# MÁSODRENDŰ LINEÁRIS REKURZÍV SOROZATOK TAGJAINAK SZINUSZAIRÓL

*H. MOLNÁR SÁNDOR*

Legyen a $G = \{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ másodrendű lineáris rekurzív sorozat definiálva a $G_0$, $G_1$, A, B egész számokkal és a

$$G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2}$$

ha $n > 1$, rekurzióval. Tegyük fel, hogy $AB \neq 0$, $A^2+4B > 0$ és hogy $G_0$ és $G_1$ értéke egyidejűleg nem zérus.
Jól ismert, hogy a G sorozat elemei a

$$G_n = a\alpha^n - b\beta^n$$

Binet formulával kifejezhetők explicit alakban, ahol $\alpha$ és $\beta$ a G sorozat $x^2 - Ax - B$ karakterisztikus polinomjának zérushelyei, továbbá

$$a = \frac{G_1 - G_0\beta}{\alpha - \beta}, \; b = \frac{G_1 - G_0\alpha}{\alpha - \beta}$$

(V.ö. I. Niven és H. S. Zuckermann [9] 91, o.).
Dolgozatunkban a karakterisztikus polinom zérushelyei közül mindig a nem kisebb abszolút értékűt fogjuk $\alpha$-val jelölni: $|\alpha| \geq |\beta|$, Az $A^2+4B > 0$ feltételünkből következik, hogy $\alpha$ és $\beta$ valós számok és $|\alpha| \neq |\beta|$.
Az $A = B = 1$ speciális esetben a G sorozatot Fibonacci típusú sorozatnak nevezzük, és elemeit $u_0, u_1, u_2, \ldots$-vel jelöljük.

Olyan konvergencia vizsgálatot, mely másodrendű lineáris rekurzív sorozatokhoz kapcsolódik már számos szerző végzett. Például Kiss Péter [5] és Mátyás Ferenc [7] $G_{n+i}/G_n$ (i rögzített) típusú hányadosok konvergenciájára [illegible] ximációval kapcsolatos tételeket.



W. Gerdes [2] eltekintett attól, hogy a G sorozat kezdő értékei és az A, B konstansok egész számok, helyette tetszőleges valós számokat megengedett. Meghatározta $G_0, G_1, A, B \in R$ és $G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2}$ (ha $n > 1$) esetén a $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat konvergenciájának feltételét. Eredménye szerint ahhoz, hogy a $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat konvergens legyen az A és B számoknak egy – általa meghatározott – síkbeli tartományba kell esnie. Eredményeit [3]-ban általánosította harmadrendű lineáris rekurzív sorozatokra.

A $\{G_n x\}_{n=0}^{\infty}$ (ahol x egy valós szám) modulo 1 konvergenciájával és eloszlásával foglalkoznak Kiss Péter és Molnár Sándor a [6]-ban.
M. B. Gregori és J. M. Metzger [4]-ben a

$$\lim_{n\to\infty} \sin(u_n x\pi)$$

határértéket vizsgálják, ahol x egy valós szám. Megmutatják, hogy ez a határérték akkor és csak akkor létezik, ha $x \in Q(\sqrt{5})$, továbbá, hogy ilyenkor értéke szükségképpen zérus. ($Q(\sqrt{5})$-el jelöltük a racionális számtest $\sqrt{5}$-tel való bővítését.) A [8]-ban eredményüket általánosítottuk olyan másodrendű lineáris rekurzív sorozatokra, melyeknek az egyik definiáló konstansa $B = 1$, tehát melyek a $G_0$, $G_1$, A egész számokkal és a

$$G_n = AG_{n-1} + G_{n-2}$$

ha $n > 1$, rekurzióval vannak meghatározva. Ugyanitt rámutattunk, hogy a $\{\sin(G_n x\pi)\}_{n=0}^{\infty}$ és a $\{G_n x\}_{n=0}^{\infty}$ moduló 1 sorozatok konvergenciái nem ekvivalens problémák.
A [8]-beli módszerek felhasználásával általánosabb esetekben is tanulmányozhatjuk a

$$\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi) \tag{1}$$

határértéket, ahol x egy valós szám.
Jelen dolgozatunkban példát mutatunk arra, hogyan lehet az (1) határérték létezésének feltételét megadni, illetve értékét kiszámítani, ha a G sorozat karakterisztikus polinomjának egyik zérushelye Pisot- Vijajaraghavan-féle (a továbbiakban PV) szám (Az $\alpha > 1$ valós algebrai egész számot PV számnak nevezzük, ha valamennyi $\alpha$-tól különböző konjugáltjainak abszolút értéke egynél kisebb, ld. J. W. S. Cassels [1] 133–134. old.)

TÉTEL: Legyen a G másodrendű lineáris rekurzív sorozat definiálva a $G_0$,$G_1$ egész számokkal és a $G_n = 4G_{n-1} + 3G_{n-2}$ ha $n > 1$, rekurzióval. Tegyük fel, hogy $G_0^2 + G_1^2 \neq 0$. Legyen x egy valós szám. A

$$\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi)$$

határérték akkor és csak akkor létezik, ha x eleget tesz az

$$x = \frac{2(c_1 - c_2\beta) + (d_1 - d_2\beta)}{(G_1 - G_0\beta)\cdot\alpha^e}$$

formulának, ahol $c_1$, $c_2$, e tetszőleges egész számok és $d_1$, $d_2$ egész számok, vagy $d_1 = d_2 = \frac{k}{3}$, ahol k valamely egész szám.

Ekkor

$$\lim_{n \to \infty} \sin (G_n x\pi) = \sin (d_1\pi)$$

*Bizonyítás:* Legyenek x és q olyan valós számok melyekkel

$$\lim_{n \to \infty} \sin (G_n x\pi) = \sin(q\pi). \tag{2}$$

Nem megy az általánosság rovására, ezért feltételezzük, hogy

$$-\frac{1}{2} \leq q \leq \frac{1}{2}.$$

Legyen a valós számok $g_n'$ sorozata definiálva a

$$G_n x \equiv g_n' \pmod 2$$

kongruenciával és a $-1 < g_n' \leq 1$ feltétellel.
A (2)-ből következik, hogy bármely $\varepsilon > 0$ valós számhoz van olyan $N = N(\varepsilon)$ természetes szám, hogy $q \geq 0$ esetén

$$|g_n' - q| < \varepsilon \tag{3}$$

vagy

$$|g_n' - (1-q)| < \varepsilon \tag{4}$$

$q < 0$ esetén

$$|g_n' - q| < \varepsilon \tag{3'}$$

vagy

$$|g_n' - (-1-q)| < \varepsilon \tag{5}$$

teljesül minden $n \geqslant N$ egész számra, mert
$\sin(q\pi) = \sin((1-q)\pi)$ vagy $\sin (q\pi) = \sin ((-1-q)\pi)$ aszerint, hogy $0 \leqslant q \leqslant \frac{1}{2}$ vagy $-\frac{1}{2} \leqslant q < 0$.

Ha $|q| \neq \frac{1}{2}$, $0 < \varepsilon < \min\left\{\left|\frac{q-(1-q)}{2}\right|, \left|\frac{q-(-1-q)}{2}\right|\right\}$

és $n \geqslant N = N(\varepsilon)$, akkor a (3), (4), (3'), (5) egyenlőtlenségek közül egy és csak is egy teljesül, bármely $n \geqslant N$ egész számra.

Legyen $n \geqslant N$. Ha $|q| = \frac{1}{2}$, akkor legyen $g_n = q$, ha $|q| \neq \frac{1}{2}$, akkor legyen $g_n = q$, $1-q$, $q$ vagy $-1-q$ aszerint, hogy (3), (4), (3') vagy (5) igaz.

A $g_n'$ és $g_n$ definíciója szerint $n \geqslant N$-re

$$G_n x = 2p_n + g_n' = 2p_n + g_n + r_n, \tag{6}$$

ahol $|r_n| = |g_n' - g_n| < \varepsilon$ és $p_n$ ($n = N, N+1, N+2, \dots$) egész szám, továbbá $r_n \to 0$ ha $n \to \infty$.

Felhasználva a $G_{n+2} - AG_{n+1} - BG_n = 0$ azonosságot, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} S_n &= 2p_{n+2} + g_{n+2} - A(2p_{n+1} + g_{n+1}) - B(2p_n + g_n) = \\ &= G_{n+2}x - r_{n+2} - A(G_{n+1}x - r_{n+1}) - B(G_n x - r_n) = \\ &= -(r_{n+2} - Ar_{n+1} - Br_n), \end{aligned} \tag{7}$$

így $S_n \to 0$ ha $n \to \infty$.

De $n \geqslant N$ esetén $S_n$ törtrésze csak véges sok értéket vehet fel – tekintve, hogy $p_i$ egész és $g_i$-nek mindössze két értéke lehet – ezért

$$S_n = 0 \tag{8}$$

ha $n \geqslant n_0 \geqslant N$.

A (7)-ből és (8)-ból következik, hogy $\{2p_n + g_n\}_{n=0}^{\infty}$ és $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ másodrendű lineáris rekurzív sorozatok $f(x) = x^2 - Ax - B$ karakterisztikus polinommal, és így a Binet formula szerint

$$2p_n + g_n = a_1 \alpha^{n-n_0} + b_1 \beta^{n-n_0}$$

és

$$r_n = a_2 \alpha^{n-n_0} + b_2 \beta^{n-n_0}$$

minden $n \geqslant n_0$-ra teljesül.

Mivel $\beta^{n-n_0} \to 0$, $|\alpha^{n-n_0}| \to \infty$ $(n \to \infty)$ ezért az $r_n \to 0$ $(n \to \infty)$ csak úgy teljesülhet, ha $a_2 = 0$, így

$$r_n = b_2 \beta^{n-n_0}.$$

A (6)-ba behelyettesítve a sorozatok explicit értékeit

$$(a\alpha^n + b\beta^n)x = a_1 \alpha^{n-n_0} + b_1 \beta^{n-n_0} + b_2 \beta^{n-n_0}$$

amiből

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-n_0} (ax\alpha^{n_0} - a_1) = -bx\beta^{n_0} + b_1 + b_2$$

adódik.

Az egyenlet jobb oldalán konstans áll, de a bal oldalon $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-n_0} \to \infty$ ha $n \to \infty$, ezért $ax\alpha^{n_0} - a_1 = 0$.
Behelyettesítve az a és $a_1$ konstansok értékét, és x-et kifejezve

$$x = \frac{a_1}{a \cdot \alpha^{n_0}} = \frac{2p_{n_0+1} + g_{n_0+1} - (2p_{n_0} + g_{n_0})\beta}{(G_0 - G_1\beta)\alpha^{n_0}} =$$

$$= \frac{2(c_1 - c_2\beta) + g_{n_0+1} - g_{n_0}\beta}{(G_0 - G_1\beta)\alpha^{n_0}} \tag{9}$$

ahol $c_1$ és $c_2$ egész számok.

Meg fogjuk mutatni, hogy az $A = 4$ és $B = 3$ esetben q csak egész vagy $\frac{k}{3}$ alakú lehet, ahol k egész szám.

Mivel $\{2p_n + g_n\}_{n=0}^{\infty}$ másodrendű lineáris rekurzív sorozat $f(x) = x^2 - Ax - B$ karakterisztikus polinommal, ezért

$$g_{i+2} = Ag_{i+1} + Bg_i + 2t_i \tag{10}$$

$i \geqq n_0$-ra, ahol $t_i$ valamely egész szám.
Föltehetjük, hogy $g_j = q$ vagy $g_j = 1 - q$ $(j = n_0, n_0+1, \ldots)$, ugyanis $\sin((-1-q)\pi) = \sin(((1-q)-2)\pi) = \sin((1-q)\pi)$. A $(g_{n+2}, g_{n+1}, g_n)$ számhármas $n \geqq n_0$ esetén csak nyolc különböző értéket vehet fel:

(i) $(q, q, q)$
(ii) $(1-q, 1-q, 1-q)$
(iii) $(q, 1-q, q)$
(iv) $(1-q, q, 1-q)$
(v) $(q, q, 1-q)$
(vi) $(1-q, 1-q, q)$
(vii) $(q, 1-q, 1-q)$
(viii) $(1-q, q, q)$

Az (i) esetben (10) szerint

$$q = Aq + Bq + 2t_n$$

amiből

$$(A + B - 1)q = 2t_n$$

illetve az $A = 4$, $B = 3$ esetben

$$6q = 2t_n$$
$$q = \frac{k}{3}$$

adódik valamely k egész számmal

Az (ii) ugyanerre az eredményre, míg az (iii) és (iv) a (10) felhasználásával

$$(A-B+1)q = 2k$$
$$q = k$$

összefüggésre vezet.
A (v) és (vi) (10)-be helyettesítve az

$$(A-B-1)q = 2k+1$$

egyenletet adja, melynek egyetlen q valós szám sem lehet megoldása, tekintve hogy a bal oldalon zérus, míg a jobb oldalon a $2k+1$ páratlan szám áll.
Végezetül a (vii) és (viii)-ből

$$(A+B+1)q = 2k+1$$

illetve

$$q = \frac{2k+1}{8}$$

adódik.

Be fogjuk látni, hogy a $q = \frac{2k+1}{8}$ nem lehetséges. A (vii) esetben $q_{n+2} = q$, $q_{n+1} = 1-q$, $q_n = 1-q$. A $q_{n+3}$ megengedett értékei q vagy $1-q$. Ha $q_{n+3} = q$ akkor a (v) esethez jutunk, melynek eleget tevő q szám, mint már láttuk nem létezik.
A $q_{n+3} = 1-q$ a (iv)-re vezet, így a $q = \frac{2k+1}{8}$ egész szám kellene hogy legyen. Tekintve, hogy a számláló páratlan, a nevező páros ez lehetetlen.
A (viii) esetben hasonlóan láthatjuk be, hogy a q a $\frac{2k+1}{8}$ értéket nem veheti fel.

Ezeket összefoglalva és (9)-et figyelembe véve x minden esetben eleget tesz az

$$x = \frac{2(c_1-c_2\beta)+(d_1-d_2\beta)}{(G_0-G_1\beta)\alpha^e}$$

formának, ahol $c_1$, $c_2$ és e egész számok, továbbá $d_1$ és $d_2$ egyész számok vagy $d_1 = d_2 = \frac{k}{3}$, ahol k egy egész szám.

Legyenek $c_1$, $c_2$ és e egész számok és legyen $d_1$, $d_2$ szintén egész szám, vagy $d_1 = d_2 = \frac{k}{3}$, ahol k egy egész szám. Tekintsük a $\{\sin\,(G_n x\pi)\}_{n=0}^{\infty}$ sorozatot.

Az $\alpha+\beta = A$ azonosság felhasználásával

$$x = \frac{2(c_1-c_2\beta)+(d_1-d_2\beta)}{(G_1-G_0\beta)\alpha^e} =$$

$$= \frac{2(c_3+c_2\alpha)+d_1-Ad_2+d_2\alpha}{(G_1-G_0\beta)\alpha^e},$$

ahol $c_3$ egy egész szám. Mivel $G_n = a\alpha^n+b\beta^n$ és
$a = (G_1-G_0\beta)/(\alpha-\beta) \neq 0$,
ezért

$$G_n x = ax\alpha^n+bx\beta^n = 2c_3\frac{\alpha^{n-e}-\beta^{n-e}}{\alpha-\beta}+2c_2\frac{\alpha^{n-e+1}-\beta^{n-e+1}}{\alpha-\beta}-$$

$$-Ad_2\frac{\alpha^{n-e}-\beta^{n-e}}{\alpha-\beta}+d_1\frac{\alpha^{n-e}-\beta^{n-e}}{\alpha-\beta}+d_2\frac{\alpha^{n-e+1}-\beta^{n-e+1}}{\alpha-\beta}+$$

$$+bx\beta^n+(2c_3+2c_2\beta-Ad_2+d_1+d_2\beta)\frac{\beta^{n-e}}{\alpha-\beta}.$$

Az $\dfrac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta} = R_m$ kifejezés egy másodrendű lineáris rekurzív sorozat $R_0 = 0$, $R_1 = 1$ kezdő értékekkel és $f(x) = x^2-Ax-B$ karakterisztikus polinommal, és így $\{R_m\}_{m=0}^{\infty}$ sorozat elemei egész számok. A $d_1$ és $d_2$ racionális számok, továbbá $|\beta| < 1$ miatt $\beta^n \to 0$, ha $n \to \infty$.
Ezek figyelembevételével $\sin(G_n x\pi)$ akkor és csakis akkor konvergens, ha

$$H_n = -Ad_2R_n+d_1R_n+d_2R_{n+1} \equiv r \text{ vagy } 1-r \pmod 2 \text{ elég nagy } n\text{-ekre}$$

ahol r egy rögzített racionális szám — minthogy $\sin(r\pi) = \sin((1-r)\pi)$ —, és ekkor a határérték $\sin(r\pi)$.

Ha $d_1$ és $d_2$ egészek, akkor $H_n$ is egész szám és így

$$H_n \equiv 0 \quad \text{vagy} \quad 1 \pmod 2$$

s így ekkor a határérték

$$\lim_{n\to\infty} \sin(G_n x\pi) = \sin(0\pi) = 0.$$

Ha $d_1 = d_2 = \dfrac{k}{3}$ alakú, teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy $H_n \equiv \dfrac{k}{3}$ (mod 2).
$n = 0$-ra $H_n = \dfrac{k}{3}$ miatt igaz az állítás.

Tegyük fel, hogy $H_n = \dfrac{k}{3}((1-A)R_n+R_{n+1}) \equiv \dfrac{k}{3}$ (mod 2). Mivel $H_{n+1} =$

$= \frac{k}{3}((1-A)R_{n+1}+R_{n+2}) = \frac{k}{3}(R_{n+1}-AR_{n+1}+AR_{n+1}+BR_n) =$
$\frac{k}{3}(R_{n+1}+BR_n+(1-A)R_n-(1-A)R_n) = \frac{k}{3}((1-A)R_n+R_{n+1})+\frac{k}{3}((A+B-$
$-1)R_n) = H_n+\frac{k}{3}6R_n = H_n+2kR_n \equiv H_n \equiv \frac{k}{3}$ (mod 2), ezért minden n-re
$H_n \equiv \frac{k}{3}$ (mod 2) teljesül, így tételünket bizonyítottuk.

## *IRODALOM*

[1] J. W. S. CASSELS, An introduction to diphantine approximation, Cambridge Univ. Press, 1957. MR 19 – 396
[2] W. GERDES, Convergent generalized Fibonacci sequences, Fibonacci Quart. 15 (1977), 156 – 160. MR 56 # 237
[3] W. GERDES, Generalized tribonacci numbers and their convergent sequences, Fibonacci Quart. 16 (1978), 269 – 275. MR 80a: 10019
[4] M. B. GREGORI and J. M. METGER, Fibonacci sine sequences, Fibonacci Quart. 16 (1978). 119 – 120. MR 58 # 16588
[5] P. KISS, A dipéhantine approximative property of the second order linear recurrences Period. Math. Hungar. 11 (1980). 281 – 287. MR 82k: 10034
[6] P. KISS and S. MOLNÁR, Distribution of linear recurrences modulo 1, (Megjelenés alatt)
[7] MÁTYÁS F,. Másodrendű lineáris rekurzív sorozatok elemeinek hányadosairól, Matematikai Lapok 27 (1976/79), 379 – 389. MR 83m: 10020
[8] S. H. MOLNÁR, Sine sequence of second order linear recurrences, Period. Math. Hungar. 14 (1983) 259 – 267.
[9] I. NIVEN – H. S. ZUCKERMANN: Bevezetés a számelméletbe, Műszaki Könyvkiadó Bp. 1978