

**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS COMO ESTRATEGIA PEDAGÓGICA PARA EL  
DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS**

**HAROL ALBERTO OVIEDO CASTIBLANCO**

**Trabajo de grado como requisito parcial para optar el título de  
Magister en Educación**

**Director**

**DAVID BENÍTEZ MOJICA**

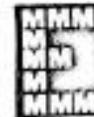
**Doctor en Ciencias**

**UNIVERSIDAD DEL TOLIMA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN  
IBAGUÉ - TOLIMA**

**2016**



UNIVERSIDAD DEL TOLIMA  
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION  
PROGRAMA DE MAESTRIA EN EDUCACION



3/3

FORMATO PARA CALIFICACION DE TRABAJOS DE GRADO  
(Para uso del Jurado)

FUNCIONES	CALIFICACION ASIGNADA
1. Aspectos de estilo y presentación	4.3
2. Marco teórico y actualización de conocimientos.	4.3
3. Método y técnicas adecuadas o de innovación en la metodología.	4.6
4. Relevancia científica y/o tecnológica e importancia socioeconómica de los resultados y recomendaciones.	4.4
<b>NOTA FINAL</b>	<b>4.4</b>

La calificación numérica equivale a la siguiente escala cualitativa así: Una nota definitiva menor de tres coma cinco (3.5) equivale a REPROBADO; Entre tres coma cinco (3.5) y tres coma nueve (3.9) APROBADO, entre cuatro coma cero (4.0) y cuatro coma cuatro (4.4) SOBRESALIENTE, y entre cuatro coma cinco (4.5) cuatro coma nueve (4.9) MERITORIO y cinco coma cero (5.0) LAUREADO.

COMENTARIO DEL JURADO CALIFICADOR

---

---

---

CALIFICACION CUALITATIVA Sobresaliente.

NOMBRE DEL JURADO  
JORGE JULIAN MAYORGA

FIRMA

NOMBRE DEL ESTUDIANTE  
HAROL ALBERTO OVIEDO CASTIBLANCO

FIRMA

NOMBRE DEL DIRECTOR TRABAJO DE GRADO  
DAVID BENITEZ MOJICA

FIRMA

Barrio Santa Elena – Ibagué Colombia. Tel. directo 2668912

A A EAE DDY 844210 FAX (093) 844980 090085240

## **DEDICATORIA**

El presente trabajo de grado está dedicado a dos mujeres, a mi Madre Gloria María, que ha sabido formarme inculcando en mí el amor a Dios y al prójimo, hábitos, valores, sentimientos, responsabilidad y especialmente por estar siempre apoyándome en todo momento; y a mi hija Laura Daniela que con su presencia hace que mi vida tome un sentido de lucha y ganas de salir siempre adelante a pesar de los problemas que día a día se presenta.

## **AGRADECIMIENTOS**

A la Universidad del Tolima, en especial a la Facultad de Ciencias de la Educación y su decano Dr. Adres Felipe Velásquez Mosquera, por brindar espacios para la preparación docente como las Especializaciones y Maestrías, buscando que la educación sea cada día de mejor calidad en beneficio de toda la sociedad tolimense.

Al Dr. David Benítez Mojica, director del presente trabajo, por su valioso apoyo académico y su disposición en todo momento para que se culminara en el tiempo establecido el presente trabajo.

## CONTENIDO

	<b>Pág.</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b> .....	17
<b>1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA</b> .....	20
1.1 ANTECEDENTES .....	20
1.2 JUSTIFICACIÓN .....	21
1.2.1 Rezago del Modelo Tradicional de Enseñanza en el Área de las Matemáticas. .	21
1.2.2 Vigencia Curricular. ....	22
1.2.3 Vigencia en las Agendas de Investigación .....	22
1.2.4 Resultados en las Pruebas SABER .....	23
1.2.4.1 Nivel Insuficiente .....	24
1.2.4.2 Nivel Mínimo.....	24
1.2.4.3 Nivel Satisfactorio.....	24
1.2.4.4 Nivel Avanzado .....	24
1.3 OBJETIVOS .....	29
1.3.1 Objetivo General. ....	29
1.3.2 Objetivo Específicos.....	29
1.4 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN .....	29
1.4.1 Pregunta Central. ....	29
1.4.2 Preguntas Auxiliares .....	30
<b>2. REFERENTES TEÓRICOS</b> .....	31
2.1 EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS .....	33
2.1.1 Los Conocimientos.....	33
2.1.2 Las Habilidades Matemáticas .....	34
2.1.3 Las Actitudes y Valores.....	36
2.2 LAS COMPETENCIAS QUE SE PROMUEVEN EN EL PROYECTO .....	37
2.2.1 La Resolución de Problemas de Matemáticas. ....	38
2.2.2 La Comunicación de las Ideas Matemáticas. ....	41

2.2.3 La Argumentación Sobre los Procedimientos de Solución.....	44
2.2.4 La Proposición de Problemas.....	45
2.2.5 La Modelación Matemática. ....	46
2.2.5.1 Contextos del Mundo Real. ....	47
2.2.5.2 Contextos Hipotéticos. ....	49
2.2.5.3 Contextos Puramente Matemáticos. ....	49
2.3 EL PENSAMIENTO ALEATORIO .....	53
2.3.1 Nivel de Impredicción. ....	53
2.3.2 Nivel Determinístico. ....	53
2.3.3 Nivel Mecánico. ....	54
2.3.4 Nivel de Pre-Rigor. ....	54
2.3.5 Nivel de Rigor.....	55
<b>3. METODOLOGIA DEL TRABAJO .....</b>	<b>56</b>
3.1 INTRODUCCION .....	56
3.2 SUJETOS.....	56
3.3 FASES DE LA INVESTIGACION .....	57
3.3.1 Diseño y Aplicación de Encuesta Diagnóstica. ....	58
3.3.1.1 Pilotaje. ....	58
3.3.1.2 Características del Instrumento.....	59
3.3.1.3 Aplicación de Encuesta Diagnóstica .....	60
3.3.2 Diseño de la Intervención.....	60
3.3.2.1 Diseño de Hojas de Trabajo y Encuesta de Salida. ....	61
3.3.2.2 Pilotaje de Hojas de Trabajo. ....	62
3.3.2.3 Condiciones de Aplicación de Hojas de Trabajo. ....	62
3.3.2.4 Características de la Encuesta de Salida. ....	63
3.3.3 Análisis de Resultados. ....	64
3.3.3.1 Análisis Cuantitativo. ....	64
3.3.3.2 Análisis Cualitativo. ....	64
<b>4. ANÁLISIS DE RESULTADOS .....</b>	<b>66</b>

<b>4.1 INTRODUCCIÓN</b> .....	66
<b>4.2 ANÁLISIS DEL DIAGNÓSTICO</b> .....	66
<b>4.2.1</b> Presentación de la Actividad. ....	67
<b>4.2.2</b> Objetivos. ....	71
<b>4.2.3</b> Condiciones de Aplicación. ....	71
<b>4.2.4</b> Análisis Cuantitativo .....	72
<b>4.2.5</b> Análisis Cualitativo. ....	79
<b>4.2.6</b> Comentarios Finales. ....	87
<b>4.3 ANALISIS DE LAS HOJAS DE RESPUESTA</b> .....	88
<b>4.3.1</b> Hoja de Trabajo No. 1 .....	89
<b>4.3.1.1</b> Presentación y Análisis de la Actividad. ....	89
<b>4.3.2</b> Hoja De Trabajo No. 2.....	92
<b>4.3.2.1</b> Presentación y Análisis de la Actividad. ....	92
<b>4.3.3</b> Hoja De Trabajo No. 3.....	101
<b>4.3.3.1</b> Presentación y Análisis de la Actividad .....	101
<b>4.3.4</b> Comentarios Finales. ....	125
<b>4.4 ENCUESTA DE SALIDA ANALISIS</b> .....	126
<b>4.4.1</b> Presentación de la Actividad. ....	126
<b>4.4.2</b> Objetivos. ....	131
<b>4.4.3</b> Condiciones de Aplicación .....	131
<b>4.4.4</b> Análisis Cuantitativo. ....	131
<b>4.4.5</b> Análisis Cualitativo .....	134
<b>4.4.6</b> Comentarios Finales. ....	142
<b>4.5 ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE LAS ENCUESTAS DE DIAGNÓSTICO Y DE SALIDA</b> .....	144
<b>5. CONCLUSIONES</b> .....	147
<b>5.1</b> INTRODUCCIÓN.....	153
<b>5.2</b> RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN.....	153
<b>RECOMENDACIONES</b> .....	157

**REFERENCIAS** ..... 159

**ANEXOS** ..... 162

## LISTA DE TABLAS

	<b>Pág.</b>
<b>Tabla 1.</b> Comparación entre la distribución porcentual de estudiantes según niveles de desempeño en el establecimiento educativo, municipio Cajamarca, la entidad territorial certificada (Tolima) a la que pertenece y el país. Matemáticas, quinto grado. ....	25
<b>Tabla 2.</b> Comparación entre la distribución porcentual de estudiantes según niveles de desempeño en el establecimiento educativo y los tipos de establecimientos educativos del municipio, de la entidad territorial certificada a la que pertenece y del país. Matemá26	26
<b>Tabla 3.</b> Ejemplo 1, Relación Referentes de Calidad Matemáticas. ....	51
<b>Tabla 4.</b> Ejemplo 2, Relación Referentes de Calidad Matemáticas. ....	52
<b>Tabla 5.</b> Ejemplo 3, Relación Referentes de Calidad Matemáticas. ....	52
<b>Tabla 6.</b> Fases de Investigación. ....	57
<b>Tabla 7.</b> Resultados con porcentaje mas bajo Encuesta Diagnostica.....	73
<b>Tabla 8.</b> Resultados con Mayor Porcentaje de respuestas correctas, encuesta diagnostica. ....	75
<b>Tabla 9.</b> Número y Porcentaje de respuestas encuesta diagnostica. ....	76
<b>Tabla 10.</b> Niveles De Razonamiento Probabilistico. ....	81
<b>Tabla 11.</b> Niveles De Razonamiento Probabilistico ....	92
<b>Tabla 12.</b> Resultados Hoja de Trabajo.....	93
<b>Tabla 13.</b> Nivel De Pensamiento Probabilistico ....	98
<b>Tabla 14.</b> Resultados Hoja de Trabajo N° 3.....	111
<b>Tabla 15.</b> Nivel de Razonamiento Probabilístico. Hoja de Trabajo N° 3.....	115
<b>Tabla 16.</b> Respuestas Nivel de Razonamiento Probabilístico.....	119
<b>Tabla 17.</b> Situación con menor Porcentaje de Respuesta. Encuesta de Salida. ....	132
<b>Tabla 18.</b> Situaciones con Mayor Porcentaje de Aciertos. Encuesta de Salida. ....	133
<b>Tabla 19.</b> Opciones de respuesta. Encuesta de Salida. ....	134
<b>Tabla 20.</b> Niveles de Razonamiento Probabilístico. Encuesta de Salida. ....	135
<b>Tabla 21.</b> Comparativo Encuesta Diagnostica y de Salida. ....	144

## LISTA DE FIGURAS

	<b>Pág.</b>
<b>Figura 1.</b> Fortalezas y Debilidades por Competencia Matemáticas, Institución Educativa Ismael Perdomo, Cajamarca – Tolima, 2015.....	27
<b>Figura 2.</b> Fortalezas y Debilidades Desarrollo del Pensamiento Matemático, Institución Educativa Ismael Perdomo, Cajamarca – Tolima, 2015.....	28
<b>Figura 3.</b> Construcción de un modelo matemático .....	49
<b>Figura 4.</b> Espacio Muestral, Lanzamiento de una Moneda.....	69
<b>Figura 5.</b> Encuesta diagnóstica .....	73
<b>Figura 6.</b> Diagrama de barras y circular resultado item 17, encuesta diagnostica. ....	78
<b>Figura 7.</b> Escala de los Niveles de Pensamiento Prueba Diagnostica .....	80
<b>Figura 8.</b> Hoja de trabajo 2 .....	93
<b>Figura 9.</b> Nivel de Pensamiento Probalístico .....	98
<b>Figura 10.</b> Material Concreto. Lanzamiento de Moneda.....	103
<b>Figura 11.</b> Material Concreto. Lanzamiento de una Moneda.....	103
<b>Figura 12.</b> . Material Concreto. Lanzamiento de una Moneda.....	104
<b>Figura 13.</b> Hoja de trabajo 3 .....	104
<b>Figura 14.</b> Simulación Lanzamiento de 60.000 veces una moneda. ....	110
<b>Figura 15.</b> Material Concreto. Lanzamiento de un dado.....	111
<b>Figura 16.</b> Material Concreto. Lanzamiento de un dado.....	111
<b>Figura 17.</b> Hoja de trabajo 3 actividad 2 .....	112
<b>Figura 18.</b> Simulación Lanzamiento de un dado, 60000 veces. ....	117
<b>Figura 19.</b> Material Manipulable, Lanzamiento de dos dados. ....	117
<b>Figura 20.</b> Estudiante determinando el espacio muestral del lanzamiento de dos dado	118
<b>Figura 21.</b> Estudiante determinando el espacio muestral del lanzamiento de dos dado	118
<b>Figura 22.</b> Hoja de trabajo 3 actividad 3 .....	120
<b>Figura 23.</b> Nivel de razonamiento probabilístico.....	121
<b>Figura 24.</b> Simulación del lanzamiento de dos dados, 60000 veces. ....	125
<b>Figura 25.</b> Simulación del lanzamiento de dos dados .....	125
<b>Figura 26.</b> Diagrama de Árbol. ....	128

<b>Figura 27.</b> Ejemplo de pregunta .....	129
<b>Figura 28.</b> Encuesta de salida .....	132
<b>Figura 29.</b> Diagrama de Barras. Nivel de razonamiento Probabilístico. Encuesta de Salida. ....	136
<b>Figura 30.</b> Comparativo encuesta diagnostica y salida .....	145

## LISTA DE ANEXOS

	<b>Pág.</b>
<b>Anexo A.</b> Encuesta Diagnostica .....	163
<b>Anexo B.</b> Hojas de trabajo.....	173
<b>Anexo C.</b> Encuesta De Salida .....	185

## RESUMEN

El presente trabajo hace parte de un proyecto de investigación cuyo objetivo central es implementar un proceso de enseñanza y aprendizaje en el área de matemáticas que contribuya en el desarrollo de la competencia de la resolución de problemas en pensamiento aleatorio, con estudiantes de quinto grado de primaria. Durante la etapa de intervención se basó en los referentes de calidad que el Ministerio de Educación Nacional ha proferido para el área de Matemáticas y se tiene las siguientes etapas:

Situación Problema: Partimos de una situación problema como estrategia de contextualizar al estudiante, motivándolo en establecer estrategias de solución y determinar los conceptos, leyes, propiedades y en general todas las herramientas necesarias para llegar a la solución.

- Afianzamiento de conceptos: En el afianzamiento de conceptos se tiene en cuenta el enfoque CPA, concreto, pictórico y abstracto.
- Solución de Situaciones Problemas: En la solución de problemas se tendrán en cuenta las cuatro fases descritas por Poyla (1945): Comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva y los aportes de Schoenfeld (1985).
- Utilización de software como Excel y GeoGebra, en la simulación de experimentos o eventos aleatorios.

Como conclusión, el uso de material manipulable hace que el estudiante se mantenga más presto al desarrollo de las actividades. La contextualización que se realiza motiva al estudiante a encontrar la solución y determinar la probabilidad de los eventos. El uso de software potencializa el desarrollo de las competencias, y el nivel de aciertos en las respuestas aumenta.

**Palabras Claves:** Pensamiento Estocástico, Competencia Matemática, Lineamientos curriculares, Didáctica, Razonamiento Probabilístico.

## ABSTRACT

This work makes part of a research project whose main objective is to implement a teaching and learning process in the area of mathematics that contributes to the development of problem solving competence in random thinking, with fifth graders. The intervention stage was based on the referents of quality that the Ministry of National Education has stated for the area of Mathematics. The following stages are included:

- Problem Situation: We start from a problem situation as a strategy to contextualize the student, motivating him/her to establish solution strategies and determine the concepts, laws, properties and, in general, all the necessary tools to arrive at the solution.
- Consolidation of concepts: The CPA (concrete, pictorial and abstract) approach is taken into account in the consolidation of concepts.
- Solution of Problem Situations: In problem solution, the four phases described by Poyla (1945) will be taken into account. (Problem understanding, conception of a plan, execution of the plan and retrospective vision), and the contributions of Schoenfeld (1985).
- Use of software such as Excel and GeoGebra, in the simulation of experiments or random events.

In conclusion, the use of manipulative material makes the student more ready for the development of the activities. The contextualization done motivates the student to find the solution and determine the probability of events. The use of software strengthens the development of competencies, and the level of success in the answers increases

**Keywords:** Stochastic Thinking, Mathematical Competence, Curricular Guidelines, Didactics, Probabilistic Reasoning.

## INTRODUCCIÓN

La ciencia y la tecnología han transformado en forma acelerada el progreso de la sociedad moderna, conduciendo a cambios y creando necesidades en todos los aspectos principalmente en la educación. En la educación actualmente se enfrenta al desarrollo de competencias en todos los ámbitos, particularmente en el razonamiento matemático favoreciendo la solución de problemas en diferentes contextos.

Las diferentes investigaciones han demostrado que los procesos de enseñanza y aprendizaje presentan un reto tanto a docentes como estudiantes. Dentro del área de matemáticas y teniendo en cuenta los referentes de Calidad en la Educación Colombia, se debe desarrollar 5 tipos de pensamiento: Numérico, geométrico, métrico, variacional y aleatorio. En este último, resulta alarmante la dificultad en la enseñanza y por ende en el aprendizaje, esto debido a múltiples factores y se demuestra en la dificultad que se tiene en la tomas de decisiones en diferentes situaciones.

Algunos estudios y pruebas estandarizadas como SABER – ICFES, han arrojado resultados que evidencia la cantidad de errores que cometen los estudiantes de grado tercero, quinto, noveno y undécimo, estos se deben principalmente a conceptos probabilísticos basados en creencias religiosas entre otras. Es por esto que se plantea en el presente trabajo como principal propósito contribuir en el desarrollo de la competencia de la resolución de problemas en pensamiento aleatorio, con estudiantes de quinto grado de primaria.

Para orientar al lector acerca del contenido del presente trabajo, a continuación se describe cada uno de los cinco capítulos que lo conforma.

En el primer capítulo se define y acota el tema de estudio a partir de objetivos y preguntas de investigación, las cuales constituyen el eje de las acciones emprendidas en el presente trabajo. Asimismo, la realización de esta tesis tiene

múltiples justificaciones, entre las que se mencionan el bajo rendimiento de los estudiantes en pruebas estandarizadas. Por esta razón, se incluyen algunos resultados de exámenes, específicamente de las prueba SABER de grado quinto de la Institución Educativa Ismael Perdomo de la ciudad de Cajamarca Tolima.

En el segundo capítulo se presentan algunos referentes teóricos que sustentan la presente investigación, lineamientos curriculares, estándares básicos de competencia, derechos a básicos de aprendizaje (DBA), el desarrollo de competencias, los niveles de razonamiento probabilístico, el uso de múltiples representaciones y la utilización de la tecnología. Cabe mencionar que este marco referencial constituye un elemento central para el diseño y aplicación de los instrumentos didácticos, así como para interpretar los resultados obtenidos durante la implementación de las actividades propuestas.

En el tercer capítulo se explican las fases que se lleva a cabo durante el proceso de investigación, comprende el diseño, pilotaje, rediseño y aplicación del diagnóstico, de las hojas de trabajo, de los archivos electrónicos de simulación de experimentos aleatorios y de la encuesta de salida. Asimismo se describen las condiciones de aplicación y la metodología de trabajo implementada en el aula, en la que destaca de manera importante una dinámica radicalmente distinta a la enseñanza tradicional. De esta manera, los estudiantes participan activamente en la construcción de su aprendizaje.

En el cuarto capítulo se analiza la información obtenida en la aplicación de cada uno de los instrumentos didácticos: diagnóstico, hojas de trabajo y encuesta de salida. Este estudio se hace desde dos perspectivas, cuantitativa y cualitativamente, por lo que se emplean tablas y gráficas para presentar la información, así como algunas evidencias que consisten en escaneos de las respuestas dada por los estudiantes. Al final del capítulo se hace un análisis comparativo de los resultados del diagnóstico y la encuesta de salida con la finalidad de evaluar el impacto de las actividades aplicadas en el aprendizaje de los educandos. De acuerdo

al procesamiento de la información obtenida es posible afirmar que las actividades de enseñanza - aprendizaje aplicada que permiten desarrollar el razonamiento probabilístico.

Finalmente, en el último capítulo se da respuestas a las preguntas de investigación planteadas al inicio del presente trabajo. De estas respuestas se derivan algunas sugerencias, tanto para la instrucción como para investigaciones posteriores.

## 1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

### 1.1 ANTECEDENTES

Existen algunos trabajos de investigación relacionados a la enseñanza de la probabilidad. Por ejemplo, Batanero, (2001) destaca las ventajas de la simulación en la construcción de modelos, los cuales permiten reproducir una situación aleatoria y reducir el experimento a un tiempo y espacio determinado. De esta forma, es posible desarrollar un trabajo intuitivo sobre el modelo sin necesidad de emplear conceptos matemáticos muy complicados y con alto grado de abstracción. Desde esta perspectiva, el estudio de probabilidad en el nivel de secundaria permite un acercamiento menos abrupto de lo que tradicionalmente se ha hecho. Ahora bien, esta autora recomienda el uso de material manipulable como dados, monedas, urnas o ruletas para la construcción y exploración de modelos, afirmando que la tecnología computacional proporciona un mayor potencial para tal efecto, particularmente la hoja de cálculo. En palabras de la autora, se considera que la simulación es un método universal para obtener una estimación de la solución de los problemas probabilísticos.

En otro artículo Batanero, (2005) se menciona que los estudiantes, a lo largo de su aprendizaje, se enfrentan a las mismas dificultades que surgieron en el desarrollo histórico del concepto de probabilidad. De esta manera se tiene que, problemas que en apariencia son relativamente sencillos, en su época constituyeron un verdadero desafío. Además, en este trabajo se analizan las diferentes acepciones de la probabilidad que aún coexisten, así como del papel que juegan los sistemas de representación en la resolución de problemas asociados a tal concepto, atribuyendo a tales sistemas, gran parte de los errores y dificultades de los alumnos. En consecuencia, la autora señala que la enseñanza de la probabilidad debe contemplar la combinación de un enfoque experimental con el estudio formal y gradual de la disciplina.

Otra investigación es la elaborada por Benítez y Sánchez (1997) con estudiantes de diversos grados de escolaridad, en la cual se describen y clasifican algunas características del pensamiento probabilístico, determinando con ello una escala de valores dentro de este tipo de razonamiento. Una de las conclusiones obtenidas es que gran parte de los alumnos se ubicó en el nivel de razonamiento determinista, lo cual refleja la persistencia de concepciones erróneas vinculadas a la probabilidad a pesar de haber cursado, a lo largo de su formación académica, algunos cursos relacionados a esta rama de las matemáticas. Esto conduce a un severo cuestionamiento acerca del método tradicional de enseñanza, justificando con ello la utilización de nuevas alternativas didácticas.

## **1.2 JUSTIFICACIÓN**

En esta sección se presentan varios elementos que justifican la realización del trabajo.

**1.2.1 Rezago del Modelo Tradicional de Enseñanza en el Área de las Matemáticas.** A pesar de las reformas y los esfuerzos institucionales del MEN y de las instituciones educativas, generalmente el proceso de enseñanza de las matemáticas en la básica primaria se fundamenta en la enseñanza tradicional, donde el profesor explica los conceptos a enseñar, expone algunos ejercicios resueltos y para terminar asigna una lista de ejercicios a los estudiantes y estos se encargan de reproducir lo expuesto por el docente. Este enfoque genera varias consecuencias: (i) el modelo tradicional le da mucha importancia a la memorización de conceptos, al aprendizaje de algoritmos de las operaciones básicas, a la resolución de ejercicios, dejando de un lado el desarrollo de las competencias básicas de matemáticas y la formación integral del estudiante. (ii) Este estilo de trabajo genera problemas de motivación hacia el estudio de las matemáticas. (iii) Existe bajo rendimiento en la evaluación de los aprendizajes, tanto en las pruebas internas de cada institución educativa, como en las pruebas estandarizadas. (iv) Existen problemas con la reprobación en el área de las matemáticas y con la deserción escolar.

**1.2.2 Vigencia Curricular.** En diferentes ministerios de educación del mundo han construido desarrollos curriculares en el área de matemáticas, fundamentadas en el desarrollo de competencias. Colombia no escapa a esta tendencia. La resolución de problemas juega un papel central en estas propuestas curriculares. En este sentido, la investigación que aquí se propone tiene vigencia curricular.

Las corrientes pedagógicas actuales dan un giro en la búsqueda de estrategias de enseñanza donde se potencialice competencias básicas y la formación integral de nuestros estudiantes. A nivel internacional se reconoce seis competencias básicas y la formación integral de nuestros estudiantes: La proposición de problemas, la resolución de problemas, la comunicación y argumentación de ideas, la modelación y el uso de representaciones. Por ello, se propone la resolución de problemas como un elemento integrador para el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes, donde se fomenta el trabajo autónomo, participación activa, trabajo colectivo, y sobretodo desarrollen estrategias de solución responsables que le permitan preparasen para la vida.

A demás, la resolución de problemas centra el aprendizaje de los estudiantes en aprender a aprender, a aprender del error, acerca al estudiante a la aplicación de los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas de la vida diaria. El proponerle una situación problema a los estudiantes, donde la solución no es inmediata debido a la falta de conocimiento para resolverlo; pero que mediante el proceso de solución del mismo se apropia de dicho conocimiento (Espinoza et al., 2008), esto implica retar al estudiante, donde él establezca estrategias, use la imaginación, la deducción, la especulación, el ensayo y la producción de conjeturas, habilidades que generalmente no son fomentadas en la enseñanza tradicional para llegar a la solución; por ende el desarrollar y potencializar las competencias matemáticas.

**1.2.3 Vigencia en las Agendas de Investigación.** Desde la década de los ochenta de Siglo XX hasta la fecha, la resolución de problemas está vigente en las agendas de investigación en muchos países del mundo. Esto se debe a la importancia histórica que

la resolución de problemas ha tenido al tenido para el desarrollo de las matemáticas y a la variada problemática que existen en la enseñanza y el aprendizaje de contenidos y de habilidades para lograr el desarrollo de la competencia en los estudiantes de diferentes niveles escolares.

Después de producir reformas curriculares, construir programas especiales que la soporten, desarrollar o adaptar materiales, es necesario realizar evaluaciones estandarizadas con múltiples propósitos relacionados con la enseñanza, el aprendizaje, la gestión, entre otros.

**1.2.4 Resultados en las Pruebas SABER.** En la actualidad en Colombia existen algunas pruebas estandarizadas que evalúan las diferentes competencias matemática entre ellas tenemos: SABER, APRENDAMOS y SUPERATE.

Las pruebas SABER son aplicadas anualmente a los estudiantes de grado tercero, quinto, noveno y once, evaluando competencias y componentes del área de las matemáticas, entre otras. Estas pruebas es una estrategia que busca contribuir al mejoramiento de la calidad educativa del país.

Sus principales objetivos son:

- Monitorear el desarrollo de las competencias matemáticas: La Comunicación, representación y Modelación; Razonamiento y Argumentación; Planteamiento y La Resolución de Problemas.
- Evaluar componentes matemáticos: Numérico – Variacional; Geométrico – Métrico; Aleatorio.
- Identificar, destrezas, habilidades y valores de la educación.
- Definir avances y establecer impacto de programas como Todos a Aprender.

- Que los establecimientos educativos puedan definir planes de mejoramiento con base en la información obtenida de los resultados.

Los resultados de las pruebas SABER son presentadas en categorías, de acuerdo al rendimiento que tienen los estudiantes de los diferentes niveles de desempeño: Avanzado, Satisfactorio, Mínimo e Insuficiente. A continuación se presentan la descripción de estas categorías para el grado quinto de primaria.

**1.2.4.1 Nivel Insuficiente.** En este nivel se ubican los estudiantes que obtienen entre 100 a 264 puntos. El estudiante ubicado en este nivel no supera las preguntas de menor complejidad de la prueba.

**1.2.4.2 Nivel Mínimo.** El rango de puntajes que se ubica en este nivel es de 265 a 330. El estudiante promedio ubicado en este nivel utiliza operaciones básicas para solucionar problema, identifica información relacionada con la medición, hace recubrimientos y descomposiciones de figuras planas, organiza y clasifica información estadística.

**1.2.4.3 Nivel Satisfactorio.** El resultado exigido para quedar en este nivel de desempeño está entre 331 y 396 puntos. Además de lograr lo definido en el nivel Mínimo, el estudiante o ubicado en este nivel identifica y maneja las propiedades de las operaciones básicas para solucionar problemas. Además, modela situaciones de dependencia lineal, diferencia y calcula medidas de longitud y superficie, identifica y describe transformaciones elementales del plano. También reconoce relaciones de semejanza y congruencia entre polígonos, usa la media aritmética para solucionar problemas, establece conjeturas a partir de la lectura directa de información estadística y estima la probabilidad de eventos simples.

**1.2.4.4 Nivel Avanzado.** En este nivel se ubican los estudiantes que obtienen entre 397 y 500 puntos en el área de matemáticas. Además de lograr exigido en los niveles Satisfactorio y Mínimo, el estudiante ubicado en este nivel soluciona problemas

correspondientes a la estructura multiplicativa de los números naturales, reconoce y utiliza la fracción como operador, compara diferentes propiedades de las figuras en 2D y 3D, a partir de sus medidas y establece relaciones entre ellas. Así mismo, establece conjeturas sobre conjuntos de datos, a partir de las relaciones entre diferentes registros de representación, e interpreta el grado de probabilidad de un evento aleatorio.

A continuación mostramos los resultados prueba SABER, obtenidos por los estudiantes de grado quinto de la Institución Educativa Ismael Perdomo de la ciudad de Cajamarca, Tolima, sector oficial, zona urbana, nivel socioeconómico 3, en el año 2015:

**Tabla 1.** Comparación entre la distribución porcentual de estudiantes según niveles de desempeño en el establecimiento educativo, municipio Cajamarca, la entidad territorial certificada (Tolima) a la que pertenece y el país. Matemáticas, quinto grado.

	<b>INSUFICIENTE</b>	<b>MINIMO</b>	<b>SATISFACTORIO</b>	<b>AVANZADO</b>
<b>ESTABLECIMIENTO</b>	18 %	41%	28%	13%
<b>MUNICIPIO CAJAMARCA</b>	34%	37%	20%	9%
<b>TOLIMA</b>	41%	32%	19%	9%
<b>COLOMBIA</b>	36%	30%	21%	13%

Fuente: Ministerio de Educación Nacional, (2016)

El comportamiento de los cuatro tipos de población, presentados en la tabla anterior, es estadísticamente parecido. Sin embargo, existe una diferencia en el nivel de insuficiente.

Tanto en el establecimientos, como en el municipio, en el departamento y el el país, cerca de las dos terceras partes de la población de estudiantes queda en los niveles de mínimo e insuficiente. Este es un indicador de la dificultad que tienen los estudiantes en la resolución de problemas de matemáticas.

**Tabla 2.** Comparación entre la distribución porcentual de estudiantes según niveles de desempeño en el establecimiento educativo y los tipos de establecimientos educativos del municipio, de la entidad territorial certificada a la que pertenece y del país. Matemá

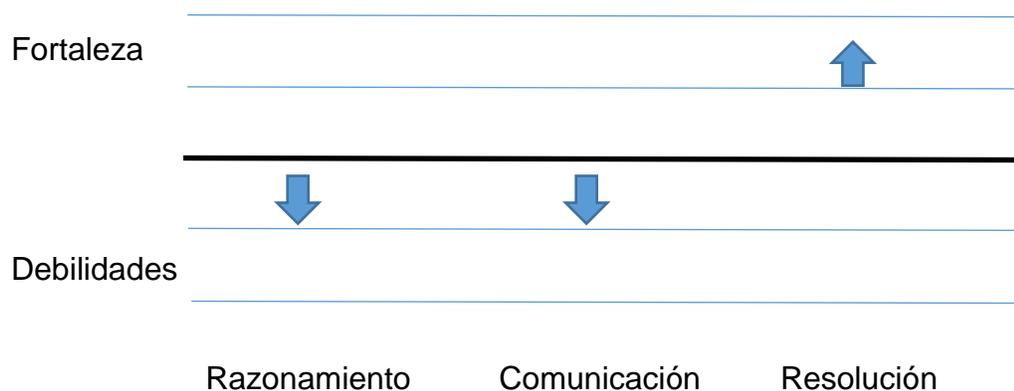
	<b>INSUFICIENTE</b>	<b>MINIMO</b>	<b>SATISFACTORIO</b>	<b>AVANZADO</b>
<b>ESTABLECIMIENTO</b>	18 %	41%	28%	13%
<b>CAJAMARCA</b>				
<b>OFICIALES</b>				
<b>URBANOS</b>	28%	41%	20%	11%
<b>CAJAMARCA</b>				
<b>OFICIALES</b>				
<b>RURAL</b>	42%	35%	17%	6%
<b>TOLIMA OFICIAL</b>				
<b>URBANO</b>	40%	32%	19%	8%
<b>TOLIMA OFICIAL</b>				
<b>RURAL</b>	46%	32%	16%	6%
<b>TOLIMA NO OFICIAL</b>	21%	28%	28%	24%
<b>COLOMBIA OFICIAL</b>				
<b>URBANO</b>	38%	32%	20%	10%
<b>COLOMBIA OFICIAL</b>				
<b>RURAL</b>	42%	35%	17%	6%
<b>COLOMBIA</b>				
<b>NO OFICIAL</b>	17%	25%	28%	30%

Fuente: Ministerio de Educación Nacional, (2016).

En los resultados presentados en la tabla anterior, se pueden sacar varias conclusiones: existen brechas importantes entre el rendimiento de la población urbana y rural en grado quinto en el área de matemáticas. El establecimiento donde está la población objetivo, presenta resultados superiores a los de los colegios oficiales urbanos del departamento y del país.

La prueba saber en el área de matemáticas la prueba SABER para grado 5, evalúa el desarrollo de las competencias matemáticas: La Comunicación, representación y Modelación; Razonamiento y Argumentación; Planteamiento y La Resolución de Problemas. A continuación se presentan los resultados obtenidos por los estudiantes de grado 5 de la institución Ismael Perdomo en 2015

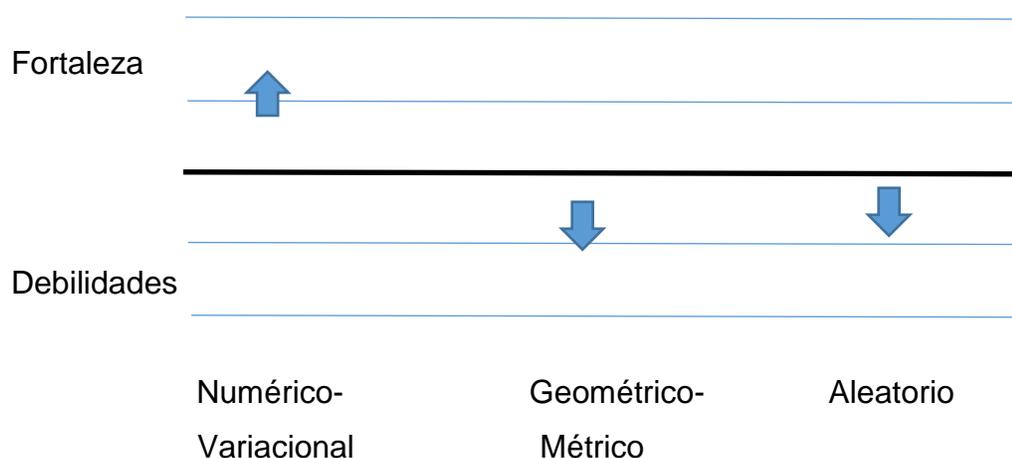
**Figura 1.** Fortalezas y Debilidades por Competencia Matemáticas, Institución Educativa Ismael Perdomo, Cajamarca – Tolima, 2015.



Fuente: Ministerio de Educación Nacional, (2016).

La prueba SABER en grado 5, evalúa el desempeño de los estudiantes en los siguientes componentes matemáticos: Numérico – Variacional, Geométrico – Métrico y Aleatorio. A continuación, se presentan los resultados de la IE Ismael Perdomo para grado 5 en el área de matemáticas:

**Figura 2.** Fortalezas y Debilidades Desarrollo del Pensamiento Matemático, Institución Educativa Ismael Perdomo, Cajamarca – Tolima, 2015.



Fuente: Ministerio de Educación Nacional, (2016).

En comparación con los establecimientos educativos que presentan puntajes promedio similares, en el área y grado evaluado, el establecimiento es relativamente:

- Débil en Razonamiento y argumentación
- Débil en Comunicación, representación y modelación
- Muy fuerte en Planteamiento y resolución de problemas
- Muy fuerte en el componente Numérico-variacional
- Débil en el componente Geométrico-métrico, representación y Modelación
- Débil en el componente Aleatorio

Teniendo en cuenta estos resultados, se justifica hacer un estudio que genere alternativas de enseñanza y de aprendizaje en el componente aleatorio, donde los estudiantes tienen dificultades.

### **1.3 OBJETIVOS**

**1.3.1 Objetivo General.** Implementar un proceso de enseñanza y aprendizaje en el área de matemáticas que contribuya en el desarrollo de la competencia de la resolución de problemas en pensamiento aleatorio, con estudiantes de quinto grado de primaria.

#### **1.3.2 Objetivo Específicos**

- Contribuir en el dominio de conocimientos relacionados con el pensamiento aleatorio de en estudiantes de quinto de primaria.
- Fortalecer el manejo de estrategias heurísticas en el proceso de resolución de problemas con estudiantes de quinto año de primaria.
- Desarrollar en estudiantes de quinto año de primaria el manejo de estrategias de control.
- Propiciar el desarrollo de actitudes necesarias para la resolución de problemas de pensamiento aleatorio en estudiantes de quinto año de primaria.

### **1.4 PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN**

**1.4.1 Pregunta Central.** ¿Qué características debe tener un proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, para que contribuya en el desarrollo de la competencia de resolución de problemas en pensamiento aleatorio, con estudiantes de quinto grado de primaria?

#### 1.4.2 Preguntas Auxiliares

- ¿Qué tipo de actividades de aprendizaje se deben diseñar e implementar para contribuir en el dominio de conocimientos relacionados con el pensamiento aleatorio en estudiantes de quinto de básica primaria?
- ¿Qué estrategias didácticas ayudan a fortalecer el manejo de estrategias heurísticas en el proceso de resolución de problemas con estudiantes de grado quinto de básica primaria?
- ¿De qué manera se puede implementar un proceso que contribuya en el desarrollo de estrategias de control en estudiantes de quinto año de básica primaria?
- ¿Qué tipo de actividades fortalecen el manejo de actitudes necesarias para el estudio de las matemáticas en estudiantes de quinto año de básica primaria?

## 2. REFERENTES TEÓRICOS

En la actualidad la enseñanza de las matemáticas de la básica primaria, secundaria y media, en Colombia están dado por la Ley General de Educación 115, los lineamientos curriculares, los estándares básicos de competencia y los derechos básicos de aprendizaje.

Dentro de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se plantea:

El principal objetivo de cualquier trabajo en matemáticas es ayudar a las personas a dar sentido al mundo que les rodea y a comprender los significados que otros construyen y cultivan. Mediante el aprendizaje de las matemáticas los estudiantes no sólo desarrollan su capacidad de pensamiento y de reflexión lógica sino que, al mismo tiempo, adquieren un conjunto de instrumentos poderosísimos para explorar la realidad, representarla, explicarla y predecirla; en suma, para actuar en y para ella. (Ministerio de Educacion Nacional, s.f.)

Para lograrlo integra tres grandes aspectos:

- Los conocimientos básicos: tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas. Se relacionan con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional, entre otros.
- Los procesos generales: la comunicación, modelación, el razonamiento, la ejercitación y la formulación y resolución de problemas.
- El contexto: tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses

que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas.

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas prepara la transición hacia el dominio de las competencias al incorporar una consideración pragmática e instrumental del conocimiento matemático, en la cual se utilizaban los conceptos, proposiciones, sistemas y estructuras matemáticas como herramientas eficaces mediante las cuales se llevaban a la práctica determinados tipos de pensamiento lógico y matemático dentro y fuera de la institución educativa.

En los estándares básicos de competencia se presentan dos facetas (práctica y formal) y dos tipos de conocimiento (conceptual y procedimental) señalando nuevos derroteros para aproximarse a una interpretación enriquecida de la expresión ser matemáticamente competente. Esta noción ampliada de competencia está relacionada con el saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo y por qué hacerlo. Por tanto, la precisión del sentido de estas expresiones implica una noción de competencia estrechamente ligada tanto al hacer como al comprender. Si bien es cierto que la sociedad reclama y valora el saber en acción o saber procedimental, también es cierto que la posibilidad de la acción reflexiva con carácter flexible, adaptable y generalizable exige estar acompañada de comprender qué se hace y por qué se hace y de las disposiciones y actitudes necesarias para querer hacerlo, sentirse bien haciéndolo y percibir las ocasiones de hacerlo.

Estas argumentaciones permiten precisar algunos procesos generales presentes en toda la actividad matemática que explicitan lo que significa ser matemáticamente competente, entre ellas Formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas.

Los Derechos Básicos de Aprendizaje se estructuran guardando coherencia con los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencias (EBC). Su

importancia radica en que plantean elementos para la construcción de rutas de aprendizaje año a año para que, como resultado de un proceso, los estudiantes alcancen los EBC propuestos por cada grupo de grados. Debe tenerse en cuenta que los DBA son un apoyo para el desarrollo de propuestas curriculares que pueden ser articuladas con los enfoques, metodologías, estrategias y contextos definidos en cada establecimiento educativo, en el marco de los Proyectos Educativos Institucionales materializados en los planes de área y de aula.

## **2.1 EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS**

El concepto de competencia se refiere a un sistema de acción complejo que abarca las habilidades intelectuales, las actitudes y otros elementos como la motivación y los valores. Es decir, la competencia apunta a la capacidad que desarrolla el individuo para poner en práctica de manera articulada conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar y resolver problemas (El Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, 2005).

**2.1.1 Los Conocimientos.** El dominio de conocimientos se va a seguir entendiendo en los términos que lo señala Schoenfeld, (1985).

El estudiante debe tener una base amplia de conocimientos de matemáticas para proponer y resolver problema. En este sentido, Schoenfeld, (1985), presenta un amplio rango de recursos que pueden contribuir a la ejecución de la resolución de problemas en un dominio matemático particular:

- El conocimiento informal e intuitivo acerca del dominio del problema.
- La familiaridad con procedimientos rutinarios.
- El conocimiento de hechos y definiciones.

- La habilidad para ejecutar procedimientos algorítmicos.
- La posesión de un espectro de competencias relevantes.

Desde esta perspectiva, la dimensión de recursos a disposición del alumno, puede estar conformada por términos no definidos, definiciones, postulados, teoremas, procedimientos algorítmicos, entre otros.

**2.1.2 Las Habilidades Matemáticas.** Las habilidades matemáticas que se promoverán en la investigación, reportada en el presente documento, se entienden como la capacidad que desarrolla el alumno para seleccionar y emplear estrategias heurísticas y de control (Polya, 1945; Schoenfeld, 1985). Por ejemplo, algunas habilidades matemáticas que debe desarrollar el estudiante en el nivel de la básica primaria son: comprender el enunciado del problema, particularizar, generalizar, construir conjeturas, construir contraejemplos, saber cuándo se puede aplicar un teorema.

Polya, (1945) reflexiona sobre la habilidad que debe desarrollar el estudiante para entender el problema. Para lograr un entendimiento del enunciado del problema, conviene que queden claros: los datos, las incógnitas y las condiciones del problema.

Estos elementos deben ser localizados cuando se respondan las preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos? ¿Cuál es la condición?

El problema debe leerse detenidamente e interpretar que es lo que queremos obtener, cuáles son los datos con los que contamos y si éstos son suficientes, el estudiante no sólo debe entender el problema, debe de interesarse en resolverlo.

Dos familias de habilidades útiles en la resolución de problemas son la utilización de estrategias heurísticas (Polya, 1945) y de las estrategias de control (Schonfeld, 1985)

Las heurísticas son acciones que pueden resultar de utilidad para resolver problemas,

se pueden considerar tales acciones como estrategias y técnicas para un avance en el proceso de solución.

Este tipo de estrategias cognitivas constituyen métodos tales como descomponer el problema en casos más simples, invertir el problema, relajar las condiciones, entre otras.

En la dimensión de estrategias de control, se ubican las preguntas que se auto-formula el estudiante y las decisiones que tome, encaminadas a entender, a revisar la veracidad de las ideas, la claridad y sencillez de la argumentación. Resulta útil para el estudiante que se plantee las preguntas siguientes para desarrollar un pensamiento crítico sobre la solución: ¿Estoy entendiendo adecuadamente el enunciado del problema? ¿Estoy contestando la pregunta que me hicieron? ¿Está bien justificado un paso de la solución? ¿Existen alternativas más sencillas para resolver el problema?

Por ejemplo, una estrategia de control es examinar la solución obtenida. Cuando el estudiante, supone que ha encontrado la respuesta al problema, se inicia un nuevo proceso, donde hay que realizar nuevas acciones, tales como, verificar los resultados, revisar los razonamientos, explorar caminos más cortos y aplicar el resultado obtenido en la solución de otro problema.

En este sentido, Schoenfeld, (1992) reporta que los matemáticos que tienen mucha experiencia en solución de problemas de matemáticas (expertos) dedican más tiempo en la fase de entendimiento del problema. Por su parte, los estudiantes no le dedican tanto tiempo a entender el problema, más bien ponen en práctica las estrategias de solución. A diferencia de los expertos, generalmente los estudiantes no tienen la costumbre de revisar las respuestas de los problemas.

Cuando se toman decisiones inadecuadas sobre la selección de estrategias y recursos, el fracaso se presenta; el control sobre las decisiones y tareas de ejecución en el proceso de solución de un problema, es un ejercicio permanente de evaluación,

desconocerlo garantiza el fracaso, aplicarlo sistemáticamente contribuye en la construcción de la solución.

**2.1.3 Las Actitudes y Valores.** La tercera dimensión para desarrollar competencias, son las actitudes y los valores. Las actitudes se refieren a la disposición que tiene el estudiante para enfrentar el estudio de las matemáticas. Por ejemplo, la perseverancia que debe tener el estudiante para resolver un problema. En la escuela se debe ayudar a desarrollar valores para la vida en sociedad. La Educación Matemática puede contribuir a que los estudiantes convivan en un espacio donde se tenga tolerancia y respeto por las ideas ajenas, cumplimiento por las normas, puntualidad en la entrega de trabajos, ente otras. Sin embargo, esta dimensión debe ser trabajada de manera integral y multidisciplinaria en la institución educativa.

Las sesiones de trabajo con los alumnos, se desarrollarán en un ambiente donde se intentará propiciar el desarrollo de algunas competencias matemáticas como: la resolución de problemas, la comunicación de las ideas matemáticas y la argumentación de las soluciones y procedimientos.

Para cumplir con este propósito, se generarán condiciones propicias para debatir sobre ideas matemáticas, en un ambiente de confianza y de respeto entre todos los miembros del grupo. Se hará énfasis sobre el desarrollo de las siguientes actitudes:

- Perseverancia para resolver los problemas.
- Asumir una posición activa y crítica dentro de la clase.
- Presentar las ideas de solución de un problema frente a todo el grupo.
- Defender un punto de vista y estar dispuesto a cambiarlo cuando el peso de los argumentos demuestren que es erróneo.

- Reconocer soluciones equivocadas o poco sensatas.
- Trabajo cooperativo, tolerancia y respeto por las ideas ajenas,
- Revisión sistemática de procedimientos y resultados.

Si bien es cierto, las actitudes y valores señalados en los párrafos anteriores, se pusieron en práctica en el aula donde se desarrolló el estudio, no son objeto de reflexión en la presente investigación.

## **2.2 LAS COMPETENCIAS QUE SE PROMUEVEN EN EL PROYECTO**

Las competencias que se promoverán en el proyecto que aquí se reporta, son las mismas que sugieren en las pruebas SABER grado 5, que son competencias específicas para el área de matemáticas: Razonamiento y argumentación; Comunicación, representación y modelación; Planteamiento y resolución de problemas, se busca que el estudiante responda a situaciones donde:

- Construye e interpreta modelos matemáticos deterministas o aleatorios mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales o formales.
- Propone, formula, define y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.
- Propone explicaciones de los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.
- Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos y variacionales, mediante el lenguaje verbal y matemático

- Analiza las relaciones entre dos o más variables de un proceso social o natural para determinar o estimar su comportamiento.
- Cuantifica, representa y contrasta experimental o matemáticamente magnitudes del espacio que lo rodea.
- Elige un enfoque determinista o uno aleatorio para el estudio un proceso o fenómeno, y argumenta su pertinencia.
- Interpreta tablas, gráficas, mapas, diagramas y textos con símbolos matemáticos y científicos.

A continuación se presenta una revisión de literatura sobre las características esenciales del pensamiento matemático, sobre las cuales se sustentan las competencias disciplinares básicas.

**2.2.1 La Resolución de Problemas de Matemáticas.** El planteamiento y la resolución de problemas han sido considerados elementos fundamentales en la construcción y el desarrollo de las matemáticas.

El movimiento de la resolución de problemas surge a finales de la década de los 70 como producto de fracaso obtenido en los movimientos mundiales de reforma en la matemáticas escolares, conocidos con los nombres de matemática moderna y el regreso a lo básico.

Tomando en cuenta los trabajos de Polya y Schoenfeld, se reconoce que la resolución de problemas debe de estar presente en el currículo de matemáticas, debe ser un objetivo primario que promueva el aprendizaje de la disciplina. En este sentido, las Secretarías de Educación y Ministerios de Educación de varios países del mundo han realizado propuestas curriculares articuladas a través de la resolución de problemas.

Este ministerio de educación nacional, propone una educación matemática que propicie aprendizajes de mayores alcances y más duraderos que los tradicionales, que no sólo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos, teoremas y algoritmos. Propone asignarle valor real a los procesos generales de pensamiento, como la comunicación, la modelación, la comparación y ejercitación de procedimientos, el planteamiento y resolución de problemas. Sobre esto último señala:

“Para lograr que las metas propuestas sobre la resolución de problemas, los estudiantes tienen que discutir sus ideas, negociar, especular sobre posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmar o a desaprobar sus ideas”. (p. 77)

Este tipo de planteamientos didácticos fomenta la participación, la libre expresión y la discusión entre los asistentes al aula. Alejando así las viejas creencias que marginaban la participación de los estudiantes y la relegaban a un papel pasivo.

La reforma planteada en los Estados Unidos, construida por el Consejo Nacional de Profesores (NCTM, 2000), ha ofrecido un interesante conjunto de planteamientos pedagógicos y sociales, algunos de los cuales tienen validez solo en ese país, pero otros son de interés internacional, por ejemplo, afirma que la habilidad para resolver problemas no sólo es un propósito para el aprendizaje de las matemáticas, sino también el medio principal de conseguirlo. Afirman que el currículo desde la primaria hasta la preparatoria, deben permitir que todos los estudiantes:

- Construyan nuevo conocimiento matemático a través de la resolución de problemas.
- Resuelvan problemas que surgen en matemáticas y en otros contextos.
- Apliquen y ajusten una variedad de estrategias apropiadas para resolver problemas.

- Monitoreen el proceso de resolver problemas de matemáticas. (p. 57).

Así mismo, sugiere que los estudiantes deben tener oportunidades frecuentes para formular y resolver problemas complejos que requieren una cantidad significativa de esfuerzo.

“La tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Influye en la matemática que se enseña y ayuda al aprendizaje de los estudiantes” (National Council of Teachers of Mathematics, 2000, p. 30).

La discusión sobre este particular ha sido orientada al uso de las tecnologías computacionales, el uso de éstas es uno de los factores prioritarios de la educación moderna.

Otro de los países que toma en cuenta estos aspectos es España, ya que en un documento del Ministerio de Educación y Cultura español, (1991) se sugiere:

- Formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, organizar y relacionar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la solución de problemas.
- Hacer el análisis de situaciones concretas bajo el enfoque de la resolución de problemas, utilizando distintos recursos y estrategias.
- Actuar en situaciones cotidianas y en la resolución de problemas, de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

La reforma del currículo español hace énfasis en que la calculadora, y ciertos programas informáticos, son recursos de primer orden en la investigación y el análisis

de propiedades numéricas y gráficas, por lo cual debe potenciarse su empleo (BOE, 3/07/2003).

Un objetivo central del currículo español, consiste en desarrollar la habilidad en los estudiantes para comprender y expresar mensajes científicos utilizando el lenguaje oral y escrito con propiedad.

La Reforma Integral de la Educación Media Superior en México propone, para el área de matemáticas, el desarrollo de ocho competencias disciplinares básicas. Una de estas competencias, se declara de la siguiente manera:

- Propone y resuelve diferentes tipos de problemas matemáticos buscando diferentes enfoques.

- 

En esta competencia se reconoce la importancia que tiene la resolución de problemas, para el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante del nivel Medio Superior. La modificación del currículo de estos países, contemplan aspectos prioritarios que deben desarrollar los estudiantes del nivel secundario, como plantear conjeturas, validarlas, organizar la información, buscar precisión en el uso del lenguaje y ser persistente, características que son importantes en el quehacer matemático. Cada país ha realizado adecuaciones en el currículo de acuerdo a la problemática de cada uno de ellos, sin embargo todos convergen en tomar en cuenta aspectos que en reformas anteriores no se destacaban, como el uso de las nuevas tecnologías.

**2.2.2 La Comunicación de las Ideas Matemáticas.** En el mundo moderno, la sociedad demanda ciudadanos que estén en capacidad de comunicarse para expresar libremente sus ideas. En todas las áreas del conocimiento y en todas las profesiones, se requiere que las personas sean capaces de:

- Expresar ideas hablando, escribiendo, demostrando y describiendo visualmente de diferentes formas.

- Comprender, interpretar y evaluar ideas que son presentadas oralmente, por escrito y en forma visual.
- Construir, interpretar y ligar varias representaciones de ideas y de relaciones.
- Hacer observaciones y conjeturas, formular preguntas, y reunir y evaluar información.
- Producir y presentar argumentos persuasivos y convincentes.

En los últimos años se ha incrementado el interés de los investigadores por estudiar cómo comunican ideas matemáticas los alumnos y qué factores facilitan o impiden el desarrollo de habilidades comunicativas.

Muchas de estas características y habilidades se dan diariamente en la interacción verbal y escrita que tienen los alumnos en las clases. Sin embargo, a este tema no se ha atendido en el currículo de matemáticas con el rigor que se merece, en parte por las limitaciones del tiempo y en parte porque se le resta importancia a este asunto o porque se maneja la creencia que estos temas son asunto de los profesores de otras áreas.

Diversos estudios han identificado la comunicación como uno de los procesos más importantes para aprender matemáticas y para resolver problemas.

La comunicación juega un papel fundamental, para ayudar a los estudiantes a articular sus nociones informales e intuitivas con el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas; cumple también una función clave como ayuda para que los alumnos tracen importantes conexiones entre las representaciones gráficas, numéricas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas.

La Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS), impulsada por la SEP (2008) destaca la comunicación verbal y escrita como una parte crucial del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por las siguientes razones: En primer lugar, la comunicación en forma de argumento lógico es fundamental para el discurso matemático. En segundo lugar, la comunicación es el medio por el cual los conocimientos personales se sistematizan en un ámbito y, por tanto, se aceptan como conocimiento nuevo. En tercer lugar el desarrollo en las categorías y estructuras del sistema lingüístico estructura la comprensión del niño y la hace progresar hacia un modelo de conciencia pública.

En consecuencia con estas ideas, el autor propone que el trabajo de los estudiantes debe dejar de ser actuar con estructuras ajenas, responder a preguntas ajenas y esperar que el profesor compruebe la respuesta. Además, que la evaluación del desempeño y de los conocimientos de los alumnos no debe seguir basándose en pruebas en las que las respuestas de éstos sean limitadas a respuestas cortas, correctas o incorrectas, y que en la creación del conocimiento sólo existe lo que se ajusta a la estructura del conocimiento matemático ya creado por el alumno y lo que no se ajusta a ella y debe, por tanto, sugerir la conjetura.

De esta manera las funciones y el trabajo de los alumnos y de los profesores se consideran complementarias. El profesor debe guiar, escuchar, discutir, sugerir, preguntar y clarificar el trabajo de los estudiantes a través de actividades apropiadas e interesantes.

La comunicación es un pilar de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas. Desde este enfoque, las clases deberían caracterizarse por las conversaciones sobre las matemáticas entre los estudiantes y entre éstos y el profesor. Para que los profesores maximicen la comunicación con y entre los estudiantes, deberían minimizar la cantidad de tiempo que ellos mismos dominan las discusiones en el salón de clase.

En nuestras clases los profesores necesitamos escuchar lo que los estudiantes comprenden, lo que ellos saben, lo que ellos piensan sobre las matemáticas y sobre su aprendizaje, escuchar las preguntas que hacen y las que no hacen, etc., para conocer cómo van sus procesos de razonamiento, de resolución de problemas, etc., para orientar el uso del lenguaje matemático y ayudarlos a desarrollar su habilidad para comunicar matemáticas.

Para que los estudiantes puedan comunicarse matemáticamente necesitamos establecer un ambiente en las clases en el que la comunicación sea una práctica natural, que ocurre regularmente, y en el cual la discusión de ideas sea valorada por todos. Este ambiente debe permitir que todos los estudiantes:

- Adquieran seguridad para hacer conjeturas, para preguntar por qué, para explicar su razonamiento, para argumentar y para resolver problemas.
- Se motiven a hacer preguntas y a expresar aquellas que no se atreven a exteriorizar.
- Lean, interpreten y conduzcan investigaciones matemáticas en clase; discutan, escuchen y negocien frecuentemente sus ideas matemáticas con otros estudiantes en forma individual, en pequeños grupos y con la clase completa.
- Escriban sobre las matemáticas y sobre sus impresiones y creencias tanto en informes de grupo, diarios personales, tareas en casa y actividades de evaluación.
- Hagan informes orales en clase en los cuales comunican a través de gráficos, palabras, ecuaciones, tablas y representaciones físicas.
- Frecuentemente estén pasando del lenguaje de la vida diaria al lenguaje de las matemáticas y al de la tecnología.

**2.2.3 La Argumentación Sobre los Procedimientos de Solución.** La argumentación es una forma de razonamiento, que se produce cuando se trata de convencer a alguien de la aceptabilidad de nuestras afirmaciones o de rebatir las afirmaciones matemáticas de otras personas (Duval, 1999).

Una misión central de la Educación Matemática es contribuir en el desarrollo de la competencia de la argumentación. Para llegar a ella, los estudiantes tienen que discutir sus ideas, negociar, especular acerca de los posibles ejemplos y contraejemplos que ayuden a confirmar o desaprobar sus ideas, la instrucción matemática debe incorporar estrategias para aprender a leer, conceptuar y usar argumentos matemáticos cada vez más sólidos.

En el estudio que se reporta en el presente documento, los estudiantes fueron motivados a discutir el sentido de las ideas matemáticas, los alumnos pueden discutir de forma abierta sus propias ideas ante sus compañeros y el profesor.

Los argumentos empleados por los alumnos, se pueden analizar en tres niveles de complejidad: para explicar, para justificar informalmente o para demostrar. En este sentido, algunos ejemplos de argumentos matemáticos son los siguientes:

- Dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.
- Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.
- Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.
- Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.
- Utilizar argumentos propios para exponer ideas.

**2.2.4** La Proposición de Problemas. Generalmente en la educación matemática tradicional, los problemas los propone el profesor, el conferencista, el experto, el autor de libros de texto.

Es usual que se generen pocos espacios para que el estudiante proponga sus propios problemas, para que busque variantes de problemas que el ya resolvió. Desde este punto de vista, se genera mucha dependencia intelectual.

Un aspecto central en el estudio que aquí se reporta será, el planteamiento de problemas de matemáticas.

**2.2.5 La Modelación Matemática.** La modelación matemática, en general, y la resolución de problemas de cambio o variación, en particular, desempeñan actualmente un rol importante en la Educación Matemática (Hitt, 1997; Ministerio de Educación Nacional, 1999; NCTM, 2000; Ministerio de Educación Nacional, 2004; Camacho y Santos, 2004).

El Ministerio de Educación Nacional, (2003) escribe un documento sobre los estándares para matemáticas, en el nivel básico y medio superior. Un componente prioritario del currículo, hace alusión al pensamiento variacional.

Este componente del currículo tiene en cuenta una de las aplicaciones más importantes de la matemática, cual es la formulación de modelos matemáticos para diversos fenómenos. Por ello, este currículo debe permitir que los estudiantes adquieran progresivamente una comprensión de patrones, relaciones y funciones, así como desarrollar su capacidad de representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas mediante símbolos algebraicos y gráficas apropiadas. Así mismo, debe desarrollar en ellos la capacidad de analizar el cambio en varios contextos y de utilizar modelos matemáticos para entender y representar relaciones cuantitativas. (p.16)

Como se puede observar, la resolución de problemas conlleva al uso de diferentes registros semióticos de representación, que incluye el manejo de tablas, gráficas y ecuaciones.

Hace algunos años, para poder construir un modelo matemático de un problema real, era necesario que el alumno conociera herramientas matemáticas de álgebra lineal y ecuaciones diferenciales. En la actualidad, con el avance y el uso de las herramientas computacionales en el aula, se abre la posibilidad de construir estos mismos modelos en los primeros semestres universitarios, con nuevos enfoques numéricos, algebraicos o simulaciones, que incluyen la geometría dinámica.

En el proceso de modelación, el estudiante encontrará problemas propios que impliquen la manipulación aritmética, algebraica o geométrica. En caso de cometer errores en la manipulación matemática, el proceso de modelación conducirá a resultados erróneos. Al respecto, Hitt, (1997) considera que la calculadora graficadora TI-92 puede ser de gran apoyo para que el alumno identifique e intente superar los errores que cometa en el proceso de solución.

Un objetivo central en el currículo español para la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), sugiere aplicar, adecuadamente, las herramientas matemáticas adquiridas a situaciones de la vida diaria.

Se pueden distinguir tres tipos de contextos, utilizados para incentivar la participación de los estudiantes en actividades esenciales del quehacer de la disciplina: contextos del mundo real, los hipotéticos y los puramente matemáticos (Barrera & Santos, 2002).

**2.2.5.1 Contextos del Mundo Real.** El referente donde se desarrolla la situación involucra fenómenos o situaciones reales. La solución de este tipo de problemas conlleva a la construcción de un modelo matemático.

El punto de partida en la construcción de un modelo matemático es un problema real. Debido a la complejidad que tiene este tipo de problemas, generalmente se hacen simplificaciones para construir una representación matemática aproximada a la realidad. Por lo tanto, hay que establecer una clara distinción entre el modelo como representación y la situación representada.

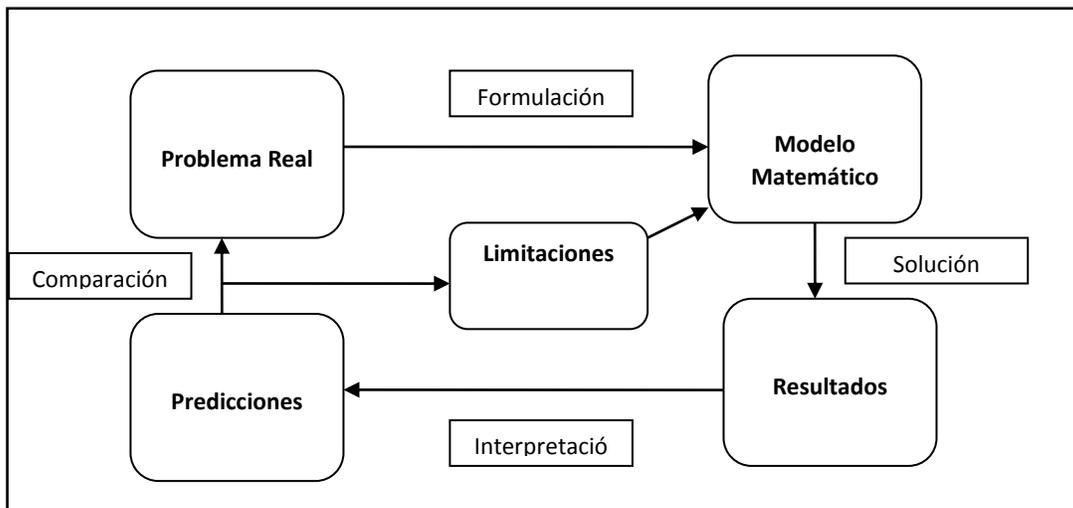
Dicha situación, simplificada e idealizada, está sujeta a condiciones y suposiciones e intereses específicos. Ello conduce a la formulación de un problema, denominado realista. El carácter simplificado del problema, más que un defecto, tiene ventajas: resulta más sencillo de abordar desde el punto de vista matemático y eventualmente, puede manejarse en el aula en un determinado nivel escolar.

Los datos, variables, conceptos, relaciones, suposiciones y condiciones deben trasladarse a un lenguaje matemático y así resulta un modelo de la situación original. En el proceso de solución, se aplican los métodos conocidos para obtener los resultados del modelo, sacar conclusiones, calcular y revisar ejemplos concretos. El manejo de herramientas computacionales puede resultar de utilidad en esta parte del proceso. El valor de los resultados está en función de la interpretación que se haga de ellos, dentro de la situación real que se estudia, para hacer las predicciones del modelo. Las predicciones son usadas para tomar decisiones. La capacidad de predecir es un aspecto fundamental de las matemáticas.

Las predicciones deben ser validadas; es decir, trasladarlas al problema real y compararlas con las observaciones hechas del fenómeno que se está estudiando.

El resolutor toma la decisión sobre la validez del modelo, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la comparación y los objetivos que persigue la solución. En caso de que el modelo no describa bien al fenómeno real, se debe reiniciar el proceso, modificando el modelo o reemplazándolo por uno nuevo. Los elementos básicos de la construcción, de un modelo matemático, están expresados en la siguiente figura:

**Figura 3.** Construcción de un modelo matemático



Fuente: Benítez Mojica y Londoño Millán, (2009)

**2.2.5.2 Contextos Hipotéticos.** La situación se construye a partir de una serie de condiciones y suposiciones sobre las variables que intervienen en un problema realista. Los datos proporcionados en este tipo de problemas no son reales.

El planteamiento de situaciones hipotéticas en el aula puede contribuir a que los estudiantes empleen una serie de recursos matemáticos, diferentes representaciones de los conceptos que se involucran, y diferentes formas de resolver el mismo problema.

**2.2.5.3 Contextos Puramente Matemáticos.** El referente en el que es construida la situación problemática involucra solamente aspectos matemáticos.

El objetivo principal de plantear este tipo de situaciones es que los estudiantes pueden hacer uso de recursos y estrategias para diseñar métodos de solución, encontrar patrones, construir conjeturas y darles seguimiento. Un ejemplo, es el problema que se denomina explorando.

El empleo de alguna herramienta en la construcción del conocimiento matemático de los estudiantes no sólo influye en la manera de representar e interactuar con las ideas

de la disciplina, sino también en las formas de razonar, sustentar y presentar relaciones o propiedades matemáticas.

- ¿Qué características debe tener un proceso de instrucción que propicie el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes de quinto de primaria?
- ¿De qué manera se puede usar la tecnología computacional para promover el desarrollo de competencias matemática de los estudiantes de quinto de primaria?
- ¿Qué características deben tener las actividades de aprendizaje para promover el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes de quinto de primaria?
- ¿Qué papel desempeña el empleo de varias representaciones de los objetos matemáticos para propiciar el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes de quinto de primaria?
- ¿Qué aspectos del pensamiento matemático de los estudiantes de quinto de primaria, se destacan cuando se enfrenta a actividades en diferentes contextos?

Este tipo preguntas resultan relevantes al examinar y contrastar los diferentes aspectos del quehacer matemático que aparecen durante la comprensión de las ideas matemáticas y el desarrollo de competencias. En particular, nos interesa ilustrar por medio de distintos ejemplos la relevancia que tiene el uso actividades en diferentes contextos (reales, realistas y formales) en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes de básica primaria. El punto de partida se basa en que el uso sistemático de actividades en diferentes contextos, con apoyo de tecnología computacional, favorece en gran medida la búsqueda de relaciones, la resolución de problemas, la presentación de argumentos y la comunicación de ideas matemáticas. La presentación y discusión de ejemplos genera información valiosa para que los profesores identifiquen posibles trayectorias de aprendizaje para los estudiantes a de resolver problemas.

De la misma manera que el uso de las calculadoras sencillas ha conducido a una reflexión sobre su utilización para desarrollar el sentido numérico de los estudiantes; se espera que el empleo del software de geometría dinámica aporte elementos relevantes que permitan diseñar actividades para que los estudiantes desarrollen el sentido y pensamiento geométrico (Arcavi & Hadas, 2000).

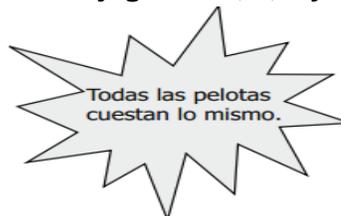
Algunos ejemplos analizados donde se tienen en cuenta la relación entre los estándares básicos de competencia, los derechos básicos de aprendizaje, los pensamientos matemáticos, las competencias específicas de matemáticas, según pruebas SABER son:

**Tabla 3.** Ejemplo 1, Relación Referentes de Calidad Matemáticas.

<b>REFERENTES NACIONALES</b>		
<b>ESTANDARES</b>	<b>DERECHOS BASICOS DE APRENDIZAJE (DBA)</b>	<b>SABER: (COMPONENTE, COMPETENCIA, AFIRMACION)</b>
<b>RESUELVO Y FORMULO PROBLEMAS EN SITUACIONES DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA, INVERSA Y PRODUCTO DE MEDIDAS.</b>	<b>RESUELVE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA</b>	<b>COMPONENTE:</b> NUMERICO – VARACIONAL <b>COMPETENCIA:</b> PLANTEAMIENTO Y SOLUCION DE PROBLEMAS <b>AFIRMACION:</b> RESOLVER Y FORMULAR PROBLEMAS SENCILLOS DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA <b>CLAVE: B</b>

**La siguiente tabla muestra cuánto cuestan, en una juguetería, 3, 5 y 7 pelotas.**

CANTIDAD DE PELOTAS	COSTO
3	\$3.600
5	\$6.000
7	\$8.400



**¿Cuánto cuesta una pelota?**

- A. \$1.000    B. \$1.200    C. \$3.600    D. \$8.400**

Fuente: Ministerio de Educación Nacional, (2015)

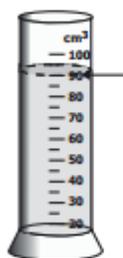
**Tabla 4.** Ejemplo 2, Relación Referentes de Calidad Matemáticas.

<b>REFERENTES NACIONALES</b>		
<b>ESTANDARES</b>	<b>DERECHOS BASICOS DE APRENDIZAJE (DBA)</b>	<b>SABER: (COMPONENTE, COMPETENCIA, AFIRMACION)</b>
<b>CONJETURO Y PONGO A PRUEBA PREDICCIONES ACERCA DE LA POSIBILIDAD DE OCURRENCIA DE EVENTOS.</b>	COMPRENDE LA PROBABILIDAD DE OBTENER CIERTOS RESULTADOS EN SITUACIONES SENCILLAS	<b>COMPONENTE:</b> ALEATORIO <b>COMPETENCIA:</b> RAZONAMIENTO Y ARGUMENTACION <b>AFIRMACION:</b> CONJETURAR Y ARGUMENTAR ACERCA DE LA POSIBILIDAD DE OCURRENCIA DE EVENTOS <b>CLAVE: C</b>
<p><b>En la función de un circo, un malabarista utiliza pelotas de igual forma y tamaño que guarda en una caja: 2 rojas, 4 verdes y 8 amarillas.</b></p> <p><b>El número de posibilidades que tiene el malabarista de sacar una pelota roja de la caja es</b></p> <p><b>A. la mitad del número de posibilidades de sacar una pelota amarilla.</b></p> <p><b>B. la cuarta parte del número de posibilidades de sacar una pelota verde.</b></p> <p><b>C. la mitad del número de posibilidades de sacar una pelota verde.</b></p> <p><b>D. la octava parte del número de posibilidades de sacar una pelota amarilla.</b></p>		

Fuente: Ministerio de Educación Nacional, (2012)

**Tabla 5.** Ejemplo 3, Relación Referentes de Calidad Matemáticas.

<b>REFERENTES NACIONALES</b>		
<b>ESTANDARES</b>	<b>DERECHOS BASICOS DE APRENDIZAJE (DBA)</b>	<b>SABER: (COMPONENTE, COMPETENCIA, AFIRMACION)</b>
<b>DIFERENCIO Y ORDENO, EN OBJETOS Y EVENTOS, PROPIEDADES O ATRIBUTOS QUE SE PUEDAN MEDIR</b>	MIDE Y ESTIMA LONGITUD, DISTANCIA, ÁREA, CAPACIDAD, PESO, DURACIÓN, ETC., EN OBJETOS O EVENTOS.	<b>COMPONENTE:</b> ESPACIAL – METRICO <b>COMPETENCIA:</b> COMUNICACION <b>AFIRMACION:</b> ESTABLECER ENTRE ATRIBUTOS MENSURABLES DE UN OBJETO O EVENTO Y SUS RESPECTIVAS MAGNITUDES <b>CLAVE: B</b>
<p><b>Paula vertió líquido en un recipiente como se muestra en la figura.</b></p>		



**Figura**

Paula anotó el número señalado. Ella midió:

- A. la altura del recipiente.
- B. el volumen del líquido.
- C. la resistencia del recipiente.
- D. la temperatura del líquido.

Fuente: Ministerio de Educación Nacional, (2015)

---

## 2.3 EL PENSAMIENTO ALEATORIO

El pensamiento aleatorio es conocido como probabilístico o estocástico, ayuda en la toma de decisiones en diferentes situaciones de azar, incertidumbre, de riesgo o ambigüedad por no tener la información necesaria o confiable, en las que podemos dar una aproximación con certeza de lo que puede ocurrir. Este pensamiento es apoyado en conceptos, leyes y procedimientos de la teoría de probabilidades y de la estadística inferencial, y de una forma indirecta de la estadística descriptiva y combinatoria.

El pensamiento aleatorio de los estudiantes de la básica primaria son clasificados en diferentes niveles que van desde una impredeción hasta un pensamiento formal. Según Sánchez y Benítez, (1997) en la investigación “algunos acercamientos al razonamiento probabilista de los alumnos” (p. 5), establecen 5 niveles de pensamiento probabilístico:

**2.3.1 Nivel de Impredeción.** En este nivel se sitúan estudiantes que creen que por estar en situación de azar, es completamente imposible predecir resultados. Por ejemplo, cuando se le indaga a un estudiante si al lanzar simultáneamente dos monedas. ¿Qué es más probable, obtener resultados iguales – dos caras o dos sellos – o diferentes – una cara y un sello?, donde la respuesta es: es imposible determinar el resultado porque es una situación al azar.

**2.3.2 Nivel Determinístico.** En este nivel podemos agrupar a aquellos estudiantes que explican los fenómenos de azar mediante una causa poderosa que las rige; entre esas

causas pueden ser, físicas, míticas o mágicas y empíricas. Por ejemplo, al preguntarle a un estudiante la causa de que en una lotería gana el premio mayor quien tenía el número 0000. Si contesta que por trampa se le considera determinista físico; si dice que no es posible ganar con los números cuya cifras sea la misma es determinista empírico; si su respuesta es que la suerte o al destino estuvo de su lado, es determinista mítico–mágico.

**2.3.3 Nivel Mecánico.** En este nivel encontramos estudiantes que incorporan constructos matemáticos para explicar los fenómenos al azar, pero la cita esta fuera de contexto. Por ejemplo, al preguntar a un estudiante cuál es la probabilidad si se lanza una moneda y un dado al mismo tiempo de obtener sello y un cuatro, respectivamente, y el estudiante contesta que es  $1/8$ , puesto que la probabilidad de obtener sello es de  $1/2$  y obtener un cuatro en el dado es  $1/6$ , entonces:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{8}$$

En este caso se desconoce la regla del producto y, además, la suma de fracciones es incorrecta, por lo tanto está contestando mecánicamente.

**2.3.4 Nivel de Pre-Rigor.** Acá podemos clasificar estudiantes que se han alejado considerablemente de teorías míticas, físicas, empíricas, y de incertidumbre, pues utilizan argumentos matemáticos, faltando madurar un poco dichos argumentos, para iniciar una discusión en la explicación de fenómenos probabilísticos. Por ejemplo, cuando a un estudiante se le indaga que, al lanzar dos dados y sumar los puntos, la probabilidad de obtener un cuatro o siete, es?, El evento de obtener un cuatro es equivalente o equiprobable al de obtener un cinco porque las combinaciones que dan estos resultados son las siguientes:

Para obtener cuatro:  $3 + 1$ ,  $2 + 2$ , dos posibilidades

Para obtener cinco:  $1 + 6$ ,  $3 + 4$ , dos posibilidades

Aunque el estudiante identifica algunas combinaciones, no logra identificarlas todas por completo, motivo por el cual se le clasificaría en este nivel de razonamiento.

**2.3.5 Nivel de Rigor.** En este nivel se sitúan estudiantes de nivel avanzado, donde argumentan en forma matemática, utilizando para ello diferentes estrategias, conceptos, procesos, algoritmo, entre otras, en la explicación verídica de los fenómenos probabilísticos que puedan ocurrir. Teniendo en cuenta el ejemplo anterior, se consideraría en el nivel de rigor al estudiante que conteste correctamente al identificar todas las combinaciones posibles y justificar el proceso:

Para cuatro:  $1 + 3, 2 + 2, 3 + 1$

Para siete:  $1 + 6, 6 + 1, 5 + 2, 2 + 5, 4 + 3, 3 + 4.$

Además justifica que la probabilidad de obtener un cuatro al sumar los puntos al lanzar dos dados es de  $3/36$  o  $1/12$ ; y la probabilidad de obtener un siete al sumar los puntos al lanzar dos dados es de  $6/36$  o  $1/6$ . Adicionalmente está en capacidad de representar el espacio muestral con un diagrama de árbol o una tabla de doble entrada, identificar el número de casos favorables e inclusive expresar la probabilidad en forma porcentual.

### **3. METODOLOGIA DEL TRABAJO**

#### **3.1 INTRODUCCION**

Este capítulo tiene como fin describir las actividades que componen el presente trabajo así como el propósito de cada una de ellas.

En primer lugar se detallan las características de los sujetos que participaron en la investigación y, posteriormente, se explican las fases que la integran: diseño y pilotaje de la encuesta de diagnóstico, aplicación del diagnóstico, diseño y pilotaje de las hojas de trabajo y de la encuesta de salida.

Finalmente se explica el propósito del análisis de la información tanto cuantitativa como cualitativamente.

#### **3.2 SUJETOS**

El presente trabajo de investigación se realizó en la Institución Educativa Ismael Perdomo, sede de primaria Piloto No 24, grado quinto de la básica primaria, ubicada en la población de Cajamarca en el departamento del Tolima – Colombia.

La sede de Primaria Piloto No 24, cuenta con dos grupos de grado quinto de la básica primaria, 5-1 y 5-2, el grupo 5-1 será el grupo experimental donde se realiza la intervención.

El grado 5-1, grupo experimental cuenta con 33 estudiantes, distribuidos en 19 mujeres (57,7%) y 14 hombres (42,3%), con edades que oscilan entre 10 y 14 años, donde la mayoría tienen 11 años (38%).

### 3.3 FASES DE LA INVESTIGACION

De manera sintetizada se presenta en la siguiente tabla cada una de las etapas realizadas en la investigación al igual que la acciones relacionadas en cada una de las fases. Posteriormente se explicará en forma detallada cada una de ellas.

**Tabla 6.** Fases de Investigación.

<b>FASES</b>	<b>ACCIONES</b>
<b>Diseño de encuesta diagnóstica</b>	Análisis de encuesta realizadas en trabajos de investigación similares. Se tomaron preguntas liberadas de las prueba SABER, grado quinto, área de matemáticas. Redacción de la encuesta diagnóstica. Aplicación grupo piloto. Análisis y ajuste a la encuesta.
<b>Aplicación de encuesta diagnóstica</b>	Aplicación de encuesta diagnóstica al grupo experimental para identificar las fortalezas y las oportunidades de mejoramiento de los estudiantes. Análisis de resultados.
<b>Diseño de hojas de trabajo y encuesta de salida</b>	Diseño de hojas de trabajo para realizar profundizaciones y superar las dificultades encontradas en la actividad diagnóstica. Diseño de hoja de trabajo de salida para determinar el grado de impacto de la propuesta didáctica.
<b>Pilotaje de Actividades</b>	Aplicación de las hojas de trabajo al grupo piloto. Aplicación de la encuesta final al grupo piloto. Análisis y realización de ajuste de los resultados del pilotaje.
<b>Recolección de Datos</b>	Aplicación al grupo experimental las hojas de trabajo y la encuesta de salida. Toma de Evidencias, (video, fotos)

	Elaboración de entrevistas
	Tipo Cuantitativo: Porcentaje de fortalezas y oportunidades de mejoramiento.
<b>Análisis de Resultados</b>	Tipo Cualitativo: Categorización, estrategias de solución que dan los estudiantes a los problemas.

Fuente: Etapas de Investigación Estadística, Seminario de Investigación, Universidad del Tolima, (2016).

**3.3.1** Diseño y Aplicación de Encuesta Diagnóstica. La realización del diagnóstico de los estudiantes es una tarea primordial en la presente investigación, ya que con el análisis de los resultados obtenidos nos permiten identificar las fortalezas, debilidades u oportunidades de mejoramiento y las concepciones que se tienen en torno a conceptos como: Experimentos o eventos aleatorios, posibilidad y probabilidad. Con el análisis y resultados que se obtiene se toman como punto de partida en la elaboración del proceso de enseñanza aprendizaje que se pretende implementar, así como el uso y pertinencia de software (Excel, GeoGebra).

En la elaboración del instrumento diagnóstico se tomaron algunas puntos modificados de la encuesta utilizada por Fuentes (2008), al igual que algunos situaciones problemas liberadas de la prueba ICFES SABER 5, aplicadas entre los años 2014 – 2015 a nivel nacional.

**3.3.1.1** Pilotaje. La prueba de pilotaje fue aplicada al grado quinto de la básica primaria, grupo 5-1, de la Institución Educativa La Palma, ubicada en el sector rural de la ciudad de Ibagué, en forma individual y con una duración de una hora (60 minutos).

Las características del grupo donde se aplicó la prueba piloto es muy homogénea en cuanto al grupo experimenta, cuenta con 33 estudiantes, de los cuales 20 son mujeres (60%) y 13 son hombres (40%), con edades que oscilan entre los 9 a 15 años.

La prueba piloto tiene como objetivo:

- Determinar la coherencia en la redacción.
- Determinar el nivel de profundización de los problemas y preguntas.
- Establecer tiempo adecuado para contestar la prueba.
- Analizar los resultados de la información obtenida de manera cualitativa y cuantitativa.

**3.3.1.2 Características del Instrumento.** Después de realizar la prueba piloto se analizaron los resultados obtenidos y las dificultades que tuvieron los estudiantes en solución de los problemas propuestos, realizando los cambios necesarios para la aplicación de la prueba diagnóstica en el grupo experimental.

La prueba diagnóstica tiene las siguientes características (Anexo 1):

- Consta 19 situaciones problemáticas, 12 de las cuales son de tipo I, opción múltiple de respuesta, y se pide justificar la respuesta.
- De las opciones de respuesta se ha incluido “No se” o “No se puede determinar”, con el objetivo que se responda de forma honesta y evitar que se marque la respuesta al azar.
- En las situaciones (4,12,13,16,17,18,19) que no se dan opciones múltiples de respuesta, se indagan por términos y/o situaciones que son utilizados cotidianamente, sus respuestas son de tipo abierta.
- Algunas de las situaciones planteadas tiene como objetivo identificar algunos conceptos que se relacionan con la toma de decisiones.

- Las situaciones que tiene respuesta de tipo abierto tienen como objetivo establecer la idea que tienen los estudiantes en cuanto al significado de términos como suerte, amuletos, probabilidad, conceptos que son asociados a resultados de eventos aleatorios.
- La prueba tiene como propósito establecer el nivel de pensamiento probabilístico en el cual se encuentra cada estudiante y a partir de allí establecer las estrategias a seguir.
- La prueba diagnóstica se organizó de acuerdo a la temáticas para grado quinto de básica primaria que guardan coherencia con los lineamientos curriculares de Matemáticas, estándares básicos de competencia, derechos básicos de aprendizaje y la matriz de referencia del día E, referentes de calidad del Ministerio de Educación Nacional.

**3.3.1.3** Aplicación de Encuesta Diagnóstica. La encuesta diagnóstica se aplicó al grupo experimental, grado 5-1 de la Institución educativa Ismael Perdomo, en principio se dieron las instrucciones necesarias para el desarrollo de la encuesta, dejando claro que era un trabajo de investigación y que los resultados no se tendrían en cuenta en el proceso académico que llevan en la institución. Para el desarrollo de la encuesta se dispuso de un tiempo máximo de 90 minutos y se pidió a los estudiantes que no dejaran de justificar la respuesta.

**3.3.2** Diseño de la Intervención. El proceso diseñado para la enseñanza y aprendizaje en el área de matemáticas que contribuya en el desarrollo de la competencia de la resolución de problemas en pensamiento aleatorio, con estudiantes de quinto grado de primaria, en la presente investigación se basa en los referentes de calidad que el Ministerio de Educación Nacional ha proferido para el área de Matemáticas y se tiene las siguientes etapas:

- **Planeación.** En esta etapa se realiza una correlación entre los referentes de calidad: Estándares básicos de competencias, derechos básicos de aprendizaje (DBA), competencias a desarrollar, aprendizajes.
- **Ejecución.** Durante la etapa de ejecución el docente juega un papel importante, es quien fomenta en los estudiantes el aprecio por el trabajo a desarrollar, inculcando seguridad y confianza, respondiendo preguntas, retroalimentar el aprendizaje, manejo del tiempo, entre otras.
- **Evaluación del Aprendizaje.** Esta etapa requiere de una importancia en el análisis de los resultados obtenidos, es acá donde se establecen las fortalezas y debilidades en el proceso enseñanza aprendizaje y se estructuran las estrategias a seguir.

**3.3.2.1** Diseño de Hojas de Trabajo y Encuesta de Salida. Con el análisis realizado a la prueba diagnóstica se determinaron las dificultades en la aplicación y se evidencio las falencias que tienen los estudiantes en cuanto a la competencia de solución de problemas en el ámbito del desarrollo del pensamiento aleatorio. Basado en este resultado se estructuran las hojas de trabajo con los siguientes parámetros:

- **Situación Problema.** Partimos de una situación problema como estrategia de contextualizar al estudiante, motivándolo en establecer estrategias de solución y determinar los conceptos, leyes, propiedades y en general todas las herramientas necesarias para llegar a la solución.
- **Afianzamiento de conceptos.** En el afianzamiento de conceptos se tiene en cuenta el enfoque CPA, concreto, pictórico y abstracto.
- **Solución de Situaciones Problemas.** En la solución de problemas se tendrán en cuenta las cuatro fases descritas por Poyla (1945): Comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva.

- Utilización de software como Excel y GeoGebra, en la simulación de experimentos o eventos aleatorios.

**3.3.2.2** Pilotaje de Hojas de Trabajo. El pilotaje de las hojas de trabajo y la encuesta de salida se realizó con el grupo piloto en el cual se aplicó la encuesta piloto de diagnóstico y con las mismas finalidades.

Al analizar los resultados obtenidos en este pilotaje se concluye:

- Reestructurar las situaciones de los ítems 1 y 2. Pues no eran específicas en su interrogante y daban margen a varias interpretaciones.
- Los estudiantes presentan dificultad en justificar las respuestas, dando argumentos difusos lo cual complican su análisis.

**3.3.2.3** Condiciones de Aplicación de Hojas de Trabajo. Cada una de las hojas de trabajo se aplicó en un tiempo de 90 minutos, excepto la hoja No. 1, en la que se requirió de 60 minutos por su contenido. La metodología de trabajo en cada una fue la siguiente:

- En el salón de clases se entregó, a cada uno de los estudiantes, copia de las actividades para ser contestada de manera individual sin uso de tecnología computacional.
- Se entregó material suficiente y necesario para ser manipulado por cada uno de los estudiantes y poder afianzar los conceptos.
- Se impartieron las indicaciones necesarias para la realizar la actividad, haciendo hincapié en que escribieran con letra entendible , con la finalidad de contar con evidencias legibles e ideas espontáneas de los estudiantes.

- Mediante el proceso se realizó retroalimentación de conceptos, leyes, formulas, de todo lo necesario para el desarrollo de la actividad.
- Se recopiló las hojas de trabajo para realizar el análisis pertinente de las respuestas obtenidas.
- Mediante la ayuda de video beam se realizó la proyección de las simulaciones de 60 mil veces cada situación planteada, la respectiva tabla de frecuencia y gráficas de barra y circular. Se realizó la variación de cada simulación al dar clic a F9.
- Se explicó el proceso y cada estudiante realizó la simulación en Excel de las situaciones planteadas.
- Mediante la participación voluntaria y designada de algunos de los estudiantes se realizó la evaluación de cada actividad, donde se establecieron dificultades encontradas, fortalezas y lo pertinente.
- Se realizó desarrollo el proceso de la solución de cada situación planteada, cada estudiante tomó los apuntes necesarios.
- Se corrigió cada una de las hojas de trabajo y fueron socializadas con cada uno de los estudiantes.

**3.3.2.4** Características de la Encuesta de Salida. Las características de la encuesta (ver anexo 6) son las siguientes:

- Consta de diez ítems de opción múltiple con un espacio para justificar cada una de las respuestas.
- Se incluyó la opción “No sé” o “No se puede calcular” en todos los ítems.

- Algunos reactivos permiten explorar si persisten las ideas erróneas en torno a la posibilidad y probabilidad.
- Determinar el nivel probabilístico en que se encuentra el estudiante después de la intervención.
- El tiempo destinado fue de 60 minutos.

**3.3.3** Análisis de Resultados. Después de recolectada la información, se analiza en forma cuantitativa y cualitativa. A partir de estos resultados es posible contestar las preguntas de investigación que dieron pie a la realización del presente trabajo, y además, se está en condiciones de evaluar el impacto de las actividades didácticas implementadas en el aprendizaje de los estudiantes.

**3.3.3.1** Análisis Cuantitativo. Es el análisis de las fortalezas y las oportunidades de mejoramiento por parte de los estudiantes, así como una representación gráfica y tabular de la misma. Nos permite cuantificar en términos porcentuales el rendimiento de cada uno de los estudiantes. No obstante, este estudio por sí mismo no proporciona mucha información, por lo que se complementa con otro análisis de corte cualitativo.

**3.3.3.2** Análisis Cualitativo. El resultado de este análisis se categorizan los niveles del pensamiento probabilístico de los estudiantes y estudios de casos, con los cuales se analiza con más detalle las estrategias que utilizaron en la resolución de los problemas planteados. La información que se deriva de este análisis permite determinar el grado de avance de los estudiantes en la escala del pensamiento probabilístico tomado como referente teórico.

De igual manera, se hace un análisis del desarrollo de competencia en la solución de problemas adquirido por cada uno de los estudiantes.

En conclusión, el análisis cuantitativo y cualitativo permite contrastar los resultados del diagnóstico con los de la encuesta de salida, para así determinar con mayor precisión el impacto del proceso enseñanza- aprendizaje implementado y el uso de software en el desarrollo del pensamiento aleatorio.

## **4. ANÁLISIS DE RESULTADOS**

### **4.1 INTRODUCCIÓN**

En este capítulo se analizan los resultados obtenidos durante aplicación de los diferentes instrumentos en cada una de las actividades, en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el área de matemáticas que contribuya en el desarrollo de la competencia de la resolución de problemas en pensamiento aleatorio, con estudiantes de quinto grado de primaria, propuesto en la presente investigación. La investigación comprende un estudio cuantitativo y otro cualitativo, ambos esenciales para evaluar el progreso de los estudiantes en el aprendizaje de la probabilidad.

La estructura del presente capítulo está distribuido de la siguiente manera : en primer lugar se muestran los resultados del diagnóstico, posteriormente se analizan cada una de las hojas de trabajo y después se exponen los alcances de la encuesta de salida. En todos los casos la información es presentada en tablas y gráficas, y además, se incluyen evidencias de las respuestas de los estudiantes a las actividades planteadas.

En la parte final, se realiza un análisis comparativo del diagnóstico y de la encuesta de salida para poder concluir el impacto de la propuesta así como la pertinencia de las actividades y del uso de tecnología.

### **4.2 ANÁLISIS DEL DIAGNÓSTICO**

En esta parte del capítulo se describen las características que sobresalen de los resultados del instrumento de diagnóstico, y por medio del análisis de algunos ítems que incluye, se ejemplifican los recursos, estrategias y representaciones que se involucran en su resolución. Además, se hace referencia a los aspectos que se pretenden identificar, tales como la posibilidad de un evento, la probabilidad, y el

sistema de creencias que poseen los estudiantes con relación a eventos que se realizan al azar.

Otros puntos importantes que se plantean son los objetivos de la encuesta diagnóstica, las condiciones de aplicación y determinar el nivel de pensamiento aleatorio en el cual se encuentran los estudiantes del grupo experimental. Finalmente se hace un análisis cuantitativo donde se derivan una serie de comentarios finales.

**4.2.1** Presentación de la Actividad. La encuesta diagnóstica (anexo 1), permite explorar las nociones que tienen los estudiantes con relación al significado de los diferentes términos utilizados en la teoría de las probabilidades, así mismo el conocimiento del algoritmo para calcular la probabilidad simple o compuesta, el tipo de representaciones que utilizan en la resolución de problemas, y por supuesto, el sistema de creencias involucrado. Para lograr este propósito, a través de los 19 ítems de los que consta el instrumento diagnóstico se recolecta la información.

Es de mencionar que cada uno de los ítems tiene un objetivo, por tanto los agrupamos de la siguiente manera para su análisis:

- Cálculo de la probabilidad simple: 3, 10, 11 y 15.
- Cálculo de probabilidad compuesta: 1, 2, 6, 8 y 14.
- Identificar las posibilidades en experimentos aleatorios: 5, 7 y 9.
- Reconocer eventos independientes: 13.
- Sondar las características del sistema de creencias: 4, 12, 16, 17, 18 y 19.

Es de anotar que existen ítems que pueden cumplir con dos propósitos en forma simultánea, muestra de ello explicamos el ítems 2:

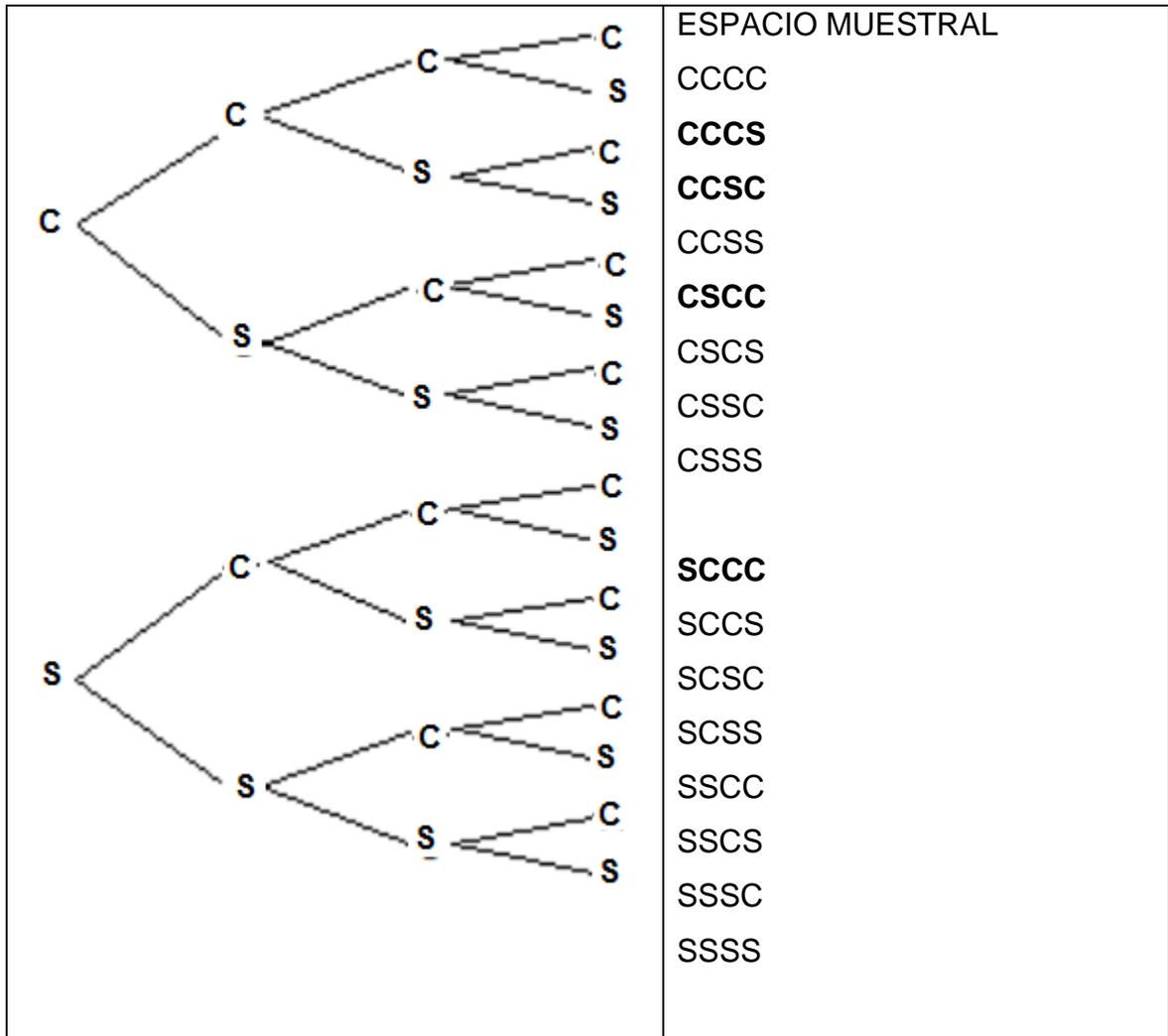
Jaime lanza 4 veces una moneda, la moneda puede caer Cara o Sello, ¿Cuál de las siguientes combinaciones de cara y sello esperas que ocurra con mayor probabilidad?

- 3 Caras y un solo un Sello
- 2 Caras 2 Sellos
- Los dos eventos anteriores son igualmente probables
- No se puede determinar cuál de los dos eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir
- No sé

Para poder dar respuesta al interrogante se debe determinar: primero el espacio muestral, segundo la probabilidad de los dos eventos en forma independiente y finalmente compararlos para determinar si las probabilidades son iguales, mayor o menor que.

- Para determinar el espacio muestral utilizamos el diagrama del árbol: Lanzamiento de una moneda 4 veces, S representa el sello y C la cara, es espacio muestral obtenido es 16.
- Se determina la probabilidad de cada evento: 3 Caras y un Sello, 2 Caras y 2 Sellos.

**Figura 4.** Espacio Muestral, Lanzamiento de una Moneda.



Fuente: Batanero, (2005).

Llamamos P(a) la probabilidad de obtener 3 Caras y un Sello, y P(b) la probabilidad de obtener 2 Caras y 2 Sellos, ambos en el lanzamiento de una moneda 4 veces.

$$P(a) = 4/16 = 1/4$$

$$P(b) = 6/16 = 3/8$$

Por tanto se concluye que se tiene mayor probabilidad de obtener 2 caras y 2 sellos. La anterior situación tiene dos objetivos primero determinar la probabilidad de un evento y segundo la probabilidad compuesta de dos eventos para determinar si son o no equiprobables.

Otra situación problema trata determinar la posibilidad de un evento en comparación con otro, ejemplo de ello es la situación de ítems 5:

En la función de un circo, un malabarista utiliza pelotas de igual forma y tamaño que guarda en una caja: 2 rojas, 4 verdes y 8 amarillas.

El número de posibilidades que tiene el malabarista de sacar una pelota ROJA de la caja es:

- La mitad del número de posibilidades de sacar una pelota amarilla.
- La cuarta parte del número de posibilidades de sacar una pelota verde.
- La mitad del número de posibilidades de sacar una pelota verde.
- La octava parte del número de posibilidades de sacra una pelota amarilla.
- No se puede determinar la posibilidad.

Esta situación tiene como objetivo comparar las posibilidades de ocurrencia de un evento frente a otro. Para ello se determina la posibilidad de cada uno de ellos y se realiza la comparación, el estudiante debe tener como base de conocimiento las proporciones.

Las posibilidades de sacar una pelota roja son 2

Las posibilidades de sacar una pelota verde son 4

Las posibilidades de sacar una pelota amarilla son 8

La pregunta a resolver es cuál es la posibilidad de sacar una pelota roja frente a las otras:

Las posibilidades de sacar una pelota roja (2) frente a sacar una verde (4), es la mitad.

Las posibilidades de sacar una pelota roja (2) frente a sacar una amarilla (8), es la cuarta parte.

Por tanto la clave o respuesta correcta es la C.

Se plantean situaciones donde su finalidad primordial es identificar creencias asociadas a la teoría de la probabilidad. Por ejemplo:

Si Juan se gana la lotería del Tolima y un mes después la vuelve a ganar, podemos decir que Juan gana porque:

- Es Bendecido por el cielo
- Tiene mucha suerte
- solo fue coincidencia
- hubo trampa
- E. Otro \_\_\_\_\_

**4.2.2** Objetivos. Uno de los propósitos fundamentales del diagnóstico es identificar el nivel de pensamiento aleatorio o probabilístico en el cual se encuentran los estudiantes del grupo experimental, detectando dificultades, creencias o mitos y en algunos casos las fortalezas. Con relación a este análisis se plantea el proceso de enseñanza – aprendizaje, como propuesta didáctica, el cual se desarrollara en las hojas de trabajo planteadas en esta investigación.

**4.2.3** Condiciones de Aplicación. Como primera medida se estableció un permiso por parte de las directivas y el docente encargado de grupo llamado experimental, para ser llevada todas las etapas de la investigación.

El grado 5-1, grupo experimental cuenta con 33 estudiantes, distribuidos en 19 mujeres (57,7%) y 14 hombres (42,3%), con edades que oscilan entre 10 y 14 años, donde la

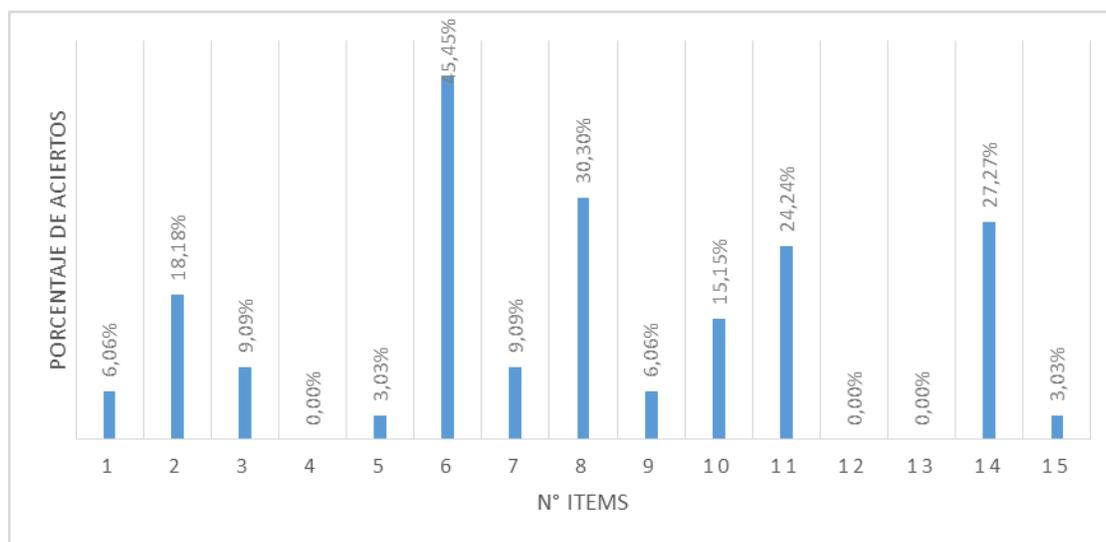
mayoría tienen 11 años (38%), donde el día de la prueba asistieron todos sin saber previamente de la aplicación.

Antes de comenzar la prueba se realizaron las recomendaciones necesarias, se dejó claro que los resultados solo harían parte de la investigación sin que estos afectaran la valoración final del periodo, fueran los más sinceros posibles a la hora de dar una respuesta. Igualmente se dio a conocer el tiempo establecido para el desarrollo de la prueba.

**4.2.4 Análisis Cuantitativo.** La prueba diagnóstica está conformada por dos grupos de situaciones: doce situaciones problemas en diferentes contextos donde para su solución se debe aplicar diferentes conceptos, leyes, fórmulas; y 7 situaciones en torno a las creencias cotidianas como: suerte, los amuletos, mitos. Estos últimos tienen como propósito fundamental recabar información referente al sistema de creencias que tienen los estudiantes, ya que tal como lo señala Schoenfeld (Santos, 1992), esta es una de las dimensiones que inciden en la forma que los estudiantes resuelven problemas.

En la siguiente gráfica se muestra el porcentaje de respuestas correctas en el primer grupo de situaciones determinados en la encuesta: los ítems son 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 14 y 15; los ítems 4, 12 y 13 no se tienen en cuenta en este análisis por ser situaciones del segundo grupo.

**Figura 5.** Encuesta diagnóstica



Fuente: El autor

Como se puede evidenciar el resultado obtenido es muy bajo, las situaciones donde el porcentaje correcto es el más alto es la situación 6 con un 45,45%, mientras que el resto de situaciones con respuesta correcta está por debajo del 30 %. Las situaciones con más bajo porcentaje de respuesta correctas fueron la 5 y la 15 con un porcentaje por debajo de 4.

A continuación se realiza un análisis con las dos situaciones con porcentaje más bajo en su respuesta.

**Tabla 7.** Resultados con porcentaje mas bajo Encuesta Diagnostica.

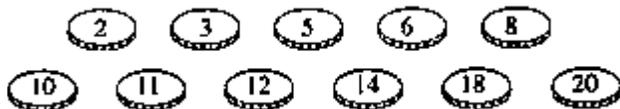
No. Items	Situación Problema con menor porcentaje de respuesta correctas	Porcentaje de aciertos
5	En la función de un circo, un malabarista utiliza pelotas de igual forma y tamaño que guarda en una caja: 2 rojas, 4 verdes y 8 amarillas. El número de posibilidades que tiene el malabarista de sacar una pelota ROJA de la caja es:	3,03%

---

Las once fichas que se muestran en el dibujo de abajo fueron puestas en una bolsa y mezcladas. Ana saca una ficha de la bolsa sin mirar, ¿cuál es la probabilidad que Ana saque una ficha con un número que sea múltiplo de 3?

15

3,03%



---

Fuente: El autor

En situación de ítems 5, tiene como objetivo comparar las posibilidades de ocurrencia de un evento frente a otro. Para ello se determina la posibilidad de cada uno de ellos y se realiza la comparación, el estudiante debe tener como base de conocimiento las proporciones.

Las posibilidades de sacar una pelota roja son 2  
Las posibilidades de sacar una pelota verde son 4  
Las posibilidades de sacar una pelota amarilla son 8

La pregunta a resolver es cuál es la posibilidad de sacar una pelota roja frente a las otras:

Las posibilidades de sacar una pelota roja (2) frente a sacar una verde (4), es la mitad.

Las posibilidades de sacar una pelota roja (2) frente a sacar una amarilla (8), es la cuarta parte.

Por tanto la clave o respuesta correcta es la C.

En la situación de ítems 15, tiene como objetivo determinar la probabilidad que ocurra un evento, para llegar a la solución el estudiante debe establecer: primero cuales son los múltiplos de tres y en este caso particular aparecen 3, 6 12, 18; son cuatro

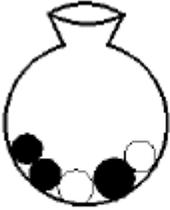
posibilidades de ser múltiplo de 3; las posibilidades son 11 en total (2, 3, 5, 6, 8, 10,11, 12, 14, 18, 20).

Llamamos P(a) la probabilidad de que Ana saque una ficha de la bolsa con un número múltiplo de 3.

Determinemos la probabilidad:  $P(a) = 4/11$ . Por tanto la clave o respuesta correcta es la C.

Ahora es importante realizar el análisis de las situaciones con mayor porcentaje en la respuesta correcta:

**Tabla 8.** Resultados con Mayor Porcentaje de respuestas correctas, encuesta diagnostica.

No. Item s	Situación Problema con menor porcentaje de respuestas correctas	Porcentaje de aciertos
6	Si tenemos una caja con 3 bolas blancas y 3 bolas negras, y tomamos simultáneamente (al azar) dos bolas de la caja, ¿qué es más probable?	45,45%
8	<p>Observa las siguientes bolsas que contienen bolas blancas y negras. Si tomamos simultáneamente (al azar) <b>UNA</b> bola de cada bolsa, ¿qué es más probable?</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  <p data-bbox="363 1646 461 1682">Bolsa 1</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p data-bbox="883 1646 980 1682">Bolsa 2</p> </div> </div>	30,30%

Fuente: El autor

Para solucionar la situación 6 es necesario establecer todas las posibilidades para determinar la probabilidad de los tres casos, tomar 2 bolas blancas, dos bolas negra o una blanca y una negra, para luego compararlos y establecer la respuesta correcta.

En la solución de la situación 8, se debe establecer la probabilidad de sacar una bola blanca en cada bolsa y luego comparar los resultados.

Cabe resaltar que los porcentajes de respuesta correctas en las situaciones 6 y 8, no son muy altas; y resulta materia de un análisis más profundo que en las situaciones con respuesta correcta con porcentajes más bajo se indaga por la probabilidad al igual que las de porcentaje de respuesta correcta alto.

Una vez analizados los problemas con menor y mayor porcentaje de aciertos, se presenta en la siguiente tabla las situaciones con el número de estudiantes y su porcentaje, las respuesta dadas en cada caso. En cada celda se muestran dos valores: el número superior indica la cantidad de alumnos en términos absolutos y el inferior en términos porcentuales. La solución correcta es señalada por medio de un sombreado de la celda correspondiente.

**Tabla 9.** Número y Porcentaje de respuestas encuesta diagnostica.

No. de Items	OPCIONES DE RESPUESTAS				
	A	B	C	D	E
1	6 18,18%	2 6,05%	3 9,09%	18 54%	4 12,12%
2	3 9,09%	13 39,39%	6 18,18%	10 30,30%	1 3,03%
3	6 18,18%	3 9,09%	6 18,18%	5 15,15%	13 39,39%
5	10 30,30%	0 0%	1 3,03%	9 27,27%	13 39,39%
6	2	2	15	7	7

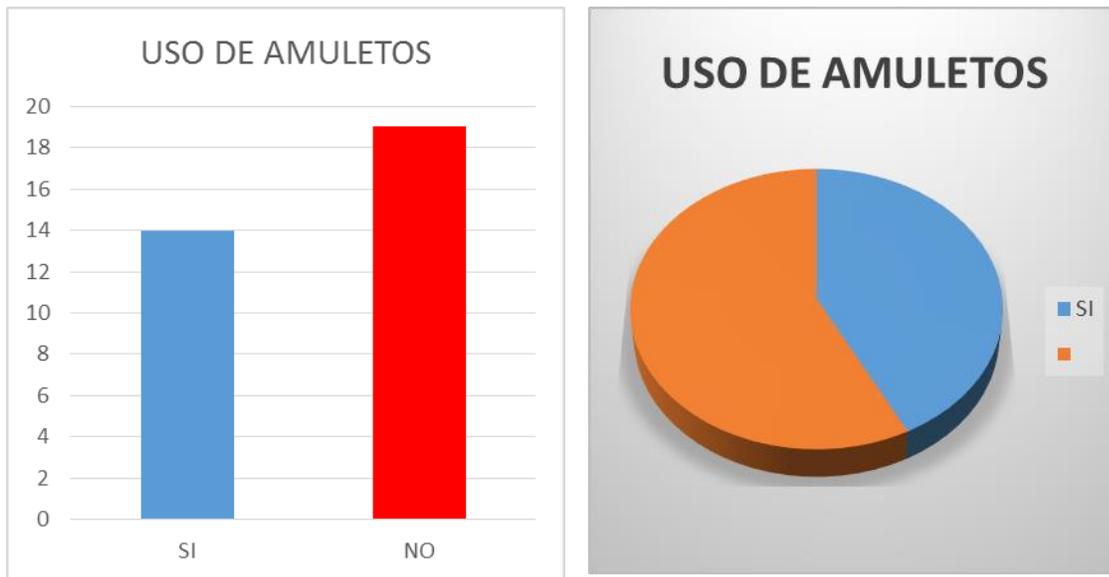
	<b>6,05%</b>	<b>6,05%</b>	<b>45,45%</b>	<b>21,21%</b>	<b>21,21%</b>
<b>7</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>8</b>	<b>2</b>	<b>16</b>
	<b>9,09%</b>	<b>12,12%</b>	<b>24,24%</b>	<b>6,05%</b>	<b>48,48%</b>
<b>8</b>	<b>5</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>5</b>	<b>4</b>
	<b>15,15%</b>	<b>27,27%</b>	<b>30,30%</b>	<b>15,15%</b>	<b>12,12%</b>
<b>9</b>	<b>12</b>	<b>3</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>15</b>
	<b>36,36%</b>	<b>9,09%</b>	<b>3,03%</b>	<b>6,05%</b>	<b>45,45%</b>
<b>10</b>	<b>14</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>2</b>
	<b>42,42%</b>	<b>15,15%</b>	<b>18,18%</b>	<b>18,18%</b>	<b>6,05%</b>
<b>11</b>	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>3</b>	<b>8</b>	<b>12</b>
	<b>9,09%</b>	<b>18,18%</b>	<b>9,09%</b>	<b>24,24%</b>	<b>36,36%</b>
<b>14</b>	<b>0</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>9</b>	<b>13</b>
	<b>0%</b>	<b>18,18%</b>	<b>15,15%</b>	<b>27,27%</b>	<b>39,39%</b>
<b>15</b>	<b>3</b>	<b>11</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>12</b>
	<b>9,09%</b>	<b>33,33%</b>	<b>9,09%</b>	<b>18,18%</b>	<b>36,36%</b>

Fuente: El autor

En el segundo grupo acerca en las situaciones en torno a las creencias cotidianas como: suerte, los amuletos, mitos; en el ítems 17 se realiza la pregunta ¿Haz utilizado AMULETOS?, con opción de respuesta SI o NO y que explicaran cual y para que los resultados obtenidos fueron 14 por SI un aproximado al 42% y 19 por NO con un aproximado del 58%. La justificación dada por la mayoría que utilizan amuletos es para protección por parte de DIOS y utilizan medallas de virgen o santos, un menor lo justifican para tener suerte. Los que marcan NO justifican que no creen en amuletos.

A continuación se muestran estos resultados en forma gráfica y la justificación dada por algunos estudiantes:

**Figura 6.** Diagrama de barras y circular resultado ítem 17, encuesta diagnóstica.



Fuente: El autor

Respuesta de Andrés Felipe:

17. ¿Haz utilizado AMULETOS?  
 Si  B. No

Explica cuál y para qué:

*para sentirme muy bien y para que no me dejen espíritus malos en collar de gacá*

Respuesta de Anderson:

17. ¿Haz utilizado AMULETOS?  
 Si  B. No

Explica cuál y para qué:

*un amuleto con una cruzcita y un birich y me a dado buena suerte.*

Annie justifica:

17. ¿Haz utilizado AMULETOS?

A. Si

B.  No

Explica cuál y para qué:

no por que seria brujeria

Por su parte Stiven dice:

17. ¿Haz utilizado AMULETOS?

A. Si

B.  No

Explica cuál y para qué:

para que necesito un amuleto si Dios le da la suerte

Los amuletos los estudiantes en sus respuestas lo relacionan a las creencias religiosas o míticas inculcadas desde el hogar y/o Institución Educativa.

**4.2.5 Análisis Cualitativo.** Para el análisis cualitativo se realizara una categorización de los resultados de acuerdo a las justificaciones dadas por los estudiantes en cada uno de los problemas planteados, para dicha categorización tomaremos como referente los niveles de razonamiento probabilístico establecidos por D. Benítez y E. Sánchez (1997), en su investigación Colombo – Mexicana en la investigación “algunos acercamientos al razonamiento probabilista de los alumnos”, establecen 5 niveles de pensamiento probabilístico:

- Nivel de Impredicción. En este nivel se sitúan estudiantes que creen que por estar en situación de azar, es completamente imposible predecir resultados.
- Nivel Determinístico. En este nivel podemos agrupar a aquellos estudiantes que explican los fenómenos de azar mediante una causa poderosa que las rige; entre esas causas pueden ser, físicas, míticas o mágicas y empíricas.

- Nivel Mecánico. En este nivel encontramos estudiantes que incorporan constructos matemáticos para explicar los fenómenos al azar, pero la cita esta fuera de contexto.
- Nivel de Pre-Rigor. Acá podemos clasificar estudiantes que se han alejado considerablemente de teorías míticas, físicas, empíricas, y de incertidumbre, pues utilizan argumentos matemáticos, faltando madurar un poco dichos argumentos, para iniciar una discusión en la explicación de fenómenos probabilísticos.
- Nivel de Rigor. En este nivel se sitúan estudiantes de nivel avanzado, donde argumentan en forma matemática, utilizando para ello diferentes estrategias, conceptos, procesos, algoritmo, entre otras, en la explicación verídica de los fenómenos probabilísticos que puedan ocurrir.

De acuerdo a los resultados obtenidos en la prueba diagnóstico y la clasificación de las respuestas formuladas por los estudiantes en la escala de los niveles de pensamiento probabilístico se muestra en la siguiente gráfica:

**Figura 7.** Escala de los Niveles de Pensamiento Prueba Diagnostica



Fuente: El autor

Basados en el anterior análisis, podemos afirmar que mayor parte de los estudiantes del grupo experimental se encuentran entre un nivel de pensamiento de Impredicción y Determinístico con un 67%, también se resalta que un 18% de estos estudiantes no justificaron la respuesta; se estableció que ningún estudiante se encuentra en el nivel de rigor y solo el 6% en un nivel de Pre-Rigor. Esto refleja un desempeño muy bajo en la competencia de solución de problemas en el ámbito probabilístico, por lo cual representa una justificación más de peso para la implementación de un proceso de enseñanza y aprendizaje en el área de matemáticas que contribuya en el desarrollo de la competencia de la resolución de problemas en pensamiento aleatorio, con estudiantes de quinto grado de primaria.

La información presentada en la gráfica anterior muestra resultados generales del pensamiento probabilístico del grupo en su conjunto, sin embargo, para tener datos más precisos, en la siguiente tabla se muestra la clasificación que se hizo de acuerdo a las respuestas obtenidas.

**Tabla 10.** Niveles De Razonamiento Probabilistico.

N° ÍTEMS	NIVELES DE RAZONAMIENTO PROBABILISTICO					
	Impredicc ión	Determiníst ico	mecáni co	Pre- rigor	rig or	no justifico o eligió “no se”
1	18	5	6	1	0	3
	54,54%	15,15%	18,18%	3,03%	0%	9,09%
2	17	7	2	4	0	3
	51,51%	21,21%	6,06%	12,12 %	0%	9,09%
3	13	12	4	2	0	2
	39,39%	36,36%	12,12%	6,06%	0%	6,06%
5	11	13	4	1	0	4
	33,33%	39,39%	12,12%	3,03%	0%	12,12%
6	12	11	2	4	0	4
	36,36%	33,33%	6,06%	12,12	0%	12,12%

	%					
<b>7</b>	<b>12</b> <b>36,36%</b>	<b>8</b> <b>24,24%</b>	<b>1</b> <b>3,03%</b>	<b>1</b> <b>3,03%</b>	<b>0</b> <b>0%</b>	<b>11</b> <b>33,33%</b>
<b>8</b>	<b>13</b> <b>39,39%</b>	<b>12</b> <b>36,36%</b>	<b>2</b> <b>6,06%</b>	<b>2</b> <b>6,06%</b>	<b>0</b> <b>0%</b>	<b>4</b> <b>12,12%</b>
<b>9</b>	<b>11</b> <b>33,33</b>	<b>12</b> <b>36,36%</b>	<b>3</b> <b>9,09%</b>	<b>1</b> <b>3,03%</b>	<b>0</b> <b>0%</b>	<b>6</b> <b>18,18%</b>
<b>10</b>	<b>10</b> <b>30,30%</b>	<b>13</b> <b>39,39%</b>	<b>1</b> <b>3,03%</b>	<b>4</b> <b>12,12</b> <b>%</b>	<b>0</b> <b>0%</b>	<b>5</b> <b>15,15%</b>
<b>11</b>	<b>9</b> <b>27,27%</b>	<b>9</b> <b>27,27%</b>	<b>5</b> <b>15,15%</b>	<b>1</b> <b>3,03%</b>	<b>0</b> <b>0%</b>	<b>9</b> <b>27,27%</b>
<b>14</b>	<b>10</b> <b>30,30%</b>	<b>6</b> <b>18,18%</b>	<b>3</b> <b>9,09%</b>	<b>1</b> <b>3,03%</b>	<b>0</b> <b>0%</b>	<b>13</b> <b>39,39%</b>
<b>15</b>	<b>10</b> <b>30,30%</b>	<b>10</b> <b>30,30%</b>	<b>3</b> <b>9,09%</b>	<b>2</b> <b>6,06%</b>	<b>0</b> <b>0%</b>	<b>8</b> <b>24,24%</b>
<b>TOTAL</b>	<b>146</b> <b>36,86%</b>	<b>118</b> <b>29,29%</b>	<b>36</b> <b>9%</b>	<b>24</b> <b>6%</b>	<b>0</b> <b>0%</b>	<b>72</b> <b>18,18%</b>

Fuente: El autor

De acuerdo al análisis cuantitativo presentado en la sección anterior, el reactivo con mayor porcentaje de aciertos fue el seis (45,45%), no obstante, al clasificar las justificaciones correspondientes, se tiene que un 69,99% están entre el tipo de Impredicción y determinista. Esta situación es un claro ejemplo de la importancia que tiene compaginar las investigaciones de corte cuantitativo las de tipo cualitativo, donde los estudiantes posiblemente marcan al azar pues la justificación no corresponde a un proceso bien argumentado.

En el nivel de impredicción se muestran los siguientes ejemplos:

1. Hellen contestó la primera pregunta de la siguiente manera:

1. María lanza dos dados y suma los puntos que aparecen en la cara superior, Lo más probable es:

- A. Obtener una suma igual a 4 puntos
- B. Obtener una suma igual a 5 puntos
- C. Los dos eventos anteriores tienen la misma probabilidad de obtenerse
- D. No se puede determinar cuál de los dos eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir
- E. No sé

Justifica la respuesta:

no se puede determinar los eventos que van a salir

2. Pedro Julio responde en la pregunta 9:

9. Una urna contiene 4 bolas rojas, 3 bolas negras y 5 bolas blancas, todas de igual forma y tamaño. Pedro va a sacar una bola de la urna sin mirar. El número de posibilidades de que la bola que saque Pedro sea Roja es

- A. mayor el que el número de posibilidades de que tome una blanca.
- B. igual que el número de posibilidades de que tome bola negra.
- C. Igual que el número de posibilidades de que tome una bola blanca.
- D. Mayor que el número de posibilidades de que tome una bola negra.
- E. No sé o no se puede determinar la posibilidad de que la bola que saque Pedro sea roja.

(FUENTE: Pregunta Tipo Saber 5º Cuadernillo 2012)

Justifica la respuesta:

porque no se sabe

Un 54% de estudiantes escogieron la misma opción de respuesta en la situación 1, y de las justificaciones realizadas, un 36,36% corresponde al nivel de impredeción. En la respuesta de la situación 9 el 36,36% tienen la misma respuesta y el 33,33% corresponde al nivel de impredeción. El argumento que esgrime la estudiante es característico de las personas catalogadas en este nivel, como es: no saber, no se puede determinar o no se puede predecir el resultado.

En el nivel determinista se muestran los siguientes ejemplos de respuestas que han dado los estudiantes del grupo experimental:

1. Darwin Fernando nos da la siguiente respuesta a la situación 10:

10. Observa la siguiente bolsa, la cual contienen bolas blancas y negras. Si tomamos al azar UNA bola de la bolsa ¿Qué es más probable?



- A. Sacar una bola BLANCA
- B. Sacar una bola NEGRA
- C. Los dos eventos anteriores son igualmente probables
- D. No se puede predecir
- E. No sé

Justifica la respuesta:

porque esta encima

2. Valentina en respuesta a la situación 10 :

8. Observa las siguientes bolsas que contienen bolas blancas y negras. Si tomamos simultáneamente (al azar) UNA bola de cada bolsa, ¿qué es más probable?



Bolsa 1



Bolsa 2

- A. Sacar una bola blanca de la bolsa 1
- B. Sacar una bola blanca de la bolsa 2
- C. Los dos eventos anteriores son igualmente probables
- D. No se puede decidir cuál de los eventos anteriores tiene mayor probabilidad de ocurrir
- E. No sé o no se puede determinar que es más probable.

Justifica la respuesta:

por q de siempre se escoge lado la

3. Andrés Felipe, a la pregunta 13 nos da la siguiente respuesta:

13. Si Juan se gana la lotería del Tolima y un mes después la vuelve a ganar, podemos decir que Juan gana porque:

- A. Es Bendecido por el cielo
- B. Tiene mucha suerte
- C. solo fue coincidencia
- D. hubo trampa
- E. Otro

Es evidente que las repuestas obtenidas o dada por los estudiantes en los ejemplos anteriores pertenecen al nivel Determinístico, en un total del 29,29% se encuentra nuestros estudiantes del grupo experimental en este nivel, donde las explicaciones o justificaciones a las respuestas se basan en lo físico, la posición que ocupa una bola

en una bolsa tiene mayor probabilidad, o expresiones míticas o mágicas que determina la probabilidad debido a la suerte.

En nivel mecánico encontramos solo un 9% de nuestros estudiantes, entre las respuestas dada tenemos los siguientes ejemplos:

1. Wendy ante respuesta de la situación 14:

14. Luisa tiene en una cajita varios carretes de hilo del mismo tamaño, entre los cuales hay 8 rojos, 5 verdes y 7 azules. Si ella saca un carrete sin ver, ¿cuál es la probabilidad de que éste sea rojo o azul?

A.  $7/50$        B.  $13/20$       C.  $1/10$   
D.  $3/4$       E. No sé o no se puede determinar la probabilidad

Justifica la respuesta:  
porque Luisa tiene en una cajita varios carretes de hilo de mismo tamaño, entre los cuales hay 8 rojos, 5 verdes y 7 azules.

2. La respuesta de Anderson a la situación 1:

1. Maria lanza dos dados y suma los puntos que aparecen en la cara superior, Lo más probable es:

A. Obtener una suma igual a 4 puntos  
B. Obtener una suma igual a 5 puntos  
C. Los dos eventos anteriores tienen la misma probabilidad de obtenerse  
D. No se puede determinar cuál de los dos eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir  
E. No sé

Justifica la respuesta:  
porque puede salir un 2x2 o 3x1 y tambien se puede porque los sumo

En este Nivel Mecánico encontramos un bajo porcentaje de estudiantes 6%; para situación 14 en el nivel mecánico es bajo con un 9,09 % dada las respuestas obtenidas, y para situación 1 el porcentaje es más alto con un 18,18%. Cabe resaltar que en este nivel encontramos estudiantes que incorporan constructos matemáticos, pero fuera de contexto para explicar la solución a un evento aleatorio.

En el nivel de Pre-Rigor el porcentaje obtenido es el más bajo de todos los niveles de razonamiento probabilístico, con solo un 6%, es de resaltar que en este nivel los estudiantes están alejados de teorías míticas, empíricas, físicas y de incertidumbre,

pues utilizan argumento matemáticos sólidos que dan explicación al fenómeno probabilístico.

Entre los resultados encontramos los siguientes ejemplos:

1. Mariangel nos justifica la respuesta correcta sin un sustento matemático:

3. Juan juega con una perinola de seis caras iguales como la que se observa a continuación: Cada cara está marcada con una de las siguientes frases: "TODOS PONEN", "TOMA UNO", "TOMA DOS", "TOMA TODO", "PON UNO", "PON DOS".  
¿Cuál es la probabilidad de que al hacer girar la perinola, salga en la cara de arriba "TODOS PONEN"?



- A.  $1/5$
- B.  $1/6$
- C.  $1/3$
- D.  $2/3$
- E. NO SE PUEDE DETERMINAR DICHA PROBABILIDAD

(FUENTE: Pregunta Tipo Saber 5º Cuadernillo 2012)

Justifica la respuesta:

La probabilidad de sacar  $1/6$  es por que hay 6  
caras y solo una palabra de todos ponen

2. En la situación 10, Jessica justifica su respuesta de la siguiente manera:

10. Observa la siguiente bolsa, la cual contienen bolas blancas y negras. Si tomamos al azar UNA bola de la bolsa ¿Qué es más probable?



- A. Sacar una bola BLANCA
- B. Sacar una bola NEGRA
- C. Los dos eventos anteriores son igualmente probables
- D. No se puede predecir
- E. No sé

Justifica la respuesta:

Sacar una bola negra por que hay mayor que  
bolas blancas

En el nivel de Rigor no encontramos ningún estudiante.

Un porcentaje considerable 18,18% no justificaron o eligieron la opción "No sé", demostrando la responsabilidad y la sinceridad de los estudiantes al responder la encuesta diagnóstica, argumentando que desconocen el proceso de solución porque no se las han enseñado. Algunos ejemplos son:

1. Angélica responde no saber y lo justifica diciendo que no se lo han enseñado o explicado en la situación 7:

7. A una fiesta infantil asisten 50 invitados. Entre éstos se rifan 5 relojes de juguete, 15 pelotas y 10 rompecabezas.

El número de posibilidades de que un invitado gane una pelota es:

- A. El triple de posibilidades de ganar un reloj de juguete.
- B. Igual al número de posibilidades de ganar un rompecabezas
- C. La tercera parte del número de posibilidades de ganar un rompecabezas
- D. El doble del número de posibilidades de ganar un rompecabezas
- E. No sé o No se puede determinar la posibilidad que un invitado gane una pelota

(FUENTE: Pregunta Tipo Saber 5º Cuadernillo 2012)

Justifica la respuesta:

no me la han explicado

2. En la situación 6 Mónica marca la opción E, y no da justificación a la respuesta:

6. Si tenemos una caja con 3 bolas blancas y 3 bolas negras, y tomamos simultáneamente (al azar) dos bolas de la caja, ¿qué es más probable?

- A. Tomar 2 bolas blancas
- B. Tomar 2 bolas negras
- C. Tomar 1 bola blanca y 1 bola negra
- D. Los tres eventos anteriores son igualmente probables
- E. No sé o no se puede determinar cuál de los tres eventos planteados tiene mayor probabilidad de ocurrir

Justifica la respuesta:

---

---

---

**4.2.6 Comentarios Finales.** En el análisis realizado a la prueba diagnóstica se identificaron algunas fortalezas, oportunidades de mejoramiento en cuanto a las concepciones que tienen los estudiantes de quinto de primaria de la Institución Educativa Ismael Perdomo del municipio de Cajamarca departamento del Tolima. A continuación resaltamos los más representativos:

- Los estudiantes no están en el nivel argumentar o justificar por escrito el procedimiento o estrategia utilizada en la solución de una situación problema, lo que justifica que el 18,18% no justificaran las respuestas.
- El mayor número de respuestas según el análisis realizado son inducidas por las creencias religiosa que predominan en los pueblos del Tolima, con conceptos

errados en cuanto a la probabilidad, ejemplo de ello es que al plantear que una persona se gana la lotería, situación 13 se debe a la suerte, es bendecido por el cielo o realizó trampa.

- Los estudiantes que participaron no emplean gráficas, esquemas o elementos pictóricos en el proceso de solución o justificación de las situaciones problemas.
- No identifican las diferencias entre términos como: eventos aleatorios y de incertidumbre, posibilidades y probabilidades, desconocen del proceso para determinar la probabilidad de eventos sencillos o dependientes.
- Se refleja el desconocimiento en el proceso de enseñanza por parte de los docentes de los referentes de calidad como: Estándares, derechos básicos de aprendizaje, competencias; las cuales son de obligatoriedad en los niveles de básica primaria, reflejo de ello es la justificación de los estudiantes “No me han Explicado eso”, “No sé por qué no me lo han enseñado”.

#### **4.3 ANALISIS DE LAS HOJAS DE RESPUESTA**

En esta parte del capítulo se describe el propósito, características y etapas de aplicación de las hojas de trabajo, al igual que el análisis cuantitativo y cualitativo de los resultados obtenidos. En la parte final se dan algunos comentarios de las actividades desarrolladas al igual del proceso enseñanza – aprendizaje implementado. Las hojas de trabajo están diseñadas para trabajar en forma individual, en las que se parte de una situación problema para determinar pre conceptos, establecer las estrategias que se utilizaran en la solución de los problemas planteados.

En una segunda etapa, se entregan los materiales necesarios a los estudiantes para ser manipulados, lo concreto, buscando afianzar los conocimientos que se van adquiriendo, luego los estudiantes realizan gráficas, esquemas, lo pictórico, en el

cuaderno de apuntes y/o en las hojas de trabajo y por último se realiza el proceso abstracto, es decir el proceso matemático en busca de la solución del problema.

En una tercera etapa, se utiliza la ayuda de software como Excel, donde se realiza simulaciones de eventos probabilísticos con grandes números, que aportan justificación a la teoría de las probabilidades.

Finalmente, se recolectan las hojas de trabajo para la evaluación y análisis de los resultados y llegar a las conclusiones.

Las hojas de trabajo se aplican al grupo experimental de grado 5-1 de la Institución Educativa Ismael Perdomo, sede Piloto N°24, total de estudiantes 33.

#### 4.3.1 Hoja de Trabajo No. 1

**4.3.1.1** Presentación y Análisis de la Actividad. Esta primera actividad (anexo 2), tiene como propósito que el estudiante identifique y determine la diferencia de eventos aleatorios y de incertidumbre.

Para ello se muestra una serie de eventos donde el estudiante debe clasificarlo en evento aleatorio (A) o de Incertidumbre (I), justificando en cada caso la respuesta dada.

Finalmente debe explicar con sus propias palabras cuando es considerado un evento o experimento aleatorio o cuando de Incertidumbre. Para esta primera actividad contamos con 45 minutos en su desarrollo y se aplica al grupo experimental de 33 estudiantes.

Algunos ejemplos de respuestas son las siguientes:

1. Andrés sustenta sus respuesta de la siguiente manera:

A continuación aparece una lista de eventos, determine qué tipo de evento es: Aleatorio o Incertidumbre, justifica en cada caso la respuesta.

1. El nacimiento de un bebé. (I)
2. El lanzamiento de una moneda al aire. (A)
3. Un partido de fútbol entre los estudiantes de grado 4 contra estudiantes de grado 5, ¿Qué equipo es más probable que gane? (A)
4. Dejar caer una piedra desde cierta altura. (I)
5. El resultado del lanzamiento de un dado. (A)
6. La probabilidad de ganar la lotería. (A)

Un evento o experimento se considera aleatorio cuando:

Posibles resultados conocidos

Un evento o experimento se considera de incertidumbre cuando:

no sabemos los resultados

2. Por su parte Natalia responde:

A continuación aparece una lista de eventos, determine qué tipo de evento es: Aleatorio o Incertidumbre, justifica en cada caso la respuesta.

1. El nacimiento de un bebé. (I) Porque no se sabe en qué momento va a nacer el bebé.
2. El lanzamiento de una moneda al aire. (A) Porque puede caer cara o cello.
3. Un partido de fútbol entre los estudiantes de grado 4 contra estudiantes de grado 5, ¿Qué equipo es más probable que gane? (A) porque hay dos posibilidades y que gane a Biecki.
4. Dejar caer una piedra desde cierta altura. (I) porque no se sabe que va a pasar.
5. El resultado del lanzamiento de un dado. (A) porque el dado te da 6 caras y puede caer desde el número 1-6.
6. La probabilidad de ganar la lotería. (A) porque puede ganar o perder.

Un evento o experimento se considera aleatorio cuando:

cuando hay varias posibilidades pero no sabes cuál de esas posibilidades es correcta

Un evento o experimento se considera de incertidumbre cuando:

porque no sabemos si va a existir o no

3. Angye responde:

A continuación aparece una lista de eventos, determine qué tipo de evento es: Aleatorio o Incertidumbre, justifica en cada caso la respuesta.

1. El nacimiento de un bebé. (I) R/ no sabemos cuando va a nacer
2. El lanzamiento de una moneda al aire. (I) R/ no sabemos que va a caer cara o sello
3. Un partido de fútbol entre los estudiantes de grado 4 contra estudiantes de grado 5, ¿qué equipo es más probable que gane? (A) R/ si sabemos que uno va a ganar
4. Dejar caer una piedra desde cierta altura. (A) R/ si por sabemos que va a caer
5. El resultado del lanzamiento de un dado. (A) R/ si por sabemos que va a caer un número de 1 a 6
6. La probabilidad de ganar la lotería. (I) R/ por que no sabemos que número va a ganar

Un evento o experimento se considera aleatorio cuando:

si sabemos que va a pasar en el experimento

Un evento o experimento se considera de incertidumbre cuando:

no sabemos que va a pasar en el experimento

4. Por su parte Marilyn no justifica ni da un concepto de que es un evento aleatorio o de incertidumbre:

A continuación aparece una lista de eventos, determine qué tipo de evento es: Aleatorio o Incertidumbre, justifica en cada caso la respuesta.

1. El nacimiento de un bebé. (A)
2. El lanzamiento de una moneda al aire. (A)
3. Un partido de fútbol entre los estudiantes de grado 4 contra estudiantes de grado 5, ¿Qué equipo es más probable que gane? (I)
4. Dejar caer una piedra desde cierta altura. (I)
5. El resultado del lanzamiento de un dado. (A)
6. La probabilidad de ganar la lotería. (I)

Un evento o experimento se considera aleatorio cuando:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Un evento o experimento se considera de incertidumbre cuando:

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Del análisis realizado a las hojas de trabajo en la primera actividad, se tiene que el 12,12% no justifica o no responde por ende este grupo de estudiantes no los clasificamos en ningún nivel del razonamiento probabilístico.

Un 15,15% lo consideramos que se encuentran en un nivel mecánico, pues justifica las respuestas pero no se consideran acorde a la situación que se presenta.

El 27,27 % justifica los resultados argumentado lo que posiblemente puede ocurrir, falta madurar un poco más dichos argumentos.

En el nivel de Rigor encontramos un 45,45% de los estudiantes donde argumentan sus respuestas de una manera sólida, en algunos casos recurre a ejemplos para soportar sus argumentos.

En la siguiente tabla mostramos los resultados obtenidos en la primera actividad:

**Tabla 11.** Niveles De Razonamiento Probabilístico

<b>NIVELES DE RAZONAMIENTO PROBABILISTICO</b>					
<b>Impredicción</b>	<b>Determinístico</b>	<b>mecánico</b>	<b>Pre-rigor</b>	<b>rigor</b>	<b>no justifico o eligió “no se”</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>5</b>	<b>9</b>	<b>15</b>	<b>4</b>
<b>0%</b>	<b>0%</b>	<b>18,18%</b>	<b>27,27%</b>	<b>45,45%</b>	<b>12,12%</b>

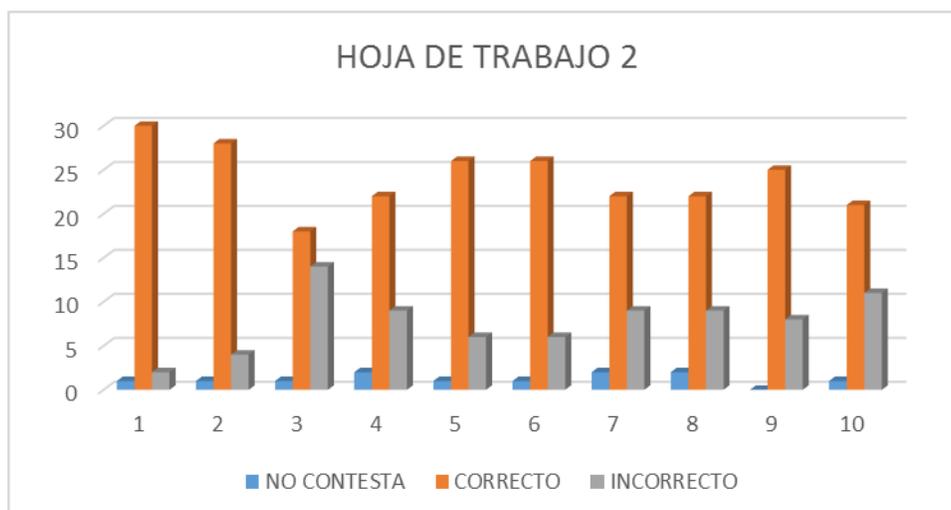
Fuente: El autor

En el análisis de los resultados se puede evidenciar que los estudiantes en su mayoría argumentan en forma sólida las respuestas que están dando.

#### **4.3.2 Hoja De Trabajo No. 2**

**4.3.2.1 Presentación y Análisis de la Actividad.** En esta actividad se presenta una serie de eventos aleatorios cuyo propósito es que el estudiante determine si el evento es seguro, posible e imposible su ocurrencia, de argumentando el porqué de la respuesta, para el desarrollo de esta actividad se cuenta con 45 minutos, a continuación se muestran el análisis de los resultados y algunos ejemplos de respuestas dada por los estudiantes:

**Figura 8.** Hoja de trabajo 2



Fuente: El autor

**Tabla 12.** Resultados Hoja de Trabajo.

ITEMS	NO CONTESTA	CORRECTO	INCORRECTO
<b>1</b>	1 3,03%	30 90,9%	2 6,06%
<b>2</b>	1 3,03%	28 84,84%	4 12,12%
<b>3</b>	1 3,03%	18 54,54%	14 42,42%
<b>4</b>	2 6,06%	22 42,42%	9 27,27%
<b>5</b>	1 3,03%	26 78,78%	6 18,18%
<b>6</b>	1 3,03%	26 78,78%	6 18,18%
<b>7</b>	2 6,06%	22 42,42%	9 27,27%
<b>8</b>	2 6,06%	22 42,42%	9 27,27%
<b>9</b>	0 0%	25 75,75%	8 24,24%

<b>10</b>	1 3,03%	21 63,63%	11 33,33%
<b>TOTAL</b>	12 3,63%	240 72,72%	78 23,63%

Fuente: El autor

Los resultados obtenidos nos muestran que hubo un porcentaje muy bajo, el 3,03% que no contestaron a las situaciones problemas de la hoja de trabajo 2, ejemplo de ello es el trabajo entregado por Daniel Alejandro.

A continuación debes completar si es Seguro, Posible e imposible, y porque en cada evento que se presentan:

- Al lanzar una moneda al aire es \_\_\_\_\_ obtener como resultado SELLO, por que \_\_\_\_\_
- En una cartuchera hay lápices de color rojo, amarillo y verde, es \_\_\_\_\_ sacar de allí un lápiz de color negro, por que \_\_\_\_\_
- Al lanzar un dado es \_\_\_\_\_ que salga un número entre 1 y 6, por que \_\_\_\_\_
- Al comprar una rifa con el número 99 que juega con las dos últimas cifras de la lotería del Tolima es \_\_\_\_\_, ganar por que \_\_\_\_\_

En una bolsa se introducen 2 pin pones blancos, 4 pin pones rojos, 2 azules, 1 negro y un cubo, si se quiere sacar uno al azar:



- Es \_\_\_\_\_ que el pin pon sea de color azul, por que \_\_\_\_\_
- Es \_\_\_\_\_ que el pin pon sea de color amarillo, por que \_\_\_\_\_
- Es \_\_\_\_\_ que el pin pon sea de color blanco o rojo, por que \_\_\_\_\_
- Es \_\_\_\_\_ que el pin pon sea de color azul o blanco o rojo \_\_\_\_\_

---

En una bolsa se introducen 4 bolas de color rojo, si se quiere extraer una al azar:



- Es probable que sea de color azul, por que \_\_\_\_\_
- Es \_\_\_\_\_ que el pin pon sea de color rojo, por que \_\_\_\_\_

El 72,72% respondieron de forma correcta a las preguntas realizadas, lo cual demuestra que la actividad fue entendida y se afianza la parte cognitiva en los estudiantes, los siguientes son ejemplos de las respuestas encontradas:

Angélica María da las siguientes respuestas:

### ACTIVIDAD 2. IDENTIFICAR EVENTOS ALEATORIOS SEGUROS, POSIBLES E IMPOSIBLES

A continuación debes completar si es Seguro, Posible e imposible y porque en cada evento que se presentan:

1. Al lanzar una moneda al aire es posible obtener como resultado SELLO, por que la moneda tiene dos caras y es posible que salga cello
2. En una cartuchera hay lápices de color rojo, amarillo y verde, es imposible sacar de allí un lápiz de color negro, por que por que no hay ese color
3. Al lanzar un dado es seguro que salga un número entre 1 y 6, por que por que tiene números de 1-6
4. Al comprar una rifa con el número 99 que juega con las dos últimas cifras de la lotería del Tolima es posible ganar por que uede ganar la Rifa

En una bolsa se introducen 2 pinpones blancos, 4 pinpones rojos, 2 azules, 1 negro y un cubo, si se quiere sacar uno al azar:



5. Es posible que el pinpon sea de color azul, por que que sacari una de las dos azules
6. Es imposible que el pinpon sea de color amarillo, por que no hay ningun pinpon amarillo
7. Es posible que el pinpon sea de color blanco o rojo, por que podre sacar uno de las dos colores
8. Es posible que el pinpon sea de color azul o blanco rojo, por que estas juntas

En una bolsa se introducen 4 bolas de color rojo, si se quiere extraer una al azar:



9. Es imposible que sea de color azul, por que no hay bolas azules dentro de la bolsa
10. Es seguro que el pinpon sea de color rojo, por que solo las bolas que introducen

Por su parte Andrés Felipe responde:

A continuación debes completar si es Seguro, Posible e imposible, y porque en cada evento que se presentan:

1. Al lanzar una moneda al aire es posible obtener como resultado SELLO, por que tiene dos caras como puede ser sello o cara
2. En una cartuchera hay lápices de color rojo, amarillo y verde, es imposible sacar de allí un lápiz de color negro, por que porque no hay colores negros
3. Al lanzar un dado es seguro que salga un número entre 1 y 6, por que porque el dado tiene 6 caras
4. Al comprar una rifa con el número 99 que juega con las dos últimas cifras de la lotería del Tolima es posible ganar por que tiene una ficha de la rifa

En una bolsa se introducen 2 pinpones blancos, 4 pinpones rojos, 2 azules, 1 negro y un cubo, si se quiere sacar uno al azar:



5. Es posible que el pinpon sea de color azul, por que porque hay dos azules
6. Es imposible que el pinpon sea de color amarillo, por que porque no hay pingpon amarillo
7. Es posible que el pinpon sea de color blanco o rojo, por que porque están en la bolsa
8. Es posible que el pinpon sea de color azul o blanco o rojo porque están en la bolsa

En una bolsa se introducen 4 bolas de color rojo, si se quiere extraer una al azar:



9. Es imposible que sea de color azul, por que porque no hay azules
10. Es seguro que el pinpon sea de color rojo, por que porque todas son rojas

Solo el 23,63% contestaron en forma incorrecta las situaciones problemas presentadas, de las cuales las situaciones con mayor número de preguntas resueltas en forma incorrecta fueron la N° 3 con un 42,42%, la N° 10 con un 33,33% y las situaciones N° 7 y 8 con un 27,27%, a continuación se presentan algunos ejemplos:

Jessica Tatiana responde a las situaciones 3, 7, 8 y 10:

En la cartuchera solo hay lápiz rojo, amarillo, verde, rojo, amarillo, verde.

3. Al lanzar un dado es posible que salga un número entre 1 y 6, por que

7. Es NO que el pinpon sea de color blanco o rojo, por que SI

8. Es NO que el pinpon sea de color azul o blanco o rojo

10. Es posible que el pin pon sea de color rojo, por que solo viene rojo

Las respuestas a las situaciones 3y 10 de Luisa Fernanda son

3. Al lanzar un dado es posible que salga un número entre 1 y 6, por que porque el dado tiene del 1 al 6 es posible

10. Es posible que el pin pon sea de color rojo, por que porque en la bolsa esta completa de color rojo los pin pon

Por su parte Juan Ernesto:

3. Al lanzar un dado es posible que salga un número entre 1 y 6, por que porque solo es del 1 al 6

10. Es posible que el pin pon sea de color rojo, por que si

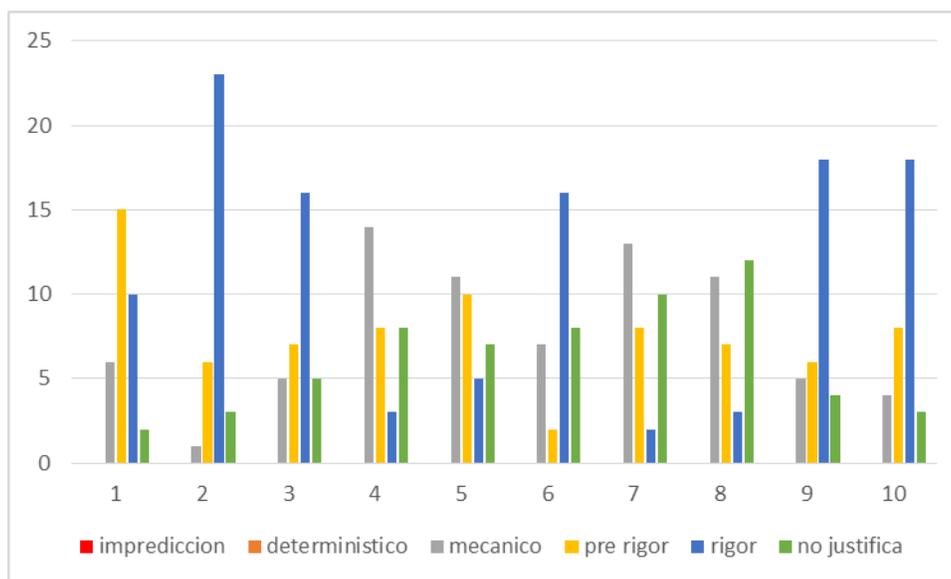
De anterior y respecto a situación 10 y 3 podemos determinar que los estudiantes aún no tiene claro entre eventos Seguros y Posibles.

En cuanto al nivel de pensamiento probabilístico se tuvieron en cuenta las justificaciones dadas a cada una de las respuestas para poderlas clasificar en cualquiera de los cinco niveles propuestos.

A continuación se muestra los resultados obtenidos y la clasificación realizada, al igual se realiza un análisis de las respuestas a las situaciones presentadas.

Del análisis podemos determinar que ningún estudiante fue clasificado en los niveles de Impredicción y determinístico:

**Figura 9.** Nivel de Pensamiento Probabilístico



Fuente: El autor

**Tabla 13.** Nivel de Pensamiento Probabilístico

N° ITEMS	NIVEL DE PENSAMIENTO PROBABILISTICO					
	IMPREDECION	DETERMINISTICO	MECANICO	PRE RIGOR	RIGOR	NO JUSTIFICA
1	0	0	6	15	10	2
	0%	0%	18,18%	45,45	30,30%	6,06%
2	0	0	1	6	23	3
	0%	0%	3,03%	18,18%	69,69%	9,09%
3	0	0	5	7	16	5
	0%	0%	15,15%	21,21%	48,48%	15,15%
4	0	0	14	8	3	8
	0%	0%	42,42%	24,24%	9,09%	24,24%
5	0	0	11	10	5	7
	0%	0%	33,33%	30,30%	15,15%	21,21%
6	0	0	7	2	16	8
	0%	0%	21,21%	6,06%	48,48%	24,24%
7	0	0	13	8	2	10
	0%	0%	39,39%	24,24%	6,06%	30,30%

<b>8</b>	0	0	11	7	3	12
	0%	0%	33,33%	21,21%	9,09%	36,36%
<b>9</b>	0	0	5	6	18	4
	0%	0%	15,15%	18,18%	54,54%	12,12%
<b>10</b>	0	0	4	8	18	3
	0%	0%	12,12%	24,24%	54,54%	9,09%
<b>TOTAL</b>	0	0	77	77	114	62
	0%	0%	23,33%	23,33%	34,54%	18,78%

Fuente: El autor

En el análisis realizado podemos determinar que el mayor porcentaje se clasificó en el nivel de Rigor, un 34,54%, algunos ejemplos de las justificaciones que los estudiantes dan a cada una de las respuestas y podemos clasificarlas como de rigor son:

Justificación que da Darwin a la situación 2:

2. En una cartuchera hay lápices de color rojo, amarillo y verde, es imposible sacar de allí un lápiz de color negro, por que no por solo q. no hay lápiz verde negro

Pedro Julio justifica la respuesta a la situación 3 de la siguiente manera:

3. Al lanzar un dado es seguro que salga un número entre 1 y 6, por que porque el tiene el dado 6 caras

A la situación 9 y 10 Marilyn justifica sus respuestas de la siguiente manera:

En una bolsa se introducen 4 bolas de color rojo, si se quiere extraer una al azar:



9. Es imposible que sea de color azul, por que porque no hay azul  
 10. Es seguro que el pin pon sea de color rojo, por que porque todas son rojas

En el nivel de Pre – Rigor se clasificaron aquellos que justificaron faltando madurar un poco los argumentos que están dando, en este nivel se clasificaron el 23,33 %, las

situaciones con mayor porcentaje que se clasificaron en este nivel son: situación 1 con un 45,45%, situación 5 con un 30,30% y la situación 4 con un 24,24%, algunos de los ejemplos de la justificación son:

Natalia de 11 años da la justificación a la situación 1 de la siguiente manera:

1. Al lanzar una moneda al aire es Posible obtener como resultado SELLO, por que tambien la cara

A la situación 4 y 5 Jhon David responde y justifica:

4. Al comprar una rifa con el número 99 que juega con las dos últimas cifras de la lotería del Tolima es posible, ganar por que puede caer la lotería con los dos últimos números.
5. Es posibles que el pin pon sea de color azul, por que el pinpon azul está en la bolsa

El 23,33% se clasificaron en un nivel Mecánico, donde se justifica con conceptos de probabilidad pero fuera del contexto de la situación presentada, las situaciones con mayor porcentaje que se clasificaron en este nivel son: situación 4 con un 42,42%, situación 7 con un 39,39% y las situaciones 5 y 8 con un 33,33%, se muestra a continuación algunos ejemplos de las justificaciones a las respuestas:

A la situación 4 Sebastián la justifica así:

4. Al comprar una rifa con el número 99 que juega con las dos últimas cifras de la lotería del Tolima es posible, ganar por que solo es un número

Zaira Alejandra justifica a la situación 5 y 7 de la siguiente manera:

5. Es Posible que el pin pon sea de color azul, por que ya se sabe que va a caer alguna de ellos.
7. Es seguro que el pin pon sea de color blanco o rojo, por que va a caer alguno de ellos.

Un 18,78% de los estudiantes no justificaron las respuestas, algunos ejemplos los presentamos a continuación:

Sandra Camila no justifica las situación 8 ni la 9 :

8. Es posible que el pin pon sea de color azul o blanco o rojo

En una bolsa se introducen 4 bolas de color rojo, si se quiere extraer una al azar:



9. Es probable que sea de color azul, por que

Hellen, no justifica las situaciones de la 5 a la 8:

En una bolsa se introducen 2 pin pones blancos, 4 pin pones rojos, 2 azules, 1 negro y un cubo, si se quiere sacar uno al azar:



- 5. Es posible que el pin pon sea de color azul, por que
- 6. Es imposible que el pin pon sea de color amarillo, por que
- 7. Es seguro que el pin pon sea de color blanco o rojo, por que
- 8. Es seguro que el pin pon sea de color azul o blanco o rojo

### 4.3.3 Hoja De Trabajo No. 3

**4.3.3.1 Presentación y Análisis de la Actividad.** La hoja de trabajo 3 tiene como propósito determinar la probabilidad que ocurra un evento aleatorio, esta actividad se divide en el estudio de tres eventos: el lanzamiento al aire de una moneda, el lanzamiento de un dado y el lanzamiento de dos dados.

En el primer momento se explica las actividades a desarrollar, en cada situación se contextualiza, determinando en qué casos se puede presentar estos eventos. En cada caso se entrega material manipulable a cada estudiante, moneda, dados de color verde y rojo.

En un segundo momento los estudiantes grafican los resultados obtenidos en el lanzamiento de una moneda al aire, para ello realiza el experimento 10 veces y consigna los resultados en la tabla dada en la hoja de trabajo. Luego comparte sus resultados con 5 compañeros para tener finalmente un total de 50 lanzamientos.

Tercero, se determina la probabilidad de obtener un número en el lanzamiento de un dado, al igual que determinar la probabilidad de obtener un número en el lanzamiento de dos dados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior.

Posteriormente, al terminar cada una de las situaciones anteriores los estudiantes interactúan con una hoja electrónica que simula 60000 lanzamientos simultáneos de, el lanzamiento de una moneda, de un dado y de dos dados cada vez que accionan una tecla de la computadora (F9). Aquí se espera que en el programa de Excel observen gráficamente que los resultados obtenidos son iguales a los resultados obtenidos en forma teórica.

En la hoja de trabajo 3 la primera actividad se centra en explicar al estudiante como determinar la probabilidad en evento aleatorio, para ello se contextualiza en el juego de Cara o Sello.

El Ejemplo que se presenta en la hoja de trabajo 3 es:

En el juego cara o sello, ¿Cuál es la probabilidad de ganar con SELLO?

P(sello): Probabilidad de ganar con SELLO

Casos o Posibilidades favorables de ganar con SELLO **1**

Casos o Posibilidades totales **2**, cara o sello

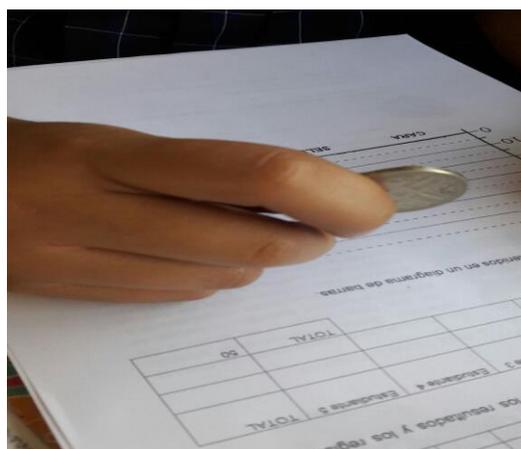
$$P(\text{sello}) = \frac{\text{casos o posibilidades favorables}}{\text{casos o posibilidades totales}} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

Luego la probabilidad de ganar con SELLO es del 50% es decir la mitad de la probabilidad.

Los resultados obtenidos por los estudiantes no coinciden con el resultado teórico, por lo que es importante la utilización de software como Excel o Geogebra, para afianzar los conocimientos adquiridos.

A continuación se presenta algunas fotos y el análisis de los resultados encontrados, como evidencia del trabajo realizado:

**Figura 10.** Material Concreto. Lanzamiento de Moneda.



Fuente: El autor

**Figura 11.** Material Concreto. Lanzamiento de una Moneda.



Fuente: El autor

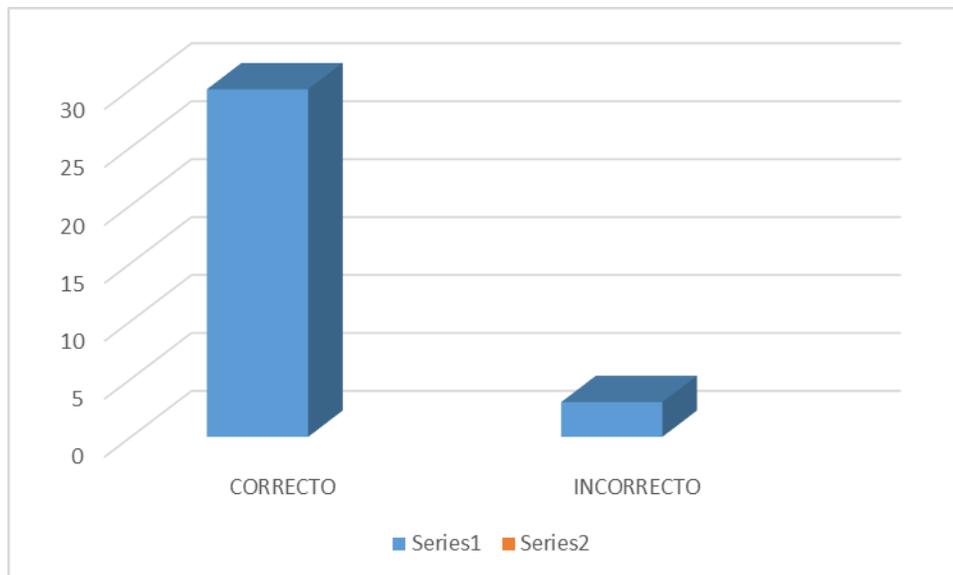
**Figura 12.** . Material Concreto. Lanzamiento de una Moneda.



Fuente: El autor

En esta primera parte se puede afirmar que el 90,90% realizaron la actividad en forma correcta y solo el 9,09% no la realizaron en forma completa o incorrecta.

**Figura 13.** Hoja de trabajo 3



Fuente: El autor

Algunos ejemplos de las respuestas correctas de la primera actividad de la hoja 3 son:  
 El siguiente es el trabajo realizado por Briggitt:

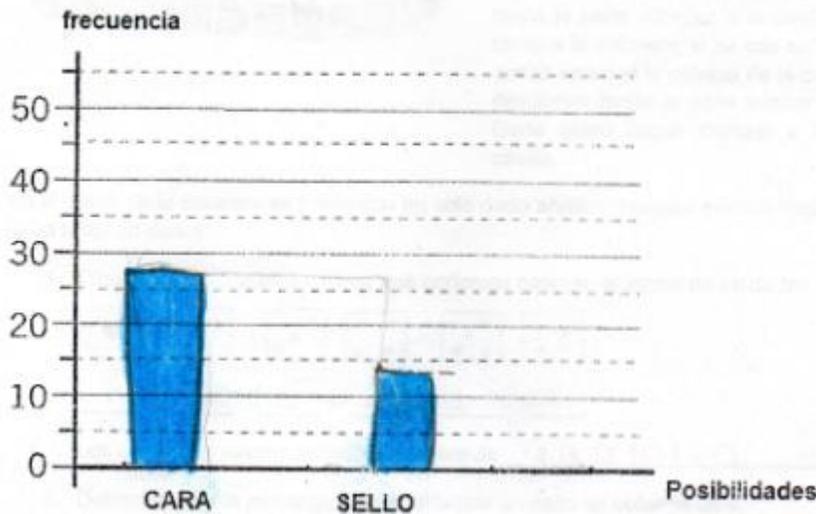
2. Con una moneda de cualquier denominación, realiza el lanzamiento de esté al aire y en forma vertical, 10 veces y registramos los resultados en la siguiente tabla. Si el resultado es Cara colocamos C y si es Sello S

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
Possibilidad											
Cara	X	X	X		X		X		X	X	7
Sello	X			X		X		X			3

Ahora formamos grupos de 5 estudiantes, compartimos los resultados y los registramos en la siguiente tabla:

Resultados Possibilidades	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Estudiante 5	TOTAL
CARA	7	5	4	5	6	27
SELLO	3	5	6	5	4	14
					TOTAL	50

Representemos los resultados obtenidos en un diagrama de barras.



Zharick Vanesa realiza la siguiente actividad:

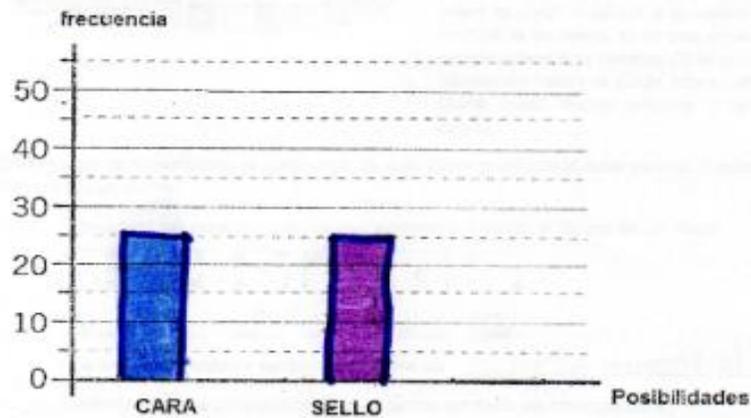
2. Con una moneda de cualquier denominación, realiza el lanzamiento de está al aire y en forma vertical, 10 veces y registramos los resultados en la siguiente tabla. Si el resultado es Cara colocamos C y si es Sello S

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
Cara	X			X				X	X	X	5
Sello		X	X		X	X	X				5

Ahora formamos grupos de 5 estudiantes, compartimos los resultados y los registramos en la siguiente tabla:

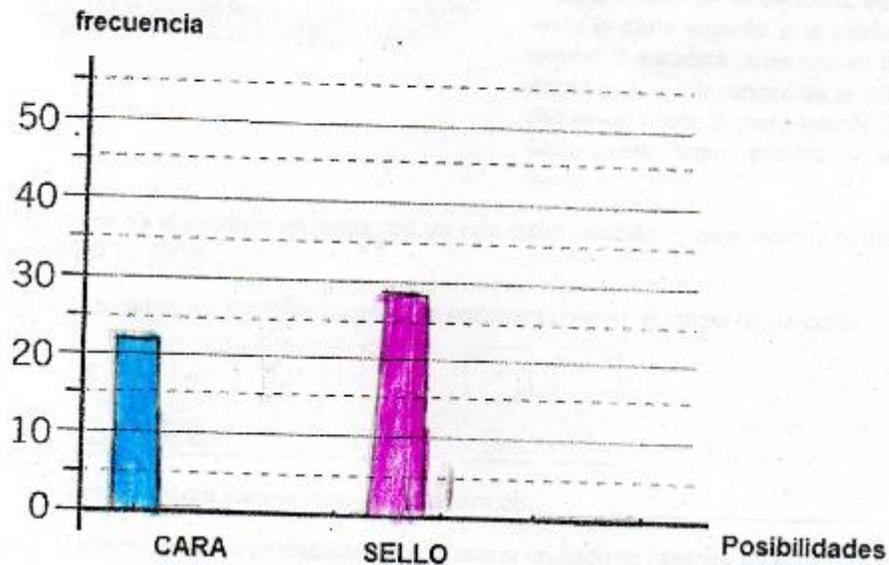
Resultados	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Estudiante 5	TOTAL
CARA	4	6	5	4	6	25
SELLO	6	4	5	6	4	25
					TOTAL	50

Representemos los resultados obtenidos en un diagrama de barras.



Por su parte Juan Sebastián responde de la siguiente manera:

Representemos los resultados obtenidos en un diagrama de barras.



Únicamente tres estudiantes (9,09%), no realizaron la gráfica que se pedía en esta parte de la actividad, ellos fueron Jessica, Sebastián y Laura Daniela y sus resultados se muestran a continuación:

La Hoja de trabajo de Jessica es

2. Con una moneda de cualquier denominación, realiza el lanzamiento de ésta al aire y en forma vertical, 10 veces y registramos los resultados en la siguiente tabla. Si el resultado es Cara colocamos C y si es Sello S

Lanzamiento Posibilidad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
Cara	X		X	X	X		X		X		5
Sello		X		X		X		X		X	5

Ahora formamos grupos de 5 estudiantes, compartimos los resultados y los registramos en la siguiente tabla:

Resultados Posibilidades	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Estudiante 5	TOTAL
CARA	5		5		6	
SELLO		7		7		7
					TOTAL	50

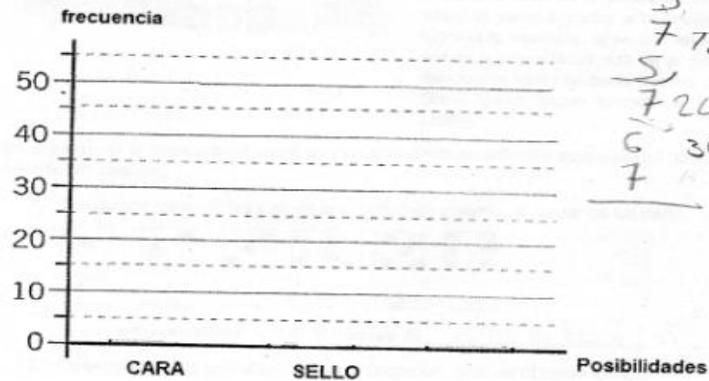
2. Con una moneda de cualquier denominación, realiza el lanzamiento de está al aire y en forma vertical, 10 veces y registramos los resultados en la siguiente tabla. Si el resultado es Cara colocamos C y si es Sello S

Lanzamiento Posibilidad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
Cara	X		X		X		X	X	X		5
Sello		X		X		X		X		X	5

Ahora formamos grupos de 5 estudiantes, compartimos los resultados y los registramos en la siguiente tabla:

Resultados Posibilidades	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Estudiante 5	TOTAL
CARA	5		5		6	16
SELLO		7		7		14
					TOTAL	50

Representemos los resultados obtenidos en un diagrama de barras.



Fuente: El autor

La hoja de trabajo de Sebastián es la siguiente

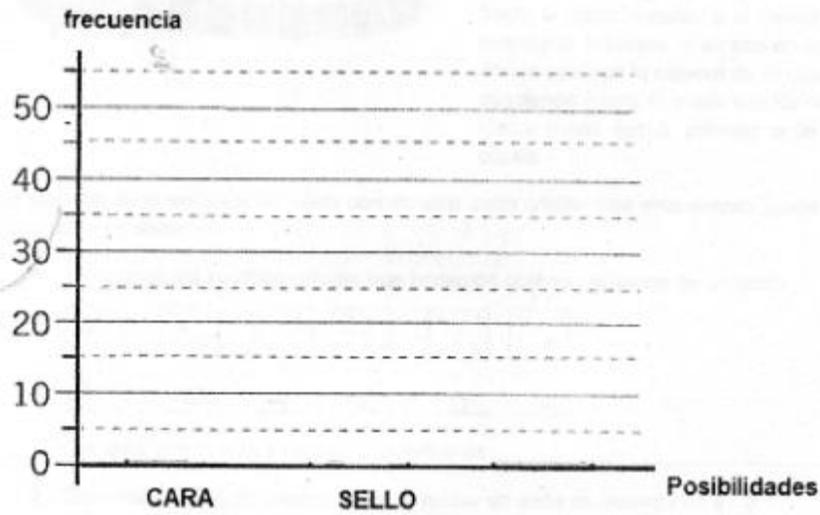
2. Con una moneda de cualquier denominación, realiza el lanzamiento de está al aire y en forma vertical, 10 veces y registramos los resultados en la siguiente tabla. Si el resultado es Cara colocamos C y si es Sello S

Lanzamiento Posibilidad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
Cara	X	X	X	X	X	X	X	X	X		5
Sello	X	X		X		X		X		X	5

Ahora formamos grupos de 5 estudiantes, compartimos los resultados y los registramos en la siguiente tabla:

Resultados Posibilidades	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Estudiante 5	TOTAL
CARA	5	5	5	5	5	25
SELLO	5	5	5	5	5	25
					TOTAL	50

Representemos los resultados obtenidos en un diagrama de barras.



Fuente: El autor

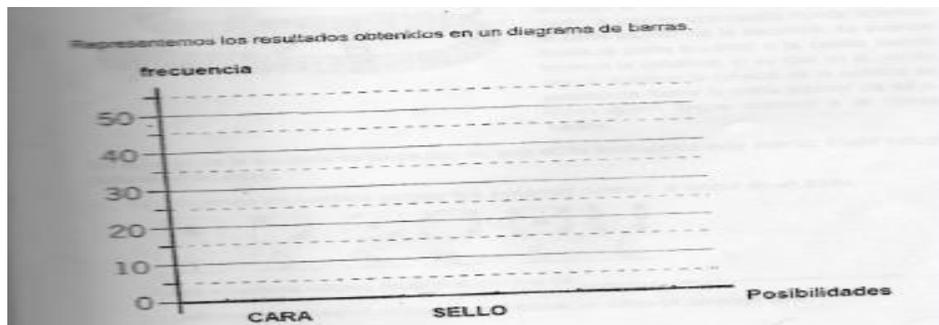
Laura Daniela presenta el siguiente informe:

2. Con una moneda de cualquier denominación, realiza el lanzamiento de esta al aire y en forma vertical, 10 veces y registramos los resultados en la siguiente tabla. Si el resultado es Cara colocamos C y si es Sello S

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
Posibilidad											5
Cara	X		X	X	X	X	X	X	X	X	5
Sello		X									5

Ahora formamos grupos de 5 estudiantes, compartimos los resultados y los registramos en la siguiente tabla:

Resultados	Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4	Estudiante 5	TOTAL
Posibilidades						
CARA	5	5	5	5	5	25
SELLO	5	5	5	5	5	25
					TOTAL	50



Para que el lector tenga una idea más precisa, en el siguiente dibujo se muestra una pantalla similar a la que observan los estudiantes en el programa de Excel en la simulación del lanzamiento de una moneda 60.000 veces.

**Figura 14.** Simulación Lanzamiento de 60.000 veces una moneda.



Fuente: El autor.

En la ilustración anterior se pueden observar en la primera columna (A) a la izquierda que representan los resultados obtenidos al lanzar una moneda en forma vertical hacia arriba (la simulación, por supuesto, de los 60 000 lanzamientos). Después se tiene la tabla en la que se registra el conteo de los resultados obtenidos y a la derecha la gráfica correspondiente en forma circular y de barras. Es importante subrayar que uno de los propósitos es articular diferentes tipos de representación, en este caso, tabular y gráfica.

En la segunda parte de la hoja de trabajo 3, se explica que es un dado y algunos juegos que utilizan un solo dado en su regla de juego. Esta actividad tiene como propósito determinar la probabilidad de que salga un número en el lanzamiento de un dado. A cada estudiante se le entrega un dado para la realizar el trabajo que se pide.

A continuación presentamos fotos del trabajo realizado por los estudiantes como evidencia del trabajo de campo:

**Figura 15.** Material Concreto. Lanzamiento de un dado.



Fuente: El autor.

**Figura 16.** Material Concreto. Lanzamiento de un dado



Fuente: El autor.

Los resultados obtenidos se presentan en la siguiente tabla y diagrama de barras:

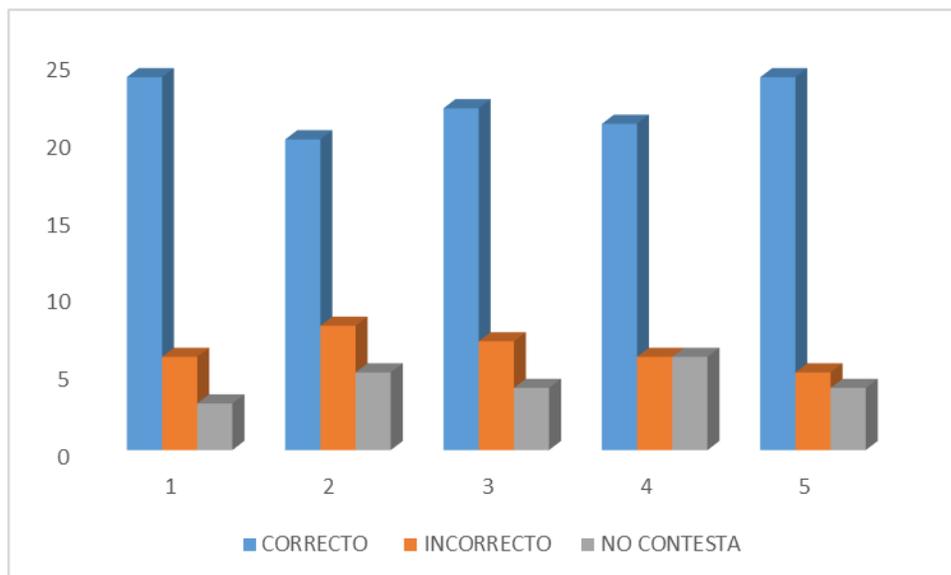
**Tabla 14.** Resultados Hoja de Trabajo N° 3

ITEMS	CORRECTO	INCORRECTO	NO CONTESTA
1	24	6	3
	72,72%	18,18%	9,09%
2	20	8	5
	60,60%	24,24%	15,15%

<b>3</b>	22 66,66%	7 21,21%	4 12,12%
<b>4</b>	21 63,63%	6 18,18	6 18,18%
<b>5</b>	24 72,72%	5 15,15%	4 12,12%
<b>TOTAL</b>	111 67,27%	32 19,39%	2 13,13%

Fuente: El autor.

**Figura 17.** Hoja de trabajo 3 actividad 2

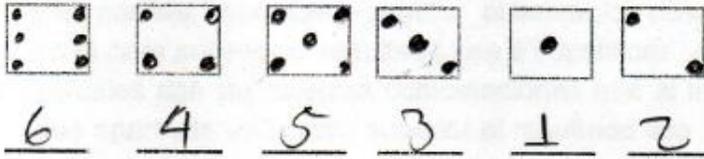


Fuente: El autor

El análisis de los resultados nos muestra que el 67,27% de las respuestas son correctas, de las cuales el mayor porcentaje son los ítems 1 y 5, con un porcentaje de 72,72%. A continuación se muestra unos resultados obtenidos por algunos estudiantes a modo de ejemplo:

Carlos Andrés responde a la situación 1

1. Dibujemos los posibles valores que podemos obtener, al lanzar de un dado.



Los anteriores valores reciben el nombre de espacio muestral

A la situación 2 Daniel Alejandro contesta

2. Determinemos la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un 4.

Recordar:



$$P(a) = \frac{\text{casos o posibilidades favorables}}{\text{casos o posibilidades totales}} = \frac{1}{6}$$

Solenny justifica a la situación tres de la siguiente manera

3. Determinemos la probabilidad que al lanzar un dado el resultado que podemos obtener sea un número impar.

Las posibilidades favorables son: 3, 1, 3, 5

Las posibilidades totales son: 6

La probabilidad de obtener un número impar es:  $\frac{3}{6}$

$$P = \frac{3}{6}$$

A la situación 4 y 5 Luis da la siguiente respuesta

4. Determinemos la probabilidad que al lanzar un dado el resultado que podemos obtener sea un número par.

Las posibilidades favorables son: 3

Las posibilidades totales son: 6

La probabilidad de obtener un número par es:  $\frac{3}{6}$

5. Sumemos la probabilidad que al lanzar un dado el resultado obtenido sea un número impar con la probabilidad que al lanzar un dado el resultado obtenido sea un número par.  
Que podemos concluir:

$$\frac{3}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = \frac{3}{3} = 1$$

Fuente el autor

Solo un 15,15% de los estudiantes responden en forma errónea, de los cuales la de mayor porcentaje es la situación 2 con un 24,24%, el siguiente es un ejemplo de la respuesta dada por Laura Daniela:

2. Determinemos la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un 4.

Recordar:



$$P(a) = \frac{\text{casos o posibilidades favorables}}{\text{casos o posibilidades totales}} = \frac{4}{6}$$

Solo un 12,12% de los estudiantes no contestaron, la situación 4 es la de mayor porcentaje con un 18,18%, Laura Valentina no contesta a las situaciones 4 y 5:

4. Determinemos la probabilidad que al lanzar un dado el resultado que podemos obtener sea un número par.

Las posibilidades favorables son:

Las posibilidades totales son.

La probabilidad de obtener un número par es:

5. Sumemos la probabilidad que al lanzar un dado el resultado obtenido sea un número impar con la probabilidad que al lanzar un dado el resultado obtenido sea un número par.  
Que podemos concluir:

**Tabla 15.** Nivel de Razonamiento Probabilístico. Hoja de Trabajo N° 3

ITEMS	NIVEL DE RAZONAMIENTO DE PROBABILIDAD					
	IMPREDICION	DETERMINISTICO	MECANICO	PRE-RIGOR	RIGOR	NO JUSTIFICA
1			3	5	22	3
			9,09%	15,15%	66,66%	9,09%
2			5	20	6	2
			15,15%	60,60%	18,18%	6,06%
3			3	6	20	4
			9,09%	18,18%	60,60%	12,12%
4			2	7	22	2
			6,06%	21,21%	66,66%	6,06%
5			4	26	2	1
			12,12%	78,78%	6,06%	3,03%
TOTAL			17	64	72	12
			10,30%	38,78%	43,63%	7,27%

Fuente: El autor.

Es notorio el avance que han tenido los estudiantes al estar el 82,41% en los niveles de pre-rigor (38,78%) y rigor (43,63%), un porcentaje muy bajo 7,27% no justificaron las respuestas y el 10,30% se encuentra en el nivel mecánico.

A continuación se muestra algunos ejemplos de respuesta dada por algunos estudiantes:

Los siguientes son ejemplos que se clasificaron en el nivel de rigor:

3. Determinemos la probabilidad que al lanzar un dado el resultado que podemos obtener sea un número impar.

Las posibilidades favorables son: 3, 1, 3, 5

Las posibilidades totales son. 6

La probabilidad de obtener un número impar es:  $\frac{3}{6}$

$$P = \frac{3}{6}$$

5. Sumemos la probabilidad que al lanzar un dado el resultado obtenido sea un número impar con la probabilidad que al lanzar un dado el resultado obtenido sea un número par. Que podemos concluir:

$$\frac{3}{6} + \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = \frac{3}{3} = 1$$

Los siguientes son ejemplos que podemos clasificar en el nivel de pre-rigor:

4. Determinemos la probabilidad que al lanzar un dado el resultado que podemos obtener sea un número par.

Las posibilidades favorables son: 3

Las posibilidades totales son. 6

La probabilidad de obtener un número par es:  $\frac{3}{6}$

3. Determinemos la probabilidad que al lanzar un dado el resultado que podemos obtener sea un número impar.

Las posibilidades favorables son: 3

Las posibilidades totales son. 6

La probabilidad de obtener un número impar es:  $\frac{3}{6}$

El siguiente es un ejemplo en el nivel mecánico:

2. Determinemos la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un 4.

Recordar:



$$P(a) = \frac{\text{casos o posibilidades favorables}}{\text{casos o posibilidades totales}} = \frac{1}{6}$$

Después de realizado la actividad anterior se presenta la simulación de lanzar 60000 veces un dado, utilizando para ello una hoja de trabajo en Excel. A continuación se muestra un pantallazo, en la columna A aparece los resultados del valor que simula el lanzamiento del dado, igual una tabla donde se muestran la frecuencia, los porcentajes de cada opción (1 al 6), y finalmente la gráfica en forma circular y diagrama de barras.

**Figura 18.** Simulación Lanzamiento de un dado, 60000 veces.

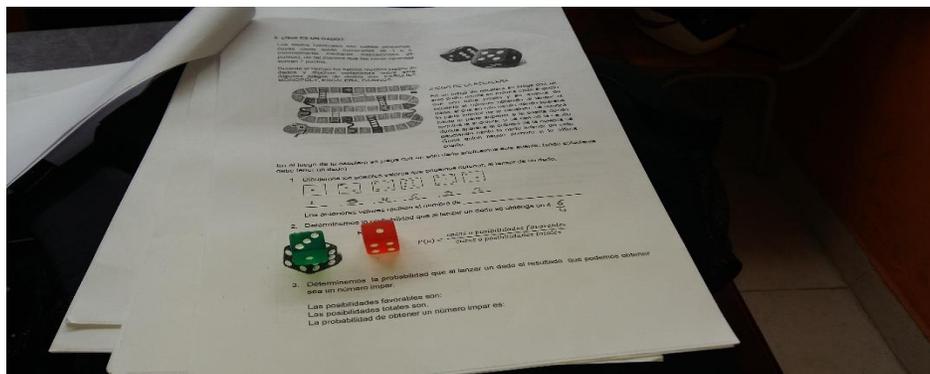


Fuente: El autor.

En la última parte del desarrollo de las actividades requiere que los estudiantes determinen el espacio muestral del experimento aleatorio y además, que reconozcan la existencia de eventos equiprobables y no equiprobables. Para ello, en la primera parte de la hoja de trabajo se contextualiza la situación donde se crea la necesidad al estudiante que las probabilidades de ganar en un juego de parqués. Para desarrollar esta actividad se entregaron a los estudiantes material manipulable como dos dados de diferente color (verde y rojo) y las hojas de trabajo, se contó con 60 minutos para su ejecución, finalmente se realiza la simulación del lanzamiento de 60000 veces dos dados con ayuda de la tecnología.

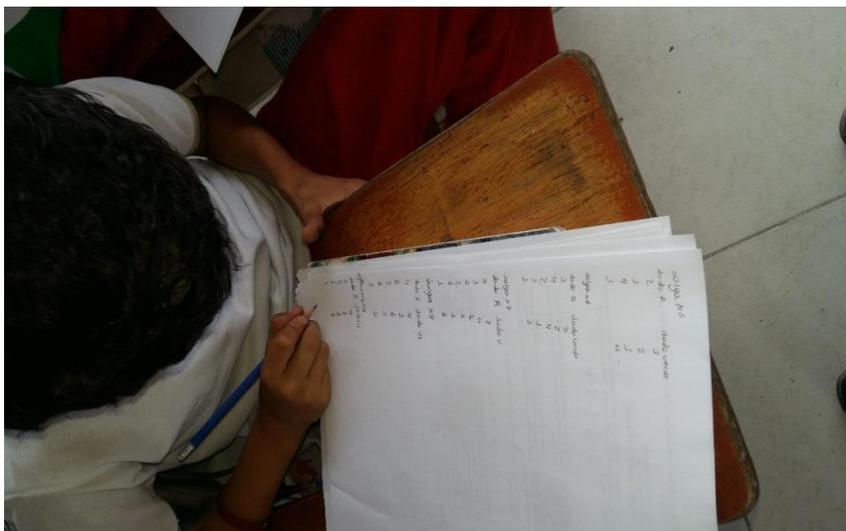
Material manipulable entregado a cada estudiante:

**Figura 19.** Material Manipulable, Lanzamiento de dos dados.



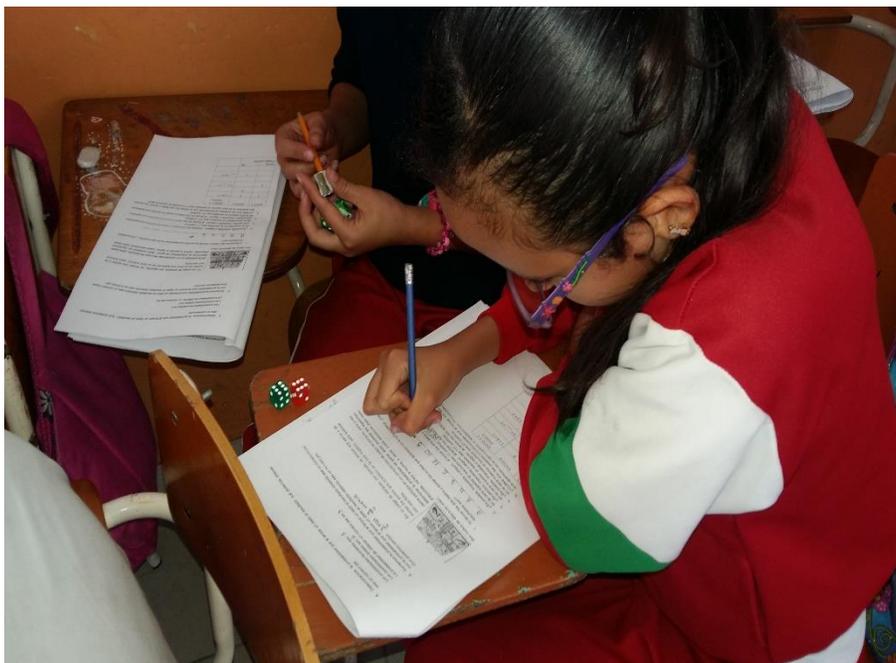
Fuente: El autor

**Figura 20.** Estudiante determinando el espacio muestral del lanzamiento de dos dado



Fuente: El autor

**Figura 21.** Estudiante determinando el espacio muestral del lanzamiento de dos dado



Fuente: El autor

A continuación se muestra la tabla que contiene las respuestas por opción y el nivel de razonamiento probabilístico encontrado en esta parte de la actividad.

**Tabla 16.** Respuestas Nivel de Razonamiento Probabilístico.

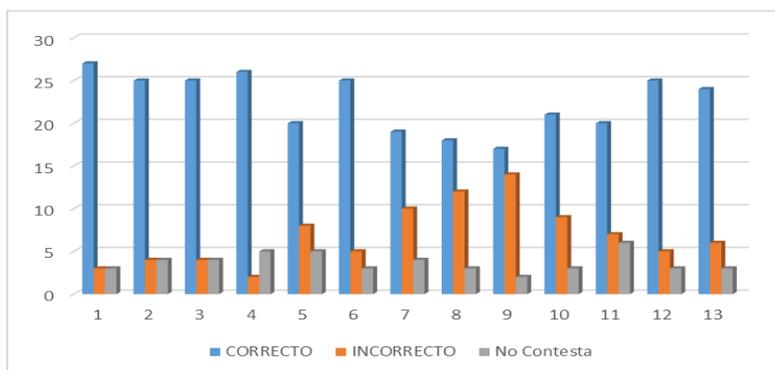
ITEMS	RESPUESTAS			NIVEL DE RAZONAMIENTO PROBABILISTICO					
	CORRECTO	INCORRECTO	No Contesta	impredicción	determinist	mecánico	pre rigor	rigor	no justifica
<b>1</b>	27	3	3			10	12	8	3
	81,81%	9,09%	9,09%			30,30%	36,36%	24,24%	9,09%
<b>2</b>	25	4	4			10	11	8	4
	75,75%	12,12%	12,12%			30,30%	33,33%	24,24%	12,12%
<b>3</b>	25	4	4			9	13	7	4
	75,75%	12,12%	12,12%			27,27%	39,39%	21,21%	12,12%
<b>4</b>	26	2	5			8	16	4	5
	78,78%	6,06%	15,15%			24,24%	48,48%	12,12%	15,15%
<b>5</b>	20	8	5			12	6	10	5
	60,60%	24,24%	15,15%			36,36%	18,18%	30,30%	15,15%
<b>6</b>	25	5	3			12	6	12	3
	75,75%	15,15%	9,09%			36,36%	18,18%	36,36%	9,09%
<b>7</b>	19	10	4			16	8	5	4
	57,57%	30,30%	12,12%			48,48%	24,24%	15,15	12,12%
<b>8</b>	18	12	3			18	7	5	3
	54,54%	36,36%	9,09%			54,54%	21,21%	15,15%	9,09%
<b>9</b>	17	14	2			17	9	5	2
	51,51%	42,42%	6,06%			51,51%	27,27%	15,15%	6,06%
<b>10</b>	21	9	3			19	10	1	3

	63,63%	27,27%	9,09%		57,57%	30,30%	3,03%	9,09%
<b>11</b>	20	7	6		21	4	2	6
	60,60%	21,21%	18,18%		63,63%	12,12%	6,06%	18,18%
<b>12</b>	25	5	3		19	6	5	3
	75,75%	15,15%	9,09%		57,57%	18,18%	15,15%	9,09%
<b>13</b>	24	6	3		19	6	5	3
	72,72%	18,18%	9,09%		57,57%	18,18%	15,15%	9,09%
<b>TOTAL</b>	<b>292</b>	<b>89</b>	<b>48</b>		<b>190</b>	<b>114</b>	<b>77</b>	<b>48</b>
	<b>68,06%</b>	<b>20,74%</b>	<b>11,18%</b>		<b>44,28%</b>	<b>26,57%</b>	<b>17,9%</b>	<b>11,18%</b>

Fuente: El autor.

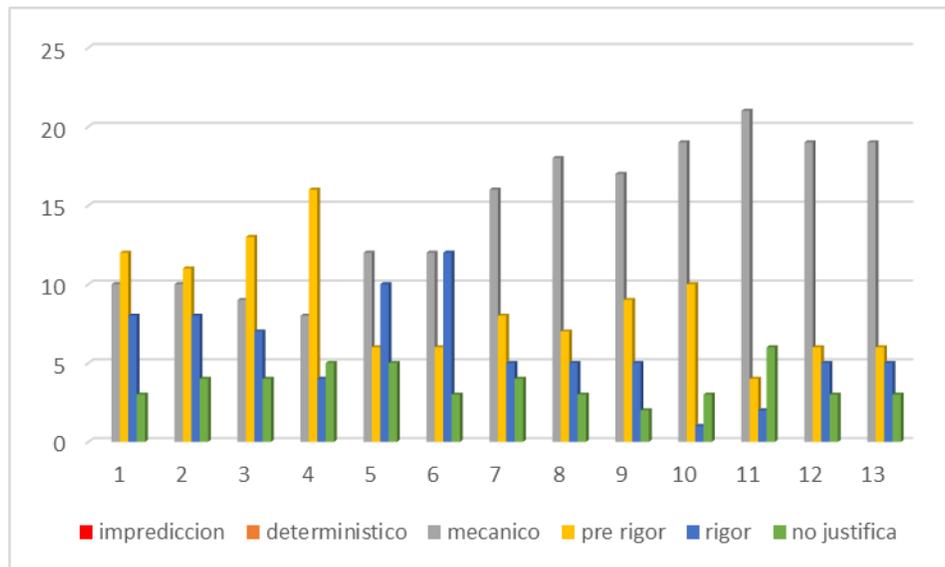
Ahora se muestra en diagramas de barras los resultados analizados en la hoja de trabajo N° 3 y la actividad N° 3 en cuanto a la probabilidad en un evento del lanzamiento de dos dados.

**Figura 22.** Hoja de trabajo 3 actividad 3



Fuente: El autor.

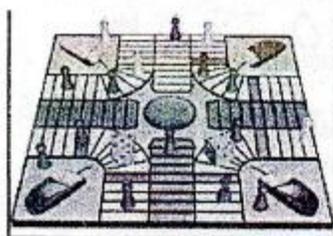
**Figura 23.** Nivel de razonamiento probabilístico



Fuente: El autor.

Tal como se puede apreciar, en la primera pregunta 81,81% de los estudiantes respondieron en forma correcta, sin embargo, solo un 24,24% de los estudiantes dieron un argumento válido, lo que denota que a pesar de dar la respuesta correcta, y sus justificaciones carecen de sustento matemático. Como prueba de ello es que la mayor parte de los educandos se ubicó en el nivel mecánico (44,28%), y además, un 11,18% no justificaron las respuestas.

En el nivel de rigor encontramos los siguientes ejemplos de respuesta dadas por Zaira:



En un juego de parques, por ejemplo, se lanzan dos dados y se suman los puntos que aparecen en la cara superior, para avanzar con una ficha.

Jaime participa en un campeonato de juego de parques, para poder determinar la probabilidad de ganar, debe contestar las siguientes preguntas, vamos a ayudar a Jaime: (cada estudiante debe tener dos dados de diferente color).

1. Al lanzar los dos dados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior, ¿los posibles resultados son?

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

2. ¿Es posible, imposible o seguro, al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea 1? Justificar. *imposible porque los puntos*
3. ¿Es posible, imposible o seguro, al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea 13? Justificar.
4. ¿Es posible, imposible o seguro, al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea 9? Justificar.

Respuesta de la numeración 2 =  
 imposible porque los puntos sumados tienen que darle de 2 para arriba.

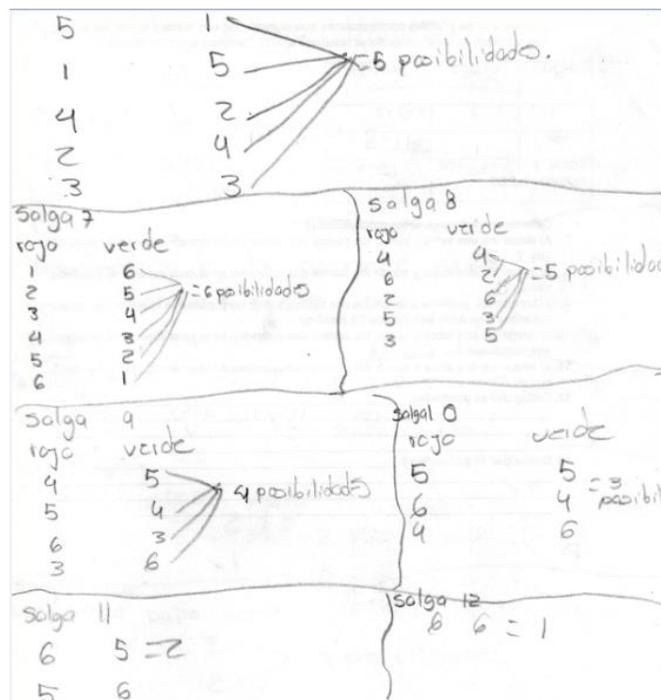
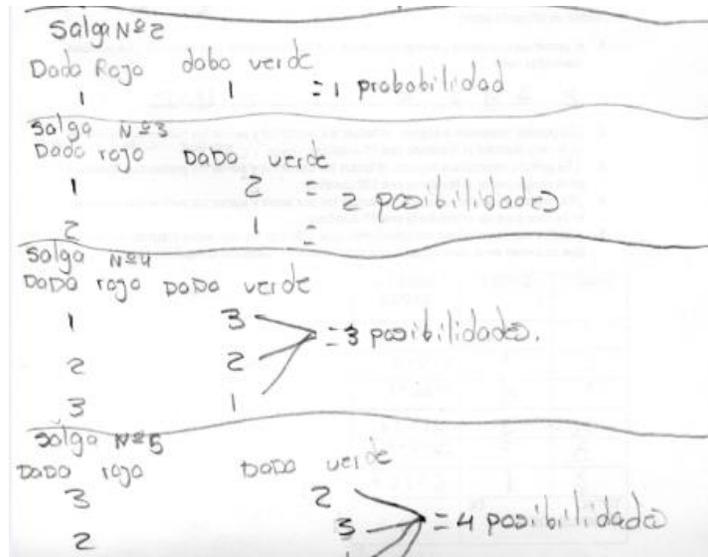
Respuesta de la numeración 3 =  
 imposible porque el número sumado de los dos dados da hasta el número 12.

Respuesta de la numeración 9 =  
 seguro porque puede que en un dado salga el número 4 y en el otro 5.

5. ¿Cuáles son las posibles combinaciones que al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea 7? Completa la siguiente tabla.

DADO 1	DADO 2	DADO 1 + DADO 2
1	6	1+6=7
2	5	2+5=7
3	4	3+4=7
4	3	4+3=7
5	2	5+2=7
6	1	6+1=7
TOTAL POSIBILIDADES DE		6

Espacio muestral del lanzamiento de dos dados:



- 7) el 7 tiene 6 posibilidades  
 el total de posibilidades es 36  
 $P(A) = \frac{6}{36}$
- 8) la posibilidades de sacar 3 son 1+2 y 2+1  
 el total de posibilidades 36  
 $P(A) = \frac{2}{36}$
- 9) los múltiplos de 3 son 3, 6, 9, 12, 4 posibles  
 posibilidad total 36  
 $P(A) = \frac{4}{36}$
- 10) números pares son 2, 4, 6, 8, 10, 12, 6 posibles  
 posibilidad total 36  
 $P(A) = \frac{6}{36}$

Las siguientes son algunas respuestas que fueron clasificadas en el nivel de pre-rigor:

- ¿Es posible, imposible o seguro, al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea 1? Justificar. *por que el número más grande de los dados y de sumar 1+1, yo no hay números más*
- ¿Es posible, imposible o seguro, al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea 13? Justificar. *por que el número más grande de los dados es 12*
- ¿Es posible, imposible o seguro, al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea 9? Justificar. *por que se pueden sumar los números 3+3, 4+5, 5+4...*

En el nivel Mecánico:

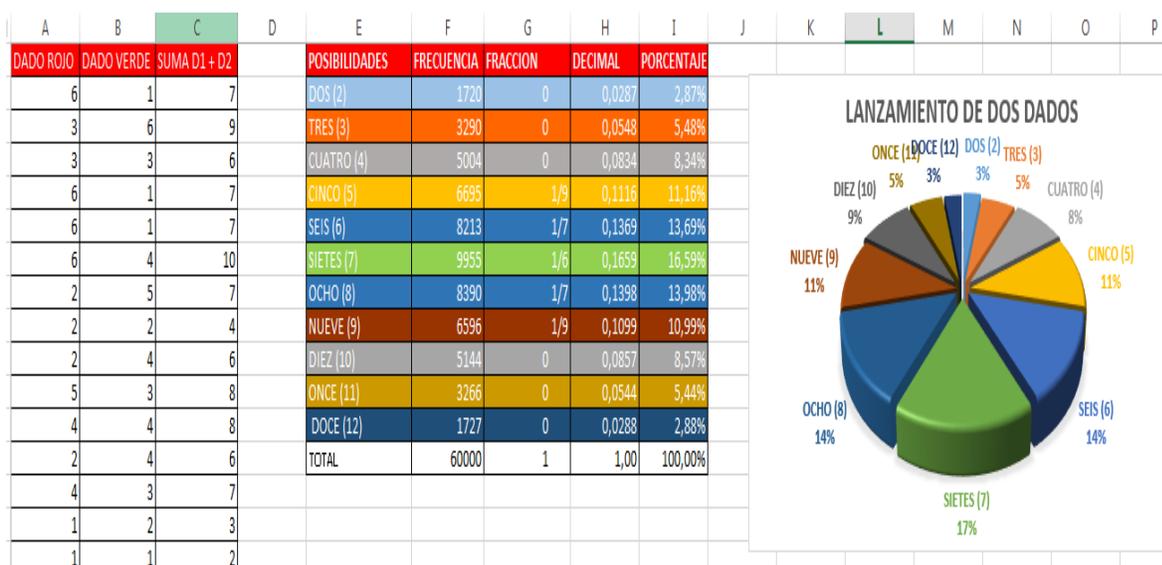
$R/4 = 2 = \text{imposible} = \text{Porque en el dado no aparece}$

$R/4 = 3 = \text{imposible} = \text{Porque no hay tres y medio porque solo es}$

$R/4 = 4 = \text{posible} = \text{Porque en el dado se repite 2 veces } 4 = 9$

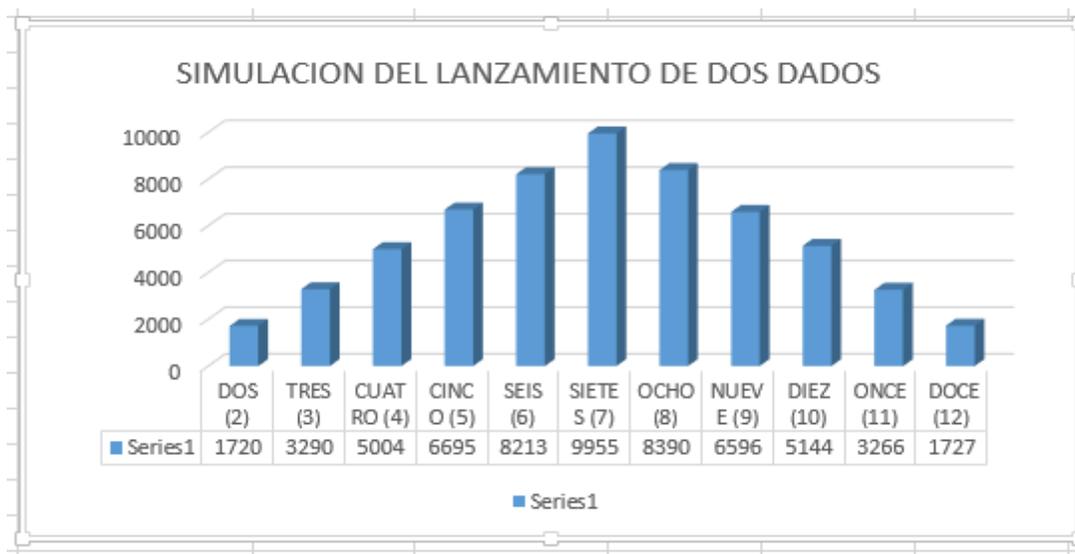
Terminado el tiempo para desarrollar la actividad tres “lanzamiento de dos dados”, se procedió a enseñarle a los estudiantes como se simulan el lanzamiento de 60000 veces dos dados, siendo más acordes estos resultados con la teoría.

**Figura 24.** Simulación del lanzamiento de dos dados, 60000 veces.



Fuente: El autor.

**Figura 25.** Simulación del lanzamiento de dos dados



Fuente: El autor

**4.3.4 Comentarios Finales.** En la aplicación de las hojas de trabajo se obtuvieron progresos significativos al incrementarse la cantidad de respuestas en el nivel de pre –rigor y rigor, y además, disminuir el índice de justificaciones de corte

determinista e impredeción, es notorio que ningún estudiante en esta parte hablaban de suerte o referencias religiosas.

Otras conclusiones son:

- Un gran porcentaje de los estudiantes logró calcular la probabilidad correctamente, justificando con procesos matemáticos sus resultados.
- El uso de material manipulable hace que el estudiante se mantenga más presto al desarrollo de las actividades y que el estudiante se equivoque menos.
- La contextualización que se realiza motiva al estudiante a encontrar la solución y determinar la probabilidad de los eventos.
- El uso de software potencializa el desarrollo de las competencias, y el nivel de aciertos en las respuestas aumenta.

#### 4.4 ENCUESTA DE SALIDA ANALISIS

En esta parte del trabajo se describen las características esenciales de la encuesta de salida (ver anexo 3), y mediante el análisis de algunas situaciones problemas, se ilustran los recursos, estrategias y nociones de probabilidad que se requieren para su resolución. Asimismo se exponen los propósitos de este instrumento, las condiciones de aplicación y un análisis desde la perspectiva cuantitativa y cualitativa, complementado por evidencias tales como manuscritos escaneados de los estudiantes.

**4.4.1** Presentación de la Actividad. Por medio de la encuesta de salida se evalúa el nivel de conocimientos adquiridos sobre algunas nociones básicas de probabilidad. Para lograr tal finalidad se plantean 10 situaciones problemas que, de acuerdo al tipo de información que permiten recolectar, se pueden clasificar de la siguiente manera:

- Cálculo de la probabilidad simple: situaciones 1 y 5.
- Cálculo de probabilidad compuesta: situaciones 2 y 4

- Identificar la proporcionalidad en experimentos aleatorios: situación 6.
- Reconocer eventos independientes: situaciones 3 y 8.
- Identificar eventos dependientes: situación 9.
- Sondear las características del sistema de creencias: situación 7, 10.

Es importante mencionar que esta clasificación no es limitativa, ya que algunas situaciones involucran dos o más propósitos de los expresados en la lista anterior. Por otro lado, con la idea de mostrar al lector un panorama general de las características de la encuesta, a continuación se describe algunos de las situaciones aplicados:

En la tercera situación se propone la siguiente situación:

Javier y Carlos están jugando a Cara y Sello con una moneda. En 30 lanzamientos han caído 20 caras y 5 sellos. En el siguiente Lanzamiento, ¿qué es más probable?

- Obtener Cara.
- Obtener un Sello.
- Los dos eventos anteriores son igualmente probables.
- No se puede decidir cuál evento tiene mayor probabilidad de ocurrir.
- No sé.

En esta situación se tiene como propósito de evaluar si los estudiantes son capaces de identificar la noción de independencia, y llegar a la conclusión de que la respuesta correcta es la opción C.

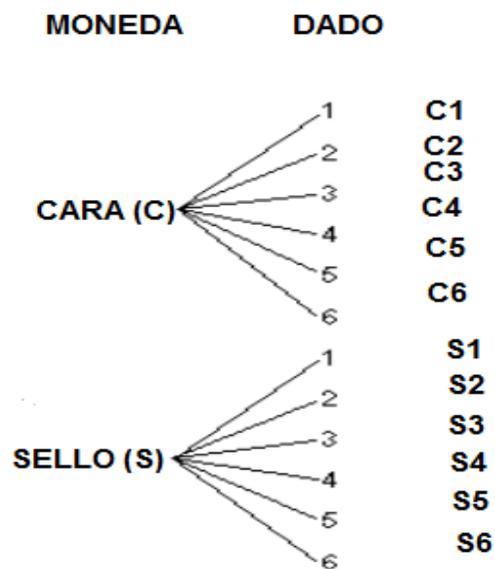
En lo relativo a la situación cuatro:

Si Juan lanza un dado y una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener un dos y un sello?

- No se puede predecir el resultado.
- Depende de la cara del dado y la moneda que se ponga hacia arriba.
- Depende de la suerte.
- 1/12
- E. 1/8
- F. NO SÉ

En esta situación se tiene como propósito que los estudiantes calculen la probabilidad de un evento compuesto. Una estrategia para contestar correctamente esta situación es determinar el espacio muestral y el número de casos favorables a partir de un diagrama de árbol, tal como se muestra enseguida:

**Figura 26.** Diagrama de Árbol.



Fuente: El autor

Como se puede observar en el diagrama anterior, el espacio muestral está constituido por doce posibilidades, de los cuales solamente uno es favorable al evento de obtener un sello y un dos. Por lo tanto, la respuesta correcta corresponde a la opción D, (1/12).  
Situación seis:

Observa las siguientes bolsas que contienen bolas blancas y negras. Si tomamos simultáneamente (al azar) **UNA** bola de cada bolsa, ¿qué es más probable?

**Figura 27.** Ejemplo de pregunta



Fuente: El autor.

- Sacar una bola blanca de la bolsa 1
- Sacar una bola blanca de la bolsa 2
- Los dos eventos anteriores son igualmente probables
- No se puede decidir cuál de los eventos anteriores tiene mayor probabilidad de ocurrir
- No sé o no se puede determinar que es más probable.

En esta situación se pretende que los estudiantes identifiquen la proporcionalidad a partir del cálculo de la probabilidad de cada uno de los eventos y su respectiva comparación, y en consecuencia, puedan llegar a la conclusión de que son equiprobables.

Una estrategia para resolver esta situación es calcular la probabilidad de extraer una bola blanca de cada una de las bolsas. De acuerdo a la figura que ilustra el situación, la bolsa uno contiene seis bolas de las cuales cuatro son blancas, así que la probabilidad de extraer una de ellas es de  $4/6$ , simplificando  $2/3$ . En la bolsa dos se tienen 12 bolas de las cuales 8 son blancas, luego la probabilidad de extraer una blanca es  $8/12$ , simplificando  $2/3$ . Las dos probabilidades son equivalentes, por lo que se puede concluir que los dos eventos son equiprobables. La respuesta correcta la C.

En otras situaciones se tiene como finalidad explorar las creencias de los estudiantes en torno a la probabilidad, como por ejemplo, la situación número diez en el que se plantea la siguiente situación:

José vende boletos de la Lotería del Tolima, juega sin serie, y le ofrece a su amigo Marcos los últimos tres boletos que le quedan: 1234, 3624 y el 6666. ¿Alguno de estos números tiene mayor probabilidad de ganar?

- El 1234.
- El 3624.
- El 66666.
- Los tres boletos tienen la misma probabilidad de ganar.
- No se puede decidir cuál boleto tiene mayor probabilidad de ganar.
- No sé.

En la aplicación diagnóstica se encontró una marcada tendencia entre los estudiantes de considerar que los números con cifras iguales o consecutivas tienen menor probabilidad de ganar que cualquier otro número en un sorteo o rifa. Por tal motivo se incluyó esta pregunta en la encuesta de salida.

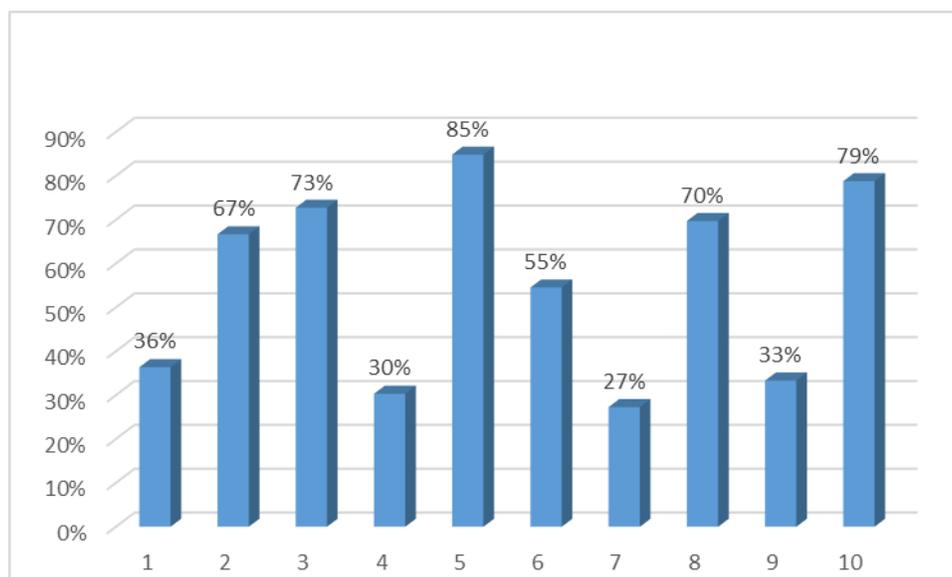
Más que conocimientos algorítmicos, para contestar correctamente esta pregunta depende de la idea que se tenga de equiprobabilidad, sin embargo, no está de más explicar detalladamente el procedimiento de solución. Para determinar la respuesta correcta es necesario precisar que para este caso en el sorteo no se tiene en cuenta la serie, el espacio muestral es de 10000 posibilidades, comenzando con el 0000 y terminando en 9999, y considerando que ninguno número se repite. Entonces la probabilidad para cada uno de ellos es  $1/10000$ , la respuesta correcta será la D.

**4.4.2** Objetivos. Se tiene como propósito principal de la encuesta de salida es evaluar el impacto de las actividades didácticas en el aprendizaje de los estudiantes. Para ello, la información obtenida se analiza cuantitativa y cualitativamente, y posteriormente se contrasta con los datos recabados en el diagnóstico. Dicho en otros términos, se hace un estudio comparativo sobre el estado en que estaban los procesos enseñanza aprendizaje al inicio y cómo se encuentran al final de la secuencia de actividades didácticas implementadas.

**4.4.3** Condiciones de Aplicación. La encuesta de salida se aplicó en un tiempo máximo de 60 minutos, en forma individual y sin uso de la tecnología. En cuanto a las características del instrumento, contiene diez situaciones problema con de opción múltiple de respuesta y el espacio necesario para su justificación.

**4.4.4** Análisis Cuantitativo. En la siguiente gráfica se muestra el porcentaje de respuestas correctas en cada uno de las situaciones que contiene la encuesta de salida. En el eje vertical encontramos el porcentaje aciertos y en el eje horizontal el número de la situación planteada

**Figura 28.** Encuesta de salida



Fuente: El autor.

Como se puede observar, el desempeño de los estudiantes es regular, ya que se alcanzó un porcentaje promedio de respuestas correctas de un 55,45%, sin embargo, comparado con el bajo porcentaje obtenido en el diagnóstico, se puede considerar que se registró un avance considerable.

Otro dato importante es que en seis de los reactivos se superó el 50% de aciertos, en cinco de los cuales se sobrepasó de 60%, y en cuatro no se llegó al 40%. Para tener una idea clara acerca de esta información, a continuación se presentan los problemas con menor proporción de respuestas correctas.

**Tabla 17.** Situación con menor Porcentaje de Respuesta. Encuesta de Salida.

N° Situación	Situaciones con menor porcentaje de respuestas correctas	Porcentaje de aciertos
4	Si Juan lanza un dado y una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener un dos y un sello?	30%
7	Cesar y sus amigos están jugando a la perinola. Cesar	27%

---

lleva siete juegos consecutivos obteniendo “Toma Todo”, es decir, ganando todo el dinero de la apuesta. Esto es por qué....

---

Fuente: Resultados Encuesta de Salida.

En la séptima situación se involucra el concepto de independencia al considerar que el resultado de cada juego no influye en los subsecuentes, por lo tanto, se tiene la misma probabilidad de ganar en cada experimento de hacer girar la perinola.

En la situación cuatro se debe determinar el espacio muestral para determinar la probabilidad que ocurra el evento, por lo cual podemos determinar que los estudiantes no asociaron dos eventos independientes.

**Tabla 18.** Situaciones con Mayor Porcentaje de Aciertos. Encuesta de Salida.

<b>N° Situación</b>	<b>Situaciones con mayor porcentaje de respuestas correctas</b>	<b>Porcentaje de aciertos</b>
<b>5</b>	Observa la siguiente bolsa, la cual contiene bolas blancas y negras. Si tomamos al azar UNA bola de la bolsa. ¿Qué es más probable?	85%
<b>10</b>	José vende boletos de la Lotería del Tolima, juega sin serie, y le ofrece a su amigo Marcos los últimos tres boletos que le quedan: 1234, 3624 y el 6666. ¿Alguno de estos números tiene mayor probabilidad de ganar?	79%

Fuente: El autor

En estas dos situaciones se relacionan la probabilidad sencilla de un evento dado. El sistema de creencias que tienen los estudiantes como se demostró en la prueba diagnóstica no se ven reflejadas en la justificación de las respuestas.

Hasta el momento se ha presentado información relativa a los problemas con menor y mayor índice de aciertos. A continuación se muestran los resultados, por opción de respuesta, de cada uno de las situaciones, señalándose en cada caso la que es correcta por medio de un sombreado en la celda correspondiente. En cada celda se muestran dos valores: el número superior hace referencia a la cantidad de estudiantes en términos absolutos y el inferior en porcentaje.

**Tabla 19.** Opciones de respuesta. Encuesta de Salida.

N° Situación	OPCIONES DE RESPUESTA						
	A	B	C	D	E	F	G NO CONTESTO
1	3		2	15	12	1	
	9,09%		6,06%	45,45%	36,36%	3,03%	
2	8	2	22	1			
	24,24%	6,06%	66,66%	3,03%			
3	4	2	24	3			
	12,12%	6,06%	72,72%	9,09%			
4	4	4		10	12	3	
	12,12%	12,12%		30,30%	36,36%	9,09%	
5	28	3	2				
	84,84%	9,09%	6,06%				
6	8	4	18	1			2
	24,24%	12,12%	54,54%	3,03%			6,06%
7		6	9		17		1
		18,18%	27,27%		51,51%		3,03%
8	3	2	2	23	3		
	9,09%	6,06%	6,06%	69,69%	9,09%		
9	4	10	11	8			
	12,12%	30,30%	33,33%	24,24%			
10		3	4	26			
		9,09%	12,12%	78,78%			

Fuente: El autor

**4.4.5 Análisis Cualitativo.** En este apartado se analizan y clasifican las justificaciones que dieron los estudiantes a las primeros diez situaciones propuestas, conforme a la escala de razonamiento probabilístico sugerida por

Benítez y Sánchez, (1997). Este análisis incluye la presentación de algunas evidencias, tales como respuesta de los estudiantes.

Para iniciar el presente análisis, en la siguiente gráfica se muestran los porcentajes correspondientes a cada una de las categorías del pensamiento probabilista, de acuerdo a los resultados globales de la encuesta de salida.

**Tabla 20.** Niveles de Razonamiento Probabilístico. Encuesta de Salida

N° Situación	Niveles de Razonamiento Probabilístico					
	Impredicció n	Deterministic o	Mecánic o	Pre- Rigor	Rigor	No justificó
1	2 6,06%	3 9,09%	6 18,18%	15 45,45%	7 21,21 %	
2	4 12,12%	5 15,15%	19 57,57%	3 9,09%	2 6,06%	
3	2 6,06%	9 27,27%	2 6,06%	12 36,36%	8 24,24 %	
4	1 3,03%	1 3,03%	20 60,60%	2 6,06%	7 21,21 %	2 6,06%
5	1 3,03%	2 6,06%	6 18,18%	19 57,57%	4 12,12 %	1 3,03%
6	3 9,09%	12 36,36%	4 12,12%	9 27,27%	4 12,12 %	1 3,03%
7	3 9,09%	10 30,30%	11 33,33%	3 9,09%	3 9,09%	3 9,09%
8	5 15,15%	1 3,03%	9 27,27%	14 42,42%	3 9,09%	1 3,03%
9	3	1	5	18	4	2

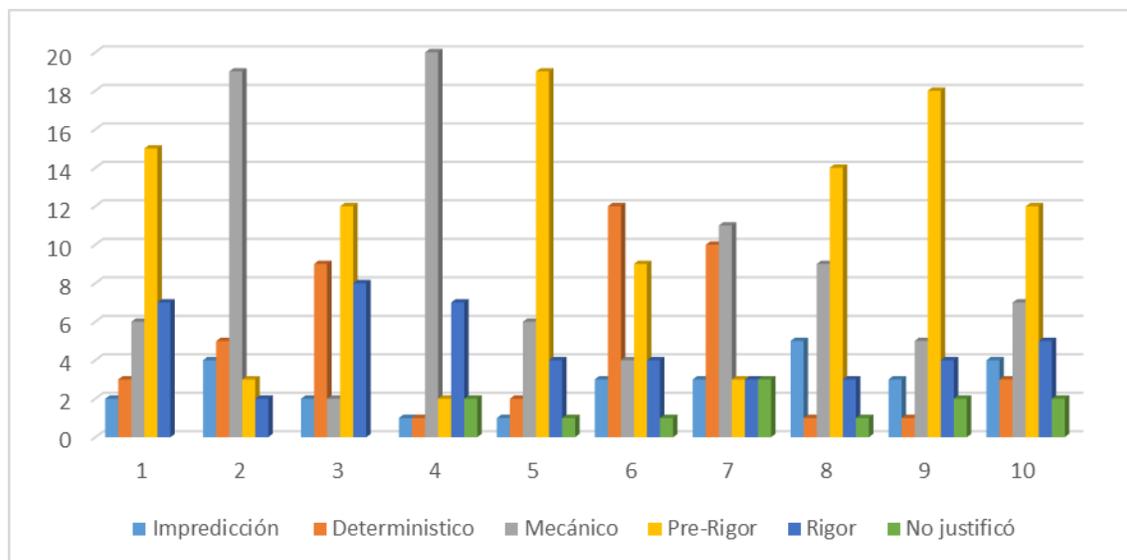
	9,09%	3,03%	15,15%	54,54%	12,12	6,06%
					%	
<b>10</b>	4	3	7	12	5	2
	12,12%	9,09%	21,21%	36,36%	15,15	6,06%
					%	
<b>TOTAL</b>	<b>28</b>	<b>47</b>	<b>89</b>	<b>107</b>	<b>47</b>	<b>12</b>
	<b>8,48%</b>	<b>14,24%</b>	<b>26,96%</b>	<b>32,42%</b>	<b>14,24</b>	<b>3,63%</b>
					%	

Fuente: El autor

Se puede observar que predomina el nivel de pre-rigor (32.42%), le siguen el mecánico (26,96%), el determinista Y Rigor con (14,24%) y, finalmente, el de impredeción (8,48%). Cabe mencionar que un 3,63% de las preguntas no se justificaron.

Es importante subrayar que entre los niveles de pre-rigor y rigor se alcanzó, conjuntamente, un 46,66%, por lo que resulta satisfactorio apreciar un progreso significativo en los niveles superiores del pensamiento probabilista.

**Figura 29.** Diagrama de Barras. Nivel de razonamiento Probabilístico. Encuesta de Salida.



Fuente: El autor

Una vez realizada la precisión anterior, con la intención de ilustrar y ejemplificar algunos de los resultados obtenidos, a continuación se exhiben algunas evidencias del trabajo de los estudiantes, agrupándolas en las diversas categorías del pensamiento probabilístico.

En el nivel de Impredicción presentamos los siguientes ejemplos:

La respuesta y la justificación que da Laura Valentina es:

1. Pedro juega con un dado, Si lo lanza. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un tres o un cinco?

- A. No se puede predecir el resultado.
- B. Depende de la velocidad con que se lance el dado.
- C. Depende de la suerte.
- D.  $1/6$
- E.  $1/3$
- F. No sé.

Justifica la respuesta:

→ puede caer cualquiera de los dos 3 o 5

Para el ejemplo anterior se observa impredicción en la explicación que proporciona el estudiante al no ofrecer una alternativa para predecir el resultado. Cabe resaltar que en esta situación el 45,5% de las argumentaciones fueron catalogadas en el nivel de pre-rigor, 21,21% en el de rigor y tan solo un 6,06% en el de impredicción.

A la situación 2 Luis da la siguiente respuesta y su justificación:

2. Si lanzamos dos dados simultáneamente y sumamos los puntos de la cara superior. ¿Qué es más probable?

- A.  Obtener un número impar.
- B.  Obtener un número par.
- C. Los dos eventos anteriores son igualmente probables.
- D.  No se puede decidir cuál evento tiene mayor probabilidad de ocurrir.
- E.  No sé

Justifica la respuesta:

no se puede determinar cual de los cae.

En este caso la respuesta es correcta, pero la justificación de nota incertidumbre, por lo tanto en el nivel que se clasifica es el de Impredicción, al igual que algunos otros de sus compañeros (12,12% en total). Hay que subrayar que en esta situación el 57,57% de las argumentaciones fueron clasificadas como mecánicas y un 9,09% como pre-rigor.

En el nivel determinista se muestran las siguientes evidencias:

Juan Sebastián contestó el reactivo tres de la siguiente forma:

3. Javier y Carlos están jugando a Cara y Sello con una moneda. En 30 lanzamientos han caído 20 caras y 5 sellos. En el siguiente Lanzamiento, ¿qué es más probable?

- A. ( ) Obtener Cara.
- B. ( ) Obtener un Sello.
- C. ( ) Los dos eventos anteriores son igualmente probables.
- D. ( ) No se puede decidir cuál evento tiene mayor probabilidad de ocurrir.
- E. ( ) No sé.

Justifica la respuesta:

Siempre a caido mas cara, por tanto es mas probable en que  
vuelva a caer

En este caso el argumento que da Sebastián es determinista empírico al justificar en función de los resultados que, de acuerdo al contexto del problema, se obtuvo una mayor cantidad de soles. Esta justificación muestra que el estudiante no identifica las nociones de independencia y equiprobabilidad. En este reactivo un 27,27% de las explicaciones corresponden al nivel determinista.

El siguiente es la respuesta y justificación que da Wendy a la situación 7:

7. Cesar y sus amigos están jugando a la perinola. Cesar lleva siete juegos consecutivos obteniendo "Toma Todo", es decir, ganando todo el dinero de la apuesta. Esto es:

- A. Por bendición del cielo
- B. Por suerte
- C. Por coincidencia
- D. Por qué hubo trampa
- E. Por qué utiliza un amuleto
- F. Otra causa, cuál? \_\_\_\_\_
- G. No se

Justifica la respuesta:

Ganar tantas veces, es que Cesar tiene mucha suerte

En este ejemplo el estudiante hace referencia a la suerte, motivo por el cual su argumento es catalogado como determinista mítico-mágico. En este reactivo un 30,30% de las explicaciones son de corte determinista.

Del nivel de pensamiento probabilístico el mecánico, algunos ejemplos son los siguientes:

Carlos Andrés responde y justifica a la situación 2:

2. Si lanzamos dos dados simultáneamente y sumamos los puntos de la cara superior. ¿Qué es más probable?

- A. ( ) Obtener un número impar.
- B. ( ) Obtener un número par.
- C.  Los dos eventos anteriores son igualmente probables.
- D. ( ) No se puede decidir cuál evento tiene mayor probabilidad de ocurrir.
- E. ( ) No sé

Justifica la respuesta:

Un dado tiene 6 números 3 par y 3 impar y pueden caer

En este caso Carlos Andrés desconoce que se deben analizar las distintas combinaciones para determinar el espacio muestral y los casos favorables, y así estar en condiciones de dar una respuesta correcta. Además, no ejerce algún tipo de control ni maneja alguna representación distinta para hacerlo. En este reactivo un 57,57% de las explicaciones corresponden al nivel mecánico.

En la situación 4 la respuesta dada por María es:

4. Si Juan lanza un dado y una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener un dos y un sello?

- A. No se puede predecir el resultado.
- B. Depende de la cara del dado y la moneda que se ponga hacia arriba.
- C. Depende de la suerte.
- D.  $1/12$
- E.  $1/8$
- F. NO SÉ

Justifica la respuesta:

El total de los resultados son 8, en el dado 6 y en la moneda 2.

Tal como se puede observar, María no utiliza alguna estrategia para determinar el espacio muestral ni los casos favorables, por lo que comete el mismo error que su compañero Carlos en el ejemplo anterior. En esta situación un 60,60% de las argumentaciones son del tipo mecánico, lo cual representa una elevada proporción de respuestas y justificaciones incorrectas.

El siguiente nivel corresponde al de pre-rigor, así que se muestran algunas evidencias al respecto.

El siguiente caso corresponde a Brayan Stiven, quien contestó el reactivo ocho como se muestra enseguida:

8. Entre los finalistas de un concurso de televisión se sorteará un automóvil de lujo último modelo. Los participantes son Erika, Alondra y Eduardo, y la mecánica del juego consiste en meter en una cajita, un papel por cada uno de los participantes con su nombre y tres papeles marcados con una X. La conductora del programa sacará sin ver en el interior de la caja, un papel: si es una X, regresa el papel a la caja y vuelve a intentar nuevamente; si es el nombre de uno de los participantes, será quien gane el automóvil. Esto se hará durante tres veces como máximo, es decir, si en tres ocasiones se extrae una X, no habrá ganador esta vez y el automóvil se rifará en el siguiente concurso. ¿En cuál extracción hay más probabilidad de que gane alguno de los concursantes?

- A. En la primera extracción.
- B. En la segunda extracción.
- C. En la tercera extracción.
- D. Es la misma probabilidad en cualquiera de las tres extracciones.
- E. No se puede decidir en cuál de las tres extracciones se tiene mayor probabilidad de que gane alguno de los participantes.
- F. No sé.

Justifica la respuesta:

Se da la misma probabilidad en cualquier extracción, las extracciones no afectan el resultado, es un juego independiente.

En este ejemplo se observa que el estudiante, a pesar de que no calcula la probabilidad de ganar, interpreta correctamente el problema al tener claridad sobre la independencia de los resultados en cada una de las extracciones. En este reactivo un 42,42% de las explicaciones corresponde al nivel de pre rigor.

Angélica María a la situación 10 justifica de esta manera:

10. José vende boletos de la Lotería del Tolima, juega sin serie, y le ofrece a su amigo Marcos los últimos tres boletos que le quedan: 1234, 3624 y el 6666. ¿Alguno de estos números tiene mayor probabilidad de ganar?

- A. El 1234.
- B. El 3624.
- C. El 66666.
- D. Los tres boletos tienen la misma probabilidad de ganar.
- E. No se puede decidir cuál boleto tiene mayor probabilidad de ganar.
- F. No sé.

Justifica la respuesta:

Cualquier numero tiene la misma probabilidad los numeros  
no se repiten y solo hay un solo numero son en total 10000  
posibilidades

Este estudiante elige la opción de respuesta correcta, lo cual evidencia que tiene bien claro el concepto de equiprobabilidad al asegurar que cada número de boleto es único en el sorteo. Para esta situación el 36,36 % de las justificaciones se encuentran en el nivel pre rigor.

El último nivel en la escala del razonamiento probabilístico es el de rigor, del cual se muestran a continuación algunos ejemplos.

Juan Esteban sustenta la respuesta a la situación 5 de la siguiente manera:

5. Observa la siguiente bolsa, la cual contiene bolas blancas y negras. Si tomamos al azar UNA bola de la bolsa. ¿Qué es más probable?



- A. Sacar una bola BLANCA.
- B. Sacar una bola NEGRA.
- C. Los dos eventos anteriores son igualmente probables.
- D. No se puede predecir el resultado.
- E. No sé.

Justifica la respuesta:

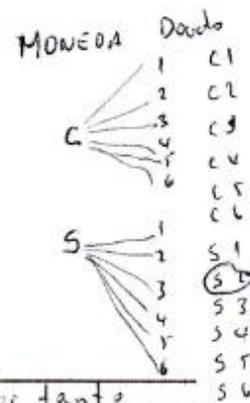
En la bolsa hay 11 bolas en total, hay 6 bolas blancas y 5 negras. La probabilidad de sacar una blanca es 6/11 mientras que sacar una negra es 5/11

En la justificación realizada por Juan se nota el nivel en que se encuentra pues justifica de una manera acertada y argumentada, por lo cual se clasifica en el nivel de rigor.

A la situación 4 Rubén responde y justifica de la siguiente manera:

4. Si Juan lanza un dado y una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener un dos y un sello?

- A. No se puede predecir el resultado.
- B. Depende de la cara del dado y la moneda que se ponga hacia arriba.
- C. Depende de la suerte.
- D. 1/12
- E. 1/8
- F. NO SÉ



Justifica la respuesta:

El espacio muestral es 12, y hay solo una posibilidad de que salga un dos y un sello por tanto  

$$P(w) = \frac{1}{12}$$

La respuesta proporcionada por Rubén es muy interesante ya que recurre a una forma de representación distinta a la verbal, específicamente a un diagrama de árbol, para determinar el espacio muestral y los casos favorables. Posteriormente se regresa al contexto del problema para expresar su respuesta por escrito.

**4.4.6 Comentarios Finales.** La aplicación de la encuesta de salida permitió, entre otras cosas, obtener la información necesaria para determinar la pertinencia de las

actividades didácticas implementadas en cuanto aprendizaje se refiere. A continuación se mencionan los principales resultados alcanzados.

- El promedio de respuestas correctas fue de un 52,72%.
- La mayoría de los estudiantes calcula correctamente la probabilidad de un evento sencillo. Un ejemplo de esto es que un 84,84% de las respuestas al reactivo cinco son correctas.
- El tipo de justificaciones realizadas por algunos estudiantes mejoró notablemente al utilizar un lenguaje claro y preciso, así como un vocabulario propio de la probabilidad.
- Las argumentaciones clasificadas como pre-rigor y rigor alcanzaron un 32,42% y un 14,24%, respectivamente, en tanto que en el nivel de impredeción se ubicaron un 8,48% de las justificaciones y un 14,24% en el determinista.
- Hay evidencias del uso de diferentes tipos de representaciones en la resolución de problemas, específicamente diagramas de árbol, lo cual favoreció la resolución de problemas.
- La mayoría de los estudiantes identifica la independencia de eventos en experimentos estocásticos. Un ejemplo concreto es que en el reactivo ocho un 69,69% de las respuestas son correctas.
- Aún persisten creencias erróneas, particularmente las asociadas a la suerte y el uso de amuletos, ya que un 14,24% de estudiantes justifican su uso.

#### 4.5 ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE LAS ENCUESTAS DE DIAGNÓSTICO Y DE SALIDA

La información presentada en este apartado es de suma importancia para evaluar el impacto de las actividades didácticas en el aprendizaje de los estudiantes. Para esto, se hace un estudio comparativo entre los datos obtenidos en el diagnóstico y los que se recabaron en la encuesta de salida, para determinar el nivel de apropiación de las nociones de probabilidad así como el desarrollo del pensamiento probabilístico de los alumnos.

En primer lugar se retoman los resultados cuantitativos más relevantes de ambas encuestas y el análisis se presenta en la siguiente tabla comparativa.

**Tabla 21.** Comparativo Encuesta Diagnostica y de Salida.

<b>ENCUESTA DIAGNOSTICA</b>	<b>ENCUESTA DE SALIDA</b>
<b>El promedio de respuestas correctas fue del 11,31%.</b>	El promedio de respuestas correctas fue del 52,72%
<b>Un 29,29% atribuye a la suerte o amuletos el evento de ganar en juego de azar.</b>	Un 14,24% manifiestan el uso de amuletos
<b>Ningún estudiante utilizó diagramas de árbol para resolver los problemas.</b>	El 32,42% de los estudiantes mostraron otros procedimientos para llegar a la solución del problema.
<b>Prevaleció la tendencia en considerar los resultados de todos los eventos como dependientes.</b>	La mayoría de los estudiantes identificó la independencia de eventos.
<b>La mayoría de los estudiantes mostró gran dificultad para</b>	Mejóro notablemente la comunicación por escrito de los estudiantes al utilizar

---

**expresar sus ideas por escrito.**

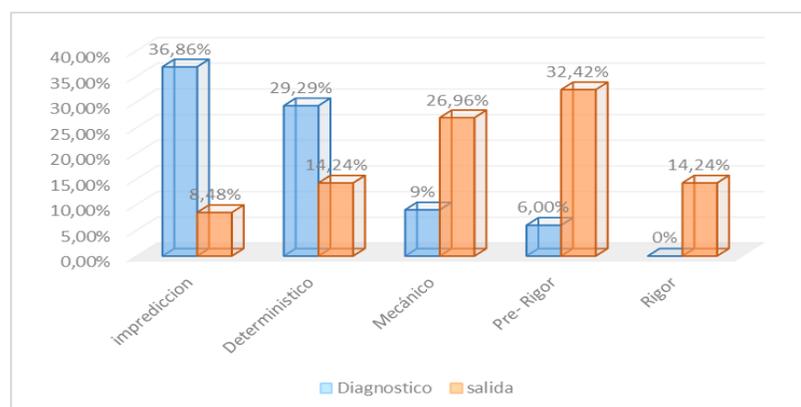
un lenguaje apropiado de la  
probabilidad.

---

Fuente: El autor

Es preciso reconocer que en algunos aspectos el progreso de los estudiantes es apenas perceptible, sin embargo, en otros es completamente notorio. Por lo tanto, en términos generales se puede afirmar que se registró un avance importante en la adquisición de las nociones básicas de probabilidad, considerando como parámetros de referencia los resultados del diagnóstico. Dicho en otros términos, el impacto de las actividades didácticas implementadas está en función del desempeño de los estudiantes al inicio y al final del presente trabajo de investigación. Por otro lado, en cuanto al desarrollo del pensamiento probabilístico, se obtuvieron resultados significativos que permiten reafirmar que las actividades propuestas influyeron positivamente en el aprendizaje de la probabilidad. Para ilustrar lo anterior, en la siguiente gráfica se muestran los resultados globales correspondientes a la categorización de las justificaciones proporcionadas por los estudiantes, tanto en la encuesta de diagnóstico como en la de salida. De esta manera comparan gráficamente el diagnóstico y la evaluación final.

**Figura 30.** Comparativo encuesta diagnostica y salida



Fuente: El autor

Tal como se puede percibir en la figura anterior, en términos cualitativos también se presentaron avances muy importantes, entre los cuales se mencionan los siguientes:

- Disminuyó el porcentaje de respuestas en el nivel de impredeción al pasar de un 36,86% al 8.48%.
- En el caso de respuestas deterministas también se redujo de un 29,29% a un 14.24%.
- Se incrementaron las justificaciones en el nivel de pre-rigor al pasar de un 6% a un 32,42%.
- Aumentaron las argumentaciones de rigor al pasar de un 0% a un 14,24%.

En conclusión, el presente análisis comparativo muestra un importante desarrollo del pensamiento probabilístico de los estudiantes con quienes se trabajó, así que la evaluación de las actividades didácticas es satisfactoria.

## 5. CONCLUSIONES

### 5.1 INTRODUCCIÓN

El planteamiento inicial de las preguntas de investigación, relacionadas a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en estudiantes de quinto año de básica primaria, propició el interés en implementar un conjunto de secuencias didácticas con la finalidad de darles respuesta. Estos interrogantes sirven de soporte de las actividades que aquí se documentan. En este capítulo se da respuesta a los cuestionamientos que dieron pie al presente trabajo de investigación. Por otro lado, además de responder las preguntas de investigación, se proponen algunas sugerencias tanto de instrucción como para investigaciones futuras.

### 5.2 RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

En el capítulo uno del presente trabajo (apartado 1.4.2) se mencionan las preguntas que guiaron la presente investigación, de las cuales una es considerada como central, y cuatro más son auxiliares o complementarias. A continuación se da respuesta a cada una de ellas.

- Respuesta a la Pregunta Central de Investigación. La pregunta central es la siguiente: ¿Qué características debe tener un proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, para que contribuya al desarrollo del pensamiento aleatorio, con estudiantes de quinto año de primaria?

Entre las características que favorecen el desarrollo del pensamiento aleatorio se destaca de manera importante la dinámica que se establece al interior de las prácticas pedagógicas de aula. Se debe crear un ambiente necesario en el que los estudiantes participen activamente y en forma ordenada en la construcción de su aprendizaje, y en el cual los roles del docente y los estudiantes sean completamente distintos a la enseñanza tradicional. Además, se deben propiciar las condiciones necesarias para

dar la oportunidad a los estudiantes de interactuar con los demás a través de la discusión de ideas estocásticas.

Basado en lo anterior, las actividades deben partir de problemas en contexto, reales o hipotéticos, alrededor de los cuales los estudiantes formulen conjeturas que posteriormente validen o refuten. Para ello los estudiantes deben tener, en primera instancia, un acercamiento individual a la situación problemática de manera tal que emerjan sus concepciones previas. Después se debe llevar a cabo un trabajo en equipos, donde los estudiantes interactúen en forma cooperativa, en el que, a partir de la interacción y el contacto con numerosos experimentos aleatorios relacionados a situaciones problemas, se comparen las expectativas de solución con los resultados obtenidos. Enseguida se debe socializar la actividad para confrontar ideas y llegar a una puesta en común. Finalmente, el docente debe formalizar la actividad, señalando los errores y explicitando las nociones que la actividad pone en juego. La metodología de trabajo descrita es totalmente congruente con referentes de calidad del Ministerio de Educación, como son: los lineamientos curriculares, estándares básicos de competencia, derechos básicos de aprendizaje (DBA), que se plasman en los planes y programas de estudio, consagrados en el proyecto educativo institucional PEI.

De otra parte, se debe enfatizar que en el estudio de la probabilidad, un reducido número de experimentos aleatorios promueve la concepción de ideas erróneas; un ejemplo concreto se muestra en los resultados obtenidos que lanzó una moneda en treinta veces y que, debido a los resultados obtenidos, donde una estudiante no fue capaz de identificar la equiprobabilidad. Por tal motivo, es necesario incorporar la tecnología computacional para simular una gran cantidad de experimentos aleatorios en poco tiempo, de manera que la probabilidad frecuencial se aproxime a la probabilidad clásica, de acuerdo a la ley de los grandes números. Este tipo de recursos coadyuva a erradicar o atenuar las concepciones equivocadas de los estudiantes en torno a la probabilidad.

En conclusión, en un proceso de enseñanza - aprendizaje en el desarrollo del pensamiento aleatorio se deben generar espacios de discusiones, de intercambio de experiencias y además, utilizar los recursos tecnológicos al alcance para propiciar un conflicto cognitivo entre las concepciones erróneas de los estudiantes y los resultados obtenidos a partir de la experimentación o simulación de situaciones aleatorias. Sin duda, estas condiciones favorecen la construcción de las nociones básicas de la probabilidad y, en consecuencia, se promueve el desarrollo del pensamiento aleatorio.

- Respuestas a las Preguntas Auxiliares de la Investigación. De la pregunta central se desprenden algunas preguntas auxiliares que a continuación se mencionan, dando a cada una de ellas la respuesta correspondiente.
  
- Respuesta a la Primera Pregunta Auxiliar
  
- ✓ ¿Qué tipo de actividades de aprendizaje se deben diseñar e implementar para contribuir en el dominio de conocimientos relacionados con el pensamiento aleatorio en estudiantes de quinto año de primaria?

Para dar respuesta a este interrogante debemos primero realizar un análisis de los resultados encontrados en la encuesta diagnóstica.

De acuerdo a estos resultados de diagnóstico, se encontró una categorización del razonamiento probabilístico similar al propuesto por Benítez y Sánchez (1998) y De Las Fuentes (2008) la cual comprende cinco dimensiones: niveles de impredeción, determinista, mecánico, pre-rigor y rigor (para mayor detalle ver apartado 2.3 del segundo capítulo).

En la investigación realizada por De las Fuentes (2008), la mayoría de los estudiantes encuestados se ubicó en los niveles de impredeción y determinista. De manera

análoga, en el presente estudio se obtuvieron resultados semejantes con estudiantes de quinto grado de básica primaria, al aplicarles la encuesta diagnóstica, obteniéndose la siguiente información:

- Un 36,86% de las respuestas fueron clasificadas en el nivel de impredeción y un 29,29% en el determinista.
- Solamente un 6% de las respuestas son del tipo de pre-rigor y 0% en el nivel de rigor.

Tal como se puede observar, un elevado porcentaje de estudiantes se situó en los niveles inferiores del razonamiento probabilístico. Estos resultados desfavorables se deben, en gran medida, a la persistencia de creencias equivocadas, como por ejemplo, la confianza en el uso de amuletos . Otra idea errónea que se manifestó es considerar que los resultados de todos los experimentos aleatorios son dependientes entre sí, y además, que la totalidad de eventos de una situación azarosa son equiprobables. Sumado a lo anterior, se encontró la falta de recursos cognitivos, tales como el conocimiento del algoritmo para calcular la probabilidad, el manejo adecuado de fracciones y de la proporcionalidad. Además, en ningún caso se utilizaron otras formas de representación para resolver los problemas planteados.

En conclusión, los factores mencionados en el párrafo anterior impactan de manera significativa el desempeño de los estudiantes, particularmente el sistema de creencias erróneo asociado a la probabilidad. Estas ideas son coherentes con los planteamientos de Schoenfeld (1985) relativos a las dimensiones que influyen en la resolución de problemas. Por tal razón las actividades que se deben implementar en primer lugar son aquellas que afiancen los conceptos básicos de probabilidades, como por ejemplo: Identificar eventos aleatorios e indeterminados, determinar cuándo un evento aleatorio es posible, imposible o seguro.

En segunda lugar presentar actividades que involucren estrategias en la solución de problemas que involucren concepto, propiedades, leyes, formulas, utilizadas en desarrollo del pensamiento aleatorio.

Por ultimo actividades donde se utilicen todas las herramientas tecnológicas necesarias en la solución de problemas.

En lo concerniente a la metodología de trabajo, hay algunos aspectos que deben ser tomados en cuenta, y entre los cuales se mencionan los siguientes:

- Condiciones de aplicación. Un aspecto central en el diseño de las actividades didácticas es que los contenidos a estudiar deben ser congruentes con el currículo actual.
- Otra condición importante es el tiempo requerido para la aplicación de cada una de las actividades de enseñanza-aprendizaje, en función de los momentos de la clase: trabajo individual, en equipos, socialización e institucionalización. De esta forma, se debe considerar el tiempo necesario para que los estudiantes comuniquen y discutan las ideas asociadas a la actividad implementada en su momento.
- Instrumentos. La implementación de las actividades didácticas requiere del uso de diversas herramientas como las siguientes: encuesta de diagnóstico, hojas de trabajo, archivos electrónicos de simulación y encuesta de salida.
- Fases de trabajo. Es preciso reconocer que los instrumentos mencionados anteriormente no resuelven por sí mismos los problemas vinculados al aprendizaje de la probabilidad, sino que es absolutamente necesario establecer una secuencia didáctica apropiada, tal como se describe a continuación:
- ✓ Etapa diagnóstica. en primer lugar, se debe aplicar un diagnóstico que permita identificar las concepciones erróneas de los estudiantes, así como las dificultades relacionadas con el dominio de conocimientos asociados a la probabilidad. También es necesario explorar la habilidad que tienen los estudiantes de segundo grado de secundaria en la utilización de diferentes

registros semióticos de representación del concepto de probabilidad. De esta manera es posible contar con un punto de partida para el trabajo docente posterior.

- ✓ Tratamiento didáctico. Para superar las dificultades y concepciones erróneas encontradas en el diagnóstico, se deben diseñar y aplicar hojas de trabajo centradas en la resolución de problemas en contexto, e incluir preguntas adecuadas que promuevan en el estudiante las competencias comunicativas y de argumentación. Para ser más explícitos, a continuación se describen, en términos generales, las características de las hojas de trabajo implementadas en la presente investigación. Posteriormente, la segunda parte se trabaja en equipos de dos o tres integrantes para que, a través de la interacción entre ellos y con un programa de simulación electrónica, se confronten las respuestas proporcionadas en la primera parte de la hoja de trabajo con los resultados obtenidos con apoyo de la tecnología. De esta manera, se pretende ocasionar un conflicto en sus estructuras cognitivas que los motive a buscar explicaciones y, por consiguiente, a construir su aprendizaje. Posteriormente se socializa la actividad para dar a los estudiantes el espacio para comunicar y confrontar sus ideas con el resto del grupo. Finalmente, el docente debe institucionalizar los conocimientos involucrados en la actividad, señalando los errores y explicando los conceptos estudiados.
  
- ✓ Evaluación del aprendizaje de los estudiantes. Después de la aplicación de las hojas de trabajo, es necesario evaluar los logros alcanzados para determinar el impacto de las actividades en el aprendizaje de los estudiantes.

En conclusión, las actividades que favorecen el desarrollo del pensamiento probabilístico deben partir de un diagnóstico que permita explorar las dificultades y creencias erróneas de los estudiantes, y cuyos resultados sirvan para diseñar y aplicar hojas de trabajo que confronten las ideas equivocadas de los estudiantes. Además, es necesario realizar un gran número de experimentos aleatorios, por lo que el uso de

tecnología se constituye en un excelente apoyo para optimizar el tiempo. Finalmente, se debe evaluar el impacto de las actividades didácticas aplicadas.

- Respuesta a la Segunda Pregunta Auxiliar.
- ✓ ¿Qué estrategias didácticas ayudan a fortalecer el manejo de estrategias heurísticas en el proceso de resolución de problemas con estudiantes de quinto año de primaria?

La manera más apropiada para desarrollar la competencia de resolución de problemas es implementando una serie de estrategias como las siguientes:

- Se deben diseñar y aplicar hojas de trabajo cuyo propósito esencial sea resolver problemas en diferentes contextos, reales o hipotéticos, en este caso, asociados a la probabilidad. Resulta conveniente que en las actividades se incluyan espacios para que los estudiantes comuniquen por escrito sus procedimientos de solución, y además, los justifiquen. De este modo, se propicia un acercamiento individual al proceso de solución.
- Es importante subrayar que la resolución de problemas no es una actividad aislada ni tampoco debe limitarse al plano individual, por lo que también es imprescindible fomentar el trabajo en equipos. A partir de la interacción entre alumnos se lleva a cabo una comunicación por vía oral, que contribuye a la construcción del conocimiento a través de la discusión y la negociación de significados en torno a la situación problemática planteada.
- En la dinámica de la clase, es indispensable socializar la actividad para brindar a los estudiantes la oportunidad de comunicar en forma oral sus estrategias de solución y argumentar sus procedimientos. De esta forma, los estudiantes confrontan sus ideas, analizan diferentes formas de solución, identifican las ventajas y desventajas de las diferentes opciones de respuesta,

incluso, es posible visualizar y vincular las diversas formas de representación que surjan en esta fase del trabajo.

La resolución de problemas no es una actividad que se trabaje de manera aislada, sino que se relaciona y complementa con otras competencias que se deben desarrollar, tales como la comunicación, la argumentación y el manejo de técnicas. Desde esta perspectiva, la propuesta del presente trabajo, y en particular la respuesta a esta pregunta de investigación, es plenamente congruente con los planteamientos referentes de calidad del Ministerio de Educación Nacional.

- Respuesta a la tercera pregunta auxiliar
- ✓ ¿De qué manera se puede implementar un proceso que contribuya en el desarrollo de estrategias de control en estudiantes de quinto año de básica primaria?

Las estrategias de control, se ubican las preguntas que se auto-formula el estudiante y las decisiones que tome, encaminadas a entender, a revisar la veracidad de las ideas, los procesos la claridad y sencillez de la argumentación.

Como estrategia resulta útil que el estudiante se plantee algunas preguntas para desarrollar un pensamiento crítico sobre la solución:

- ¿Entendiendo adecuadamente el enunciado del problema?
- ¿Estoy contestando la pregunta que me hicieron?
- ¿Está bien justificado un paso de la solución?
- ¿Existen alternativas más sencillas para resolver el problema?
- ¿La estrategia utilizada es la más adecuada?

Una estrategia de control es examinar la solución obtenida. Cuando el estudiante, supone que ha encontrado la respuesta al problema, se inicia un nuevo proceso, donde hay que realizar nuevas acciones, tales como, verificar los resultados, revisar los razonamientos, explorar caminos más cortos y aplicar el resultado obtenido en la solución de otro problema.

Cuando el estudiante se plantea el interrogante ¿Entendiendo adecuadamente el enunciado del problema?, se debe dedicar el tiempo suficiente para la fase de entendimiento del problema. La dificultad más predominante es que los estudiantes no le dedican tanto tiempo a entender el problema, más bien ponen en práctica las estrategias de solución. A diferencia de los expertos, generalmente los estudiantes no tienen la costumbre de revisar las respuestas de los problemas.

En conclusión cuando se toman decisiones inadecuadas sobre la selección de estrategias y recursos, el fracaso se presenta, y se debe aprender del error como estrategia para el fortalecimiento de conceptos y estrategias. Si se mantiene el control sobre las decisiones y tareas de ejecución en el proceso de solución de un problema, es un ejercicio permanente de evaluación, desconocerlo garantiza el fracaso, aplicarlo sistemáticamente contribuye en la construcción de la solución.

- Respuesta a la cuarta pregunta auxiliar
- ✓ ¿Qué tipo de actividades fortalecen el manejo de actitudes necesarias para el estudio de las matemáticas en estudiantes de quinto año de básica primaria?

La tercera dimensión para desarrollar competencias, son las actitudes y los valores. Las actitudes se refieren a la disposición que tiene el estudiante para enfrentar el estudio de las matemáticas. Por ejemplo, la perseverancia que debe tener el estudiante para resolver un problema. En la escuela se debe ayudar a desarrollar valores para la vida en sociedad.

Las sesiones de trabajo con los estudiantes, se deben desarrollar en un ambiente donde se propicie el desarrollo de algunas competencias matemáticas como: la resolución de problemas, la comunicación de las ideas matemáticas y la argumentación de las soluciones y procedimientos.

Para cumplir con este propósito, se generarán condiciones propicias para debatir sobre ideas matemáticas, en un ambiente de confianza y de respeto entre todos los miembros del grupo, buscando la formación integral del educando. Para el desarrollo

de las actitudes se plantean las siguientes estrategias:

- Que el estudiante persevere para resolver los problemas.
- Se Asuma una posición activa y crítica dentro de la clase por parte de los agentes participantes.
- Presentar las ideas de solución de un problema frente a todo el grupo, y respetar el uso de la palabra.
- Defender un punto de vista y estar dispuesto a cambiarlo cuando el peso de los argumentos demuestren que es erróneo.
- Reconocer cuando las estrategias de soluciones equivocadas o poco sensatas y existe otras con más argumentos.
- Trabajo cooperativo, tolerancia y respeto por las ideas ajenas, la conformación de grupos debe ser en forma aleatoria u orientada por el docente.
- Revisión sistemática de procedimientos y resultados por parte de los docentes y estudiantes.

Las actitudes y valores señalados en los párrafos anteriores, se pusieron en práctica en el aula durante el proceso de intervención, como parte de primordial del desarrollo de competencia y la formación integral de los educandos.

## RECOMENDACIONES

### Recomendaciones para la Enseñanza de la Probabilidad

Como parte del resultado de la presente investigación, se derivan importantes sugerencias entre las cuales se mencionan las siguientes:

- El Docente de matemáticas debe ser consciente que el pensamiento aleatorio de los estudiantes se orienta por creencias erróneas alejadas del razonamiento matemático, lo cual se constituye en un obstáculo epistemológico que requiere de acciones concretas y sistemáticas para superarlo.
- Una primera actividad consiste en determinar las creencias que presentan los estudiantes a partir de un diagnóstico apropiado, y tomarlas como punto de partida en cualquier acción didáctica.
- El uso de la tecnología como software es una herramienta importante como apoyo en la simulación de numerosos experimentos aleatorios en muy poco tiempo, lo cual contribuye a contrarrestar las concepciones erróneas que se originan con un reducido número de experiencias azarosas.
- Se recomienda la utilización de Excel por varias razones: la primera es que este software se tiene prácticamente en todas las instituciones educativas que cuentan con una sala de sistemas; la segunda procesa un número elevado de experimentos estocásticos en muy poco tiempo; la tercera es la capacidad de mostrar diversos registros de representación. Se puede trabajar en forma interdisciplinaria con el área de tecnología e informática.
- La utilización de elementos didácticos manipulables como: dados, ruleta, perinolas, loterías; hacen que la actividad sea más dinámica y llamativa, donde el estudiante es participe de la construcción del aprendizaje.

- Implementar una metodología similar a la que se reporta en la presente investigación que implica una planeación, donde se tiene en cuenta los referentes de calidad: estándares de competencia, derechos básicos de aprendizaje; un diagnóstico, la realización y aplicación de hojas de trabajo con el apoyo de tecnología, y por supuesto, la dinámica establecida al interior de la actividad pedagógica de aula (trabajo individual, en equipos, socialización e institucionalización de la actividad).
- Al planear las actividades siempre partir de una situación problema, es decir contextualizar la situación, rete al estudiante en busca de una solución; se Implemente la estrategia C-P-A, lo concreto, pictórico y lo abstracto.

#### Recomendaciones para Investigaciones Subsecuentes

Durante el desarrollo de la presente investigación surgieron algunas interrogantes que no están al alcance de esta resolverlas, y por lo tanto, se recomienda darle continuidad en posteriores investigaciones. Entre los interrogantes presentamos los siguientes:

- ¿Qué resultados se obtienen en el desarrollo del pensamiento aleatorio de estudiantes de básica primaria si además del uso de software y material manipulable se incorporan otro tipo de herramientas?
- ¿Qué papel juega el uso de software en el sistema de creencia de los estudiantes?
- ¿Qué resultados se obtienen si se aplican las actividades aquí propuestas en el nivel de básica secundaria y media?

## REFERENCIAS

- Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). *Computer mediated learning: an example of an approach. International Journal of Computers for Mathematical learning*, 5, 25-45.
- Barrera, F. & Santos L. (2002). *Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento*. Recuperado de: [https://www.uaeh.edu.mx/investigacion/icbi/LI\\_EconomiaFinanzasMat/Barrera\\_Mora/Barrera-Santos-2002.pdf](https://www.uaeh.edu.mx/investigacion/icbi/LI_EconomiaFinanzasMat/Barrera_Mora/Barrera-Santos-2002.pdf)
- Batanero, C. (2005). *Significados de la probabilidad en la educación secundaria. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8, (03), 247-263
- Benítez D. & Sánchez, E. (1997). *Pensamiento de probabilidad y estadística*. Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. México.
- Benítez Mojica, D. & Londoño Millán, N. (2009). *Situaciones Problemáticas en Contexto en el Aprendizaje del Cálculo*. Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México D.F
- Black, P. & Willian, D. (1998). *Evaluacion al Interior de la caja negra, elevando estandares a traves de la educacion en el aula*.
- Camacho, M. & Santos, M. (2004). *La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas*. NÚMEROS, pp. 45-60.
- Clavijo, G. A. (2008). *La Evaluacion del Proceso de Formacion*. Recuperado de: [http://www.colombiaaprende.edu.co/html/productos/1685/articles178627\\_ponen7.pdf](http://www.colombiaaprende.edu.co/html/productos/1685/articles178627_ponen7.pdf)
- De las Fuentes, J. (2008). *Niveles de razonamiento probabilística en estudiantes de bachillerato*. Tesis de maestría. Universidad Autónoma de Coahuila, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento*. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales, Cali, Universidad del Valle.
- Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior. (2014-2015). *Pruebas Saber 3, 5 y 9 Lineamientos para las aplicaciones muestral y censal*. Recuperado de:

[http://www.icfes.gov.co/examenes/component/docman/doc\\_details/929-1-lineamientos-para-las-aplicaciones-muestral-y-censal-saber-3-5-y-9-2014?Itemid=](http://www.icfes.gov.co/examenes/component/docman/doc_details/929-1-lineamientos-para-las-aplicaciones-muestral-y-censal-saber-3-5-y-9-2014?Itemid=)

Ministerio de Educación Nacional. (s.f.). *Estandares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Recuperado de: [http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042\\_archivo\\_pdf2.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf)

Ministerio de Educación Nacional. (1994). *Ley 115*. Por la cual se expide la Ley General de Educación. Recuperado de: [HYPERLINK "http://www.oei.es/quipu/colombia/Ley\\_115\\_1994.pdf"](http://www.oei.es/quipu/colombia/Ley_115_1994.pdf)

[http://www.oei.es/quipu/colombia/Ley\\_115\\_1994.pdf](http://www.oei.es/quipu/colombia/Ley_115_1994.pdf)

Ministerio de educación Nacional. (1998). *Matemáticas Lineamientos Curriculares*. Recuperado de: [http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-339975\\_matematicas.pdf](http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-339975_matematicas.pdf)

Niño, L. (1995). *Evaluación, Proyecto Educativo y Descentralización Educativa*. Bogotá.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (2015). *Estrategias para la solución de problemas*. I.E.S. Rosa Chacel. Dpto. de Matemáticas.

Rico, L. (2003). *La evaluación en Pruebas Pisa*. Granada.

Samboy, L. (2009). *La Evaluación Sumativa*. Recuperado de: [http://www.uaeh.edu.mx/docencia/VI\\_Lectura/MGIEV/documentos/LECT93.pdf](http://www.uaeh.edu.mx/docencia/VI_Lectura/MGIEV/documentos/LECT93.pdf)

Sánchez, E. & Benítez, D. (1997). *Algunos acercamientos al razonamiento probabilista de los alumnos*. En Undécima reunión latinoamericana de Matemática educativa. México.

Santos, M. (1992). *Resolución de problema: el trabajo de Alan Schoenfeld: una propuesta a considerar en el aprendizaje de las matemáticas*. *Educación Matemática*, 4, (2), 16-24.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics*. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). NY: Macmillan.

Shepard, L. (2006). *La evaluación en el aula*. Westport: Green wood Publishing Group INC.

Sociedad Thales. (2000). *Principios y Estándares para la educación Matemática*.

Sociedad andaluza de Educación matemática Thales.

Stiggins, R. (2007). *Conquistando la Frontera de Evaluación de Aprendizaje*.

# **ANEXOS**

## Anexo A. Encuesta Diagnostica

### ENCUESTA DE DIAGNOSTICO INSTITUCION EDUCATIVA ISMAEL PERDOMO – CAJAMARCA TOLIMA SEDE PILOTO N° 24

Nombre del alumno: \_\_\_\_\_ Edad: \_\_\_\_\_ Fecha:

#### IMPORTANTE

La encuesta que va a contestar es parte de un proyecto de investigación. El objetivo es desarrollar el pensamiento probabilístico en los estudiantes. Tenga en cuenta las siguientes sugerencias para contestar.

1. Lea detenidamente cada Pregunta
2. Una vez que entiendas la pregunta, selecciona una sola opción como respuesta.
3. Existe un espacio para que justifiques detalladamente tu respuesta. Si requieres realizar alguna operación, escríbela a un lado de la pregunta.
4. En caso que no sepas la respuesta, selecciona la opción: No sé.
5. Conteste con lapicero negro la siguiente encuesta.

## CUESTIONARIO

En cada una de las situaciones planteadas debe marcar o escoger solo una opción de las respuestas y justificar la respuesta. Llamamos evento a cada una las probabilidades que puede ocurrir en un suceso o experimento.

1. María lanza dos dados y suma los puntos que aparecen en la cara superior, Lo más probable es:

- A. Obtener una suma igual a 4 puntos
- B. Obtener una suma igual a 5 puntos
- C. Los dos eventos anteriores tienen la misma probabilidad de obtenerse

D. No se puede determinar cuál de los dos eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir

E. No sé

Justifica la respuesta:

---

---

---

---

2. Jaime lanza 4 veces una moneda, la moneda puede caer Cara o Sello, ¿Cuál de las siguientes combinaciones de cara y sello esperas que ocurra con mayor probabilidad?

A. 3 Caras y un solo un Sello

B. 2 Caras 2 Sellos

C. Los dos eventos anteriores son igualmente probables

D. No se puede determinar cuál de los dos eventos tiene mayor probabilidad de ocurrir

E. No sé

Explica la respuesta:

---

---

---

---

3. Juan juega con una perinola de seis caras iguales como la que se observa a continuación:



Cada cara está marcada con una de las siguientes frases: “**TODOS PONEN**”, “**TOMA UNO**”, “**TOMA DOS**”, “**TOMA TODO**”, “**PON UNO**”, “**PON DOS**”.

¿Cuál es la probabilidad de que al hacer girar la perinola, salga en la cara de arriba “**TODOS PONEN**”?

- A.  $1/5$
- B.  $1/6$
- C.  $1/3$
- D.  $2/3$
- E. NO SE PUEDE DETERMINAR DICHA PROBABILIDAD

(FUENTE: Pregunta Tipo Saber 5<sup>o</sup> Cuadernillo 2012)

Justifica la respuesta:

---

---

---

---

4. Todos los lunes, menos festivos, juega la lotería del Tolima. Si el lotero te ofrece el Billete de lotería número 0000, ¿Lo compraría?

Si ( )                      No ( )

Justifica la respuesta:

---

---

---

---

5. En la función de un circo, un malabarista utiliza pelotas de igual forma y tamaño que guarda en una caja: 2 rojas, 4 verdes y 8 amarillas.

El número de posibilidades que tiene el malabarista de sacar una pelota ROJA de la caja es:

- La mitad del número de posibilidades de sacar una pelota amarilla.
- La cuarta parte del número de posibilidades de sacar una pelota verde.
- La mitad del número de posibilidades de sacar una pelota verde.
- La octava parte del número de posibilidades de sacra una pelota amarilla.
- No se puede determinar la posibilidad.

(FUENTE: Pregunta Tipo Saber 5<sup>o</sup> Cuadernillo 2012)

Justifica la respuesta:

---

---

---

6. Si tenemos una caja con 3 bolas blancas y 3 bolas negras, y tomamos simultáneamente (al azar) dos bolas de la caja, ¿qué es más probable?

- A. Tomar 2 bolas blancas
- B. Tomar 2 bolas negras
- C. Tomar 1 bola blanca y 1 bola negra
- D. Los tres eventos anteriores son igualmente probables
- E. No sé o no se puede determinar cuál de los tres eventos planteados tiene mayor probabilidad de ocurrir

Justifica la respuesta:

---

---

7. A una fiesta infantil asisten 50 invitados. Entre éstos se rifan 5 relojes de juguete, 15 pelotas y 10 rompecabezas.

El número de posibilidades de que un invitado gane una pelota es:

- A. El triple de posibilidades de ganar un reloj de juguete.
- B. Igual al número de posibilidades de ganar un rompecabezas
- C. La tercera parte del número de posibilidades de ganar un rompecabezas
- D. El doble del número de posibilidades de ganar un rompecabezas
- E. No sé o No se puede determinar la posibilidad que un invitado gane una pelota

(FUENTE: Pregunta Tipo Saber 5<sup>o</sup> Cuadernillo 2012)

Justifica la respuesta:

---

---

---

---

8. Observa las siguientes bolsas que contienen bolas blancas y negras. Si tomamos simultáneamente (al azar) **UNA** bola de cada bolsa, ¿qué es más probable?



Bolsa 1



Bolsa 2

- A. Sacar una bola blanca de la bolsa 1
- B. Sacar una bola blanca de la bolsa 2
- C. Los dos eventos anteriores son igualmente probables
- D. No se puede decidir cuál de los eventos anteriores tiene mayor probabilidad de ocurrir
- E. No sé o no se puede determinar que es más probable.

Justifica la respuesta:

---

---

---

---

9. Una urna contiene 4 bolas rojas, 3 bolas negras y 5 bolas blancas, todas de igual forma y tamaño. Pedro va a sacar una bola de la urna sin mirar. El número de posibilidades de que la bola que saque Pedro sea Roja es

- A. mayor el que el número de posibilidades de que tome una blanca.
- B. igual que el número de posibilidades de que tome bola negra.
- C. Igual que el número de posibilidades de que tome una bola blanca.
- D. Mayor que el número de posibilidades de que tome una bola negra.
- E. No sé o no se puede determinar la posibilidad de que la bola que saque Pedro sea roja.

(FUENTE: Pregunta Tipo Saber 5<sup>0</sup> Cuadernillo 2012)

Justifica la respuesta:

---

---

---

10. Observa la siguiente bolsa, la cual contienen bolas blancas y negras. Si tomamos al azar UNA bola de la bolsa ¿Qué es más probable?



- A. Sacar una bola BLANCA
- B. Sacar una bola NEGRA
- C. Los dos eventos anteriores son igualmente probables
- D. No se puede predecir
- E. No sé

Justifica la respuesta:

---

---

---

11. Una caja contiene 3 fichas rojas y una ficha verde. Una persona debe sacar, sin mirar, una ficha verde de esta caja para ganar una camiseta.

Para que las personas tengan la misma probabilidad de ganar o no una camiseta, se deben introducir en la caja.

- A. E fichas verdes.
- B. 3 fichas rojas.
- C. 2 fichas rojas.
- D. 2 fichas verdes
- E. No sé o no se puede determinar

(FUENTE: Pregunta Tipo Saber 5<sup>0</sup> Cuadernillo 2013)

Justifica la respuesta:

---

---

---

12. Una agencia de viajes realizará una rifa de un viaje a San Andrés de 5 días y cuatro noches con todos los gastos cubiertos para dos personas. Todos los boletos tienen CUATRO cifras. ¿Comprarías el número 1234 para ese sorteo?

- A.  Si
- B.  No

Justifica la respuesta:

---

---

---

13. Si Juan se gana la lotería del Tolima y un mes después la vuelve a ganar, podemos decir que Juan gana porque:

- A. Es Bendecido por el cielo
- B. Tiene mucha suerte
- C. solo fue coincidencia
- D. hubo trampa
- E. Otro \_\_\_\_\_

14. Luisa tiene en una cajita varios carretes de hilo del mismo tamaño, entre los cuales hay 8 rojos, 5 verdes y 7 azules. Si ella saca un carrete sin ver, ¿cuál es la probabilidad de que éste sea rojo o azul?

- A.  $7/50$
- B.  $13/20$
- C.  $1/10$
- D.  $3/4$
- E. No sé o no se puede determinar la probabilidad

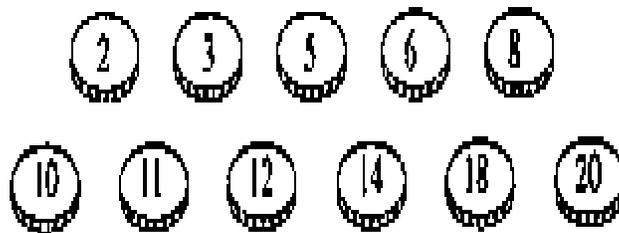
Justifica la respuesta:

---

---

---

15. Las once fichas que se muestran en el dibujo de abajo fueron puestas en una bolsa y mezcladas. Ana saca una ficha de la bolsa sin mirar, ¿cuál es la probabilidad que Ana saque una ficha con un número que sea múltiplo de 3?



A.  $1/11$

B.  $1/3$

C.  $4/11$

D.  $4/7$

E. No sé o no se puede determinar la probabilidad

Justifica la respuesta:

---

---

---

16. Explica qué significa para ti la palabra SUERTE.

---

---

---

---

17. ¿Haz utilizado AMULETOS?

A. Si

B. No

Explica cuál y para qué:

---

---

---

---

18. Existen personas afortunadas que frecuentemente ganan premios en rifas y juegos de azar. ¿A qué crees que se debe?

---

---

---

---

19. Redacta un párrafo donde expliques el significado que tiene para ti la palabra PROBABILIDAD.

---

---

---

**Anexo B. .** Hojas de trabajo

**HOJAS DE TRABAJO 1**  
**INSTITUCION EDUCATIVA ISMAEL PERDOMO – CAJAMARCA TOLIMA**  
**SEDE PILOTO N° 24**

Nombre del alumno: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

**ESTANDARES:**

- Conjeturo y pongo a prueba predicciones acerca de la posibilidad de ocurrencia de eventos
- Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos provenientes de observaciones, consultas o experimentos.

**DERECHO BASICO DE APRENDIZAJE (DBA):**

- Comprende la probabilidad de obtener ciertos resultados en situaciones sencillas

**MATRIZ DE REFERENCIA**

<b>COMPETENCIA</b>	<b>COMUNICATIVA</b>	<b>RAZONAMIENTO</b>	<b>RESOLUCION</b>
<b>APRENDIZAJE</b>	Expresar grado de probabilidad de un evento, usando frecuencias o razones, usando frecuencias o razones.	Establecer, mediante combinaciones o permutaciones sencillas, el número de elementos de un conjunto en un contexto aleatorio.  Conjeturar y argumentar acerca de la posibilidad de	Resolver situaciones que requieren calcular la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos.

---

ocurrencia de eventos

---

**EVIDENCIA**

Describir eventos como posibles, más posible, menos posible, igualmente posibles o imposibles.

Describir eventos como posibles, más posible, menos posible, igualmente posibles o imposibles.

Discutir la posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de eventos relacionados con experiencias cotidianas.

Interpretar la posibilidad de un evento a partir de un análisis de frecuencias.

Reconocer en contextos cotidianos (juego, deportes, compras, etc.) el número total de combinaciones o permutaciones en problemas sencillos.

Listar combinaciones o permutaciones que cumplan con condiciones dadas en un contexto aleatorio.

Estimar la probabilidad de un evento para resolver problemas en contextos de juego o eventos cotidianos a partir de una representación gráfica o tabular.

Calcular la probabilidad de un evento a partir de descripción de un experimento aleatorio sencillo.

---

**IDENTIFICAR EVENTOS ALEATORIOS O DE INCERTIDUMBRE**

A continuación aparece una lista de eventos, determine qué tipo de evento es: Aleatorio o Incertidumbre, justifica en cada caso la respuesta.

1. El nacimiento de un bebé.
2. El lanzamiento de una moneda al aire.
3. Un partido de fútbol entre los estudiantes de grado 4 contra estudiantes de grado 5, ¿Qué equipo es más probable que gane?
4. Dejar caer una piedra desde cierta altura.
5. El resultado del lanzamiento de un dado.
6. La probabilidad de ganar la lotería.

Un evento o experimento se considera aleatorio cuando:

---

---

---

---

Un evento o experimento se considera de incertidumbre cuando:

---

---

---

---

---

## HOJAS DE TRABAJO 2

### IDENTIFICAR EVENTOS ALEATORIOS SEGUROS, POSIBLES E IMPOSIBLES

A continuación debes completar si es Seguro, Posible e imposible, y porque en cada evento que se presentan:

1. Al lanzar una moneda al aire es \_\_\_\_\_ obtener como resultado SELLO, porque \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_
2. En una cartuchera hay lápices de color rojo, amarillo y verde, es \_\_\_\_\_ sacar de allí un lápiz de color negro, por que \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

3. Al lanzar un dado es \_\_\_\_\_ que salga un número entre 1 y 6, por que

\_\_\_\_\_

4. Al comprar una rifa con el número 99 que juega con las dos últimas cifras de la lotería del Tolima es \_\_\_\_\_, ganar por que \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

En una bolsa se introducen 2 pin pones blancos, 4 pin pones rojos, 2 azules, 1 negro y un cubo, si se quiere sacar uno al azar:



5. Es \_\_\_\_\_ que el pin pon sea de color azul, por que \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

6. Es \_\_\_\_\_ que el pin pon sea de color amarillo, por que \_\_\_\_\_

7. Es \_\_\_\_\_ que el pin pon sea de color blanco o rojo, por que \_\_\_\_\_

8. Es \_\_\_\_\_ que el pin pon sea de color azul o blanco o rojo \_\_\_\_\_

En una bolsa se introducen 4 bolas de color rojo, si se quiere extraer una al azar:



9. Es \_\_\_\_\_ que sea de color azul, por  
que \_\_\_\_\_

–

10. Es \_\_\_\_\_ que el pin pon sea de color rojo,  
por  
que \_\_\_\_\_

–

### HOJA DE TRABAJO 3

#### INSTITUCION EDUCATIVA ISMAEL PERDOMO – CAJAMARCA TOLIMA SEDE PILOTO N° 24

Nombre del alumno: \_\_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

### ACTIVIDAD 3. DETERMINAR LA PROBABILIDAD QUE OCURRA UN EVENTO

#### MATERIALES:

UNA MONEDA

UN DADO COLOR ROJO Y UN DADO COLOR VERDE

#### 1. JUEGO DE CARA O SELLO

Se juega con una moneda al cara o CARA  
sello, los dos participantes eligen el  
lado que desean y lo anuncian. Se  
lanza la moneda a lo alto y gana aquel  
que acertó en pedir el lado del que  
cayó la moneda.



SELLO

Para lanzar la moneda, ésta se coloca en la mano estirada, sobre la punta de los dedos, de manera que al desprenderse, ésta dé una vuelta de campana. La moneda siempre se lanza hacia arriba en dirección vertical.

Las posibilidades o casos posibles al caer una moneda son dos: \_\_\_\_\_ o \_\_\_\_\_, a los casos posibles se le denomina Espacio Muestral.

La probabilidad de que ocurra un evento está determinado por la razón entre los casos o posibilidades favorables y los casos o posibilidades totales, la probabilidad la podemos representar y hallar mediante la expresión:

$$P(a) = \frac{\text{casos o posibilidades favorables}}{\text{casos o posibilidades totales}}$$

Donde:

P(a) es la probabilidad a determinar

(a) es el evento a determinar

Ejemplo

En el juego cara o sello, ¿Cuál es la probabilidad de ganar con SELLO?

P(sello): Probabilidad de ganar con SELLO

Casos o Posibilidades favorables de ganar con SELLO 1

Casos o Posibilidades totales 2, cara o sello

$$P(\text{sello}) = \frac{\text{casos o posibilidades favorables}}{\text{casos o posibilidades totales}} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

Luego la probabilidad de ganar con SELLO es del 50% es decir la mitad de la probabilidad.

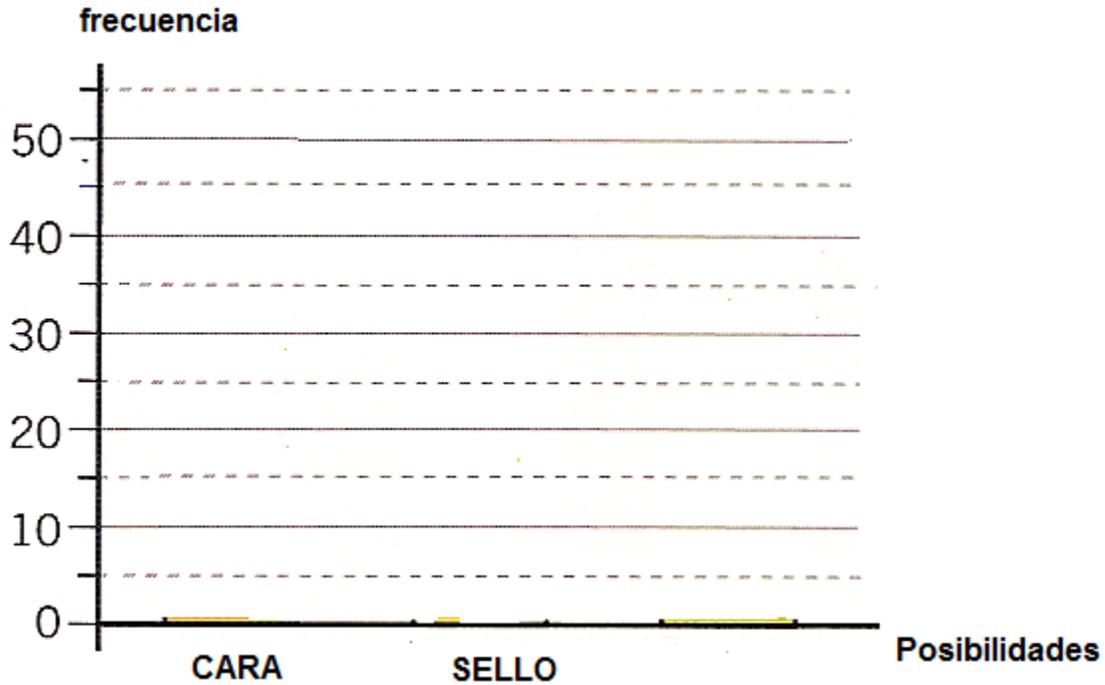
2. Con una moneda de cualquier denominación, realiza el lanzamiento de está al aire y en forma vertical, 10 veces y registramos los resultados en la siguiente tabla. Si el resultado es Cara colocamos C y si es Sello S

Lanzamiento	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	TOTAL
Posibilidad											
Cara											
Sello											

Ahora formamos grupos de 5 estudiantes, compartimos los resultados y los registramos en la siguiente tabla:

Resultados	Estudiante	Estudiante	Estudiante	Estudiante	Estudiante	TOTAL
Posibilidades	1	2	3	4	5	
CARA						
SELLO						
					TOTAL	50

Representemos los resultados obtenidos en un diagrama de barras.



### 3. ¿Qué ES UN DADO?

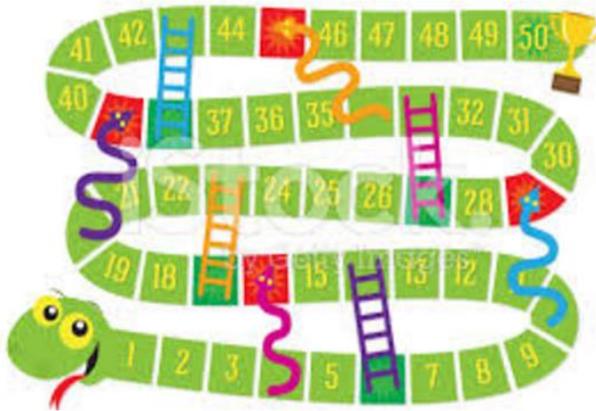
Los dados habituales son  **cubos** pequeños, cuyas caras están numeradas de 1 a 6 (normalmente mediante disposiciones de puntos), de tal manera que las caras opuestas suman 7 puntos.



Durante el tiempo ha habido muchos juegos de dados y muchas variaciones sobre ellos. Algunos juegos de dados son: PARQUES, MONOPOLY, ESCALERA, CASINOS.

#### JUEGO DE LA ESCALERA

En un juego de escalera se juega con un solo dado, donde se recorre cada espacio con una ficha propia y se avanza de acuerdo al número obtenido al lanzar el dado, si cae en una casilla donde aparece la parte inferior de la



escalera, se avanza hasta la parte superior a la casilla donde termina la escalera, si se cae en la casilla donde aparece la cabeza de la culebra se desciende hasta la parte inferior de esta. Gana quien llegue primero a la última casilla.

En el juego de la escalera se juega con un solo dado analicemos este evento: (cada estudiante debe tener un dado)

1. Dibujemos los posibles valores que podemos obtener, al lanzar de un dado.



Los anteriores valores reciben el nombre de \_\_\_\_\_

2. Determinemos la probabilidad que al lanzar un dado se obtenga un 4.



Recordar:

$$P(a) = \frac{\text{casos o posibilidades favorables}}{\text{casos o posibilidades totales}}$$

3. Determinemos la probabilidad que al lanzar un dado el resultado que podemos obtener sea un número impar.

Las posibilidades favorables son:

Las posibilidades totales son.

La probabilidad de obtener un número impar es:

4. Determinemos la probabilidad que al lanzar un dado el resultado que podemos obtener sea un número par.

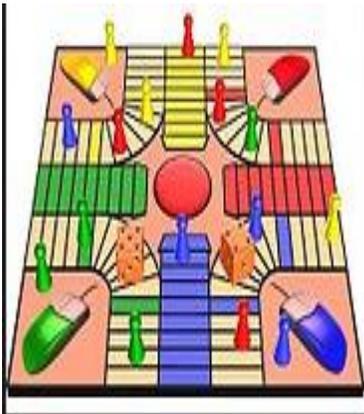
Las posibilidades favorables son:

Las posibilidades totales son.

La probabilidad de obtener un número par es:

5. Sumemos la probabilidad que al lanzar un dado el resultado obtenido sea un número impar con la probabilidad que al lanzar un dado el resultado obtenido sea un número par.

Que podemos concluir:



En un juego de parques, por ejemplo, se lanzan dos dados y se suman los puntos que aparecen en la cara superior, para avanzar con una ficha.

Jaime participa en un campeonato de juego de parques, para poder determinar la probabilidad de ganar, debe contestar las siguientes preguntas, vamos a ayudar a Jaime: (cada estudiante debe tener dos dados de diferente color).

1. Al lanzar los dos dados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior, ¿los posibles resultados son?

\_\_\_\_ , \_\_\_\_ , \_\_\_\_ , \_\_\_\_ , \_\_\_\_ , \_\_\_\_ , \_\_\_\_ , \_\_\_\_ , \_\_\_\_ , \_\_\_\_ , \_\_\_\_

2. ¿Es posible, imposible o seguro, al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea 1? Justificar.
3. ¿Es posible, imposible o seguro, al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea 13? Justificar.
4. ¿Es posible, imposible o seguro, al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea 9? Justificar.
5. ¿Cuáles son las posibles combinaciones que al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea 7? Completa la siguiente tabla.

DADO 1	DADO 2	DADO 1 + DADO 2
1	6	$1 + 6 = 7$
	5	
3		$3 + \underline{\quad} = 7$
	2	$\underline{\quad} + 2 = 7$
TOTAL DE		
POSIBILIDADES		

6. ¿Cuáles son las posibles combinaciones que al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea 3? Completa la siguiente tabla.

DADO 1	DADO 2	DADO 1 + DADO 2
1	2	$1 + 2 = 3$
TOTAL DE		
POSIBILIDADES		

Determinemos las siguientes probabilidades:

7. Al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea 7
8. Al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea 3
9. ¿Qué es más probable al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea 3 o sea 7? Justificar.

10. Al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea múltiplo de 3.

11. Al lanzar los dos lados y sumar los puntos que aparecen en la cara superior el resultado sea un número par.

12. Defina que es posibilidad: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

13. Defina que es probabilidad: \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

**Anexo C. Encuesta De Salida**

**ENCUESTA DE SALIDA**  
**INSTITUCION EDUCATIVA ISMAEL PERDOMO – CAJAMARCA TOLIMA**  
**SEDE PILOTO N° 24**

**Nombre del ESTUDIANTE:** \_\_\_\_\_ **Edad:**  
\_\_\_\_\_ **Fecha:**

**IMPORTANTE**

La encuesta que va a contestar es parte de un proyecto de investigación. El objetivo es desarrollar el pensamiento probabilístico en los estudiantes. Tenga en cuenta las siguientes sugerencias para contestar.

6. Lea detenidamente cada Pregunta
7. Una vez que entiendas la pregunta, selecciona una sola opción como respuesta.
8. Existe un espacio para que justifiques detalladamente tu respuesta. Si requieres realizar alguna operación, escríbela a un lado de la pregunta.
9. En caso que no sepas la respuesta, selecciona la opción: No sé.
10. Conteste con lapicero negro la siguiente encuesta.

**CUESTIONARIO**

1. Pedro juega con un dado, Si lo lanza. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga un tres o un cinco?

- A. No se puede predecir el resultado.
- B. Depende de la velocidad con que se lance el dado.
- C. Depende de la suerte.
- D.  $1/6$
- E.  $1/3$
- F. No sé.

Justifica la respuesta:

---

---

---

2. Si lanzamos dos dados simultáneamente y sumamos los puntos de la cara superior. ¿Qué es más probable?

- A.  Obtener un número impar.
- B.  Obtener un número par.
- C.  Los dos eventos anteriores son igualmente probables.
- D.  No se puede decidir cuál evento tiene mayor probabilidad de ocurrir.
- E.  No sé

Justifica la respuesta:

---

---

---

3. Javier y Carlos están jugando a Cara y Sello con una moneda. En 30 lanzamientos han caído 20 caras y 5 sellos. En el siguiente Lanzamiento, ¿qué es más probable?

- A.  Obtener Cara.
- B.  Obtener un Sello.
- C.  Los dos eventos anteriores son igualmente probables.
- D.  No se puede decidir cuál evento tiene mayor probabilidad de ocurrir.
- E.  No sé.

Justifica la respuesta:

---

---

---

4. Si Juan lanza un dado y una moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener un dos y un sello?

- A. No se puede predecir el resultado.
- B. Depende de la cara del dado y la moneda que se ponga hacia arriba.
- C. Depende de la suerte.
- D.  $1/12$
- E.  $1/8$
- F. NO SÉ

Justifica la respuesta:

---

---

---

5. Observa la siguiente bolsa, la cual contiene bolas blancas y negras. Si tomamos al azar UNA bola de la bolsa. ¿Qué es más probable?



- A. ( ) Sacar una bola BLANCA.
- B. ( ) Sacar una bola NEGRA.
- C. ( ) Los dos eventos anteriores son igualmente probables.
- D. ( ) No se puede predecir el resultado.
- E. ( ) No sé.

Justifica la respuesta:

---

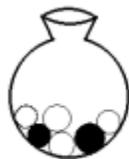


---

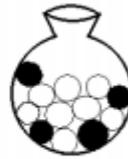


---

6. Observa las siguientes bolsas que contienen bolas blancas y negras. Si tomamos simultáneamente (al azar) **UNA** bola de cada bolsa, ¿qué es más probable?



*Bolsa 1*



*Bolsa 2*

- A. Sacar una bola blanca de la bolsa 1
- B. Sacar una bola blanca de la bolsa 2
- C. Los dos eventos anteriores son igualmente probables
- D. No se puede decidir cuál de los eventos anteriores tiene mayor probabilidad de ocurrir
- E. No sé o no se puede determinar que es más probable.

Justifica la respuesta:

---



---



---



---

7. Cesar y sus amigos están jugando a la perinola. Cesar lleva siete juegos consecutivos obteniendo “Toma Todo”, es decir, ganando todo el dinero de la apuesta.

Esto es:

- A. Por bendición del cielo
- B. Por suerte
- C. Por coincidencia
- D. Por qué hubo trampa
- E. Por qué utiliza un amuleto
- F. Otra causa, cuál? \_\_\_\_\_
- G. No se

Justifica la respuesta:

---

---

---

---

8. Entre los finalistas de un concurso de televisión se sorteará un automóvil de lujo último modelo. Los participantes son Erika, Alondra y Eduardo, y la mecánica del juego consiste en meter en una cajita, un papel por cada uno de los participantes con su nombre y tres papeles marcados con una X. La conductora del programa sacará sin ver en el interior de la caja, un papel: si es una X, regresa el papel a la caja y vuelve a intentar nuevamente; si es el nombre de uno de los participantes, será quien gane el automóvil. Esto se hará durante tres veces como máximo, es decir, si en tres ocasiones se extrae una X, no habrá ganador esta vez y el automóvil se rifará en el siguiente concurso. ¿En cuál extracción hay más probabilidad de que gane alguno de los concursantes?

- A. En la primera extracción.
- B. En la segunda extracción.
- C. En la tercera extracción.

- D. Es la misma probabilidad en cualquiera de las tres extracciones.
- E. No se puede decidir en cuál de las tres extracciones se tiene mayor probabilidad de que gane alguno de los participantes.
- F. No sé.

Justifica la respuesta:

---

---

---

---

9. Si en el problema anterior cada vez que se saca una X ya no se regresa a la caja, ¿En cuál extracción hay más probabilidad de que gane alguno de los concursantes?

- A. En la primera extracción
- B. En la segunda extracción
- C. En la tercera extracción
- D. Es la misma probabilidad en cualquiera de las tres extracciones
- E. No se puede decidir en cuál de las tres extracciones se tiene mayor probabilidad de que gane alguno de los participantes.
- F. No sé

Justifica la respuesta:

---

---

---

---

10. José vende boletos de la Lotería del Tolima, juega sin serie, y le ofrece a su amigo Marcos los últimos tres boletos que le quedan: 1234, 3624 y el 6666. ¿Alguno de estos números tiene mayor probabilidad de ganar?

- A. El 1234.
- B. El 3624.
- C. El 66666.
- D. Los tres boletos tienen la misma probabilidad de ganar.
- E. No se puede decidir cuál boleto tiene mayor probabilidad de ganar.
- F. No sé.

Justifica la respuesta:

---

---

---

---

	<b>SISTEMA DE GESTION DE LA CALIDAD</b> <b>FORMATO DE AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	Página 1 de 3
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 02

Los suscritos:

<b>HAROL</b>	<b>ALBERTO</b>	<b>OVIEDO</b>	<b>93'379.805 de Ibagué</b>
<b>CASTIBLANCO</b>			
_____			con C.C N° _____
_____			con C.C N° _____
_____			con C.C N° _____
_____			con C.C N° _____
_____			con C.C N° _____

Manifiesto (an) la voluntad de:

Autorizar

No Autorizar  Motivo: \_\_\_\_\_

La consulta en físico y la virtualización de mi OBRA, con el fin de incluirlo en el repositorio institucional de la Universidad del Tolima. Esta autorización se hace sin ánimo de lucro, con fines académicos y no implica una cesión de derechos patrimoniales de autor.

Manifestamos que se trata de una OBRA original y como de la autoría de LA OBRA y en relación a la misma, declara que la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, se encuentra, en todo caso, libre de todo tipo de responsabilidad, sea civil, administrativa o penal (incluido el reclamo por plagio).

Por su parte la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA se compromete a imponer las medidas necesarias que garanticen la conservación y custodia de la obra tanto en espacios físico como virtual, ajustándose para dicho fin a las normas fijadas en el Reglamento de Propiedad Intelectual de la Universidad, en la Ley 23 de 1982 y demás normas concordantes.

La publicación de:

Trabajo de grado	<input checked="" type="checkbox"/>	Artículo	<input type="checkbox"/>	Proyecto de Investigación	<input type="checkbox"/>
Libro	<input type="checkbox"/>	Parte de libro	<input type="checkbox"/>	Documento de conferencia	<input type="checkbox"/>
Patente	<input type="checkbox"/>	Informe técnico	<input type="checkbox"/>		
Otro: (fotografía, mapa, radiografía, película, video, entre otros)					<input type="checkbox"/>

Fecha Versión 02: 04-11-2016

	<b>SISTEMA DE GESTION DE LA CALIDAD</b>  <b>FORMATO DE AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	Página 2 de 3
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 02

Producto de la actividad académica/científica/cultural en la Universidad del Tolima, para que con fines académicos e investigativos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad del Tolima. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al artículo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca Rafael Parga Cortes de la Universidad del Tolima.

De conformidad con lo establecido en la Ley 23 de 1982 en los artículos 30 “...*Derechos Morales. El autor tendrá sobre su obra un derecho perpetuo, inalienable e irrenunciable*” y 37 “...*Es lícita la reproducción por cualquier medio, de una obra literaria o científica, ordenada u obtenida por el interesado en un solo ejemplar para su uso privado y sin fines de lucro*”. El artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “*los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores*” y en su artículo 61 de la Constitución Política de Colombia.

- Identificación del documento:

Título completo: RESOLUCION DE PROBLEMAS COMO ESTRATEGIA PEDAGOGICA PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS MATEMATICAS

- Trabajo de grado presentado para optar al título de:

**MAESTRIA EN EDUCACION**

- Proyecto de Investigación correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado “Trabajo de Grado”):

\_\_\_\_\_

- Informe Técnico correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado “Trabajo de Grado”):

\_\_\_\_\_

- Artículo publicado en revista:

\_\_\_\_\_

- Capítulo publicado en libro:

\_\_\_\_\_

- Conferencia a la que se presentó:

\_\_\_\_\_

Fecha Versión 02: 04-11-2016

	<b>SISTEMA DE GESTION DE LA CALIDAD</b> <b>FORMATO DE AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL</b>	Página 3 de 3
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 02

Quienes a continuación autentican con su firma la autorización para la digitalización e inclusión en el repositorio digital de la Universidad del Tolima, el:

Día: 21 Mes: DICIEMBRE Año: 2016

Autores:

Firma

Nombre:	HAROL ALBERTO OVIEDO CASTIBLANCO		C.C.	93'379.805
Nombre:	_____	_____	C.C.	_____
Nombre:	_____	_____	C.C.	_____
Nombre:	_____	_____	C.C.	_____

El autor y/o autores certifican que conocen las derivadas jurídicas que se generan en aplicación de los principios del derecho de autor.

Fecha Versión 02: 04-11-2016