JOGO COM DADOS E A COMPREENSÃO DOS CONHECIMENTOS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM FORMAÇÃO INICIAL SOBRE PROBABILIDADE

José Ivanildo Felisberto de Carvalho, Robson Macedo Candeias.
Universidade Federal de Pernambuco (Brasil), Universidade Anhanguera De São Paulo (Brasil)
ivanfcar@hotmail.com, profmacedo@uol.com.br

Palavras chave: educação matemática. ensino de probabilidade. formação de professores. conhecimento matemático para o ensino.

Key words: mathematics education. probability teaching. teachers' education. mathematical knowledge for teaching.

RESUMO: O propósito deste trabalho é discutir os conhecimentos necessários ao professor para o ensino de Probabilidade na escola básica por meio de uma atividade de jogos com dados. Temos como marco teórico os estudos sobre conhecimentos necessários aos professores para o ensino de matemática. Aplicamos uma atividade denominada "o lançamento de três dados" a um grupo de 48 estudantes de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do Brasil. Os resultados apontam lacunas e dificuldades no conhecimento desse grupo sobre Probabilidade. A formação de professores em matemática, especificamente concernente aos temas probabilísticos, deve ser melhorada para que seja possível alcançar patamar satisfatório do Conhecimento Matemático para o Ensino de Probabilidade.

ABSTRACT: The purpose of this article is to discuss the necessary knowledge of the teacher for teaching probability in elementary school through a gaming activity with data. We have as a theoretical framework the studies necessary knowledge to teachers for the teaching of mathematics. We applied an activity named "the launch of three dice" for a group of 48 students of Degree in Mathematics of a public university in Brazil. The results show gaps and difficulties in the knowledge of this group of probability. The formation of mathematics teachers, specifically concerning the probabilistic issues, must be improved so that it is possible to achieve satisfactory levels of Mathematical Knowledge for Teaching Probability.

INTRODUÇÃO

No Brasil, encontramos recomendações curriculares para que o ensino de Probabilidade seja abordado tanto na etapa de escolaridade do Ensino Fundamental (estudantes de 6 a 14 anos) como na etapa do Ensino Médio (estudantes de 15 a 17 anos) (Brasil, 1997; 1998; 2006). É justamente para essas etapas de escolaridade que professores de matemática em formação inicial serão responsáveis para desenvolver com os estudantes as noções elementares de Probabilidade. Dentre estas noções, temos a compreensão do acaso, experimentos aleatórios, mapeamentos de espaços amostrais e a quantificação de probabilidades, nos quais devem ser abordados e trabalhados com os estudantes visando o letramento probabilístico dos mesmos (Gal, 2005).

Os professores devem estar preparados para lidar com situações que envolvem a matemática da incerteza e do risco. Contreras, Díaz, Batanero e Cañadas (2013) têm sugerido a necessidade de melhorar a educação sobre Probabilidade que professores recebem durante sua formação para prepará-los mais adequadamente para a sua atividade docente. Os professores devem estar convencidos da importância da abordagem dos temas probabilísticos no Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Batanero (2015, p.13) aponta que a introdução da Probabilidade na escola, pode ser justificada por diversas razões, entre elas a de que "o azar impregna nossa vida e rodeia a criança desde a infância; é importante proporciona-lhes ferramentas para compreender o azar."

A pesquisa que aqui tratamos se justifica pela necessidade de desenvolvermos investigações que tratem dos conhecimentos dos professores sobre Probabilidade, particularmente dos professores destinados a etapa de escolarização do Ensino Fundamental e Médio. Banatero (2015) advoga que investigações sobre Probabilidade são poucas comparadas com outros temas da Matemática. E que muitas das investigações que já foram conduzidas sobre Probabilidade situam-se em sua maioria com futuros professores de Educação Primária.

ANTECEDENTES

Fernandes, Ferreira, Kataoka, Souza e Gonçalves (2008) observam em seus estudos que atualmente no Brasil, a ausência de temas relacionados com a Probabilidade e estatística nos principais cursos de matemática é uma deficiência grave na formação inicial de professores. Isso vai influenciar a competência dos professores em trabalhar com o tema da Probabilidade no Ensino Fundamental e Médio.

Nos estudos de Pietropaolo, Silva, Campos e Felisberto de Carvalho (2015), com professores em exercício dos anos finais do Ensino Fundamental no Brasil, os resultados indicaram que uma parte razoável dos professores participantes da pesquisa tem domínio não-satisfatório de noções e procedimentos relativos à Probabilidade como, por exemplo, a determinação do espaço amostral para calcular a probabilidade de um evento. Foi possível também concluir que as estratégias utilizadas por esses docentes para ensinar Probabilidade não são muito diversificadas, possivelmente por não dominarem suficientemente tais noções. Ou seja, os professores demonstraram ter um repertório de estratégias insuficiente para a tarefa de ensinar as primeiras noções desse tema aos alunos do 6º ao 9º anos. Outro estudo foi o desenvolvido por Theis e Savard (2010)envolvendo conceitos probabilísticos e a preparação de aulas de Probabilidade por professores do Ensino Secundário, utilizando um software que simulava jogos de sorte-azar; os autores consideram que os professores sujeitos de sua pesquisa não estavam suficientemente preparados para ensinar os conceitos de Probabilidade e não aproveitaram o uso do software para discutir os diferentes conceitos. Já Carter (2008) propôs um questionário a um grupo de 210 futuros professores, também do Ensino Secundário. Ao analisar as respostas encontrou erros na compreensão sobre sequências aleatórias e ainda, indiferença com respeito ao efeito do tamanho da amostra.

Ives (2009) realizou um estudo com cinco futuros professores de matemática do Ensino Secundário, com foco nos conhecimentos desses professores. Registros de entrevistas pessoais e das atividades realizadas foram analisados sob a perspectiva de alguns quadros teóricos, dentre eles os estudos sobre conhecimentos de professores de matemática baseado Ball, Thames e Phelps (2008), teoria essa que também utilizamos em nossa escolha teórica e discutimos na seção que se segue. A pesquisadora descobriu que os futuros professores apresentam orientações que tendem a ser quase objetiva (matemática e estatística), com pouca evidência de orientações subjetivas. Pontua que para um futuro professor com uma orientação matemática mais forte, eles podem ter dificuldade ao lidar com situações que são mais de natureza estatística e probabilística. Com a investigação a pesquisadora descobriu que as atividades que envolvem situações pedagógicas tendem a ser mais eficazes em induzir conhecimento do que atividades que envolvem apenas questões do conhecimento matemático.

Estes estudos apontam a urgência de uma melhor abordagem da Probabilidade na formação inicial do professor de matemática.

ESCOLHAS TEÓRICAS

Como o propósito deste trabalho é discutir os conhecimentos necessários ao professor para o ensino de Probabilidade na escola básica por meio de uma atividade de jogos com dados, tomamos como base os estudos de Ball, Thames e Phelps (2008). Esses estudos também nos serviram de guia na condução da atividade e na análise dos dados. Estes pesquisadores visão, entre outras questões, o que os professores necessitam saber e ser capazes de fazer, efetivamente, para desenvolver o trabalho de ensinar. Vamos discorrer sobre duas categorias deste modelo ao qual focamos neste texto – o conhecimento comum do conteúdo e o conhecimento especializado do conteúdo.

O *conhecimento comum do conteúdo* refere-se ao conhecimento colocado em jogo para resolver determinados problemas matemáticos por qualquer pessoa que tenha estudado Matemática seja professor ou não. No que diz respeito ao ensino de Probabilidade, o professor deve ter a capacidade de, por exemplo, diferenciar entre eventos aleatórios e determinísticos e mapear espaços amostrais de eventos mais simples.

No tocante ao *conhecimento especializado do conteúdo* – este inclui, por exemplo, aspectos como identificar ideias matemáticas que dão base a resolução de um problema e prever erros de alunos compreendendo as estratégias de raciocínio que determinados problemas matemáticos envolvem. Com o conteúdo de Probabilidade o professor deve dominar as noções que sustentam o conceito de Probabilidade e, além disto, compreender os diferentes papéis dos significados probabilísticos (intuitivo, clássico, frequencista, subjetivo e axiomático). O modelo aponta outras categorias que não explicitaremos nesse momento.

Outra escolha teórica em que nos embasamos consiste nos estudos de Batanero (2005). A autora discorre sobre cinco significados probabilísticos, a saber: intuitivo, clássico, frequentista, subjetivo e axiomático. Vamos tratar apenas sobre os dois significados abordados pela atividade "Lançamento de três dados" – o clássico e o frequentista.

O significado da Probabilidade clássica foi sistematizado por Pierre-Simon Laplace (1749 – 1827) e é largamente utilizado no ensino até os dias de hoje: "a razão deste número àquele de todos os casos possíveis é a medida desta probabilidade, que assim não mais é que uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis (P_A) e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis (N)." (LAPLACE, 1814, p. 35 *apud* COUTINHO, 2007, p.16). Esta abordagem para encontrar *a priori* a probabilidade é denominada como probabilidade clássica, teórica ou até laplaciana: $P(A) = P_A / N$.

Considere-se que, no decurso de ***N*** realizações de uma experiência, um acontecimento ***A*** ocorre N_A vezes ($0 \leq N_A \leq N$). A probabilidade do acontecimento é definida como o limite, quando ***N*** tende ao infinito, da frequência relativa de ocorrência do acontecimento ***A.*** Esta definição compreende o significado frequentista. Como podemos observar a probabilidade frequentista é calculada com base na realização de um número crescente de ensaios. Podemos dizer que é uma probabilidade calculada *à posteriori.* Assim, a abordagem frequentista vai relacionar a probabilidade da experiência aleatória com a frequência relativa do acontecimento, que tende a estabilizar quando se repete esta experiência um número grande de vezes tendendo a infinito: $\lim_{n\to\infty} Fr_n (A) = P(A)$.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta investigação corresponde a um estudo de caso, no qual aplicamos uma análise qualitativa de conteúdo para extrair e compreender os conhecimentos dos participantes da pesquisa durante a implementação de uma sequência didática orientada para a construção do conhecimento sobre probabilidade. Salientamos que neste estudo com os licenciandos em matemática centramos o olhar para o conhecimento comum e especializado do conteúdo proposto por Ball, Thames e Phelpes (2008), uma vez que não estamos analisando a sua prática.

Conforme exposto em nosso marco teórico, da categorização discorrida por Batanero (2005), a atividade que aqui apresentamos uma análise, trata apenas dos significados clássico e frequentista. Convém informar que a referida atividade fez parte de uma sequência didática desenvolvida com os estudantes; mas como não será possível apresentar nesse texto todas as atividades que compõe a sequência e a análise das respostas, discutiremos apenas a primeira atividade que foi o "Lançamento de três dados" e as conclusões surgidas mediante a análise qualitativa da mesma. Os participantes da pesquisa foram 42 estudantes matriculados na disciplina de Estatística de um curso de Matemática-Licenciatura de uma instituição superior pública do Brasil. Todos os estudantes estavam cursando a disciplina pela primeira vez, no entanto, este conhecimento deve está sistematizado na conclusão da etapa de ensino anterior, no Brasil esta etapa corresponde ao Ensino Médio.

A atividade denominada "Lançamento de três dados" teve como objetivo perceber a abordagem frequencista como uma estimativa da probabilidade e a influência da lei dos grandes números. Os participantes realizam a atividade individualmente e com uso do computador.

Enunciamos da seguinte forma: Jogue 3 dados e some os pontos obtidos e anote todos os resultados .Repita essa jogada 20 vezes. Responda o questionário anotando quantas vezes você conseguiu uma soma de 3 pontos, quantas de 4, quantas 5, etc.(Atenção: só responda o questionário após as 20 jogadas).

Ao final apresentávamos as seguintes questões: 1). *Qual a chance, ao lançar os dados, o resultado da soma ser 8?* 2) *Qual a probabilidade, ao lançar os dados, o resultado da soma ser 8?*

Os estudantes registravam suas respostas em um formulário virtual que se constituíram nos protocolos de análise. Para análise desses protocolos adotamos uma perspectiva de análise qualitativa e não apenas quantitativa com base em acertos e erros. Por meio dos protocolos e do debate em sala de aula pudemos levantar dados (estratégias adotadas e justificativas dos estudantes) para uma análise mais significativa no que concerne aos conhecimentos (comum e especializado) de probabilidade, envolvendo dois dos significados de probabilidade pontuados por Batanero (2005), ao qual estamos apresentando neste texto.

Os estudantes foram informados que as respostas geradas pelo formulário virtual seriam identificadas pelos pesquisadores, mas eles teriam suas identidades protegidas. Todos aceitaram participar voluntariamente da atividade e da pesquisa.

Dessa forma, a atividade proposta teve como finalidade investigar os conhecimentos dos estudantes do curso de Matemática-licenciatura (futuros professores de matemática) segundo as categorias de Ball, Thames e Phelpes (2008), especificamente o conhecimento comum e especializado do conteúdo.

Considerando o espaço da formação inicial dentro de uma perspectiva dialógica, após todos terem respondido levamos para a sala de aula algumas das respostas para discussão, permitindo assim refletir sobre os conhecimentos envolvidos com a atividade e a mobilização do significado clássico e do significado frequentista.

Para finalizar, propomos a construção de uma animação gráfica com as frequências acumuladas das respostas dos lançamentos realizados pelos 35 estudantes por meio de um simulador gráfico. Desta forma, realizamos a comparação entre o gráfico dos lançamentos de um estudante e o gráfico dos lançamentos de todos os estudantes, ou seja, o último gráfico apresentado contém a frequência acumulada de 700 lançamentos (35 estudantes x 20 lançamentos). Foi possível visualizar a noção da lei dos grandes números – frequências tendem a se estabilizar com um maior número de lançamentos.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A implementação da atividade “Lançamento dos três dados” com os futuros professores de matemática nos propiciou identificar algumas noções apresentadas por esse grupo e utilizá-las para a discussão e ressignificação do conceito de Probabilidade. Uma primeira inferência envolveu o significado da noção de “chance” e “probabilidade” É comum essas noções causarem certa confusão do ponto de vista do seu significado. Entendemos chance como as possibilidades de um determinado evento acontecer; e a probabilidade o número que mede esta chance.

Incluímos as questões 1). *Qual a chance, ao lançar os dados, o resultado da soma ser 8?* 2) *Qual a probabilidade, ao lançar os dados, o resultado da soma ser 8?* sabendo que não são as mesmas coisas. Os resultados nos apontam que com este grupo também houve dificuldade em compreender a diferença entre chance e probabilidade. Ter clareza dessa diferença ajuda na compreensão da noções probabilísticas elementares e permeia o conhecimento especializado de Probabilidade. Abaixo a resposta de um dos participantes.

Figura 1. resposta do estudante nº 17

chance:	probabilidade:
20, porque a soma 8 pode acontecer nas 20 jogadas.	S={3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18} Evento da soma ser 8: P= 1/15 = 0,067 = 6,7%

Podemos observar da resposta do estudante nº 17, futuro professor de matemática, (figura 1) a dificuldade no mapeamento do espaço amostral, ao apresentar que $P = {}^{1}/_{15}$ se deve ao fato de que em seus lançamentos a soma 8 apareceu apenas 1 vez, e ainda, concluí erroneamente o total de casos possíveis deste experimento. . Alguns estudantes registraram que o espaço amostral seria 18, isto é, a soma das faces dos três dados (cada dado tem 6 faces: 6 x 3 = 18). Salientamos que é preciso saber trabalhar com qualquer espaço amostral para compreender e quantificar as probabilidades de um evento específico.

Figura 2. resposta do estudante nº 19

5 chances
1+2+5=8
1+3+4=8
1+1+6=8
2+2+4=8
2+3+3=8

No caso do estudante n. 19 (figura 2) percebemos a dificuldade com o mapeamento de todas as possibilidades. O estudante não leva em conta, por exemplo, que com os números 1, 3 e 4 podemos ter seis diferentes possibilidades ao permutar estes três números. Outro estudante escreveu que *"são varias as chances"* e que *"nesse meu caso foi 2 em 20..."* como se a probabilidade de sair a soma 8 nesses experimento fosse diferente para cada estudante que a realizasse. Tais dificuldades se categorizam como lacunas no conhecimento comum do conteúdo.

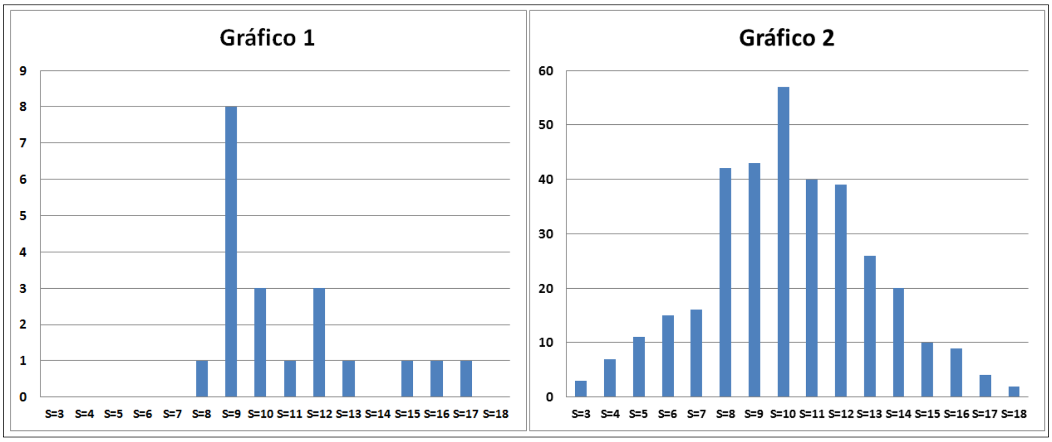
De todos os licenciandos, temos cinco estudantes que conseguiram mapear corretamente as possibilidades (21 chances) e encontrar corretamente a probabilidade em sua forma fracionária pela regra de Laplace (21/216) ou em porcentagem (aproximadamente 9,72%).Apresentamos na figura 3 uma dessas respostas.

Figura 3. resposta do estudante nº 23

> Sabendo que a probabilidade de sair um número no dado é 1/6.
> Você joga três dado então: 1/6 x 1/6 x 1/6 = 1/216.
> Como 21 foi a soma ser 8 e 216 a chance total de sair outros números, então a probabilidade da soma ser 8 é 21/216.

A seguir, na figura 4, apresentamos duas imagens da animação gráfica que utilizamos para discussão com os estudantes. Esses gráficos foram construídos a partir do preenchimento do formulário virtual.

Figura 4. Frequência dos lançamentos de um estudante (gráfico 1) e frequência acumulada dos lançamentos dos trinta e cinco estudantes (gráfico 2)



O gráfico 1 apresenta a frequência do resultado com base em apenas os 20 lançamentos realizados por um estudante. E o gráfico 2 apresenta a frequência acumulada dos 35 estudantes que responderam essa atividade (700 lançamentos).

Como podemos observar os estudantes, participantes desta pesquisa, chegam ao Ensino Superior com dificuldades em seu conhecimento sobre probabilidade. Compreender os procedimentos e significados das noções probabilísticas que dão base a essas construções permeiam tanto o *conhecimento comum como o especializado do conteúdo* (Ball, Thames e Phelps, 2008) e deve fazer parte do repertório do professor de matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As discussões por nós discorridas neste texto colocam em destaque a necessidade de promover com professores em formação inicial atividades que permitam um melhoramento do conhecimento comum e especializado do conteúdo. Concordando com Pietropaolo, Silva, Campos e Felisberto de Carvalho (2015) há de se tomar decisões e traçar uma metodologia que promova a ressignificação dos conhecimentos dos professores relativos à probabilidade. Este trabalho, tanto aponta resultados em que as dificuldades dos estudantes são reveladas, como acena para uma proposta de trabalho na formação inicial dos professores de matemática levando em considerações as referidas dificuldades. As dificuldades aqui sinalizadas se categorizam como lacunas no conhecimento do conteúdo. Ao mobilizar tais conhecimentos com os licenciandos em matemática (futuros professores) estaremos avançando na transição do conhecimento comum para o conhecimento especializado de probabilidade, e que, reverbere no Conhecimento Matemático para o Ensino de Probabilidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D., Thames, M. H.,& Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of teacher educacion*, 5(1), 389-407.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa, 8*(3), p. 247-263.

Batanero, C. (2015). *Retos en la investigación sobre didáctica de la probabilidad.* Relme 29 - Panamá: Carmen Batanero, 2015. 39 slides: com cor, acompanha texto.

Brasil. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática, 5ª a 8ª série*. Brasília: Ministério de Educação e Cultura – Secretaria de Ensino Fundamental.

Brasil. (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática, 1ª a 4ª séria.* Brasília: Ministério da Educação e Cultura – Secretaria de Ensino Fundamental.

Brasil. (2006). *Orientações curriculares nacionais para o Ensino Médio – ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* Brasília: Ministério da Educação – Secretaria de Ensino Médio e Tecnológico.

Carter, T. A. (2008). Preservice teacher knowledge and understanding of probability and statistics. In: Kulm, G. *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics (pp.19-43).* Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C., & Cañadas, G. R. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa e N. Climent (Eds.), *Actas XVII Investigación em Educación Matemática* (pp.237-244). Bilbao: SEIEM.

Coutinho, C. Q. S.(2007). Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? *REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *2*(3), 50-67.

Fernandes, F. M. O. de, Ferreira, E. B., Kataoka, V. Y., Souza, A. A., & Gonçalves, L. R. (2008). Investigação dos cursos de licenciatura em matemática nas universidades federais do Brasil: disciplinas de probabilidade e estatística. *Resumos do 18º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística*, Caxambu: MG.

Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In: G. A. Jones. *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning, (pp.39-63).* New York, NY: Springer.

Ives, S. E. (2009). *Learning to teach probability: relationships among preservice teachers‘ beliefs and orientations, content knowledge, and pedagogical content knowledge of probability*. Tese de Doutorado, Faculty of North Carolina State University.

Pietropaolo, R. C., Silva, A. F. G., Campos, T. M. M., & Felisberto de Carvalho, J. I. (2015). Conhecimentos de professores para ensinar probabilidade nos anos finais do ensino fundamental. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática,* 8(3), 126-156.

Theis, L. & Savard, A. (2010). Linking probability to real-world situations: how do teachers make use of the mathematical potential of simulations programs? *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society - Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics* (ICOTS8, July, 2010), Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.