

Jeśli próbuje się ocenić zmiany poziomu ryzyka jednego papieru wartościowego w różnych okresach czasu, wybór miary jest właściwie obojętny. Praktyczne problemy z oceną ryzyka zaczynają się, gdy próbuje się porównać poziom ryzyka różnych papierów wartościowych w tym samym okresie czasu, a takie porównanie jest kluczowym etapem zarządzania portfelem papierów wartościowych. Warto tutaj zwrócić uwagę na fakt, iż dla cen akcji najważniejszą z wymienianych miar będzie współczynnik zmienności, gdyż wartość odchylenia standardowego zależy od poziomu cen, natomiast dla szeregów stóp zwrotu najważniejszą miarą będzie odchylenie standardowe. W dalszej części pracy problem ten ukazany zostanie od strony danych rzeczywistych.

Oprócz miar klasycznych współczesna statystyka dostarcza badaczowi także szeregu innych nieklasycznych narzędzi oceny ryzyka. Są to np. narzędzia teorii chaosu. Narzędzia pochodzące z teorii chaosu nie są jeszcze powszechnie stosowane wśród badaczy, głównie ze względu na trudności powstające przy obliczeniach oraz częste niejasności interpretacyjne. Niniejsza praca ma na celu przedstawienie jednego z narzędzi teorii chaosu

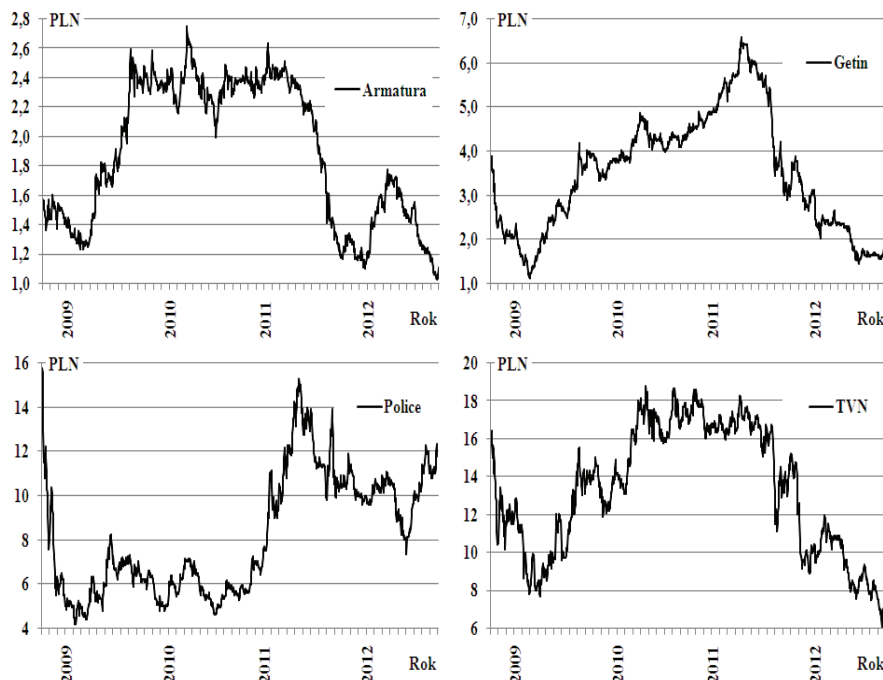
– wymiaru fraktalnego w kontekście oceny ryzyka oraz ewentualnego wykorzystania w doborze papierów wartościowych do portfela. Jedną z najpopularniejszych metod szacowania wymiaru fraktalnego jest metoda wariacyjna VM³. Jej rozwinięciem jest metoda segmentowo-wariacyjna SVM zaproponowana przez Zwolankowską⁴. Metody te wymagają jednak od badacza bardzo dobrej znajomości matematyki. W pracy zaprezentowano autorską metodę szacowania wymiaru fraktalnego metodą podziału pola. Metodę tę charakteryzuje się mniej skomplikowanym aparatem matematycznym oraz bardzo przejrzystą interpretacją. Ponadto ta sama metoda może być zastosowana zarówno do oceny ryzyka w sytuacji, gdy badacz analizuje szeregi cen lub szeregi stóp zwrotu.

Ocena ryzyka za pomocą odchylenia standardowego oraz współczynnika zmienności

Analizę empiryczną przeprowadzono na przykładzie czterech spółek notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie: Armatura Kraków S.A., Getin Holding S.A., Zakłady Chemiczne Police S.A. oraz TVN S.A. Okres badań obejmował 1000 dni sesyjnych od 1 października 2008 roku do 20 września 2012 roku. Na rysunku 1 przedstawiono szeregi czasowe cen analizowanych papierów wartościowych.

³ B. Dubuc, J.F. Roques-Carmes, C. Tricot, S.W. Zucker, *Evolving the Fractal Dimension of Profiles*, Physical Review A 1989, Vol. 39, s. 1506.

⁴ M. Zwolankowska, *Fraktalna geometria polskiego rynku akcji*, Uniwersytet Szczeciński, Rozprawy i Studia, t. 382, s. 63.



Rys. 1. Szeregi czasowe cen analizowanych akcji

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GPW w Warszawie.

Z wykresu odczytać można, iż akcje trzech spośród czterech analizowanych spółek zachowywały się podobnie: Armatura, Getin i TVN. Inaczej w badanym okresie zachowywały się akcje Polic. W okresach wzrostu cen trzech wskazanych akcji, akcje Polic traciły na wartości. W tabeli 1 zaprezentowano podstawowe charakterystyki badanych szeregów czasowych. Biorąc pod uwagę zróżnicowanie bezwzględne zmian cen (mierzone odchyleniem standardowym), okazuje się, iż najmniej od poziomu przeciętnego odchyliły się akcje Armatury, następnie Getinu i Polic, a najsilniej akcje TVN. Jednak akcje TVN były średnio najdroższe. Generalnie okazuje się, iż wraz ze wzrostem wartości średniej, także rośnie odchylenie standardowe, co jest zjawiskiem naturalnym. Dlatego też lepiej jest w przypadku szeregu cen analizę zmienności przeprowadzić za pomocą współczynnika zmienności. I tutaj okazuje się, iż największą względną zmiennością charakteryzowały się akcje Getinu, potem Polic, a zmienność cen akcji Armatury i TVN była wyraźnie mniejsza.

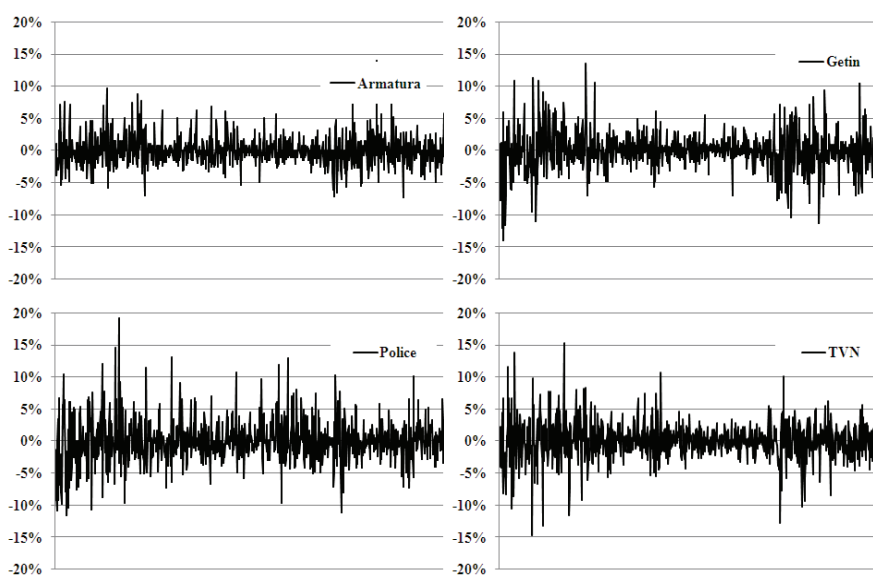
Tabela 1. Ocena ryzyka – miary klasyczne, szeregi cen

Ocena ryzyka (szeregi cen)	Spółka			
	Armatura	Getin	Police	TVN
średnia	1,89	3,49	8,20	13,26
od.stand.	0,48	1,33	2,72	3,35
wsp.zm.	25,4%	38,2%	33,1%	25,2%

Źródło: obliczenia własne.

Z punktu widzenia inwestora jednak zamiast analizy szeregu cen lepiej jest badać stopy zwrotu, gdyż inwestor w praktyce zainteresowany jest wzrostem względnym.

Na rysunku 2 zamieszczono dzienne stopy zwrotu analizowanych spółek, a w tabeli 2 przedstawiono podstawowe charakterystyki tych szeregów czasowych.



Rys. 2. Szeregi czasowe stóp zwrotu analizowanych akcji
Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GPW w Warszawie.

Okazuje się, iż w badanym okresie tylko akcje Police charakteryzowały się dodatnią średnią dzienną stopą zwrotu. Jednak z punktu widzenia tematyki pracy najważniejsze jest kształtowanie się odchylenia standardowego. Okazuje się, dla akcji Police odchylenia dziennych stóp zwrotu od poziomu średniego były największe, następnie dla TVN-u i Getinu, a najmniejszym odchyleniem charakteryzowały się akcje Armatury. Sytuacja ta bardzo dobrze widoczna jest na rysunku 2. Mimo, iż formalnie możliwe jest tutaj wyznacza-

nie współczynnika zmienności, to jednak jego interpretacja pozbawiona jest sensu.

Tabela 2. Ocena ryzyka – miary klasyczne, szeregi stóp zwrotu

Ocena ryzyka (szeregi stóp zwrotu)	Spółka			
	Armatura	Getin	Police	TVN
średnia	-0,01%	-0,03%	0,02%	-0,05%
od. stand.	2,12%	2,79%	3,25%	2,84%
wsp. zm.	-17140,4%	-8176,2%	13860,3%	-6084,7%

Źródło: obliczenia własne.

Ta bardzo prosta analiza uwidacznia podstawowy problem, z którym zmierzyć musi się inwestor. Okazuje się, iż klasyfikacja akcji ze względu na poziom ryzyka zależy od przyjętej miary oceny ryzyka. Jak można było zauważyć, kolejność akcji jest inna przy wykorzystaniu współczynnika zmienności dla cen oraz odchylenia standardowego dla stóp zwrotu. Poza tym jeśli chodzi o odchylenie standardowe stóp zwrotu, to dość łatwo jest ocenić poziom ryzyka z ich wykresu, lecz już w oparciu o wykres cen, trudno jest taką ocenę przeprowadzić. Zaprezentowana dalej w pracy metoda ma uczynić ten problem prostszym.

Wymiar fraktalny szeregów czasowych

Geometria euklidesowa podaje wymiar przestrzeni, w której umieszczony jest szereg czasowy. Przestrzenią tą jest płaszczyzna o wymiarze euklidesowym – 2. Rozpatrując natomiast trajektorię szeregu czasowego jako łamaną, otrzymujemy wymiar euklidesowy – 1. Odchodząc od wymiaru euklidesowego można zauważyć, że wykres szeregu czasowego nie wypełnia całej płaszczyzny, na której został umieszczony, zatem jego wymiar będzie mniejszy od 2 i różny od 1, gdyż jest to wymiar euklidesowy prostej, a szeregi czasowe nie mają na ogół kształtu linii prostej.

Rozwiązaniem tej niedogodności jest wymiar fraktalny, scharakteryzowany przez Petersa: *Wymiar fraktalny, który opisuje, w jaki sposób obiekt (lub szereg czasowy) wypełnia swoją przestrzeń, jest wynikiem wszystkich czynników wpływających na system, którego wytworem jest dany obiekt (szereg czasowy)*⁵.

Wymiar fraktalny oznacza się przez D i nie musi on być liczbą całkowitą. Dla wykresów szeregów czasowych przyjmuje wartości z przedziału $<1; 2>$. Wartość 1 wymiar szeregu czasowego przyjmować będzie wówczas, gdy wykres będzie miał kształt linii prostej, a wartość 2, gdy będzie wypełniał pewien obszar dwuwymiarowy na płaszczyźnie. W praktyce wartości skrajne nie są osiągalne.

⁵ E.E. Peters, *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa 1997, s. 58.

Skoro wymiar fraktalny ma opisywać, jak szereg czasowy wypełnia obszar, innymi słowy – jak zagęszcza się na płaszczyźnie, to większe zagęszczenie będzie powodować zwiększony wymiar fraktalny, a mniejsze zagęszczenie spowoduje mniejszy wymiar fraktalny. Dla szeregów czasowych oznacza to, że częste zmiany w różnych kierunkach będą powodować zwiększenie wymiaru i szereg będzie bardziej wypełniał płaszczyznę, a szeregi jednokierunkowe, z małą liczbą zmian, będą miały mniejsze wymiary fraktalne, ich kształty zaś będą bardziej zbliżone do kształtu prostej. Szeregi, w których występują częste zmiany w różnych kierunkach charakteryzuje zjawisko powrotu do średniej, a szeregi o małej liczbie zmian – zjawisko podtrzymania trendu. Odpowiednie wnioski można jednak wysnuć dopiero po obserwacji danych empirycznych.

Przykład zastosowania wymiaru fraktalnego do zjawisk naturalnych podaje Mandelbrot⁶. Problem dotyczy pomiaru długości linii brzegowej. Wynik zależy od długości miarki: im miarka jest krótsza, tym wynik dokładniejszy, gdyż pozwala uchwycić więcej krzywizn. Wymiar fraktalny umożliwia odpowiedź na pytanie, jak postrzępione są linie brzegowe. Im linie brzegowe są bardziej postrzępione, tym ich wymiar fraktalny jest większy. E. Peters podaje np. wymiar fraktalny linii brzegowej Norwegii – 1,52 i linii brzegowej Wielkiej Brytanii – 1,26⁷. Wynik ten jest zgodny z obserwacją mapy – linia brzegowa Norwegii jest bardziej postrzępiona od linii brzegowej Wielkiej Brytanii, a więc jej wymiar fraktalny jest większy i bardziej zbliżony do 2.

Geometryczny sposób wyznaczenia wymiaru fraktalnego

Jeden ze sposobów znalezienia wymiaru fraktalnego szeregów czasowych podaje E. Peters⁸: Wymiar fraktalny ustala się mierząc stopień postrzępienia linii. Należy policzyć liczbę kół o określonej średnicy, które potrzebne są do pokrycia całej linii. Następnie trzeba zmniejszyć ustaloną średnicę kół i powtórzyć obliczenia. Po przeprowadzeniu odpowiedniej liczby takich operacji można zauważyć, że liczba kół związana jest wykładniczo z długością promienia kół następującą relacją:

$$N_r = (2r)^D, \quad (1)$$

gdzie:

N_r – najmniejsza liczba kół przy ustalonym r ,

r – promień,

D – wymiar fraktalny,

stąd wymiar fraktalny D jest współczynnikiem kierunkowym prostej regresji

$$\log N_r = D \log(2r). \quad (2)$$

⁶ B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, American Journal of Physics, V. 51, Issue 3, 1983.

⁷ E.E. Peters, *Teoria chaosu...*, op. cit., s. 60.

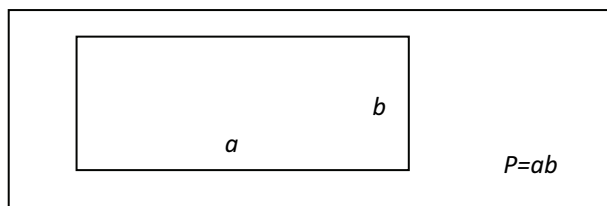
⁸ Ibidem.

Jest to jednak mało efektywny sposób wyliczenia wymiaru fraktalnego, gdyż wymaga wielu geometrycznych konstrukcji. Podobnie liczy się wymiar fraktalny metodą pudełkową BCM, z tym że zamiast kół zlicza się kwadraty o określonej długości boku potrzebne do pokrycia wykresu szeregu czasowego.

Szacowanie ryzyka metodą podziału pola

Autorska metoda szacowania wymiaru fraktalnego przedstawiona w niniejszym opracowaniu łączy elementy metod segmentowo-wariacyjnej oraz tradycyjnych metod geometrycznych. Podobnie jak w metodzie segmentowo-wariacyjnej wykres szeregu czasowego pokrywany będzie przez prostokąty, samo szacowanie wymiaru fraktalnego będzie natomiast odbywać się poprzez szacowanie współczynnika regresji podobnie jak w metodach geometrycznych.

Należy założyć, że ma się do dyspozycji kawałek płaszczyzny w kształcie prostokąta o podstawie a i wysokości b . Pole tego prostokąta będzie wynosić $P=ab$ (rysunek 3).

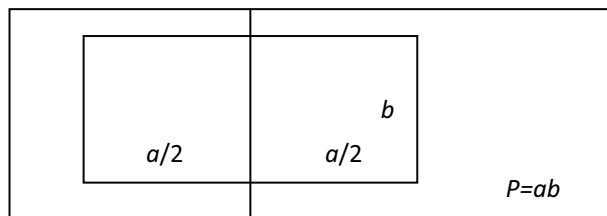


Rys. 3. Prostokąt o polu P
Źródło: opracowanie własne.

Prostokąt ten zostanie podzielony na połowy, dlatego też pole P nazwiemy pierwotnym (przed podziałem). Następnie dzieli się pierwotny prostokąt na dwie równe części pionową prostą (rysunek 4).

Łączne pole powstałych dwóch prostokątów będzie wynosić p , i $p=P$, ponieważ:

$$\frac{a}{2} \cdot b + \frac{a}{2} \cdot b = \frac{2ab}{2} = ab = P \quad (3)$$

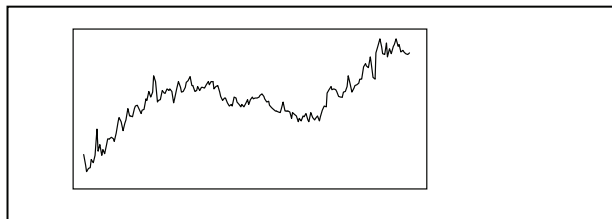


Rys. 4. Prostokąt o polu P po podziale
Źródło: opracowanie własne.

Kolejne przepoławianie prostokątów nie zmieni faktu, że suma pól zawsze będzie wynosić P . Oznacza to, że suma pól P po podziale prostokąta na dowolną liczbę równych prostokątów pionowymi liniami będzie taka sama, jak suma pól p po podziale dwukrotnie gęstszym od danego (pierwotnym może być podział np. na trzy prostokąty, a następny na sześć). Zatem dla dowolnego podziału zachodzi tutaj związek:

$$p = 2 \cdot \frac{P}{2} \quad (4)$$

W prostokącie należy umieścić wykres szeregu czasowego.



Rys. 5. Szereg czasowy na płaszczyźnie.
Źródło: opracowanie własne.

Niech szereg czasowy ma długość N , wtedy pole obszaru zajmowanego przez szereg można wyliczyć następująco:

$$P = N \cdot (x_{\max} - x_{\min}), \quad (5)$$

gdzie: x_{\max} i x_{\min} są odpowiednio największą i najmniejszą wartością w szeregu.

Należy podzielić prostokąt, zajmowany przez szereg czasowy, pionową prostą na połowy i znaleźć sumę pól p powstałych połówek, stosując wzór (5) do każdej połowki:

$$p = \frac{N}{2} \cdot (x_{\max_1} - x_{\min_1}) + \frac{N}{2} \cdot (x_{\max_2} - x_{\min_2}) \quad (6)$$

Pomiędzy p a P zachodzi nierówność:

$$p \leq P. \quad (7)$$

Powtarzając czynność przepoławiania skończoną ilość razy, za każdym razem okaże się, że suma pól połówek w stosunku do sumy pól pierwotnych jest od nich nie większa. Oznacza to, że przy dowolnym podziale pierwotnym na k części pole zajmowane przez wykres szeregu będzie wynosić:

$$P_k = \frac{N}{k} \sum_{i=1}^k (x_{\max_i} - x_{\min_i}), \quad (8)$$

a przy podziale na $2k$ części:

$$p_{2k} = \frac{N}{2k} \sum_{i=1}^{2k} (x_{\max_i} - x_{\min_i}), \quad (9)$$

Pomiędzy P_k i p_{2k} zachodzi nierówność:

$$p_{2k} \leq 2 \cdot \frac{P_k}{2}. \quad (10)$$

Równość we wzorze 10 zachodzi jedynie dla wykresów szeregów czasowych całkowicie wypełniających swoją płaszczyznę. Jeżeli szereg będzie miał kształt linii prostej to pomiędzy p a P zachodzić będzie równość:

$$p_{2k} = 1 \cdot \frac{P_k}{2}. \quad (11)$$

Równość ta zachodzi także dla łamanej począwszy od pewnego podziału. Dla dowolnego szeregu:

$$p_{2k} = D \cdot \frac{P_k}{2}, \quad (12)$$

gdzie: D zawierać się będzie w przedziale $\langle 1; 2 \rangle$ i będzie tym większe im kształt trajektorii szeregu czasowego będzie bardziej postrzępiony, czyli im częściej w szeregu występować będzie zmiana trendów na przeciwne. Wartość D natomiast będzie tym bliższa 1, im kształt szeregu bliższy będzie prostej, czyli im mniej będzie w szeregu zmian trendów na przeciwne. Jeśli w układzie współrzędnym na osi x będzie się odkładać wartości $P/2$, a na osi y wartości p , to wartość D będzie współczynnikiem regresji prostej oszacowanej dla punktów $(P/2; p)$. Tak zdefiniowania wartość D może być traktowana jako miara postrzępienia szeregów, czyli jako wymiar fraktalny szeregów.

W praktycznym zastosowaniu dla danych giełdowych na podstawie wartości wymiaru fraktalnego można wnioskować o ryzyku inwestycyjnym.

Przykład 1. Zakłada się, że szereg o $N=100$ ma następującą postać: 1, 2, 1, 2, 1, 2 itd. Dla całego szeregu $N=100$, $x_{\max}=2$, $x_{\min}=1$, stąd $P=100$. Po przepołowieniu szeregu otrzymuje się dwa szeregi długości 50, w których $x_{\max}=2$, $x_{\min}=1$. Pole każdego jest równe 50, a suma $p=100$. Szeregi długości 50 są

z kolei pierwotnymi dla szeregów długości 25, w których $x_{\max}=2$, $x_{\min}=1$, a stąd pole każdego prostokąta jest równe 25, a suma 100. Jest to jeden z możliwych podziałów szeregu długości 100 na połowy. Drugi podział – to podział najpierw na szeregi długości 20, potem 10, a następnie 5. W każdym z tych przypadków suma pól równa jest 100. Przeprowadzając oszacowanie wymiaru fraktalnego D dostajemy wartość 2, co jest równoznaczne z tym, że powyższy szereg zajmuje całą swoją płaszczyznę, a to oznacza także, że mamy do czynienia ze zjawiskiem powrotu do średniej.

Tabela 3. Pola zajmowane przez szereg w kolejnych podziałach szeregu z przykładu 1

N	$N/2$	P	p
100	50	100	100
50	25	100	100
20	10	100	100
10	5	100	100

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 2. Zakłada się, że szereg o $N=100$ ma następującą postać: 1, 2, 3, 4 itd. Dla całego szeregu $N=100$, $x_{\max}=100$, $x_{\min}=1$, stąd $P=9900$. Po przepowinieniu szeregu otrzymujemy dwa szeregi długości 50, w pierwszym $x_{\max}=50$, $x_{\min}=1$, w drugim $x_{\max}=100$, $x_{\min}=51$, a stąd pole każdego jest równe 2450, a suma $p=4900$. Szeregi długości 50 są z kolei pierwotnymi dla szeregów długości 25, w których każde pole równe 600, a suma $p=2400$ (przy polu pierwotnym $P=4900$, dla $N=50$). Jest to jeden z możliwych podziałów szeregu długości 100 na połowy. Drugi podział – to podział najpierw na szeregi długości 20, potem 10, a następnie 5. Wyniki tych podziałów umieszczono w tabeli 4. Przeprowadzając oszacowanie wymiaru fraktalnego D , otrzymuje się dla takich danych wartość 0,9861, co jest równoznaczne z tym, że wykres szeregu stanowi linię prostą. Oznacza to również zjawisko jednokierunkowego trendu. Gdyby dopuścić wszystkie wartości rzeczywiste leżące na linii prostej wartość D byłaby równa 1. Wartość 1 oznacza linię prostą i nie jest osiągnięta dla szeregów innego typu.

Tabela 4. Pola zajmowane przez szereg w kolejnych podziałach szeregu z przykładu 2

N	$N/2$	P	p
100	50	9900	4900
50	25	4900	2400
20	10	1900	900
10	5	900	400

Źródło: opracowanie własne.

Wymiar fraktalny dla szeregu cen i stóp zwrotu akcji analizowanych spółek

Praktyczne zastosowanie wymiaru fraktalnego pokazano na przykładzie szeregu cen i szeregu stóp zwrotu akcji Armatury, Getinu, Polic oraz TVN-u w tym samym okresie, dla którego wcześniej wyznaczono odchylenia standardowe i współczynniki zmienności.

Obserwacja kształtu wykresów szeregu cen akcji (rysunek 1) pozwala wysnuć wnioski, iż szeregi czasowe Armatury i TVN-u są do siebie najbardziej podobne, a więc powinny charakteryzować się podobnym wymiarem fraktalnym. Z obliczeń wynika, iż wyniósł on odpowiednio 1,518 i 1,547. Natomiast zjawisko podtrzymania trendu najsilniejsze jest dla szeregów cen spółki Getin i potwierdza to wynik wymiaru fraktalnego, który jest dla tej spółki najmniejszy i wyniósł 1,417. Wniosków takich nie można było wyciągnąć z obserwacji współczynnika zmienności. Wykresy szeregów cen pozostałych trzech spółek charakteryzują się wyraźnie większą zmiennością, i wyniki wymiaru fraktalnego są o więcej niż 0,1 większe.

Tabela 5. Ocena ryzyka – wymiar fraktalny dla szeregów cen i stóp zwrotu akcji

Spółka	Wymiar fraktalny	
	ceny	stopy zwrotu
Armatura	1,518	1,675
Getin	1,417	1,676
Police	1,530	1,700
TVN	1,547	1,679

Źródło: obliczenia własne.

Obserwacja kształtu szeregów stóp zwrotu wskazuje na dość duże podobieństwo. Wyniki z wymiaru fraktalnego są do siebie zbliżone i dla Armatury, Getinu oraz TVN-u kształtują się na poziomie nieco większym niż 1,67. Dla Polic jest to 1,7 i uważna obserwacja wartości na rysunku 2 potwierdza większe postrzępienie szeregu stóp zwrotu Polic w porównaniu z pozostałymi.

Podsumowanie

W praktyce wymiar fraktalny może być traktowany jako miara ryzyka inwestycyjnego. Jeśli ryzyko zdefiniujemy jako zmienność ceny i przyjmiemy, że większa zmienność oznacza większe ryzyko, to niższe wartości wymiaru fraktalnego oznaczają będą niższe ryzyko (tak jak w przypadku cen akcji Getinu-u), a wyższe wartości wymiaru fraktalnego wyższe ryzyko (pozostałe spółki). Jeżeli ryzyko zdefiniujemy jako zmienność stopy zwrotu, to w przy-

padku badanych spółek wyróżnić można stopy zwrotu Polic jako charakteryzujące się większym zróżnicowaniem.

Warto zwrócić uwagę na fakt, iż miara ta może być z powodzeniem stosowana zarówno dla szeregów cen, jak i stóp zwrotu. Oczywiście nie ma sensu porównywanie wymiaru fraktalnego szeregu cen i szeregu stóp zwrotu, bo wiadomo, że ten drugi w praktyce zawsze będzie miał większy wymiar. Porównywać należy ten sam typ szeregu (albo cen albo stóp zwrotu) dla różnych papierów wartościowych. Tak uczyniono w niniejszej pracy. Ocena kształtowania szeregu cen i szeregu stóp zwrotu jest osobnym badaniem. Jedną z najważniejszych zalet wymiaru fraktalnego jest jego prosta interpretacja graficzna, co może być z powodzeniem wykorzystane nawet przez mniej doświadczonych inwestorów.

Bibliografia

- Dubuc B., Roques-Carnes J.F., Tricot C., Zucker S.W., *Evolving the Fractal Dimension of Profiles*, Physical Review A 1989, Vol. 39.
- Jajuga K., Jajuga T., *Inwestycje*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
- Mandelbrot B., *The Fractal Geometry of Nature*, American Journal of Physics, V. 51, Issue 3, 1983, doi:10.1119/1.13295.
- Peters E.E., *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, WIG-Press, Warszawa 1997.
- Zwolankowska M., *Fraktalna geometria polskiego rynku akcji*, Uniwersytet Szczeciński, Rozprawy i Studia, t. 382.