

KÜZÖS ELEMÉK MÁSODRENDŰ REKURZÍV SOROZATOKBAN

DR. KISS PÉTER

Legyen $G = G(A, B, G_0, G_1)$ egy másodrendű lineáris rekurzív sorozat, melyet az A, B, G_0 és G_1 racionális egészekkel és a

$$G_n = AG_{n-1} - BG_{n-2} \quad (n > 1)$$

rekurzív formulával definiálunk. Legyenek α és β a sorozat

$$f(x) = x^2 - Ax + B$$

karakterisztikus polinomjának a gyökei és tegyük fel, hogy a sorozat nem degenerált, vagyis $AB \neq 0$, G_0 és G_1 nem mindkettője nulla és α/β nem egységgyök. Jól ismert, hogy a sorozat tagjainak explicit előállítására

$$(1) \quad G_n = \frac{a\alpha^n - b\beta^n}{\alpha - \beta},$$

ahol $a = G_1 - G_0\beta$ és $b = G_1 - G_0\alpha$, továbbá

$$(2) \quad |G_n| > c_1 \cdot |\alpha|^n n^{-c_2}$$

ha $n > n'$, ahol c_1, c_2 és n' a sorozat adataiból explicit meghatározható konstansok (lásd pl. [3]-ban).

A G sorozat speciális esetét, amikor $G_0 = 0$ és $G_1 = 1$, a következőkben R -rel jelöljük. Az R sorozat tagjai (1) alapján

$$(3) \quad R_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

alakban írhatók fel.

(2)-ből adódik, hogy minden R és minden G sorozatban, ha α/β nem egységgyök, bármely x valós szám esetén $|R_n| > x$, illetve $|G_n| > x$ ha $n > n_0(A, B, x)$, illetve $n > n_0(A, B, G_0, G_1, x)$. Ebből következik, hogy a sorozatokban minden elem csak véges sok elemmel lehet egyenlő. K. K. Kubota [4, 5] ennél többet bizonyított: ha egy G sorozatban α/β nem egységgyök, akkor a sorozatban minden elem legfeljebb négyszer fordulhat elő. F. Beukers [1] javította

ezt az eredményt, megmutatta, hogy néhány kivételtől eltekintve a négyes konstans hárommal helyettesíthető.

Hasonló probléma a következő. Legyen $G = G(A, B, G_0, G_1)$ és $H = H(A, B, H_0, H_1)$ két másodrendű lineáris rekurzív sorozat, melyeket ugyanazok az A, B konstansok definiálják. A két sorozat közül elemeinek halmaza véges-e vagy végtelen? Ha G és H ekvivalens sorozatok (vagyis ha $G_{n+r} = H_{n+s}$ minden $n \geq 0$ egész esetén valamely rögzített r és s természetes számok mellett) akkor nyilván végtelen sok közös elem létezik, ezért csak azzal az esettel érdemes foglalkozni, amikor G és H nem ekvivalensek. Ebben az esetben, a sorozatok tagjainak explicit alakja alapján, G. Revuz [8] egy általános tétele ad választ a kérdésre; bebizonyította, hogy ha $a_i (1 \leq i \leq M)$, $b_j (1 \leq j \leq N)$, θ és φ algebrai számok, θ és φ lineárisan függetlenek az egész számok felett, akkor a

$$\sum_{i=1}^M a_i \theta^{m_i} = \sum_{j=1}^N b_j \varphi^{n_j}$$

egyenletnek csak véges sok m_i, n_j racionális egész megoldása van, eltekintve attól az esettől, mikor mindkét oldal zérus. Ebből pedig következik, hogy a $G_x = H_y$ egyenlet (x, y) megoldásainak száma is véges, vagyis valamely m_0 konstans esetén $G_x \neq H_y$, ha $x > m_0$.

Hasonló eredményt bizonyított M. Mignotte [7]. Ő a tételét tetszőleges rendű lineáris rekurzív sorozatokra mondta ki. állítása a mi esetünkre leszűkítve a következőt mondja ki: Ha $D > 0$ és a, β nem egységgyök, akkor létezik egy effektív meghatározható m_0 konstans úgy, hogy $G_x \neq H_y$ ha $x, y > m_0$. F. Mátyás [6] különböző A, B konstansokkal generált másodrendű sorozatok esetéén ezeket a konstansokat explicit alakban is megadta, azonban ezek nagyságrendje jelenleg még számítógéppel sem érhető el.

Az $A = -B = 1$ esetre (általános Fibonacci sorozatokra) M. D. Hirsch [2] konkrétabb eredményt bizonyított: Ha $G(1, -1, G_0, G_1)$ és $H(1, -1, H_0, H_1)$ nem ekvivalens sorozatok, akkor a G és a H sorozatoknak nincs $c(\sqrt{5}-1)$ -nél nagyobb abszolút értékű közös elemük, ahol $c = \max(|G_1 G_3 - G_2^2|, |H_1 H_3 - H_2^2|)$

A következőkben általánosítjuk M. D. Hirsch eredményét a $D = A^2 - 4B > 0$ feltételnek eleget tevő általános másodrendű sorozatokra, és egyben javítjuk Revuz és Mignotte eredményeinek másodrendű sorozatokra vonatkozó állítását, megadva az m_0 konstans explicit értékét.

Vezessük be a következő jelöléseket. Legyenek A és B rögzített nem zérus egészek, $G = G(A, B, G_0, G_1)$ és $H = H(A, B, H_0, H_1)$ két másodrendű lineáris rekurzív sorozat, melyekre $D = A^2 - 4B > 0$, és G_0, G_1 , illetve H_0, H_1 nem mindkettője zérus. Legyen G és H tagjainak explicit előállítás

$$G_n = \frac{a\alpha^n - b\beta^n}{\alpha - \beta}$$

és

$$H_n = \frac{p\alpha^n - q\beta^n}{\alpha - \beta}$$

ahol $a = G_1 - G_0\beta$, $b = G_1 - G_0 a$, $p = H_1 - H_0\beta$, $q = H_1 - H_0 a$ és tegyük fel, hogy α/β nem egységgyök. Továbbá legyen

$$\underline{m} = \max(|G_0|, |H_0|, |G_1|, |H_1|),$$

$$\underline{w} = \max(|b|, |q|),$$

$$\underline{n}_0 = \frac{1}{\log |\beta/\alpha|} \cdot \log \frac{|\alpha|}{2\underline{w}},$$

$$\underline{z} = \frac{\log |p/a|}{\log |\alpha|}$$

és

$$\varepsilon = \min \left(\frac{1}{4}, \frac{1 - |a/p| \cdot |\alpha|^{|\underline{z}|}}{4}, \frac{|a/p| \cdot |\alpha|^{|\underline{z}|+1} - 1}{4} \right)$$

A feltételek miatt a és β valós és $|\alpha| \neq |\beta|$, ezért a továbbiakban feltehetjük, hogy $|\alpha| > |\beta| \neq 0$.

Ezen jelöléseket felhasználva a következőket bizonyítjuk.

2. *Tétel.* Ha a G és H sorozatok nem ekvivalensek és $|\beta| < 1$, akkor nincs olyan közös elemük, melyek indexei nagyobbak mint $n_0 + 1$.

Következmény. Az $F = F(1, -1, 0, 1)$ Fibonacci és az $L = L(1, -1, 2, 1)$ Lucas sorozatoknak csak $1 (= F_1 = F_2 = L_1)$ és $3 (= F_4 = L_2)$ a közös elemük. Ugyanis ebben az esetben $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$, $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$ és $w = \sqrt{5}$, és könnyű ellenőrizni, hogy $n_0 < 3$. Így $F_i = L_j$ csak akkor teljesülhet az 1. Tétel miatt, ha $i < 3$ vagy $j < 3$. Ezekben az esetekben pedig közvetlenül belátható, hogy csak a felsoroltak a közös elemek.

2. *Tétel.* Ha a G és H sorozatok nem ekvivalensek, $B < 0$ és $|\beta| < 1$, akkor nincs olyan közös elemük, melyek abszolút értéke legalább $6mw|B|^{n_0}$.

3. *Tétel.* Ha $a \neq 0$, $p \neq 0$ és a G és H sorozatok nem ekvivalensek, akkor nincs olyan közös elemük, melyek indexei nagyobbak mint

$$n_1 = \max \left(\frac{\log \varepsilon - \log |b/a|}{\log |\beta/\alpha|}, \frac{\log \varepsilon - \log |q/p|}{\log |\beta/\alpha|} \right)$$

Megjegyezzük, hogy a 3. Tétel nem igaz, ha elhagyjuk az $a \neq 0$, $p \neq 0$ feltételeket. Ugyanis $G = G(6, 8, 1, 4)$ és $H = H(6, 8, 1, 2)$ sorozatok esetén $A = 6$, $B = 8$ miatt $\alpha = 4$, $\beta = 2$ és $p = H_1 - H_0\beta = 0$, a tagok explicit előállítására pedig $G_n = 2^{2n}$, $H_n = 2^n$. Így a $G_x = H_y$ egyenletnek végtelen sok megoldása van, de a két sorozat nem ekvivalens.

1. Tétel bizonyítása. n_0 megválasztása miatt

$$\left| \frac{w\beta^{n_0}}{\alpha} \right| = \frac{1}{2}$$

(az n_0 konstansnak van értelme, mert $w = 0$ és $G_x = H_y$ esetén G és H ekvivalens sorozatok lennének), így $|\beta| < 1$ miatt

$$(4) \quad \left| \frac{b\beta^n}{\alpha} \right| < \frac{1}{2} \quad \text{és} \quad \left| \frac{q\beta^n}{\alpha} \right| < \frac{1}{2}$$

ha $n > n_0$. Legyen $G_{r+1} = H_{s+1} = Q$ és $r, s > n_0$. Könnyű belátni (1) segítségével, hogy

$$\frac{G_{n+1}}{\alpha} - G_n = \frac{b}{\alpha} \beta^n$$

minden n természetes szám index esetén, ezért (4) alapján

$$\left| \frac{Q}{\alpha} - G_r \right| = \left| \frac{b}{\alpha} \beta^r \right| < \frac{1}{2}$$

és

$$\left| \frac{Q}{\alpha} - H_s \right| = \left| \frac{q}{\alpha} \beta^s \right| < \frac{1}{2}$$

adódik. Ebből következik, hogy G_r és H_s a $\frac{Q}{\alpha}$ valós számhoz legközelebbi egészek így $G_r = H_s$. De ez $G_{n+1} = H_{s+1}$ egyenlőséggel együtt azt mutatja, hogy a G és H sorozatok ekvivalensek, tehát igaz a tétel állítása.

2. Tétel bizonyítása. Először belátjuk, hogy a tétel feltételei mellett

$$(5) \quad |R_n| \leq |\alpha|^{n-1}$$

minden $n > 0$ természetes szám esetén. A bizonyítást n -re teljes indukcióval végezzük el. $n = 1$ és $n = 2$ esetén $R_1 = 1$ és $R_2 = A$ miatt igaz az állítás, mert α és β különböző előjelű és így $|A| = |\alpha + \beta| < |\alpha|$.

Ha (5) fennáll valamely n és $n + 1$ esetén, akkor $A = \alpha + \beta$ és $B = \alpha\beta < 0$ miatt

$$\begin{aligned} |R_{n+2}| &= |AR_{n+1} - BR_n| \leq |\alpha|^{n-1} (|A| \cdot |\alpha| - \alpha\beta) = \\ &= |\alpha|^{n+1} \cdot \left(\left| \frac{\alpha + \beta}{\alpha} \right| - \frac{\beta}{\alpha} \right) = |\alpha|^{n+1}, \end{aligned}$$

mivel $-1 < \frac{\beta}{\alpha} < 0$, ezért (5) valóban teljesül minden $n > 0$ esetén.

Ezek után rátérünk a tételben szereplő állítás bizonyítására. Az n_0 konstans megválasztása miatt

$$(6) \quad \left| \frac{w}{\alpha} \beta^n \right| \begin{cases} < \frac{1}{2} & \text{ha } n > n_0 \\ \cong \frac{1}{2} & \text{ha } n \leq n_0 \end{cases}$$

(1) és (3) alapján könnyű belátni, hogy

$$G_n = G_0 a^n + (G_1 - G_0 a) \cdot R_n,$$

ezért (5) felhasználásával

$$N = \max(|G_n|, |H_n|) \leq m|a|^n + w|R_n| \leq m|a|^n + w|a|^{n-1}$$

adódik. De ha $n \leq n_0 + 1$, akkor $\alpha\beta = B$ miatt (6)-ból

$$|a|^n = |a| \cdot |a|^{n-1} = |a| \cdot \frac{|B|^{n-1}}{|\beta|^{n-1}} = \frac{|a|}{w|\beta|^{n-1}} \cdot w|B|^{n-1} \leq 2w|B|^{n-1}$$

adódik. Így $n \leq n_0 + 1$ esetén, felhasználva hogy $w \leq m + m|a|$ és $|a| > 1$,

$$\begin{aligned} N &\leq 2mw|B|^{n-1} + \frac{w}{|a|} \cdot 2w|B|^{n-1} \leq 2w|B|^{n_0} \left(m + \frac{w}{|a|} \right) \leq \\ &\leq 2mw|B|^{n_0} \left(1 + \frac{1+|a|}{|a|} \right) < 6mw|B|^{n_0}. \end{aligned}$$

Ebből már következik az állítás az 1. Tétel miatt.

3. Tétel bizonyítása. Először belátjuk, hogy a $G_x = H_y$, vagy ami ezzel ekvivalens, az

$$(7) \quad a a^x - b \beta^x = p a^y - q \beta^y$$

egyenletnek, csak véges sok $(x; y)$ egész megoldása van, ha G és H nem ekvivalens sorozatok. Tegyük fel az állítás ellenkezőjét, vagyis hogy végtelen sok $(x; y)$ megoldása van (7)-nek. $a \neq 0$ és $p \neq 0$ miatt (7)-ből

$$(8) \quad \frac{a^{x-y}}{p} = \frac{1 - \frac{p}{q} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^y}{1 - \frac{b}{a} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^x}$$

következik. A bal oldal egész x, y esetén 1 környezetében csak diszkrét értékeket vehet fel, a jobb oldal határértéke viszont 1, ha x és y a végtelenhez tart, ezért végtelen sok $(x; y)$ egész értékpárra csak akkor állhat fenn az egyenlőség, ha

$$\frac{a}{p} \alpha^{x-y} = 1,$$

vagyis

$$a\alpha^x = p\alpha^y$$

valamely $(x; y)$ esetén. Ebből azonban $b\beta^x = q\beta^y$ és $G_{x+n} = H_{y+n}$ adódik minden n természetes számra, vagyis G és H ekvivalens sorozatok.

Tehát ha G és H nem ekvivalensek, akkor létezik olyan n_1 valós szám úgy, hogy $G_x \neq H_y$, ha $x, y > n_1$. A következőkben belátjuk, hogy a tételben megadott n_1 rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

z megválasztása miatt $\left| \frac{a}{p} \alpha^z \right| = 1$ és z nem egész szám, mert ha z egész

lenne, akkor az előzőkhez hasonlóan következne, hogy G és H ekvivalensek. Ekkor azonban $|\alpha| > 1$ miatt.

$$\left| \frac{a}{p} \alpha^i \right| < 1 < \left| \frac{a}{p} \alpha^j \right|,$$

ha $i \leq [z]$ és $j \geq [z] + 1$. Legyen

$$x > \frac{\log \varepsilon - \log |b/a|}{\log |\beta/\alpha|}$$

és

$$y > \frac{\log \varepsilon - \log |q/p|}{\log |\beta/\alpha|}$$

Nyilván $x, y > n_1$ is teljesül, ahol n_1 a tételben definiált konstans. Ekko

$$\left| \frac{b}{a} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^x \right| < \varepsilon \quad \text{és} \quad \left| \frac{q}{p} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^y \right| < \varepsilon$$

Ezeket felhasználva (8)-ból

$$1 - 4\varepsilon < \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} < \left| \frac{a}{p} \alpha^{x-y} \right| < \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} < 1 + 4\varepsilon$$

adódik, ami viszont egész x, y esetén nem teljesülhet ε választása miatt. Ebből már következik az állítás.

IRODALOM

1. F. Beurkers, The multiplicity of binary recurrences, *Comp. Math.*, 40 (1980), 251—267.
2. M. D. Hirsch, Additive sequences, *Math. Mag.*, 50 (1977), 262.
3. P. Kiss, Zero terms in second order linear recurrences *Math. Sem. Not. (Kobe Univ. Japan)*, 7 (1979), 145—152.
4. K. K. Kubota, On a conjecture of Morgan Ward I, *Acta Arithm.*, 33 (1977), 11—28.
5. K. K. Kubota, On a conjecture of Morgan Ward II, *Acta Arithm.*, 33 (1977), 29—48.
6. F. Mátyás, On common terms of second order linear recurrences, *Mat. Sem. Not. (Kobe Univ. Jappan)*, 9 (1981), 89—97.
7. M. Mignotte, Intersection des images de certaines suites récurrentes lineaires, *Theoretical Comput. Sci.*, 7 (1978), 117.—122
8. G. Revuz, Equations deiphantines exponentielles, *Bull. Soc. Math. France, Mém.*, 37 (1974), 139—156.

COMMON TERMS IN SECOND ORDER RECURRENCES

by Péter Kiss

(Summary)

Let $G = G(A, B, G_0, G_1)$ be a second order linear recurrence defined by rational integers A, B, G_0, G_1 and by recursion $G_n = AG_{n-1} - BG_{n-2}$ for $n > 1$. We denote the roots of polynomial $x^2 - Ax + B$ by α and β . Let us suppose that $AB \neq 0$, G_0 and G_1 are not both zero, $D = A^2 - 4B > 0$, α/β is not a root of unity and $|\alpha| > |\beta|$. Let $H = H(A, B, H_0, H_1)$ be also a second order linear recurrence with similar conditions. The sequences G and H are called equivalent if there exist integers r and s such that $G_{n+r} = H_{n+s}$ for every integer $n \geq 0$.

The following three theorems are proved in the paper.

Theorem 1. If the sequences G and H are not equivalent and $|\beta| < 1$ then the equation $G_x = H_y$ has no solutions with condition $x, y > n_0 + 1$. *Theorem 2.* If the sequences G and H are not equivalent, $B < 0$ and $|\beta| < 1$ then the equation $G_x = H_y$ has no solutions with condition $|G_x| \geq 6mw|B|^{n_0}$. *Theorem 3.* Let the explicit form of the terms of sequences G and H be $G_n = (a\alpha^n - b\beta^n) / (\alpha - \beta)$ and $H_n = (p\alpha^n - q\beta^n) / (\alpha - \beta)$ respectively. Suppose that the sequences G and H are not equivalent and $ap \neq 0$. Then the equation $G_x = H_y$ has no solutions for which $x, y > n_1$.

The constants n_0, n_1, m and w in the theorems are given in the paper and they depend only on the parameters of sequences G and H .