EXPLORANDO COVARIACIÓN LOGARÍTMICA EN COORDENADAS POLARES

José Antonio Bonilla Solano, Marcela Ferrari Escolá
Universidad Autónoma de Guerrero. (México)
jbonillasolano@gmail.com, mferrari@uagro.mx

RESUMEN: En este trabajo presentamos el avance de nuestra investigación para ampliar los estudios de covariación logarítmica. El diseño de la actividad de aprendizaje surge con el plegado de papel, al dar forma un caracol nautilus de donde observamos que la curva es regida por una sucesión de triángulos semejantes en donde la hipotenusa (radio) crece con progresión geométrica y el ángulo adyacente en forma aritmética. Analizar los puntos de la curva nos invita a trabajar en el sistema de coordenadas polares, donde el ambiente de la geometría dinámica propicia la modelación de datos al permitir articular al caracol con tablas, expresiones algebraicas, gráficas necesarios para evocar las afirmaciones anteriores abordando de esta manera la covariación logarítmica, siendo la sociespistemología nuestro marco teórico y el experimento de enseñanza nuestra metodología de trabajo. Los resultados evidencian la dificultad para articular las exploraciones numéricas y geométricas con expresiones algebraicas así como abstraer la covariación en el plano polar.

Palabras clave: covariación logarítmica, geoGebra

ABSTRACT: In this paper we present the advance of our research to extend the studies of logarithmic co variation. The design of the learning activity arises with the folding of paper, forming a nautilus snail from where we observe that the curve is ruled by a succession of similar triangles in which the hypotenuse (radius) grows with geometric progression and the adjacent angle in Arithmetic form. Analyzing the points of the curve, invites us to work in the polar coordinate system, where the dynamic geometry environment facilitates data modeling by allowing the snail to articulate with tables, algebraic expressions, graphs necessary to evoke previous statements by addressing this way the logarithmic co variation; being the socio-epistemology our theoretical framework and the experiment of teaching our methodology of work. The results showed the difficulty for articulating numerical and geometric explorations with algebraic expressions as well as for abstracting the co-variation in the polar plane.

Key words: logarithmic co-variation, geoGebra

Introducción

El aprendizaje de función como objeto matemático ha sido estudiado y documentado por investigadores desde diferentes posturas teóricas, problemática que no ha perdido vigencia. La compilación de Dubinsky y Harel (1992) es una de las primeras síntesis sobre dificultades que presentan los estudiantes ante nociones de Cálculo abordando también la problemática de aprendizaje de función. Si bien, en distintas revistas de investigación y difusión de nuestra disciplina se abordan esta problemática, es difícil encontrar reflexiones sobre funciones particulares tales como funciones exponenciales (Ellis, Ozgur, Kulow, Williams & Amidon, 2012), funciones trigonométricas (Buendía y Montiel, 2009; Martínez Sierra, 2012) y en específico alrededor de la función logarítmica que se discute en esta investigación; todos estos reportes aterrizados en el sistema de coordenadas cartesianas.

Al intentar posicionar nuestra investigación, hallamos reportes en dos direcciones, aquellos que evidencian el ámbito escolar y la problemática suscitada alrededor de la función logarítmica (Liang & Wood, 2005; Ferrari & Farfán, 2010) y aquellos que centran su mirada en la historia de los logaritmos (Gonzáles & Vargas, 2007) los cuales nos enriquecen con estudios puntuales de originales o fuentes primarias.

En esta investigación nos proponemos indagar sobre la covariacion logarítmica (Ferrari y Farfan, 2010) en un sistema de coordenadas polares. En algunas investigaciones encontradas sobre función en este sistema se reporta que particularmente para el discurso matemático escolar, las coordenadas polares se dotan de más sentido y significado cuando la visualización en este sistema hace su aparición (Ramírez y Ferrari, 2011). Sin embargo, por lo general emergen dificultades ya que los alumnos evocan particularidades del plano cartesiano, para hacerlas válidas en el plano polar (Montiel, Wilhelmi, Vidacovik y Elstak, 2009). Hay evidencia también de fragilidades en el uso de la medición de ángulos en radianes (Martinez-Sierra, 2012) sin dejar atrás la problemática que existe en su concepción.

En este trabajo abordamos la covariación logarítmica en un sistema coordenado polar desde el plegado de papel o "papiroflexia". Consideramos que dar forma de un caracol nautilus a una hoja cuadrada propicia la observación de ciertas regularidades y la discusión de las variaciones implicadas. Modelar conlleva no sólo mirar cómo la figura se envuelve en un sentido progresivo sino a articular las herramientas matemáticas que emergen invitándonos a utilizar la geometría dinámica para estudiar las variaciones.

Marco teórico

En esta investigación nos identificamos con la socioepistemología al sostener que, según Cantoral (2013), el saber no se limita a definir la relación que éste guarda con los objetos matemáticos sino a posicionar al ser humano en el acto mismo de significar, conocer, construir significados y en consecuencia estructurar sus sistemas conceptuales en tanto se lo problematiza. Ese saber emerge de prácticas sociales que no se limitan a caracterizar lo que el ser humano hace, sino a problematizar las causas del porque lo hace, describir las circunstancias de cómo y cuándo lo hace, en dónde y porqué lo hace y como se concibe haciéndolo.

En la indagación socioepistemológica de Ferrari y Farfán (2010) se reportan tres etapas en el desarrollo de los logaritmos si se toma como eje central la relación entre las progresiones aritmética y geométrica; argumento utilizado por Napier (1616, citado en *íbidem*) para su primera definición y los aportes de Briggs (1620/2004, citado en *íbidem*) para afinar su funcionamiento con el afán de *facilitar cálculos.* Elementos que también fueron utilizados por Huyens (1678/1981, citado en *íbidem*) o Newton (1697/1993, citado en *íbidem*) entre otros en búsqueda de *modelar* el movimiento de un objeto en un elemento viscoso. Prácticas que estos investigadores consideraron como las propulsoras de la construcción de los logaritmos. En este sentido, establecen como hipótesis epistemológica que la incorporación explícita de la relación entre una progresión aritmética y una geométrica, que denominan *covariación logarítmica*, como la esencia misma de los logaritmos, propiciaría una integración, quizás más efectiva y por tanto más robusta, de esta noción como función. Función que ahora estudiamos en el ámbito del sistema de coordenadas polares.

En esta investigación, nos interesa resaltar el papel que juega la modelación (Arrieta & Díaz, 2015), en tanto emerge, como argumento unificador, la covariación logarítmica en un ambiente de coordenadas polares. Nos enfocamos entonces en estudiar los argumentos que emitan los estudiantes universitarios al involucrarlos en un ambiente especial diseñado utilizando el plegado de papel y el uso de geometría dinámica, elementos que propicien la construcción de una espiral logarítmica y su discusión. Compartimos con Krummheruer (2015) la idea de que, por lo general, se asume que la argumentación, que parece ser bastante explícita y sofisticada en los participantes, es una condición previa para la posibilidad de aprender y no sólo el resultado deseado del conocimiento matemático puesto en juego. Es decir, el conocimiento matemático es argumentativo y surge en la participación de los estudiantes en *"una práctica de explicar* " (Garfinkel, 1967, p. 1 citado en Krummheruer, 2015).

Experimento de enseñanza

Es el experimento de enseñanza la metodología de investigación, pues crea el ambiente adecuado de nuestro objetivo, en donde más allá de ver la efectividad del diseño se pretende evidenciar la evolución de los argumentos que sobresalen en cada reactivo de la actividad. Un experimento de enseñanza consiste en una secuencia de episodios de enseñanza en los que los participantes son, por lo general, un investigador-docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores-observadores. Se generan hipótesis que, durante el experimento, es necesario abandonar o reformular a la luz de los datos, y finalmente elaborar un modelo de aprendizaje y/o desarrollo de los alumnos en relación con un objetivo específico (Molina, Castro, Molina & Castro, 2011)

La preparación del experimento surge con la elaboración de conjeturas esperadas para cada sesión, y, analizando el plan de estudios de esta licenciatura percibimos que los estudiantes habían tenido un acercamiento a criterios de semejanza y coordenadas polares en cursos como: Elementos de la geometría, Geometría Analítica y Algebra Superior, así como hacia el estudio de variaciones en los Cálculos (diferencial e integral) elementos necesarios para realizar la actividad.

Nuestra puesta en escena se realizó en un ambiente escolar con la presencia de un profesor-investigador (P1), dos investigadores-observadores (P2 y P3) y seis alumnos del sexto semestre de la licenciatura en Matemáticas con área en Matemática Educativa, con edad entre 19 y 21 años de edad. Se formaron dos equipos, uno con un hombre (E1) y dos mujeres (E2 y E3) y el otro con tres mujeres (E4, E5 y E6). La dinámica de la clase consistía en que un alumno elegido al azar viviera previamente la actividad, para después sea el apoyo en la recogida de datos. Se utilizó grabación audio-visual y voz para cada equipo y una cámara general en cada sesión así como evidencia física (instrumento de trabajo) lo cual permite un análisis de datos más robusto del como utilizaron un saber, por qué y para que lo utilizaron, dejando ver así la evolución de la argumentación.

Diseño de la actividad

Estructuramos nuestro diseño de aprendizaje en tres sesiones

1) Construcción del caracol nautilus con papiroflexia donde se distinguen diferentes figuras geométricas y el papel que algunas de ellas juegan en el acercamiento a la espiral logarítmica que modela la forma (Figura 1)

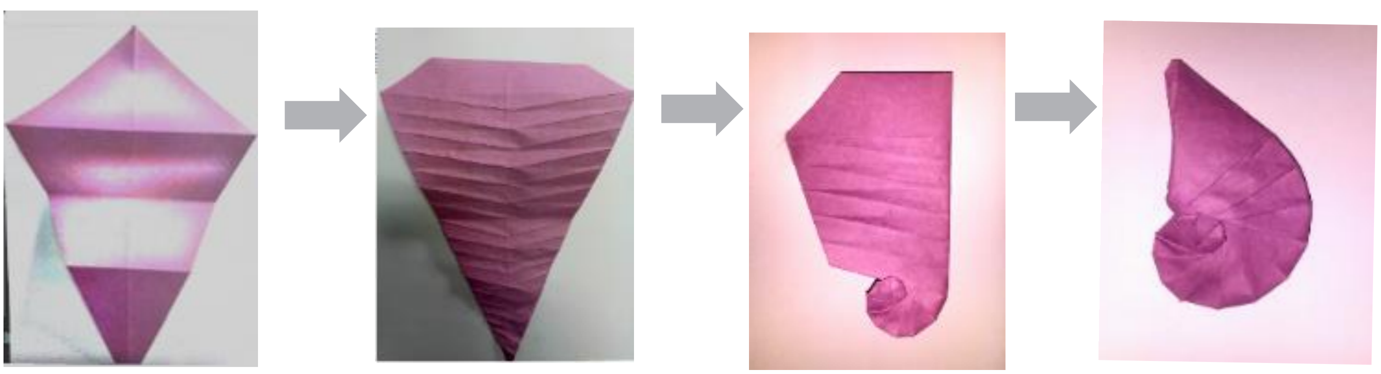


Figura 1. Construcción con plegado de papel

2) Construcción de la espiral que modela las variaciones presentes utilizando triángulos rectángulos en el ambiente de GeoGebra y que propicia la tabulación de ciertos puntos en coordenadas polares y la emergencia de una progresión aritmética (en los ángulos) y otra geométrica (en el radio) que entrelazadas rigen la curva (Figura 2)

3) Construcción algebraica de la curva, esto a través del análisis de los datos obtenidos (Figura 3)

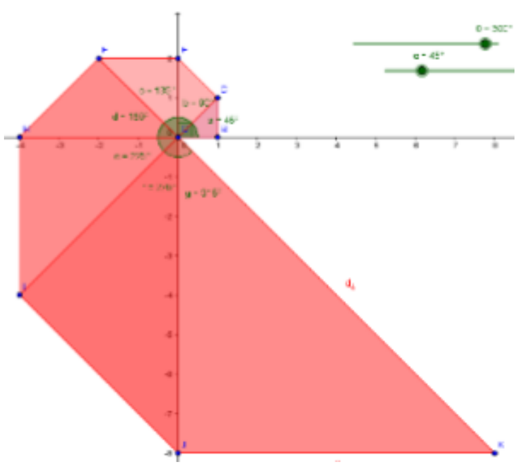


Figura 2. Construcción por triángulos

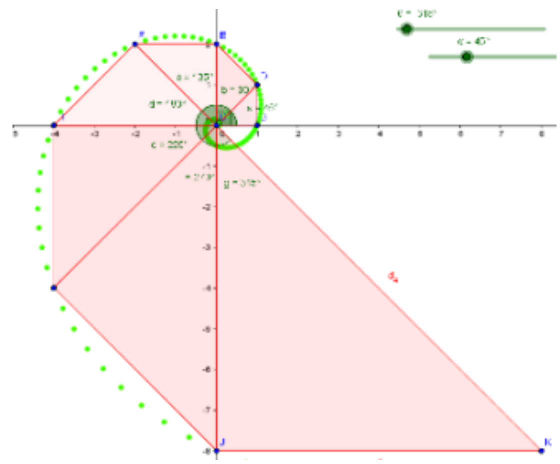


Figura 3. Espiral logarítmica

Resultados

Primera sesión:

En la aplicación de la primera actividad del plegado de papel, donde se hizo énfasis en el proceso de construcción del caracol nautilus, observamos empatía con la tarea sin que perturbara la presencia de dos investigadores-observadores. Se inició con la instrucción del profesor-investigador, donde los alumnos comenzaron por obtener un cuadrado, desde un hoja rectangular, para después generar un romboide y continuar con dobleces más precisos que involucraban trapecios.

Antes de terminar el plegado de la figura se le interrogó sobre ¿Qué figura u objeto creen que vamos a obtener con la construcción? las respuestas fueron ocurrentes, tales como "*E1: Yo me imagino una cucarachita marina*", *"E1: O una culebrina" o "E4: es un pan",* lo cual generó un ambiente agradable para continuar la actividad, pues aquello era un mar de risas por las respuestas. Luego se dieron las instrucciones para continuar con la construcción hasta llegar a la forma del nautilus y quedaron admirados pues nunca pensaron llegar a esa forma.

Continuando con la actividad para el análisis de la forma de la figura los alumnos empezaron a ser cuestionados sobre ¿Qué varía? ¿Cómo varía? ¿Qué regularidades hay? El equipo 2, el cual analizaremos como un estudio de caso, argumenta que lo que varía son los triángulos inmersos en la figura (Episodio 1)

Episodio 1: ¿Qué varía?

P2: ¿Qué creen que varía?

E1: Varía los triangulitos que están aquí (señalando la figura), *porque hay unos más chicos y otros van creciendo…*

Observamos en este episodio que el equipo 2 logra identificar el factor visual que emplearon para dar una primera idea de los que estaba variando, así como identificar la principal figura geométrica que utilizaríamos en la siguiente actividad. Para finalizar, se les solicitó hacer una investigación acerca de qué Matemáticas podemos encontrar en el objeto que estábamos estudiando y presentarla antes de iniciar la siguiente sesión.

Segunda Sesión

En la tarea encomendada, el equipo 1 presentó su investigación, resultando de mucho interés pues logran explicar al grupo la noción central de la construcción de un caracol nautilus. En el siguiente renglón se muestra parte de la exposición comentada (Episodio 2).

Episodio 2: La semejanza de triángulos

E4: En la construcción de la concha de nautilus, cada triángulo genera un nuevo triángulo semejante y adyacente a él y es así como obtenemos la estructura que se parece a la espiral logarítmica…

Este episodio evidencia un primer acercamiento a la construcción de triángulos propuesta en el diseño, y al continuar exponiendo E4 hace mención de la progresión aritmética y la progresión geométrica como característica principal de una espiral logarítmica. Sin embargo, E5 continua afirmando que el concepto era desconocido para ellas y al explorar se encontraron con el plano polar, que no supieron identificar y lo denominaban como un plano cortado por diagonales que a partir de un punto trazaban ortogonales generando triángulos semejantes (Episodio 3)

Episodio 3: Noción de progresión geométrica

E5: …y de esta parte comenzamos a trazar… ortogonales y ya así, si continuamos, no tengo marcador… pero si continuamos se va haciendo algo de esa forma [haciendo un giro espiral con el dedo]... *y se generan triángulos semejantes con ángulos constantes donde el radio va en aumento es decir que el crecimiento es exponencial y equidistante a eso se refiere con progresión geométrica.*

Con esta primer mirada es claro que ellos aludían a la progresión geométrica como un comportamiento de crecimiento veloz de una longitud. Lo interesante es como esta información no es utilizada durante la actividad, que serán reflejados en el siguiente episodio.

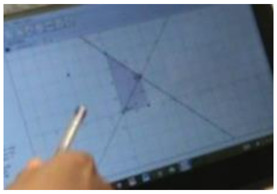
La primera encomienda del día, luego de la presentación de la investigación realizada por el equipo 1, fue utilizar GeoGebra. Después de construir un primer triángulo se daba la siguiente instrucción: Construyan un siguiente triángulo semejante tal que uno de sus catetos sea la hipotenusa del anterior, para después repetir la construcción. La complicación aparece, en el equipo 2, al querer construir un tercer triángulo pues la posición de este no favorece (Episodio 4).

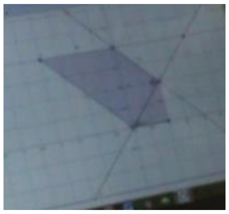
Episodio 4: ¿Cómo continuar la construcción?

E1: *Prolonga la línea…(risas) traza una recta que pase por esos dos puntos, vas a utilizar la anterior … y traza una perpendicular que pase por ese punto… No, sabes que, no es, tienes que borrarla me equivoque.*

E2: *Si porque mira, tomando el ángulo al eje equis hace un ángulo recto, entonces por lo tanto este y este tiene la misma medida…*

E2: *Debe ser el lado del anterior… debe medir dos*





En el cuadro mostramos el proceso de construcción del triángulo, donde al principio no tomaron en cuenta que uno de los lados es la hipotenusa del anterior, enfocándose únicamente en buscar el ángulo recto. Notamos también que utilizaban únicamente valores numéricos para validar la construcción dejando atrás cualquier criterio de semejanza.

Continuando con la actividad y teniendo varios triángulos construidos comenzaron con su análisis, en el cuál se les cuestiono sobre ¿Qué es lo que va variando y que se mantiene constante? ¿Qué datos podemos obtener de nuestra construcción? ¿Qué regularidades encuentran en ello? El equipo 2 comenzó afirmando que lo que variaba eran las hipotenusas, en las cuales centraron su análisis. E2 comenzó por explorar en una hoja de su cuaderno haciendo un dibujo de lo formado en geogebra, asentando las medidas de las hipotenusas extraídas de los datos que proporciona el software. En esta parte también percibimos la carencia de utilizar los radianes, pues no lograba expresar 135° y al preguntar a sus compañeros dudaron en la respuesta, fue hasta la intervención de P2 que lograron las expresiones necesarias.

En el análisis de la variación que ellos identificaron, E2 comienza por acomodar los datos en una tabla, en la cual definió “feos (con decimal) y bonitos (enteros)” (Episodio 5)

Episodio 5: “Feos y bonitos”

E1: pues nada más me gustan los bonitos, dos, cuatro, ocho (Escribe las longitudes de las hipotenusas)… *es uno feo, uno bonito, uno feo, uno bonito, uno feo, otro bonito*

Se les cuestiona acerca si podían predecir el siguiente número en la tabla, afirmando que los números bonitos crecían exponencialmente por tal motivo sabían que seguía un número bonito, pero ¿Qué pasa con los números feos? interrogante que desató una discusión entre el equipo dando distintas respuestas:

E1: ¡*OH ya! mira cada que es un número bonito como tú dices* (risas) *por ejemplo aquí es cero ¿no? aquí es pi medios, aquí es pi (relacionando "los bonitos" con los ángulos), aquí es, como, es, es tres pi cuartos, y aquí va a ser este dos pi,*

P1: *si no tuviéramos esta parte de geogebra, como calcularías este, este, este y este, los feos como tú los llamas*

E2: *por Pitágoras, mira aquí está éste de hecho*

P2*: por qué propusiste esa idea*

E2*: Pués es que, aquí como que este numerito va afuera, este va aquí luego raíz de dos, este aqui luego raíz de dos y así...*

Se puede observar el uso de calculadora para simplificar las raíces y poder validar la respuesta, al cuestionarlos qué ocurre cuando obtenemos *n* triángulos las respuestas inmediatas fueron $n\sqrt{2}$ pues en el episodio anterior afirmaban que la regla de la sucesión era el número anterior afuera y al lado raíz de dos, cuando se dieron cuenta que no era lo que buscaban optaron por buscar algo exponencial llegando de esta manera a la forma general.

A manera de conclusión

El estudio de este caso reveló la indiferencia hacia los datos, pues previamente habían sido dotados de información útil para su desempeño en la actividad además de la incertidumbre que existe cuando dentro de los datos no existe un patrón uniforme visible. También comprobamos que medir en radianes no es usual complicando así su expresión.

El estudio de nuestro caso nos muestra que la argumentación en el trabajo con software generalmente va acompañada de datos numéricos obtenidos de él, dejando atrás los por qué, de esos valores.

Desde una primera mirada a lo construido geométricamente, detectar las variaciones en los radios, contrastarlas con la variación constante y articular estas variaciones, surge la indagación de la expresión de la espiral logarítmica. Evidencias éstas de un acercamiento de los estudiantes a lo covariacional logarítmico-exponencial. De lo mencionado nos dan pautas para próximas investigaciones como el contraste de los dos equipos, así como el análisis de los alumnos que vivieron experiencias particulares de la actividad y que rol juegan dentro de la actividad.

Referencias bibliográficas

Arrieta, J. & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 18*(1), 19-48.

Buendía, G. & Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22* (pp. 1287-1296). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992)(Eds.) *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* MAA Notes, Vol. 25. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C., & Amidon, J. (2012). Quantifying exponential growth: The case of the jactus. In R. Mayes & L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* (pp. 93–112). Laramie, WY: University of Wyoming.

Ferrari, M. & Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 13*(4), 53-68.

Gonzáles, M. & Vargas, J. (2007). Segmentos de la historia: la función logarítmica. *Matemáticas Enseñanza Universitaria XV* (2), 129-144.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.): *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp.51-74). N.Y., USA. Springer.

Liang, C. B., & Wood, E. (2005). Working with Logarithms: Students' Misconceptions and Errors. *The Mathematics Educator*, *8*(2), 53–70.

Martínez-Sierra, G. (2012). Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 15*(1), 35-62.

Molina, M., Castro, E., Molina, J., Castro, (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a traves de los experimentos de enseñanza. *Revista de enseñanza de la ciencias* 29(1), 75-88.

Montiel, M., Vidacovik, D., Elstak, I., Wilhelmi, M. (2009). Using the ontosemiotic approach to identify andanalyze mathematical meaning when transiting between different coordinate system in a multivariate context. *Educacional Studies in Mathematics*.(72), 139-160.

Ramírez, T & Ferrari, M. (2011). Las coordenadas polares: Algunos de sus usos en disciplinas de investigación específicas. En L. Sosa, R. Rodríguez, y E. Landa (Eds.) *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. (pp.111-117). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.