ARTÍCULOS

Kandinsky, *Ovalo rojo,* Óleo sobre lienzo, 1920.

EL PLACER DE DOBLAR PAPEL. MOSTRACIONES Y ALGUNAS APLICACIONES MATEMÁTICAS

Orlando Monsalve Posada Carlos
Mario Jaramillo López

REVISTA EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

RESUMEN

EL PLACER DE DOBLAR PAPEL. MOSTRACIONES Y ALGUNAS APLICACIONES MATEMÁTICAS

Cuando realizamos en origami cualquier figura y luego la deshacemos, volviendo la hoja a su estado original, nos encontramos con una especie de plano geométrico de la figura que hemos elaborado.

El presente trabajo no pretende una axioma! ización o formalización de la geometría de dicho plano; esta labor ya la han desarrollado algunos de los autores mencionados en la bibliografía. Nuestro interés se centra, más bien, en llamar la atención sobre algunas aplicaciones que se desprenden de la actividad de doblar papel, a conceptos matemáticos como sucesión, límite, serie, convergencia y a algunas nociones de la geometría euclidiana.

RÉSUMÉ

LE PLAISIR DE PLIER DU PAPIER. QUELQUES ECHANTILLONS ET APPLICATIONS MATHÉMATIQUES

Lors *d'une activité d'origami, l'art oriental du pliage de papier, on peut apprécier, au moment de défaire les figurines qu'on avait deja pliées, remettant lafeuille de papier a sa forme originóle, comment les traces laissées par les plis configurent une sorte de plan géométrique de la figure que nous avions élaborée.*

Ce travail ría pas la prétention de postuler des axiomes ou deformaliser la géomélrie du plan retrouvé dans la figure dépliée, car il a deja étéfait par quelques auteurs cites dans la bibliographie. Notre intérét est plutót celui d'attirer l'attention sur les diverses applications qui découlent de la pratique du pliage de papier et leurs relations avec de concepts mathématiques, tels que serie, séquence, limite, convergence et quelques notions de la géométrie euclidienne.

msstzm

THE JOY OF FOLDING PAPER. SHOWINGS AND SOME MATHEMATICAL APLICATIONS

When we perform an origami object and then we undo it turning the sheet to its original state, wefind there some kind ofgeometric plan of the previously elaborated figure.

This paper does not intend any to achieve a geometric axiomatization or formalization ofthiat plan; that is something that has already been developed by some of the authors mentioned in the bibliography. Our emphasis is rather focused on calling the attention on some applications that are dcrivedfrom paper folding to mathematical concepts as series, sequences, limit, convergence and certain Euclidian geometric notions.

Origami, enseñanza de la matemática, enseñanza de la geometría
Origami, Mathematics teaching, Geometry teaching

EL PLACER DE DOBLAR PAPEL. MOSTRACIONES Y ALGUNAS APLICACIONES MATEMÁTICAS

Orlando Monsalve Posada* Carlos
Mario Jaramillo López"

INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge de un constante interrogar a los libros de texto utilizados en la enseñanza de la lengua en general y de la matemática en particular. Como es lícito sospechar, interrogantes como: ¿el texto guía es el único medio didáctico de acercarnos a ciertas demostraciones de la geometría? La comprensión de ciertas nociones del análisis matemático, mediante el doblado de papel, ¿son o no útiles para la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina?, no se les halla respuesta en los textos guía respectivos.

El presente trabajo refleja simultáneamente dos preocupaciones: la actividad gratificante del doblado del papel y su utilidad didáctica en el aula. Como actividad lúdica, proporciona un potencial cognoscitivo que no se puede desperdiciar cuando se la considera un simple juego agradable para pasar el tiempo. Su utilidad didáctica radica en que permite a los estudiantes, desde los primeros años escolares, acercarse en forma intuitiva a muchos conceptos matemáticos implícitos en dicha actividad lúdica. En otras palabras, en el nivel primario se justifica programar toda una serie de actividades papirofléxicas por la diversidad implícita de conceptos matemáticos que ella brinda.

Cuando aplicamos el doblado de papel como herramienta alterna para la solución de problemas, es sorprendente el interés y el entusiasmo con que los estudiantes enfrentan la solución de ciertos ejercicios propuestos en los libros clásicos de la enseñanza del cálculo.

Como profesores, estamos interesados en buscar herramientas que faciliten el aprendizaje de las matemáticas y nos familiaricen con ella, para así evitar someter a los estudiantes a tortuosas experiencias que les dejan un sabor amargo y un repudio por esta disciplina, pues las matemáticas no son una ciencia formal reservada para una élite intelectual. Cualquier profano interesado en la matemática puede asimilar ciertos conceptos de esta disciplina, a simple vista muy abstractos, mediante el doblado de papel u origami.

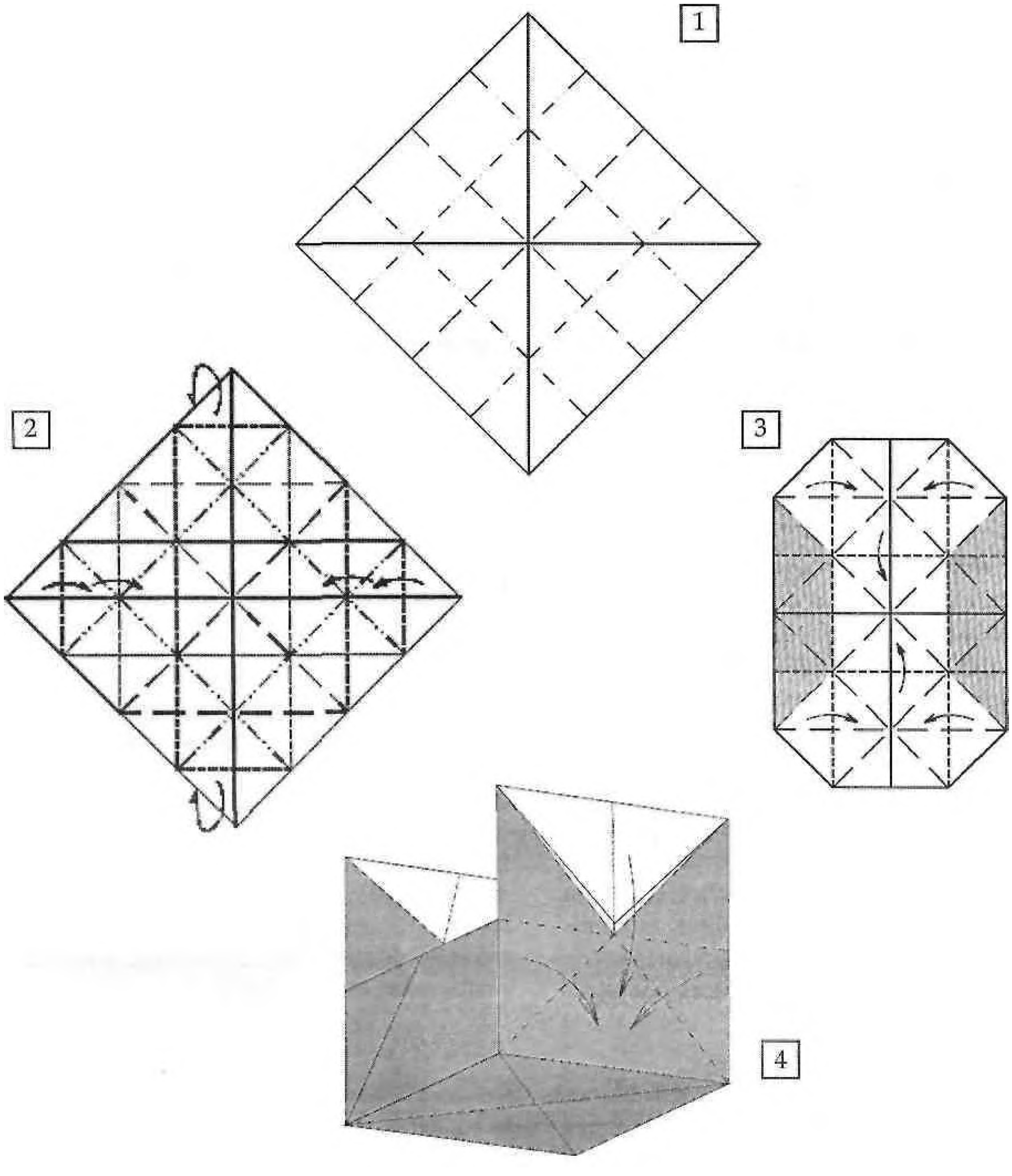
De acuerdo con lo anterior, los profesores deberán delimitar, muy claramente, los niveles de aplicación de lo acá propuesto y controlar los dos tipos diferentes de actividades a realizar con sus estudiantes.

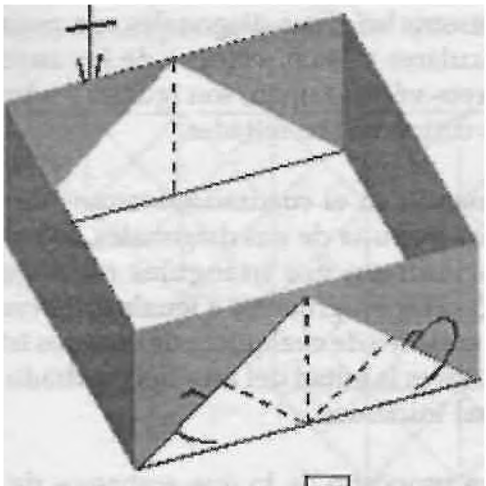
Profesor de tiempo completo, Facultad de Educación, Universidad de Antioquia.
Profesor de tiempo completo, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Antioquia. Dirección electrónica: cama@matematicas.udea.edu.co

UNA CAJA RECTANGULAR

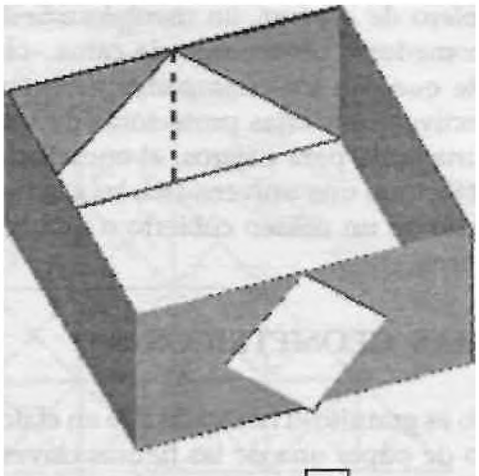
Entre las tantas figuras que se pueden hacer en origami, nos concentraremos en la elaboración de una caja rectangular utilizando únicamente el doblado del papel u origami; es de anotar que, en el origami clásico, no se permite rasgar, cortar, pegar, ensamblar, ni dibujar; sólo está autorizado hacer la figura utilizando los diversos dobleces que ella exija.

A continuación presentamos las instrucciones gráficas para la elaboración de la caja:





5



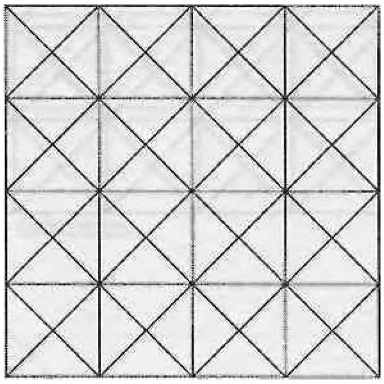
6

ALGUNAS APLICACIONES
MATEMÁTICAS DEL ORIGAMI

La hoja de papel hace parte de todo un arsenal de ayudas educativas funcionales y económicas que un profesor puede incorporar al quehacer docente dentro de un aula de clase en cualquiera de los niveles escolares. Como cualquier ayuda pedagógica, ella sólo tiene una limitación: la imaginación o la creatividad de quien la use.

El mosaico de dobleces, después de construida la caja, es un material tangible, como también una ayuda pedagógica en la cual mediante la imaginación, la creatividad y un poco de esfuerzo, podemos darle vida a expresiones matemáticas que nos parecía imposible llegar a familiarizarnos con ellas.

Pasemos ahora a desglosar la cantidad insólita de temas matemáticos: aritméticos, geométricos, algebraicos y algunos del cálculo, implícitos en la actividad papiroflexica que acabamos de ejecutar.



Si desbaratamos la caja que acabamos de elaborar y la desplegamos ante nosotros, veremos un hermoso mosaico que nos recuerda inmediatamente la geometría de la vida cotidiana: el embaldosado de una casa, los baldosines del baño, los adoquines de un parque, el tablero de ajedrez, un mantel en la mesa del comedor o un tendido de cama -obviamente que con los estampados geométricos respectivos-, las rejas protectoras de un patio, una jaula para pájaros, el enmallado de una fábrica o una universidad, las cerchas en el techo de un coliseo cubierto o una iglesia moderna...

TEMAS GEOMÉTRICOS

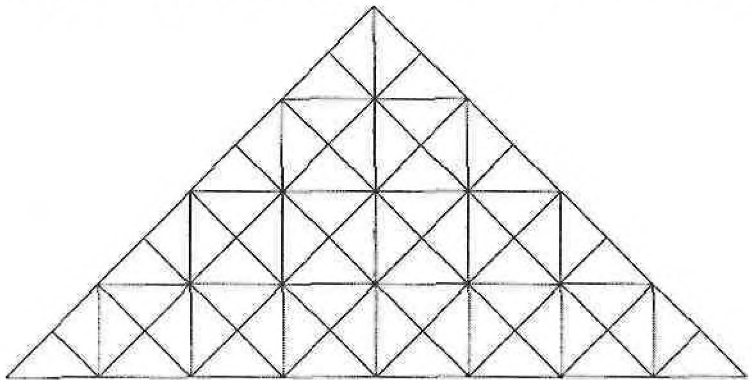
1. No es gratuito el hecho de que en el doblado de papel una de las figuras claves sea precisamente el cuadrado. Éste ha intrigado a más de una cultura: la china, la japonesa, la griega.... El cuadrado mágico de lado 3 es uno de los más antiguos, según lo narra Emmanuel Lizcano (1993). Es, además, una de las figuras más virtuosas de la geometría; reúne en sí mismo las características de los polígonos: cuadrilátero, rectángulo, paralelogramo, trapecio y rombo.

De otro lado, sus diagonales son perpendiculares y las bisectrices de los ángulos cuyos vértices unen, son iguales y además se cortan en sus mitades.

Cuando en el cuadrado hacemos un doblez por una de sus diagonales, lo hemos dividido en dos triángulos rectángulos isósceles congruentes e igualmente vemos que el área de cualquiera de esos dos triángulos es la mitad del área del cuadrado del cual iniciamos.

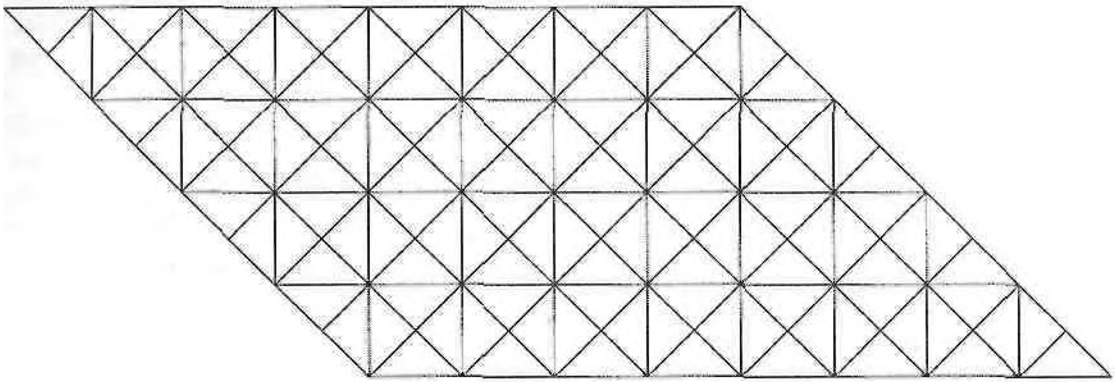
Y a propósito de lo que acabamos de comentar -saliéndonos por un momento del doblado de papel-, si recortamos los dos triángulos en que dividimos el cuadrado por su diagonal, podemos *mostrar* con ellos los siguientes problemas geométricos, tal como se acostumbra con el entretenido, apasionante y muy enriquecedor juego chino del *tangram}*

a. Construir un triángulo igualmente rectángulo isósceles que tenga la misma área del cuadrado.

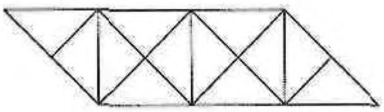


1. Rompecabezas compuesto por siete figuras geométricas: cinco triángulos (dos pequeños, uno mediano y dos grandes), un rombo y un cuadrado. Todas ellas cortadas de un mismo cuadrado.

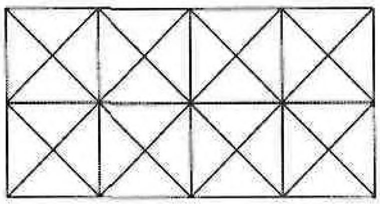
b. Construir un paralelogramo de idéntica área al cuadrado original.



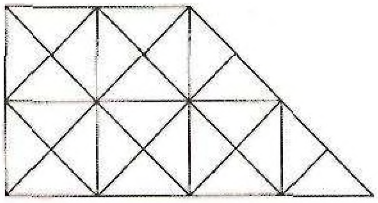
2. **Siguiendo con nuestra hoja, podemos ejecutar en ella los dobleces adecuados para que nos genere un paralelogramo similar al referido en el literal anterior.**

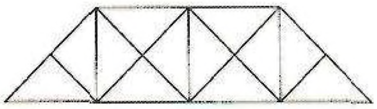


3. **Podemos bocetear un rectángulo:**

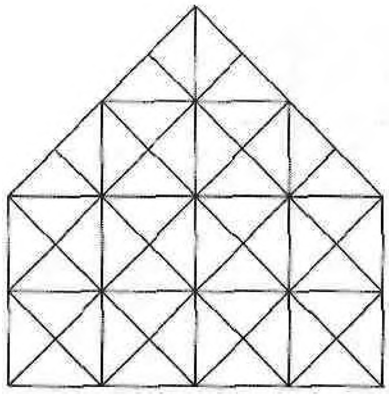


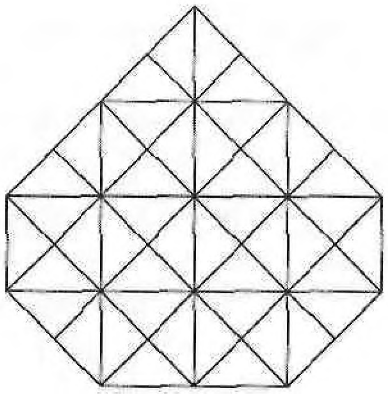
4. **Un trapecio rectángulo o uno isósceles:**



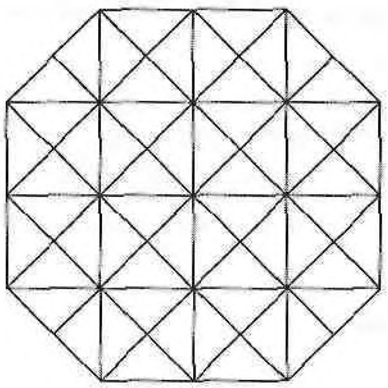


5. Una clase particular de pentágono y heptágono:

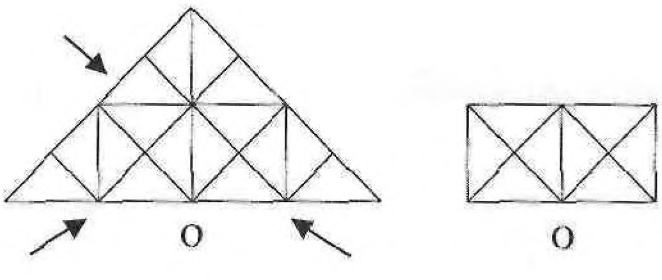




6. Un octógono con sus lados iguales cuatro a cuatro:



7. Podemos *mostrar*[2] que la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es 180° Para ello, volvamos a la división del cuadrado en dos triángulos. Si llevamos los tres vértices al punto común 0, los tres ángulos quedan en línea recta formando un ángulo plano o sea 180°.



2. Mostración: acercamiento intuitivo de carácter operatorio y multisensorialmente tangible a conceptos científicos de tipo matemático, físico, biológico o químico (Monsalve, 2000).

Podemos igualmente preguntarnos sobre la relación que guardan entre sí las áreas de los diversos triángulos con respecto al área total del cuadrado inicial; el área entre triángulos o entre los cuadrados.

8. Como ya sabemos que los triángulos generados son rectángulos e isósceles, en ellos podemos apreciar sus cuatro líneas notables: mediana, altura, bisectriz y mediatriz, como se puede verificar cotejando las respectivas definiciones en un libro de geometría.

9. Podemos preguntar por la totalidad de los triángulos en la hoja.

10. Asimismo, preguntar por la totalidad de cuadrados o de rectángulos.

11. Nos aparecen cuadrados inscritos en cuadrados o en triángulos.

12. Tenemos también la posibilidad de introducirnos en el campo de la geometría espacial, ya que la caja es un cuerpo tridimensional.

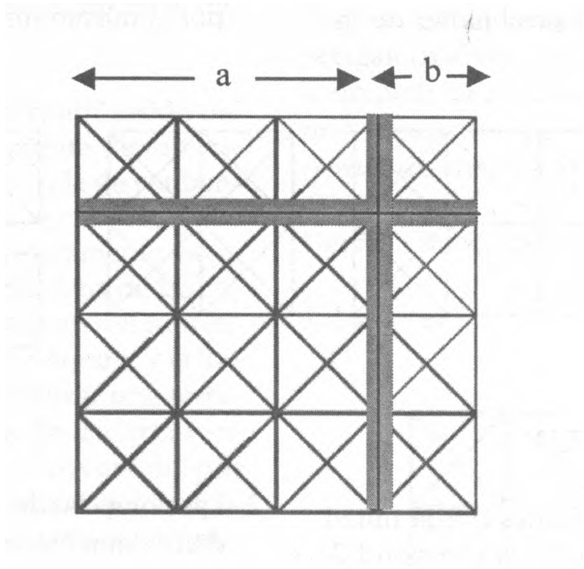
13. Podemos proponernos un último interrogante sobre el número de líneas que convergen en un punto determinado de la hoja.

14. Aparece también esbozado el teorema "toda paralela a un lado de un triángulo forma con los otros dos lados un triángulo semejante al primero".

15. Los mismos trazos que aparecen en la hoj a después de hacer la caja rectangular, de la cual estamos hablando, sirven también para la ejecución de otras hermosas figuras como la cruz, una letra L, una camisa, un barco de doble vela, una silla, el vestido de un samurai, etc.

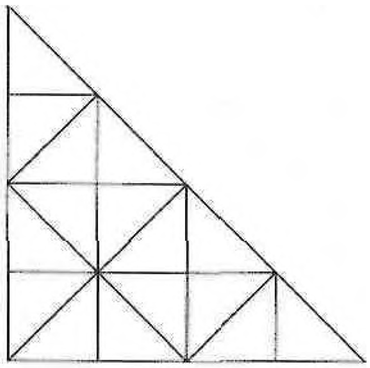
TEMAS ALGEBRAICOS

1. En la siguiente figura, el sector específico resaltado esboza los dos casos de factorización: $(a + b)^2$ y $(a - b)^2$



2. Si tomamos el cuadrado original y no ejecutamos sobre él alguna acción concreta, es obvio que nos queda la misma figura, es decir 2^0; el exponente 0 indica que no hemos ejecutado alguna acción sobre la hoja cuadrada, que en este caso es la unidad 1;

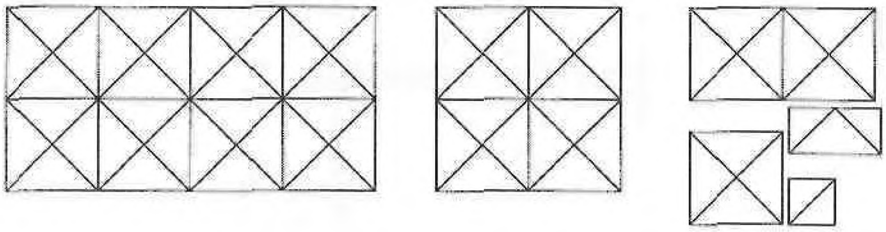
o 2° = 1. Cuando doblamos por la diagonal del cuadrado generamos dos triángulos, o sea 21; el exponente 1 en este caso nos indica la primera acción de doblar por la diagonal.



En adelante seguiremos doblando sobre la bisectriz de cada triángulo generado en el paso anterior; de esta manera, a cada nuevo doblado le corresponde una nueva potencia de 2, es decir, 2^2 (4 triángulos), 2^3 (8 triángulos), 2" (16 triángulos), 2^5 (32 triángulos), 2^6 (64 triángulos); como queda dicho, los exponentes hacen referencia al número correspondiente del doblado.

Como todos los dobleces se hacen por la mitad, entonces tenemos la posibilidad de introducir expresiones de la forma 1/2" o 2^n. El mismo procedimiento es válido si las divisiones se hacen en forma rectangular y no triangular, como la que acabamos de analizar, porque al final también tendremos 64 rectángulos.

3. Es igualmente posible una aproximación intuitiva a la noción de fractal, entendido éste como un proceso de división iterativo por el mismo número.



THMAS DEL CÁLCULO

1. **Cuando hacemos divisiones por la mitad en forma sucesiva, aparece la sucesión 1/2, 1/4,1/8,1/16,1/32,1/64......... /1/2'1,... y podemos intuir dicho concepto para luego pasar a las nociones de límite, sumatoria, serie, convergencia y divergencia.**

2. Las potencias de 2n, cuando n aumenta indefinidamente, nos llevan hacia el infinito (∞).

3. La expresión $1/2^n$, cuando n aumenta indefinidamente, se aproxima a cero.

$\frac{1}{2^x}$

$x \to \infty$ $x \to \infty$

$\left(1\right)^{x+5}$ $\left(1\right)^x$ $\left(1\right)^5$
$\left(x\right)$ $\left(x\right)$ $\left(x\right)$

$3x$

$x \to \infty$

Estos dos últimos numerales nos permiten introducir un concepto particular de límite, adecuado para estos dobleces:

Lim 2^x=co Lim — = 0

Ahora, podemos resolver el siguiente problema de cálculo diferencial, como aplicación directa de lo anterior:

Limll + --I =*Lim* ll + - *Lim*\ 1 + -J =e.l = e

x-»a> x-»oo x-»<x>

Ahora, dejaremos planteada esta otra aplicación:

f3x + 2V* *Lim*

{—)

4. En cada doblado estamos trabajando consciente o inconscientemente con el concepto *simetría por reflexión,* necesario en el trazado de curvas.

5. Acá también nos aparece la utilización del infinito potencial que permite dividir sucesivamente un segmento o la de contemplar una figura con una escala cada vez menor, de modo que sucesivamente vayamos ampliando su aspecto. Una de las críticas serias sobre la utilización del infinito potencial es la paradoja de Aquiles y la tortuga: «Aquiles trata de alcanzar una tortuga en movimiento que le lleva cierta ventaja. Durante el tiempo invertido por Aquiles en llegar a la posición que ocupaba la tortuga, ésta ha realizado un desplazamiento y ocupa una nueva posición. Cuando Aquiles recorre la distancia que le separa de la posición que ocupaba la tortuga, ella ha vuelto a realizar otro desplazamiento. De esta forma, Aquiles nunca alcanzará la tortuga». Esta paradoja plantea la posibilidad de fraccionar indefinidamente el espacio y el tiempo.

6. Finalmente, hemos puesto en juego el poderío de la abstracción, pues el doblado como hecho físico o acción concreta tiene un límite; como proceso mental, no lo tiene.

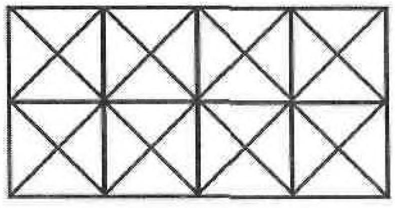
EXPERIENCIA CON UN PROBLEMA de CÁLCULO

A los estudiantes de cálculo integral se les dificulta la solución de algunos problemas que tienen que ver con *sucesión* y *series;* una posible razón es que no exploramos otras alternativas de solución de estos u otros problemas similares. Sorprende pues, ver cómo mediante el plegado de papel se descubren nuevas posibilidades que facilitan la comprensión de nociones matemáticas como las sucesiones y las series.

Regresemos al mosaico de nuestra caja y supongamos ahora que la medida de su lado es la unidad; luego el área de dicho cuadrado es uno, y pasemos a descomponer esta área, sin perder de vista los pliegues.

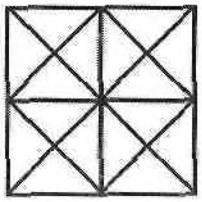
Del área inicial del cuadrado, tomemos:

1. La mitad:



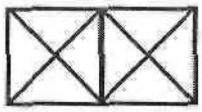
$\frac{1}{2}$ equivalente a $\frac{1}{2^1}$

2. Tomemos la cuarta parte:



$\frac{1}{4}$ equivalente a $\frac{1}{2^2}$

3. Tomemos la octava parte:

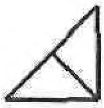


$\frac{1}{8}$ equivalente a $\frac{1}{2^3}$

4. Continuando con el proceso, la fracción siguiente es:

$\frac{1}{16}$ equivalente a $\frac{1}{2^4}$

5. Siguiendo en forma reiterada los pliegues, la fracción siguiente es:



$\frac{1}{32}$ equivalente a $\frac{1}{2^5}$

6. Finalmente:

$\frac{1}{64}$ equivalente a $\frac{1}{2^6}$

Observemos el conjunto de números que tenemos hasta el momento:

$$\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^5}, \frac{1}{2^6}$$

Ahora, imaginemos que existen más pliegues en forma indefinida; entonces, la secuencia que obtenemos a medida que descomponemos el área del cuadrado en cada una de sus partes también es indefinida y la escribimos así:

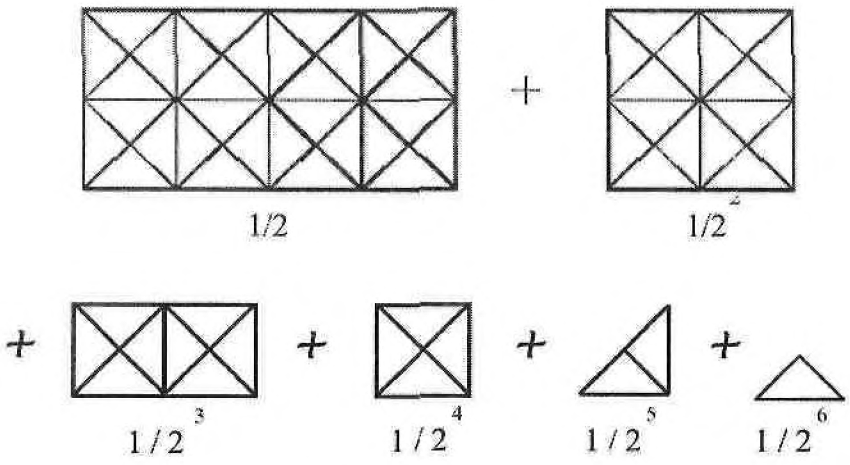
$$\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{1}{2^5}, \frac{1}{2^6}, \frac{1}{2^7}, \ldots$$

Tengamos en cuenta que el exponente del denominador de cada fracción de la secuencia va aumentando. Entonces la *n-ésima* área del cuadrado la representamos como $\frac{1}{2^n}$, en donde n es un número natural. De este modo al conjunto de números se le llama *sucesión* o *progresión geométrica* de razón común ½, que se representa por $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}$ y que se denomina el término *n-ésimo* de dicha sucesión.

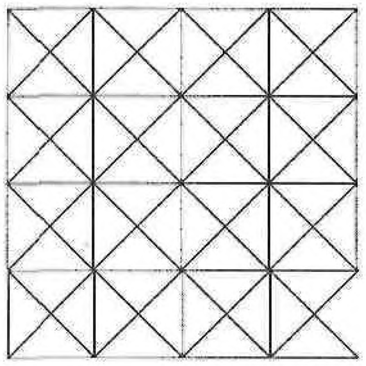
También podemos interpretar cada término de la secuencia como la mitad del término anterior, teniendo en cuenta que el primer término es la mitad del área inicial del cuadrado.

Observemos, detenidamente, en la sucesión $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}$, que a cada momento que n va tomando valores mayores, cada término de la secuencia se va haciendo cada vez más pequeño, tanto que se acerca al valor cero; en otras palabras, la sucesión converge a cero cuando n tiende a tomar un valor exageradamente grande.

Retomemos cada una de las descomposiciones del área del cuadrado y sumémoslas así:



Al juntar de nuevo cada una de estas descomposiciones observemos lo que obtenemos:



$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}$$

Esta gráfica es aproximadamente el cuadrado original de área uno. O sea que la suma es aproximadamente uno.

Ahora, si las descomposiciones del área del cuadrado son indefinidas, la suma que aparece es:

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$$

que, en otras palabras, es la suma indefinida de cada uno de los términos de la secuencia

$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$, cuya representación matemática es: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. Dicha expresión es una serie *infinita.* Podemos así establecer la siguiente igualdad:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$$

Finalmente, observemos la última figura y establezcamos la relación que existe entre las fracciones de área del cuadrado con cada uno de los ténninos de la serie:

$$\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$$

para concluir que la suma de dicha serie infinita es aproximadamente uno. En otras palabras, la serie Z^- es una serie geométrica convergentemente y converge a 1.

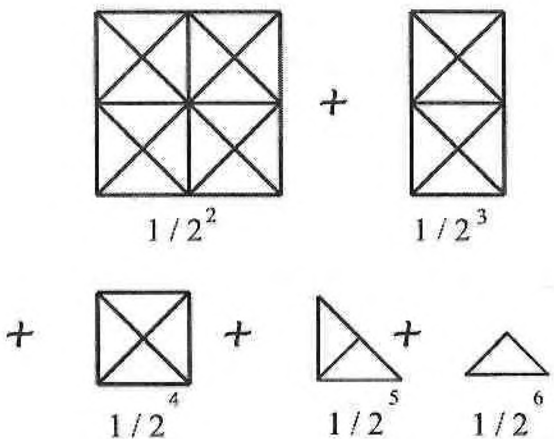
Otra alternativa bastante ilustrativa, ayudándonos con los pliegues, es recortar las fracciones de área correspondientes a cada uno de los términos de la serie y luego juntarlas, para así visualizar su convergencia. Obviamente que las fracciones de área sumamente pequeñas no es posible recortarlas; hay que imaginarnos la situación en el caso de que pudiéramos hacerlo.

Ahora, tomemos la serie desde $n=2$ o sea,

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Si aceptamos la sugerencia anterior, al recortar cada una de las fracciones de área del cuadrado a partir de $n=2$ y juntarlas, inmediatamente observamos que la sumatoria $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ converge a 1/2.

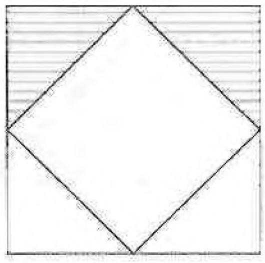
Mirémoslo gráficamente:



Imaginemos que podemos seguir cortando y juntando cada una de las fracciones de área correspondiente a los términos de la serie. Observamos que dicha suma converge a la mitad del área del cuadrado original.

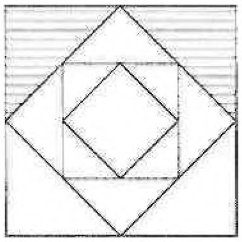
Todo lo anterior podemos aplicarlo a la solución del problema No. 69, del capítulo "Series infinitas" del libro de cálculo de Larson, Hostetler y Edwards, cuyo enunciado es el siguiente:

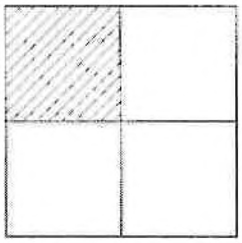
los lados de un cuadrado miden 16 cms. Se forma un nuevo cuadrado uniendo los puntos medios del cuadrado original; dos de los triángulos exteriores aparecen sombreados en la figura adjunta. Calcular el área de la región sombreada
a) si ese proceso se prosigue cinco veces más, y
b) si ese proceso continúa sinfín (1999,643).



No olvidemos que el área original de dicho cuadrado es 256, o sea 16^2, o también 2^8.

Como el lector dobló la caja y la desbarató, inmediatamente notará que el área sombreada de la figura es equivalente a $\frac{1}{4}$ de 256 cm^2, o sea 64 cm^2.





Ahora solucionaremos la parte b) del problema.

1. El área sombreada corresponde a $\frac{1}{2^2}$ de 256.
2. Si el proceso se prosigue cinco veces más, esto corresponde a $\frac{1}{2^3}$ de 256, $\frac{1}{2^4}$ de 256, $\frac{1}{2^5}$ de 256, $\frac{1}{2^6}$ de 256 y, finalmente, $\frac{1}{2^7}$ de 256.

El área sombreada resultante es la suma:

$$\frac{1}{2^2}(2^8)+\frac{1}{2^3}(256)+\frac{1}{2^4}(256)+\frac{1}{2^5}(256)+\frac{1}{2^6}(256)+\frac{1}{2^7}(256)$$

o también

$$\sum_{n=2}^{7}\frac{1}{2^n}2^8$$

esto es:

$$64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 = 126$$

Ahora, si el proceso se. continúa sin fin, tenemos:

$$\frac{1}{2^2}(2^8)+\frac{1}{2^3}(2^8)+\frac{1}{2^4}(2^8)+\frac{1}{2^5}(2^8)+\frac{1}{2^6}(2^8)+\ldots+\frac{1}{2^n}(2^8)+\ldots$$

o sea,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}(2^8) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}(256) = 256\left[\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right]$$

y ya habíamos analizado que:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

$$= 1$$

converge a £ ,

entonces la serie

g?(256) = 256^{A}=128

Luego, al continuar indefinidamente el proceso, el área de la región sombreada es de 128 cm^2.

CONSIDERACIONES FINALES

Los profesores debemos hacer un esfuerzo mancomunado para hallar alternativas que le permitan al estudiante asimilar conceptos necesarios para acceder a conocimientos más avanzados en el aprendizaje de las matemáticas.

Con seguridad que algunos de los lectores tienen diversas alternativas para la enseñanza y el aprendizaje de otros temas matemáticos; en compañía, lograremos que nuestros estudiantes disfruten de ellas como un juego que les permite potenciar el desarrollo de sus habilidades.

El lector puede darse cuenta, por sí mismo, de la estrecha relación existente entre el origami, la aritmética, la geometría, el álgebra y algunos temas del cálculo; el origami le permite al estudiante adquirir conocimientos y destrezas, y también desarrollar su creatividad e imaginación, ingredientes fundamentales para el desarrollo de la ciencia.

Relacionar el origami con la matemática es encontrar la oportunidad de estimular el desarrollo de los procesos cognitivos del estudiante para que pueda articular conceptos abstractos y operaciones concretas en el análisis, planteamiento y solución de problemas.

Robert Geretschláger (1995), quien hizo su tesis doctoral en análisis funcional, publicó en la revista *Mathematics Magazine* el artículo "Euclidian Constructions and the Geometry of Origami". Allí el autor utiliza procedimientos elementales de la geometría del origami para construir dos teoremas, resolver ecuaciones generales cúbicas y finalmente trisecar el ángulo. Concluye en su artículo:

> *Quizás las personas interesadas en la trisección de un ángulo, deberán centrar su atención en el futuro desarrollo del origami; en todo caso esperamos que se deriven importantes resultados del estudio sistemático de la geometría del origami* (1995, 357-370).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GERETSCHLÁGER, Robert (1995). "Euclidian constructions and the geometry of origami". In: *Mathematics Magazine.* Vol. 68, No. 5, (diciembre), pp. 357-370.

LIZCANO, Emmanuel (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática: la construcción social del número el espacio y lo imposible en China y en Grecia.* Barcelona: Gedisa.

MONSALVE POSADA, Orlando (2000). *Una brisa refrescante para la iniciación matemática.* Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. 45p.

BIBLIOGRAFÍA

BOLT, Brian. *Actividades matemáticas.* Barcelona: Labor, 1988.126p.

_______ *Aún más actividades matemáticas.* Barcelona: Labor, 1989. 214p.

_______ *Divertimentos matemáticos.* Barcelo na: Labor, 1990.128p.

_______ *Más actividades matemáticas.* Barce lona: Labor, 1990.135p.

BOLT, Brian y HOBBS, David. 202 *proyectos matemáticos.* Barcelona: Labor, 1991. 168p.

ENGEL, Peter. *Origami: from angelfish to zen.* New York: Dover, 1994. 248p.

GARDNER, Martin. *Nuevos pasatiempos matemáticos.* Madrid: Alianza, 1972. 326p.

GUZMÁN, Miguel de. *Aventuras matemáticas.* Barcelona: Labor, 1988.167p

_______ *Para pensar mejor.* Barcelona: La bor, 1991. 226p.

HULL, Thomas, "Geometric constructions via origami". In: *Proceeáings of the Second International Conference on Origami in Education and Therapy (COET95),* Origami USA, New York, 1995. pp. 31-38.

_______ "Origami[3]". In: *HULL, T. (ed.). Third international meeting of origami science, mathematics, and education sponsored by origami.* USA: Massachusets, 2002. 353p.

HUZITA, Humiaki. "Axiomatic development of origami geometry". In: HUZITA, H. (ed.). *Proceeáings of the First International Meeting of Origami Science and Technology,* 1989. pp. 143-158.

________ "The trisection of a given angle solved by the geometry of origami". In: HUZITA, H. (ed.). *Proceeáings of the First International Meeting of Origami Science ana Technology,* 1989. pp.195-214.

_______ "Understanding geometry through origami axioms: is it the most adequate me-thod for blind children?". In: J. SMITH (ed.). *Proceeáings of the First International Conference on Origami in Eáucation ana Therapy (COET91).* British Origami Society, 1992. pp. 37-70.

HUZITA, Humiaki and SCIMEMI, Benedetto. "The algebra of paper-folding (origami)". In: HUZITA, H. (ed.). *Proceeáings ofthe First International Meeting of Origami Science ana Technology,* 1989. pp. 215-222.

KNEISSLER, Irmgard. *Origami: papel plegaáo.* Madrid, Barcelona: CEAC, 1989.189p.

LARSON, Roland E.; HOSTETLER, Robert E y EDWARDS. *Cálculo y geometría analítica.* Madrid: Me Graw-Hill, 1995.

MONSALVE POSADA, Orlando. "Los enunciados lingüísticos de la matemática". En: *Revista Eáucación y Peáagogía.* Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, No. 14-15,1996. pp. 383-396.

MONTROLL, John. *Origami insiáe-out.* New York: Dover, 1993. pp. 20-21.

REFERENCIA

MONSALVE POSADA, Orlando y JARAMILLO LÓPEZ, Carlos Mario. "El placer de doblar papel. Mostraciones y algunas aplicaciones matemáticas". En: *Revista Educación y Pedagogía.* Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, No. 35, (enero-abril), 2003. pp. 11- 25.

Original recibido: mayo 2002

Aceptado: agosto 2002