View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Funes

SITUACIONES PROBLEMA DE LA VIDA COTIDIANA Y SU REPRESENTACIÓN CON FUNCIONES DE LA FORMA F(T) = (X(T), Y(T))

Rafael Pantoja Rangel, Otoniel Leal Medina, Diego Armando Pantoja González, Elena Nesterova

Universidad de Guadalajara, Jalisco. (México)

rpantoja@prodigy.net.mx, olm_88@hotmail.com, diegoseb1@gmail.com, elena.nesterova@cucei.udg.mx

RESUMEN: En este proyecto se emplean situaciones problema de la vida cotidiana para que el alumno con el apoyo del video digital, el Tracker y Geogebra, aproximen las funciones que describen el movimiento de una burbuja en una manguera flexible llena de agua, el giro de una rueda de bicicleta sobre su eje y rodando sin resbalar y un tren eléctrico de juguete. Las actividades se realizaron en distintos talleres y tuvieron como propósito relacionar el movimiento de objetos con una función paramétrica de la forma ***f(t)= (x(t), y(t))*** y como un elemento motivador para aprender matemáticas.

Palabras clave: modelación, video, tracker, semiótica, gráficas

ABSTRACT: In this project, problem situations of daily life are used so that the students approximate the functions that describe the movement of a bubble in a flexible hose filled with water; the rotation of a bicycle wheel on its axis and rolling without slipping, and an electric toy train by using the support of digital video, Tracker and Geogebra. The activities were carried out in different workshops and aimed to relate the movement of objects with a parametric function of the form f (t) = (x (t), y (t)) and at the same time they were considered a motivating element to learn mathematics.

Key words: modelling, video, tracker, semiotics, graphics

Introducción

Hasta el momento son tres las tesis de Maestría en Enseñanza de las Matemáticas (MEM), programa adscrito al Departamento de Matemáticas (DM) del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara (UdeG), que se orientaron a la elaboración de propuestas alternativas, con base en la modelación matemática, para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Bautista, 2013; Leal, 2016; Ferreyra, 2016), mediante el empleo de situaciones problema de la vida cotidiana, seleccionadas de un contexto cercano al estudiante, grabadas en video o con fotografía (Ezquerra, Iturrioz, Díaz, 2011; Jofrey, 2010), con el apoyo de los programas de cómputo Tracker y GeoGebra, cuyo propósito fue propiciar un aprendizaje significativo del tema de matemáticas en cuestión, a saber: Ajuste de funciones, la derivada y el método de sólidos de revolución para el cálculo de volumen.

En la tesis de Bautista (2013) dos de las situaciones problema tratadas son el lanzamiento del balón al aro en una cancha de baloncesto y el giro de la rueda de una bicicleta en dos momentos: gira sobre su eje y rueda sin resbalar. Se empleo la rutina de ajuste de funciones que integra Tracker, con la finalidad de determinar la ecuación de la trayectoria del balón, a saber $y(t)=4.737t^2+3.956t+2.009$, y así validar que los datos reales correspondan a los calculados por el software, en la que el valor de (g/2) se aproxima a 4.737 y la coordenada de la altura del lanzamiento inicial es de 2.009 metros, que en las condiciones en que se realizó el lanzamiento son aceptables, desde la perspectiva de la física.

En el caso de la tesis de Leal (2016), se analiza el movimiento de un tren de juguete, tomado como masa puntual, cuyas vías se acomodan en tres posiciones distintas: circular, en una forma tratada como una elipse y una rectilínea; la segunda opción, es el movimiento de una burbuja de aire dentro de una manguera transparente con agua y sellada en los extremos, que por su flexibilidad, los alumnos la colocaron en distintas posiciones, como la mostrada en la figura 1.

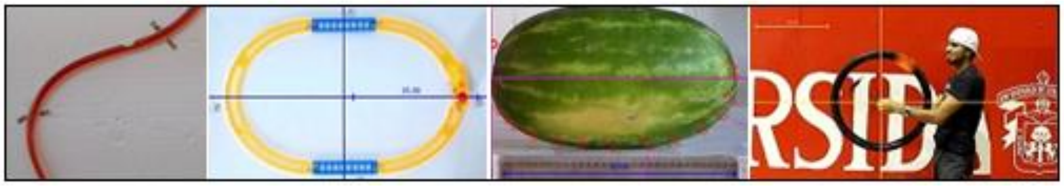

Figura 1. Situaciones problema: burbuja, tren eléctrico, sandía y giro de llanta

El trabajo de Ferreyra (2016) se centra en el cálculo de volumen de una sandía por el método de los sólidos de revolución. En este caso la tesista aproxima por cuatro métodos: primero se pesa en una báscula, el segundo se calcula el volumen por el principo de Arquímedes midiendo manualmente el volumen de agua desalojado, en el tercero se supone que la proyección sobre el plano cartesiano XY es una elipse y se calculan los valores de sus ejes con el empleo de unos palitos de madera, para determinar la ecuación, despejar la variable ***y*** e integrar y por último, se procesa el video de la sandía con el Tracker y los datos se exportan a GeoGebra para obtener las ecuaciones paramétricas ajustadas de la elipse y aplicar la fórmula del método de sólidos de revolución para hallar el volumen.

De manera general las actividades planteadas en la fase experimental de las tesis, se orientaron a que los alumnos relacionaran los registros de representación semiótica con cada una de las situaciones problema, haciendo hincapié en que sólo es un objeto en movimiento y se exponen tres gráficas con sus respectivas ecuaciones, una tabla de datos, la representación analítica de la trayectoria del movimiento y la interpretación de las variables ***x, y*** en función del parámetro tiempo (***t***).

Metodología

La Teoría de las representaciones semióticas de Duval (Duval, 2006) es el soporte teórico que se empleó en las tres tesis, pues de una manera "natural" aparecen signos alusivos a las distintas situaciones problema, porque desde que se inicia el diseño del set de grabación, emerge el registro visual (video o fotografía). En esta teoría, la actividad intelectual consiste esencialmente en la transformación de los registros semióticos, ya sea dentro del mismo (tratamiento) o con otro (conversión).

Un tratamiento en el registro analítico, sucede cuando el alumno soluciona el sistema de ecuaciones paramétricas $\{x(t) = 6.382t + 0.1193,\ y(t) = -1.448t^2 + 7.147t - 0.09477\}$ y determina la ecuación de la forma de la manguera $y(x) = -0.0323x^2 + 1.062x + 0.01681$; otro tratamiento se genera en el registro gráfico cuando se pide al alumno explicar la relación entre las tres gráficas que se obtienen con el Tracker en función del desplazamiento de la burbuja en un intervalo de tiempo.

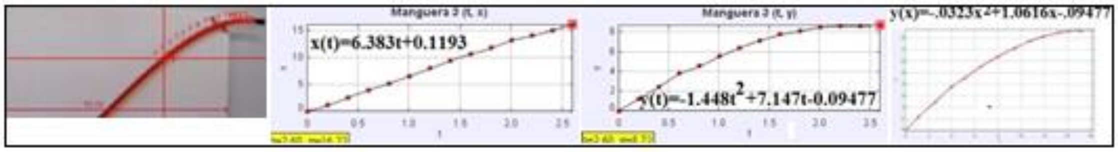

Figura 2. Gráficas del movimiento de la burbuja de aire en los planos (**t-x, t-y, x-y**)

Una conversión se refiere a la transformación de una representación de un registro en otra representación de otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. En el momento en el que se relaciona el video/fotografía con los elementos matemáticos, se reflejan las conversiones visual ⇔ gráfica, visual ⇔ numérica, visual ⇔ analítica; cuando se inicia la discusión se generan las conversiones: gráfica ⇔ numérica, gráfica ⇔ analítica y numérica ⇔ analítica. Ver figura 3 para el caso del movimiento de una burbuja de aire.

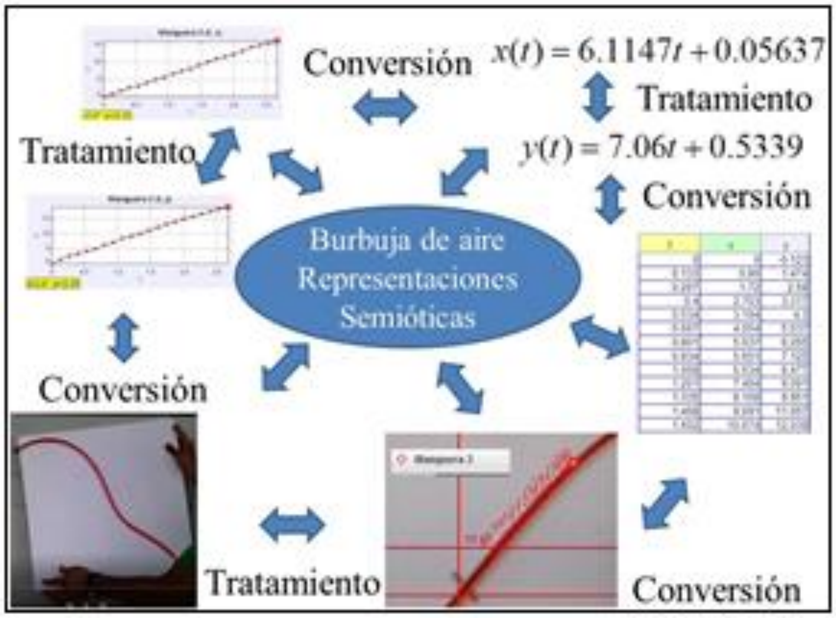

Figura 3. Representaciones semióticas de la burbuja de aire. La tabla de datos es para interpretar como representación semiótica y no para cálculos

Con la modelación el profesor tiene opciones para relacionar los conceptos matemáticos con el mundo real, que le permite considerar el entorno físico y social para abordar situaciones problema dentro de contextos vinculados a los alumnos. Como se ha señalado, se parte de la situación problema (Hitt y González, 2015; Pantoja, Guerrero, Ulloa, Nesterova, 2016), que se graba en video o fotografía y se incorpora al Tracker, que muestra en pantalla los elementos matemáticos que describen su movimiento. Los alumnos en trabajo individual y colaborativo analizan lo mostrado en pantalla con el propósito de relacionar las gráficas, los datos y las funciones de ajuste con el movimiento del objeto.

El concepto de modelación manejado en las tesis, es el que maneja Arrieta y Díaz (2015, p 35), como una práctica de articulación de dos entes, para actuar sobre uno de ellos, llamado lo modelado, a partir del otro, llamado modelo. La articulación de los entes iniciales da lugar a un nuevo ente, al modelo, mo, que resulta adherido a lo modelado, ma. Tal articulación constituye una nueva entidad para la vivencia de quien modela y que podemos denotar (ma, mo) y que nominamos ***dipolo modélico*** (DM).

En el concepto de modelación empleada se parte de la situación problema, para luego, mediante herramientas tecnológicas, en este caso, los programas Tracker y GeoGebra, se determina la expresión analítica, tres gráficas y una tabla de datos, que los alumnos intervendrán para describir tal situación, y como parte final, explicar el fenómeno a partir de la modelación (figura 3), que en el ámbito escolar se entiende como una práctica (de referencia) ejercida por profesores y estudiantes en un contexto y tiempo determinado en respuesta a una situación o fenómeno del mundo externo, pero cercano a la realidad del estudiante, de manera individual y colectiva, mediante el proceso de interacción (Córdoba, 2011, p. 10).

De aquí la importancia de retomar el sentido planteado por Freundental (1980, *p. 20*) sobre el uso de la modelación matemática, pues sin duda, lo más trascendental es que el empleo de situaciones problema reales cercanos al entorno de los actores de la educación, motiva a los estudiantes a aprender matemáticas, ya que muestran interés durante el proceso, además, facilita la retención de todo lo que sea posible construir y que tenga sentido en su contexto, y la convivencia colaborativa en la que se propicia el intercambio de ideas, la participación, el respeto, la honestidad y la puntualidad, entre otros valores, tan necesarios en la sociedad mexicana actual.

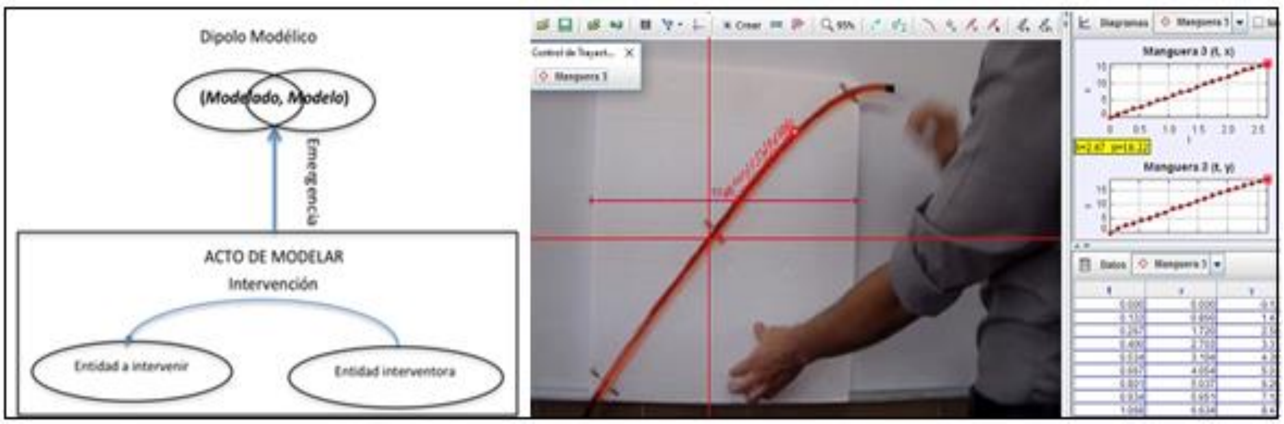

Figura 4. La modelación: El acto de modelar, el modelo, lo modelado y el dipolo modélico. La tabla de datos es para interpretar coo representación semiótica y no para cálculos

La metodología ACODESA emerge como una alternativa de enseñanza de las matemáticas, bajo el marco teórico del interaccionismo social (Hitt, González, 2015) y se sustenta en cinco vertientes: Trabajo individual, Trabajo Colaborativo, Debate, Autorreflexión e Institucionalización. En la tabla 1 se describe ACODESA.

Tabla 1. ACODESA en el contexto del estudio

Trabajo individual (producción de representaciones funcionales para comprender la situación problema).	Se observó en la participación del estudiante en el curso taller, en la modelación de la situación.
Trabajo en equipo sobre una misma situación. Proceso de discusión y validación (refinamiento de las representaciones funcionales).	Se presentó en la fase de grabación, la obtención del modelo matemático, en la elaboración de reportes y la presentación del trabajo realizado.
Debate (que puede convertirse en un debate científico). Proceso de discusión y validación (refinamiento de representaciones funcionales).	Se realizó en el curso taller, en el proceso de interpretación del modelo matemático, presentación del trabajo, elaboración de reportes y conclusiones.
Regreso sobre la situación (trabajo individual: reconstrucción y auto- reflexión).	Se distinguió en la fase final de la experimentación, cuando se les pidió que replicaran el proceso y hacer el análisis correspondiente.
Institucionalización. Proceso en el cual se utilizan representaciones institucionales.	Ocurrió en la presentación de los trabajos en grupos colaborativos, discusión grupal durante la presentación y revisión de los reportes entregados.

Descripción de las actividades realizadas

Burbuja de aire

Se observó el cambio de posición de la burbuja durante su trayecto, para obtener las ecuaciones paramétricas que representan los desplazamientos respecto del tiempo $x(t),\ y(t)$. Se les entregó una hoja de trabajo en la que se les indica grabar, al menos, tres videos con distintas formas de la manguera (figura 5), un apartado para registrar la interacción con el trabajo de Tracker y una sección de discusión.

Figura 5. Trayectorias de la burbuja

Para la manguera con la burbuja de aire, en los casos en que la forma representa una función (Figura 5), no se les dificultó marcar la trayectoria, a la vez que se computa la tabla de datos que señala la posición de la burbuja en el plano, asi como obtener las gráficas correspondientes, y por último, ajustar los datos a una de las opciones que incluye la rutina de Tracker o de GeoGebra.

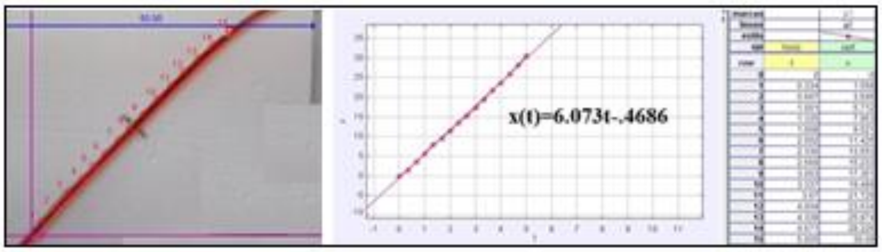

Figura 6. Actividad de la hoja de trabajo

En la figura 7 se presenta una forma de la manguera que no representa una función, que los estudiantes no lograron identificar ni encontrar las ecuaciones paramétricas $x(t), y(t)$, pues se trata de una expresión implícita de la forma $\mathrm{f(x, y,k)} = 0$, situación que se consideró normal, pues es muy poca atención la que se da al tema en los cursos.

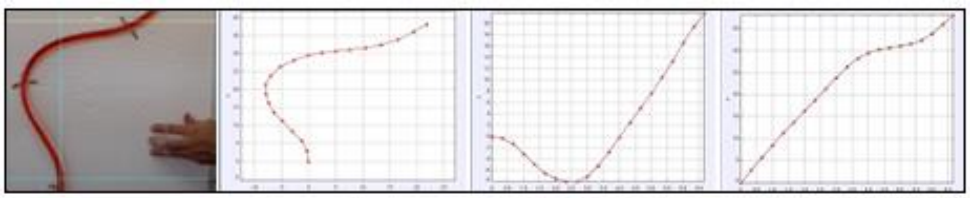

Figura 7. Actividad de la hoja de trabajo

Lo que se notó durante el desempeño de la práctica, es qué se complica la determinación de las representaciones analíticas y paramétricas asociadas, porque no se asemejen a las funciones que los usuarios conocen y les causa dificultad comprender la descomposición del movimiento de la burbuja.

Rueda que gira sin resbalar

En el caso de la rueda de bicicleta que gira sin resbalar en un trayecto rectilíneo, se marca el punto identificable sobre la llanta P (x, y), porque será la referencia para señalizar el recorrido sobre el video con el Tracker. Los alumnos de un equipo logran representar las gráficas del movimiento del punto P en los planos cartesianos $t-x,\ t-y,\ x-y$. Se les cuestionó sobre el porqué si es un sólo objeto el que se mueve, se generan tres gráficas y qué explicaran cada una en relación con el movimiento del punto P marcado sobre la rueda. Argumentan que la gráfica $t-y$ representa el movimiento de la rueda en la dirección perpendicular del eje, que se repite cíclicamente, aunque los alumnos no lograron, en varios intentos, que la rueda se moviera en línea recta. (figura 7).

El profesor señala sobre una asimetría de la gráfica y pregunta a los alumnos: ¿Aquí que pasó? Daniel señala que hubo un error de camarógrafo, pero en realidad lo que sucede es que relacionan ese salto o falta de simetría en la gráfica $t-y$, con el fenómeno en términos de que los alumnos no lograron que la rueda siguiera una línea recta en su trayectoria y afirman que no es un error del programa. Ante esta situación, se logra captar que los alumnos intentan explicar la relación: el modelo y lo modelado o Dipólo Modélico.

La expresión analítica para la gráfica $t-x$ (Figura 8), la discutieron con una triangulación entre la forma de la gráfica, sus conocimientos previos y el software GeoGebra. Los alumnos argumentaron que la naturaleza del movimiento periódico de la rueda, es la causa del tipo de gráfica encontrado y concuerdan en que su forma proviene de una función sinusoidal modificada por un parámetro, que tratan de identificar con el uso de GeoGebra, lo intentan con las funciones $x(t)=t\cos(t)$, $x(t)=t+\cos(t)$, $x(t)=t+sen(t)$ que al final descartan. Lo interesante es que los alumnos logran comprender la descomposición del movimiento e identifican que cada punto señalado sobre la rueda, se integra de dos coordenadas que dependen del parámetro tiempo, (x(t), y(t)=A sen(Bt+C)).

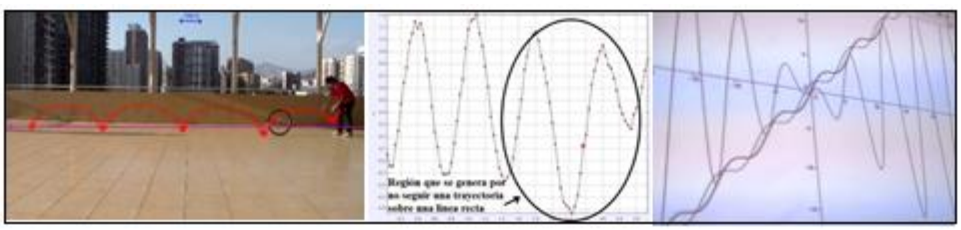

Figura 8. Análisis del giro de una rueda sin resbalar y sus gráficas

Enseguida se presenta un extracto del audio del video de la discusión grupal:

Alumna 1: *De todas las gráficas la que me llamó la atención, de hecho nuestro objetivo, fue encontrar la función …, y concluye, una función lineal*,

Alumno 2: *pero pensamos podía ser una lineal, que tenía demasiado ruido pero después nos dimos que en la lineal había una cierta, … y gesticula,*

Alumna 3: *de hecho lo que teníamos es una cosa así, y recurrimos a la ayuda del GeoGebra,*

Alumno 3: *en realidad lo graficamos en GeoGebra,*

Alumno 2: *Primero lo intentamos con x*cos(x) y nada que ver, y muestran la gráfica, pero de hecho esa grafica que tenemos con el GeoGebra no parte de cero, cero, por lo tanto después hicimos la gráfica x+sen(x) y pasa por cero, cero.*

Rueda que gira sobre su eje

Para esta situación los alumnos utilizaron una rueda de bicicleta con una marca que simboliza el punto P(x,y) que se emplea para describir el movimiento. En la figura 8 se muestran tres distintas opciones de la rueda girando sobre su eje. Para esta situación problema los alumnos no tuvieron dificultades en el desarrollo de la práctica, seleccionaron el segmento de video estable, ubicaron el origen de los ejes sobre el centro, la vara de calibración igual al radio, cada 5 cuadros marcarán los puntos y crearon una masa puntual.

Figura 9. Fotos tres ruedas con giro sobre su eje

La discusión grupal se orientó a explicar las gráficas que proporciona Tracker (figura 9) con el giro de la rueda, sobre todo que identificaran porqué son funciones periódicas, por ejemplo, una alumna señala:

> *"el punto sobre la rueda se desplaza tanto verticalmente como horizontalmente, por eso las dos gráficas se parecen a seno o al coseno(x)"*

Los alumnos lograron ajustar las ecuaciones paramétricas $x(t) = 17.91\,\mathrm{sen}(11.09\ \mathrm{t} + 45.53)$, $y(t) = 17.84\ \mathrm{sen}(11.08\ \mathrm{t} + 47.01)$ a los bosquejos representativos del movimiento. El profesor les explicó que las variaciones entre los radios (17.91 y 17.84) de las ecuaciones resultantes, es debido principalmente a varias situaciones, entre ellas, a la imprecisión en el momento de marcar la trayectoria, a que el origen del plano cartesiano que se coloca sobre el video en el programa Tracker, no coincide con el eje de la rueda y a la fuerza de gravedad que impide que la rueda sujeta por el estudiante permanezca fija.

También preguntaron porque no coincide la ecuación paramétrica $x(t) = a\cos(bt + c)$ con la encontrada con el Tracker y GeoGebra, $x(t) = 17.91\mathrm{sen}(11.09\ \mathrm{t} + 45.53)$, a lo que se explicó que las funciones seno y coseno están desfasadas $\pi / 2$ radianes.

Tren eléctrico

El análisis del tren eléctrico de juguete en movimiento, se orienta hacia los problemas originados al diseñar el set de grabación, porque se desconocía por parte del tesista y del director, la manipulación y el armado de las vías, que es el primer escollo encontrado. Así que se tuvo que recurrir al niño, dueño del tren, con la finalidad de moverlo en diversas trayectorias (figura 9). El segundo problema se presentó al ubicar la cámara de video perpendicular al piso, en el aula de la maestría en enseñanza de las matemáticas, ya que se carece de la infraestructura para hacerlo.

Figura 10. Trayectorias consideradas para el la situación problema del tren eléctrico

En la figura 11 se muestra que se utilizaron los escritorios y sobre de ellos, una superficie plana de unicel con una perforación, de tal manera que el lente de la cámara quedara perpendicular al movimiento del tren. Fue una experiencia motivadora para los interesados en modelar situaciones problema en el contexto cotidiano, porque se reflexionó sobre las necesidades que se generan para diseñar un set de grabación sin problemas técnicos, no relacionados con las matemáticas, pero si con las habilidades y capacidades genéricas.

Figura 11. Set de grabación para la situación problema del tren eléctrico

Conclusiones

Una vez analizadas las situaciones problema trabajadas, los tres tesistas en conjunto con el el director, afirman que incluir situaciones problema relacionados con la vida cotidiana en el aula escolar, produce aprendizaje de las matemática en el tema en cuestión, sin embargo, se sugiere detallar minuciosamente las actividades que realizarán los participantes, pues existen circunstancias como son los conocimientos previos de matemáticas y del área relacionada con la situación problema, que les causan dificultades y desánimo, lo que influye en el resultado de la actividad.

Es notorio que los alumnos se motivan e interesan por la forma en que se plantea esta forma alternativa de aprender matemáticas de manera no tradicional, pues "aparentemente" se les responde la pregunta ancestral "para que sirven las matemáticas", pero eso no infiere que el alumno haya logrado un aprendizaje significativo del tema de matemáticas, por tal motivo el profesor debe de ser cuidadoso, y sobre todo, diseñar instrumentos de evaluación validados, que permitan sustentar que el alumno aprendió matemáticas.

En el modelo educativo actual de la Universidad de Guadalajara se plantea, que en un proceso educativo es ideal que se involucre a los actores de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, fortalecido con un ambiente de aprendizaje adecuado con las TIC, en el que el estudiante, en trabajo individual y colaborativo, puede decidir qué y cómo va aprender, en el que tome la iniciativa, con el firme propósito de lograr un aprendizaje significativo. Por otro lado, la importancia del aprendizaje colaborativo es primordial, ya que mediante la interacción social con compañeros de clases, maestros y otros, propician la motivación para que construya su conocimiento.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J., y Díaz, M. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la socioepistemología. *RELIME, 18*(1), 19-48. DOI: 10.12802/relime.13.1811.

Bautista, M. (2013). *La modelación matemática en la vida cotidiana como recurso para propiciar aprendizaje significativo en el ajuste de polinomios reales de una variable real*. (Tesis de maestría un publicada). CUCEI. Universidad de Guadalajara. México, Guadalajara, Jalisco.

Córdoba, F. (2011). *La modelación matemática educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. (Tesis de maestría un publicada). Instituto Politécnico Nacional. México. Distrito Federal.

Duval, R. (2006). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo.*: Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. ISBN: 958-670-329-0.

Ezquerra, A., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula*. Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*

Universidad de Cádiz. APAC-Eureka. http://hdl.handle.net/10498/14733. http://reuredc.uca.es. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733.

Ferreyra, R. (2016). *Empleo de situaciones problema de la vida cotidiana, video digital, Tracker y GeoGebra para el aprendizaje del tema de sólidos de revolución*. (Tesis de maestría un publicada). Universidad de Guadalajara. México, Guadalajara, Jalisco.

Freundental, H. (1980). Major Problems of Mathematics Education. Conferencia Plenaria ICME 4, Berkeley. *Educational Studies in Mathematics 12. Antología de Educación Matemática.* Sección Matemática Educativa CINVESTAV-IPN: 7-42.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*. Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 22. Recuperado de: http://www.ugr.es/~jgodino /funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf.

Hitt, F., y González, A. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Springer Science+Business Media*, 201-219.

Jofrey, J. A. (2010). Investigating the conservation mechanical energy using video analysis: four cases. *Physics Education*. DOI 10.1088/0031-9120/1/005.

Leal, O. (2016). *Sistema de prácticas de modelación con el Tracker y GeoGebra de cuerpos en movimiento, para el aprendizaje del objeto matemático derivada*. (Tesis de maestría un publicada). Universidad de Guadalajara. México, Guadalajara, Jalisco.

Pantoja, R. Guerrero, L., Ulloa, R. Nesterova, E. (2016*).* Modeling in problem situations of daily life. *Journal of Education and Human Development*, 5(1), 62-76. Published by American Research Institute. Recuperado el 5 de Mayo de 2017 de http://jehdnet.com/. Electronic Version. DOI: 10.15640/jehd.v5n1a1. ISSN: 2334-2978.