

PELL EGYENLETEK MEGOLDÁSA LINEÁRIS REKURZÍV SOROZATOK SEGÍTSÉGÉVEL

KISS PÉTER

Legyenek A, B, G_0, G_1 rögzített egész számok, melyekre $AB \neq 0$ és G_0, G_1 nem mindkettője zérus. Az egész számok G_0, G_1, G_2, \dots végtelen sorozatát, ahol

$$G_n = A \cdot G_{n-1} - B \cdot G_{n-2}$$

ha $n > 1$, másodrendű lineáris rekurzív sorozatnak nevezzük és G -vel illetve $G(A, B, G_0, G_1)$ -el jelöljük. A következőkben hasonlóan definiáljuk és jelöljük a különböző adatokkal megadott másodrendű lineáris rekurzív sorozatokat.

Egy $G(A, B, G_0, G_1)$ sorozat asszociált sorozatának nevezzük azt a $H = H(A, B, H_0, H_1)$ sorozatot, melyben

$$H_0 = 2G_1 - AG_0$$

és

$$H_1 = AG_1 - BG_0$$

Az általános G sorozat speciális esete az $F = F(1, -1, 0, 1)$ Fibonacci sorozat, az $L = L(1, -1, 2, 1)$ Lucas sorozat mely a Fibonacci sorozat asszociált sorozata, és a $P = P(2, -1, 0, 1)$ Pell sorozat.

Az

$$x^2 - D \cdot y^2 = N$$

alakú Pell egyenletek és a másodrendű lineáris rekurzív sorozatok között több

Hoggatt [4] megmutatta, hogy az $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ egyenlet egyenlő megoldásai $x = \pm L_n$, $y = \pm F_n$, ahol L_n illetve F_n a Lucas illetve Fibonacci sorozat n -edik tagja. E. M. Cohn [3], I. Adler [1, 2] és V. Thébault [7] az $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ egyenlet és a másodrendű rekurzív sorozatok illetve a Pell sorozat között találtak hasonló kapcsolatokat. M. J. de Leon [6] bizonyította, hogy ha x_0, y_0 egy alapgazdálása az $x^2 - 2y^2 = N$ egyenletnek, akkor azon x_n, y_n szám-pár is megoldás, melyre $x_n + y_n = (x_0 + y_0)P_{2n+1} + y_0P_{2n}$ és $y_n = (x_0 + y_0)P_{2n} + y_0P_{2n-1}$, ahol P_i a Pell sorozat i -edik tagja.

Várnai Ferencsel közösen [5]-ben bizonyítottuk, hogy az $x^2 - 2y^2 = N$ egyenlet összes megoldása megadható véges számú $P(2, -1, P_0, P_1)$ sorozat elemeiből alkotott

$$(x; y) = (\pm (P_{2n} + P_{2n+1}); \pm P_{2n+1})$$

párok által. Továbbá ezen sorozatokra $N > 0$ esetén $0 \cong P_1 < 2\sqrt{N}$, $N < 0$ esetén pedig $0 < P_1 < \sqrt{-9N/2}$. Megmutatjuk, hogy ez az eredmény általánosabban is igaz:

1. TÉTEL. *Legyenek $N \neq 0$ és $a > 0$ egész számok. Ha az*

$$(1) \quad x^2 - (a^2 + 1)y^2 = N$$

egyenletnek van x, y egész megoldása, akkor az összes megoldást véges számú $G(2a, -1, G_0, G_1)$ sorozat tagjaiból képezett

$$(x; y) = (\pm (G_{2n} + aG_{2n+1}); \pm G_{2n+1})$$

párok szolgáltatják, és ezen G sorozatokra $N > 0$ esetén $0 \cong G_1 < 2a\sqrt{N}$, $N < 0$ esetén pedig $0 < G_1 < (2a^2 + 1)\sqrt{-N/(a^2 + 1)}$.

V. E. Hoggatt [4] fentebb idézett eredménye általánosabban is igaz. A következő tételeket bizonyítjuk.

2. TÉTEL. *Legyenek a és N egész számok $a > 2$ és $N \neq 0$ feltétellel. Ha az*

$$x^2 - (a^2 - 4)y^2 = 4N$$

egyenletnek van x, y egész megoldása, akkor az összes megoldást véges számú $G(a, 1, G_0, G_1)$ sorozat segítségével képezett

$$(x; y) = (\pm H_{2n}; \pm G_{2n}), n = 0, 1, 2, \dots$$

számpárok szolgáltatják, ahol H a G sorozat asszociált sorozata. Továbbá ezen G sorozatokra $N > 0$ esetén $0 \cong G_1 < \sqrt{N}$ és $N < 0$ esetén

$$0 \neq G_1 < a \sqrt{-N/(a^2 - 4)}.$$

3. TÉTEL. *Legyenek a és N egész számok $a > 0$ és $N \neq 0$ feltétellel. Ha az*

$$x^2 - (a^2 + 4)y^2 = 4N$$

egyenletnek van x, y egész megoldása, akkor az összes megoldást véges számú $G(a, -1, G_0, G_1)$ sorozat segítségével képezett

$$(x; y) = (\pm H_{2n}; \pm G_{2n}), n = 0, 1, 2, \dots$$

számpárok szolgáltatják, ahol H a G sorozat asszociált sorozata. Továbbá ezen G sorozatokra $N > 0$ esetén $0 \leq G_0 < a\sqrt{N}$ és $N < 0$ esetén pedig $0 \leq G_0 < (a^2 + 2)\sqrt{-N/(a^2 + 4)}$.

4. TÉTEL. Ha az

$$(x; y) = (\pm H_{2n}; \pm G_{2n}), n = 0, 1, 2, \dots$$

alakú számpárok az

$$x^2 - (a^2 + 4)y^2 = 4N$$

egyenletnek megoldásai, akkor az

$$(x; y) = (\pm H_{2n+1}; \pm G_{2n+1}), n = 0, 1, 2, \dots$$

alakú párok megoldásai az

$$x^2 - (a^2 + 4)y^2 = -4N$$

egyenletnek.

Mielőtt rátérünk a tételek bizonyítására, megemlítjük a lineáris rekurzív sorozatok néhány ismert tulajdonságát és bizonyítunk egy segédtételt.

Legyen $G = G(A, B, G_0, G_1)$ egy másodrendű lineáris rekurzív sorozat, továbbá jelölje az

$$f(x) = x^2 - Ax + B$$

polinom két gyökét

$$\alpha = \frac{A + \sqrt{D}}{2} \text{ és } \beta = \frac{A - \sqrt{D}}{2},$$

ahol $D = A^2 - 4B$. Ha $D \neq 0$ (vagyis ha $\alpha \neq \beta$), akkor mint jól ismert, a G sorozat tagjai

$$(2) \quad G_n = \frac{b\alpha^n - c\beta^n}{\alpha - \beta}, n = 0, 1, 2, \dots$$

alakban is megadhatók, ahol

$$(3) \quad b = G_1 - G_0\beta \text{ és } c = G_1 - G_0\alpha.$$

Ennek alapján, felhasználva az asszociált sorozat fentebbi definícióját, könnyen belátható, hogy a G sorozat H asszociált sorozatának tagjai

$$(4) \quad H_n = b\alpha^n + c\beta^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

alakban írhatók fel.

LEMMA. Jelölje $D = A^2 - 4B$ a G sorozat $f(x)$ karakterisztikus polinomjának a diszkriminánsát. Ha $D \neq 0$, akkor a G sorozatnak és a H asszociált sorozatának tagjaira minden n természetes szám esetén fennáll a

$$H_n^2 - D \cdot G_n^2 = 4bc \cdot B^n$$

egyenlőség, ahol b és c a (3)-ban definiált állandók.

BIZONYÍTÁS. Mivel $D = (\alpha - \beta)^2$, ezért (2) és (4) alapján

$$H_n^2 - D \cdot G_n^2 = (b\alpha^n + c\beta^n)^2 - (b\alpha^n - c\beta^n)^2 = 4bc \cdot (\alpha\beta)^n.$$

Ebből már következik az állítás, mivel $\alpha\beta = B$.
Rátérünk a tételek bizonyítására.

1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Ha egy $G = G(A, -1, G_0, G_1)$ sorozatban

$$G_0^2 + AG_0G_1 - G_1^2 = k,$$

akkor minden $n \geq 0$ esetén

$$(5) \quad G_n^2 + AG_nG_{n+1} - G_{n+1}^2 = (-1)^n \cdot k.$$

Ugyanis

$$G_{n+1}^2 + AG_{n+1}G_{n+2} - G_{n+2}^2 = G_{n+1}^2 + AG_{n+1}(AG_{n+1} + G_n) - (AG_{n+1} + G_n)^2 = -(G_n^2 + AG_nG_{n+1} - G_{n+1}^2)$$

és $n = 0$ esetén (5) nyilvánvaló.

Ha $A = 2a$, akkor (5) alapján

$$(6) \quad (G_n + aG_{n+1})^2 - (a^2 + 1)G_{n+1}^2 = (-1)^n k.$$

Tegyük fel, hogy az (1) egyenletnek x, y egészek megoldásai, továbbá feltehető, hogy $x, y \geq 0$. Definiáljuk egy G sorozatot az $A = 2a, B = -1$ konstansokkal és valamely i természetes számmal meghatározott

$$G_{2i+1} = y \quad \text{és} \quad G_{2i} + aG_{2i+1} = x$$

illetve

$$G_{2i} = x - ay \quad \text{és} \quad G_{2i+1} = y$$

szomszédos tagokkal. Az így definiált sorozat esetén $k = N$. Ez a G sorozat minden egész indexre értelmezve van, mert $B = -1$ miatt két egymást követő G_j, G_{j+1} tag a sorozat definíciója miatt egyértelműen meghatározza a G_{j-1} és G_{j+2} tagokat, melyek egészek, ha G_j, G_{j+1} egészek. Így meghatá-

rozhatjuk a i indexet úgy, hogy G_1 a páratlan indexű tagok között a legkisebb nem negatív értékű legyen. Ekkor (6) miatt minden

$$(x; y) = (G_{2n} + aG_{2n+1}; G_{2n+1})$$

számpár megoldása (1)-nek.

Meg kell még mutatni, hogy a hasonló tulajdonságú G sorozatok száma véges.

Legyen először $N > 0$. Ha $x_1, y_1 > 0$ egészek megoldásai az (1) egyenletnek, akkor az előzőekhez hasonlóan generált G sorozat két szomszédos tagja

$$G_{2i} = x_1 - ay_1$$

illetve

$$G_{2i+1} = y_1.$$

Ekkor a sorozat definíciója alapján

$$G_{2i-1} = G_{2i+1} - 2aG_{2i} = (2a^2 + 1)y_1 - 2ax_1$$

és

$$G_{2i-2} = G_{2i} - 2aG_{2i-1} = (4a^2 + 1)x_1 - (4a^3 + 3a)y_1,$$

továbbá (6) következtében

$$x_2 = G_{2i-2} + aG_{2i-1} = (2a^2 + 1)x_1 - (2a^3 + 2a)y_1$$

és

$$y_1 = G_{2i-1} = (2a^2 + 1)y_1 - 2ax_1$$

szintén kielégíti az (1) egyenletet. De ha $x_1, y_1 > 0$, akkor

$$x_1 = \sqrt{(a^2 + 1)y_1^2 + N}$$

és

$$y_1 = \sqrt{(x_1^2 - N)/(a^2 + 1)},$$

továbbá

$$\begin{aligned} y_2 &= (2a^2 + 1)y_1 - 2ax_1 = (2a^2 + 1)y_1 - 2a\sqrt{(a^2 + 1)y_1^2 + N} < \\ &< (2a^2 + 1 - 2a\sqrt{a^2 + 1})y_1 < y_1, \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} x_2 &= (2a^2 + 1)x_1 - (2a^3 + 2a)\sqrt{(x_1^2 - N)/(a^2 + 1)} = \\ &= (2a^2 + 1)x_1 - \sqrt{4a^2(a^2 + 1)(x_1^2 - N)} > 0 \end{aligned}$$

és könnyű belátni, hogy

$$y_2 = (2a^2 + 1)y_1 - 2a\sqrt{(a^2 + 1)y_1^2 + N} \cong 0,$$

ha $y_1 \cong 2a\sqrt{N}$. Így, ismételve az eljárást, olyan y_1, y_2, y_3, \dots és x_1, x_2, x_3, \dots sorozatot kapunk, melyek tagjaira $y_{i+1} < y_i$ és $x_{i+1}, y_{i+1} \cong 0$, ha $y_i \cong 2a\sqrt{N}$. Ezért van olyan j index, melyre $0 \cong y_j < 2a\sqrt{N}$ és így a G sorozat generálható $G_0 = x_j - ay_j$, $G_1 = y_j$ kezdő elemekkel, melyekre $0 \cong G_1 < 2a\sqrt{N}$. Az ilyen G sorozatok száma nyilván véges.

Tehát az állítás $N > 0$ esetben igaz.

Legyen most $N < 0$. Ha $x_1, y_1 > 0$ megoldásai az (1) egyenletnek, akkor (mint az előzőekben)

$$\begin{aligned} x_2 &= (2a^2 + 1)x_1 - (2a^3 + 2a)y_1, \\ y_2 &= (2a^2 + 1)y_1 - 2ax_1 \end{aligned}$$

is megoldás. Folytatva az eljárást, megmutatjuk, hogy $x_{i+1} \cong 0$ és $0 < y_{i+1} < y_i$ mindaddig, míg $y_i \cong (2a^2 + 1)\sqrt{-N/(a^2 + 1)}$. Ha ugyanis $y_i \cong (2a^2 + 1)\sqrt{-N/(a^2 + 1)}$, $x_i \cong 0$ és $x_i^2 - (a^2 + 1)y_i^2 = N$, akkor

$$x_i = \sqrt{(a^2 + 1)y_i^2 + N} \cong 2a\sqrt{-(a^2 + 1)N},$$

amiből pedig

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (2a^2 + 1)x_i - (2a^3 + 2a)y_i = \\ &= (2a^2 + 1)x_i - 2a(a^2 + 1)\sqrt{(x_i^2 - N)/(a^2 + 1)} \cong 0 \end{aligned}$$

következik. Továbbá $N < 0$ miatt

$$y_{i+1} = (2a^2 + 1)y_i - 2ax_i = (2a^2 + 1)y_i - 2a\sqrt{(a^2 + 1)y_i^2 + N} > 0,$$

és $y_i \cong (2a^2 + 1)\sqrt{-N/(a^2 + 1)} > \sqrt{-N}$ alapján pedig

$$y_{i+1} = (2a^2 + 1)y_i - 2a\sqrt{(a^2 + 1)y_i^2 + N} < y_i$$

adódik.

Tehát $N < 0$ esetén minden megoldás megadható olyan $G(2a, -1, G_0, G_1)$ sorozatok segítségével, melyekre $x = G_0 + aG_1$, $y = G_1$ megoldásai az (1) egyenletnek és $0 < G_1 < (2a^2 + 1)\sqrt{-N/(a^2 + 1)}$.

2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Elegendő az egyenlet nem negatív megoldásait keresni, hiszen ha $(x; y)$ egy megoldás akkor $(\pm x; \pm y)$ is az. Legyenek x és y nem negatív egész számok megoldásai az

$$(7) \quad x^2 - (a^2 - 4)y^2 = 4N$$

egyenletnek. Definiáljuk egy G sorozatot az $A = a$, $B = 1$ konstansokkal úgy hogy valamely i indexre $G_i = y$ és $H_i = x$. Ekkor (2) és (4) miatt, felhasználva az $\alpha - \beta = \sqrt{D}$ egyenlőséget,

$$b\alpha^i - c\beta^i = y(\alpha - \beta) = y\sqrt{D},$$

illetve

$$b\alpha^i + c\beta^i = x$$

adódik, amiből

$$(8) \quad b = \frac{x + \sqrt{D} \cdot y}{2 \cdot \alpha^i} \text{ ill. } c = \frac{x - \sqrt{D} \cdot y}{2 \cdot \beta^i}$$

következik. Tehát a G ill. H sorozat tagjai egyértelműen meg vannak határozva, ha, mint az 1. Tétel bizonyításában láttuk, negatív indexű tagokat is definiálunk. $B = \alpha\beta = 1$ miatt $B^n = 1$ minden egész n esetén, ezért a Lemma alapján $N = bc$ és minden $(x; y) = (\pm H_n; \pm G_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ pár megoldása (7)-nek.

Azt kell még igazolni, hogy az i index megválasztható úgy, hogy G_1 a tételben megadott intervallumba essen. Tegyük fel, hogy a (7) egyenlet egy $(x_1; y_1)$ megoldására $x_1 = H_i > 0$ és $y_1 = G_i > 0$. Ekkor $(x_2; y_2) = (H_{i-1}; G_{i-1})$ is megoldás és (8) alapján

$$\begin{aligned} H_{i-1} &= b\alpha^{i-1} + c\beta^{i-1} = \frac{x_1 + \sqrt{D} \cdot y_1}{2\alpha} + \frac{x_1 - \sqrt{D} \cdot y_1}{2\beta} = \\ &= \frac{(\alpha + \beta)x_1 - (\alpha - \beta)\sqrt{D} \cdot y_1}{2\alpha\beta} = \frac{ax_1 - Dy_1}{2}, \end{aligned}$$

mivel $\alpha + \beta = A = a$, $\alpha\beta = B = 1$ és $\alpha - \beta = \sqrt{D}$. Hasonlóan adódik a

$$G_{i-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} (b\alpha^{i-1} - c\beta^{i-1}) = \frac{-x_1 + ay_1}{2}$$

egyenlőség. $x_2 = H_{i-1} \geq 0$ akkor és csak akkor, ha $ax_1 \geq Dy_1$, vagyis ha

$$a \sqrt{4N + (a^2 - 4)y_1^2} \geq Dy_1.$$

Ez a feltétel azonban $D = A^2 - 4B = a^2 - 4$ következtében

$$(9) \quad (a^2 - 4)y_1^2 \geq -a^2N$$

alakba írható. $N > 0$ esetén az $a > 2$ feltétel miatt (9) minden egész y_1 esetén fennáll. $N < 0$ esetben pedig (9)-ből az következik, hogy $H_i, G_i > 0$ mellett $H_{i-1} \geq 0$, ha $G_i = y_1 \geq a \sqrt{-N/(a^2 - 4)}$.

Hasonlóan látható be, hogy $H_i, G_i > 0$ mellett $G_{i-1} \cong 0$ akkor és csak akkor, ha $N < 0$, vagy ha $N > 0$ és $G_i = y_1 \cong \sqrt{N}$.

Tehát ha $H_i, G_i > 0$ és G_i nem esik a tételben megadott intervallumba, akkor az $(x_2; y_2) = (H_{i-1}; G_{i-1})$ megoldás is nem negatív. Bizonyítjuk, hogy ekkor $H_{i-1} < H_i$ és $G_{i-1} < G_i$. Be kell látni, hogy $H_{i-1} = (ax_1 - Dy_1)/2 < x_1 = H_i$. Ehhez elég igazolni, hogy $(a-2)x_1 = (a-2)\sqrt{4N + (a^2-4)y_1^2} < (a^2-4)y_1$. Ez a feltétel azonban az $N < (a+2)y_1$ egyenlőtlenséggel ekvivalens, ezért valóban $0 \cong H_{i-1} < H_i$, ha $N < 0$, vagy ha $N > 0$ és $G_i = y_1 > \sqrt{N/(a+2)}$, ami nyilván teljesül, ha $y_1 \cong \sqrt{N}$. Hasonlóan látható be, hogy $G_{i-1} < G_i$ ha $N > 0$, vagy ha $N < 0$ és $G_i = y_1 \cong \sqrt{-N/(a-2)}$, ami nyilván igaz, ha $G_i = y_1 \cong a\sqrt{-N/(a^2-4)}$, mert $a > 2$.

Ezek szerint előállítható az $(x; y)$ megoldások $(H_i; G_i), (H_{i-1}; G_{i-1}), (H_{i-2}; G_{i-2}), \dots$ sorozata úgy, hogy valamely k -ra $H_i > H_{i-1} > \dots > H_{i-k} \cong 0$ és $G_i > G_{i-1} > \dots > G_{i-k} \cong 0$, továbbá G_{i-k} a tételben megadott intervallumba esik, vagy pedig $H_{i-k} = 0$. De ha $H_{i-k} = 0$, akkor $N < 0$ és $G_{i-k} = \sqrt{-4N/(a^2-4)} < a\sqrt{-N/(a^2-4)}$, ezért $i = k+1$ választással a kapott G sorozat kielégíti a tétel feltételeit és meghatározza a (7) egyenlet egy megoldássorozatát. Ezen G sorozatok száma nyilván véges a G_1 -re adott feltételek miatt.

3. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. A bizonyítás a 2. Tétel bizonyításával analóg módon végezhető el, ezért csak vázoljuk.

Legyen $(x; y)$ egy nem negatív megoldása az

$$(10) \quad x^2 - (a^2 + 4)y^2 = 4N$$

egyenletnek és definiáljuk egy G sorozatot az $A = a, B = -1$ konstansokkal úgy, hogy valamely i egész esetén $G_{2i} = y$ és $H_{2i} = x$. Ekkor az $f(x)$ polinom diszkriminánsa $D = A^2 - 4B = a^2 + 4$ és most is

$$(11) \quad b = \frac{x + \sqrt{D}y}{2\alpha^{2i}} \text{ illetve } c = \frac{x - \sqrt{D}y}{2\beta^{2i}}$$

adódik. Ennek alapján

$$H_{2(i-1)} = \frac{x + \sqrt{D}y}{2\alpha^2} + \frac{x - \sqrt{D}y}{2\beta^2} = \frac{(a^2 + 2)x - aDy}{2}$$

illetve

$$G_{2(i-1)} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{x + \sqrt{D}y}{2\alpha^2} - \frac{x - \sqrt{D}y}{2\beta^2} \right) = \frac{-ax + (a^2 + 2)y}{2}.$$

A Lemma alapján $(x'; y') = (H_{2^{i-1}}; G_{2^{i-1}})$ is megoldása (10)-nek, továbbá belátható, hogy $0 \leq H_{2^{i-1}} < H_{2^i} = x$ és $0 \leq G_{2^{i-1}} < G_{2^i} = y$, ha y nem esik a tételben megadott intervallumba. Ebből már az előzőekhez hasonlóan következik a tétel állítása.

4. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. A tétel állítása következik a 3. tételből és a Lemmából.

Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy V. E. Hoggatt [4] említett eredménye a 3. és 4. Tételből egyszerű következményként adódik. Tekintsük ugyanis az $x^2 - 5y^2 = 4$ egyenletet. Jelen esetben $A = a = 1$, $B = -1$ és $N = 1 > 0$, ezért ha van megoldása az egyenletnek, akkor a 3. Tétel alapján olyan $(x; y)$ megoldás is van, melyre $0 \leq y < 1$. Tehát y csak 0 lehet és így csak egy megoldássorozat létezik, melyet a $(2; 0) = H_0; G_0$ megoldás generál. (11) alapján $b = c = 1$, ezért a megoldásokat generáló sorozat a $G(1, -1, 0, 1)$ sorozat, ami azonos a Fibonacci sorozattal és $H = L$. Az összes megoldás tehát $(\pm L_{2n}; \pm F_{2n})$ alakú. Hasonlóan látható be a 4. Tétel alapján, hogy az $x^2 - 5y^2 = -4$ egyenlet összes megoldása $(\pm L_{2n+1}; \pm F_{2n+1})$, tehát az $x^2 - 5y^2 = \pm 4$ egyenlet összes megoldását a $(\pm L_n; \pm F_n)$, $n = 1, 1, 2, \dots$ számpárok szolgáltatják.

I R O D A L O M

- [1] *I. Adler*, Three diphantine equations I, *Fibonacci Quart.*, 6 (1968), 360–369, 371.
- [2] *I. Adler*, Three diphantine equations II, *Fibonacci Quart.*, 7 (1969), 181–193.
- [3] *E. M. Cohn*, Complete diphantine solution of the Pythagorean triple $(a, b = a + 1, c)$, *Fibonacci Quart.*, 8 (1970), 402–405.
- [4] *V. E. Hoggatt*, Some more Fibonacci diphantine equations, *Fibonacci Quart.*, 9 (1971), 437 and 448.
- [5] *P. Kiss* and *F. Várnai*, On generalized Pell numbers, *Math. Sem. Not. (Kobe Univ. Japan)*, 6 (1978), 259–267.
- [6] *M. J. de Leon*, Pell's equation and Pell number triples, *Fibonacci Quart.*, 14 (1976), 456–460.
- [7] *V. Thébault*, Sur les suites de Pell, *Mathesis*, 65 (1956), 390–395.

**SOLUTION OF PELL EQUATIONS BY THE HELP OF
LINEAR RECURRENCES**

BY PÉTER KISS
(Summary)

Let A, B, G_0 and G_1 be fixed integers such that $AB \neq 0$ and G_0, G_1 are not both zero. The infinite sequence G_0, G_1, G_2, \dots of integers, for which

$$G_n = A \cdot G_{n-1} - B \cdot G_{n-2}$$

for $n > 1$, is called second order linear recurrence and we shall denote it by $G = G(A, B, G_0, G_1)$. If $D = A^2 - 4B \neq 0$, then the terms of G can be written in the form

$$G_n = \frac{b\alpha^n - c\beta^n}{\alpha - \beta},$$

where α and β are the roots of the polynomial $f(x) = x^2 - Ax + B$ and

(i) $b = G_1 - G_0\beta$ and $c = G_1 - G_0\alpha$.

The sequence H , defined by

$$H_n = b\alpha^n + c\beta^n,$$

is called the associate sequence of G . The sequence H is also a linear recurrence having parameters $A, B, H_0 = 2G_1 - AG_0$ and $H_1 = AG_1 - BG_0$.

Some connections are known between the Pell equations of the form $x^2 - Dy^2 = N$ and second order linear recurrences. For example V. E. Hoggatt [4] proved that the all integer solutions of the equation $x^2 - 5y^2 = \pm 4$ are the numbers $(x; y) = (\pm L_n; \pm F_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, where $L(1, -1, 2, 1)$ and $F(1, -1, 0, 1)$ is the well known Lucas and Fibonacci sequence, respectively. Some similar results were obtained by I. Adler [1, 2] E. M. Cohn [3] and V. Thébaud [7] for the equation $x^2 - 2y^2 = \pm 1$.

The purpose of this paper is to look for solutions of some classes of Pell equations. We prove the following theorems.

THEOREM 1. Let $N (\neq 0)$ and $a (> 0)$ be integers. If the equation

$$x^2 - (a^2 + 1)y^2 = N$$

has integer $(x;y)$ solutions, then all solutions are obtained by $(x;y) = (\pm(G_{2n} + aG_{2n+1}); \pm G_{2n+1})$, $n = 0, 1, 2, \dots$, using finitely many linear recurrences $G(2a, -1, G_0, G_1)$. These sequences satisfy the conditions $0 \cong G_1 < 2a \sqrt{N}$ or $0 \cong G_1 < (2a^2 + 1) \sqrt{-N/(a^2 + 1)}$ according as $N > 0$ or $N < 0$.

THEOREM 2. Let $N (\neq 0)$ and $a (> 2)$ be integers. If the equation

$$x^2 - (a^2 - 4)y^2 = 4N$$

has integer $(x;y)$ solutions, then all solutions are obtained by $(x;y) = (\pm H_n; \pm G_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, using finitely many linear recurrences $G(a, 1, G_0, G_1)$ and their associate sequences H . These sequences satisfy the conditions $0 \cong G_1 < \sqrt{N}$ or $0 \cong G_1 < a \sqrt{-N/(a^2 - 4)}$ according as $N > 0$ or $N < 0$.

THEOREM 3. Let $N (\neq 0)$ and $a (> 0)$ be integers. If the equation

$$x^2 - (a^2 + 4)y^2 = 4N$$

has integer $(x;y)$ solutions, then all solutions are obtained by $(x;y) = (\pm H_{2n}; \pm G_{2n})$, $n = 0, 1, 2, \dots$, using finitely many linear recurrences $G(a, -1, G_0, G_1)$ and their associate sequences H . These sequences satisfy the conditions $0 \cong G_0 < a \sqrt{N}$ or $0 \cong G_0 < (a^2 + 2) \sqrt{-N/(a^2 + 4)}$ according as $N > 0$ or $N < 0$.

THEOREM 4. If the pairs $(x;y) = (\pm H_{2n}; \pm G_{2n})$, $n = 0, 1, 2, \dots$, are solutions of the equation $x^2 - (a^2 + 4)y^2 = 4N$, then the numbers $(x;y) = (\pm H_{2n+1}; \pm G_{2n+1})$, $n = 0, 1, 2, \dots$, are solutions of the equation $x^2 - (a^2 + 4)y^2 = -4N$.

The proofs of the theorems are based on the following two results:

1. If $(A, -1, G_0, G_1)$ is a linear recurrence and $k = G_0^2 + AG_0G_1^2 - G_1^2$, then

$$G_n^2 + A \cdot G_n \cdot G_{n+1} - G_{n+1}^2 = (-1)^n \cdot k$$

for every integer $n \cong 0$.

2. Let $G = G(A, B, G_0, G_1)$ be a linear recurrence and let $D = A^2 - 4B \neq 0$.

If H is the associate sequence of G , then

$$H_n^2 - D \cdot G_n^2 = 4bc \cdot B^n$$

for every integer $n \cong 0$, where b and c are defined in (i).