusan építjük ki, és többször visszatérünk egy adott témakörhöz.

1.4. Motiváció a matematikaórákon

A motivációval kapcsolatban Pólya György írja, hogy a matematikatanárnak jó kereskedőnek kell lennie, el kell tudni adnia a portékáját a vevőnek, azaz a tanulónak.

Így van, a matematika óra is lehet érdekes, színes, hasznos, de még több is annál: „hozzászoktathatja szemünket, hogy lássa az igazságot tisztán és világosan" – ahogy Descartes olyan találóan mondta. Pontosan ezért fontos feladata a matematikát tanító tanároknak, hogy a tanulóknál kialakítsák, erősítsék, tudatosan és tervszerűen fejlesszék a motivációt.

A *motiváció* szó latin eredetű, jelentése: cselekvés ösztönzői, kiváltói, a *motívum* szó pedig indítóokot, erkölcsi indítékot jelent. A különböző szakkönyvek a motiváció szót más-más értelemben használják. Például a *didaktikában* a motiváció, mint alapelv szerepel. A *matematika tantervben* a metodikai jellegű fejlesztési feladatok egyike a motiváció. A legjobb motiváltság elve a matematikatanítás tudományos alapelvei között található.

A pszichológiában a motívumot, illetve a motivációt gyűjtőfogalomként értelmezik, amely „…minden belső, cselekvésre, viselkedésre késztető tényezőt magába foglal…".

A motiváció *pedagógiai pszichológiai* elméletének átfogó elemzésével Kozéki Béla munkáiban találkozhatunk. *Nézete szerint*: a motiváció, mint aktív tevékenység, folyamatában kialakuló, sajátos hierarchiában működő, tevékenységre késztető belső feszültség, amelynek lényeges szerepe van minden emberi tevékenységben. A tapasztalatok hatására fejlődik, formálódik, mindig aktivizáló jelenség. A külső hatások belsővé válásának energetikai alapja.

Az ember meghatározott célja elérésekor oldódó feszültségként éli át. A fejlődés és nevelés kölcsönhatásában sajátos formában realizálódik.

A *motívum* különböző viselkedésformák beindítására és fenntartására irányuló energia, amelyet valamilyen külső vagy belső hatás aktivizál. Az egyes hatások bizonyos motívumokat tesznek *dominánssá*.

A motiválás területei

- Affektív (érzelmi) terület: pozitív érzelmi viszony, azonosulás a tanárokhoz, társakhoz, szülőkhöz, vagy inkább hideg, elutasító, szembefordulásra késztető.
- Kognitív (értelmi ösztönzés, tapasztalatszerzés) terület: nyílt, aktivitásra, önálló ismeretszerzésre ösztönző, vagy zárt, korlátozó.

- Effektív (morális) terület: ezen a területen lehet erős, akaratra, felelősségvállalásra ösztönző, vagy gyenge önkontrollt nem fejlesztő, engedékenységgel, bizalmatlansággal a felelősségvállalás alóli kibújásra késztető.

Igényes, színvonalas tervezőmunkával a pedagógus megfelelő motiváló tanítási eljárást alakíthat ki, mely ösztönzően hat a tanulók belső indítékaira. A tanulás alapfeltétele egy megfelelő motivációs bázis biztosítása.

A matematika tanulása akkor sikeres, ha a tanulókban kialakul az érdeklődés, a problémák megoldásának, az ismeretek megszerzésének vágya, az erőfeszítésre való képesség.

A tanulók számára a legfontosabb motiváló tényező a tanítás megfelelő minősége, amiből az eredményes tanulás is következik. Nem elegendőek a tanítási órákon alkalmanként beiktatott motiváló mozzanatok, hanem folyamatosan a motivációk sokasága szükséges.

Réthy Endréné kutatásaiban a tanulási motiváció hatásösszefüggéseit vizsgálja. Kísérlettel igazolja, hogy a tanulási motiváció szituációkban történő tudatos fejlesztése pozitív hatást gyakorol a tanulók órai munkájára, érdeklődésére, kitartására a feladatmegoldásban és tanulmányi teljesítményére is. A gyakorló tanárnak motiváló tevékenységét vizsgálva szükségesnek tartja a tanulási motiváció hatékonyabb fejlesztését. Az általa kidolgozott tanítási modell ismérvei a következő:

A tanulási motivációt fokozó hatások

1. A tanuláshoz szükséges megfelelő előfeltételek:
   - a tanulók kedvező kedélyállapotának létrehozása,
   - a tanulási célok tisztázása,
   - problémahelyzet alkalmazása: a célkitűzésnél hasznos a különböző újdonságtartalmú problémaszituáció.
2. Az oktatási folyamat motiváló modelljeinek céloktól függő differenciált alkalmazása:
   - munkaformák helyes aránya.
3. A differenciálás és egyéni bánásmód érvényesítése.
4. A tanulók tanulási tevékenységének tudatos formálása:
   - a tanulás tanítása,
   - önképzési módok,
   - önellenőrzés, önállóság fejlesztése.

5. Megfelelő didaktikai anyagok és eszközök biztosítása az adagolt diszkrepancia elvének érvényesítésével:
   - differenciált nehézségű feladatok szükségessége,
   - a feladatok optimális újdonságtartalma.
6. Szociális, affektív és kognitív kapcsolat-összefüggések figyelembevétele:
   - az óra légköre,
   - bizalom erősítése,
   - túlzott követelmények és türelmetlenség elkerülése.
7. Normára irányított értékelés, ösztönzés:
   - az optimális értékelés nagyobb számban tartalmaz dicséretet, mint figyelmeztetést,
   - a bírálat konstruktív legyen, jelölje ki a javítás útját.

Az alapfokú matematikai ismeretek tanítását már egészen kicsi korban el kell kezdeni. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy az önálló gondolkodást, öntevékenységet, találékonyságot egyetlen tanuló fejébe sem lehet „beletölteni”.

Eredményt akkor remélhetünk, ha már a kezdeti lépéseket olyan problémákhoz kapcsolódva tesszük meg, amelyek gyermekközeliek, ugyanakkor szellemesek és érdekesek.

A matematika tanítása kitartó szellemi erőkifejtést igényel, amelynek alapfeltétele a megfelelő motiváció biztosítása. Ennek érdekében a matematikaoktatás folyamatában óráról órára célszerű olyan feladatokkal foglalkozni, amelyek magukban hordozzák a figyelem és érdeklődés felkeltésének lehetőségét

Azokat a tényezőket, amelyek emelik a matematikaoktatás hatékonyságát, kialakítják a tantárgyakhoz fűződő pozitív viszonyt és érdeklődést, motiváló tényezőknek nevezzük.

A matematika tanításának gyakorlati tapasztalatait és a motivációkutatások szakirodalmát felhasználva a matematikaórák motiváló tényezőit csoportosíthatjuk.

Motiválásra több területen lehetőség van. Ilyenek például, melyek:

1. A tananyag tartalmából adódnak:
   - a matematika anyagrészek megértetése, változatos megközelítése;
   - egymásra épülő feladatok megoldása;
   - gyermekközeli, gyakorlati élethez kapcsolódó példák;
   - többféle megoldás keresése, bemutatása

A számelméleti anyagrészek feldolgozásakor sokféle motivációra lehetőség van. Például:

Péter a következő trükkel szórakoztatja a barátait: „Add meg, milyen naptári évet írunk most! Add hozzá magasságod, majd csípőméreted cm-ben mért számjegyeit! A kapott összegnek vedd a 9-szeresét! Add össze a szorzat számjegyeit! Ha többjegyű számot kaptál, annak is add össze a számjegyeit stb. egészen addig, amíg egyjegyű számot kapsz! Ez az egyjegyű szám a 9. Mivel magyarázod ezt a trükköt?”

2. Az alkalmazott módszerek, eszközök, munkaformák motivációs lehetőségei:

- matematikai játékok;
- versenyfeladatok, versenytesztek, tudástesztek;
- esztétikus, színes, figyelemfelkeltő szemléltető eszközök;
- szokatlan, meglepő adatokat tartalmazó feladatok;
- logikai fejtörők;
- rövid, gondolkodtató feladatok;
- furfangos, megtévesztő feladatok;
- tréfás, szórakoztató problémák

3. Az értékelés, mint motiváló tényező:

- sok dicséret, bíztatás (szóban, írásban);
- jutalmazás ötössel, piros ponttal;
- sikerélmény biztosítása közel egyénre szabott feladatokkal;
- jutalomfeladat az órán, otthon stb.

4. A tanár személyiségtulajdonságai, mint motívumok:

- türelmes, megértő;
- nagy tárgyi tudású;
- következetesség, pedagógiai tapintat;
- módszertani, pedagógiai kulturáltság;
- derű, jókedv, humor stb.

Tanítási gyakorlaton (igaz, hogy általános iskolában) a számelmélet témakörével foglalkoztunk matematikaórán. Lehetőségem volt kipróbálni a különböző motivációs eszközöket, módszereket, azonban úgy vettem észre, hogy maga a tananyag milyensége az, ami a legjobban motiválta a diákokat. Maga a számelmélet olyan hatással volt a tanulókra, amire egy másik témakörnél nem, vagy csak kevéssé lett volna lehetőség. Mindig jelentkeztek, állandóan szerepelni szerettek volna. Érdekesnek találták a feladatokat, és nagy örömmel oldották meg a bonyolultabb, összetettebb szöveges feladatokat is. Látszott rajtuk, hogy élvezik a matematikaórát, és csalódottak voltak, ha egy-egy feladatot nem tudtunk befejezni az óra végéig. Ebből is látszik, hogy maga a számelmélet milyen nagy motiváló hatással van a diákokra

2. A számelméleti fogalmak előkészítése

2.1. Alsó tagozat

Már alsó tagozaton elkezdődik, és 5. osztályban tovább folytatódik a fogalomrendszer megalapozása (elemi szint). E szakasz jellemzői a játékosság, a manipuláció, a rajzos színes ábrákhoz kapcsolódó feladatok megoldása, a tapasztalatszerzés. A tanulók konkrét számok esetében végeznek megfigyeléseket, és az összefüggéseket megfogalmazzák a matematika nyelvén. Tekintsük át a tananyagot néhány jellegzetes példa segítségével:

- Egyjegyű osztóval osztanak. Kétféle osztást különböztetünk meg: részekre osztás, bennfoglaló osztás.

- Bennfoglaló osztáshoz kapcsoljuk a maradékos osztást. Például:

Lacinak 300 Ft zsebpénze van. Hány gombóc fagylaltot vásárolhat, ha 1 gombóc 90 Ft-ba kerül?

osztó maradék

Megoldás: 300 : 90 = 3
30
maradék

Ellenőrzés: 300 = 90 · 3 + 30
osztandó hányados

Szemléleti szinten közelítjük meg a maradékos osztást. Tisztázzuk, hogy a maradékos osztást úgy ellenőrizzük, hogy az osztandó és az osztó szorzatához hozzáadjuk a maradékot. A komponensek elnevezései váljanak tudatossá.

- Az osztója, a többszöröse relációkat a maradékos osztás segítségével ismerik meg. Például:

A 24 osztható 3-mal, mert 24 : 3 = 8 + 0. A hányados egész szám és a maradék 0. Úgy is mondhatjuk, hogy a 24 többszöröse a 3-nak.

- Az osztó fogalmával már az osztás komponenseként megismerkedtek, de az oszthatósághoz kapcsolva újabb értelmezésével találkoznak. Például:

A 30 osztói azok a számok, amelyekkel a 30 osztható. A 30 összes osztói: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

- Két vagy három szám közös osztóit, közös többszöröseit halmazba rendezéssel állapítjuk meg. Például:

A: 3-mal oszthatók, **B**: 5-tel oszthatók. A két halmaz közös részébe kerülnek a 15-tel osztható számok.

Látható tehát, hogy alsó tagozaton a gyerekek főleg az oszthatósági alapfogalmakkal ismerkednek. Már 2. osztályban megkezdődik az oszthatóság előkészítése különböző feladatokon keresztül, az alapműveletek segítségével - ezek főként játékos, figyelemfelkeltő formában történnek -. A 3. osztályban aztán megismerkednek az oszthatósággal, az osztó, többszörös fogalmával, és előkerülnek a prímszámok is; ezeket aztán a 4 osztályban tovább mélyítik. Megfigyelik az oszthatósággal kapcsolatos tulajdonságokat, különböző oszthatósági szabályokat, prímszámokat keresnek próbálgatással. Láthatjuk, hogy ezen időszak még a próbálgatás jegyében telik, azonban ennek az a célja, hogy maguktól jöjjenek rá az összefüggésekre, szabályokra. Az alsó tagozat végére általában minden gyerek képes kétjegyű számokról megállapitani, hogy mely számokkal oszthatók. Az ügyesebbek pedig fel tudják ismerni, és tudják alkalmazni az oszthatósági szabályokat, észreveszik a közöttük levő kapcsolatokat.

A gyerekek talán alsó tagozaton szerethetik meg a legkönnyebben a matematikát, hiszen ebben a korban még nagy az érdeklődés, minden diák fogékony az új, ismeretlen dolgok iránt. A matematikának pedig éppen a számelmélet része az, amellyel a legkönnyebben lehet megfogni a gyerekeket. A számelméletnek ezt a részét nagyon könnyen lehet játékos formában tanítani, és a 7-10 éves korosztálynak a játék még elengedhetetlen a fejlődéshez.

2.2. Felső tagozat

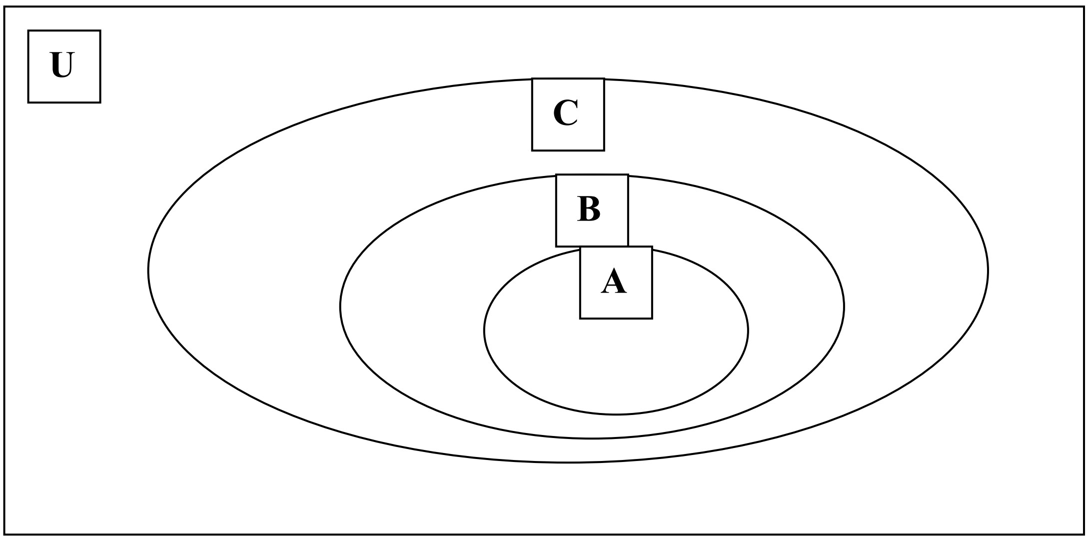
Az 5. osztályban – dr. Hajdú Sándor szerkesztésében megjelenő tankönyvcsalád szerint – rendszerezzük az alsó tagozatos ismereteket, megerősítjük a fogalmakat, helyenként bővítjük a tananyagot, és a korábban tanultakat összetettebb problémaszituációkban alkalmazzuk. A számelméleti anyagrésszel nem foglalkozunk önálló fejezetként. A természetes számokhoz kapcsolódó témakörbe beépülnek az oszthatóságról szerzett alapismeretek. Ez összegezve a következőket jelenti:

- Megtanulnak osztani két-, illetve háromjegyű osztóval. Ez igen lényeges, mert ez az ismeret az oszthatósági problémák elemzéséhez nélkülözhetetlen.

- 10-zel, 100-zal, 1000-rel osztható számokat gyűjtenek, összefüggéseket keresnek, fogalmaznak meg. Például:

a) A $\boxed{0}$, $\boxed{0}$, $\boxed{0}$, $\boxed{2}$, $\boxed{9}$, $\boxed{5}$ számkártyák mindegyikének felhasználásával rakj ki olyan hatjegyű számokat, amelyekre teljesül:
   - osztható 10-zel;
   - osztható 100-zal;
   - osztható 10-zel, de nem osztható 100-zal;
   - osztható 100-zal, de nem osztható 10-zel;
   - nem osztható 10-zel.

b) A kirakott számokat írd be a halmazábra megfelelő részébe!



A halmazok címkéi a következőket jelentik:

C: 10-zel osztható számok (vagyis 10 többszöröseinek) halmaza,

B: 100-zal osztható számok (vagyis 100 többszöröseinek) halmaza,

A: 1000-rel osztható számok (vagyis 1000 többszöröseinek) halmaza.

c) A halmazábrába elhelyezett számokhoz kapcsolódva fogalmazz meg igaz, hamis állításokat.

A feladatok egymásra épülve az oszthatósági szabályok tanítását készítik elő. Többoldalú belső koncentrációra adnak lehetőséget. Kombinatorikai ismeretekhez kapcsolható a feladat *a)* része (ismétléses permutáció). A *b)* feladat megoldásával értelmezhetjük a részhalmaz fogalmát. A *logikai ismereteket mélyíti* a *c) rész. Ezek a feladatok a differenciálásra is alkalmasak, hisz a gyengébb tanulók is képesek kirakni néhány számot.*

- Vizsgálják a 0-val való osztást, a 0 osztását. Az osztás ellenőrzésével jutnak a szabály megállapításához.
  Példák kapcsán adnak magyarázatot az osztás elvégezhetőségére, illetve értelmetlenségére: $3 \cdot 0 = ?$; $0 : 3 = ?$; $0 : 0 = ?$
  Tisztázzák az 1 és a szám szerepét (az elméleti részben összefoglaltak szerint). Az osztás művelet segít az „osztója" reláció fogalmának kialakításában, de később ettől elszakadunk, és megadjuk a pontos értelmezést. Ilyen módon $0 : 0$ valóban nincs értelmezve (mint művelet), de a $0 \mid 0$ reláció már igen. Tehát különbséget teszünk az osztás, mint művelet, és az osztója, mint reláció között.

- Adott számok kéttényezős szorzatalakjaiból meghatározzák az összes osztót (osztópárok). Például:

A 60 esetében: $60 = 1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12 = 6 \cdot 10$

A 60 összes osztója a természetes számok közül: 1, 60, 2, 30, 3, 20, 4, 15, 5, 12, 6, 10

- Számegyenesen, két szám többszöröseinek színezésével, közös többszörösöket keresnek.

- Folyamatábra utasításai szerint, és halmazba rendezéssel meghatározzák két - három szám közös osztóit.

A diákok felső tagozaton rendszerezik addig szerzett ismereteiket, ezekbe építik be az újakat, átismételve ezzel a régieket. Általában a spiralitás elvét szokták alkalmazni, azaz vissza-visszatérnek a régi anyagrészhez, így mélyítve a tudást. Az 5-8 osztályban megtanulják az oszthatósági szabályokat, és ezeket egyszerűbb, majd később bonyolultabb feladatokban alkalmazzák. Halmazábrák segítségével vizsgálják az oszthatóságot. Megismerkednek a prímtényezős felbontással, és a számelmélet alaptételével is. Megkeresik egy szám összes osztóját, és a matematikára fogékonyak megtanulhatják, hogyan lehet meghatározni a prímtényezős felbontásból az osztók számát (ezeket az ismereteket olyan osztályban érdemes tanítani, ahol a tananyag elsajátítása gyorsabban megy, ahol a diákok nagy része jobb képességű). Előkerülnek a közös osztó, közös többszörös fogalmak is. A „létra" módszer segítségével megismerik a legnagyobb közös osztó fogalmát – ehhez kapcsolódóan a relatív prímeket -, és a legkisebb közös többszöröst. Az erősebb osztályokban a kettes számrendszerrel is lehet foglalkozni. Később a már felismert oszthatósági szabályokból analógiák alapján új oszthatósági szabályokat alkothatnak, bár ezek még csak sejtések. Az érdeklődők számára a számelmélet történetéről is lehet beszélni, gyakorolva a hallott szövegből való jegyzetelést.

A felső tagozat végére a legtöbb diák már tisztában van a számelméleti alapfogalmakkal, és azokat alkalmazni is tudja a különböző nehézségű feladatokban.

3. A középiskolában oktatott számelmélet

Közvetlenül a számelmélet elemeivel középiskolában a diákok kilencedik osztályban találkoznak, s ezek után törzsanyagként nem is szerepel a későbbiekben, esetleg szakkörön, fakultáción foglalkoznak vele. A számelmélet elemei csak összetett feladatokban fordulnak elő a továbbiakban, melyekkel sokkal könnyebben meg lehet oldani bizonyos feladatokat. A számelmélet, melyet a középiskolában tanítanak, nem sokban tér el az általános iskolában tanultaktól, főleg ismétlés, illetve egy-két helyen kibővítik az addigi ismereteket. Nézzük, melyek azok a számelméleti fogalmak, amivel a diákok a középiskolai tanórán foglalkoznak.

3.1. Osztó, oszthatóság, többszörös

Az osztó, oszthatóság, többszörös fogalma alapvető fontosságú a számelméletben. Ezeket a fogalmakat, a belőlük adódó állításokat értelmezhetjük a természetes számok körében, éppúgy, mint az egész számok között. Tapasztalataim szerint a legtöbb tankönyv a természetes számokat veszi alapul.

Nézzük a következő osztásokat:

a. $18 : 3 = 6$ mert $18 = 3 \cdot 6$

vagy $24 : 4 = 7$ mert $24 = 4 \cdot 6$

b. $18 : 7$ eredménye nem egész szám, mert $7 \cdot 2 = 14$, $7 \cdot 3 = 21$ és $14 < 18 < 21$. Ha az előzőek mintájára egyenlőséget akarunk felírni, a $18 = 7 \cdot 2 + 4$ lehet.

A matematikában szokásos kifejezéssel azt mondjuk, 3 **osztója** 18-nak (vagy 18 **osztható** 3-mal), 4 osztója 24-nek (vagy 24 *osztható* 4-gyel); 7 nem *osztója* 18-nak (18 nem osztható 7-tel).

Definíció: Az a, b természetes számok esetén az a számot a b osztójának nevezzük, ha találunk olyan q természetes számot, hogy fennáll az $aq = b$ egyenlőség. Ekkor azt mondjuk: „*b osztható a-val*”. Ennek rövid jelölése $a \mid b$. (Úgy olvassuk, hogy „*a osztója b-nek*” vagy „*b osztható a-val*”.)

Definíció: Jelöljön *a* és *b* két 0-nál nagyobb természetes számot. A *b* szám az *a* szám **többszöröse**, ha van olyan *c* természetes szám, amellyel megszorozva *a*-t a *b* számot kapjuk: $b = ac$.

Példák:

3 | 18, mert van olyan természetes szám (ez a szám a 6), hogy $18 = 3 \cdot 6$;

7 | 0, mert van olyan természetes szám (ez a szám a 0), hogy $0 = 7 \cdot 0$;

0 | 0, mert van olyan természetes szám (ez a szám lehet pl. a 9), hogy $0 = 0 \cdot 9$.

A „nem osztójá”-t, vagy a „nem osztható”-t az oszthatósági jel áthúzásával jelöljük. Például: $7 \nmid 18$, mert nincs olyan természetes szám, amellyel a 7-et szorozva 18-at kapnánk.

A definíció alapján természetes, hogy a pozitív számok körében a | b esetén $a \leq b$.

Megjegyzések:

1. Vigyáznunk kell: az **osztást** és az **oszthatóságot** nem szabad összetévesztenünk. Lényeges különbség van a kettő között. 0 : 0 nincs értelmezve. A 0 | 0 értelmezve van, ez megfelel az oszthatóság definíciójának. A 0-nak minden természetes szám osztója.
2. Az osztó és az oszthatóság definícióját nem csak a természetes számok körében, azaz nem csak az előző módon lehet megfogalmazni. Megtehetnénk, hogy ezeket a fogalmakat az egész számokra kiterjesztve definiáljuk.

Az oszthatóságot definiálhatjuk az alábbi módon is:

Az *a, b egész számok* esetén az *a* számot a *b* szám osztójának nevezzük, ha találunk olyan *q* egész számot, hogy azzal fennáll az $aq = b$ egyenlőség.

Szakdolgozatomban a természetes számok körében definiált oszthatóságot tartom szem előtt, erre gondolva fogalmazom meg a tételeket, feladatokat.

A definícióból következő legfontosabb oszthatósági tulajdonságok:

1. a | a, azaz bármely természetes szám osztható önmagával.

Ugyanis 1 természetes szám, és $a \cdot 1 = a$. Így 7 | 7, 51 | 51, 0 | 0.

2. Ha a | b és b | c, akkor a | c.

A definícióból következik, ha a | b, akkor van olyan q természetes szám, mellyel $b = aq$, ezért fennáll: aq | c. Ez azt jelenti, hogy van olyan q' természetes szám, melyre $c = aqq'$. A qq' természetes szám, ezért valóban a | c.

Például: a 7 | 91 és 91 | 819-ből már következik (azonnal fel lehet írni): 7 | 819.

3. Ha a | b és a | c, akkor a | b + c, azaz ha egy szám külön-külön osztója két számnak, akkor az összegüknek is osztója. (Ha $c > b$, akkor $c - b$ különbségének is osztója az a.)

Ez is közvetlen következménye a definíciónak, hiszen ha a | b, akkor $b = aq$ ($q \in \mathbf{N}$), és ha a | c, akkor $c = aq'$ ($q' \in \mathbf{N}$). Összegük: $b + c = aq = aq' = a(q + q')$. Mivel $q + q' \in \mathbf{N}$, ezért a | b + c.

Például: 13 | 143 és 13 | 403-ból következik 13 | 143 + 403, 13 | 403 – 143, azaz 13 | 546, 13 | 260.

4. Ha a | b + c és a | b, akkor a | c, azaz, ha egy szám osztója egy kéttagú összegnek és osztója az egyik tagjának, akkor a másik tagjának is osztója.

Az értelmezésből következik, ha a | b + c, akkor $b + c = aq$ ($q \in \mathbf{N}$), és a | b miatt $b = aq'$ ($q' \in \mathbf{N}$). A két egyenlőség különbsége $c = a(q - q')$. Mivel $q - q' \in \mathbf{N}$, (hiszen $q \geq q'$), valóban igaz, hogy a | c.

Például: 17 | 3417; 3417 = 204 + 3213 és 17 | 204-ből következik 17 | 3213.

5. Ha a | b, akkor a | bd, azaz ha egy a szám egy b számnak osztója, akkor a b szám többszörösének is osztója. Ez általánosabban: ha a | b és c | d, akkor ac | bd.

Ugyanis, ha a | b, akkor b | aq ($q \in \mathbf{N}$), és ha c | d, akkor d = cq' ($q' \in \mathbf{N}$). Szorzatuk $bd = acqq'$. Mivel $qq' \in \mathbf{N}$, valóban ac | bd.

Például: 17 | 51 és 11 | 99-ből következik 17 · 11 | 51 · 99, azaz 187 | 5049.

6. Ha a | 1, akkor a = 1.

A definíció alapján $aq = 1$ ($q \in \mathbf{N}$). Azt is tudjuk, hogy $a \leq 1$, emiatt csak $a = 1$ állhat fenn.

7. Ha a | b és b | a, akkor $a = b$.

Az osztó fogalmából következik, hogy most $a \leq b$ és $b \leq a$. Ez csak úgy lehet, hogy $a = b$.

Az 1-nek egyetlen osztója van (ez az 1), minden más számnak legalább két osztója van. Mivel 1 és önmaga (azaz két szám) az 1-en kívüli bármely természetes számnak osztója, ezért az ezeken kívüli osztók keresése lehet további kérdés.

Egy szám 1-en és önmagán kívüli osztóit a szám **valódi osztóinak** nevezzük, 1 és a az a számnak **nemvalódi osztói**.

Oszthatósági szabályok

Az oszthatósági szabályokkal már általános iskolában találkoztak a diákok, középiskolában azonban újra átismételik azokat, de csak felületesen. Bizonyos esetekben nagyon hasznos, ha egy számról gyorsan, kevés számolással el tudjuk dönteni, hogy osztható-e egy másik számmal vagy sem. Mégis sokszor gondot okoz a diákoknak az oszthatóság kérdése, mert nem veszik komolyan ezt az anyagrészt. A fakultációkon, szakkörökön már többet foglalkoznak ezekkel a szabályokkal, sőt feladatokat is oldanak meg.

1. Oszthatóság 10-zel, 2-vel, 5-tel

   Egy szám pontosan akkor osztható 10-zel, ha az utolsó számjegye 0; 2-vel, ha az utolsó számjegye osztható 2-vel, vagyis az utolsó számjegye 0, 2, 4, 6, 8; 5-tel, ha az utolsó számjegye osztható 5-tel, vagyis ha az utolsó jegye 0 vagy 5.

Magyarázat: Írjuk fel a számot 10 többszöröse és az egyesek összegeként! A 23796-ot például így írjuk: $2379 \cdot 10 + 6$. Mivel 10 többszörösei oszthatók 2-vel, 5-tel, 10-zel, ezért csak az egyesektől (vagyis az utolsó jegytől) függ, hogy maga a szám osztható-e 2-vel, 5-tel vagy 10-zel.

Általában, egy a alapú számrendszerben felírt szám akkor és csak akkor osztható az a alapszámmal, illetve annak osztóival, ha az a szám utolsó számjegye osztható vele.

2. Oszthatóság 100-zal, 4-gyel, 25-tel

   Egy szám pontosan akkor osztható 100-zal, ha az utolsó két számjegye 0; 4-gyel, ha az utolsó két számjegyéből alkotott szám osztható 4-gyel; 25-tel, ha az utolsó két számjegyéből alkotott szám osztható 25-tel, azaz 00-ra, 25-re, 50-re vagy 75-re végződik

Magyarázat: Írjuk föl a számot 100 többszöröse és egy kétjegyű szám összegeként! A 23796-ot például így írjuk: $237 \cdot 100 + 96$. Mivel 100 többszörösei oszthatók 4-gyel, 25-tel, 100-zal, csak az utolsó két számjegy által meghatározott számtól függ, hogy maga a szám osztható-e 4-gyel, 25-tel vagy 100-zal.

Általában, egy *a* alapú számrendszerben felírt szám akkor és csak akkor osztható az *a* alapszám négyzetével és annak osztóival, ha az *a* szám utolsó két jegyéből alkotott kétjegyű szám osztható vele.

3. Oszthatóság 1000-rel, 8-cal, 125-tel

   Egy szám pontosan akkor osztható 1000-rel, ha az utolsó három számjegye 0; 8-cal, ha az utolsó három számjegyéből alkotott szám osztható 8-cal; 125-tel, ha az utolsó három számjegyéből alkotott szám osztható 125-tel.

Magyarázat: Írjuk fel a számot 1000 többszöröse és egy háromjegyű szám összegeként! Mivel 1000 többszörösei oszthatók 8-cal, 125-tel, 1000-rel, csak az utolsó három számjegy által meghatározott számtól függ, hogy maga a szám, osztható-e 8-cal, 125-tel vagy 1000-rel.

Általában, egy *a* alapú számrendszerben felírt szám akkor és csak akkor osztható az *a* alapszám köbével, illetve annak osztóival, ha az *a* szám utolsó három számjegyéből álló háromjegyű szám osztható vele.

4. Oszthatóság 3-mal, 9-cel

   Egy szám pontosan akkor osztható 3-mal, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal. Az is igaz, hogy a számjegyek összegének a 3-mal való osztási maradéka megadja a szám 3-mal való osztási maradékát.

Ugyanígy:

   Egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha a számjegyeinek összege osztható 9-cel; és a számjegyek összegének a 9-cel való osztási maradéka megadja a szám 9-cel való osztási maradékát.

Magyarázat: Azt akarjuk belátni, hogy egy szám és a számjegyeinek az összege ugyanannyi maradékot ad 3-mal osztva. Ez pedig azt jelenti, hogy ha a számból kivonjuk a számjegyeinek az összegét, akkor 3-mal osztható számot kapunk. Ez igaz, mert például a négyjegyű számokat nézve:

$1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d - (a + b + c + d) = 999 \cdot a + 99 \cdot b + 9 \cdot c.$

Ez pedig osztható 3-mal.

Így igazolható a 9-cel való oszthatósági feltétel is, hiszen a kapott szám 9-cel is osztható, ami azt jelenti, hogy ha egy számból kivonjuk a számjegyeinek az összegét, akkor 9-cel osztható számot kapunk. Tehát maga a szám és a számjegyeinek az összege 9-cel osztva ugyanannyi maradékot ad.

Általában, egy *a* alapú számrendszerben felírt szám akkor és csak akkor osztható (a - 1)-gyel, illetve az (a - 1) szám osztóival, ha a számjegyek összege osztható vele. A számjegyek összegének az $a – 1$ osztóival való osztás maradéka megegyezik magának a számnak az osztási maradékával.

5. Oszthatóság 11-gyel

   Egy szám pontosan akkor osztható 11-gyel, ha a páros helyeken álló számjegyeinek az összege ugyanannyi maradékot ad 11-gyel osztva, mint a páratlan helyeken álló számjegyeinek összege.

Magyarázat: A 10 páros kitevőjű hatványai 1-gyel nagyobbak, mint egy 11-gyel osztható szám; páratlan kitevőjű hatványai pedig 1-gyel kisebbek, mint egy 11-gyel osztható szám.

Az is igaz, hogy a számjegyek váltakozó előjellel vett összegének 11-gyel való osztási maradéka megegyezik a szám 11-gyel való osztási maradékával.

Általában, *a* alapú számrendszerben hasonló feltétel adható az $a + 1$-gyel való oszthatóságra.

Oszthatósági feladatok megoldásakor gyakran hasznát vesszük a következő segédleteknek:

- Legyenek a, b, $n \in \mathbf{N}^+$! Ekkor $a^n – b^n$ mindig osztható $a – b$-vel
  (*Például*: $13 \mid 37^8 – 24^8$.)
- Ha n páros szám, akkor $a^n – b^n$ osztható $a + b$-vel is. (*Például*: $61 \mid 37^{20} – 24^{20}$.)
- Ha n páratlan, akkor $a^n + b^n$ osztható $a + b$-vel. (*Például*: $37^{11} + 24^{11}$ osztható 61-gyel.)

Később a diákoknak meg lehet mutatni, hogy ők is tudnak oszthatósági szabályokat gyártani; az ehhez szükséges fogalmakat a prímszámok tanítása során veszik át.

3.2. Prímszámok

Mielőtt tovább haladnánk az oszthatóság témakörében, ismertetni kell a prímszám fogalmát, valamint néhány vele kapcsolatos szabályt, tulajdonságot. A számelméletben nagyon fontos szerepe van a prímszámoknak. A legfontosabb és legérdekesebb kérdések a prímszámokkal kapcsolatban merülnek fel. Ezeknek a kérdéseknek a megválaszolása nagyon jól fejleszti a tanulók problémamegoldó és gondolkodási készségét is. Gondoljunk csak a prímek becslésére, a *Fermat-sejtésre*, a páros és páratlan *Goldbach-sejtésre*, a *Fermat* és *Mersenne* számok problémájára. Igaz, ezekkel főleg szakkörön, fakultáción találkozhatnak a diákok, de van néhány egyszerűbb probléma, amit akár órán is be lehet mutatni.

A prímszám fogalmára több, egymással ekvivalens definíció adható meg. Általános iskolában általában egy definíciót tanulnak a diákok, középiskolában azonban már be lehet mutatni, hogy létezik más megfogalmazás is, ezek között azonban nincs lényegi eltérés.

Azokat a természetes számokat, melyeknek *pontosan két osztójuk van*, **prímszámoknak** vagy **törzsszámoknak** nevezzük.
Az első néhány prímszám: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; …

Azokat az *1-nél nagyobb természetes számokat, amelyeknek kettőnél több osztójuk van*, **összetett számoknak** nevezzük. Ilyenek például: 4 (osztói: 1; 2; 4); 6 (osztói: 1; 2; 3; 6); 8 (osztói: 1; 2; 4; 8) stb.

A 0 minden pozitív egész számmal osztható, vagyis a 0 minden természetes számnak többszöröse. A *0 csak a 0-nak osztója, mert minden k természetes számra* $k \cdot 0 = 0$ teljesül. A *0-t nem tekintjük sem prímszámnak, sem összetett számnak*. Az 1-nek csak egy osztója van a természetes számok körében, saját maga. *Az 1 sem nem prímszám, sem nem összetett szám.*

A számelmélet alaptétele: Bármely összetett szám, a tényezők sorrendjétől eltekintve, egyértelműen felírható prímszámok szorzataként.

Kis számok prímtényezős felbontásának praktikus megkeresése ismert.

Például:

3780	2
1890	2
945	3
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$$

Ez elég könnyen megy a diákoknak, a szakkörökön is szeretik alkalmazni, nagy számok esetén is gyors. A prímtényezős felbontás az egyik alkalmazási területe az oszthatósági szabályoknak. Aki nem ismeri a szabályokat, azok lassan tudják felírni a felbontást.

A prímtényezős felbontása elég sok kérdést felvethet. Például: egy számnak hány osztója van? Hogyan lehet ezt a legkönnyebben kiszámolni, esetleg az osztókat felsorolni?

Vizsgáljuk meg, hogy egy számnak – például 600-nak – hány darab osztója van! Az osztók számának meghatározásában a prímtényezős felbontás segíthet: $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ Természetes, hogy 600 osztóinak prímtényezős felbontásában nem lehet más prímszám, mint a 2; 3; 5. A 600 osztói között van olyan, amelyben mindhárom prímszám szerepel, van olyan, amelyben a három közül csak kettő, van olyan is, amelyben a három prímtényező közül csak egy, és természetesen 600-nak osztója az 1 is. Azt mondhatjuk: az osztókat háromtényezős szorzatként írhatjuk fel. Egy-egy tényező lehet a 2, a 3 vagy az 5 pozitív egész kitevőjű hatványa (a megfelelő kitevőig), vagy az 1. Írjuk fel ezeket áttekinthető módon:

1	1	1
2^1	3^1	5^1
2^2		5^2
2^3		

Ha ebből a három oszlopból valamilyen módon kiválasztottunk egy-egy számot és azokat összeszorozzuk, akkor ez a szorzat a 600-nak osztója lesz. Másfajta kiválasztás más osztót ad.

Ajánlatos olyan eljárást keresnünk, amellyel minden lehetséges kiválasztást rendre megkapunk. *Hány ilyen kiválasztás lehetséges?*

Az első oszlopból a négy szám bármelyikét választhatjuk. Ez négy lehetőség.

A kiválasztottakhoz a második oszlop két száma közül bármelyiket választhatjuk. Ez az előző lehetőségek számát kétszerezi. A harmadik oszlopból a három szám bármelyikét vehetjük harmadik tényezőnek. Ez a 4 · 2 lehetőséget háromszorozza. Ezért a kiválasztás lehetőségeinek száma 4 · 2 · 3.

Emiatt a 600 összes osztóinak a száma: 4 · 2 · 3 = 24.

Ezek: 1, 5, 25, 3, 15, 75; 2, 10, 50, 6, 30, 150; 4, 20, 100, 12, 60, 300; 8, 40, 200, 24; 120, 600.

Az előző 4 · 2 · 3 szorzat tényezői a 600 prímtényezős felbontásában szereplő prímszámok hatványkitevőinél 1-gyel nagyobb számok.

Ugyanilyen gondolatmenettel bármely *a* szám osztóinak a számát megkapjuk, ha felírjuk az *a* szám prímtényezős felbontását, és a prímszámok hatványkitevőinél 1-gyel nagyobb számokat összeszorozzuk. Röviden:

Ha $a = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{a_n}$, *ahol* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *különböző prímszámok és* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *pozitív egész kitevők, akkor az a szám osztóinak a száma*: $(a_1 + 1)(a_2 + 1)\ldots(a_n + 1)$.

A valódi osztók száma ettől 2-vel kevesebb.

A prímszámok szinte mechanikus megkeresésére szolgál az ***eratoszthenészi szita*** módszere. Ez azt jelenti, hogy felírjuk 2-től *a*-ig a természetes számokat, majd bekarikázzuk az első számot: a 2-t, és kihúzzuk ennek a többszöröseit (azaz minden másodikat). Ezután a megmaradó számok közül bekarikázzuk ismét az elsőt: a 3-at, és kihúzzuk ennek többszöröseit (azaz minden harmadikat) s így tovább. Természetesen előfordulhat, hogy egy számot nem csak egy alkalommal húzunk ki. Elegendő $\sqrt{a}$-ig folytatni az eljárást. A bekarikázott, illetve a ki nem húzott számok lesznek *a*-ig az összes prímszámok.

A prímszámok eléggé szabálytalanul helyezkednek el a természetes számok sorozatában. A 2 kivételével valamennyien páratlanok, ezért a 2 prímszámot leszámítva két egymás utáni prímszám között a legkisebb különbség 2 lehet. Ha két prímszám különbsége 2, akkor azokat ***ikerprímszámoknak*** nevezzük Ilyenek 3, 5; 5, 7; 11, 13; 17, 19; 29, 31; 41, 43; 59, 61; 71, 73 stb.

A prímszámok szabálytalan eloszlása a matematikusok figyelmét nagyon lekötötte. Többen igyekeztek olyan képleteket adni, amelyek segítségével mindig prímszámot kapunk.

A Mersenne-féle prímszámok a következő speciális alakú prímszámok: $M_p = 2^p - 1$, ahol *p* is prímszám. Marin *Mersenne* (1588-1648) francia szerzetesről nevezték el őket. Az M_p

értéke azonban különböző p prímekre nem mindig prím. Például: $M_2 = 3$, $M_3 = 7$, $M_5 = 31$, $M_7 = 127$ prímszám, de $M_{11} = 2047$ nem prímszám.

Az M_{127} 1950-ig a legnagyobb ismert prímszám volt. Az elektronikus számítógépekkel azóta újabb és újabb prímeket sikerült találni. Jelenleg 44 Mersenne-prímet ismerünk, a legnagyobb a $2^{32582657} - 1$, mely több millió számjegyből áll, 2006. szeptember 4.-én fedezték fel a kutatók. Nem tudjuk, van-e végtelen sok Mersenne-prím.

Marin *Mersenne* (1588-1648). A számelmélettel foglalkozott, a nevét őrzik a $2n - 1$ alakú, ún. Mersenne-prímszámok. (1996-ban indult egy program, a Nagy internetes Mersenne-prím keresés (Great Internet Mersenne Prime Search, GIMPS), melyben ma 240 ezer személyi komputeren fut a kliensprogram, a kutatásban bárki részt vehet. A kutatás akkor fejeződik be, ha valaki megtalálja az első, legalább 10 000 000 számjegyből álló Mersenne-prímet).

Fermat (1601-1665) francia matematikus sejtése az volt, hogy az $F_k = 2^{2^k} + 1$ alakú számok, ahol $k \in \mathbf{N}^+$, prímszámok. Ez igaz, ha $k = 1, 2, 3, 4$. F(1) = 5, F(2) = 17, F(3) = 257, F(4) = 65537.

1732-ben *Euler* (1707-1783) felfedezte, hogy $2^{2^5} + 1 = 641 \cdot 6\,700\,417$ alakban írható fel, tehát nem prímszám. Mindmáig nem sikerült igazolni, hogy $k > 4$ esetben az F_k típusú számok között van-e prímszám.

Prímszámokat állít elő a következő kifejezés:

$$n^2 + n + 41,$$

ha $n = 1, 2, 3, \ldots, 40$

és

$$n^2 - 79n + 1601$$

ha $n = 1, 2, 3, \ldots, 79$.

Az 1, 2, 3, 4, … számsorozatban, a természetes számok között végtelen sok prímszám van. Észrevehetjük, hogy ez a sorozat számtani sorozat, amelynek tagjai: $1, 1 + 1, 1 + 2 \cdot 1, 1 + 3 \cdot 1, \ldots, 1 + n \cdot 1, \ldots$ alakban írhatók fel.

Dirichlet (1805-1859) francia matematikus a 19. században vizsgálta az a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, …, $a + nd$, … számtani sorozatot ($a > 0$, $d > 0$ és $a, d \in \mathbf{N}$), amely az előző sorozatot általánosítja. Bebizonyította, hogy ha $(a, d) = 1$, akkor ebben *a számtani sorozatban éppen úgy végtelen sok prímszám van, mint a természetes számok sorozatában*.

A számelmélet nagy művelői több, ma is megoldásra váró problémát hagytak ránk.

Goldbach (1690-1764) német matematikus 1742-ben egy levelében azt kérte Eulertől, hogy igazolja a következő sejtést:

Minden páros szám előállítható két prímszám összegeként. (*Például*: 20 = 3 + 17, 32 = 3 + 29, 74 = 3 + 71, 144 = 13 + 131.)

Goldbach sejtése a legutóbbi időkig ellenállt mindenféle bizonyítási kísérletének. Mígnem *Snyirelmann* (1905-1938) szovjet matematikus 1931-ben kimutatta, hogy minden természetes szám előállítható 300 000-nél nem több prímszám összegeként. Ezt követte *Vinogradov* szovjet matematikus felfedezése 1937-ben. Igazolta, hogy létezik olyan **N** természetes szám, amelynél nagyobb minden *n* természetes szám előállítható 4 prímszám összegeként. A Goldbach-sejtés igazolásában további előrehaladást jelentett *Rényi Alfréd* (1921-1970) magyar matematikus felfedezése, aki 1947-ben bebizonyította, hogy minden páros szám felbontható egy prímszám és egy „majdnem prímszám" összegére. („Majdnem prímszámnak" nevezzük azt az egész számot, amelynek a prímtényezős felbontásában a prímtényezők száma egy adott *K* egész számnál kisebb.)

Tökéletes számok

A tökéletes számokkal törzsanyagon belül a tanulók nem szoktak találkozni. Azonban a prímszámokon belül ez egy olyan fejezet, amit véleményem szerint egy jobb képességű osztályban már be lehetne mutatni, hiszen a tökéletes számok az osztók megkeresésének gyakoroltatására is alkalmasak.

Egy természetes számot hiányosnak nevezünk, ha önmagától kisebb pozitív osztóinak a száma kisebb a számnál. (*Például:* 15 önmagától kisebb pozitív osztói: 1, 3, 5. Ezek összege 9, ami kisebb, mint 15, tehát hiányos.) Néhány hiányos szám: 4, 8, 10, 14.

Egy természetes számot bővelkedőnek nevezünk, ha önmagától kisebb pozitív osztóinak összege nagyobb a számnál. (*Például*: 18 önmagánál kisebb pozitív osztói: 1, 2, 3, 6, 9. Ezek összege 21, ami nagyobb, mint 18, tehát bővelkedő.) Bővelkedő számok: 20, 24, 30.

Egy természetes szám tökéletes szám, ha megegyezik önmagától kisebb pozitív osztóinak összegével. (*Például*: 6 = 1 + 2 + 3, 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.) Mindegyik Mersenne-féle prímszámból előállíthatunk egy tökéletes számot.

Már Euklidész megállapította, hogy bizonyos alakú páros számok tökéletesek. Eulernek viszont sikerült bebizonyítani, hogy más alakú páros számok nem tökéletesek. Ezeket foglalja össze a következő tétel:

Egy páros szám akkor és csakis akkor tökéletes szám, ha $2^{p-1}(2^p-1)$ alakú, ahol 2^p-1 prímszám. 2^p-1 pedig csak akkor lehet prímszám, ha p is prímszám.

A számelmélet máig megoldatlan problémája, hogy van-e páratlan tökéletes szám.

A *pitagoreusok* megfigyeltek úgynevezett barátságos számokat is: olyan $\{n;\ m\}$ párokat, ahol $n \neq m$, és $\sigma(n) - n = m$, viszont $\sigma(m) - m = n$. A $\sigma(n)$ ill. $\sigma(m)$ jelöli az n ill. m pozitív egész pozitív osztóinak összegét. Ilyen barátságos számok például: {220; 284}.

Fermat találta meg a következő párt: {17296; 18416} és így megmentette a barátságos számok elméletét attól a gyanútól, hogy azt csak egyetlen példára alapozták. Ma már több ezer ilyen pár ismeretes.

A tökéletes és barátságos számok tanítása alkalmas arra, hogy a tehetségesebb tanulókat megismertessük néhány számelméleti függvénnyel is. Ilyen feladatok megoldása során a pozitív osztók számát és összegét kell meghatározni. Ezek pedig elég sok időt elvesznek. Egy idő után, mikor már jól megy nekik a manuális keresés, meg lehet mutatni, hogy van gyorsabb módszer is a pozitív osztók számának és összegének megkeresésére.

Végezetül egy olyan ismert tételt szeretnék bemutatni, aminek a bizonyítását – véleményem szerint – a középiskolai tanórán is a tananyagba lehetne venni. A tétel a következő:

Végtelen sok prímszám van.

Az Euklidészi bizonyítás alapgondolata, hogy bárhogyan is adunk meg véges sok prímszámot, mindig megadható egy ezektől különböző prímszám. Legyen adott véges sok (természetesen különböző) prímszám, jelölje ezeket $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Tekintsük az $a = p_1p_2 \ldots p_n + 1$ számot. Könnyű látni, hogy $p_i \nmid a$ egyik i-re sem, ahol $i = 1, \ldots, n$. Ha ugyanis $p_i \mid a$ lenne, akkor $p_i \mid 1$ következne, ami lehetetlen. A számelmélet alaptétele szerint a prímszámok szorzatára bontható (lehet egytényezős szorzat is, ha a maga prímszám). Van tehát a-nak p prímszám osztója, amely p mindegyik p_i-től (i = 1, …, n) különbözik. Ilyen módon mindig újabb és újabb prímszámokat kapunk. Ezért a tétel valóban igaz.

3.3. Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös

A *legnagyobb közös osztó*, illetve a *legkisebb közös többszörös* megkeresésére gyakran van szükségünk. (Például törtek egyszerűsítésénél, illetve összeadásánál.)

Példa: Keressük meg 2352, 5544 és 54 880 közös osztóit!

(Az 1 biztos közös osztójuk, de az annyira természetes, hogy figyelmen kívül hagyjuk.)

A közös osztók keresését a prímtényezős felbontás segítségével végezzük:

$2352 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7^2$, $5544 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$, $54\,880 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^3$.

A *közös osztók* keresésénél azokat a prímtényezőket keressük, amelyek mindhárom szám felbontásában ott vannak. Most a 2 és 7 az ilyen prímszám. Ezek milyen hatványkitevőn szerepelhetnek?

Keressük meg a közös prímszámok mindegyikénél a legkisebb kitevőjűt, és e legkisebb kitevőjű prímszámhatványokat szorozzuk össze. Ez biztosan közös osztója lesz mindhárom számnak. Ennél nagyobb közös osztó nem lehet. Természetes nevén ezt a **legnagyobb közös osztónak** nevezzük. Ennek minden osztója a számok közös osztója.

Az előző három számnál ez a legnagyobb közös osztó: $2^3 \cdot 7 = 56$.

Az 56 minden osztója közös osztója a három számnak, ezek: 56; 28; 14; 8; 7; 4; 2.

Az a, b számok legnagyobb közös osztóját így jelöljük: $(a; b)$.

Az előző példa alapján: $(2352; 5544; 54\,880) = 2^3 \cdot 7 = 56$.

Ha prímszámok legnagyobb közös osztóját keressük, akkor az csak 1 lehet. Például: (5; 7) = 1, (5; 7; 11) = 1.

Azonban nemcsak prímszámoknak lehet a legnagyobb közös osztója 1. Sem 24, sem 25 nem prímszám, mégis (24; 25) = 1, vagy (25; 28; 243) = 1.

Ha két vagy több pozitív egész szám legnagyobb közös osztója 1, akkor azokat **relatív prímszámoknak** nevezzük.

Példa: Keressük meg 120; 693; 2352 legkisebb közös többszörösét! (Nyilvánvaló, hogy a három szám szorzata közös többszörös, de mi a *legkisebb közös többszöröst* keressük.) A számok prímtényezős felbontása segít.

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $\quad 693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$, $\quad 2352 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7^2$.

A **legkisebb közös többszörös** *prímtényezős felbontásban minden olyan prímszámnak szerepelnie kell, amelyek a számok valamelyikének felbontásában megtalálhatók* (tehát most szerepelnie kell a 2; 3; 5; 7; 11 számoknak). *Hatványkitevőjük megállapításánál azt kell megnéznünk, hogy a felbontásokban egy-egy prímszámnak mi a legnagyobb hatványkitevője, annak kell szerepelnie a legkisebb közös többszörös prímtényezős felbontásában*.

A három szám legkisebb közös többszöröse: $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 = 388\,080$.

Az a, b számok legkisebb közös többszörösét így jelöljük: $[a; b]$.

Az előző példa alapján: $[120; 693; 2352] = 388\,080$.

Bebizonyítható, hogy két szám (a és b) legnagyobb közös osztója és legkisebb közös többszöröse között fennáll az

$$(a; b) \cdot [a; b] = ab \qquad (1)$$

összefüggés.

A relatív prímszámok ismeretében megfogalmazunk egy további fontos oszthatósági tulajdonságot:

Ha $a \mid c$ és $b \mid c$, valamint $(a; b) = 1$, akkor $ab \mid c$, azaz ha egy számnak két olyan osztója van, amelyek relatív prímek, akkor a számnak osztója a két osztó szorzata is.

Például: $8 \mid 1224$ és $9 \mid 1224$, valamint $(8; 9) = 1$, ezért fennáll $72 \mid 1224$ is.

Állításunkat könnyen beláthatjuk, mert $a \mid c$ és $b \mid c$ miatt c többszöröse a-nak is, b-nek is, tehát c többszöröse $[a; b]$-nek is (vagy egyenlő vele). Az előző (1) alatti tételből azonban $(a; b) = 1$ miatt most $[a; b] = ab$, tehát c többszöröse ab-nek (vagy egyenlő vele), ezért $ab \mid c$.

Ez az oszthatósági tulajdonság lehetőséget ad további oszthatósági szabályok megfogalmazására. Például: Egy természetes szám akkor és csak akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal, vagy 15-tel, ha osztható 3-mal és 5-tel.

Példa: Egyszerűsítsük a $\dfrac{9240}{13104}$ törtet.

A számláló prímtényezős felbontása: $9240 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, a nevező prímtényezős felbontása: $13\,104 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$.

Ezek legnagyobb közös osztója: $(9240;\ 13\,104) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$.

Ezzel érdemes egyszerűsítenünk:

$$\frac{9240}{13104} = \frac{5 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 13} = \frac{55}{78}$$

Példa: Számítsuk ki a $\frac{11}{168} + \frac{19}{252}$ összeget!

A nevezők prímtényezős alakjai: $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$; $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$.

A nevezők legkisebb közös többszöröse: $[168;\ 252] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$.

$$\frac{11}{168} + \frac{19}{252} = \frac{11 \cdot 3 + 19 \cdot 2}{504} = \frac{33 + 38}{504} = \frac{71}{504}$$

Szükség lehet betűs egész kifejezések legnagyobb közös osztójának, legkisebb közös többszörösének a megkeresésére, hiszen betűs törtkifejezéseket egyszerűsíthetünk, betűs törtekkel műveleteket végezhetünk

A betűk valós számokat jelölnek. Így *a betűs törtekkel végzendő átalakításokhoz, műveletekhez utat mutatnak mindazok, amit a számokkal felírt törteknél láttunk, azonban eljárásaink megfogalmazását kissé módosítanunk kell*.

Példa: Keressük meg a $9bc^3 + 18c^3y$; $24abc^5 + 48ac^5y$; $bc^2x + 2c^2xy - 7bc^2 - 14c^2y$ kifejezések legnagyobb közös osztóját!

A számokat, legnagyobb közös osztójuk keresésekor, prímtényezős alakban írtuk fel. Most ezeket *a betűs kifejezéseket tényezőkre bontjuk* (szorzattá alakítjuk):

$$9bc^3 + 18c^3y = 9c^3(b + 2y) = 3^2c^2(b + 2y),$$

$$24abc^5 + 48ac^5y = 24ac^5(b + 2y) = 2^3 \cdot 3ac^5(b + 2y),$$

$$\begin{aligned} bc^2x + 2c^2xy - 7bc^2 - 14c^2y &= c^2[bx + 2xy - 7b - 14y] = \\ &= c^2[x(b + 2y) - 7(b + 2y)] = \\ &= c^2(b + 2y)(x - 7). \end{aligned}$$

Annak mintájára, amit a számok legnagyobb közös osztójának megkeresésénél láttunk, a tényezőkre bontott kifejezésekben keressük meg mindazokat a tényezőket, amelyek minden kifejezésben szerepelnek.

A *közös tényezők közül kiválasztjuk azokat, amelyeknek a kitevőjük a legkisebb, és ezeket összeszorozzuk. Ez a szorzat lesz a kifejezések legnagyobb közös osztója*.

Az előző kifejezéseknél a legnagyobb közös osztó: $c^2(b + 2y)$.

A szokásos jelöléssel:

$(9bc^3 + 18c^3y;\ 24abc^5 + 48ac^5y;\ bc^2x + 2c^2xy - 7bc^2 - 14c^2y) = c^2(b + 2y)$.

Példa: Keressük meg a $9a^4x - 45a^4y$; $6abx - 30aby$; $b^3x - 5b^3y$ kifejezések legkisebb közös többszörösét!

A kifejezéseket tényezőkre bontjuk:

$9a^4x - 45a^4y = 9a^4(x - 5y) = 3^2a^4(x - 5y)$,

$6abx - 30aby = 6ab(x - 5y) = 2 \cdot 3ab(x - 5y)$,

$b^3x - 5b^3y = b^3(x - 5y)$.

A legkisebb közös többszörösben minden tényezőnek szerepelnie kell. A legkisebb közös többszörös olyan szorzat, amelyben minden tényező a legmagasabb hatványkitevőjén szerepel.

Az előző kifejezések legkisebb közös többszöröse: $2 \cdot 3^2a^4b^3(x - 5y)$.

A szokásos jelöléssel:

$[9a^4x - 45a^4y;\ 6abx - 30aby;\ b^3x - 5b^3y] = 2 \cdot 3^2a^4b^3(x - 5y)$.

Példa: Egyszerűsítsük a következő törtet (a betűk helyére csak olyan számértékeket gondolunk, amelyek mellett a törtnek van értelme):

$$\frac{108ax + 108bx}{24acxy + 24adxy + 24bcxy + 24bdxy}$$

A számlálót is, a nevezőt is szorzattá alakítjuk:

A számláló: $108ax + 108bx = 108x(a + b) = 2^2 \cdot 3^3x(a + b)$.

A nevező: $24xy(ac + ad + bc + bd) = 2^3 \cdot 3xy[a(c + d) + b(c + d)] =$

$$= 2^3 \cdot 3xy(a + b)(c + d).$$

A számláló és nevező legnagyobb közös osztója: $2^2 \cdot 3x(a + b)$.

Ezzel egyszerűsíthetjük a törtet:

$$\frac{2^2 \cdot 3^3 x(a+b)}{2^3 \cdot 3xy(a+b)(c+d)} = \frac{3^2}{2y(c+d)}$$

Példa: Írjuk fel egy törtként az alábbi különbséget:

$$\frac{7a}{120ax+120bx} - \frac{5b}{36ay+36by}$$

(Most kizárjuk azokat a számokat, amelyeknél a nevező értéke 0lenne, azaz x ≠ 0, y ≠ 0, a ≠ −b.)

A nevezőket szorzattá alakítjuk:

$120ax + 120bx = 120x(a + b) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5x(a + b)$,

$36ay + 36by = 36y(a + b) = 2^2 \cdot 3^2 y(a + b)$.

Ezek legkisebb közös többszöröse lesz a közös nevező:

$[120ax + 120bx; 36ay + 36by] = 2^3 \cdot 3^2 y(a + b)$.

$$\frac{7a}{120ax+120bx} - \frac{5b}{36ay+36by} = \frac{7a}{2^3 \cdot 3 \cdot 5x(a+b)} - \frac{5b}{2^3 \cdot 3^2\, y(a+b)} =$$

$$\frac{7a \cdot 3y - 5 \cdot 5b \cdot 2x}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5xy(a+b)} = \frac{21ay - 50bx}{360xy(a+b)}.$$

Megjegyzés:

Említettük, hogy a betűs *egész kifejezések* legnagyobb közös osztóját, illetve legkisebb közös többszörösét kerestük. Az eddigi feladatokban a betűs egész kifejezésekben *egész együtthatók* szerepeltek, például $9bc^3$ + $18c^3y$ stb. Egész kifejezésekben azonban *törtegyütthatók* is szerepelhetnek, például $\frac{3bc}{4} + \frac{7cy}{9}$ is egész kifejezés. Ilyenek legnagyobb közös osztójával, legkisebb közös többszörösével nem foglalkozunk.

A példákon keresztül láthatjuk, hogy a matematikában a legnagyobb közös osztó (l.n.k.o.), és a legkisebb közös többszörös (l.k.k.t.) ismerete nélkülözhetetlen, nagyon sok feladat megoldásában segítenek. Különböző nevezőjű törtek összeadása és kivonása lehetetlen közös nevezőre hozás nélkül. A közös nevező pedig a nevezők valamelyik, általában a legkisebb közös többszöröse. Törtek egyszerűsítésekor azonban nem mindig a legnagyobb közös osztóval egyszerűsítünk, hanem az oszthatósági szabályokat felhasználva kisebb osztókkal, több lépésben, hiszen így egyszerűbb, feltéve, hogy ismerjük az oszthatósági szabályokat. Ugyanez a módszer használható egyenletek megoldásakor; ha az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk az együtthatók legnagyobb közös osztójával, akkor egy látszólag nagy számolásigényű feladat akár fejben is megoldható.

3.4. Euklideszi algoritmus

Euklidesz (Kr. e. 300 körül született). Egyiptom királyának (Ptolemaiosz) kérdésére, hogy van-e valami könnyebb módszer a geometria elsajátításához, mint az Elemek áttanulmányozása, így felelt: "A geometriához nem vezet királyi út."

Az előző fejezetben szerepelt két vagy több egész számnak a legnagyobb közös osztója. Ennek meghatározásához szükség volt a számok prímtényezős felbontására. Nagy számok esetén ezek megadása rettentő nagy munka lehet. Más, fontos módszer is van a legnagyobb közös osztó meghatározására, és ehhez nincs szükség a prímtényezős felbontásra (ezen módszer hátránya, hogy nem alkalmas kettőnél több szám legnagyobb közös osztójának meghatározására.). Ez a következőkön alapszik:

Legyen a és b két egész szám. Ha $a = bq + r$ ahol $0 \le r \le b - 1$, akkor $(a; b) = d = (r; b)$.

Az a és b legnagyobb közös osztója helyett elegendő b és r legnagyobb közös osztóját meghatározni. Ez egyszerűbb, mert r kisebb a-nál is, b-nél is. r és b legnagyobb közös osztójának megtalálására ugyanezt a módszert alkalmazzuk.

Ezt az eljárást két szám legnagyobb közös osztójának meghatározására *euklideszi algoritmusnak* nevezzük, ugyanis első leírása *Euklidész*: *Elemek* című művében található. Számítógépes számolásra ez a módszer igen alkalmas.

A maradékos osztás tétele: Tetszőleges a és b ($b \neq 0$) egész számokhoz léteznek olyan egyértelműen meghatározott q és r egész számok, amelyekre

$$a = bq + r, \qquad \text{ahol} \quad 0 \le r < |b|.$$

Ezt az egyenlőséget az a és b ($\neq 0$) egész számokon végrehajtott *maradékos osztásnak*, másképpen *euklideszi osztásnak* nevezzük, q-t *hányadosnak*, r-et *maradéknak*, pontosabban legkisebb nemnegatív maradéknak nevezzük. (Az a az osztandó, b pedig az osztó.)

Euklideszi algoritmus

Legyenek a és b egészek, $b \neq 0$. A maradékos osztás tételének alkalmazásával kapunk olyan q_1; r_1 egészeket, amelyekkel

$$a = bq_1 + r_1; \qquad 0 \le r_1 < |b|$$

teljesül. Ha $r_1 \neq 0$, akkor az euklideszi osztás a b, r_1 elempárral, azaz az osztóval és a maradékkal megismételhető. Ekkor van olyan q_2 és r_2 elem, hogy

$$b = r_1 q_2 + r_2; \qquad 0 \leq r_2 < r_1.$$

Ha $r_2 \neq 0$, akkor ismételjük meg az euklideszi osztást az r_1 és r_2 elempárral. Folytassuk ezt mindaddig, amíg maradékul nullát nem kapunk. Tegyük fel, hogy az n + 1-edik lépésben kapunk először 0 maradékot. Így az euklideszi osztásoknak a következő sorozatát kapjuk:

$$\begin{array}{ll}
a = bq_1 + r_1 & 0 < r_1 < |b|; \\
b = r_1 q_2 + r_2 & 0 < r_2 < r_1; \\
r_1 = r_2 q_3 + r_3 & 0 < r_3 < r_2; \\
\vdots & \\
r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n & 0 < r_n < r_{n-1}; \\
r_{n-1} = r_n q_{n+1} + 0 &
\end{array}$$

Az euklideszi (maradékos) osztásoknak ezt az egymásutánját az a és b ($\neq 0$) elemeken végrehajtott euklideszi algoritmusnak nevezzük.

Azt, hogy az a és b ($\neq 0$) számokon végrehajtott euklideszi algoritmus véges számú lépésben véget ér, azaz véges számú lépés után nullát kapunk maradékul, az biztosítja, hogy a fellépő maradékok természetes számokból álló (szigorúan) csökkenő sorozatot alkotnak, azaz

$$b > r_1 > r_2 > \ldots > r_{n-1} > r_n \geq 0$$

Az ilyen sorozat pedig csak véges hosszúságú lehet. Így igaz az alábbi tétel:

Az *a* és *b* (*b* ≠ 0) számok legnagyobb közös osztója egyenlő az euklideszi algoritmus utolsó, 0-tól különböző maradékával, azaz (*a*; *b*) = r_n

Példa: Számítsuk ki az euklideszi algoritmussal (2880; 2376)-ot!

$$\begin{array}{lcl}
2880 & = & 2376 \cdot 1 + 504 \\
2376 & = & 504 \cdot 4 + 360 \\
504 & = & 360 \cdot 1 + 144 \\
360 & = & 144 \cdot 2 + 72 \\
144 & = & 72 \cdot 2 + 0
\end{array}$$

Így (2880; 2376) = 72.

Példa: Próbáljuk most ki az euklideszi algoritmust két, egymáshoz relatív prím egész számon.

Mivel 79 625 = $5^3 \cdot 7^2 \cdot 13$ és 9504 = $2^5 \cdot 3^3 \cdot 11$, így (79 625; 9504) = 1 kell, hogy legyen. Próbáljuk ki!

$$
\begin{aligned}
79625 &= 9504 \cdot 8 + 3593\\
9504 &= 3593 \cdot 2 + 2318\\
3593 &= 2318 \cdot 1 + 1275\\
2318 &= 1275 \cdot 1 + 1043\\
1275 &= 1043 \cdot 1 + 232\\
1043 &= 232 \cdot 4 + 115\\
232 &= 15 \cdot 2 + 2\\
115 &= 2 \cdot 57 + 1\\
2 &= 1 \cdot 2 + 0
\end{aligned}
$$

tehát (79 625; 9504) = 1.

Ez utóbbi példa mutatja az euklideszi algoritmus előnyeit, miszerint nagy számok esetében is viszonylag gyors, hatékony módszer, amely – s ez másik előnye is – nem igényli a számok prímtényezőkre bontását. (Nagy számok esetében még a számítógépek felhasználásával is idő- és munkaigényes feladat a számok prímtényezős felbontásának az előállítása.)

Kétségtelen hátránya viszont ennek a módszernek, hogy nem alkalmas kettőnél több szám legnagyobb közös osztójának meghatározására.

4. Kapcsolódási lehetőségek

4.1. *Halmazok, logika*

A számelméleti ismeretek felépítésével párhuzamosan a halmazelméleti és a logikai ismereteket is rendezzük, bővítjük. Például:

a) Értelmezzük a *részhalmaz* fogalmát a 3-mal osztható számok és a 6-tal osztható számok halmazának Venn-diagramba rendezésével.

b) *Kijelentések igazságát* vizsgáljuk:
„Van olyan 6-tal osztható szám, amelyik nem osztható 3-mal.”
„Minden 6-tal osztható szám páros.”

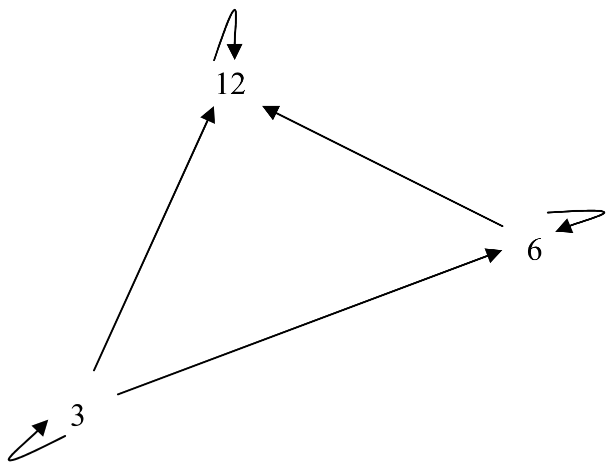
c) *Tétel és megfordíthatóságának viszonyát* figyeltetjük meg:
„Ha egy szám osztható 4-gyel, akkor osztható 8-cal.”
„Ha egy szám osztható 8-cal, akkor osztható 4-gyel.”

d) A *halmazok közös részéről* tanultakat alkalmazzuk a közös osztók, a közös többszörösök fogalmának kialakításánál.

e) Az *„és”*, *„pontosan akkor ha”*, *„akkor és csak akkor”* logikai műveletekhez kapcsolódunk.

4.2. *Relációk, függvények*

a) Konkrét relációk tulajdonságai, ábrázolásuk nyíldiagrammal. Például:
Az „osztója” reláció tulajdonságai (konkrét számokkal):
A nyíl jelentése: ez $\underset{\text{osztója}}{\longrightarrow}$ ennek.



A 3, a 6, a 12 osztója saját magának (reflexív).

A 3 osztója a 6-nak, a 6 nem osztója 3-nak (nem szimmetrikus).

A 3 osztója a 6-nak, a 6 osztója a 12-nek, akkor a 3 osztója a 12-nek (tranzitív).

b) *Derékszögű koordináta-rendszerben* ábrázolhatjuk, hogy a természetes számok mit adnak maradékul 5-tel osztva.

c) Az *osztók száma* számelméleti *függvény* fogalmát előkészíthetjük 8. osztályban konkrét feladatokhoz kapcsolódva.

4.3. *Mérés*, *geometria*

a) Szabályos sokszögek *forgatásával szemléltethetjük a maradékot*. (Például: szabályos ötszöget forgatva az ötös maradékot.)

b) Az *időmérés* ciklikusságához kapcsolódó feladatok *előkészítik a maradékkal való számolást.*

4.4. *Számtan*, *algebra*

a) Gyakoroltatjuk a törtek egyszerűsítését, bővítését, összeadását, kivonását.

b) Tudatosítjuk a műveleti tulajdonságokat (összeg szorzása, összeg és szorzat csoportosíthatósága, felcserélhetősége.)

4.5. *Kombinatorika*

a) Sorbarendezett számok közül kiválasztjuk azokat, amelyek 4-gyel oszthatók.

b) Egy szám összes osztójának meghatározásakor eszközjelleggel alkalmazzuk a kombinatorikai feladatokat.

5. Néhány érdekesebb számelméleti feladat

Az alábbiakban néhány számelméleti feladatot sorolnék fel, melyekkel főleg szakkörön, fakultáción foglalkoznak a diákok, de egy jobb képességű osztályban is bármikor meg lehet oldani őket. Ilyen, és ehhez hasonló feladatok azok, melyekkel be lehet mutatni a középiskolában a számelmélet trükkjeit; elég csak egy jó ötlet, és máris megvan a megoldáshoz vezető út kulcsa. A feladatok megoldásának menetét nem közlöm, hiszen az már egy másik dolgozat témája lehetne, csak felsorolom a feladatokat.

1. Melyik az a legkisebb szám, amely osztható az 1, 2, 3, …, 1993 számok mindegyikével?
2. Melyik természetes szám négyzete az N szám?
$$N = 1993 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 1992).$$
3. Számítógéppel kiíratjuk a számokat 1-től 1993-ig. Kettőt kiválasztunk, kitöröljük, és helyette visszaírjuk a különbségüket. Ezt az eljárást addig ismételjük, míg csak egy szám marad. *Páros* vagy *páratlan* ez a szám?
4. Mennyi a maradék, ha a 74-nek az 1993. hatványát 9-cel elosztjuk?
5. Tetszőlegesen megadunk egy 9-cel osztható 1993 jegyű számot. Az így kiválasztott szám jegyeinek összege legyen A, az A jegyeinek összege B, a B szám jegyeinek összege C. Mennyi a C?
6. Bizonyítsa be, hogy akárhogyan is adunk meg 1993 féle számot, van közöttük kettő olyan, amelyek különbsége osztható 1992-vel!
7. A természetes számokat egymás mellé leírjuk 1-gyel kezdve. Milyen számjegy áll az 1992. helyen?
8. Határozza meg a következő egyenletek pozitív egész megoldásait!
$$1992^x + 1993^y = 1994^z.$$
9. Egy pozitív egész számról tudjuk, hogy tízes számrendszerben hatjegyű, első számjegye 7, az ötödik 2. Tudjuk, hogy páratlan szám, valamint 3-mal, 4-gyel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel és 13-mal osztva ugyanazt a maradékot adja. Melyik ez a szám?
10. Képezzük a következő sorozatot:
$$37;\ 537;\ 5537;\ 55\,537;\ 555\,537 \text{ stb.}$$

A sorozat elemei olyan számok, amelyeknek utolsó két számjegyéből álló szám a 37, és ezt egyre több és több 5-ös számjegy előzi meg. Bizonyítsa be, hogy a sorozat tagjai között végtelen sok 13-mal osztható szám van!

11. Egy matematikaórán a tanár felír egy számot a táblára. Az egyik diák így szólt: a szám osztható 31-gyel. A második: a szám 30-cal is osztható. Egy harmadik diák szerint a szám 29-cel is osztható, egy negyedik szerint 28-cal és így tovább, végül a 30. diák azt mondta, hogy a szám osztható 2-vel. A tanár ezek után közölte, hogy csak két állítás nem volt igaz, és hogy ez a kettő egymás után hangzott el. Melyik volt a két téves állítás?
12. Bizonyítsa be, hogy a $7^{21} - 3^{35}$ különbség osztható 100-zal!
13. Bizonyítsa be, hogy két ikerprímszám összege osztható 12-vel, ha a számok 3-nál nagyobb prímszámok!
14. Bizonyítsa be, ha $p > 3$ prímszám, akkor $p^2 - 1$ osztható 24-gyel!
15. Két szám különbsége 2. Bizonyítsa be, hogy köbeik különbsége előáll három négyzetszám összegeként!
16. Milyen maradékot ad 4-gyel osztva a $17^{100} - 1$?
17. Egy természetes számhoz hozzáadjuk számjegyeinek összegét és így 1989-et kapunk. Melyik ez a természetes szám?

Összegzés

A dolgozat pontjaiból láthatjuk, hogy a számelmélet az egyik legkönnyebb és valószínűleg az egyik legegyszerűbb fejezete a matematikának. Csupán egy részét mutattam be a tárgynak, ez a kis rész mégis alkalmas arra, hogy lássuk, milyen lehetőségek rejlenek benne. Nemcsak új ismereteket adunk át a diákoknak, hanem segítségével meg is szerettethetjük a matematikát velük, és alkalmas arra, hogy fejlesszük a tanulók gondolkodását, problémamegoldó, problémalátó készségét is. Lehetőséget ad arra, hogy az érdeklődő tanulók betekintést nyerjenek a magasabb matematika világába, és elsajátítsanak egy olyan gondolkodásmódot, mellyel könnyebben célhoz érhetnek némelyik problémás feladat megoldásában.

Sajnos a számelméletnek csak töredékével tudtam foglalkozni. Ezen kívül rengeteg más terület található még a számelméletben, mellyel azonban középiskolában nem, vagy csak érintőlegesen foglalkoznak. Dolgozatomban a számelmélet olyan területeit próbáltam kiemelni, melyet a diákok jobban szeretnek, szívesebben foglalkoznak vele. Tapasztalataim szerint ezek az anyagrészek eléggé le tudják kötni a tanulók figyelmét, természetesen megfelelő tanári felügyelettel és figyelmesen válogatott feladatokkal.

Remélem dolgozatom megfelelő betekintést nyújt a középiskolai számelmélet világába. Ezen kívül igyekeztem érdekességként olyan részeket is beiktatni, melyek a tehetségesebb tanulókat is lekötik és segítik a gondolkodásuk fejlesztését.

Éljünk tehát azokkal az eszközökkel, melyeket a számelmélet nyújt a tanároknak, és segítsük a tanulókat kibontakozni, látás- és gondolkodásmódjukat kiszélesíteni!

Irodalomjegyzék

1. Dr. Czeglédy István, Dr. Orosz Gyuláné, Dr. Szalontai Tibor, Szilák Aladárné: Matematika tantárgypedagógia I. Bessenyei György Könyvkiadó, Nyíregyháza, 2000.
2. Dr. Czeglédy István, Dr. Orosz Gyuláné, Dr. Szalontai Tibor, Szilák Aladárné: Matematika tantárgypedagógia II. Bessenyei György Könyvkiadó, Nyíregyháza, 2000.
3. Ambrus András: Bevezetés a matematika-didaktikába. ELTE Eötvös kiadó, Budapest, 2004.
4. Czapáry Endre: Matematika I. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 1996.
5. Czapáry Endre: Matematika IV. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest 1996.
6. Gyarmati Edit, Turán Pál: Számelmélet. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
7. Ágotai László: Ez az optimum. Szalay Könyvkiadó és Kereskedőház Kft. Budapest, 1999.
8. Gábos Adél – Halmos Mária: Készüljünk az érettségire! Matematika. Calibra kiadó, Budapest, 1994.