

# UNA CARACTERIZACIÓN DE LA NOCIÓN SISTEMA DE REFERENCIA PARA EL TRATAMIENTO DEL CAMBIO Y LA VARIACIÓN

**Mario Caballero-Pérez, Ricardo Cantoral**

Cinvestav-IPN. (México)

[macaballero@cinvestav.mx](mailto:macaballero@cinvestav.mx), [rcantor@cinvestav.mx](mailto:rcantor@cinvestav.mx)

**RESUMEN:** Investigaciones enmarcadas en el Pensamiento y Lenguaje Variacional han mostrado que la variación es una noción importante en el aprendizaje del Cálculo, no obstante, consideramos que ésta no es explícita en los fenómenos de estudio; la variación no se observa, sino que se infiere, se calcula, se mide, y por tanto, se construye. Nuestra investigación está enfocada en comprender cómo se construye la variación en el pensamiento humano mediante la noción de sistemas de referencia. Estos sistemas consisten en el reconocimiento del cambio y la variación, de su organización y comunicación mediante cuatro elementos: las variables de estudio (¿qué cambia?), la unidad de referencia (¿respecto de qué cambia?), la una unidad de medida (¿cuánto cambia?) y una temporalización de los fenómenos (¿cómo cambia?).

**Palabras clave:** variación, predicción, prácticas, socioepistemología

**ABSTRACT:** Researches concerned with the Thought and Variation Language has shown that variation is an important notion in the learning of Calculus; however, we consider that it is not explicit in the phenomena of study; the variation is not observed, but it is inferred, calculated, measured, and therefore constructed. Our research is focused on understanding how variation in human thought is constructed through the notion of reference systems. These systems consist of the recognition of change and variation; of their organization and communication through four elements: the variables of study (what changes?); the reference unit (with respect to what, it changes?); the unit of measurement (How much does it change?); and a timing of phenomena (how does it change?).

**Key words:** variation, prediction, practices, socio epistemology

## ■ Introducción

El Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLVar) es una línea de investigación que se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza y de aprendizaje del conocimiento matemático propios de la Matemática del Cambio (Cantoral, 2000), en particular del Cálculo y el Análisis, enfatizando en el carácter variacional de las ideas matemáticas y no únicamente en su manejo simbólico y analítico. En un sentido amplio consiste en las formas de pensar, argumentar, organizar, tratar y comunicar matemáticamente fenómenos de cambio.

Dentro del PyLVar, el cambio consiste en toda modificación de estado (posición, forma, altura, peso, etc.), en tanto que la variación se asume como una cuantificación particular de dicho cambio, no solo en el sentido de emparejar una unidad con un número sino también al reconocer aspectos medibles en un fenómeno o situación (Johnson, 2015), ya sea de naturaleza cualitativa o cuantitativa.

Diversos trabajos han incorporado el estudio del cambio y la variación para la significación y aprendizaje de conceptos matemáticos, ya sea para la construcción de conceptualizaciones más avanzadas de la noción de pendiente y derivada (Nagle, Moore-Russo, Viglietti y Martin, 2013), para dotar de un carácter dinámico a los conceptos de variable y función (Yüksel y Soybaş, 2009), o propiciar un vínculo entre las diferentes conceptualizaciones de la idea de derivada (Sánchez, García y Llinares, 2008).

Observamos que en esos trabajos la variación es el punto de partida para la significación de objetos matemáticos como función, pendiente y derivada, pero no se ha cuestionado sobre la construcción de la propia noción de variación. Esto resulta importante debido a que, si bien el cambio puede ser percibido, la variación no, ya que consiste en una abstracción de orden superior.

...si bien nos percatamos del movimiento de las personas, de su cambio de posición, casi nunca nos cuestionamos por la forma en que se producen dichos cambios, aun cuando podríamos percatarnos de ello: si el movimiento era uniforme, si se presentaban variaciones, es decir, se movían cada vez más rápido o más lento o si alternaban este comportamiento. Menos llegamos a establecer algún sistema de medida para darle valor a esas variaciones del cambio. Es decir, si bien percibimos y comprendemos lo que cambia, el analizar los cambios de ese cambio no es tan natural. Se requiere de un segundo nivel de elaboración teórica, de una abstracción de segundo orden, dando lugar al concepto de variación (Cabrera, 2009, p. 51).

La variación no es explícita en los fenómenos, no se observa, sino que se infiere, se calcula, se mide, y por tanto, se construye. Investigaciones previas han mostrado cómo la variación es operada mediante el uso de *estrategias variacionales* (Caballero y Cantoral, 2013), pero ahora nos interesa conocer cómo se construye la noción de variación, o dicho de otra forma, ¿cómo opera el pensamiento humano ante situaciones de variación?

Algunas investigaciones han reportado dificultades para acceder a la noción de variación, ya sea en la comprensión de la derivada a través de la razón de cambio (Sahin, Aydogan-Yenmez y Erbas, 2015),

al acceder a la noción de acumulación de funciones (Thompson, Byerley y Hatfield, 2013) o al distinguir entre velocidad y aceleración en el movimiento de personas (Sokolowski, 2014). Estas propuestas se caracterizan por reconocer una falta de significación de los objetos matemáticos, en tanto que nuestra investigación, enmarcada en el PyLVar, se interesa en la forma de construir la variación en sí misma.

En ese sentido nos preguntamos: ¿cómo acceden las personas a la variación?, ¿cómo la operan?, ¿cómo la comunican? Consideramos que entender estos cuestionamientos nos permitirá entender el proceso de significación de la Matemática del cambio, lo que proveerá de elementos para promover el desarrollo del PyLVar. Nuestra hipótesis consiste en que se precisa del desarrollo de dos nociones propias de la psicogenética, la *causalidad* y la *temporalización*, cuya articulación da lugar a la conformación de *sistemas de referencia* para el estudio del cambio y la variación.

### ■ Marco teórico

Tomamos como referente teórico a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa que explora formas del pensamiento matemático fuera y dentro de la escuela. Asimismo, modela las dinámicas de la construcción social del conocimiento matemático a través del conjunto de *prácticas* que son aceptadas y establecidas socialmente (Cantoral, 2013), normadas a su vez por *prácticas sociales*, las cuales se entienden no como la acción efectuada (por ejemplo medir) sino la orientación estratégica de la práctica (por qué medimos y por qué lo hacemos de esa manera), aquello que regula las actividades en la construcción social del conocimiento matemático.

En ese sentido, la Socioepistemología centra la atención no en los *objetos matemáticos* (por ejemplo, la noción de límite, derivada, función), sino en las *prácticas* que los acompañan y dan origen. Particularmente en el Cálculo, éstas prácticas se denominan *estrategias variacionales*, las cuales son normadas por la práctica social del Prædicere. Esta práctica social consiste en aquello que norma la actividad matemática con fines predictivos, no es la predicción como tal sino lo que orienta el querer predecir.

En (Cantoral, 2013) se presenta un modelo evolutivo del Prædicere que da cuenta de un tránsito del conocimiento al saber matemático y clasifica el tipo de predicción que se realiza, así como las herramientas que se construyen y utilizan para ello. “El paso de los datos (Prædicere como esquema) al patrón o regularidad en el comportamiento (Prædicere como modelo) es un requisito para la emergencia del concepto en el marco de las redes conceptuales correspondientes (Prædicere como teoría)” (Cantoral, 2013, p. 132).

Este modelo también nos deja ver el tipo de estudio del cambio que se precisa en la predicción de fenómenos. Así por ejemplo, en el Prædicere como modelo se precisa establecer relaciones funcionales entre variables a través de identificar aquello que cambia, mientras que, en el Prædicere como esquema, consiste en describir la forma en cómo se relacionan las variables, esto es,

caracterizar la naturaleza de cambio del fenómeno, lo cual se realiza ya sea en términos de valores numéricos o a través de descripciones cualitativas mediante frases como: más grande que, igual que, menor que, más frío, menos frío, cada vez más rápido, cada vez más lento, etc.

Ahora bien, para describir la naturaleza del cambio las investigaciones enmarcadas en el PyLVar recurren al uso de *estrategias variacionales*, las cuales consisten en una forma particular de razonar y actuar ante una situación para tratar con el cambio y la variación (Caballero y Cantoral, 2013). Algunas de las estrategias reconocidas son la *predicción*, la *comparación*, la *seriación* y la *estimación*.

El uso de las *estrategias variacionales* comienza por la *comparación* de estados para cuantificar el cambio, después la *seriación*, vista como un conjunto de comparaciones sucesivas, permite caracterizar cualitativa y cuantitativamente el patrón de regularidad de la variación en un conjunto de estados sucesivos. Por último, la *estimación* y *predicción* organizan la información obtenida de las estrategias anteriores y la utilizan para anticipar comportamientos globales o estados puntuales respectivamente.

Lo anterior deja ver una evolución pragmática en el estudio del cambio y la variación asociado a una jerarquía en las *estrategias variacionales* donde la *comparación* y *seriación* atiende a la tipificación del cambio, en tanto que la *estimación* y *predicción* se apoyan en éstas para anticipar estados y comportamientos futuros. En otras palabras, mediante las *estrategias variacionales* la variación es operada, aunque todavía no implica que se construya. Para ello, hace falta indagar en la forma en cómo se reconocen las relaciones funcionales del *Prædicere* como modelo y los estados sucesivos para caracterizar la naturaleza del cambio como esquema. Para ello, recurrimos a dos nociones de la picogenética que nos han permitido plantear un postura al respecto.

### ***El papel de la causalidad y la temporalización en el estudio de la variación***

Hemos mencionado que predecir precisa de una cuantificación del cambio en las variables de un fenómeno (*Prædicere* como modelo) con el fin de encontrar algún patrón o regularidad en él (*Prædicere* como esquema), pero, sostenemos, no de cualquier variable sino de aquellas que están relacionadas causalmente, aspecto profundizado en (Caballero y Cantoral, 2014). Esto debido a que, dentro del PyLVar, el establecimiento de *relaciones causales* es un requisito previo a las *relaciones funcionales*. Por ejemplo, antes de estudiar la forma de cambio del volumen de un líquido al aumentar su temperatura, se precisa reconocer que efectivamente la modificación de la temperatura afecta al volumen, es decir, que están relacionados causalmente.

El reconocimiento de una causalidad entre variables (la modificación de una resulta en la modificación de la otra) da pie al reconocimiento del cambio, esto debido a que los datos (sean numéricos, gráficos, verbales) ya no se conciben aislados sino provenientes de una relación particular. Identificar dichas relaciones suele ser omitido en la actividad escolar, dando prioridad a la operatividad de la función, en particular a un tratamiento algebraico.

De manera que, por medio de la *causalidad* se reconoce la variación (¿qué cambia?), en tanto que las *estrategias variacionales* permiten cuantificar el cambio, por ejemplo, al comparar dos estados y observar el incremento o decremento entre ellos, pero ¿qué comparamos? y ¿con qué comparamos? Reconocer la variación no tendría lugar sin el establecimiento de un referente para percibir el cambio (¿respecto de qué cambia?) y otro para medirlo, para cuantificarlo (¿cuánto cambia?).

Ahora bien, cuantificar el cambio también precisa identificar estados intermedios en los fenómenos de variación para usar las estrategias de *comparación* y *seriación*, lo que permite dar cuenta de la evolución del cambio. A esto lo denominamos establecer una *temporalización* del cambio, noción que proviene de la perspectiva psicogenética sobre el desarrollo de la noción de tiempo, aspecto profundizado en (Caballero y Cantoral, 2014).

La importancia de considerar la *temporalización* en fenómenos de variación continua es que permite describir, caracterizar y cuantificar el comportamiento de las variables de una función (¿cómo cambia?). Esto implica que de un cierto modo los fenómenos de variación se discretizan, sin embargo, esto representa un paso necesario para llevar a cabo el estudio del cambio, ya que mediante las estrategias de *comparación* o *seriación* los estados intermedios que se identifican no se quedan al nivel de imágenes estáticas, sino que se vuelven estados de transición del fenómeno, lo que da cuenta de la evolución del cambio (su variación).

Hemos planteado que las nociones de *causalidad* y *temporalización* son necesarias para el estudio del cambio, en el sentido que permiten reconocer y organizar el cambio y la variación, en tanto que las *estrategias variacionales* son la forma de operar con éstas últimas. Con base en esto, reconocemos una noción que articula la *causalidad* y la *temporalización* a la que denominamos *sistema de referencia*, el cual organiza la variación de un fenómeno mediante cuatro elementos (ver figura 1).

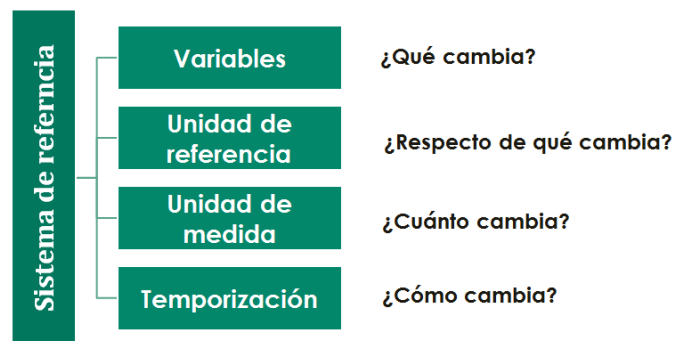


Figura 1. Elementos del sistema de referencia

### ■ Ejemplo de un sistema de referencia en el estudio del cambio

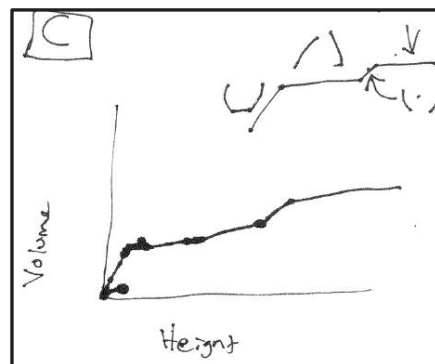
En esta sección mostramos como la noción de *sistema de referencia* permite explicar la actuación de un joven ante situaciones de variación, en particular el llenado de recipientes a flujo constante. Este ejemplo es retomado de (Johnson, 2015), donde se presentan tres casos sobre los razonamientos de estudiantes asociados a la razón de cambio cuando resuelve actividades que involucran cantidades que covarian, centrándose en el tipo de relación que establecen entre dichas cantidades.

La actividad en concreto que analizamos corresponde a las respuestas de uno de los tres estudiantes, Jacob, al pedirle que bosqueje la gráfica que exprese el crecimiento del volumen al incrementarse la altura para una botella en concreto (ver figura 2).



**Figura 2.** Botella correspondiente a la actividad de Johnson (2015)

Jacob dibuja una gráfica compuesta por tres secciones principales conformadas por trazos rectos (figura 3), donde cada sección corresponde a una sección curva de la botella, en las que distingue entre angosta y ancha. Él establece que en las secciones delgadas la *altura* se incrementa más que el *volumen*, mientras que en las anchas es al contrario



**Figura 3.** Gráficas realizadas por Jacob

Johnson enfatiza que a pesar de haber trabajado con gráficas no lineales en otras tareas previas, Jacob *compara* el incremento de la altura y volumen a través de gráficas lineales, para él, éstas fueron suficientes para distinguir entre los tres tipos de crecimiento que tiene el volumen de acuerdo a la forma de la sección de la botella. Jacob imagina el cambio ocurriendo a través de secciones, donde la característica esencial de cada sección es la intensidad en la cantidad de cambio.

En cuanto al *sistema de referencia* y la función que tienen sus elementos, identificamos que las *variables* de estudio abarcan más que la altura y el volumen, Jacob analiza el cambio de estas en función de la forma de la botella. En otras palabras, relaciona causalmente la forma de la botella con el comportamiento variacional del *volumen* y la *altura*, la forma es una variable.

Observamos la *unidad de referencia* cuando Jacob argumenta que una sección ancha implica que el crecimiento del *volumen* sea mayor al crecimiento de la *altura*, en tanto que una sección angosta es lo contrario, de manera que se utiliza la estrategia *de comparación*. De modo que la *unidad de referencia* consiste en una forma particular de la botella, que a diferencia de su función como variable, aquí no se considera variaciones en ella sino que se mantiene una en particular para determinar comportamientos específicos.

La *unidad de medida* consiste en el ancho de una sección de botella para determinar la intensidad de cambio en la relación *volumen vs altura* (una asociación entre la longitud de la base y la parte superior de esa sección). Entre más angosta la sección el *volumen* aumenta más que la *altura*, y entre menos angosta la relación es al contrario. Es decir, miden la variación mediante la *comparación* de qué tan angosta es la sección.

Observamos la *temporalización* en las gráficas que realiza Jacob, ya que establece secciones de gráfica que corresponde a comportamientos de secciones de la botella. Esto es, más que señalar valores específicos de la *altura* para analizar el *volumen*, él establece una secuencia de los comportamientos de la relación *volumen vs altura* que plasma en una gráfica con varios segmentos de línea recta con diferentes inclinaciones, a partir de los cuales utiliza una *seriación* para *estimar* la forma de la gráfica.

### ■ Reflexiones finales

Hemos planteado que la variación es una noción que no es explícita en los fenómenos de estudio, ésta no se observa sino que se infiere, se calcula, se mide, y por tanto, se construye. Investigaciones fundamentadas en el PyLVar han mostrado como la variación es operada mediante el uso de *estrategias variacionales*, pero ahora interesa cómo se construye la noción de variación en el pensamiento humano.

Con base en lo presentado, postulamos que construir esta noción exige del desarrollo de dos nociones propias de la psicogenética, la *causalidad* y la *temporalización*. Por una parte, la variación consiste en una cuantificación del cambio en las variables de un fenómeno, pero no de cualquier variable sino de

aquellas que están relacionadas causalmente. Normalmente el tratamiento escolar provee esas variables y se espera que el alumno caracterice su comportamiento mediante el estudio de su variación, pero la revisión de los trabajos sobre *casualidad* nos han dejado ver que sin la previa construcción de *relaciones causales* esto se torna en algo de naturaleza memorística y sin significado.

Por otra parte, la variación expresa la dinámica de las variables estudiadas, esto es, da cuenta de la evolución de las variables en diversos estados del fenómeno. Es así, que la variación requiere reconocer y, en su caso, construir estados intermedios en el desarrollo del fenómeno, esto es, realizar una *temporalización*, ya que sin esto la cuantificación del cambio, la variación, no tiene lugar.

La articulación entre *causalidad* y *temporalización* nos ha permitido postular una noción a la que denominamos *sistema de referencia* que explica la forma en cómo las personas perciben y organizan el cambio y la variación para su estudio mediante *estrategias variacionales*. Tradicionalmente en las aulas escolares los *sistemas de referencia* son proporcionados explícitamente, siendo el ejemplo más común el sistema cartesiano. No obstante, esto inhibe el desarrollo del *pensamiento y lenguaje variacional*, ya que no se da lugar a desarrollar formas de percibir el cambio, de medirlo, de comunicarlo. En ese sentido, se precisa fomentar la construcción de estos *sistemas de referencia*, tanto para situaciones escolares como para aquellos fenómenos fuera del aula.

### ■ Referencias Bibliográficas

- Caballero, M. y Cantoral, R. (2013). Una caracterización de los elementos del Pensamiento y Lenguaje Variacional. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 1007 – 1015.
- Caballero, M. y Cantoral, R. (2014). Pensamiento y Lenguaje Variacional: Un estudio sobre mecanismos de construcción del conocimiento matemático. *Memorias de la XVII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 17, 307 – 314.
- Cabrera, L. (2009). *El Pensamiento y Lenguaje Variacional y el desarrollo de Competencias. Un estudio en el marco de la Reforma Integral de Bachillerato*. Tesis de maestría no publicada, Centro de investigación y estudios avanzados del IPN, México.
- Cantoral, R. (2000). Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional. En R. Cantoral, R.M. Farfán, F. Cordero, J.A. Alanís, R.A. Rodríguez y A. Garza (Eds.) *Desarrollo del Pensamiento Matemático* (pp. 185-203). México, DF:Trillas.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático*. México: Gedisa Editorial.
- Johnson, H. (2015): Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics*, 89 p. 89 – 110.



- Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J. y Martin, K. (2013). Calculus students and instructors' conceptualizations of slope: a comparison across academic levels. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11, 1–25.
- Sahin, Z., Aydogan- Yenmez, A. y Erbas, A. (2015). Relational Understanding of the Derivative Concept through Mathematical Modeling: A Case Study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(1), 177-188
- Sánchez, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11 (2), 267 – 296.
- Sokolowski, A. (2014). Modelling rate for change of speed in calculus proposal of inductive inquiry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45 (2), p. 174 – 189.
- Thompson, P. Byerley, C. y Hatfield, N. (2013). A Conceptual Approach to Calculus Made Possible by Technology. *Computers in the Schools: Interdisciplinary Journal of Practice, Theory, and Applied Research*, 30 (1-2), 124-147.
- Yüksel, D. y Soybaş, D. (2009). Preservice mathematics teachers: Experiences about Function and Equation Concepts. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 7, 89 – 102.