Title	座席予約問題における競合比の上下限の改良
Author(s)	岡本, 和也; 宮崎, 修一
Citation	電子情報通信学会技術研究報告 = IEICE technical report : 信学技報 (2010), 110(325): 45-51
Issue Date	2010-11-26
URL	http://hdl.handle.net/2433/227007
Right	© 2010 by IEICE
Type	Research Paper
Textversion	publisher

社団法人 電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
IEICE Technical Report
COMP2010-45 (2010-12)

座席予約問題における競合比の上下限の改良

岡本 和也† 宮崎 修一††

† 京都大学 医学部附属病院
〒606-8507 京都市左京区聖護院川原町 54
†† 京都大学 学術情報メディアセンター
〒604-8501 京都市左京区吉田本町
E-mail: †kazuya@kuhp.kyoto-u.ac.jp, ††shuichi@media.kyoto-u.ac.jp

あらまし 座席予約問題では駅 s_1 から駅 s_k までの k 駅に停まる n 席の座席を持った列車を考える．各乗客は出発駅 s_i から到着駅 s_j（$1 \leqq i < j \leqq k$）までのチケットを要求する．オンラインアルゴリズムは，未来の要求を知らずに各乗客を n 席の座席の 1 つに割り当てる必要がある．座席予約問題の目的はチケットの売上合計額を最大化することである．チケットの価格設定により，座席予約問題には 2 つのモデルがある．一つは単一価格問題であり，もう一つは比例価格問題である．我々は，両方のモデルにおいて，競合比の上下限を改良した．単一価格問題に関しては，上限を $\frac{8}{k+5}$ から $\frac{4}{k-2\sqrt{k-1}+4}$ に改良した．また，Worst-Fit アルゴリズムの上限も $\frac{4}{k-1}$ から $\frac{2}{k-2\sqrt{k-1}+2}$ に改良した．さらに，比例価格問題に関しては，上限を $\frac{4+2\sqrt{13}}{k+3+2\sqrt{13}}(\simeq \frac{11.2}{k+10.2})$ から $\frac{3+\sqrt{13}}{k-1+\sqrt{13}}(\simeq \frac{6.6}{k+2.6})$ に改良し，下限を $\frac{1}{k-1}$ から $\frac{2}{k-1}$ に改良した．

キーワード 座席予約問題問題，オンライン問題，オンラインアルゴリズム，競合比解析

Improving the Competitive Ratios of the Seat Reservation Problem

Kazuya OKAMOTO† and Shuichi MIYAZAKI††

† Kyoto University Hospital
54 Shogoin-kawaharacho, Sakyo-ku Kyoto 606-8507, Japan
†† Academic Center for Computing and Media Studies, Kyoto University
Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku Kyoto 604-8501, Japan
E-mail: †kazuya@kuhp.kyoto-u.ac.jp, ††shuichi@media.kyoto-u.ac.jp

Abstract In the seat reservation problem, there are k stations, s_1 through s_k, and one train with n seats departing from the station s_1 and arriving at the station s_k. Each passenger orders a ticket from station s_i to station s_j ($1 \leqq i < j \leqq k$) by specifying i and j. The task of an online algorithm is to assign one of n seats to each passenger online, i.e., without knowing future requests. The purpose of the problem is to maximize the total price of the sold tickets. There are two models, the unit price problem and the proportional price problem, depending on the pricing policy of tickets. In this paper, we improve upper and lower bounds on the competitive ratios for both models: For the unit price problem, we give an upper bound of $\frac{4}{k-2\sqrt{k-1}+4}$, which improves the previous bound of $\frac{8}{k+5}$. We also give an upper bound of $\frac{2}{k-2\sqrt{k-1}+2}$ for the competitive ratio of Worst-Fit algorithm, which improves the previous bound of $\frac{4}{k-1}$. For the proportional price problem, we give upper and lower bounds of $\frac{3+\sqrt{13}}{k-1+\sqrt{13}}(\simeq \frac{6.6}{k+2.6})$ and $\frac{2}{k-1}$, respectively, on the competitive ratio, which improves the previous bounds of $\frac{4+2\sqrt{13}}{k+3+2\sqrt{13}}(\simeq \frac{11.2}{k+10.2})$ and $\frac{1}{k-1}$, respectively.

Key words the seat reservation problem, online problem, online algorithms, competitive analysis

1. はじめに

座席予約問題は Boyar と Larsen によって考え出されたオンライン問題である [4]．座席予約問題では駅 s_1 から駅 s_k の k 駅と，1 から n までの番号が振られた n 席の座席を持った列車を考える．この列車は駅 s_1 を出発し，駅 s_k に到着する．入力列は

2 つの駅間の区間の列であり，各区間は $[i, j)$ （$1 \leqq i < j \leqq k$）と表記され，駅 s_i から駅 s_j までのチケットを乗客が購入することを要求しているということを表している．オンラインアルゴリズムは将来の入力列を知らない状態で，各乗客を割り当てる座席を選ばなければならない．もし，乗客を割り当てることができる座席がある場合，その乗客を必ず割り当てるアルゴリズムを**公正**なアルゴリズムといい，座席予約問題ではアルゴリズムは公正でなければならない．そして，座席予約問題の目的は売却したチケットの価格の合計を最大化することである．

座席予約問題にはチケットの価格設定により，2 つのモデルがある．一つは**単一価格問題**であり，もう一つは**比例価格問題**である．

単一価格問題では，全てのチケットは同じ価格であり，一般性を失うことなく 1 とする．また，比例価格問題ではチケットの価格は区間の距離に比例する．具体的には，駅 s_i から駅 s_j までのチケットの価格は $j - i$ である．

オンラインアルゴリズムの性能は**競合比解析**によって評価される．A をオンラインアルゴリズムとし，σ を入力列とする．また，OPT を最適オフラインアルゴリズムとする．最適オフラインアルゴリズムとは入力列 σ を全て知った上で，最適に振舞うアルゴリズムである．さらに，$p_A(\sigma)$ と $p_{OPT}(\sigma)$ をそれぞれ σ が与えられた時に A と OPT が得る利益とする．ここで，任意の入力列 σ と σ に依らない定数 d に対し，$p_A(\sigma) \geqq r \cdot p_{OPT}(\sigma) - d$ が成り立つ時，A の競合比が r であるという(注1)．

Boyar と Larsen [4] は単一価格問題と比例価格問題に対する競合比を解析した．具体的には，彼らは 3 つの自然なアルゴリズム **First-Fit**，**Best-Fit**，**Worst-Fit** を扱った．First-Fit は各要求を割り当てることが可能な座席の中で最も小さな数が振られた座席に割り当てる．Best-Fit は要求された区間を含む空席の区間が最も短い座席に割り当てる．この際，同順位のものは適当に選ばれる．例えば，8 つの駅と 3 席の座席を考え，現在の割り当て状況が図 1 のようになっているとする．図 1 において，割り当てられている区間は陰影によって表されている．ここで，区間 $[4, 6)$ という要求が与えられたとする．まず，座席 1 には割り当てることができない．座席 2 と座席 3 の $[4, 6)$ を含む空席の区間はそれぞれ s_2 から s_6 と s_4 から s_7 であり，各区間の長さは 4 と 3 である．そのため，Best-Fit は $[4, 6)$ を割り当てるために座席 3 を選択する．逆に，Worst-Fit は要求された区間を含む空席の区間が最も長い座席に割り当てる．この際，Best-Fit と同様に同順位のものは適当に選ばれる．図 1 の例の場合に，Worst-Fit は区間 $[4, 6)$ を要求として受け取ると，座席 2 に割り当てる．

座席予約問題の競合比に関するこれまでの結果を表 1 （文献 [6] より抜粋）に示す．

本論文の結果　我々は本論文において競合比の上下限を改良する．我々の結果を表 2 にまとめて示す．本論文において改良する結果は太字で示されている．単一価格問題に関しては，上限を $\frac{8}{k+5}$ から $\frac{4}{k-2\sqrt{k-1}+4}$ に改良する．また，表 1 に示されているように First-Fit と Best-Fit の上下限はほぼ一致しているため，これらのアルゴリズムのさらなる解析を行ったとしても下限を改良することはできない．但し，Worst-Fit に関しては上下限に開きがあり，可能性は残されている．しかし，我々は Worst-Fit の上限を $\frac{4}{k-1}$ から $\frac{2}{k-2\sqrt{k-1}+2}$ に改良することで，その可能性がないことを示す．比例価格問題に関しては，上限を $\frac{4+2\sqrt{13}}{k+3+2\sqrt{13}} (\simeq \frac{11.2}{k+10.2})$ から $\frac{3+\sqrt{13}}{k-1+\sqrt{13}} (\simeq \frac{6.6}{k+2.6})$ に改良する．下限に関しても，First-Fit と Best-Fit の競合比の下限が $\frac{2}{k-1}$ となることを示し，これまで知られていた $\frac{1}{k-1}$ を改良する．これは，結果として，比例価格問題自体の下限の改良でもある．なお，これまでの下限は単にアルゴリズムが公正であるということから導かれたものであり，全てのオンラインアルゴリズムに当てはまる結果であったのに対し，我々の結果は First-Fit と Best-Fit の性質を考え，導きだされるものである．

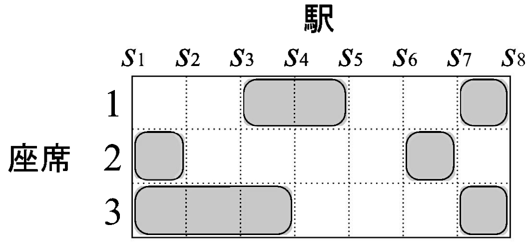

図 1　割り当て状況の例

関連研究　Boyar と Larsen は競合比とは別に入力列を **accommodating sequences** のみに制限し，acccommodating sequences のみを考慮した **accommodating ratio** というものを用いて，座席予約問題の解析を行った [4]．acccommodating sequences とは最適オフラインアルゴリズムが入力列の全ての要求を座席に割り当てることができるような入力列である．彼らは単一価格問題の acccommodating ratio の上下限がそれぞれ $\frac{8k-9}{10k-15}$ と $\frac{1}{2}$ となることを示した [4]．さらに，Bach らは acccommodating ratio の上限を改良し，上下限が $\frac{1}{2}$ で一致することを示した [1]．

また，acccommodating ratio に関して，いくつかの乱択アルゴリズムに関する結果が存在する．Boyar と Larsen はオブリビアスモデルにおいて，単一価格問題の acccommodating ratio の上限が $\frac{8k-9}{10k-15}$ となることを示した．そして，Bach らは acccommodating ratio の上下限を改良し，上下限が $\frac{7}{9}$ で一致することを示した [1]．

さらに，Boyar，Larsen，Nielsen は acccommodating ratio の一般化を行った [5]．彼らは変数 $\alpha (\geqq 1)$ を用いて，**α-列**を定義し，α-列を入力列とする場合の競合比を一般化 acccommodating ratio とした．α-列は最適オフラインアルゴリズムが αn 席の座席を用いることで，入力列の全てを座席に割り当てられるような入力列である．そして，彼らは単一価格問題の一般化 acccommodating ratio の上下限を解析した．Boyar らは α が 1 未満の場合も考慮し，First-Fit，Worst-Fit やその他のオンラインアルゴリズムの一般化 acccommodating ratio の上下限

(注1)：競合比が必ず 1 以上となるような定義が一般的であるが，過去の座席予約問題の慣例に従い，本論文ではこの定義を使用する．

表 1　これまでの競合比の上下限 [6]

	単一価格問題	比例価格問題
任意の決定性アルゴリズム	$r \leqq \frac{8}{k+5}$	$r \leqq \frac{4+2\sqrt{13}}{k+3+2\sqrt{13}} (\simeq \frac{11.2}{k+10.2})$
Worst-Fit	$\frac{2}{k} \leqq r \leqq \frac{4}{k+1}$	$r = \frac{1}{k-1}$
First-Fit/Best-Fit	$\frac{2}{k} \leqq r \leqq \frac{2-\frac{1}{k-1}}{k-1}$	$\frac{1}{k-1} \leqq r \leqq \frac{4}{k+2}$

表 2　改良後の競合比の上下限（太字で示されているのは本論文で改良した結果）

	単一価格問題	比例価格問題
任意の決定性アルゴリズム	$r \leqq \boldsymbol{\frac{4}{k-2\sqrt{k-1}+4}}$	$r \leqq \boldsymbol{\frac{3+\sqrt{13}}{k-1+\sqrt{13}} (\simeq \frac{6.6}{k+2.6})}$
Worst-Fit	$\frac{2}{k} \leqq r \leqq \boldsymbol{\frac{2}{k-2\sqrt{k-1}+2}}$	$r = \boldsymbol{\frac{1}{k-1}}$
First-Fit/Best-Fit	$\frac{2}{k} \leqq r \leqq \frac{2-\frac{1}{k-1}}{k-1}$	$\boldsymbol{\frac{2}{k-1}} \leqq r \leqq \frac{4}{k+2}$

を与えた [2].

また，Boyar と Medvedev は最適オフラインアルゴリズムの代わりに，オンラインアルゴリズムの性能比較を行う **relative worst order ratio** を用いてオンラインアルゴリズムの解析を行った [6]．そして，彼らは単一価格問題と比例価格問題において First-Fit と Best-Fit が Worst-Fit よりも relative worst order ratio の観点で優れていることを示した．

さらに，座席予約問題の派生的な問題もいくつか存在する．Boyar，Krarup，Nielsen は，各要求に対して x 回の席の移動を許す問題を提案した [3]．これは，各区間を最大 $x+1$ 個の区間に分割し，それぞれの区間を別々の座席に割り当てることと同等である．そして，彼らは競合比と acccommodating ratio に関していくつかの上下限を示した．

また，Kohrt と Larsen はオフライン問題とオンライン問題の間に位置する問題を提案した [7]．アルゴリズムは，要求を具体的にどの座席に割り当てるかは決定せず，以前に受け入れた要求に追加して割り当てることができるかどうかのみを決定する．そして，彼らは適切なデータ構造とアルゴリズムを提案し，そのアルゴリズムの実行時間が最適であることを証明した．

2. 単一価格問題

より良い理解のために，$k=4$ で $n=2$ の簡単な例を与える．(図 2 を参照.) そして，以下に示す入力列 σ を考える．$\sigma = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$ で，r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 はそれぞれ区間 $[1,2)$, $[3,4)$, $[1,4)$, $[2,4)$, $[1,2)$ を要求している．ここで，オンラインアルゴリズム A が r_1 と r_2 を座席 1 に割り当てたとする．すると，A は公正でなければならないため，r_3 を座席 2 に割り当てなければならない．そのため，r_4 と r_5 は割り当てられず，利益は 3 となる．一方，最適オフラインアルゴリズムは σ が与えられた時，r_1 と r_2 をそれぞれ座席 1 と座席 2 に割り当てることで，r_3 の割り当てを拒否し，r_4 と r_5 を割り当てることができる．そのため，利益は 4 となる．

2.1 上　　限

はじめに，単一価格問題の上限を改良する．

［**定理** 1］　単一価格問題に対する全てのオンラインアルゴリズムの競合比は $\frac{4}{k-2\sqrt{k-1}+4}$ 以下である．

証明.　任意のオンラインアルゴリズム A を考える．また，m と c をそれぞれ任意の正の整数とし，$k=m^2+1$ を駅の数，$n=2cm$ を座席の数と定義する．本証明において考えるアドバーサリは，はじめに要求列 σ_1 を与える．σ_1 は区間 $[1,2)$ に対する $2c$ 個の要求，区間 $[2,3)$ に対する $2c$ 個の要求, $\ldots$, 区間 $[m,m+1)$ に対する $2c$ 個の要求から成る．A は公正であるため，σ_1 の全ての要求を受理する．

ここで，A が σ_1 の要求を割り当てた座席の集合を R とする．一般に，A が σ_1 の要求を割り当てた状況を図 3 のように示すことができる．但し，図 3 の座席は適切に順序が入れ替えられている．領域 (i) は区間 $[m,m+1)$ の要求が割り当てられている座席の s_m, s_{m+1} 間の領域である．領域 (ii) は (i) の領域と同じ座席の s_1, s_m 間の領域である．つまり，(ii) では各座席に対して要求が割り当てられているか否かは不明である．領域 (iii) は s_1, s_m 間に少なくとも 1 つの要求が割り当てられている (i)（及び (ii)）とは異なる座席の s_1, s_m 間の領域である．領域 (iv) はその他の領域であり，どの要求も割り当てられていない．

続けて，アドバーサリは R の大きさに応じて，与える入力列を決める．アドバーサリは，$|R| < c(m+1)$ ならば，Case (1) を実行し，そうでなければ，Case (2) を実行する．

Case (1): アドバーサリは以下に示す入力列 σ_2, σ_3, σ_4 を順に与える．σ_2 は区間 $[1,k)$ に対する $2cm-|R|$ 個の要求から成り，σ_3 は区間 $[m,k)$ に対する $|R|-2c$ 個の要求から成る．さらに，σ_4 は区間 $[m+1,k)$ に対する $2c$ 個の要求から成る．A は公正であるため，σ_2, σ_3, σ_4 の全ての要求を受理する．そのため，σ_4 を割り当てた後，図 3 の領域 (iv) はこれらの要求によって埋まる．最後に，アドバーサリは区間 $[m,m+1)$ に対する $2cm-|R|$ 個の要求，区間 $[m+1,m+2)$ に対する $2cm-|R|$ 個の要求, $\ldots$, 区間 $[k-1,k)$ に対する $2cm-|R|$ 個の要求から成る入力列 σ_5 を与える．A は σ_5 を全て拒否するため，A の利益は $2cm+(2cm-|R|)+(|R|-2c)+2c$ となる．

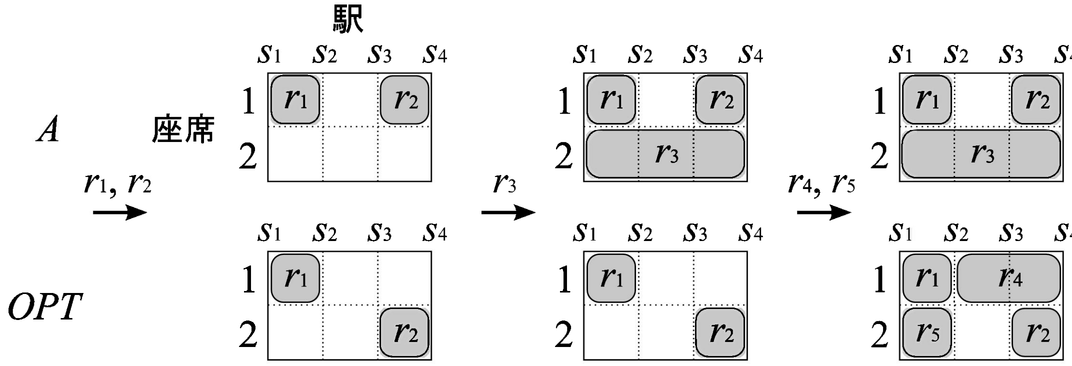

図 2　単一価格問題の例

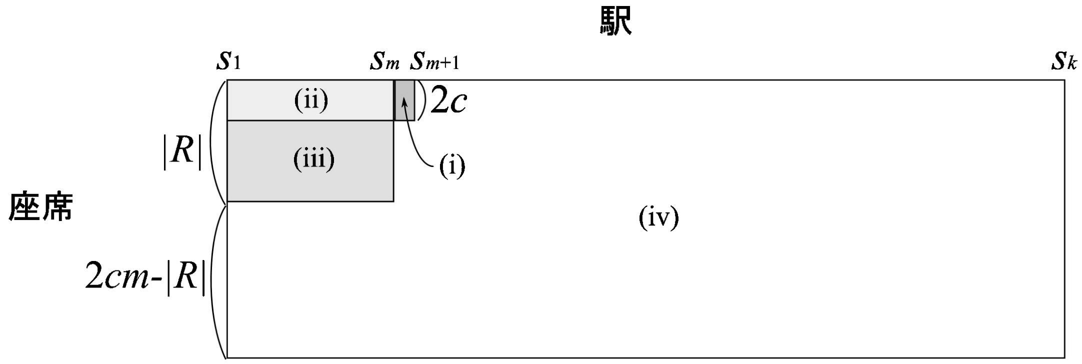

図 3　入力列 σ_1 に対するアルゴリズム A の割り当て状況

一方，σ_1 の各要求を異なる座席に割り当てるアルゴリズムを考える．すると，そのアルゴリズムは σ_2 の全ての要求を拒否し，σ_3, σ_4, σ_5 の全ての要求を受理することができる．そのため，最適オフラインアルゴリズムの利益は少なくとも $2cm + (|R| - 2c) + 2c + (k - m)(2cm - |R|)$ となり，$|R| < c(m+1)$ であることからこの場合の競合比は，高々

$$\frac{2cm + (2cm - |R|) + (|R| - 2c) + 2c}{2cm + (|R| - 2c) + 2c + (k - m)(2cm - |R|)}$$
$$= \frac{4cm}{2cm + |R| + (k - m)(2cm - |R|)}$$
$$< \frac{4}{k - 2\sqrt{k-1} + 4}$$

となる．

Case (2): アドバーサリは以下に示す入力列 σ_2, σ_2', σ_3, σ_4 を順に与える．σ_2, σ_3, σ_4 は Case (1) で用いたものと同じであり，σ_2' は区間 $[1, m+1)$ に対する $|R| - 2c$ 個の要求から成る．すると，A は σ_2, σ_3, σ_4 の全ての要求を受理し，σ_2' の全ての要求を拒否する．そのため，この場合も，図 3 の領域 (iv) は全て埋まる．最後に，アドバーサリは区間 $[m+1, m+2)$ に対する $|R| - 2c$ 個の要求，$[m+2, m+3)$ に対する $|R| - 2c$ 個の要求, ..., $[k-1, k)$ に対する $|R| - 2c$ 個の要求から成る入力列 σ_5' を与える．A は σ_5' を全て拒否するため，A の利益は $2cm + (2cm - |R|) + (|R| - 2c) + 2c$ となる．

一方，σ_1 の各要求を First-Fit を用いて割り当てるアルゴリズムを考える．すると，そのアルゴリズムは σ_3 の全ての要求を拒否し，σ_2, σ_2', σ_4, σ_5' の全ての要求を受理することができる．そのため，最適オフラインアルゴリズムの利益は少なくとも $2cm + (2cm - |R|) + (|R| - 2c) + 2c + (k - m - 1)(|R| - 2c)$ となり，$|R| \geqq c(m+1)$ であることから，この場合の競合比は，高々

$$\frac{2cm + (2cm - |R|) + (|R| - 2c) + 2c}{2cm + (2cm - |R|) + (|R| - 2c) + 2c + (k - m - 1)(|R| - 2c)}$$
$$= \frac{4cm}{4cm + (k - m - 1)(|R| - 2c)}$$
$$\leqq \frac{4}{k - 2\sqrt{k-1} + 4}$$

となる．□

2.2　Worst-Fit の上限

1 節において説明したように，Worst-Fit は要求された区間を含む空席の区間が最も長い座席に各要求を割り当てる．また，1 節において述べたように，Worst-Fit は単一価格問題の下限を改良するために用いることができると期待されるアルゴリズムの一つである．しかし，我々は Worst-Fit に対する上限を改良し，ほぼ下限と一致させることで，Worst-Fit を用いて単一価格問題の下限を改良することができないことを示す．

［定理 2］　単一価格問題における Worst-Fit の競合比は $\frac{2}{k - 2\sqrt{k-1} + 2}$ 以下である．

証明．　定理 1 の証明と同様に m と c を任意の正の整数とし，$k = m^2 + 1$, $n = 2cm$ とする．はじめに，区間 $[1, 2)$ に対する $2c$ 個の要求，区間 $[2, 3)$ に対する $2c$ 個の要求, ..., 区間 $[m, m+1)$ に対する $2c$ 個の要求から成る要求列 σ_1 を与える．すると，Worst-Fit はこれらの $n = 2cm$ 個の要求を全て異なる座席に割り当てる．次に，以下に示す要求列 σ_2, σ_3, σ_4 を順に与える．σ_2 は区間 $[1, m+1)$ に対する $2cm - 2c$ 個の要求から成り，σ_3 は区間 $[m, k)$ に対する $2cm - 2c$ 個の要求から成り，σ_4 は区間 $[m+1, k)$ に対する $2c$ 個の要求から成る．Worst-Fit

は σ_2 の要求を全て拒否し，σ_3 と σ_4 の全ての要求を受理する．そのため，σ_4 を割り当てた後，全ての座席の区間 $[m+1,k)$ は埋まっている．最後に，区間 $[m+1,m+2)$ に対する $2cm-2c$ 個の要求，区間 $[m+2,m+3)$ に対する $2cm-2c$ 個の要求，$\ldots$, 区間 $[m+2,m+3)$ に対する $2cm-2c$ 個の要求から成る要求列 σ_5 を与える．Worst-Fit は σ_5 の全ての要求を拒否するため，Worst-Fit の利益は $2cm+(2cm-2c)+2c$ となる．

一方，σ_1 の各要求を First-Fit を用いて割り当てるアルゴリズムを考える．すると，そのアルゴリズムは σ_2, σ_4, σ_5 の要求を全て受理し，σ_3 の全ての要求を拒否する．そのため，最適オフラインアルゴリズムの利益は少なくとも $2cm+(2cm-2c)+2c+(k-m-1)(2cm-2c)$ となり，この場合の競合比は，高々

$$\begin{aligned}&\frac{2cm+(2cm-2c)+2c}{2cm+(2cm-2c)+2c+(k-m-1)(2cm-2c)}\\&=\frac{4cm}{4cm+(k-m-1)(2cm-2c)}\\&=\frac{2}{k-2\sqrt{k-1}+2}\end{aligned}$$

となる．□

3. 比例価格問題

本節では比例価格問題の上下限の改良を行う．比例価格問題では，駅 s_i から駅 s_j へのチケットの価格は $j-i$ である．

3.1 上　限

［定理 3］ 比例価格問題に対する全てのオンラインアルゴリズムの競合比は $\frac{3+\sqrt{13}}{k-1+\sqrt{13}}$ 以下である．

証明. 任意のオンラインアルゴリズム A を考える．また，k を駅の数とし，ある正の整数 m に対して，$n=2m$ を満たす n を座席の数とする．はじめに，アドバーサリは区間 $[1,2)$ に対する m 個の要求から成る入力列 σ_1 と区間 $[2,3)$ に対する m 個の要求から成る入力列 σ_2 を入力として与える．ここで，A が σ_1 と σ_2 の両方の要求を割り当てた座席の集合を R とする．一般に，割り当て状況は図 4 のように示すことができる．図 4 において，割り当てられた領域は陰影によって示されている．

続けて，アドバーサリは R の大きさに応じて，与える入力列を決める．アドバーサリは $|R|<\frac{(\sqrt{13}-2)m}{3}$ ならば，Case (1) を実行し，そうでなければ，Case (2) を実行する．

Case (1): アドバーサリは以下に示す入力列 σ_3 と入力列 σ_4 を順に与える．σ_3 は区間 $[1,3)$ に対する $|R|$ 個の要求から成り，σ_4 は区間 $[1,k)$ に対する $m-|R|$ 個の要求から成る．A は σ_3 の全ての要求を受理し，σ_4 の全ての要求を拒否する．そのため，A の利益は $2m+2|R|$ となる．

一方，σ_1 の要求と σ_2 の要求を合わせて m 席の座席に割り当てるアルゴリズムを考える．すると，そのアルゴリズムは σ_3 と σ_4 の全ての要求を受理することができる．そのため，最適オフラインアルゴリズムの利益は少なくとも $2m+2|R|+(k-1)(m-|R|)$ となり，$|R|<\frac{(\sqrt{13}-2)m}{3}$ であることから，この場合の競合比は，高々

$$\begin{aligned}&\frac{2m+2|R|}{2m+2|R|+(k-1)(m-|R|)}\\&<\frac{2+2\frac{\sqrt{13}-2}{3}}{2+2\frac{\sqrt{13}-2}{3}+(k-1)(1-\frac{\sqrt{13}-2}{3})}\\&=\frac{3+\sqrt{13}}{k+2+\sqrt{13}}\end{aligned}$$

となる．

Case (2): アドバーサリは以下に示す入力列 σ_3, σ_4', σ_5' を順に与える．σ_3 は Case (1) と同様であり，σ_4' は区間 $[2,3)$ に対する $m-|R|$ 個の要求から成り，σ_5' は区間 $[2,k)$ に対する $|R|$ 個の要求から成る．A は σ_3 と σ_4' の全ての要求を受理し，σ_5' の全ての要求を拒否する．そのため，A の利益は $2m+2|R|+(m-|R|)$ となる．

一方，σ_1 の要求と σ_2 の要求を全て異なる座席に割り当てるアルゴリズムを考える．つまり，$2m$ 席の座席にそれぞれ 1 つの要求が割り当てられる．すると，そのアルゴリズムは σ_3 の全ての要求を拒否し，σ_4' と σ_5' の全ての要求を受理する．そのため，最適オフラインアルゴリズムの利益は少なくとも $2m+(m-|R|)+(k-2)|R|$ となり，$|R|\geqq\frac{(\sqrt{13}-2)m}{3}$ であることから，この場合の競合比は，高々

$$\begin{aligned}&\frac{2m+2|R|+(m-|R|)}{2m+(m-|R|)+(k-2)|R|}\\&\leqq\frac{3+\frac{\sqrt{13}-2}{3}}{3-\frac{\sqrt{13}-2}{3}+(k-2)\frac{\sqrt{13}-2}{3}}\\&=\frac{3+\sqrt{13}}{k-1+\sqrt{13}}\end{aligned}$$

となる．□

3.2 First-Fit と Best-Fit の下限

1 節において説明したように，First-Fit は各要求を割り当てることが可能な座席の中で最も小さな数が振られた座席に割り当て，Best-Fit は要求された区間を含む空席の区間が最も短い座席に割り当てる．我々はこれらのアルゴリズムの競合比の下限を改良し，結果的に比例価格問題自体の下限の改良を行う．

［定理 4］ 比例価格問題に対する First-Fit と Best-Fit の競合比はどちらも $\frac{2}{k-1}$ 以上である．

証明. 本証明では First-Fit（以下，FF）に対する証明を与える．Best-Fit に対する証明は同じであるために省略する．まず，k 駅に停まり，n 席の座席を持った列車と任意の入力列 σ を考える．もし，各座席に関して FF が割り当てる区間の合計長が 2 以上であれば，FF は $2n$ 以上の利益を得るのに対して最適オフラインアルゴリズム OPT は $(k-1)n$ 以下の利益しか得られないため，題意は満たされる．また，もし，FF が割り当てを行った結果，要求が割り当てられていない座席があった場合，FF は σ のどの要求も拒否していないため，競合比は 1 となり，題意は満たされる．従って，以後は全ての座席に要求が割り当てられており，さらに，長さ 1 の区間のみが割り当てられた座席が少なくとも 1 つある場合を考える．ここで，その座席を q とし，r を FF によって q に割り当てられた要求とする．さらに，r が割り当てられた区間を $I=[i,i+1)$ とする．もし，I に要求が割り当てられていない座席 q' があった場合，q と q' の要求が割り当てられた区間には重なりがないため，FF の定

図 4　入力列 σ_1 と入力列 σ_2 に対するアルゴリズム A の割り当て状況

義に反することになる．そのため，全ての座席の I には要求が割り当てられている．

次に，FF によって I を含む区間に割り当てられた要求集合を R_I とする．全ての座席の I には要求が割り当てられているため，$|R_I| = n$ である．ここで，R_I を $R_I^{(1)}$ と $R_I^{(\geqq 2)}$ に分類する．$R_I^{(1)}$ は長さ 1 の I に対する要求の集合とし，$R_I^{(\geqq 2)} = R_I \setminus R_I^{(1)}$，つまり，$I$ を含む長さ 2 以上の区間に対する要求の集合とする．(図 5 の上図を参照.) さらに，$S^{(1)}$ と $S^{(\geqq 2)}$ をそれぞれ $R_I^{(1)}$ が割り当てられた座席集合と $R_I^{(\geqq 2)}$ が割り当てられた座席集合とする．この時，$|S^{(1)}| = |R_I^{(1)}|, |S^{(\geqq 2)}| = |R_I^{(\geqq 2)}|$, $|S^{(1)}| + |S^{(\geqq 2)}| = n$ が成り立っている．

もし仮に，$R_I^{(1)}$ の中に OPT によって拒否された要求 r' があったとする．OPT によって I を含む区間に割り当てられた要求集合を R' とした時，OPT は公正であるにも関わらず r' を拒否したため，$|R'| = n$ であり，R' の各要求は r' より先に与えられている．さらに，r' が FF によって受理され，OPT によって拒否されているため，R' の中に FF によって拒否された要求 r'' が存在する．ここで，$r'' \in R'$ であるため，r'' は r' より先に与えられているが，FF が r'' を拒否して r' を割り当てているため，r'' によって要求された区間の長さは 2 以上である．その上，r' が割り当てられる座席 q'' の区間 I には，FF が r'' を拒否した際に，要求が割り当てられておらず，それ以外のどこかの区間に割り当てが行われている．FF が r'' を拒否した際に，既に r が与えられ，FF が r を q に割り当てていたとすると，q と q'' の割り当てられた区間に重なりがないため，FF の定義に反する．従って，r はまだ与えられていないことがわかる．しかし，FF が r'' を拒否した際に，q にはどの要求も割り当てられていないことになり，FF は r'' を q に割り当てることができたことになり，FF の定義に矛盾する．つまり，$R_I^{(1)}$ の要求は全て OPT によって受理されることがわかる．

ここで，OPT によって $R_I^{(1)}$ の要求が割り当てられた座席集合を S とし，OPT によって S に割り当てられた要求集合を $R(S)$ とする．さらに，$\overline{R} = R(S) \setminus R_I^{(1)}$ とする．(図 5 の下図を参照.) FF は公正であり，FF が割り当てを行った座席 q には最終的に区間 I に対する要求のみが割り当てられているため，FF は $\overline{R}$ の全ての要求を割り当てていることがわかる．また，$\overline{R}$ の要求は I を含む区間に対する要求ではないため，$\overline{R}$, $R_I^{(1)}$, $R_I^{(\geqq 2)}$ は全て互いに素である．

要求集合 X に対し，X の要求に対するチケットの合計価格を $p(X)$ とすると，$|S^{(1)}| = |S|$, $|S^{(1)}| + |S^{(\geqq 2)}| = n$ より，FF の利益は $p(R_I^{(1)}) + p(R_I^{(\geqq 2)}) + p(\overline{R}) \geqq |S^{(1)}| + 2|S^{(\geqq 2)}| + p(\overline{R}) = |S| + 2(n - |S|) + p(\overline{R})$ 以上となる．OPT の利益は $(k-1)(n-|S|) + |S| + p(\overline{R})$ 以下となる．よって，FF の利益と OPT の利益を比較すると，

$$\frac{p_{FF}(\sigma)}{p_{OPT}(\sigma)} \geqq \frac{2(n-|S|) + |S| + p(\overline{R})}{(k-1)(n-|S|) + |S| + p(\overline{R})} \geqq \frac{2}{k-1}$$

となり，題意を満たす．□

4. おわりに

我々は座席予約問題の単一価格問題と比例価格問題において競合比の上下限の解析を改良した．今後の課題は更なる解析を行い，上下限のギャップを縮めることである．

単一価格問題のより良い下限を求めるためには，本論文において扱った First-Fit，Best-Fit，Worst-Fit とは別のアルゴリズムを解析する必要がある．また，比例価格問題に関しては，First-Fit と Best-Fit の上下限にまだ開きがあるため（表 2 を参照），これらのアルゴリズムの解析を進め，上下限の開きを縮めることが今後の課題と考えられる．最後に，この方向性に関して，短い展望を述べる．

座席予約問題を少し変形した**環状線モデル**というモデルを考える．つまり，$s_k = s_1$ となっているモデルである．そして，区間 $[j, i)$ $(j > i)$ に対する要求があり得るものとする．乗客は駅 s_j で乗車し，駅 s_k を通過し，駅 s_i で降車する．(正確に考えれば，周回数を考える必要があるが，本モデルでは周回数は 1 しかなく，例えば，区間 $[2, 4)$ と区間 $[5, 3)$ は重なるものとする．この定義は実用的なものではないが，以下で述べるように，First-Fit と Best-Fit の解析を行う上で有用なものである.) 本モデルにおいて，First-Fit と Best-Fit の上下限は $\frac{2}{k-1}$ で一致する．上限に関しては以下で示す．下限に関しては定理 4 の証明が環状線モデルでもそのまま成り立つ．このことから，First-Fit と Best-Fit の下限を改良するためには，環状線モデルでは成立しない議論が必要になることがわかる．

環状線モデルにおける First-Fit と Best-Fit の上限の改良に関する証明　本証明では First-Fit（以下，FF）に対する証明を与える．Best-Fit に対する証明は全く同じであるため，省略

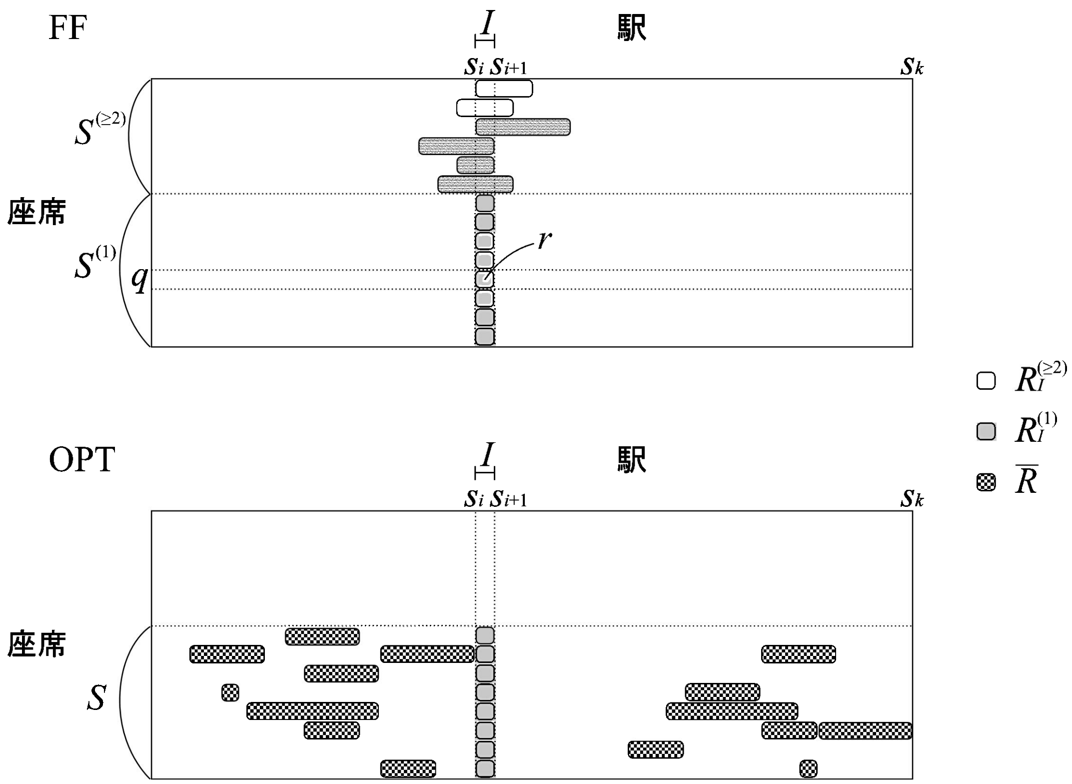

図 5　σ に対する FF と OPT の割り当て状況

する．まず，k を駅の数，$n = 2m$ を座席の数とする．そして，以下の入力列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5$ を FF に順に与える．σ_1 は区間 $[1, 2)$ に対する m 個の要求，σ_2 は区間 $[2, 3)$ に対する m 個の要求，σ_3 は区間 $[1, 3)$ に対する m 個の要求，σ_4 は区間 $[2, k)$ に対する m 個の要求，σ_5 は区間 $[3, 2)$ に対する m 個の要求から成る．

すると，FF は $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の全ての要求を受理し，σ_4 と σ_5 の全ての要求を拒否する．そのため，FF の利益は $4m$ となる．一方，最適オフラインアルゴリズムは σ_1 と σ_2 の全ての要求を異なるシートに割り当て，σ_3 の全ての要求を拒否し，σ_4 と σ_5 の全ての要求を受理することで，$2m(k-1)$ の利益を得る．すると，$\frac{2}{k-1}$ という上限が得られる．

謝　　辞

本研究は科研費（19200001，20700009，22700257）の助成を受けたものである．

文　　献

[1] Bach, E., Boyar, J., Epstein, L., Favrholdt, L.M., Jiang, T., Larsen, K.S., Lin, G.-H., Van Stee, R.: Tight bounds on the competitive ratio on accommodating sequences for the seat reservation problem. Journal of Scheduling 6(2), 131–147 (2003)

[2] Boyar, J., Favrholdt, L.M., Larsen, K.S., Nielsen, M.N.: Extending the accommodating function, Acta Informatica 40(1), 3–35 (2003)

[3] Boyar, J., Krarup, S., Nielsen, M.N.: Seat reservation allowing seat changes, Journal of Algorithms 52(2), 169–192 (2004)

[4] Boyar, J., Larsen, K.S.: The seat reservation problem, Algorithmica 25(4), 403–417 (1999)

[5] Boyar, J., Larsen, K.S., Nielsen, M.N.: The accommodating function: a generalization of the competitive ratio, SIAM Journal on Computing 31(1), 233–258 (2001)

[6] Boyar, J., Medvedev, P.: The relative worst order ratio applied to seat reservation, ACM Transactions on Algorithms 4(4), Article No. 48 (2008)

[7] Kohrt, J.S., Larsen, K.S.: Online seat reservation via offline seating arrangements, International Journal of Foundations of Computer Science 16(2), 381–397 (2005)