EXPLORAÇÃO DE LUGARES GEOMÉTRICOS PLANOS COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Elisabete Teresinha Guerato, Vera Helena Giusti de Souza
Instituto Federal de São Paulo, Universidade Anhanguera de São Paulo (Brasil)
eguerato@globo.com, verahgsouza@gmail.com

Palavras chave: Geometria, GeoGebra, demonstração, ensino e aprendizagem

Key words: GeoGebra, proof, teaching and learning

RESUMO: Projeto de Tese de Doutorado em Educação Matemática, com o objetivo de desenvolver abordagens que favoreçam a elaboração de conjecturas sobre propriedades de alguns Lugares Geométricos Planos e de alavancar a necessidade da elaboração de demonstrações. Questão de pesquisa: "Construções geométricas, exploradas com a geometria dinâmica, favorecem a elaboração de conjecturas sobre propriedades de alguns lugares geométricos planos e a demonstração dessas conjecturas?" Metodologia: aplicar algumas atividades a um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática, com o uso do software GeoGebra, para posterior discussão sobre a necessidade de demonstração dessas conjecturas, com papel e lápis. Os protocolos serão analisados com base nas ideias sobre demonstração de De Villiers, Parsysz e Balacheff.

ABSTRACT: PhD Thesis Project in Mathematics Education whose goals are develop approaches that favor the development of conjectures about properties of some two dimensional Locus and leverage the need to do proofs in Mathematics. Research question: "Geometric constructions, explored by Dynamic Geometry, favor the development of conjectures about properties of some two dimensional locus and the need for proofs of these geometric places?". Methodology: apply some activities to a group of Degree Course students of Mathematics using software GeoGebra and later use of paper and pensil to discuss the need for proofs. The protocols will be analyzed based on the ideas about demonstration of De Villiers, Parsysz and Balacheff.

INTRODUÇÃO

Após a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, em 2012, com o trabalho "Tratamento Vetorial da Geometria Analítica Plana", desenvolvida com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 1993, 1995, 2000, 2003, 2006, 2011), surgiu a possibilidade de um trabalho com as disciplinas Geometria Euclidiana Plana e Desenho Geométrico, com alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Na primeira disciplina, num ambiente papel e lápis, com régua e compasso, demonstraram-se as propriedades que podiam ser ¨vistas¨ na disciplina Desenho Geométrico, com o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra. Notou-se, por parte dos alunos, uma grande dificuldade na elaboração de demonstrações em geral, principalmente em Geometria. Estas dificuldades geraram questionamentos que deram origem a este projeto de pesquisa que, para ser iniciado, foi alimentado pelas ideias de pesquisadores que têm tratado do tema demonstração em matemática.

De Villiers (2001), nos seus estudos, verificou que construções realizadas com um *software* de Geometria Dinâmica poderiam alavancar a demonstração de propriedades geométricas, a partir de experiências realizadas com a dinamicidade do *software*. Analisando-se as pesquisas de De Villiers, e também as de Balacheff (1987) e de Parzcysz (2006), que têm foco na aprendizagem da Geometria, delimitou-se o tema desta pesquisa, que tem por objetivo verificar se a exploração de alguns Lugares Geométricos Planos com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra pode auxiliar na aprendizagem das demonstrações em Geometria, num curso de formação de professores de Matemática e pretende responder às questões: 1. Construções geométricas, exploradas com um *software* de geometria dinâmica, favorecem a elaboração de conjecturas sobre as propriedades de alguns Lugares Geométricos Planos? 2. Tais conjecturas, exploradas com um *software* de geometria dinâmica, provocam a necessidade das demonstrações? 3. Essas explorações, com o uso de um *software* de Geometria Dinâmica, favorecem as demonstrações?

Ao se delimitar o tema, optou-se pelo estudo de alguns Lugares Geométricos Planos, em duas situações complementares: primeiro, pelo uso das construções com o software de Geometria Dinâmica GeoGebra, para a emergência de conjecturas; em segundo lugar, pela discussão teórica, para se evidenciar a necessidade de demonstração em Matemática, principalmente em estudantes que serão futuros professores de Matemática da Educação Básica.

As etapas desta pesquisa serão: verificar nos documentos oficiais quais as propostas indicadas para o estudo da Geometria e das demonstrações; estudar as teorias dos pesquisadores De Villiers, Balacheff e Parzysz, bem como analisar trabalhos da área de Educação Matemática que tratam do assunto demonstração com as teorias elencadas; analisar as ementas das disciplinas Geometria Plana e Desenho Geométrico da instituição de ensino onde a pesquisa será realizada, bem como os livros didáticos indicados nestas ementas, para verificar como o assunto demonstrações é abordado nestes livros e a ocorrência ou não do tema Lugares Geométricos Planos; verificar quais são as possibilidades de utilizar o *software* GeoGebra como instrumento para a integração entre essas duas disciplinas; elaborar uma trajetória didática para o ensino de alguns Lugares Geométricos Planos, a partir do uso de construções geométricas com o *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra; desenvolver a trajetória didática com um grupo de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática e analisar os resultados obtidos.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Michael de Villers, No seu livro "Repensando a prova com Sketchpad", De Villiers trata da importância da demonstração no conhecimento matemático e é sobre esse aspecto da sua obra que trataremos a seguir.

Segundo De Villiers, um dos maiores problemas enfrentados pelo professor é que seus alunos, em geral, costumam questionar por que demonstrar nas aulas de matemática, principalmente quando estão estudando geometria e o resultado do teorema a ser demonstrado parece ao aluno óbvio ou facilmente percebido empiricamente.

Em razão disso, De Villiers se propõe a responder à seguinte pergunta, em seu texto: “Que funções tem a demonstração na própria Matemática que podem ser utilizadas na sala de aula para tornar a demonstração mais significativa para os alunos?”. Para responder a essa pergunta, analisa as diversas funções da demonstração em Matemática e propõe que, segundo ele, não pode ser encarada apenas como uma forma de convencer os cépticos de que algum teorema é verdadeiro. O rigor dedutivo, segundo outros autores que também estudam a demonstração em Matemática, pode sofrer mudanças e tornar-se mais sofisticado com a passagem do tempo. Eles dizem que para que haja progresso no rigor, deve-se duvidar do que foi utilizado no momento em que foi realizada a demonstração.

Uma forma de se verificar e se convencer de que uma conjectura é verdadeira, sem demonstrá-la, é por meio do uso de *softwares* de geometria dinâmica, tais como o *Sketchpad*, o *Cabri Geométré*, o *Mathematica* ou ainda o *GeoGebra*. Estes *softwares* servem para o convencimento sobre a validade da proposição e muitas vezes mostra o caminho a ser seguido para chegar à demonstração formal das conjecturas propostas. De Villiers propõe outras funções para a demonstração que são: verificação, explicação, sistematização, descoberta, comunicação e desafio intelectual.

A demonstração como processo de verificação/convencimento

Em geral, os professores de matemática acreditam que a demonstração é a única maneira de convencer que uma conjectura é verdadeira, porém se alguém não estivesse convicto de que um teorema é válido que motivos o levariam a tentar demonstrá-lo? Na maior parte das vezes, a tentativa da demonstração é iniciada apenas após se ter convicção de que o resultado é verdadeiro. Uma maneira de se ter esta convicção é verificando a validade do teorema em vários casos particulares.

Existem casos em que existe uma convicção tão grande da validade de uma conjectura que ela é aceita como verdadeira mesmo sem que ninguém tenha conseguido demonstrá-la, como é o caso da famosa Hipótese de Riemann, Davis e Hersh sobre os números primos que se tem certeza da sua validade embora ninguém ainda tenha conseguido prová-la formalmente.

Dessa forma, De Villiers recomenda que se façam testes empíricos antes de se começar uma demonstração formal, pois esses podem auxiliar na demonstração e diminuir a chance de erros e inconsistências.

Ao se aplicar esta recomendação nas aulas de Geometria da Educação Básica os testes podem e devem ser feitos usando-se o computador por meio de *softwares* de Geometria Dinâmica, pois eles possibilitam a verificação da propriedade em muitos casos particulares o que faz com que o aluno perceba que existe grande possibilidade que a propriedade seja válida sempre e que sua validade possa ser demonstrada.

A demonstração como processo de explicação

Embora muitas vezes possamos explorar, por meio de métodos empíricos, experimentais ou numéricos determinada conjectura, apenas a demonstração poderá explicar porque ela é verdadeira. Nesse caso, a demonstração não apenas verificará a validade da propriedade elencada, mas explicará porque isso acontece.

Na Educação Básica esta função é muito utilizada pelo professor ao apresentar uma teoria para seus alunos. Para o estudante a teoria ganha mais credibilidade quando ele vê o professor demonstrando a sua validade, mesmo que esta demonstração não seja cobrada do estudante. Quando, mais adiante o aluno tiver a necessidade de efetuar uma demonstração sozinho, esta demonstração realizada pelo seu professor servirá de exemplo e motivação para tanto.

A demonstração como processo de descoberta

A maioria das descobertas em Geometria parte de métodos intuitivos ou quase empíricos; no entanto, não são poucos os resultados que nunca apareceriam de forma intuitiva ou empírica, pois resultam de processos puramente dedutivos. É improvável que, por exemplo, as geometrias não euclidianas pudessem surgir de maneira empírica ou intuitiva.

O matemático profissional diz que a demonstração não é um processo para se mostrar que resultados descobertos intuitivamente são verdadeiros, mas também uma forma de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados.

Ao tentar verificar que um resultado é verdadeiro, muitos matemáticos, ao usar suas tentativas, chegam a outros resultados inesperados ou ainda a generalizações não intuídas anteriormente, que mostram que a demonstração também pode ter a função da descoberta.

Na Educação Básica esta função da demonstração pode ser explorada ao se jogar um problema para que o aluno explore usando o *software* de Geometria Dinâmica e elabore conjecturas. Assim ele vai descobrir propriedades dos objetos estudados e perceber caminhos que levem à demonstração.

A demonstração como processo de sistematização

Por mais experimentos empíricos ou intuitivos que façamos, não conseguiremos nunca checar todas as possibilidades para podermos afirmar que uma conjectura é verdadeira. Apenas a demonstração nos permitirá concluir que ela é verdadeira sem sombra de dúvida e essa conclusão surge a partir da sistematização.

De Villiers apresenta algumas das funções mais importantes de uma sistematização dedutiva. São elas:

Ajuda a identificar inconsistências, argumentos circulares, e hipóteses escondidas ou não explicitamente declaradas;

Unifica e simplifica as teorias matemáticas ao integrar e ligar entre si afirmações, teoremas e conceitos não relacionados, conduzindo assim a uma apresentação econômica de resultados;

Fornece uma perspectiva global ou vista de conjunto de um tópico, ao mostrar a estrutura axiomática subjacente do tópico a partir da qual todas as outras propriedades podem ser derivadas;

Constitui uma ajuda para as aplicações tanto dentro como fora da matemática, pois torna possível verificar a possibilidade de aplicação de toda uma estrutura complexa ou teoria através de uma avaliação de aplicabilidade dos seus axiomas e definições;

Conduz muitas vezes a sistemas dedutivos alternativos que fornecem novas perspectivas e/ou são mais econômicos, elegantes e poderosos do que os existentes.

Embora notemos elementos de verificação nessa proposta, o principal objetivo nesse caso não é o de verificação, mas sim de organizar as afirmações que estão isoladas numa ordem coerente e unificada. A explicação também está presente nesse contexto, mas nesse caso o objetivo não é uma explicação local, mas sim uma explicação geral do fenômeno.

Na Educação Básica esta função está presente quando o aluno organiza uma demonstração. Ele tem que organizar os passos da demonstração tomando o cuidado para utilizar apenas dados que estão na hipótese do teorema a ser demonstrado além de organizar o passo a passo da demonstração de modo que esta fique coerente e provem sem sombra de dúvidas que a tese é válida.

A demonstração como meio de comunicação

A interação entre matemáticos se faz por meio das suas descobertas em Matemática e essas descobertas são organizadas na forma de demonstrações de teoremas. Ao se comunicar entre si, os matemáticos observam, julgam, identificam falhas e inconsistências nos teoremas demonstrados e isso é uma forma de comunicação. Ao comunicar suas descobertas, por meio de demonstrações aos seus pares, os matemáticos têm como julgar seu trabalho, verificar se há inconsistências em suas conclusões ou até ter acesso a contraexemplos que os levem a pensar mais no assunto e chegar a novas conclusões a respeito de suas descobertas.

Esta função da demonstração é observada na Educação Básica quando o aluno analisa uma demonstração realizada por um matemático e tenta entendê-la mesmo que seja mais complexa do que ele seria capaz de fazer. Ao observar e analisar estas demonstrações o aluno poderá ser capaz de mais adiante realizar estas ou outras demonstrações com a mesma complexidade.

A demonstração como desafio intelectual

Para os matemáticos, a demonstração é um desafio onde ele mostra a sua competência em fazer matemática. Demonstrar um teorema para um matemático equivale a montar um quebra cabeças para um leigo ou ainda a escalar uma montanha ou completar uma maratona para um atleta. Por mais que essa montanha já tenha sido escalada por outros, o desafio de completar essa jornada traz uma satisfação pessoal ao atleta, semelhante à satisfação que um matemático tem ao demonstrar um teorema, mesmo que este já tenha sido demonstrado por outros matemáticos anteriormente.

Para o aluno da Educação Básica esta função está presente quando ele começa a realizar demonstrações. Cada demonstração que realiza é um desafio que ele vence, por mais simples que seja a demonstração realizada e é ainda um incentivo a continuar demonstrando outros teoremas propostos.

Essa lista de funções da demonstração não deve ser julgada como completa e elas não são únicas em cada situação, pois podemos encontrar uma função prevalecendo em detrimento das outras ou até verificar que uma ou mais funções não podem ser consideradas. O que temos é que existem diversas funções da demonstração, não só a de verificação de resultados.

Ensino da demonstração com o GeoGebra

De Villiers usou, em suas experiências, o *software* de geometria dinâmica Sketchpad, para ensinar demonstração aos alunos. Para tanto, colocou-os para investigar com cuidado uma conjectura geométrica com o *software,* para que tivessem convicção quanto à validade da mesma. Uma vez convictos da validade, os alunos passaram a ter curiosidade de saber por que o resultado é verdadeiro. Nessa hora, o professor desafia o aluno a tentar explicar o porquê da veracidade do resultado e é aí que o interesse em demonstrar o teorema se manifesta. Nesse momento, a função da explicação está sendo usada na demonstração.

Outro aspecto que ele explorou foi a função da descoberta, seguida da função da comunicação. A função da verificação ficou reservada para as situações onde o aluno de alguma forma tenha dúvida quanto aos resultados encontrados. Alguns alunos não sentirão a demonstração como desafio intelectual, mas será interessante que percebam que para outros alunos esse desafio existe. A função da sistematização deve ser deixada para o momento em que o aluno já tem alguma experiência com demonstrações, devendo ser evitada num curso introdutório.

Enfim, De Villiers sugere uma ordem para que se explore as funções da demonstração que pode ser retomada em espiral. É ela: explicação → descoberta → verificação → desafio intelectual → sistematização.

Inspirados nessas experiências de De Villiers, colocamos como objetivo de nossa pesquisa verificar se a exploração de alguns Lugares Geométricos Planos com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica GeoGebra pode auxiliar na aprendizagem das demonstrações em Geometria, num curso de formação de professores de Matemática. Para atingir este objetivo vamos realizar uma experiência com os alunos, com o *software* de geometria dinâmica GeoGebra, de modo que esses alunos elaborem conjecturas a partir de observações feitas nas construções com o software e que estas conjecturas propiciem a elaboração de demonstrações formais. A escolha do *software* GeoGebra se deve ao fato dele ser semelhante ao Sketchpad, usado por De Villiers, porém é um *software* livre, muito usado nas escolas brasileiras e que professores dominam o seu uso cada vez mais, devido, principalmente, à facilidade que há ao seu acesso.

Nicolas Balacheff

Nicolas Balacheff (Balacheff, 1987) diferencia explicação, prova e demonstração. Para ele, **explicação** é um discurso que torna inteligível um tipo de verdade, exposto por um locutor, de uma proposição ou de um resultado. Os argumentos podem ser discutidos, refutados ou aceitos.

Um exemplo de explicação é quando o professor, na Educação Básica, apresenta um novo conteúdo aos alunos e demonstra a validade das propriedades e das fórmulas usadas no desenrolar deste conteúdo. Na Educação Básica, o rigor na demonstração pode não ser entendido pelo aluno e isso acaba levando o professor a usar explicações no lugar de demonstrações formais.

Um exemplo de explicação é quando o professor, na Educação Básica, apresenta um novo conteúdo a seus alunos e demonstra a validade das propriedades e as fórmulas usadas no desenrolar deste conteúdo. Na Educação Básica, o rigor na demonstração pode não ser entendido pelo aluno e isso acaba levando o professor a usar explicações no lugar de demonstrações formais.

A **prova**, para Balacheff, é uma explicação aceita por uma dada comunidade, em um dado momento. Esta decisão pode ser objeto de um debate, no qual a exigência é determinar um sistema de validação comum aos interlocutores. No interior da comunidade matemática, só podem ser aceitas por prova explicações que adotam uma forma particular.

Balacheff (1987) define como **demonstração** provas que são formadas por uma série de enunciados organizados, segundo regras determinadas: um enunciado é conhecido como sendo verdadeiro, ou é deduzido de outros que o precedem com a ajuda de uma regra de dedução, tomada num conjunto de regras bem definidas.

A demonstração, com esta formalidade, dificilmente é utilizada na Educação Básica, pois o aluno poderá não entender a prova ou a demonstração e apenas decorar as demonstrações, ao invés de entendê-las e, eventualmente, desenvolvê-las.

Balacheff (1987) reserva a palavra **raciocínio** para designar a atividade intelectual, a maior parte do tempo não explícita, de organização de informações para, a partir de dados, produzir novas informações. Estas distinções de vocabulário evidenciam as dimensões sociais da demonstração, que resultam de um processo particular de prova.

Ele se propõe a mostrar que o estudo dos processos de prova são importantes tanto para os que realizam as demonstrações como para os que as estudam. Desta forma, a proposta é encarar a demonstração numa perspectiva de aprendizagem.

Bernard Parzysz

Outro teórico que estuda as demonstrações é Bernard Parzysz, cujas ideias surgiram a partir dos estudos de Van Hiele. Ele diferencia a "geometria de observação" da "geometria de demonstração" e diz que o objetivo dos professores no ensino da Geometria é fazer com que os alunos passem da "geometria de observação" para a "geometria de demonstração". Segundo ele, para resolver um exercício de geometria se usa um ir e vir, muitas vezes conflituoso e implícito, entre estes dois "tipos" de geometria.

A partir desses dois tipos de geometria, Parzysz propõe quatro enfoques diferentes para a abordagem da geometria, que nomeia de G0 (concreta), G1 (espaço-gráfico), G2 (proto-axiomática) e G3 (axiomática).

Os níveis G0 e G1 são dedicados à "geometria concreta", nos quais os objetos estudados são concretos e os níveis G2 e G3, à "geometria teórica", nos quais os objetos estudados são conceituais.

No **nível G0**, a geometria é concreta e não pode ser considerada ainda uma geometria, pois é apoiada pela realidade e pelo concreto. Neste nível, o aluno tira conclusões a partir do que observa nos objetos concretos que se assemelham aos objetos geométricos.

Este nível é atingido pela criança no início da alfabetização, quando ainda não domina integralmente a escrita e suas observações ainda são focadas no concreto. Consideramos que o aluno está neste nível na primeira etapa do Ensino Fundamental.

No **nível G1,** a geometria é *espaço-gráfica* e é não-axiomática, apoiada em situações concretas para construir os objetos geométricos. Neste nível, os objetos não são mais concretos, mas são representações, em papel ou na tela do computador, dos objetos que observa no concreto.

Consideramos que o aluno atinge este nível no final da primeira etapa e no início da segunda etapa do Ensino Fundamental, quando começa a conhecer mais elementos da Matemática, tais como algumas operações que passa a realizar com a álgebra e algumas propriedades geométricas que consegue identificar visualmente como, por exemplo, classificar um triângulo pelas medidas de seus lados ou pelas medidas de seus ângulos.

Parzysz classifica o **nível G2** como sendo o nível chave, pois nele encontramos elementos do concreto e elementos do teórico. Neste nível, o aluno já reconhece propriedades dos objetos geométricos e é capaz de justificar teoricamente a sua validade sem, no entanto, apoiar-se num sistema dedutivo e axiomático.

A nosso ver, o aluno atinge o nível G2 ao final do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, quando começa a ter mais conhecimentos matemáticos, como, por exemplo, relações entre dois triângulos usando a congruência ou a semelhança, ou ainda quando consegue relacionar as medidas dos lados com as medidas dos ângulos de um triângulo, usando para isso conceitos da trigonometria.

No **nível G3**, a Geometria é Axiomática e é o nível no qual os alunos estudam a geometria utilizando os diversos axiomas, inclusive comparando-os. Sem o uso de um sistema axiomático, não podemos considerar que estamos neste nível.

Podemos considerar que o nível G3 somente é atingido quando o aluno tiver conhecimentos suficientes para fazer um tratamento axiomático da geometria e isso só ocorre, a nosso ver, quando estiver num curso superior da área de exatas e for estudar disciplinas relacionadas à Geometria.

DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Esta pesquisa encontra-se em andamento e, das etapas da pesquisa que elencamos ao final da introdução, já desenvolvemos: os documentos oficiais e as ementas do curso foram analisados; os livros didáticos que estão nestas ementas encontram-se em processo de análise, para verificar como as demonstrações em Geometria encontram-se nestes livros.

Algumas atividades foram elaboradas e aplicadas a um grupo de alunos. Estas atividades geraram um materialfq escrito e gravado que está sendo analisado à luz das teorias indicadas. Alguns alunos que se encontram no final da Licenciatura em Matemática participaram da atividade como observadores e um deles foi entrevistado, a fim de se delimitar quais rumos serão seguidos de agora em diante.

Como esta pesquisa faz parte de um curso de doutoramento em Educação Matemática, o exame de qualificação foi marcado e pretende-se, a partir das sugestões dadas pelos membros da banca, delimitar os rumos que a pesquisa deverá seguir para chegar à sua conclusão em mais um ano aproximadamente. A experiência de levar este trabalho ao congresso do RELME foi enriquecedora, uma vez que as pessoas presentes no dia e local da apresentação puderam dar suas contribuições, que serão muito úteis para a finalização desta tese.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Balacheff, N. (1987) Processus de Preuve et Situations de Validation. Educational Studies in Mathematics 18, 147-176. DOI: 10.1007/BF00314724

De Villiers, M.D. (2001) Papel e Funções da Demonstração com o Sketchpad. *Educação e Matemática* 62, 31-36.

De Villiers, M.D. (2002) Para uma Compreensão dos Diferentes Papéis da Demonstração em Geometria Dinâmica. *Em atas do Prof MAT*. Viseu: Associação Portuguesa de Matemática.

De Villiers, M.D. (2002) *Algumas Biografias de Participantes do ProfMat*. Recuperado em 15/09/2015 de http://www.apm.pt/profmat2002/biografias.html.

Guerato, E.T. (2012) *Tratamento vetorial da Geometria Analítica Plana*. Dissertação não publicada de Mestrado Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo. Brasil.

Parzcysz, B. (2006) La Géométrie dans l'Enseignement Secondaire et em Formation de Professeurs des Écoles: de Quois s'Agit-il? *Quaderni di Ricerca in Didattica.* 17, 128-151.