



**EL CONCEPTO DE FUNCIÓN: UN ANÁLISIS
EPISTEMOLÓGICO DE ALGUNOS TEXTOS DE LA REFORMA DE LAS
MATEMÁTICAS MODERNAS Y ALGUNOS TEXTOS ACTUALES EN
COLOMBIA.**

Presentado por:

YISELL JOHANA CARVAJAL

Código: 200942885

YANCIRLEY VEGA ORTIZ

Código: 200937895

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
SANTIAGO DE CALI**

2014



**EL CONCEPTO DE FUNCIÓN: UN ANÁLISIS
EPISTEMOLÓGICO DE ALGUNOS TEXTOS DE LA REFORMA DE LAS
MATEMÁTICAS MODERNAS Y ALGUNOS TEXTOS ACTUALES EN
COLOMBIA.**

YISELL JOHANA CARVAJAL

YANCIRLEY VEGA ORTIZ

**Trabajo de grado para optar por el título de Licenciadas en Educación Básica Con
Énfasis en Matemáticas**

Dirigido por:

Mg. MÓNICA ANDREA APONTE

**UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
SANTIAGO DE CALI**

2014



UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

INSTITUTO DE EDUCACIÓN
Y PEDAGOGÍA

- 2 JULI 2014

Área de Educación Matemática

ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADUACION

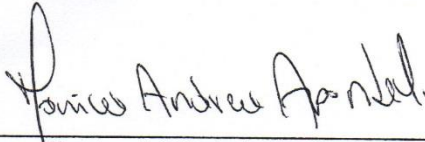


- Tenga en cuenta:
1. Marque con una **X** la opción escogida.
 2. diligencie el formato con una letra legible.

TÍTULO DEL TRABAJO:	CONCEPTO DE FUNCIÓN: UN ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO DE ALGUNOS TEXTOS DE LA REFORMA DE LAS MATEMÁTICAS MODERNAS Y ALGUNOS TEXTOS ACTUALES EN COLOMBIA							
Se trata de:	Proyecto	<input type="checkbox"/>	Informe Final	<input checked="" type="checkbox"/>				
Director:	Monica Andrea Aponte							
1er Evaluador:	Fabian Porras							
2do Evaluador:	Angela Maria Gómez							
Fecha y Hora	Año:	2014	Mes:	09	Día:	30	Hora:	4:30 pm
Estudiantes								
Nombres y Apellidos completos			Código		Programa Académico			
Yisell Johana Carvajal Elejalde			200942885		3469			
Yancirley Vega Ortiz			200937895		3469			

EVALUACIÓN					
Aprobado	<input checked="" type="checkbox"/>	Meritorio	<input type="checkbox"/>	Laureado	<input type="checkbox"/>
Aprobado con recomendaciones	<input type="checkbox"/>	No Aprobado	<input type="checkbox"/>	Incompleto	<input type="checkbox"/>
En el caso de ser Aprobado con recomendaciones (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de _____ (máximo un mes) ante:					
Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	
En el caso que el Informe Final se considere Incompleto , se da un plazo de máximo de _____ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:					
Año:	Mes:	Día:	Hora:		
En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la razón del desacuerdo y las alternativas de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).					

FIRMAS:		
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador



OBSERVACIONES:	RECOMENDACIONES:	RAZÓN DEL DESACUERDO - ALTERNATIVAS:
(si se considera necesario, usar hojas adicionales)		
<p>* En términos generales es necesario hacer ajustes de forma con relación a: Redacción, uso de mayúsculas, referencias bibliográficas, notas al pie, páginas de las ilustraciones, citas, imágenes cortadas, lo cual contribuye notablemente a la lectura más amable del trabajo.</p>		
<p>* Se resalta la metodología usada en el trabajo y el paralelo para caracterizar los textos de las 2 épocas, debe ajustarse la tabla de este paralelismo.</p>		
<p>* Se requiere hacer más evidente la manera como el estudio histórico-epistemológico aporta al análisis de los textos en particular en el uso de categorías como: notación de teoría de conjuntos, estructura formal axiomática, sistemas de representación, entre otros.</p>		
<p>* Entorno a la Reforma de las Matemáticas Modernas es importante al usar categorías como fracaso, desilusión, modelo bourbakista, entre otros, se indiquen algunos autores desde donde surge para evitar asumir como propias tales aseveraciones.</p>		
<p>* En algunos juicios al final de los análisis es importante revisar si al afirmar que "hay comprensión o garantía del aprendizaje", estos juicios se pueden derivar de un análisis de textos, lo cual consideramos no es medible y si la comprensión niega abordar las estructuras matemáticas.</p>		
<p>* Recomendamos en trabajos futuros presentar los autores de los textos.</p>		
<p>* Este trabajo abre perspectivas a futuras investigaciones.</p>		
<p> Director del Trabajo de Grado</p>	<p> 1er Evaluador</p>	<p> 2do Evaluador</p>

Gdo

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	2
CAPÍTULO 1	4
1. CONTEXTUALIZACIÓN A LA PROBLEMÁTICA DE TRABAJO.	4
1.1 Planteamiento y Justificación del Problema.....	4
1.2 Algunos Antecedentes a la Problemática.	8
1.3 Objetivos.	10
1.3.1 <i>Objetivo General</i>	10
1.3.2 <i>Objetivos Específicos</i>	10
1.4 Metodología.....	11
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS.....	13
2.1 Algunos Elementos Históricos y Epistemológicos del Concepto de Función.....	13
2.1.1 <i>Matemática Babilónica y la primación de la particularidad versus la generalidad.</i> 13	
2.1.2 <i>La matemática griega: El problema de la inconmensurabilidad y las paradojas.</i> ...14	
2.1.2.1 <i>La concepción de “Variabilidad” como característica exclusiva de las magnitudes físicas.</i> 15	
2.1.3 <i>La matemática en la edad media y la concepción geométrica de las Variables.</i>16	
2.1.4 <i>Siglos XV y XVI: La notación algebraica.</i>	17
2.1.5 <i>Siglo XVII: El problema de dependencia de dos cantidades variables.</i>	18
2.1.6 <i>Siglo XVIII: La función ligada al concepto de Curva.</i>	19
2.1.7 <i>Siglo XIX: El significado de función</i>	20
2.1.8 <i>Siglo XX: El carácter estático del concepto de función</i>	22
2.2 Caracterización de la Reforma de las Matemáticas Modernas.....	22
2.2.1 <i>La reforma en algunos países europeos y Estados Unidos</i>	22
2.2.2 <i>La reforma en América Latina</i>	23
2.2.3 <i>La reforma en Colombia</i>	24
2.3 Un acercamiento al concepto de función en el currículo actual de matemáticas.	24
CAPITULO 3	28
3. MODELO DE ANÁLISIS.	28

3.1	Significado del libro de texto.....	28
3.2	Valoración de los libros de textos de matemáticas	29
3.3	Criterios de selección de los libros de texto.....	31
3.4	Elementos teóricos asociados al modelo de análisis.	33
3.5	Antecedentes al modelo de análisis.....	36
CAPITULO 4.....		43
4.	ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTO	43
4.1	Caracterización de los libros de texto.	43
4.1.1	Descripción de los libros de texto pertenecientes a la época de la Reforma de las Matemáticas Modernas.....	44
4.1.2	Descripción de los libros de texto perteneciente a la época actual.	50
3.7	Aplicación de la rejilla de análisis.	58
3.7.1	Aplicación de la rejilla de análisis para los textos de la Reforma de las Matemáticas Modernas.....	60
3.7.2	Aplicación de la rejilla de análisis para los textos actuales.	62
4.	ANALISIS DE LOS RESULTADOS.....	64
5.1	Análisis del libro Matemática Moderna Estructurada 3.	64
5.1.1	Conclusiones del análisis del libro Matemática Moderna Estructurada 3.	68
5.2	Análisis del libro matemáticas para escuelas secundarias 2.....	69
5.2.1	Conclusiones del análisis del libro Matemáticas Modernas para escuelas secundarias 2.....	72
5.3	Análisis del libro ZonActiva Matemáticas 8.....	72
5.3.1	Conclusiones del análisis del libro ZonActiva Matemáticas 8.....	78
5.4	Análisis del libro Proyecto Sé Matemáticas 8.....	79
5.4.1	Conclusiones del análisis del libro Proyecto Sé Matemáticas 8.....	85
5.5	Comparación de los libros de texto de la Reforma de las Matemáticas Modernas y los libros de texto actuales.	85
6.	CONCLUSIONES GENERALES.....	88
7.	REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.....	92

TABLA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Representación de la variación de magnitudes dependientes según Oresme.	17
Ilustración 2: Grafica de la función	19
Ilustración 3: Caracterización libro Matemática Moderna Estructurada 3	44
Ilustración 4: Unidad II libro Matemática Moderna Estructurada	45
Ilustración 5: Unidad II libro Matemática Moderna Estructurada	46
Ilustración 6: Caracterización Libro Matemáticas Modernas para escuelas secundarias 2	47
Ilustración 7: Tema 16 Libro Matemáticas modernas para escuelas secundarias 2	48
Ilustración 8: Resumen, Examen y Repaso Tema 16 Libro Matemáticas modernas para escuela secundaria	49
Ilustración 9: Caracterización Libro ZonActiva Matemáticas 8	50
Ilustración 10: Unidad 6 Libro ZonActiva Matemáticas 8	51
Ilustración 11: Inicio Unidad 6 ZonActiva Matemáticas 8	51
Ilustración 12: Tu creación Libro ZonActiva Matemáticas 8	52
Ilustración 13: Para recordar Libro ZonActiva Matemáticas 8	53
Ilustración 14: Evalúa tus competencias Libro ZonActiva Matemáticas 8	54
Ilustración 15: Prueba saber Libro ZonActiva Matemáticas 8	55
Ilustración 16: Contenido libro Proyecto Sé Matemáticas 8	56
Ilustración 17: Inicio Unidad 5 Libros Proyecto Sé Matemáticas 8	58
Ilustración 18: Ejercicios Libro Matemática moderna estructurada 3	65
Ilustración 19: Concepto de Función Libro Matemática Moderna Estructurada 3	65
Ilustración 20: Descripción del Dominio e imagen de una función Libro Matemática Moderna Estructurada 3	66
Ilustración 21: Diagramas de Venn Libro Matemática Moderna Estructurada 3	67
Ilustración 22: Gráficos cartesianos Libro Matemática Moderna Estructurada 3	67
Ilustración 23: Símbolos Libro Matemática Moderna Estructurada 3	68
Ilustración 24: Ejercicios libro Matemáticas modernas para escuelas secundarias 2	69
Ilustración 25: Definición de función libro Matemáticas modernas para escuelas secundarias 2	70
Ilustración 26: Registro Tabular Libro Matemáticas modernas para escuelas secundarias 2	70
Ilustración 27: Registro gráfico Libro Matemáticas modernas para escuelas secundarias 2	71
Ilustración 28: Regla de la línea vertical para funciones Libro Matemáticas moderna para escuelas secundarias 2	71
Ilustración 29: Registro simbólico Libro Matemáticas modernas para escuelas secundarias 2	72
Ilustración 30: Ejercicios Libro ZonActiva Matemáticas 8	73
Ilustración 31: Tablas contextualizadas Libro ZonActiva Matemáticas 8	74
Ilustración 32: Actividad previa al concepto de función Libro ZonActiva Matemáticas 8	75
Ilustración 33: Concepto de función Libro ZonActiva Matemáticas 8	76
Ilustración 34: Registro tabular Libro ZonActiva Matemáticas 8	77
Ilustración 35: Traslación entre registros Libro ZonActiva Matemáticas 8	77
Ilustración 36: Ejercicios Libro Proyecto Sé Matemáticas 8	79
Ilustración 37: Ejercicios Libro Proyecto Sé Matemáticas 8	80
Ilustración 38: Concepto de función Libro Proyecto Sé Matemáticas 8	80
Ilustración 39: Registro tabular Libro Proyecto Sé Matemáticas 8	81
Ilustración 40 : Traslación entre registros Libro Proyecto Sé Matemáticas 8	82

Ilustración 41: Tic en el registro grafico Libro Proyecto Sé Matemáticas 8	83
Ilustración 42: Registro simbólico Libro Proyecto Sé Matemáticas 8	84

ÍNDICE DE TABLAS.

Tabla 1: Algunas definiciones del concepto de función	21
Tabla 2: Modos de representación y procesos de traslación	34
Tabla 3: Rejilla de análisis	42
Tabla 4: Rejilla de análisis para aplicar	59
Tabla 5: Aplicación Rejilla de Análisis Libro Matemática Moderna Estructurada 3	60
Tabla 6: Aplicación Rejilla de análisis Libro Matemáticas modernas para escuelas secundarias 2 ..	61
Tabla 7: Aplicación rejilla de análisis libro ZonActiva Matemáticas 8	62
Tabla 8: Aplicación rejilla de análisis libro Proyecto Sé Matemáticas 8	63
Tabla 9: comparación de los libros analizados	87

RESUMEN

En este trabajo de grado se pretende realizar una comparación entre los textos escolares correspondientes a la Reforma de las Matemáticas Modernas de los años 1960-1985 y los textos que rigen bajo la reforma actual con base a los Estándares Básicos de Competencias del año 2006 en Colombia, en este sentido, se propone un análisis de textos desde una perspectiva epistemológica, donde se espera identificar y estudiar la evolución que ha tenido el concepto de función en estas épocas.

Si bien es claro que la época de las Matemáticas Modernas marco una revolución en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se busca analizar la propuesta que se presentaba en los textos escolares entre los años 1960-1985 en el marco del concepto de función y la presencia de dicho concepto en los textos actuales, a fin de establecer diferencias y similitudes del concepto de función en los diferentes textos en ambas épocas y así evidenciar algunas de las problemáticas y posibles dificultades que se pueden generar en la aprehensión de dicho concepto en la actualidad desde su evolución respecto a dos momentos diferentes.

Finalmente se presenta una rejilla de valoración de textos escolares en matemáticas como aporte a la Educación Matemática, empleada como modelo de análisis para establecer las diferencias relevantes del concepto de función entre los libros de textos estudiados.

PALABRAS CLAVES: Matemáticas Modernas, Función, Reforma Matemática, Reforma Educativa, Libro de Texto, Análisis Epistemológico.

INTRODUCCIÓN

El análisis de textos en matemáticas debe su importancia a que a través de él se pueden establecer criterios para determinar si un texto escolar es útil o no en el aula de clase (Weinbrenner, 1992), además que permite determinar si brinda las herramientas pedagógicas para facilitar el procesos de enseñanza y aprendizaje (Choppin, 2000). Por medio del análisis de textos es posible entender el uso que se le da a los textos escolares, sus debilidades y la perspectiva o enfoque que adoptan, sumado a ello permite establecer si cumple o no con el currículo propio de la educación en el país en el cual se esté utilizando

Tomando como referente importante para el currículo de matemáticas a la Reforma de las Matemáticas Modernas en el años 1960 en Colombia y los Estándares Básicos de Competencias del año 2006, en el presente trabajo de grado se caracterizará la forma como es presentado el concepto de función en dos libros de texto, tanto para la reforma actual como para la de las Matemáticas modernas, se considera como concepto matemático a trabajar el concepto de función atendiendo a las diferentes dificultades que se observan desde una perspectiva teórica como práctica en la enseñanza del concepto.

Partiendo de la hipótesis de que al ser la Reforma de las Matemáticas Modernas una desilusión en la Educación Matemática Colombiana, dado que las herramientas y formas de introducir y presentar un concepto desde los libros de texto en dicho momento quizás no fueron las más apropiadas, y al lograr identificar los motivos del desencanto de la reforma y establecer una renovación curricular diferente a fin de contar con una reforma actual y mejorada como son los Estándares Básicos de Competencias, se espera que la caracterización del concepto de función en los textos actuales regidos por una reforma diferentes deben superar los obstáculos antes presentados, se busca implementar un rejilla de análisis que permita dar cuenta de las características propias de los libros de texto bajo este concepto, para las dos épocas específicas y lograr de esta manera realizar una comparación entre las dos reformas estableciendo los cambios que se tengan, los obstáculos que se superaron o aun permanezcan para poder dar un balance de que es lo que aún se conserva de la Reforma de las Matemáticas Modernas hasta nuestros días.

De esta manera en el trabajo encontramos que los capítulos 1 y 2 dan cuenta de la problemática de investigación, de los fundamentos teóricos donde se desarrollan los elementos epistemológicos del concepto de función a través de un recorrido de la construcción del concepto desde la matemática babilónica hasta el siglo XX, por último se realiza una caracterización de la Reforma de las Matemáticas Modernas desde sus inicios hasta su institucionalización en Colombia.

Luego de establecer las bases teóricas que sustentaran el trabajo que se hará posteriormente, en el capítulo 3 se inicia la caracterización de la rejilla de análisis, la cual fue implementada por González, A & Sierra, en el año 2004 en su trabajo *Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX*, elemento fundamental en la presente investigación, en este capítulo se presenta la justificación teórica y los elementos que constituyen la rejilla, explicando detalladamente las dimensiones, las categorías y los perfiles que son los aspectos a tener en cuenta en el análisis.

Finalmente, en el capítulo 4 se realiza una descripción general de los libros de texto seleccionados, mostrando una ficha bibliográfica y la presentación de los contenidos para cada uno, por último se realiza la aplicación de la rejilla de análisis, para ello se muestra la rejilla con sus respectivos resultados de manera individual. La información que se obtiene de esta es analizada en el capítulo 5, este análisis consta de un estudio de los elementos involucrados y que han sido descritos en el capítulo 3, se establecen unas conclusiones parciales para cada libro de texto, lo que conlleva a establecer la comparación por épocas que se evidencia a través de una tabla comparativa.

CAPÍTULO 1

CONTEXTUALIZACIÓN A LA PROBLEMÁTICA DE TRABAJO.

En este capítulo se desarrollará los elementos asociados a la problemática de trabajo desde su surgimiento y sus antecedentes, hasta el establecimiento de los objetivos y la metodología que serán la guía de lo que se pretende investigar en el presente trabajo a fin de dar una posible respuesta a la problemática planteada.

1.1 Planteamiento y Justificación del Problema.

Como es de conocimiento, la implementación y el uso de los libros de textos escolares en el aula en matemáticas se ha producido de manera generalizada desde los inicios de la educación obligatoria hasta nuestros días, en este sentido podemos decir que el libro de texto se ha consolidado como una herramienta importante tanto para el docente como para los estudiantes, en la medida que se sirve de varios papeles, entre ellos están como material de consulta para docentes y estudiantes, como soporte didáctico que presenta y promueven actividades para ser resueltas por los estudiantes y que sirven de orientación a los docentes en la enseñanza de temas específicos, por lo tanto el libro de texto es uno de los medios más empleados en la enseñanza de la matemática, como menciona Arbeláez & otros (1999) citando a Richaudeau (1981):

(...) los manuales escolares, representan actualmente –y con mucho- el medio de enseñanza más ampliamente utilizado en el mundo y, por consiguiente, tiene notables implicaciones de naturaleza económica, pedagógica y social.

Se evidencia la importancia que ha tomado el libro de texto en nuestra sociedad actual y la fuerte influencia que tiene en diferentes aspectos, a nivel económico, se observa que se ha establecido como un movilizador de la economía desde un punto de vista más productivo que educativo, es decir, el interés que se ha puesto en estos, es en muchos casos centrado en los beneficios de tipo económico ya que en la compra y venta de este material se construyen relaciones entre las diferentes editoriales y las instituciones educativas orientadas a la obtención de beneficios que primordialmente no son educativos sino puramente económicos, al punto que en ocasiones la selección y los criterios de valoración de los libros de texto se

ven permeados por los aportes en calidad de regalos y dotaciones que las editoriales pueden dar.

Bajo las implicaciones económicas que tiene el libro de texto, hablamos entonces de la existencia de una problemática en cuanto a la educación, pues los beneficios que se buscan a la hora de seleccionar un texto para una institución no se fundamentan en un análisis que dé cuenta de aportes a los contenidos, metodologías o evaluación a emplear en la práctica educativa sino a beneficios financieros.

A nivel pedagógico, el libro de texto se ha establecido como una herramienta que apoya la labor docente al aportar una estructura para los contenidos y en muchos casos propone estrategias de desarrollo de las clases, es decir se centra en que es lo que se desea enseñar y por ende lo que el estudiante debe aprender, dentro de estas implicaciones también se enmarcan todos los elementos curriculares que afectan el valor que puede tomar un libro de texto y la valoración que este puede tener, es de saber que la educación desde cualquier ámbito y en nuestro caso particular desde la matemática se fundamenta bajo una estructura curricular a la que los libros de texto no deben ser ajenos.

Desde esta estructura curricular, se evidencian implicaciones pedagógicas importantes en el campo de la selección y valoración de los libros de texto, sin embargo en ocasiones se llegan al extremo de que el libro de texto se convierta exclusivamente en el orientador del currículo para la toma de las decisiones, trayendo como consecuencia una acción pasiva en cuanto a la manera como se aborda el libro de texto en las aulas de clase desde un punto de vista educativo respecto a los contenidos.

De esta manera, queremos presentar la importancia que este trabajo puede brindar a la Educación Matemática, en el sentido que da cuenta de las diferencias en la forma como se presenta un concepto a través de distintos libros de texto de acuerdo a la época en el que se desarrolle.

Por otro lado, la consolidación de los libros de texto se encuentra pensada de forma ideal como un medio que brinda elementos pertinentes para potenciar el desarrollo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es importante entonces considerar las problemáticas con las que se enfrenta el libro de texto tanto en la actualidad como en otro momento, con el fin de evidenciar la evolución que este ha tenido, en la forma como se presenta el concepto de función.

En nuestro país, los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se vieron fuertemente influenciados por la reforma de las matemáticas modernas cuyo interés principal era que el conocimiento matemático que se impartía en las escuelas fuese lo más parecido al conocimiento de los matemáticos de la época (Garzón & otros, 2013), a raíz de esto se plantea una reforma curricular en matemáticas tomando como base la teoría de conjuntos siguiendo de alguna forma la postura Bourbakista, con este cambio curricular se intentaba unificar el currículo de matemáticas con la reforma efectuada en otros países de Europa y EE.UU dicha influencia llevo a la implementación de libros de texto con niveles de enseñanza distintos a los que se venían trabajando en Colombia.

Es pertinente entonces, considerar dicho movimiento de las matemáticas bajo la Reforma de las Matemáticas Modernas en los libros de textos y el desarrollo e implementación de estos en la actualidad debido a que los intereses presentes de la Educación Matemática difieren a los intereses que se tenían en los años 60, en términos de los procesos de enseñanza y aprendizaje, época en la que se institucionalizó en Colombia la reforma de las matemáticas modernas, dichos intereses llevaron a establecer cambios significativos en cuanto a contenidos de los programas, los textos, la metodología de enseñanza, entre otros, orientados hacia una matemática más abstracta, podemos inferir que durante este periodo de ejecución, el sistema educativo colombiano adquirió quebrantos en la medida que no se cumplieron los propósitos fijados por la reforma de las matemáticas.

Ahora bien, si se tiene en cuenta los Lineamientos y los Estándares (2006), la comprensión de patrones, relaciones y funciones es de gran importancia en la escuela¹, puesto que se busca el desarrollo del pensamiento variacional a partir del estudio de regularidades, además se evidencia que el concepto de función es fundamental en la construcción de pensamiento matemático, dado que se desarrolla a lo largo de la educación primaria como secundaria, en donde se observa desde la práctica docente que el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de función es de difícil aprehensión por parte de los estudiantes debido a que no se reconoce la noción de variable.

En este sentido, en el proceso de cambio de ecuación a función, los estudiantes no logran establecer las diferencias entre la idea de incógnita que se viene trabajando desde una teoría

¹ Tomado del MEN (2006), p. 16

de ecuaciones a una concepción fundamentada en una matemática ya no estática sino cambiante, con un trasfondo variacional, justificando y conceptualizando la noción de función como lo presenta Ruiz (1998).

Por tanto, es relevante considerar un análisis de textos desde un enfoque epistemológico centrado en el concepto de función a fin de establecer la forma como este es presentado, en el sentido que un libro de texto y todo lo que con él coexisten (temáticas, niveles de enseñanza, formas y metodologías) dependen de la sociedad, y en nuestro caso particular de la reforma educativa en la que se encuentra inmerso. Además, Choppin (1992) considera que el texto escolar es un instrumento pedagógico inseparable tanto de su elaboración como en su empleo de las condiciones y métodos de enseñanza de su tiempo.

Así pues, establecer diferencias metodológicas, curriculares y didácticas de los libros de texto de las matemáticas modernas y las actuales permiten establecer si las dificultades asociadas al aprendizaje y la enseñanza del concepto de función se ligan a la no existencia de cambios en las herramientas que presentan los libros de texto aun con la implementación de una renovación curricular, basada en los Estándares Básicos de Competencias con la que se rige la Educación Matemática actual y el rol que asume el docente ante estas herramientas en un sentido estrictamente valorativo de los libros de texto.

Como se mencionó anteriormente, el libro de texto enfrenta diferentes problemas en cuanto a los contenidos, el rol que asume el profesor como actor pasivo, las dificultades entorno a su producción y el constante plagio que se logra observar, pues podríamos afirmar que los textos escolares forman una cadena de copias y el papel que ha tomado el libro de texto dentro de un problema de la calidad educativa, lo convierte en el orientador del currículo en matemáticas al punto de que una renovación curricular depende de lo nuevo que se expresa en él, entre otros muchos problemas.

Es por ello que nuestro interés se centra en el estudio de una de las muchas problemáticas con las que cuenta el libro de texto, orientada a explicitar si en realidad el libro de texto en matemática evoluciona acorde a las necesidades del contexto en el que se desarrolla y la reforma curricular a la que se enfrenta, en pro de ser un mediador positivo para la Educación Matemática, se piensa entonces en la necesidad de comparar dos épocas y dos reformas diferentes e importantes como lo son los años 1960 y la actualidad, con la Reforma de las

Matemáticas Modernas y la reforma basada en los Estándares Básicos de Competencias (2006) respectivamente, con el fin de caracterizar la evolución que los libros presentan en cada momento y la importancia de identificar las dificultades más relevantes de los libros de texto de esta reforma en el aspecto curricular, afectivo y didáctico y así poder identificar en los textos regidos por la reforma actual que elementos y que herramientas de ese entonces aún se conservan o como han logrado evolucionar.

Nos ubicamos estrictamente desde el concepto de función, dada las dificultades de la institucionalización y aprehensión de dicho concepto en la escuelas, ya que “el concepto de función, tal y como se define actualmente en matemáticas, es un objeto muy elaborado como consecuencia de numerosas generalizaciones realizadas a través de una evolución de más de 200 años” (Ruiz, 1998), desde este punto de vista se tienen en cuenta los diferentes obstáculos epistemológicos que ha tenido, su proceso de evolución y las herramienta de los libros de textos en matemáticas, en miras de aportar una iniciativa de análisis de textos para que el docente se sumerja en un rol activo hacia una valoración y postura crítica de los textos que escoge, y no caer más en el círculo vicioso de la elección de textos con los mismos problemas y dificultades de épocas pasadas, sino de poder contar con elementos que permitan juzgar el material con el que se va a trabajar y lograr así potencializar el desarrollo de la matemática través de los textos escolares. Para soportar nuestra problemática, formulamos la siguiente pregunta problema:

¿Cuáles son las posibles diferencias que se pueden evidenciar a través de un análisis epistemológico entre algunos textos de la Reforma de las Matemáticas Modernas y algunos textos actuales, en cuanto a la manera en que se presenta el concepto de función?

1.2 Algunos Antecedentes a la Problemática.

A continuación se presentaran unas síntesis de investigaciones en el campo del análisis de textos bajo el concepto de función, para ello se tiene en cuenta la importancia del estudio epistemológico de este y la Reforma de las Matemáticas Modernas como época importante en dicho estudio, marco en el cual se desarrolla el actual proyecto de trabajo de grado.

Por otro lado García & Llinares (1999) en su investigación *El concepto de función a través de los textos escolares*, realizaron un estudio de cómo se caracteriza el concepto de función en diversos libros de matemáticas en un ambiente universitario. En este trabajo se

analizaron las tareas presentadas en los diversos textos de matemáticas; teniendo en cuenta el modo de representación utilizado y los procesos de conversión entre los mismos. Esta investigación presenta un enfoque epistemológico examinando los libros publicados desde 1975 hasta 1991, en la medida que aporta una orientación de cómo se realiza un análisis epistemológico y específicamente en el concepto de función que es el tema central de nuestra investigación, de modo que permite conocer elementos estructurales sobre cómo se lleva a cabo este proceso.

Encontramos también el análisis realizado por Monterrubio & Ortega (2011) en su trabajo *Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas*, los cuales realizaron una investigación en la cual se crea un modelo de valoración de textos escolares de matemáticas, con el objetivo de que este sea utilizado por docentes de secundaria para elegir el texto que mejor se adapta a las necesidades de aula. Ellos consideran que el libro de texto va unido a la labor profesional del docente por lo que su escogencia no se debe tomar a la ligera; se sugiere unos indicadores de análisis entre los cuales se destacan los objetivos, contenidos, actividades, metodología, ilustraciones, motivación, entre otros, esta investigación da un aporte significativo hacia nuestro trabajo en cuanto a la valoración de los textos escolares en matemáticas, dado que nuestro aporte final se orienta hacia la construcción de una rejilla, para el análisis de estos textos, y es pertinente tener algunos puntos de referencia con respecto a los modelos de análisis que se pueden emplear para ello.

Se tendrá en cuenta, el trabajo realizado por Porras (2012), en su tesis de maestría *el concepto de función en la transición bachillerato universidad*. Esta tesis aborda como problema la ausencia de un referente de formación matemática, relativa al concepto de función, deseable en egresados del bachillerato, que dé respuesta a las exigencias de los cursos de cálculo en carreras de ciencias e ingeniería. Inicialmente muestra los resultados de un estudio histórico del concepto de función apoyado sobre la adaptación que del modelo de S. Toulmin realizó el profesor Delgado C. (2003) complementándolo con aspectos de la epistemología genética de Piaget. Posteriormente presenta un artículo sobre el papel que desempeña el concepto de función en los cursos de cálculo diferencial e integral analizando, desde las matemáticas mismas, la manera en que dicho concepto es demandado en la

constitución conceptual de otros conceptos, procesos o problemas matemáticos. Sobre este trabajo de investigación nos centraremos en el estudio epistemológico del concepto de función enmarcado bajo un estudio histórico-crítico en el cual tomaremos como aspectos relevantes a nuestra investigación la evolución y tratamiento del concepto de función en las diferentes épocas mencionadas en dicha tesis, como lo son la época antigua, la edad media y el periodo moderno.

Por otra parte se tiene en consideración el trabajo realizado por Ruiz (1998) en su tesis doctoral *la noción de función: análisis epistemológico y didáctico*, este trabajo es relevante para nuestro trabajo de investigación en cuanto a los aportes en materia histórica y epistemológica que presenta con respecto al concepto de función, debido a que se tiene en cuenta la caracterización de este concepto en un recorrido histórico desde la época antigua hasta el siglo XX, resaltando los obstáculos epistemológicos presentes en estas, todos ellos elementos importantes y vitales en el desarrollo de nuestro trabajo.

Finalmente se considera el trabajo de Arrieché,(2002), específicamente el capítulo 4: la teoría de conjuntos en la enseñanza de las matemáticas de su tesis doctoral *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática*, ya que en este capítulo el autor realiza una caracterización de la Reforma de las Matemáticas Modernas, convirtiéndose en un aporte importante hacia nuestro trabajo en la medida que presenta los elementos formadores y desarrolladores de esta reforma desde su surgimiento hasta su implementación y atendiendo a nuestro objetivo de estudio es necesario tener en cuenta esta caracterización.

1.3 Objetivos.

1.3.1 Objetivo General

Describir las posibles diferencias en la introducción del concepto de función presentado a través de algunos textos de la Reforma de las Matemáticas Modernas y algunos textos actuales en Colombia, desde un análisis epistemológico.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Implementar una rejilla de análisis de textos.

- Caracterizar el concepto de función promovida en dos textos de la Reforma de las Matemáticas Modernas y dos textos actuales.
- Analizar desde un punto de vista epistemológico, la manera como es presentado el concepto de función.

1.4 Metodología.

La metodología a emplear en el desarrollo del trabajo, consiste en un análisis de textos, centrados en un enfoque epistemológico desde una línea de actuación en la que se ha elegido el concepto matemático de función analizando la forma como este ha sido introducido en diferentes libros de texto, los libros de texto seleccionados para tal estudio, corresponden a dos textos pertenecientes a la época de la Reforma de las Matemáticas Modernas y dos textos correspondientes a la época actual, dicho análisis se llevó a cabo en cuatro fases, las cuales se muestran continuación:

- **Fase 1:** búsqueda de información la cual permite establecer una fundamentación teórica con respecto a la problemática correspondiente, es decir, establecer una investigación que permitió crear una base teórica en cuanto al análisis de textos de matemáticas, orientada hacia la importancia que tienen los libros de texto en la educación, por otra parte se buscó indagar sobre los aspectos relevantes en cuanto al desarrollo de la Reforma de las Matemáticas Modernas y la reforma actual, en esta primera fase se realizó una caracterización del establecimiento y desarrollo de la Reforma de las Matemáticas Modernas en Colombia así como de los Estándares Básicos de Competencias como nuestra actualidad inmediata y las diferencias más relevantes entre una y la otra, a fin de lograr establecer el paralelo entre los textos pertenecientes a cada una de estas épocas.
- **Fase 2:** investigar y establecer los criterios de selección de los libros que se emplean para el análisis y a continuación escoger dichos libros. En esta fase se delimitan los criterios que permiten la elección de los libros de texto para cada una de las épocas de estudio, se emplean criterios de selección diferentes para los libros pertenecientes

a la época de las matemáticas modernas y los libros actuales atendiendo a las diferencias temporales y curriculares asociados a ellos, establecidos estos criterios se escogerán dos libros por época para el presente estudio, estableciendo los elementos importantes desde un punto de vista bibliográfico, es decir, autor o autores, años de publicación, ciudad, editorial, etc.

- **Fase 3:** instaurar los criterios para la selección de una rejilla de análisis y posteriormente aplicar esta para el estudio de los diferentes textos seleccionados. Teniendo en cuenta el objetivo de estudio, para la realización del análisis de los libros de texto se implementó una rejilla que permite dicho análisis, para ello, en primer lugar se establece la fundamentación teórica de los elementos involucrados para su selección, de forma tal que se argumente el porqué de la elección de dicha rejilla.
- **Fase 4:** realizar el análisis de la información recogida a través de la rejilla con el fin de establecer un paralelo entre los libros susceptibles de estudio, a fin de observar cuales han sido los cambios en la forma como se introduce el concepto de función en los libros de texto de matemáticas escogidos previamente, en esta fase se realiza el estudio de todos los elementos analizados a través de la rejilla para finalmente desarrollar las conclusiones al respecto.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS.

De acuerdo con lo establecido en la problemática de trabajo y la estrategia metodológica a seguir es relevante establecer unos elementos teóricos que sustente los diferentes elementos involucrados en la investigación, como lo es la fundamentación teórica del concepto de función desde un estudio histórico y epistemológico de este, una caracterización de la importancia e implementación de los libros de texto, los diferentes elementos involucrados en el desarrollo de la Reforma de las Matemáticas Modernas y los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas (2006) como bases de la reforma actual, ya que estos corresponden a los pilares teóricos sobre los cuales se establece el presente estudio.

2.1 Algunos Elementos Históricos y Epistemológicos del Concepto de Función.

Hablar de un análisis de textos desde un enfoque epistemológico conlleva a dar una mirada a la evolución que ha tenido el concepto de función en distintos momentos históricos, es decir dar cabida al estudio histórico epistemológico del concepto (Ruiz, 1998), dicha mirada se establece con el objetivo de caracterizar los obstáculos propios de cada época, más que la realización a profundidad de dicho estudio. Ruiz caracteriza la evolución del concepto de función a través de diferentes etapas de desarrollo.

2.1.1 Matemática Babilónica y la primación de la particularidad versus la generalidad.

El concepto de función dentro de la matemática babilónica se estableció a través de aspectos de tipo fenomenológico, que evidenciaron el estudio de los problemas de variaciones continuas trabajados por medio de un sistema sexagesimal, “dicho sistema era dado en tablas de cuadrados y raíces cuadradas, de cubos y de raíces cubicas, otros contienen las potencias sucesivas de un número dado de forma análoga a nuestras actuales tablas de logaritmos”².

En este sentido se puede observar que dentro de la matemática babilónica existía una marcada caracterización del concepto de función pero en una forma muy particular, es decir, se desarrolló el concepto de función en casos particulares, puesto que el interés cultural estaba

² Ruiz, L. (1998). La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico (tesis Doctoral). Universidad de Granada. España.

dirigido a la definición de fenómenos naturales; según Youschkevitch (1976) no hubo ninguna idea general de función en los babilónicos, pero si se puede hablar de que dieron un gran inicio para llegar a esa generalidad.

Si bien se creó un sistema de tablas basada en la fenomenología de la época, se puede establecer una gran semejanza al trabajo con funciones que se realiza en la actualidad, “estas tablas suelen estar dispuestas en dos columnas de forma análoga a las tablas de valores que acostumbran a construir nuestros alumnos para cualquier función $f(x)$ ”³

Se puede decir que en este momento histórico se establece un obstáculo de tipo fenomenológico en el desarrollo del concepto de función, en el cual primaba la particularidad dejando de lado el trabajo hacia la generalidad.

2.1.2 La matemática griega: El problema de la inconmensurabilidad y las paradojas.

Para los pitagóricos las cosas eran números y los números eran cosas, lo cual los conducía a pensar que existía una unidad y que el mundo estaba compuesto de unidades indivisibles. Ante esta postura se oponía Zenón con sus paradojas sobre el movimiento que emergen a partir de las dos concepciones de espacio y tiempo que se manejaban en esa época, una concepción era considerar el espacio y tiempo como absolutamente divisibles, en cuyo caso el movimiento resulta continuo y “liso”, y la otra es que el espacio y tiempo están formados por pequeños intervalos indivisibles, en cuyo caso el movimiento resulta de una concepción de sucesión de minúsculos saltos espasmódicos. Más adelante ante esto se opone el problema de la inconmensurabilidad, en este problema se muestra la existencia de casos donde es inconcebible expresar la razón entre dos magnitudes por medio de un número.

Es así como, en el pensamiento griego los números eran objetos discretos mientras que las magnitudes eran continuas, por lo cual se afirma que la inconmensurabilidad y las paradojas son obstáculos a la noción de función, puesto que discretizan los números y esto impide que se establezcan relaciones generales numéricas entre las magnitudes. (Rene de Cotret, 1985, p.45, Citado por Ruíz., 1998, p.110) por lo tanto afirmamos que probablemente estos aspectos conducen a que las leyes físicas no fueran vistas como leyes matemáticas. La dificultad se supera en el siglo XIX, cuando se extienden los conjuntos numéricos al de números reales y se asocia a cualquier cantidad de una magnitud una medida numérica.

³Ibíd.

Ahora bien, el concepto de función en la matemática griega se enmarca, según Porras (2012), en un estatuto protomatemático, en este periodo dicho concepto se caracteriza por “los estudios sobre relaciones entre magnitudes geométricas variables”⁴ Se establece entonces para este momento un problema de tipo epistemológico en el que se parte de la concepción de matemática estática, que como lo muestra Ruiz (1998), desde el punto de vista aristotélico, se estableció como opuesta a la física, donde todo lo relacionado con los cambios y el movimiento era externo a las matemáticas, con ello se crea la idea de incógnita dando paso al desarrollo de una teoría de ecuaciones y proporciones, pero limitando por completo el desarrollo del concepto de función puesto que para ello es necesario caracterizar el cambio como fundamento para hablar en términos de variable y no de incógnita, dicho problema nos da una concepción de matemática estática, la cual se convierte en un obstáculo en la época griega para establecer el concepto de función.

Sin embargo en esta época se habla de una génesis de dicho concepto puesto que la idea de cambio y variación estaba inmersa en los trabajos realizados en este momento, aunque se vieran permeados por concepciones de tipo filosófico.

2.1.2.1 La concepción de “Variabilidad” como característica exclusiva de las magnitudes físicas.

En la matemática Helénica, se empleaba una matemática estática, que inducía a que los matemáticos pensaran y hablaran en términos de incógnitas e indeterminadas más que en términos de variables, lo que conduce a un tratamiento sobre las proporciones y ecuaciones más que a las funciones. En este sentido considerar las matemáticas como algo estático, conduce a la concepción de “variabilidad” como una característica exclusiva de las magnitudes físicas, lo cual puede ser un obstáculo para el desarrollo de la noción de función.

Como se evidencia desde los helenos hasta los matemáticos como Oresme y Galileo, las proporciones se emplearon para establecer relaciones entre magnitudes variables del mismo tipo, pero posteriormente con la introducción de igualdades en el álgebra nace la posibilidad de formular una relación de dependencia entre variables. Se asocian situaciones relacionadas con magnitudes físicas, en particular en el campo de la geometría y la astronomía. Se tiene

⁴Porras, F. (2012). el concepto de función en la transición bachillerato universidad (tesis de maestría).Universidad del Valle, Cali, Colombia.

de esta manera que las concepciones que no varían son las asociadas a la caracterización de esta concepción en el establecimiento de regularidades entre las relaciones de causa y efecto.

2.1.3 La matemática en la edad media y la concepción geométrica de las Variables.

En este periodo el desarrollo del concepto de función se fundamentó⁵ en la idea de explicación racional de los fenómenos naturales debido a que en estos se evidenciaba el cambio y el movimiento, ideas centrales en la construcción del concepto de función.

Inicialmente dichas explicaciones se basaron en las ideas de Aristóteles y Platón, sin embargo, en la disociación entre física y matemáticas no se lograba establecer una fuerte base para este concepto, pero a medida que se fue cerrando la brecha entre estas dos ciencias se benefició significativamente el desarrollo del concepto de función, estableciendo la matemática como fundamento para el estudio del cambio y el movimiento estudiando en ello “no solo porque suceden los cambios sino fundamentalmente como suceden”

En este periodo de tiempo se desarrollaron dos métodos según lo muestra Ruiz que son relevantes para expresar las relaciones funcionales:

- ✓ **El álgebra de palabras:** En el que se consigue la generalización empleando letras del alfabeto para las cantidades variables y para las operaciones se expresaban en términos de palabras, se puede hablar entonces de un surgimiento del álgebra sincopada que finalmente condujo a una simbólica.
- ✓ **El método geométrico:** En el que se presenta la representación gráfica y el intento de conexión entre el álgebra y la geometría. Con respecto a la representación gráfica en la edad media se tiene en cuenta el trabajo de Oresme (1320-1382) y la idea de realizar un grafica que representa la variación de las cosas, idea inicial de la graficación de funciones en la actualidad.

Debido a que en el siglo XIV, no se disponía aún de un continuo numérico para representar el movimiento, Oresme utiliza la continuidad de los segmentos para representar los cambios de la intensidad de magnitudes cualitativas y así poderlos describir, comparar y analizar la dependencia. En este sentido las concepciones de proporcionalidad entre magnitudes y la relación de dependencia cualitativa representada por medio de una figura que describe la

⁵ Ruiz, L. (1998). La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico (tesis Doctoral). Universidad de Granada. España.

cantidad de una determinada cualidad en relación con otra de la cual depende, para mayor ilustración al respecto ver la figura 1.

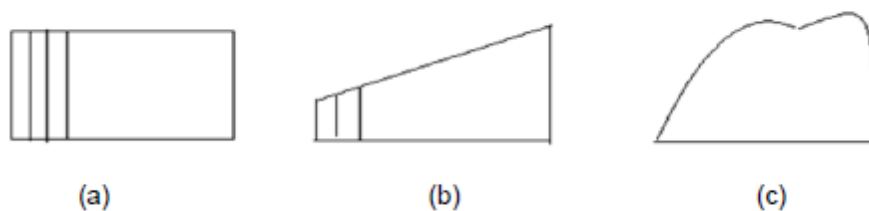


Ilustración 1: Representación de la variación de magnitudes dependientes según Oresme.

En este sentido el “álgebra geométrica” que construyeron los griegos, en la que la suma y resta de segmentos correspondía a otro segmento, la multiplicación de dos segmentos x , y a un rectángulo de lados x , y; el producto de tres segmentos a un paralelepípedo y la división de dos segmentos sólo tenía sentido cuando la dimensión del dividendo era mayor a la dimensión del divisor, en este sentido esta concepción se asume como un obstáculo hasta que Descartes y Fermat, dan un giro, al considerar todas las operaciones entre segmentos como otro segmento y de manera implícita se puede establecer una relación entre segmentos y números reales, lo que hace que el concepto de variable adquiriera otro significado.

En la edad media entonces los avances en la construcción del concepto de función si bien se centraron en el estudio de los fenómenos naturales, su desarrollo se evidenció en la concepción de la variable tanto dependiente como independiente y en los medios de representación de propiedades que cambian.

2.1.4 Siglos XV y XVI: La notación algebraica.

En los siglos XV y XVI se contribuyó al desarrollo de la notación algebraica, “Los adelantos en la notación contribuyeron a desarrollar la formulación y la expresión de lo que hoy en día consideramos «variable» en una función o «incógnita» en una ecuación” Ruiz. Uno de los matemáticos prominentes de la época fue Galileo, el cual centró su estudio en los movimientos, buscando relacionar la velocidad, la distancia recorrida y la aceleración, a través de la observación. Galileo trataba de relacionar dichos conceptos a través de la causa y efecto citado por (Ruiz 1998, p. 117)

2.1.5 Siglo XVII: El problema de dependencia de dos cantidades variables.

Atendiendo la idea de Youschkevitch (1976) la teoría de funciones se fundamenta en tres pilares:

- El crecimiento impetuoso de los cálculos matemáticos.
- La creación del álgebra simbólico-literal
- La extensión del concepto de número.

Es de tener en cuenta que en este siglo, surge una nueva concepción de las leyes cuantitativas de la naturaleza, elemento importante en la evolución del concepto de función, con el álgebra como instrumento, aparece la representación analítica.

A partir de aquí se sientan las bases de un álgebra simbólica permitiendo la unión entre el álgebra y la geometría, en el que cualquier problema de geometría podía ponerse en ecuación. Es en este periodo donde el concepto de función pasa de estar vinculado a expresiones analíticas a ser un problema en sí mismo como lo menciona Porras (2012) adquiriendo el estatuto matemático.

Es entonces Leibniz (1675) quien expresa la idea general de dependencia funcional e introduce el término función. “la palabra función aparece por primera vez en los manuscritos de Leibniz (*Methodus tangentium inverso, seu de functionibus*, 1673)”⁶. Inicialmente el término función se estableció desde Leibniz en el sentido de la función de un órgano en el organismo o en una máquina, concepción que poco a poco fue cambiando hasta identificarse como la relación formal entre las ordenadas de un punto de una curva y su abscisa.

Por su parte Descartes considero una idea de función orientada a las funciones algebraicas definida por curvas geométricas simples, de este modo, Descartes estudia las ecuaciones a través del significado de la curva, mientras que Fermat estudia el comportamiento de estas y sus propiedades definidas por ecuaciones. De esta manera es que inicia el nacimiento de la geometría analítica y con ella una amplia gama de nuevas curvas. Se gesta la noción de dependencia entre dos cantidades variables.

En cuanto al método cartesiano, Descartes no habla de ejes, ni de abscisas, ni de ordenada. Para la representación de las curvas, escoge una recta en posición horizontal, señala en ella

⁶Ibíd.

un punto fijo **O**; luego toma puntos en la curva y a cada uno de estos puntos asocia otro en la línea horizontal y analiza cómo cambia la distancia entre los puntos correspondientes respecto al punto fijo **O**. De esta manera, la posición de los puntos de la curva quedaba especificada por los números de las longitudes de los dos segmentos determinados. En este sentido se observa que cuando una ecuación tiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva (Descartes). Ver figura 2.

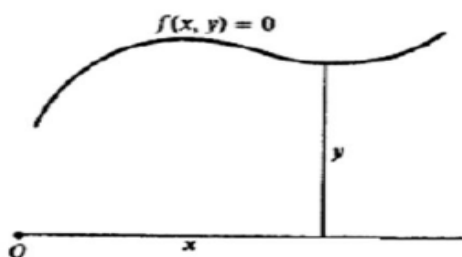


Ilustración 2: Grafica de la función⁷

2.1.6 Siglo XVIII: La función ligada al concepto de Curva.

La primera consideración de una función apareció en 1718 en un artículo de Jean Bernoulli donde utiliza la letra griega *f* para designar la característica de función, es en este siglo que el concepto de función toma una forma analítica.

El concepto de función, según todos los historiadores es obra exclusiva de Euler, quien fue alumno de Jean Bernoulli, dando la siguiente definición:

Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes (Euler, citado. por Ruiz, 1998, p. 126)

⁷ Correspondencia entre una ecuación $f(x,y) = 0$ y los puntos (x,y) relativos a dos ejes fijos perpendiculares que satisfacen la ecuación (Tomado de Gómez N, 2012 p.18, citando a Hernández, (2002).

Euler realiza una clasificación de las funciones, la cual significa una nueva etapa en la evolución de este concepto⁸ para dar posibilidad a la definición anterior, puesto que admitía tanto valores reales como imaginarios. La notación de función en este siglo tuvo un cambio, puesto que es Euler quien utiliza por primera vez $f(x)$.

En este siglo la noción de función se encontraba ligada con el concepto de curva, y para Euler existían dos tipos de curvas las continuas y las discontinuas o mixtas⁹, por lo tanto la discontinuidad de una función significaba un cambio de la ley analítica.

Se genera así un interés por los cambios existentes en las funciones, pero nunca se utiliza el término continuidad es hasta el siglo XIX cuando Bolzano (1817) y Cauchy (1821) aportaron la definición de continuidad aceptada hasta la actualidad (Ruiz, 1998)

En este sentido podemos decir, que en el siglo XVIII se llega a tener la idea de que las relaciones esenciales son aquellas que se describen por medio de expresiones algebraicas y ecuaciones. La definición de *función de una cantidad variable como una expresión analítica compuesta de alguna manera por esa cantidad variable y números o cantidades constantes* deja entrever una clara dependencia entre expresión analítica y función, aspecto que se constituye en un obstáculo puesto que las llamadas curvas mecánicas no se pueden tratar bajo este análisis, desvinculando las matemáticas de la física. Poco después, Newton descubrió el desarrollo de funciones en series infinitas de potencias, reduciendo significativamente las restricciones de Descartes y posibilitando la representación analítica de la mayoría de las funciones estudiadas en esa época.

2.1.7 Siglo XIX: El significado de función

En este momento histórico, al establecer el significado del concepto de función con aportes importantes de los matemáticos Euler, Lagrange y Joseph Fourier inicialmente hacia el siglo XVIII, para llegar a los aportes de Cauchy, Lobachevsky, Riemann y el matemático alemán Peter G. L. Dirichlet quien propuso la definición de función con la que aún se trabaja, se dio un aporte significativo a la fundamentación del análisis estableciéndose el concepto de función como la idea principal en este.

⁸Ruiz, L. (1994). La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico (tesis Doctoral). Universidad de Granada. España.

⁹ibíd.

En el proceso del desarrollo del análisis con la participación de diferentes matemáticos, y los diferentes estudios que se iniciaron en él, durante el siglo XIX se logran establecer diferentes definiciones para función, a continuación resaltamos las más destacadas:

AÑO	AUTOR	DEFINICIÓN
1827	Cauchy	Cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas, se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de una que toma el nombre de variable independiente y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable.
1834	Lobachevsky	El concepto general exige llamar función de x a un número, el cual se da para cada x y paulatinamente varía junto con x . El valor de la función puede estar dado por una expresión analítica, o por una condición, es decir, la dependencia puede existir y quedarse desconocida.
1837	Dirichlet	Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinando un único valor de y , entonces se dice que y es una función de la variable independiente x .
1858	Riemann	Se dirá que y es función de x si a todo valor de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que une a x y a y .

Tabla 1: Algunas definiciones del concepto de función¹⁰

Es entonces en este siglo donde se generaliza el concepto y se da paso a los estudios sobre continuidad de una función en la que se pone de manifiesto la separación entre la definición y la intuición geométrica.

¹⁰ La tabla 1 se realizó para mostrar las diferentes definiciones del concepto función durante el siglo XIX

2.1.8 Siglo XX: El carácter estático del concepto de función

Para este siglo, parados desde el estudio histórico que presenta Ruiz (1998), se observa el marcado cambio que ha tenido el concepto de función desde sus inicios hasta este periodo, cambios orientados a una definición de carácter más estático que analítico donde no hay referencia hacia las cantidades que fluyen y puntos moviéndose sobre curvas, es decir se pierde el sentido real de variabilidad, como lo dice Ruiz citando a Freudenthal “aunque esta definición está construida de una manera lógicamente formalizada, sin embargo se ha oscurecido su esencial significado como acción de asignación de variables, ha perdido su carácter dinámico para transformarse en algo puramente estático”.

2.2 Caracterización de la Reforma de las Matemáticas Modernas.

La Reforma de las Matemáticas Modernas en Colombia fue un proceso llevado a cabo gracias a la influencia externa de otros países con la misión de introducir cambios en el currículo de matemáticas que fortaleciera y mejorara el sistema que se tenía hasta el momento, cambios dados a raíz de ciertas motivaciones como lo menciona (Arrieche, 2002), orientados en la idea de la inconsistencia entre los programas de estudio recomendados y los métodos de enseñanza, la puesta en práctica en la actividad escolar y la efectividad de los resultados.

El intento por introducir una mejora, se inició realizando cambios leves dirigidos hacia las materias en las cuales se centraba la enseñanza de la matemática en el siglo XIX al igual que en los métodos de enseñanza que se estaban manejando, se hace conveniente tener en cuenta como fue el surgimiento de esta reforma en países europeos, América del norte y posteriormente a América latina particularmente en Colombia.

2.2.1 La reforma en algunos países europeos y Estados Unidos

A finales de los años cincuenta en Europa, existía un ambiente de cambio en la enseñanza de las matemáticas, en 1958 en Edimburgo se dio el primer impulso de una reforma durante el *Congreso internacional de matemáticas* (Ruiz, A.1992). Posteriormente en 1959 se

convocaría el *seminario de Royaumont* en el cual se discutiría lo que sería la Reforma de las Matemáticas Modernas.

Esta reforma seguía la ideología Bourbaki Ruiz (1992), la cual se basaba en la noción abstracta de estructura con base a la teoría de conjuntos. En este periodo de la reforma se presenta además una propuesta para la metodología de enseñanza encabezada por Jean Dieudonné, centrada en un proceso deductivo para la presentación de los contenidos a partir de axiomas con una presentación y organización estructural sistemática.

Si bien la reforma seguía una estructura Bourbakista, y los contenidos fueron presentados en forma abstracta, dando prioridad a la teoría de conjuntos, al álgebra axiomatizada y la lógica matemática, también estuvo enfocada en la formación científica y tecnológica, esto debido a que el contexto político de Norteamérica de la época fue sacudido por el lanzamiento del satélite Sputnik, al considerar que los soviéticos podrían llegar a ser superiores a ellos debido a su sistema escolar, lo cual llevo a la implementación de las matemáticas modernas y a un apoyo financiero lo que permitió la formación de grupos de trabajo como *School Mathematics Study Groups (SMSG)* y el *Secondary School Curriculum Committee* los cuales elaboraron Textos escolares, guías para maestros y se encargaron de la implementación de estos en otros países (García, 1996).

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, por sus siglas en inglés) formaron parte importante en la Reforma de las Matemáticas Modernas, pues esta financiaba organizaciones como el International Group for Mathematics el cual se encargó de concertar conferencias en relación a la enseñanza de la educación primaria como las que se dieron en Stanford, Estados Unidos en 1964, Paris 1965, y Hamburgo 1966, además de la creación del Centre for Educational Research and Innovation (CERI) en 1968 el cual se encargó de examinar las líneas de la reforma (Barrantes & Ruiz, 2011).

2.2.2 La reforma en América Latina

La reforma en este continente llegó desde Europa, en primera instancia se recibieron los libros de textos pertenecientes al SMSG de los Estados Unidos (Ruiz, A 1992), pero lo que marcaría la entrada de la reforma a América latina sería la realización de la primera *Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM)* la cual se llevó a cabo en

Bogotá, Colombia del 4 al 9 de diciembre de 1961 (Garzón & otros, 2013) la cual fue financiada por la National Science Foundation de los Estados Unidos, en esta conferencia se pretendió contar con la presencia de los países latinoamericanos con la intencionalidad de aplicar la reforma en el continente, la cual consistía en la realización o traducción de textos académicos, hacer un cambio curricular y entrenar profesores.

En 1966 se dio a lugar la segunda CIAEM en Lima, Perú, la cual consistió, principalmente, en darle seguimiento a la reforma, la realización de lo que serían los ejes temáticos de la educación secundaria y los programas de formación de docentes.

2.2.3 La reforma en Colombia

En Colombia la reforma se implementó a través de los decretos 1710/ 63 y 080/74 del Ministerio de Educación¹¹ con el único propósito de mejorar las competencias matemáticas de los estudiantes, para poder lograr este objetivo se tradujeron libros de texto pertenecientes al SMSG.

Varias universidades colaboraron con la implementación de la reforma, puesto que preparaban a los licenciados; Sánchez (2001) afirma que el departamento de matemáticas y estadística de la Universidad Nacional propuso en conjunto con La Sociedad Colombiana de Matemáticas¹² la reforma de los programas de matemáticas para bachillerato, en la Universidad Pedagógica Nacional el profesor Federici lideró un grupo de investigación perteneciente al *instituto de investigaciones*, fue este grupo el que realizó una colección de textos académicos con el nombre de *colección de matemática actualizada* la cual fue aplicada por el MEN a los colegios normales con la intención de promover la enseñanza de las “nuevas matemáticas” propuesta para América Latina en la CIAEM de 1961 (Albis & otros, 2011).

2.3 Un acercamiento al concepto de función en el currículo actual de matemáticas.

El currículo actual de matemáticas en Colombia, se encuentra determinado por lo establecido en los Estándares Básicos de Competencias y los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional; en dichos Lineamientos y Estándares se evidencia una

¹¹ En estos decretos se encuentran los propósitos de la educación tanto en la primaria, decreto 1710/63, como de la educación media, decreto 080/74, además de una distribución horaria por áreas.

¹² La Sociedad Colombiana de Matemáticas es fundada en 1955 por Carlo Federici, Juan Horvath, los profesores de matemáticas de ingeniería y los alumnos de matemáticas. Sánchez, C. (2001). 50 Años de Matemáticas Modernas en Colombia. *Boletín de Matemáticas Nueva Serie*, VIII (2), pp. 3 - 28

estructura curricular, orientada por cinco tipos de pensamientos, estos pensamientos se relacionan entre sí, permitiendo que exista una relación y coherencia entre los contenidos, ahora bien el estudio de lo variacional es fundamental para realizar los procesos de generalización propios de cada uno de los pensamientos (estándares, 2003); de los cinco tipos de pensamientos, consideramos que el pensamiento variacional juega un papel fundamental en el desarrollo del concepto de función, puesto que este concepto puede ser evidenciado a lo largo de la educación, tanto primaria en la enseñanza de los números y sus propiedades (Estándares) como secundaria cuando los estudiantes estudian las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas.

En la educación básica primaria se desarrollan procesos de generalización, estos se evidencian en el seguimiento de patrones, tanto geométricos como aritméticos y en situaciones de la vida cotidiana, los cuales se ven reflejados en algunos conceptos del pensamiento variacional; estos ayudan a potencializar el desarrollo de la noción de función en los estudiantes. Algunos Estándares Básicos de Competencias Matemáticas que evidencian lo anterior son¹³:

- Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical, entre otros).
- Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas.
- Construyo secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.
- Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos.
- Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales.
- Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.

Algunos contenidos que obedecen a los estándares mencionados son:

¹³Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. pp. 81-83.

- ✓ **Figuras geométricas, perímetro y área:** cuando se establece la dependencia del perímetro y el área de una figura geométrica con los lados de la misma, se conceptualiza la noción de variación y de dependencia.
- ✓ **Sistema de numeración decimal y teoría de números:** en primaria se desarrolla el concepto de múltiplo de un número, este concepto está relacionado con la noción de función, pues los niños establecen una relación entre los números naturales (posición de la secuencia) y los múltiplos de dicho número, por ejemplo si le preguntamos a un niño ¿Qué número sigue en la secuencia, 4, 8,12, 16,..? El niño reconoce una dependencia entre la posición y los múltiplos de cuatro.
- ✓ **Conjuntos:** cuando trabajamos con funciones reales, se debe tener claridad con respecto a las operaciones entre conjuntos, pues el dominio y el rango de dichas funciones son subconjuntos del conjunto de los números reales.

Ahora bien, en la Educación Básica secundaria se busca el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media del cálculo diferencial e integral¹⁴, Algunos Estándares Básicos de Competencias en matemáticas que evidencian lo anterior son:

- ✓ Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).
- ✓ Analizo las propiedades de variación lineal e inversa en contextos aritméticos y geométricos.
- ✓ Modeló situaciones de variación con funciones polinómicas.
- ✓ Interpreto la relación entre el parámetro de funciones con la familia de funciones que genera.
- ✓ Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones polinómicas, racionales y exponenciales.
- ✓ Interpreto la noción de derivada como razón de cambio instantánea en contextos matemáticos y no matemáticos.
- ✓ Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales.

¹⁴Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. p. 66.

Algunos contenidos que obedecen a los estándares mencionados son:

- ✓ **Movimiento uniforme:** este concepto está relacionado con la noción de Función
- ✓ **Proporción directa:** cuando se enseña la proporción directa, se pueden identificar la relación que se establece entre este concepto y la función.

A fin de analizar la forma como es presentado el concepto de función en diferentes libros de texto se hará uso de una rejilla de análisis en el capítulo 3, esta permitirá caracterizar la introducción de dicho concepto para los libros seleccionados y así a través de la información obtenida lograr establecer una comparación que dé cuenta o no de las diferencias respecto a los libros de texto empleados en el periodo de las matemáticas modernas y los libros de texto empleados actualmente.

CAPITULO 3

MODELO DE ANÁLISIS.

El libro de texto es una herramienta presente en los procesos de enseñanza y en la Educación Matemática brinda elementos que potencializan su desarrollo, convirtiéndose en un aliado del maestro dentro y fuera del aula, es por eso que la selección de los libros de texto no debe ser tomada a la ligera; es importante tener en cuenta el significado que tiene el libro, realizar un análisis de los posibles textos a trabajar considerando unos criterios de selección claros que le den una valoración a cada uno de ellos, y así poder tomar la mejor decisión con respecto a que libro es pertinente usar de acuerdo a las condiciones específicas con las que se enfrentaran el docente y los estudiantes.

3.1 Significado del libro de texto.

Bajo la perspectiva de la importancia que tiene la época y la sociedad en que se desarrolla la implementación de un libro de texto, conviene pensar en su significado, dado que existen numerosas investigaciones como las de Choppin, Bonafé, Fernández entre otros (1992), que presentan esta diferenciación, como nuestro interés se enmarca en analizar textos de unas épocas específicas, específicamente la época de las matemáticas modernas y la actualidad, la idea es acercarnos a un significado de lo que es el libro de texto.

En la propuesta de Richaudeau (1981): *“un libro de texto es un material impreso estructurado, destinado a utilizarse en un determinado proceso de aprendizaje y formación”*, desde esta visión del libro de texto la época de la Reforma de las Matemáticas Modernas caracterizo a este como prioritario, resulta entonces relevante indagar sobre el papel del libro de texto en la gestión del maestro, teniendo en cuenta la distinción que realiza Van Dormolen (1986) de los libros de texto al calificativo de la existencia del libro de texto “a prueba de profesores” es decir, analizar y comparar si el docente se desarrolla en un rol activo o pasivo dentro de la Educación Matemática de ese tiempo y la de ahora para establecer así el papel que juega el libro de texto, en la enseñanza y apropiación del concepto de función.

Otros aspectos importantes a tener en cuenta en el análisis de texto en la época específica en la que se está trabajando, es la evolución que tuvieron dichos textos, para llegar a ser los textos con los que se cuentan actualmente, dentro de esta evolución se deben tener en cuenta

factores como el nivel de saturación, la interiorización y la invisibilidad, procesos por los cuales según Norma (2000) y Kerckhove (1999) pasan todas las tecnologías y el libro resulta ser una tecnología también, o en su época lo fue como innovación en la enseñanza, sin embargo, con la influencia de nuevas tecnologías se debe tener en cuenta qué papel jugó y qué papel juega el libro de texto como aportador de herramientas de aprendizaje.

3.2 Valoración de los libros de textos de matemáticas

A fin de la realización de análisis de textos, lo que se busca es elaborar una valoración de textos escolares pertenecientes a dos épocas claramente establecidas, por ello es pertinente considerar que implica hablar de la valoración de los libros de textos, continuando con dicha idea lo que se debe tener en cuenta según lo presentan Arbeláez & otros (1999) son unos criterios de evaluación de los textos escolares, esto permite centrar las bases para una correcta elección de los libros de textos, puesto que uno de los problemas a los que se ven enfrentados estos en la actualidad es una inadecuada selección y utilización parte de los docentes que su gran mayoría son quienes los escogen dejándose influenciar por aspectos totalmente ajenos a una selección de calidad, ejemplo de ello es la influencia de tipo económica, es una realidad cada vez mayor que en las instituciones educativas “ desafortunadamente la selección se hace muchas veces por los sobornos más o menos velados que les ofrecen los agentes y vendedores de las distintas editoriales y no precisamente por la calidad del texto” Arbeláez, Arce, Guacaneme & Sánchez (1999) sin embargo, a pesar de que exista o no la influencia del dinero la realidad es que no existe una correcta formación orientada hacia la selección de libros de textos de calidad.

(...) la evaluación de la calidad de un texto escolar estima de qué manera sus propiedades (lenguaje textual y gráfico, contenido, pedagogía, relación con el currículo y aspectos físicos) satisfacen necesidades básicas de enseñanza y aprendizaje de una o más asignaturas de un determinado grupo escolar. (William Mejía Botero 1989¹⁵)

Tener claro cómo realizar una correcta evaluación de calidad de un texto escolar es fundamental en el momento de seleccionar un texto para ser implementado, a raíz de los múltiples elementos que se deben tener en cuenta para realizar dicha evaluación se debe acudir

¹⁵ Citado por Arbeláez, G; Arce, J; Guacaneme, E; Sánchez, G; (1999)

a un mecanismo que permita estudiarlos a todos, en este caso dicho mecanismo se orienta hacia una rejilla de análisis.

En este sentido, atendiendo a la necesidad de la realización de una rejilla de análisis que permita dar cuenta de una valoración o evaluación definiendo esta:

Como un proceso que comienza cuando se establecen los propósitos para los cuales va a hacerse, continúa con la selección de los medios o recursos que van a emplearse para asegurar o garantizar su validez y termina cuando se llega a conclusiones y decisiones sobre aquello que se ha evaluado. (Guacaneme, 1999, p.5)

Se requiere establecer unos indicadores de calidad de los textos de matemáticas, parados desde la postura de Guacaneme, se establece si un texto es de calidad si cumple con las siguientes características:

- **Lenguaje escrito** en esta característica se encierra todo lo concerniente a una calidad en torno al vocabulario, la sintaxis, corrección idiomática, el discurso, el estilo, extensión y complejidad de las oraciones, entre otros.
- **Lenguaje grafico** se establecen los elementos correspondientes al registro grafico presente en los textos, a nivel de ilustraciones, diagramas e incluso el color como aspectos importantes en la calidad de los textos.
- **Contenido de la obra** da cuenta desde la estructura de presentación de los contenidos en el texto pasando por el empleo de datos precisos y actualizados, la correcta división e implementación de las temáticas.
- **Tratamiento pedagógico** se establecen aspectos de tipo educativo en torno a la relación de estudiantes con el libro de texto, en cuanto a como se enriquece la participación de este en torno a la ejercitación, la investigación, la evaluación, la metodología de enseñanza entre otros.
- **Relación con el currículo** se establecen las características que fundamentan una pertinencia con la estructura curricular en la que se enmarca, es decir si los contenidos, la metodología y la evaluación son acordes con el currículo presente.
- **Valores que trasmite** se equipara con los elementos de tipo afectivo en los que se potencializa el tipo de trabajo (individual o en grupo) y la actitud del estudiante hacia

el libro de texto y la contextualización de este en pro de una extrapolación hacia una postura de tipo social en la que importa los afectos del estudiante.

- **Aspectos físicos o materiales** se les llama también técnico-gráfico por algunos autores y se refieren a todos los aspectos de tipo editorial es decir imagen del libro, tipo de letra, estructura entre otros.

Todos estos elementos dan paso al estudio de libros de texto con miras a poder dar conclusiones al respecto, todo ello con el fin que el docente pase a ser un actor crítico ante la elección de los libros de textos, a fin de mejorar el tipo de enseñanza que se realiza en donde el libro de texto sea un actor del proceso. Es válido aclarar que dichas características desde nuestra perspectiva se toman de forma general, es decir, la rejilla de análisis asociada a la valoración de los libros de texto es independiente de la época a la que estos pertenezcan, puesto que en este caso particular se desea realizar una comparación bajo un mismo estudio.

3.3 Criterios de selección de los libros de texto.

En cuanto a los criterios de selección de los dos libros de texto actuales se tendrá en cuenta los criterios presentados por el Ministerio de Educación Nacional para el “**catálogo de textos escolares**”¹⁶ puesto a disposición en el portal de Colombia Aprende en asociación con la Cámara Colombiana del Libro, dicho portal presenta un catálogo enriquecido con los libros aprobados por el Ministerio para la implementación en las escuelas y colegios del país, en este catálogo se especifica el precio, el grado y la editorial de cada libro clasificado por áreas.

De acuerdo con lo expuesto por el Ministerio de Educación Nacional, la idea es que los procesos de conocimiento, selección, adopción y compra de textos escolares sean más ágiles y de mayor ayuda para los padres y madres de familia y la comunidad en general. El catálogo en línea contiene la información suministrada voluntariamente por los titulares de los derechos patrimoniales de autor (personas naturales o representantes legales de las empresas editoriales y distribuidoras). Los criterios tenidos en cuenta para la selección de los textos puestos a disposición en el catálogo del Ministerio de Educación Nacional son los siguientes:

- a) Ser obras impresas y encuadernadas, o digitales, para lectura, estudio y consulta, diseñadas y estructuradas pedagógicamente, que sirven de apoyo al proceso de

¹⁶MEN, *catálogo de libros de texto escolar*, tomado de: http://64.76.190.172/textos_escolares/contenidos/presentacion_del_catalogo.php

enseñanza y aprendizaje por cuanto contribuyen a la formación del educando y facilitan el desarrollo curricular en una o varias áreas, disciplinas o asignaturas. Pueden estar dirigidas a uno o más grados de escolaridad y permiten la obtención sistemática de información.

El libro de texto escolar impreso puede ser no fungible, fungible y libro cuaderno de actividades. El libro de texto escolar no fungible es el libro en el cual la persona lee, estudia o consulta. No incluye espacios especiales en blanco para responder preguntas o ejercicios, realizar dibujos, mapas u otra labor que implique alterar las páginas de la obra. Si los contiene, remite a otro documento para su solución; por ello, se hace más viable su reutilización.

El libro de texto escolar fungible (no reutilizable) es aquel que, además de presentar información verbal y gráfica, incluye espacios para que la persona escriba, dibuje o efectúe alguna otra tarea que deje testimonio de su proceso de aprendizaje.

El libro cuaderno de actividades es un tipo de texto escolar, de naturaleza fungible, diseñado con amplios espacios para que las personas realicen en él ejercicios o escrituras, en respuesta a órdenes, preguntas o instrucciones. Incluye elementos informativos y se utiliza con cualquier libro de texto escolar o en forma independiente de ellos.

- b)** Ser obras impresas y publicadas, o digitales grabadas en CD, DVD u otra tecnología, y tener ISBN asignado por la Cámara Colombiana del Libro o por las respectivas instancias en sus países de origen. Las reseñas de libros de texto escolar no finalizados o que se presenten en maquetas, con enmendaduras y/o indicaciones de modificaciones futuras no serán aceptadas en este catálogo.
- c)** Estar dirigidas a la Educación Básica y Media (grados 1° a 11°).

3.4 Elementos teóricos asociados al modelo de análisis.

En el estudio de la forma como es introducido el concepto de función en algunos libros de texto es importante interesarse en aquellos elementos relevantes en la comprensión de dicho concepto por parte de los estudiantes, uno de estos elementos según lo muestra Ospina, 2012 citando a (Gutiérrez, 2007), (Guzmán, 1998), (Planchart, 2000), (Vasquez, 2008) & otros, son los modos de representación de la función, exponiendo como la desarticulación entre las distintas representaciones semióticas ha conllevado a dificultades en la comprensión de dicho concepto debido a que no se logra dar un significado integral al no poder unificar las distintas representaciones del concepto de función, de este modo, el estudiante considera la existencia de distintos objetos matemáticos pertenecientes a cada tipo de representación donde en realidad solo existe uno. “Una función no es ni una estadística de valores ni una representación gráfica ni un conjunto de cálculos ni una fórmula, sino todo ello al mismo tiempo”. COPREM1, citado en (Vasquez, 2009), en este sentido, la idea de unidad de las representaciones del concepto de función debe también ser clara y promoverse en los libros de texto ya que estos son vistos como una herramienta tanto para el docente como para el estudiante en la enseñanza y el aprendizaje de los diferentes conceptos, es por ello que se trabajara en un modelo de análisis basado en el trabajo de Janvier (1978), citado en García & Llinares (1999) sobre los modos de representación y procesos de traslación en el análisis del concepto de función (Tabla 2), correspondientes a las descripciones verbales, tablas de datos, representaciones gráficas y expresiones simbólicas, de acuerdo a como lo define Ospina (2012), las **descripciones verbales** corresponden a una descripción en lenguaje natural, **las tablas**, son tablas de valores donde se ponen en correspondencia las variables, presentan una dificultad entorno a la continuidad, ya que solo se puede poner un número finito de valores, **las representaciones gráficas**, se establecen para la función como una línea recta en el plano cartesiano y **las expresiones simbólicas**, aunque Ospina las define como el trabajo a través de los conjuntos, con pares ordenados, Janvier lo asocia a un registro algebraico donde se establece una expresión algebraica o una fórmula.

PROCESOS DE TRASLACIÓN				
De \ A	Situación, descripción verbal	Tablas	Graficas	Formula, expresión algebraica
Situación, descripción verbal				
Tablas				
Graficas				
Formula, expresión algebraica				

Tabla 2: Modos de representación y procesos de traslación

Partiendo de estos cuatro modos de representación se establece continuamente cuatro tipos de categorías que iniciaran **la rejilla de análisis**¹⁷ a emplear en el presente estudio, estas categorías se fundamentan desde las investigaciones en torno al sistema matemático de signos, González y Sierra (2004) establecen las siguientes categorías:

- **Sintáctico**, ya que cada símbolo se puede considerar susceptible de ser insertado en secuencias junto con otros símbolos mediante unas reglas que garantizan la coherencia interna y la validez.
- **Semántico**, puesto que los signos se consideran en relación con su significado matemático y sus relaciones con conceptos de otras ciencias.
- **Pragmático-didáctico**, siempre que el signo se considere en relación con la utilización que se hace de él desde el punto de vista didáctico para, por ejemplo, resaltar unas características del concepto que representa frente a otras. En este sentido, una representación puede ser más adecuada que otra, en función del uso que se vaya a hacer de ella. La utilización puede indicarnos si son representaciones sólo de lectura, si hay

¹⁷ La rejilla de análisis corresponde a la rejilla presentada en González, A & Sierra, V (2004).

que completar, si tenemos una fuente de datos, un ejemplo, prototipo o ilustración de algo, o bien si están integradas en una actividad. Incluso tendremos que tener en cuenta algunos aspectos que pueden estar relacionados con las herramientas que se están utilizando en un determinado momento; por ejemplo, cuando hacemos gráficas con calculadoras gráficas, hemos de tener en cuenta: la escala usada, la ventana definida en la calculadora...

- **Sociocultural**, que hace referencia a símbolos, términos y cualidades de estos símbolos, y términos característicos de una determinada época o de una determinada cultura o sociedad. Muchos de los símbolos matemáticos son intemporales, desde el momento de su introducción no ha variado su uso. Actualmente, con la introducción de las nuevas tecnologías, veremos cómo las necesidades tecnológicas han impuesto algunas variaciones en estos símbolos.

Finalmente, la rejilla culmina con una clasificación de los textos dados tres perfiles según la modalidad dominante, Expositivo (E), Tecnológico (T) y Comprensivo (C), González y Sierra (2004) establecen la siguiente caracterización:

- **Expositivo (E)**: Son libros en los que se considera el conocimiento matemático como una acumulación de enunciados, reglas y procedimientos aislados, y relativamente inconexos y desconectados de la realidad, pero que poseen una estructura matemática, típicamente deductiva, en la que, partiendo de las definiciones de los conceptos, se deducen los teoremas y se exponen algunos pocos ejemplos: es una estructura ciertamente prescriptiva. Esta estructura implica, en cuanto a la enseñanza, que los objetivos son conceptuales: incita a la exposición magistral y a la ejercitación repetitiva. Este tipo de libros induce a un aprendizaje de tipo memorístico, en los que importa más la estructura matemática que la comprensión de los conceptos, a pesar del énfasis que se pone en las definiciones y teoremas.

- **Tecnológico (T)**: Se conciben las matemáticas como una organización lógica de enunciados, reglas y procedimientos que se emplean como técnicas o destrezas para pensar sobre los conceptos y aplicarlos a diversas situaciones. Las distintas ramas de

las matemáticas aparecen totalmente desconectadas. A partir de objetivos terminales u operativos, y por medio de una estructura secuencial en la enseñanza, se intenta una ejercitación productiva, proponiéndose para ello numerosas aplicaciones con la intención de dotar de sentido a las distintas reglas. Aunque los procedimientos y conceptos están organizados y estructurados de una forma lógica, se hace más énfasis en la memorización de reglas y la aplicación en ejercicios y problemas.

• **Comprensivo (C):** Se conciben las matemáticas como un instrumento para interpretar la realidad entendida ésta en sentido amplio. En este caso se parte de objetivos flexibles, de forma que para conseguirlos se requiere la experimentación, por lo que el tipo de enseñanza adecuada es la realizada por descubrimiento, permitiendo de esta forma la construcción de redes conceptuales. El aprendizaje de las matemáticas se adquiere mediante el establecimiento de una red de relaciones con otros contenidos que pueden ser matemáticos o no, dando así sentido a las matemáticas. Se considera que los conceptos se adquieren partiendo de situaciones propias de la realidad que permiten la construcción de conceptos y reglas.

3.5 Antecedentes al modelo de análisis.

El modelo de análisis empleado para el presente trabajo corresponde a la rejilla de González y Sierra (2004), en su artículo *metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX* publicado en la revista *enseñanza de las ciencias* creada en base a las categorías, dimensiones y perfiles caracterizados anteriormente, hace parte de un estudio en el análisis de la forma de presentación de los puntos críticos de un cuerpo de libros seleccionados en los que se hace un recorrido desde el año 1934 al año 2001, estableciendo cuatro periodos de tiempo, la introducción de la enseñanza del análisis matemático: 1934-1967, introducción de las matemáticas modernas: 1967-1975, desarrollo del plan de estudios de BUP: 1975-1995, una nueva orientación de la enseñanza de las matemáticas bajo las orientaciones de la LOGSE: 1995-2001.

Este trabajo se considera pertinente para el objetivo de estudio que se tiene, ya que presenta una base desde los modos de representación y el sistema matemático de signos

elementos importantes en la conceptualización de la función como objeto matemático de estudio, de forma tal que se logra establecer un análisis de la traslación entre los registros que componen el concepto de función, permitiendo de este modo evidenciar las características que presentan los libros de textos en cuanto a la forma como es presentado en concepto en miras de potencializar los procesos de traslación según lo establece Janvier (1978) citado en Gonzales & Sierra (2004) , por otra parte esta rejilla establece una clasificación importante en cuanto al perfil que puede presentar un libro de texto de matemáticas caracterizando como se da la conceptualización, el manejo de la teoría, la relación entre el concepto y las actividades que puede presentar el libro de texto, aspectos que resultan relevantes en el análisis y que pueden ser influyente a la hora de realizar un comparación como es la que se pretende hacer en el presenta trabajo.

3.6 Descripción del modelo de análisis.

La rejilla de análisis que se implementó para el estudio de los libros de texto de matemáticas seleccionados, consta de cuatro categorías (Sintáctica, Semántica, Pragmático-Didáctica, Sociocultural), cada una de estas categorías se encuentran divididas en 5 para un total de 20 dimensiones, estas dimensiones están establecidas una para cada tipo de representación (verbal, tabular, grafico, simbólico), finalmente se establece la clasificación en cuanto al perfil del texto (expositivo (E), tecnológico (T), comprensivo (C)) de forma tal que cada dimensión debe corresponder a un solo perfil, de este modo se establece la tendencia que tiene el libro de texto.

En la rejilla se establecen las dimensiones de manera resumida, pero estas corresponden a una caracterización que combina el tipo de representación con el perfil del texto. González y Sierra (2004) establecen una descripción detallada de cada dimensión como se observa a continuación.

- **SINTAXIS**

- Dimensión 1: Estructura del problema**

- E1:** Problemas clásicos en el sentido de que, a partir de un enunciado, se establece todo un conjunto de soluciones agrupadas por una característica común. Se trata de problemas de tipo teórico cuya estructura es de la forma: calcula.

T1: Problemas de aplicación en los que, a partir de un enunciado con datos numéricos, se hace una pregunta acerca de la solución.

C1: Son problemas en los que se incluye una explicación a modo de justificación del sentido del problema en relación con el concepto que se está estudiando.

Dimensión 2: Descripciones teóricas

E2: Descripciones formales con algún elemento intuitivo.

T2: Descripciones teóricas con símbolos lógico-matemáticos.

C2: Descripciones explicativas.

Dimensión 3: Símbolos utilizados en las tablas

E3: No se incluyen tablas.

T3: En las tablas se incluyen símbolos exclusivamente matemáticos.

C3: Se introducen en las tablas iconos como flechas, arcos...

Dimensión 4: Símbolos utilizados en las gráficas

E4: Gráficas generales en las que los datos se incluyen en forma literal.

T4: En las gráficas se incluyen símbolos numéricos.

C4: No hay ningún símbolo además de la propia gráfica.

Dimensión 5: Tipos de expresiones simbólicas

E5: Las expresiones simbólicas se refieren a familias de funciones.

T5: Expresiones simbólicas específicas.

C5: Expresiones simbólicas no habituales.

- **SEMÁNTICA**

Dimensión 6: Fenomenología

E6: Problemas matemáticos.

T6: Problemas realistas.

C6: Problemas sacados de la realidad.

Dimensión 7: Tipos de descripciones

E7: Descripciones de los conceptos como una propiedad de las funciones.

T7: Descripciones en las que se enfatiza su aplicación: reglas ($f(x) > f(x_0)$ o $f'(x) = 0$).

C7: Descripciones como propiedades de las curvas.

Dimensión 8: Tipos de tablas

E8: Ausencia de tablas.

T8: Cuadros variacionales en los que se enfatizan las relaciones o conexiones.

C8: Tablas de descripción local.

Dimensión 9: Tipos de gráficas

E9: Mensajes topológicos.

T9: Ábacos

C9: Gráficas como ideogramas.

Dimensión 10: Significado de las expresiones simbólicas

E10: Expresiones simbólicas como objetos manipulables.

T10: Expresiones simbólicas como iconos.

C10: Funciones en las que se refleja un proceso variacional.

- **PRAGMÁTICO-DIDÁCTICA**

Dimensión 11: Función de los ejercicios

E11: Ejercicios resueltos de aplicación de conceptos sin gráficos.

T11: Ejercicios propuestos de aplicación de reglas o ejercicios con apoyos gráficos o fórmulas.

C11: Problemas para la construcción de conceptos y reglas o con gráficos explicativos.

Dimensión 12: Papel de las definiciones

E12: Descripciones para la construcción de la teoría formuladas a priori.

T12: Desarrollo de reglas algorítmicas para la aplicación a problemas y ejercicios: énfasis técnicos.

C12: Interpretación de las reglas a partir de los fenómenos estudiados, estableciendo las definiciones a posteriori.

Dimensión 13: Actividades relacionadas con las tablas

E13: Ausencia de tablas

T13: Tablas construidas a partir de una expresión simbólica.

C13: Tablas para completar relacionadas en ambas direcciones con otras representaciones tanto para su construcción como para su interpretación.

Dimensión 14: Actividades gráficas

E14: Clasificación de conceptos.

T14: Construcción de gráficas.

C14: Visualización de propiedades.

Dimensión 15: Papel de las expresiones simbólicas

E15: Expresiones simbólicas utilizadas como ejemplos de los conceptos.

T15: Expresiones simbólicas para la aplicación de las reglas.

C15: Expresiones simbólicas que permitan establecer relaciones con otras formas de representación.

- **SOCIOCULTURAL**

Dimensión 16: Influencia social y adaptación al currículum

E16: Sin contexto.

T16: Utilización de contextos atemporales.

C16: Contextos con referencias a la época en que fue escrito el libro.

Dimensión 17: Influencias didácticas

E17: Definiciones que mantienen la estructura de los libros históricos.

T17: Definiciones adaptadas a los planes de estudio y las orientaciones oficiales.

C17: Definiciones influenciadas por novedosas corrientes didácticas.

Dimensión 18: Aplicación de las tablas

E18: Ausencia de tablas.

T18: Tablas como elemento auxiliar.

C18: Tablas con categoría como cualquier otra representación.

Dimensión 19: Presentación de las gráficas

E19: Gráficas cartesianas sin añadidos.

T19: Gráficas con algún elemento característico del periodo (intervalos...).

C19: Utilización de gráficas con elementos escolares (cuadrículas, pantallas...).

Dimensión 20: Complejidad de las expresiones simbólicas.

E20: Expresiones simbólicas clásicas representativas de ciertas curvas geométricas como la circunferencia, cicloide, etc.

T20: Expresiones simbólicas escogidas porque su estructura es adecuada como aplicación didáctica de las reglas establecidas previamente.

C20: Expresiones muy variadas y complejas que puedan estar relacionadas con fenómenos reales y requieran el uso de las nuevas tecnologías.

De acuerdo a esta caracterización González y Sierra (2004) establecen la siguiente tabla que corresponde a la rejilla de análisis que se empleará en el capítulo IV de este trabajo, las columnas corresponden a las categorías, las dimensiones, el perfil expositivo, perfil tecnológico y perfil comprensivo.

Las filas de la rejilla logran relacionar cada uno de los tres aspectos mencionados, las dimensiones responden a los registros de representación y pretenden garantizar su presencia y desarrollo dentro del libro que se evaluado con dicha rejilla.

Las características asociadas a los diferentes perfiles se encuentran descritas en forma resumida, su versión amplia se mostró anteriormente.

Categorías		Dimensiones	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	1	Estructura del problema	Clásica	Aplicación	Explicación
	2	Descripciones teóricas	Formales	Formales intuitivas	Intuitivas
	3	Símbolos utilizados en las tablas	Sin tablas	Con símbolos matemáticos	Con iconos
	4	Símbolos utilizados en las graficas	Literal	Utilización de números	Elementos explicativos
	5	Tipos de expresiones simbólicas	Familiares	Específicas	Variadas
Semántica	6	Fenomenología	Matemáticas	Realistas	Reales
	7	Tipos de descripciones	De conceptos	De reglas	De relaciones
	8	Tipos de tablas	Sin tablas	Descripción local	Cuadros de variación
	9	Tipos de graficas	Ideogramas	Ábacos	Mensajes topológicos
	10	Significado de las expresiones simbólicas	Objeto	Regla	Proceso
Pragmático Didáctico	11	Función de los ejercicios	Rutinarios	Aplicación	Deducción
	12	Papel de las definiciones	Estructurales teóricas	Aplicación a problemas	Interpretación
	13	Actividades relacionadas con las tablas	Sin tablas	Construcción	Interpretación/ construcción
	14	Actividades de graficas	Visualización	Construcción	Interpretación/ construcción
	15	Papel de las expresiones simbólicas	Ejemplificación	Escolar	Social
Sociocultural	16	Influencia social y adaptación al currículo	No hay	Contexto intemporal	Contexto actual
	17	Influencias didácticas	Clásica	Adaptada al currículo	Novedosa
	18	Aplicación de las tablas	Sin tablas	Elemento auxiliar	Categoría de objetos
	19	Presentación de las gráficas (estática/dinámica)	Descontextualizada	Impresa	Nuevas tecnologías
	20	Complejidad de las expresiones simbólicas	Clásicas	Sencilla	Complejas

Tabla 3: Rejilla de análisis tomada de Gonzalez & Sierra (2004,p.394)

CAPITULO 4.

ANÁLISIS DE LOS LIBROS DE TEXTO

De conformidad con el objeto y la metodología definida para la presente investigación, se han seleccionado dos libros de texto de matemáticas los cuales hacen referencia a las dos épocas en las cuales se enmarca el estudio (Matemáticas modernas y actualidad), dichos textos corresponde al material de análisis, para ello se aplicara la rejilla anteriormente caracterizada de manera que se puedan obtener las diferentes conclusiones y observaciones que se esperan dar.

4.1 Caracterización de los libros de texto.

Con base a los diferentes criterios de selección de libros de texto de matemáticas y las necesidades asociadas al objeto de estudio se establece la selección de dos libros de texto correspondientes a la época de la Reforma de las Matemáticas Modernas entre el periodo 1960-1985, y dos libros de texto pertenecientes al periodo entre 2006 a la actualidad regidos por los Estándares Básicos de Competencias en matemáticas (MEN, 2006), de esta manera se han seleccionado:

- Para la Reforma de las Matemáticas Modernas el libro *Matemática Moderna Estructurada 3* presentado como uno de los textos que se empezaron a implementar en Colombia de copias desdibujadas y síntesis apretadas de textos matemáticos universitarios según lo muestra García (1996) y *Matemáticas Modernas Para Escuelas Secundarias 2* perteneciente a una traducción de uno de los libros desarrollados por el grupo S.M.S.G.
- Para los textos pertenecientes a la época actual se han elegido los libros *ZonActiva Matemáticas 8* de editorial norma en contraste con el libro *Matemática Moderna Estructurada 3*, correspondiente a la misma editorial, de manera que se pueda observar el desarrollo del concepto de una misma editorial en épocas diferentes. *Proyecto Sé Matemáticas 8* presentados como opciones en textos de matemáticas por el portal de Colombia aprende y su catálogo en línea.

4.1.1 Descripción de los libros de texto pertenecientes a la época de la Reforma de las Matemáticas Modernas.

✓ Matemática Moderna Estructurada 3



Editor:	Norma
Área curricular:	Matemáticas
Grado:	Libro 3
Serie:	Nueva Serie
Año:	1978
Lugar:	Colombia
Autor (es):	Raúl Gómez Darío Wills Hugo Guarín Nelson Londoño
Formato:	20cm x 27cm
Número de Páginas:	339

Ilustración 3: Caracterización libro Matemática Moderna Estructurada 3

El contenido del libro está clasificado en diez unidades: **Unidad I:** Lógica y Conjuntos **Unidad II:** Relaciones y Funciones **Unidad III:** Relaciones de Tipo Geométrico **Unidad IV:** Conjuntos Numéricos **Unidad V:** Números Reales **Unidad VI:** Polinomios **Unidad VII:** Ecuaciones e Inecuaciones **Unidad VIII:** Lugares Geométricos y Construcciones **Unidad IX:** Área de polígonos y Círculos **Unidad X:** Estadística Descriptiva. Al mismo tiempo, el libro realiza una subdivisión del contenido por capítulos, en general tiene 16 capítulos: **Capítulo 1 :** cálculo de proposiciones **Capítulo 2:** Predicados, funciones proposicionales y cuantificadores **Capítulo 3:** Conjuntos y proposiciones **Capítulo 4:** Relaciones y Funciones **Capítulo 5:** perpendicularidad y Paralelismo **Capítulo 6:** Transformaciones Geométricas **Capítulo 7:** Congruencia y sus aplicaciones **Capítulo 8:** Conjuntos Numéricos **Capítulo 9:** Números Irracionales y Números Reales **Capítulo 10:**

Polinomios **Capítulo 11:** Factorización de Polinomios **Capítulo 12:** Fracciones Algebraicas, **Capítulo 13:** Ecuaciones e Inecuaciones de primer grado **Capítulo 14:** Lugares geométricos y Construcciones, **Capítulo 15:** Área de polígonos y círculos, Teorema de Pitágoras **Capítulo 16:** Estadística Descriptiva.

El libro se encuentra escrito en dos colores resaltando algunos apartados con color rojo y lo demás en color negro, al inicio de cada unidad se evidencia un pequeño párrafo de introducción al tema que se va a tratar, y al finalizar se encuentra un resumen de todo lo que se trabajó en la unidad.

De acuerdo con la problemática de trabajo la unidad de interés corresponde a la **Unidad II: Relaciones y Funciones, Capítulo 4: Relaciones y Funciones.**

UNIDAD II		
RELACIONES Y FUNCIONES		
Capítulo 4		40
Relaciones y funciones		40
4.1	Introducción	40
4.2	Pares ordenados	40
4.2.1	Igualdad de pares ordenados	41
4.3	Producto cartesiano de conjuntos	41
4.3.1	Representación gráfica del producto cartesiano	43
4.4	Relaciones binarias	43
4.4.1	Conjunto solución de una relación	44
4.4.2	Conjuntos de partida y de llegada	45

Ilustración 4: Unidad II libro Matemática Moderna Estructurada

4.4.3	Dominio e imagen de una relación
4.4.4	Representación de relaciones
4.5	Propiedades de las relaciones
4.5.1	Relaciones reflexivas
4.5.2	Relaciones simétricas
4.5.3	Relaciones transitivas
4.5.4	Relaciones antisimétricas
4.6	Relación de equivalencia
4.7	Particiones
4.7.1	Clases de equivalencia y particiones
4.8	Relaciones de orden
4.8.1	Relación de orden estricto
4.8.2	Relación de orden parcial
4.8.3	Relación de orden total
4.9	Elementos máximos y mínimos en un conjunto ordenado
4.10	Concepto de aplicación o función
4.11	Dominio e imagen de una aplicación f
4.11.1	Imagen de un elemento
4.12	Gráfica de una aplicación
4.13	Igualdad de aplicaciones
4.14	Aplicaciones uno a uno o inyecciones
4.15	Aplicaciones sobre o suryecciones
4.16	Correspondencias uno a uno o biyecciones
4.17	Composición de aplicaciones
4.18	Algunas aplicaciones importantes
4.18.1	Aplicación identidad
4.18.2	Aplicación constante
4.18.3	Operación binaria
	Resumen
	Ejercicios generales

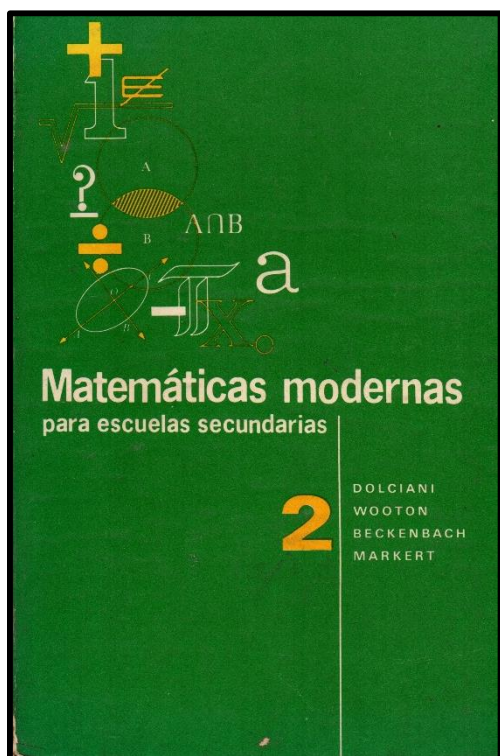
Ilustración 5: Unidad II libro Matemática Moderna Estructurada

La unidad se ubica en la página 40 del libro y no es exclusiva para el concepto de función, inicialmente se realiza el estudio de las **Relaciones** en donde se incluyen los subtemas pares ordenados, producto cartesiano de conjuntos, relaciones binarias, propiedades de las relaciones, relaciones de equivalencia, particiones, relaciones de orden y elementos máximos y mínimos en un conjunto ordenado, luego aparece como un subtema **Concepto de Aplicación o Función**, iniciando la caracterización del concepto de función con el estudio de esta a través de los subtemas dominio e imagen de una aplicación f ; gráfica de una aplicación, igualdad de aplicaciones, aplicaciones uno a uno o inyecciones, aplicaciones

sobre o subyecciones, correspondencia uno a uno o biyecciones, composición de aplicaciones y finalmente algunas aplicaciones importantes.

Se logra observar que en cuanto a la propuesta de ejercicios, estos se realizan al finalizar cada subtema, y al finalizar la unidad se presentan bajo el título **Ejercicios Generales**, una lista con un número mayor de ejercicios correspondientes a los temas tratados.

✓ **Matemáticas Modernas para escuelas secundarias 2**



Editor:	Publicaciones Cultural
Área curricular:	Matemáticas
Grado:	Libro 2
Serie:	Segunda reimpresión
Año:	1969
Lugar.	México D.F
Autor (es):	Mary Dolciani William Wooton Edwin Beckernbach Walter Markert
Formato:	15cm x 23cm
Número de Páginas:	500

Ilustración 6: Caracterización Libro Matemáticas Modernas para escuelas secundarias 2

El contenido del libro se encuentra dividido en 17 temas: **1:** Números Racionales **2:** Adición y sustracción de números racionales **3:** multiplicación y división de números racionales **4:** figuras geométricas en el plano **5:** congruencia y medición de figuras planas **6:** Exponentes y notación científica **7:** El sistema métrico **8:** Precisión y exactitud **9:** Numerales decimales y números reales **10:** Oraciones numéricas abiertas **11:** Resolución de oraciones numéricas abiertas **12:** Empleo de las ecuaciones **13:** Raíces cuadradas; figuras semejantes **14:** Pirámides y prismas **15:** Conos, cilindros y esferas **16:** Relaciones, funciones y graficas **17:** Probabilidad.

El libro corresponde a una traducción de la obra cuyo título en inglés es Modern School Mathematics Structure and Method Book 8. Sus autores (Dolciani, Wooton y Beckenbach) fueron miembros de School Mathematics Study Group (S.M.S.G), grupo de trabajo encargado de la elaboración de textos escolares, guías para maestros y entrenamiento de profesores en la iniciativa por introducir la Matemática Moderna a Estados Unidos y desde luego a los países latinoamericanos, según Ruiz, A. (1992) la Reforma llega a Latinoamérica por influencia externa y una de esas influencias corresponden a la introducción de libros de texto del grupo S.M.S.G, el libro Matemáticas modernas para escuela secundaria 2 es uno de los libros derivativos de este grupo que lograron llegar a Latinoamérica.

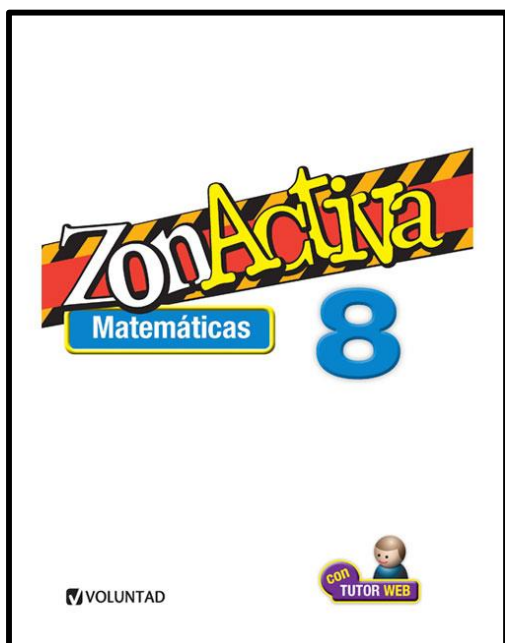
La unidad de interés donde se desarrolla el concepto de función corresponde al tema **16: relaciones, funciones y gráficas.**

16.	RELACIONES, FUNCIONES Y GRÁFICAS	431
	Oraciones numéricas abiertas con dos variables. 16-1 Resolución de ecuaciones con dos variables, 432. 16-2 Conjuntos solución de oraciones numéricas abiertas con dos variables, 434.	
	Gráficas, relaciones y funciones. 16-3 Sistemas de coordenadas rectangulares, 438. 16-4 Relaciones y funciones, 443.	
	Utilización de gráficas. 16-5 Gráficas de funciones lineales, 447. 16-6 Gráficas de desigualdades lineales, 452. 16-7 Sistemas de ecuaciones lineales, 454.	
	RESUMEN DEL CAPÍTULO, 459. EXAMEN DEL CAPÍTULO, 460. REPASO DEL CAPÍTULO, 461. ¿QUIÉNES USAN LAS MATEMÁTICAS?, 463. LECTURAS RECOMENDADAS, 464. TEMAS SELECTOS, 464.	

Ilustración 7: Tema 16 Libro Matemáticas modernas para escuelas secundarias 2

El tema se ubica en la página 431 e inicia con un texto introductorio donde se explica lo que se va a trabajar en la unidad y se evidencia a través de un subíndice donde se discriminan los subtemas relacionados, es de mencionar que el concepto de función se trabaja como un subtema, ya que la unidad como tal inicia con el estudio de las operaciones numéricas abiertas con dos variables, luego pasa a trabajar el subtema gráficas, relaciones y funciones, donde

4.1.2 Descripción de los libros de texto perteneciente a la época actual.



Editor:	Voluntad
Área curricular:	Matemáticas
Grado:	Octavo
Edición:	Primera
Año:	2011
Autor (es):	Viana Uni Muñoz Manuel A. García Luis E. Guzmán Nelson E. Urrego Luz Helena Silva.
Formato:	21 cm x 30 cm
Número de Páginas:	328

Ilustración 9: Caracterización Libro ZonActiva Matemáticas 8

El contenido del libro está clasificado en nueve unidades:

Unidad 1: Sistema de los números reales, **Unidad 2:** Ecuaciones e inecuaciones lineales, **Unidad 3:** Polinomios, **Unidad 4:** Factorización, **Unidad 5:** Fracciones algebraicas, **Unidad 6:** Funciones, **Unidad 7:** Geometría, **Unidad 8:** Triángulos y cuadriláteros, **Unidad 9:** Estadística.

El comienzo de cada unidad incluye los pensamientos a los que hacen parte los contenidos del mismo, los estándares y procesos correspondientes, y una lectura.

Cada tema inicia con el logro a cumplir y los ejercicios y actividades se clasifican de acuerdo con el proceso a desarrollar en: Comunicación, Razonamiento lógico, Resolución de problemas y Conexiones.

De acuerdo con la problemática de trabajo, la unidad de interés es la **unidad 6**, ya que es aquí donde se presenta el concepto de función,

Unidad 6
Funciones

- Tema 55** Concepto de función 214
- Tema 56** Representación gráfica de una función 217
- Tema 57** Función lineal 220
- Tema 58** Función afín 223
- Tema 59** Funciones de variación directa e inversa... 226
- Tema 60** Funciones crecientes, decrecientes y constantes 229
- Tu creación 232
- Para recordar 233
- Evalúa tus competencias 234
- Pueba Saber 236

Ilustración 10: Unidad 6 Libro ZonActiva Matemáticas 8

La unidad se ubica en la página 212, en ella se maneja el concepto de función, la representación de esta a través de una gráfica, se caracteriza tanto la función lineal como la afín, para finalmente trabajar la variación directa e inversa y las funciones creciente y decrecientes. Se inicia con una actividad de introducción orientada al manejo de la bolsa de valores y su asociación con la variación.

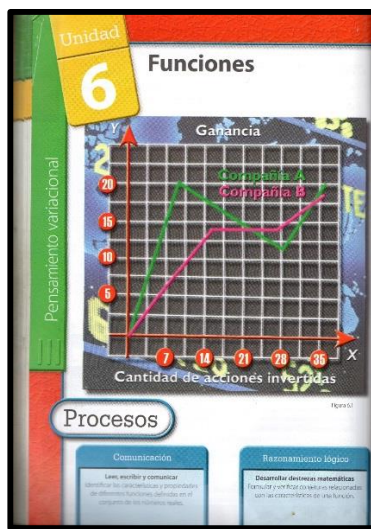



Ilustración 11: Inicio Unidad 6 ZonActiva Matemáticas 8

Al finalizar la unidad se manejan cuatro actividades diferentes a las que se manejan en el desarrollo de la unidad, **tu creación**.

Tu creación

Juegos matemáticos

- Toma de una baraja de póquer las cuatro cartas marcadas con la letra A, las cuatro cartas marcadas con la letra J, las cuatro cartas marcadas con la letra Q y las cuatro cartas marcadas con la letra K. **Organízalas** en forma de un cuadrado de 4 filas y 4 columnas de manera que en ninguna fila, en ninguna columna y en ninguna de las dos diagonales principales se repitan figura ni letra.



A	K	Q	J
K	Q	J	A
Q	J	A	K
J	A	K	Q
- El cubo de Soma es un rompecabezas formado por siete figuras geométricas determinadas por cubos, con los que se forma un cubo mayor.

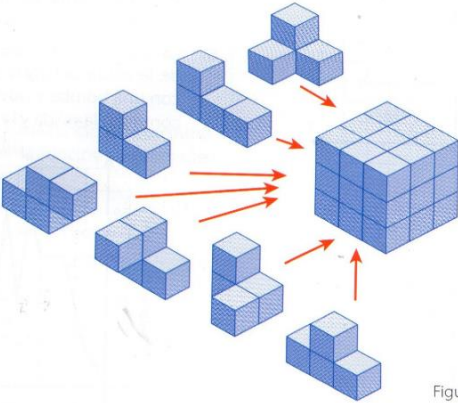
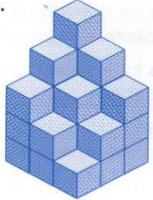


Figura 6.30

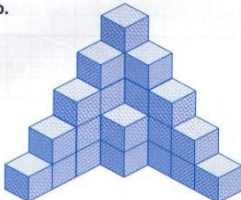
Construye algunas de las figuras que aparecen a continuación.

a.



Cristal

b.



Piedra angular

Figura 6.31

Ilustración 12: Tu creación Libro ZonActiva Matemáticas 8

Para recordar, es un mapa conceptual en el que se resume todo lo visto en la unidad.

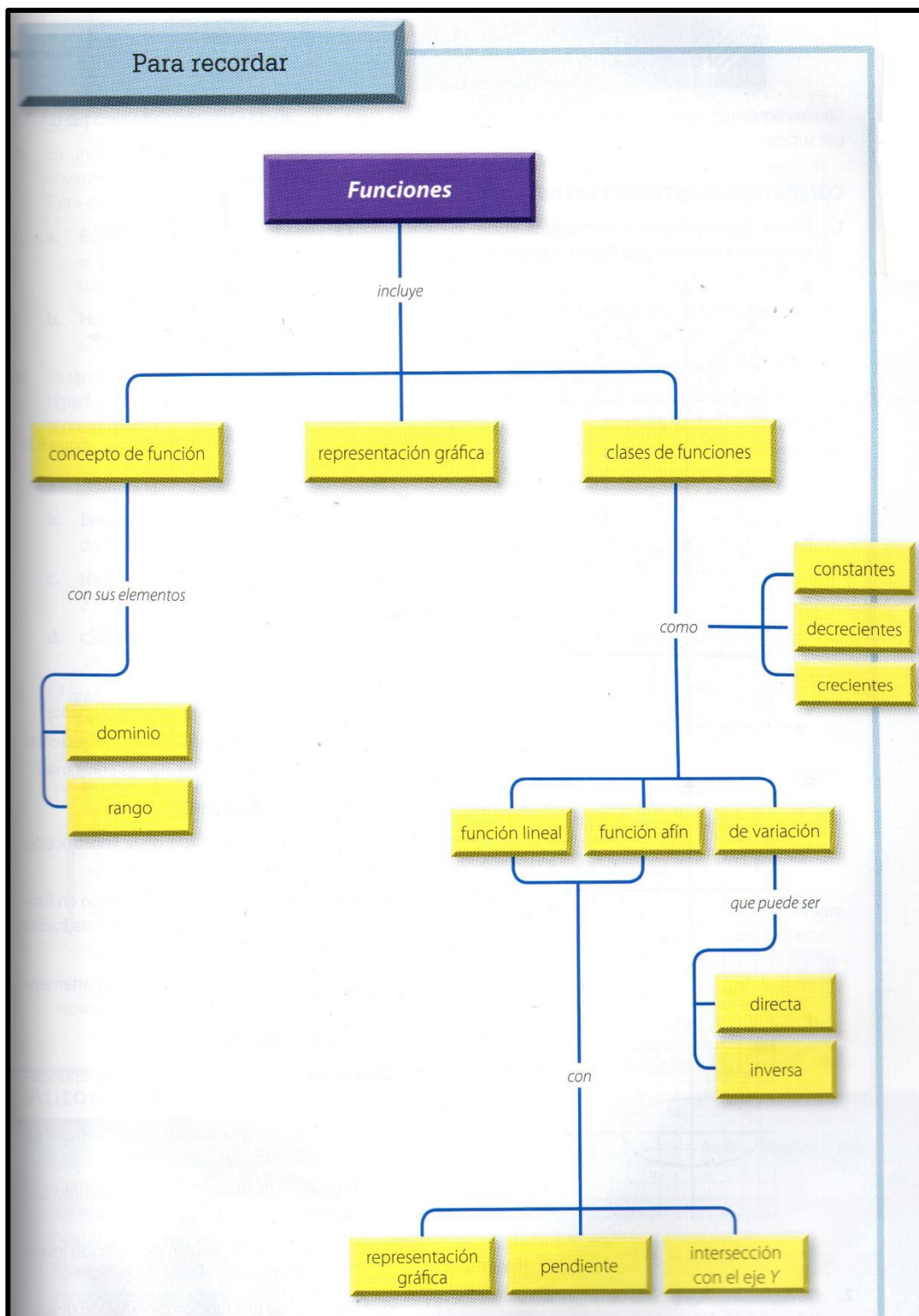


Ilustración 13: Para recordar Libro ZonActiva Matemáticas 8

Evalúa tus competencias corresponde a una evaluación en la que las preguntas se orientan de acuerdo con las diferentes competencias en matemáticas.

Evalúa tus competencias

Con los siguientes ejercicios afianzas los indicadores de logro que has superado y refuerzas aquellos que por superar.

COMPETENCIA INTERPRETATIVA

1. De las siguientes gráficas **determina** cuáles representan funciones. **Justifica** tu respuesta.

a.

a. $f(x)$ cuando $x = -1$.

b. $f(x)$ cuando $x = -2$.

c. $f(x)$ cuando $x = 0$.

d. $f(x)$ cuando $x = 2$.

e. $f(x)$ cuando $x = 3$.

f. El dominio de la función.

g. El rango de la función.


h. ¿En qué valores de x , y es cero?

i. ¿En qué intervalos la función es creci

Ilustración 14: Evalúa tus competencias Libro ZonActiva Matemáticas 8

54

Finalmente se encuentra la **prueba saber**, que son diez preguntas del estilo de las pruebas saber que se relacionan con el concepto de función.

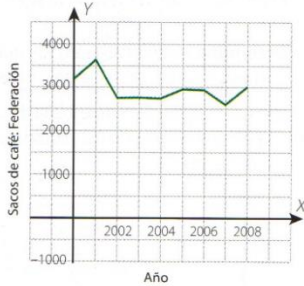


Prueba Saber

En cada pregunta encontrarás cuatro opciones de respuesta, solo una es correcta. Marca con **X** la respuesta correcta.

Responde las preguntas 1 a 5 con base en la siguiente información.

El café de Colombia es apetecido en diferentes países por su suavidad y aroma. Este producto representa para el país anualmente grandes **dividendos** gracias a su exportación. En las siguientes gráficas se muestra la cantidad, en miles de sacos de café de 60 kg, exportados por Colombia entre los años 2000 y 2008.



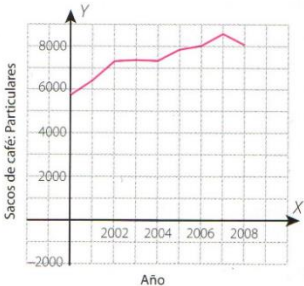



Figura 5.33

Adaptado de:
http://www.federaciondecafeteros.org/particulares/es/quienes_somos/119_estadisticas_historicas/

1. De acuerdo con la representación del comportamiento de las exportaciones de café realizadas por la Federación Nacional de Cafeteros, la gráfica es creciente de
 - A. 2001 a 2002.
 - B. 2003 a 2004.
 - C. 2006 a 2007.
 - D. 2007 a 2008.
2. De acuerdo con la representación del comportamiento de las exportaciones de café realizadas por particulares, es constante de
 - A. 2001 a 2002.
 - B. 2002 a 2004.
 - C. 2006 a 2007.
 - D. 2007 a 2008.
3. La gráfica de la función que representa las exportaciones realizadas por la Federación Nacional de Cafeteros, entre 2001 y 2002 es
 - A. creciente.
 - B. constante.
 - C. decreciente.
 - D. ninguna de las anteriores.
4. Las mayores exportaciones de sacos de café fueron de
 - A. la Federación Nacional de Cafeteros, en el año 2001.
 - B. los particulares, en el año 2006.
 - C. la Federación Nacional de Cafeteros, en el año 2008.
 - D. los particulares, en el año 2007.
5. Las menores exportaciones de sacos de café fueron las de
 - A. los particulares, en el año 2000.
 - B. la Federación Nacional de Cafeteros, en el año 2000.
 - C. los particulares, en el año 2008.
 - D. la Federación Nacional de Cafeteros, en el año 2007.

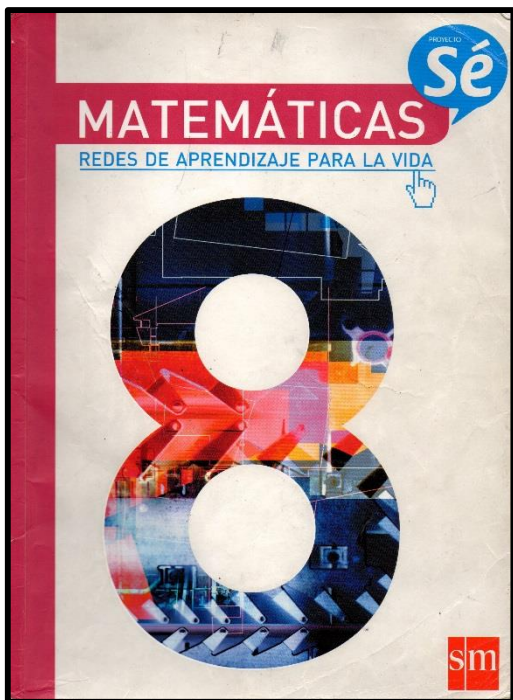


Glosario

Dividendo: cuota que, al distribuir ganancias una compañía mercantil, corresponde a cada acción.

Ilustración 15: Prueba saber Libro ZonActiva Matemáticas 8

✓ Proyecto Sé Matemáticas 8



Editor:	SM S.A
Área curricular:	Matemáticas
Grado:	Octavo
Edición:	Primera
Año:	2012
Autor (es):	Máximo A. González José R. Vizmanos Manuel Bellón Juan C. Hervás Álvaro A. Pinzón Doris E. Álvarez
Formato:	21 cm x 28 cm
Numero de Paginas:	351

Ilustración 16: Contenido libro Proyecto Sé Matemáticas 8

El contenido del libro está dividido en 8 unidades:

1: Números Reales. Operaciones. **2:** Polinomios. **3:** Factorización y Fracciones Algebraicas
4: Ecuaciones e Inecuaciones. **5:** Funciones Lineales y Cuadráticas **6:** Geometría **7:** Áreas de figuras planas y de Solidos. Volúmenes **8:** Parámetros estadísticos. Probabilidad.

Los contenidos del libro se encuentran organizados de acuerdo a los cinco tipos de pensamientos que plantean los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), es decir la **unidad 1** se enmarca dentro del pensamiento numérico, las **unidades 2, 3, 4 y 5** en el pensamiento variacional, la **unidad 6** en el pensamiento espacial, la **unidad 7** en el pensamiento métrico y la **unidad 8** en el pensamiento aleatorio.

Cada unidad del libro además de plantear los contenidos específicos del área propone actividades especializadas en cuanto a la resolución de problemas, una sección llamada **matemáticas en contexto**, donde se relaciona el tema que se está estudiando con otra áreas

o con procesos contextualizados, tiene también una sección de **Matemáticas**, donde se propone el trabajo de las matemáticas por medio de las nuevas tecnologías, finalmente plantea actividades de **pon a prueba tus competencias y prueba saber**.

La unidad de interés en este libro de texto corresponde a la **unidad 5: Funciones lineales y cuadráticas**, explicitada como perteneciente al pensamiento variacional.

5 Funciones lineales y cuadráticas 178	
Pensamiento variacional	
1. Relación y dependencia entre magnitudes 180	11. Representación de funciones lineales y afines 192
2. Concepto de función 182	12. Aplicaciones de las funciones lineales y afines 194
3. Continuidad de funciones 184	13. Funciones cuadráticas 196
4. Variación de una función en un intervalo 185	14. Construcción de parábolas a partir de $y = x^2$ 198
5. Crecimiento y decrecimiento de funciones 186	15. Representación de funciones cuadráticas 200
6. Máximos y mínimos 187	■ Actividades 202
7. Proporcionalidad directa 188	■ Resolución de problemas Seguir un método 208
8. Función lineal 189	■ Matemáticas en contexto 210
9. Función afín 190	■ Matemáticas Matemáticas con Derive 212
10. Caracterización de funciones afines 191	

Ilustración 16: Unidad 5 Libro Proyecto Sé Matemáticas 8

La unidad se ubica en la página 178 del libro, en ella se desarrolla el concepto de función, se presenta el trabajo con la proporcionalidad, las funciones lineales y afines, para finalmente introducir el trabajo con la función cuadrática.

La unidad inicia con una introducción de lo que se verá en ella, una sección de **educación en valores**, además de ello presenta una actividad de **desarrolla tus competencias**, en donde se plantea una situación contextualizada que servirá como actividad de introducción al tema.

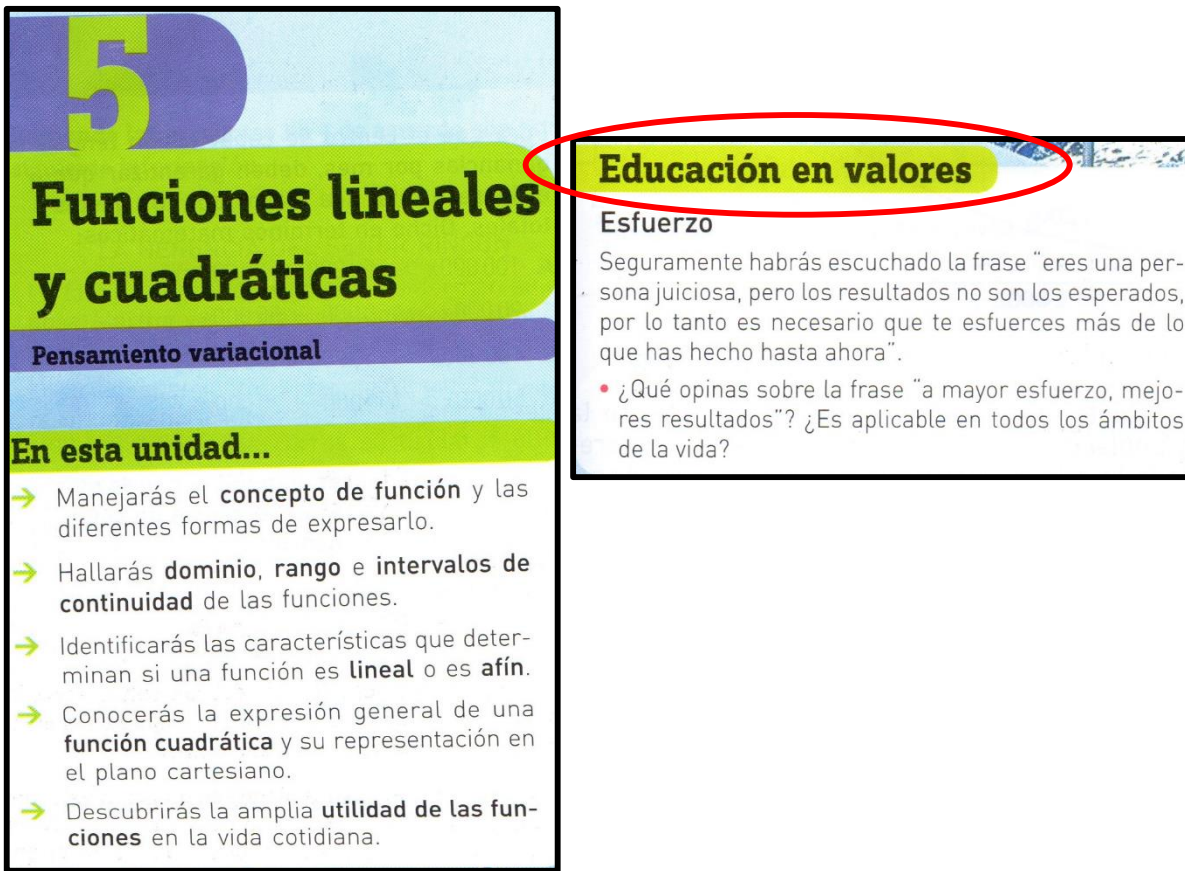


Ilustración 17: Inicio Unidad 5 Libros Proyecto Sé Matemáticas 8

3.7 Aplicación de la rejilla de análisis.

El modelo de análisis empleado en la presente investigación se definió a través de la rejilla caracterizada en el capítulo 3, a continuación se procede a aplicar la rejilla a cada uno de los libros de texto seleccionados, de manera tal que a partir de la información que brinde esta, se logren establecer las diferencias o similitudes entre las dos épocas que se están manejando entorno a la forma como los libros de texto presentan el concepto de función.

La rejilla de análisis a aplicar es la siguiente:

Categorías		Dimensiones	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	1	Estructura del problema	Clásica	Aplicación	Explicación
	2	Descripciones teóricas	Formales	Formales intuitivas	Intuitivas
	3	Símbolos utilizados en las tablas	Sin tablas	Con símbolos matemáticos	Con iconos
	4	Símbolos utilizados en las graficas	Literal	Utilización de números	Elementos explicativos
	5	Tipos de expresiones simbólicas	Familiares	Específicas	Variadas
Semántica	6	Fenomenología	Matemáticas	Realistas	Reales
	7	Tipos de descripciones	De conceptos	De reglas	De relaciones
	8	Tipos de tablas	Sin tablas	Descripción local	Cuadros de variación
	9	Tipos de graficas	Ideogramas	Ábacos	Mensajes topológicos
	10	Significado de las expresiones simbólicas	Objeto	Regla	Proceso
Pragmático Didáctico	11	Función de los ejercicios	Rutinarios	Aplicación	Deducción
	12	Papel de las definiciones	Estructurales teóricas	Aplicación a problemas	Interpretación
	13	Actividades relacionadas con las tablas	Sin tablas	Construcción	Interpretación/ construcción
	14	Actividades de graficas	Visualización	Construcción	Interpretación/ construcción
	15	Papel de las expresiones simbólicas	Ejemplificación	Escolar	Social
Sociocultural	16	Influencia social y adaptación al currículo	No hay	Contexto intemporal	Contexto actual
	17	Influencias didácticas	Clásica	Adaptada al currículo	Novedosa
	18	Aplicación de las tablas	Sin tablas	Elemento auxiliar	Categoría de objetos
	19	Presentación de las gráficas (estática/dinámica)	Descontextualizada	Impresa	Nuevas tecnologías
	20	Complejidad de las expresiones simbólicas	Clásicas	Sencilla	Complejas

Tabla 4: Rejilla de análisis para aplicar tomada de Gonzalez & Sierra (2004,p.394)

3.7.1 Aplicación de la rejilla de análisis para los textos de la Reforma de las Matemáticas Modernas.

Categorías		Dimensiones	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	1	Estructura del problema	✓		
	2	Descripciones teóricas		✓	
	3	Símbolos utilizados en las tablas	✓		
	4	Símbolos utilizados en las graficas	✓		
	5	Tipos de expresiones simbólicas	✓		
Semántica	6	Fenomenología	✓		
	7	Tipos de descripciones	✓		
	8	Tipos de tablas	✓		
	9	Tipos de graficas	✓		
	10	Significado de las expresiones simbólicas	✓		
Pragmático Didáctico	11	Función de los ejercicios		✓	
	12	Papel de las definiciones	✓		
	13	Actividades relacionadas con las tablas	✓		
	14	Actividades de graficas			✓
	15	Papel de las expresiones simbólicas	✓		
Sociocultural	16	Influencia social y adaptación al currículo	✓		
	17	Influencias didácticas		✓	
	18	Aplicación de las tablas	✓		
	19	Presentación de las gráficas (estática/dinámica)	✓		
	20	Complejidad de las expresiones simbólicas	✓		

Tabla 5: Aplicación Rejilla de Análisis Libro Matemática Moderna Estructurada 3 tomada de Gonzalez & Sierra (2004,p.394)

Categorías		Dimensiones	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	1	Estructura del problema	✓		
	2	Descripciones teóricas	✓		
	3	Símbolos utilizados en las tablas		✓	
	4	Símbolos utilizados en las graficas		✓	
	5	Tipos de expresiones simbólicas	✓		
Semántica	6	Fenomenología	✓		
	7	Tipos de descripciones	✓		
	8	Tipos de tablas		✓	
	9	Tipos de graficas			✓
	10	Significado de las expresiones simbólicas	✓		
Pragmático Didáctico	11	Función de los ejercicios	✓		
	12	Papel de las definiciones	✓		
	13	Actividades relacionadas con las tablas		✓	
	14	Actividades de graficas	✓		
	15	Papel de las expresiones simbólicas	✓		
Sociocultural	16	Influencia social y adaptación al currículo			✓
	17	Influencias didácticas		✓	
	18	Aplicación de las tablas		✓	
	19	Presentación de las gráficas (estática/dinámica)		✓	
	20	Complejidad de las expresiones simbólicas	✓		

Tabla 6: Aplicación Rejilla de análisis Libro Matemáticas modernas para escuelas secundarias 2 tomada de Gonzalez & Sierra (2004,p.394)

3.7.2 Aplicación de la rejilla de análisis para los textos actuales.

Categorías		Dimensiones	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	1	Estructura del problema			✓
	2	Descripciones teóricas			✓
	3	Símbolos utilizados en las tablas		✓	
	4	Símbolos utilizados en las graficas		✓	
	5	Tipos de expresiones simbólicas		✓	
Semántica	6	Fenomenología		✓	
	7	Tipos de descripciones			✓
	8	Tipos de tablas		✓	
	9	Tipos de graficas			✓
	10	Significado de las expresiones simbólicas			✓
Pragmático Didáctico	11	Función de los ejercicios			✓
	12	Papel de las definiciones			✓
	13	Actividades relacionadas con las tablas			✓
	14	Actividades de graficas			✓
	15	Papel de las expresiones simbólicas			✓
Sociocultural	16	Influencia social y adaptación al currículo			✓
	17	Influencias didácticas		✓	
	18	Aplicación de las tablas			✓
	19	Presentación de las gráficas (estática/dinámica)			✓
	20	Complejidad de las expresiones simbólicas		✓	

Tabla 7: Aplicación rejilla de análisis libro ZonActiva Matemáticas 8 tomada de Gonzalez & Sierra (2004,p.394)

Categorías		Dimensiones	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintáctica	1	Estructura del problema			✓
	2	Descripciones teóricas	✓		
	3	Símbolos utilizados en las tablas		✓	
	4	Símbolos utilizados en las graficas		✓	
	5	Tipos de expresiones simbólicas		✓	
Semántica	6	Fenomenología			✓
	7	Tipos de descripciones		✓	
	8	Tipos de tablas		✓	
	9	Tipos de graficas			✓
	10	Significado de las expresiones simbólicas			✓
Pragmático Didáctico	11	Función de los ejercicios		✓	
	12	Papel de las definiciones		✓	
	13	Actividades relacionadas con las tablas			✓
	14	Actividades de graficas			✓
	15	Papel de las expresiones simbólicas			✓
Sociocultural	16	Influencia social y adaptación al currículo			✓
	17	Influencias didácticas		✓	
	18	Aplicación de las tablas			✓
	19	Presentación de las gráficas (estática/dinámica)			✓
	20	Complejidad de las expresiones simbólicas		✓	

Tabla 8: Aplicación rejilla de análisis libro Proyecto Sé Matemáticas 8 tomada de Gonzalez & Sierra (2004,p.394)

La información de la aplicación de la rejilla para cada uno de los libros obtenida en el presente capítulo permitirá describir las características fundamentales de estos de manera que se logre una comparación entre las dos épocas estudiadas en torno a las categorías y dimensiones que fundan la rejilla.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

A partir de la aplicación de la rejilla en cada uno de los libros de texto seleccionados, se inicia el análisis de los resultados que a través de esta se obtuvieron, de esta manera se analizará la información recogida para cada libro y finalmente se establecerá una comparación entre las dos épocas trabajadas respecto a la forma como se presenta el concepto de función, para esto se estudiará cada categoría de manera que se logren identificar las características relevantes en cuanto a los registros de representación verbal, tabular, gráfico y simbólico, así mismo como los procesos de traslación en los cuales se fundamenta el análisis, finalmente se establecerá un perfil para el libro de texto de acuerdo a las características mencionadas en el capítulo 3.

5.1 Análisis del libro Matemática Moderna Estructurada 3.

La manera como es abordado el concepto de función en este libro atiende a una estructura clásica, donde todo el trabajo que se realiza parte de un enunciado y es principalmente teórico.

En cuanto a la **fenomenología** se establece como un libro en el que no existen problemas contextualizados, es puramente matemático, no se dan ni ejemplos ni ejercicios que conlleven a situaciones de la vida cotidiana.

La función de los ejercicios que se proponen es de repetición, se establece una teoría acompañada de un ejemplo y un ejercicio en donde el procedimiento a seguir es exactamente igual al ejemplo.

Ejercicios 4.4

1. Sea $A = B = Z$. Determinar cuáles de las siguientes relaciones R definidas por las funciones proposicionales Rxy constituyen aplicaciones (funciones) y cuáles no.
 - a) $Rxy : y = 3x - 1$
 - b) $Rxy : y = x^3$
 - c) $Rxy : y = 1 - x$
 - d) $Rxy : y = \frac{x}{x-1}$
 - e) $Rxy : y = x^2$
 - f) $Rxy : y = \sqrt{25 - x^2}$
 - g) $Rxy : y > x$
 - h) $Rxy : y = 3$
 - i) $Rxy : y = x(x + 1)$
 - j) $Rxy : y$ es múltiplo de x
2. Determinar el dominio, el codominio y el conjunto imagen de las aplicaciones del ejercicio 1.
3. Utilizando la notación $f : x \rightarrow f(x)$ escribir las aplicaciones del ejercicio 1.
4. Si en el ejercicio 1 en lugar de Z se utiliza el conjunto Q , determinar $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(-3)$, $f(\frac{a}{b})$ para los literales a), b), h) e i).
5. Sea A el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ y f una aplicación de A en Q definida por $y = f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{4}x - 2$. Determinar:
 - a) $Im(f)$.
 - b) Representar a f por un diagrama de flechas.
 - c) Representar dicha aplicación en un diagrama cartesiano.

Ilustración 18: Ejercicios Libro Matemática moderna estructurada 3

En cuanto al trabajo con el **registro verbal**, se evidencia que las diferentes descripciones verbales se dan de manera formal y principalmente de conceptos, es decir, los apartados en los que se observa la realización de descripciones estas buscan explicar o definir un concepto. La estructura de las definiciones que presenta el libro responden a un estilo y una adaptación propia, por ejemplo si se compara el concepto de aplicación o función que presenta el libro con cualquiera de las definiciones presentadas formalmente por matemáticos anteriores se observan diferencias, se podría decir entonces que atienden a los planes y orientaciones oficiales en el cual se moviliza el libro.

A continuación se muestra la definición de función que presenta el libro

4.10 CONCEPTO DE APLICACION O FUNCION

Se llama aplicación o función de un conjunto A en un conjunto B a toda relación R de A en B que cumple la condición:

Para cada elemento $x \in A$, existe un elemento $y \in B$ y sólo uno tal que xRy .

Ilustración 19: Concepto de Función Libro Matemática Moderna Estructurada 3

El registro verbal también se logra ver en el siguiente ejemplo donde se observa que la descripción se da con el fin de aclarar el concepto de Dominio e Imagen de una función.

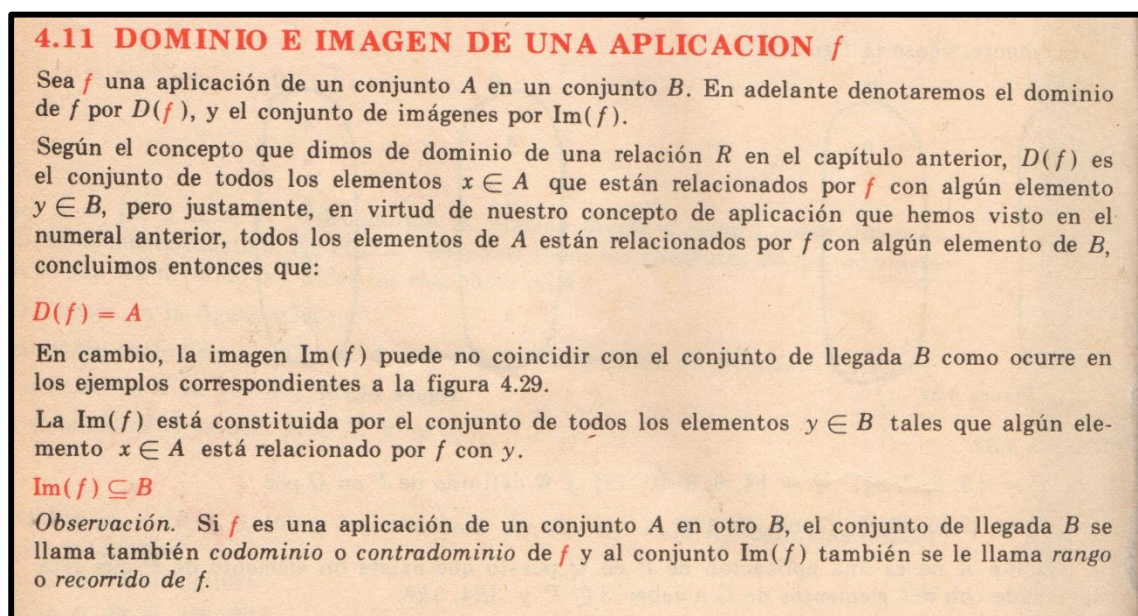


Ilustración 20: Descripción del Dominio e imagen de una función Libro Matemática Moderna Estructurada 3

En todo el apartado para el estudio del concepto de función no se observa la presencia del **registro tabular**

En cuanto al **registro grafico** este se maneja a través de diagramas de Venn en su mayoría, como ideogramas aunque no en su sentido puro, es decir, los diagramas de Venn son empleados para representar conceptos o reglas, específicamente para diferenciar cuando una relación es función, en el dominio de una función y para evidenciar las propiedades de la función, entre otras. Las actividades que se relacionan con las gráficas corresponden básicamente a la visualización de propiedades y conceptos, sin embargo hay que decir que resulta monótono el que se empleen los diagramas de Venn casi en la totalidad de la unidad, ya que se observa los diagramas cartesianos solo en un ejercicio donde se propone identificar cuál de los diagramas corresponde a una aplicación. El **perfil** del libro es de carácter **expositivo**.

Ejemplo 4.31
 Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
 y R definida de A en B por $S = \{(a, 0), (c, 1), (d, 2), (e, 3)\}$
 La relación R no es una aplicación de A en B puesto que $D(R) = \{a, c, d, e\}$ no es igual al conjunto de partida A .
 Gráficamente, véase la figura 4.27.

Ilustración 21: Diagramas de Venn Libro Matemática Moderna Estructurada 3

Ejercicios 4.5
 1. Si $A = \{a, b, c, d\}$, determinar cuáles de los diagramas cartesianos de la figura 4.41 corresponden a: a) Aplicaciones, b) Aplicaciones 1—1, c) Aplicaciones sobre y d) correspondencias 1—1.

Figura 4.41

Ilustración 22: Gráficos cartesianos Libro Matemática Moderna Estructurada 3

En cuanto al **registro simbólico** se trabaja con una simbología que atiende a procesos de la lógica matemática y el trabajo con conjuntos, es decir se logra observar el manejo de cuantificadores, conectores lógicos y símbolos de pertenencia entre conjuntos.

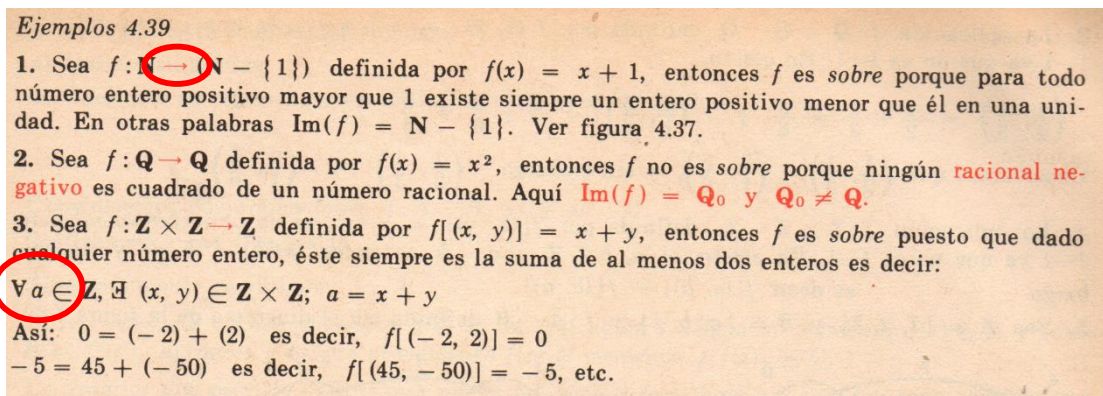


Ilustración 23: Símbolos Libro Matemática Moderna Estructurada 3

5.1.1 Conclusiones del análisis del libro Matemática Moderna Estructurada 3.

De acuerdo con la fundamentación teórica de la rejilla de análisis, los elementos que se estudian en cada libro de texto a través de ella corresponden a los diferentes registros de representación y el perfil, con esta información para el libro Matemática Moderna Estructurada 3 se pueden dar las siguientes conclusiones:

- El concepto de función es presentado como un compendio de enunciados, reglas y propiedades que en ningún momento se conectan con situaciones de la realidad.
- La estructura parte de la definición de función, expone las propiedades y características que se asocian y se da un ejemplo.
- El lenguaje empleado atiende a la estructura formal axiomática a través de simbología lógica.
- Existe una fuerte mezcla entre el lenguaje verbal y el simbólico, es decir, en las descripciones verbales se mezclan los símbolos matemáticos para completar las ideas que se están exponiendo.
- Los ejercicios que se plantean son solamente de ejercitación de procedimientos que han sido conceptualmente definidos y ejemplificados.

- No se proponen procesos de traslación entre los diferentes registros ya que las explicaciones y ejercicios se movilizan únicamente en a través de los diagramas de Venn y cartesiano.

5.2 Análisis del libro matemáticas para escuelas secundarias 2.

Este libro aborda el concepto de función a través de problemas clásicos cuya fenomenología es matemática donde no se observa el trabajo con problemas alusivos a situaciones de la vida real, los diferentes ejercicios que se presentan atienden a la aplicación de conceptos y no presentan ningún tipo de gráfico, este libro al finalizar el apartado relaciones y funciones clasifica los ejercicios en dos tipologías **ejercicios orales** y **ejercicios escritos** en el primero se presentan preguntas abiertas que atienden a los conceptos trabajados, el segundo tipo son ejercicios en donde se ejercitan los diferentes procesos trabajados.

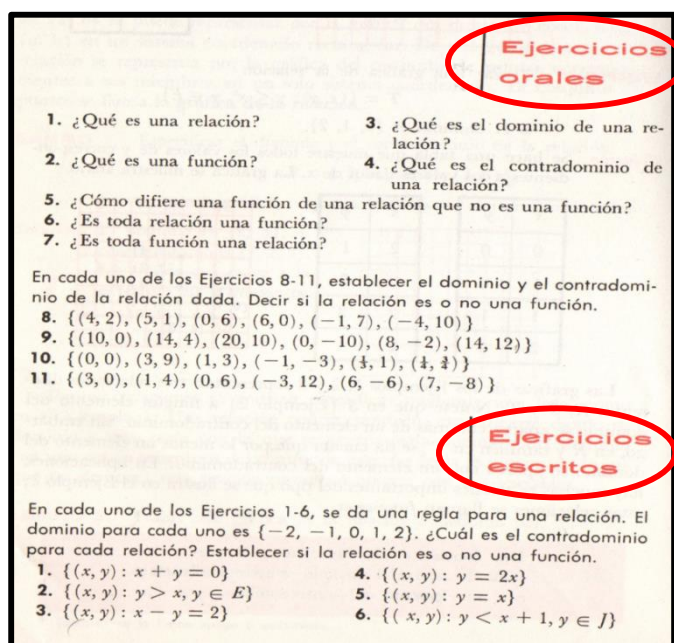


Ilustración 24: Ejercicios libro Matemáticas modernas para escuelas secundarias 2

En cuanto al **registro verbal** este se da para la descripción de conceptos y las propiedades asociadas al concepto de función, las definiciones importantes son resaltadas en un recuadro rojo y su papel es el de describir teorías fundamentadas a priori, es decir, primero se establecen ciertas características que crean el camino para llegar a la definición, para definir que es una función, previamente se ha establecido lo que es una relación y el estudio de estas.

Una **función** es una relación en la que cada elemento del dominio se aparea solamente con un elemento del contradominio.

Ilustración 25: Definición de función libro Matemáticas modernas para escuelas secundarias 2

El **registro tabular** si se presenta en este libro de texto, y la simbología matemática que se emplea corresponde a la notación de variables y números, ya que estas se emplean para mostrar las relaciones y la variación entre dos conjuntos. Las tablas son principalmente construidas partiendo de una expresión simbólica y son básicamente para visualizar la relación entre los valores de dos variables.

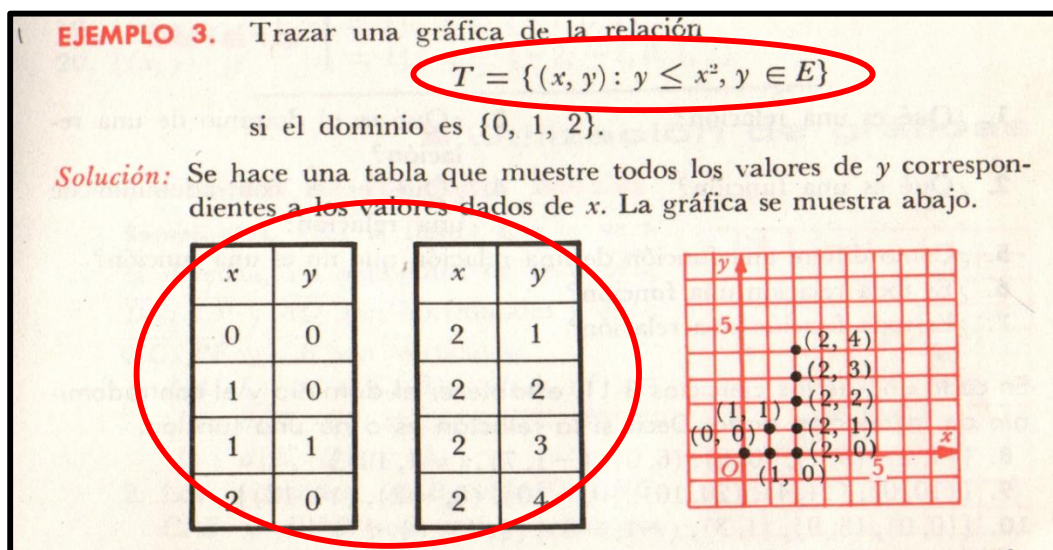


Ilustración 26: Registro Tabular Libro Matemáticas modernas para escuelas secundarias 2

Para el **registro gráfico** se evidencia la presencia de gráficas cartesianas cuya finalidad es la de visualizar la variación y el comportamiento de ciertas relaciones, sin embargo en el trabajo estricto del concepto de función no se evidencia este registro es decir, se grafican relaciones pero no se observan graficas de funciones, solo se incluyen en la explicación de la prueba de la línea vertical¹⁸.

¹⁸ Criterio utilizado para verificar si una gráfica corresponde a la representación de una función o no.

EJEMPLO 3. Trazar una gráfica de la relación

$$T = \{(x, y) : y \leq x^2, y \in E\}$$

si el dominio es $\{0, 1, 2\}$.

Solución: Se hace una tabla que muestre todos los valores de y correspondientes a los valores dados de x . La gráfica se muestra abajo.

x	y
0	0
1	0
1	1
2	0
2	4

x	y
2	1
2	2
2	3
2	4

Ilustración 27: Registro gráfico Libro Matemáticas modernas para escuelas secundarias 2

Esto ilustra que S es una función y R y T no son funciones.

Ilustración 28: Regla de la línea vertical para funciones Libro Matemáticas moderna para escuelas secundarias 2

En cuanto al **registro simbólico**, las expresiones de este tipo se muestran como objetos manipulables, es decir, que al aparecer una expresión simbólica se puede llevar a cabo diferentes procedimientos con ella, el lenguaje en el que se trabajan atiende a una notación de teoría de conjuntos.

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\{(x, y) : x + y = 0\}$ | 4. $\{(x, y) : y = 2x\}$ |
| 2. $\{(x, y) : y > x, y \in E\}$ | 5. $\{(x, y) : y = x\}$ |
| 3. $\{(x, y) : x - y = 2\}$ | 6. $\{(x, y) : y < x + 1, y \in J\}$ |

Trazar una gráfica de la relación

$$T = \{(x, y) : y \leq x^2, y \in E\}$$

si el dominio es $\{0, 1, 2\}$.

Ilustración 29: Registro simbólico Libro Matemáticas modernas para escuelas secundarias 2

El **perfil** del libro es **positivo** sin embargo, el manejo que se da del registro tabular introduce al perfil del libro una pequeña parte de tecnológico

5.2.1 Conclusiones del análisis del libro Matemáticas Modernas para escuelas secundarias 2.

De acuerdo con el perfil del libro y la información brindada por la rejilla, se dan las siguientes conclusiones del libro Matemáticas modernas para escuelas secundarias 2

- El concepto de función es presentado como un compendio de enunciados, reglas y propiedades que en ningún momento se conectan con situaciones de la realidad.
- La estructura parte del concepto de función, expone las propiedades y características que se asocian pero para el concepto de función no se presenta ningún ejemplo.
- El lenguaje empleado atiende a la estructura formal axiomática a través de simbología lógica.
- Los ejercicios que se plantean son solamente de ejercitación y preguntas que atienden a la memoria más que al razonamiento.
- Es muy reducido el desarrollo que se le da al concepto de función, se limita a establecer una definición y se caracteriza la prueba de la línea vertical

5.3 Análisis del libro ZonActiva Matemáticas 8

La estructura de los problemas que presenta este libro para el tratamiento del concepto de función son de explicación, los problemas incluyen un título de encabezado que justifica el

sentido que tiene este en relación con el concepto, fundamentados desde los Estándares Básico de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) esta justificación atiende al tipo de procesos que se va a potencializar, además de ello, se resalta dentro del enunciado del problema, la competencia o habilidad que el estudiante requiere.

Resolución de problemas

3. De acuerdo con la figura 6.3:

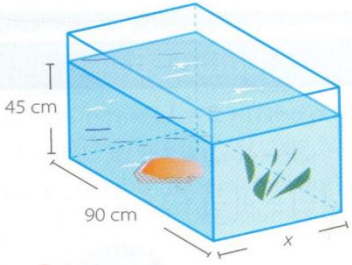


Figura 6.3

a. **Escribe** una expresión para el volumen del acuario.

b. **Determina** el volumen del acuario para las siguientes medidas de x .

x	$V(x)$
15 cm	
25 cm	
30 cm	
40 cm	

Tabla 6.3

Razonamiento lógico

Para los problemas 6 y 7, **elige** la opción correcta y **justifica** tu elección.

6. Dados los conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, se define $f(x) = x - 1$ de A en B . Se puede afirmar que:

- $f(x)$ no es función, porque hay un valor de A que no tiene imagen.
- $f(x)$ es función, porque a todo número siempre es posible sustraerle 1.
- $f(x)$ no es función, porque hay valores en B que no son imágenes de algún valor de A .
- $f(x)$ sí es función, porque a cada elemento de A le corresponde un único elemento en B .

Ilustración 30: Ejercicios Libro ZonActiva Matemáticas 8

En cuanto a la fenomenología, esta es realista, es decir, los problemas se relacionan con situaciones contextualizadas, existe un apartado llamado **conexiones**, donde se busca relacionar el concepto de función con casos realistas, se logra visualizar también que los contextos van acorde a la época en que se escribió el libro y el lugar donde se ubica.

La función de los ejercicios se orienta hacia la construcción del concepto y sus diferentes propiedades, si bien la estructura del tratamiento del concepto de función presenta primero la definición, los ejemplos y luego los ejercicios.

Conexiones

Dato curioso

El número de habitantes de una región o un lugar se determina mediante la realización de un censo demográfico. En Colombia se han realizado varios censos y los resultados que se representan en la tabla 6.9.

Año	Numero de habitantes
1905	4 533 777
1912	5 472 604
1918	5 855 077
1928	7 851 110
1951	11 548 172
1964	17 484 508
1973	20 785 235
1985	27 837 932
1993	33 109 840
2005	44 888 592

Tabla 6.9

2. De acuerdo con los datos de la tabla 6.9:

- Ubica** los resultados de los diferentes censos en un plano cartesiano.
- Explica** a partir de la gráfica por qué el conjunto de puntos representa una función.
- ¿Ha disminuido la población a lo largo de los años?
- ¿En cuánto se incrementó la población en el último siglo?
- Aproximadamente, ¿cuántos habitantes tenía Colombia en el 2000?

Ilustración 31: Tablas contextualizadas Libro ZonActiva Matemáticas 8

En cuanto al **registro verbal**, se observa que las descripciones que se hacen son explicativas. El papel de las definiciones se establece como la construcción a posteriori del estudio de un fenómeno, el texto inicia el desarrollo del concepto de función a partir de un problema y luego se presenta la definición que se deriva de este, estas definiciones y en general el libro se rige de las orientaciones oficiales que para el periodo en el que se ubica corresponde a los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006).

El problema inicial que se plantea para establecer el concepto de función es el siguiente:

Concepto de función

Logro

- Comprender el concepto de función y emplearlo en la solución de situaciones cotidianas.

Isabel debe construir una caja sin tapa partiendo de una lámina rectangular de cartón de 24 cm de ancho por 32 cm de largo. Ella piensa cortar en las esquinas cuadrados idénticos de cualquier longitud y doblar hacia arriba lo que queda para formar la caja. ¿Cómo puede expresar Isabel el **volumen** de la caja para cualquier tamaño del cuadrado que corte en las esquinas?

En esta situación, Isabel debe plantear una expresión matemática que le permita encontrar el valor del volumen de la caja que se obtiene cuando ella corta en cada una de las esquinas de la lámina de cartón un cuadrado cuyo lado sea de cualquier longitud.

El valor del volumen depende de la longitud del cuadrado que corte Isabel. Si llamamos x a la longitud del cuadrado de las esquinas y V al volumen, tenemos que:

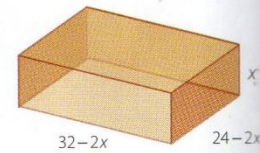
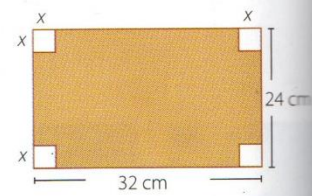


Figura 6.1

$$V = \text{largo} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$

$$V(x) = (32 - 2x)(24 - 2x)x$$

$$V(x) = 4x^3 - 112x^2 + 768x$$

Calculemos el volumen para diferentes valores de x :

x	$V(x)$
1 cm	$4(1)^3 - 112(1)^2 + 768(1) = 4 - 112 + 768 = 660 \text{ cm}^3$
2 cm	$4(2)^3 - 112(2)^2 + 768(2) = 32 - 448 + 1536 = 1120 \text{ cm}^3$
5 cm	$4(5)^3 - 112(5)^2 + 768(5) = 500 - 2800 + 3840 = 1540 \text{ cm}^3$

Tabla 6.1

En la expresión escrita, cada valor que tome x , entre 0 y 24, produce solamente un valor para V . Este tipo de expresiones reciben el nombre de **funciones**.



Aprende más

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el valor que se obtiene cuando las variables son reemplazadas por algún número real específico. Para encontrar el valor de y , calcula el valor numérico de la expresión para un valor dado de x .

Ilustración 32: Actividad previa al concepto de función Libro ZonActiva Matemáticas 8

Luego se establece la siguiente definición de **Función**:

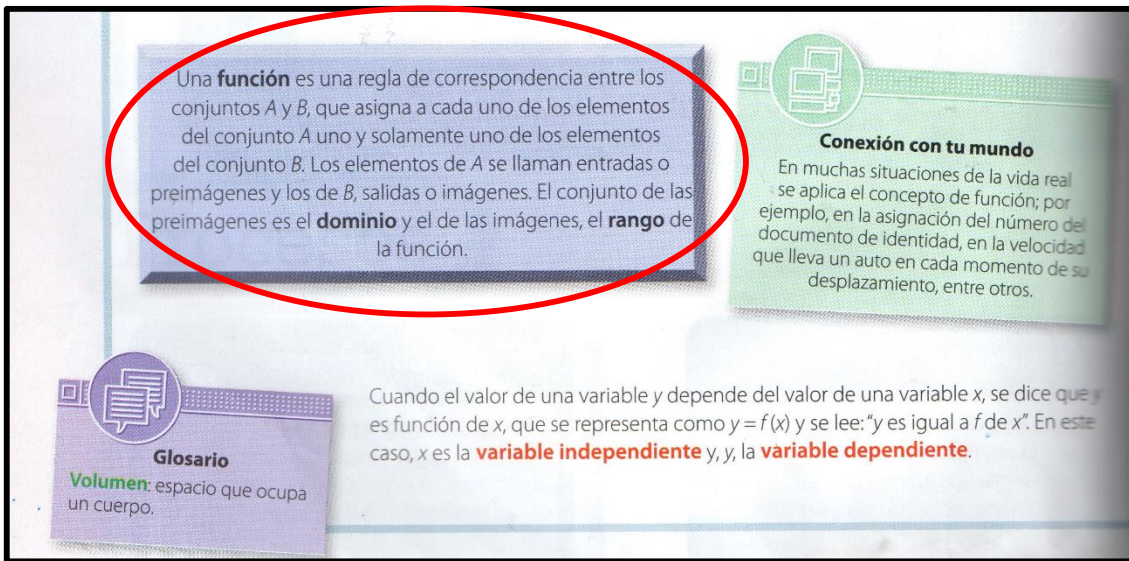


Ilustración 33: Concepto de función Libro ZonActiva Matemáticas 8

El **registro tabular** se presenta con la inclusión de símbolos numéricos y corresponden a cuadros de variación en donde se visualiza el cambio de una variable en relación a otra, sin embargo, hay que decir que las tablas no son sólo en lenguaje matemático, sino que también son empleadas para representar situaciones contextualizadas.

Las actividades que se proponen en este registro impulsan la traslación entre los diferentes registros involucrados en el estudio de las funciones como lo es pasar del registro verbal al tabular y del registro gráfico al tabular, además de ello las tablas en esta unidad son empleadas tanto para dar información a través de los ejemplos como para ser completada a través de los ejercicios.

Una tabla empleada en una situación realista es la siguiente:

7. De acuerdo con la tabla 6.6 se puede **afirmar** que

Artículo	Valor
Hamburguesa	\$ 6500
Pizza	\$ 2800
Papas a la francesa	\$ 3900
Perro caliente	\$ 3900
Gaseosa	\$ 1800

Ilustración 34: Registro tabular Libro ZonActiva Matemáticas 8

En la siguiente imagen se observa un ejemplo en el que se evidencia la traslación entre el registro grafico al tabular.

Ejemplo

La gráfica de la figura 6.13 corresponde a una función lineal. Hallemos la **expresión lineal** que la representa.

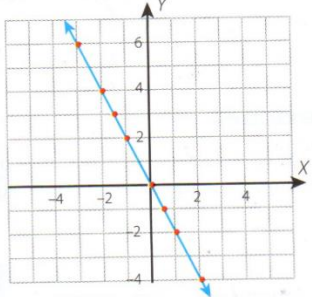


Figura 6.13

Glosario

Expresión lineal: expresión algebraica cuya variable tiene exponente 1.

Solución

Elaboramos una tabla con algunos de los puntos de la función.

x	y
-3	6
-2	4
-1,5	3
-1	2
0	0
0,5	-1
1	-2
2	-4

Tabla 6.12

Analizando la tabla 6.12 observamos que para obtener cada valor de y multiplicamos por -2 el correspondiente valor de x, es decir, la expresión que representa a la función es $y = -2x$, donde $m = -2$.

Ilustración 35: Traslación entre registros Libro ZonActiva Matemáticas 8

El **perfil** del libro es de carácter **comprensivo**, aunque se observa la influencia de ciertos elementos de carácter tecnológico.

5.3.1 Conclusiones del análisis del libro ZonActiva Matemáticas 8.

Las conclusiones para este libro de acuerdo con su perfil y la información brindada por la rejilla de análisis son las siguientes:

- Las matemáticas son vistas como un instrumento para interpretar la realidad, en el estudio del concepto de función se vinculan actividades, ejercicios y ejemplos relacionados con situaciones reales, es decir, que el concepto matemático no se queda en su presentación formal sino que se concreta a través de la contextualización.
- Se plantean objetivos para el estudio de cada subtema asociado al concepto de función a través de los logros y estos van encaminados hacia la experimentación.
- El tipo de enseñanza que se promueve está dada por descubrimiento, es decir, se plantean situaciones concretas que conducen a la conceptualización de esta.
- El aprendizaje de las matemáticas se adquiere mediante el establecimiento de relaciones con otros contenidos que pueden ser matemáticos o no.
- El texto en el desarrollo del concepto maneja los diferentes registros de representación que se consideran fundamentales en el estudio de la función (tabular, grafico, simbólico y verbal).
- Es muy fuerte la relación que existe entre situaciones concretas de la vida real o de otras ciencias a través del espacio **conexiones**.
- Es explícito la concordancia y el manejo de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006).

5.4 Análisis del libro Proyecto Sé Matemáticas 8.

En la estructura de los problemas se observa que se incluye una justificación del sentido de los problemas y los ejercicios en relación con el concepto de función a través de los encabezados: **aclara conceptos, refuerza, resuelve problemas, entrena e interpreta y resuelve**, además de ello se presenta un subtema que se relaciona con los procesos básicos establecidos por los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006).

La **fenomenología** de los problemas se establece a través de problemas reales que van acorde al contexto tanto temporal como espacial en que se ubica en el libro.

ACTIVIDADES

Concepto de dependencia, función y continuidad

Entrena

COMUNICACIÓN

48. ¿Qué magnitudes están relacionadas en cada una de estas fórmulas?

- a) $L = 2\pi \cdot r$
- b) $A = \pi \cdot r^2$
- c) $A = l^2$
- d) $A = \frac{b \cdot h}{2}$

COMUNICACIÓN

47. La figura 5.59 muestra el perfil de una etapa de una vuelta ciclista.

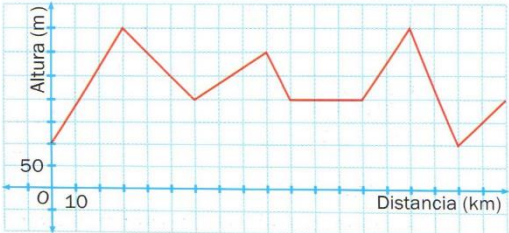


Figura 5.59

¿Entre qué kilómetros la altura permanece constante?

RAZONAMIENTO

52. Expresa mediante fórmulas las siguientes relaciones.

- a) La sangre representa un treceavo del peso total del cuerpo humano.
- b) El índice de masa corporal de una persona es el cociente entre el peso en kilogramos y la estatura al cuadrado en metros.

Refuerza

COMUNICACIÓN

53. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa una función?

a)

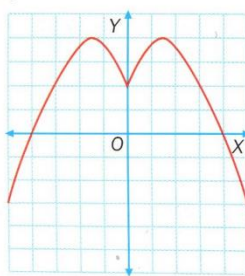


Figura 5.61

b)

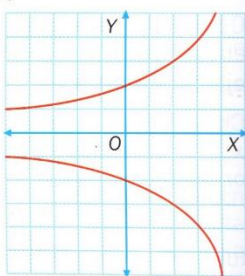


Figura 5.62

Resuelve problemas

Ilustración 36: Ejercicios Libro Proyecto Sé Matemáticas 8

Constante?

RAZONAMIENTO
50. Estudia la continuidad de la función representada en la figura 5.60.

Figura 5.60

Aclara conceptos

RAZONAMIENTO
51. ¿Cuáles de estas relaciones corresponden a funciones?

- A cada número se le hace corresponder sus divisores.
- A cada persona, el día de su nacimiento.
- A cada persona, el nombre de sus hijos.
- A cada hijo, el nombre de su padre.
- A cada número, su raíz cúbica.

Resuelve problemas

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
54. La fila del supermercado.

- Los gerentes de un reconocido supermercado han realizado un estudio sobre el tiempo que tienen que esperar los clientes en la fila de caja.

Llegaron a las siguientes conclusiones:

- El tiempo en marcar todos los productos de un cliente es proporcional al número de productos que lleva en el carro.
- El tiempo que tarda la cajera en marcar un producto es de cuatro segundos.
- Entre cada dos clientes se precisa de 2 minutos para imprimir y entregar la factura, cobrar el dinero y devolver el cambio.

- Calcula el tiempo que tiene que esperar un cliente si delante tiene tres personas con 20, 15 y 25 productos, respectivamente.
- Escribe una expresión matemática que sirva para calcular el tiempo que tiene que esperar un cliente si delante tiene una única persona con x productos en su carro. Dibuja la gráfica de la función correspondiente.

Ilustración 37: Ejercicios Libro Proyecto Sé Matemáticas 8

En cuanto al **registro verbal**, se observa que las descripciones verbales son escasas y se limitan a las definiciones cuyo papel es el de desarrollar reglas que serán aplicadas a problemas o ejercicios.

2 **Concepto de función**

Una relación entre dos conjuntos X y Y es una **función**, si cada elemento x del primer conjunto, se asocia como máximo con un elemento y del segundo conjunto.

Sabías que...

Ilustración 38: Concepto de función Libro Proyecto Sé Matemáticas 8

En el **registro tabular**, el tipo de tablas que se emplean corresponden a cuadros variacionales en los que se enfatizan las relaciones entre las variables involucradas, los símbolos empleados en estas son exclusivamente matemáticos.

Las actividades que se relacionan con las tablas involucran diferentes representaciones y permiten la traslación entre los registros, además de que no son empleadas solo en situaciones matemáticas sino también para representar situaciones reales.

Los valores del banderazo o arranque, servicio por horas, carrera mínima y los recargos por servicios especiales, están dispuestos en la tabla 5.28.

ITEM	NÚMERO DE UNIDADES	VALOR A PAGAR (\$)
Arranque o banderazo	25	1 600
Carrera mínima	50	3 300
Valor unidad cada 100 metros	1	65
Valor por cada 30 segundos de espera	1	65
Recargo al y del aeropuerto	50	3 300
Recargo nocturno y dominical	24	1 600
Recargo desde el terminal de transporte	7	500

Tabla 5.28

RAZONAMIENTO

25. Selecciona la tabla de valores correspondiente a la función $f(x) = \frac{4}{3}x$.

a)

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{4}$	0

Tabla 5.7

b)

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$-\frac{12}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0

Tabla 5.8

c)

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$-\frac{12}{3}$	$-\frac{6}{3}$	$\frac{4}{3}$	0

Tabla 5.9

d)

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$-\frac{13}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$

Tabla 5.10

Ilustración 39: Registro tabular Libro Proyecto Sé Matemáticas 8

El **registro gráfico** se maneja a través de la representación en el plano cartesiano, las actividades que se asocian con este registro se orientan hacia la visualización de propiedades, para la caracterización del concepto de función, el libro hace explícito la existencia de las diferentes formas de representarla, de forma tal que las gráficas cartesianas se convierten en otra forma de ver aquello que inicialmente se presenta.

Con este registro se potencializa mucho la traslación entre el registro tabular al gráfico pero no en un sentido contrario. La presentación de las gráficas intenta ser dinámica con la propuesta de **matemáticas** y la graficación de funciones a través del programa **Derive**.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x^2 - 5$	11	4	-1	-4	-5	-4	-1	4	11
	$(-4, 11)$	$(-3, 4)$	$(-2, -1)$	$(-1, -4)$	$(0, -5)$	$(1, -4)$	$(2, -1)$	$(3, 4)$	$(4, 11)$

Tabla 5.4

Al ubicar en el plano cartesiano los puntos correspondientes a los datos de la tabla 5.4, se obtiene suficiente información para trazar la gráfica de la función (figura 5.4).

En este caso, la gráfica resulta infinita y continua ya que f es un función de variable real, es decir está definida para cualquier número real.

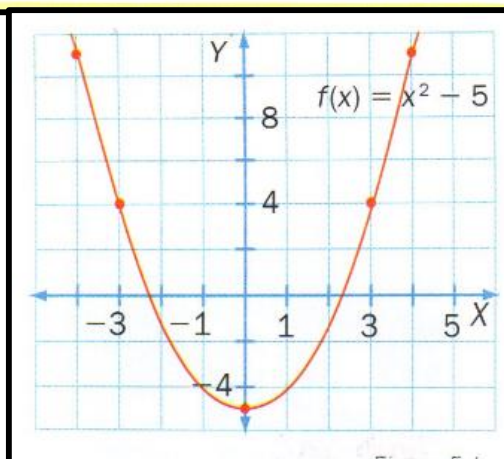


Ilustración 40 : Traslación entre registros Libro Proyecto Sé Matemáticas 8

Familias de funciones lineales

Con *Derive* se pueden observar gráficas de varias funciones a la vez, por ejemplo la familia de funciones cuyas ecuaciones tienen la forma $y = mx$. Para esto introduce en la barra de entrada una a una las siguientes funciones:

$$y = 2x; y = x; y = \frac{1}{2}x; y = -\frac{1}{2}x;$$

$$y = -x; y = -2x; y = -3x; y = -4x.$$

Pulsando *enter* luego de escribir cada una. Grafícalas usando los íconos de *ventana 2D* y *representar expresión*. La gráfica que se traza corresponde a la ecuación iluminada, por ello es necesario que te asegures de seleccionar en orden cada ecuación en la ventana álgebra 1.

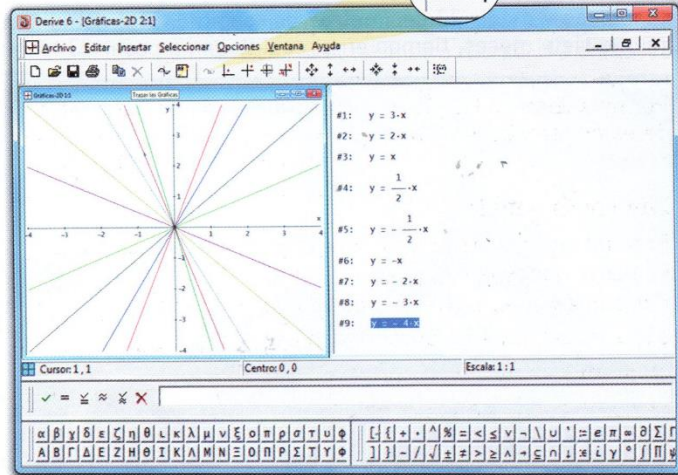


Figura 5.81

Con el ícono "trazar gráfica" aparece un indicador cuadrado sobre las gráficas, que puede ser movido usando las flechas del teclado. En el costado izquierdo se leen las coordenadas de la ubicación.

Familia de funciones afines

De la misma forma que las anteriores con *Derive* se puede graficar familias de funciones afines o de la forma $y = mx + b$, los pasos son similares: escribe introduciendo en la *barra de entrada* las funciones:

$$y = 2x - 2; y = 2x - 1; y = 2x + 0;$$

$$y = 2x + 1; y = 2x - 2; y = 2x + 2.$$

Recuerda teclear *enter* después de cada una. Al igual que en el caso anterior debes seleccionarlas una a una e ir utilizando los íconos *ventana 2D* y *representar ecuación*. (figura 5.82)

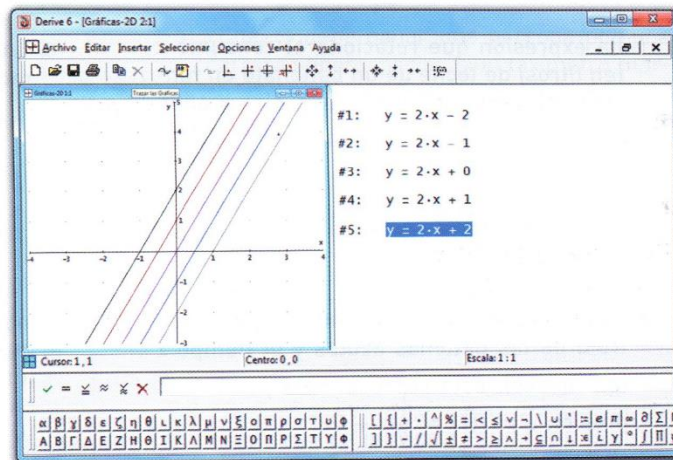


Figura 5.82

ACTIVIDADES

1. ¿Qué diferencia se produce al construir la tabla con el ícono aproximar a construirla con el ícono simplificar?
2. ¿Qué característica tienen las gráficas de las ecuaciones con b negativo? ¿Qué característica tienen las gráficas de las ecuaciones con b positivo?
3. ¿Qué característica tienen las gráficas en cuya ecuación el valor de m es negativo?
4. ¿Qué característica tienen las gráficas en cuya ecuación el valor de m es positivo?
5. Analiza qué sucede con la gráfica de acuerdo con el valor de m .
6. Relaciona el valor de b en cada ecuación con su posición.
7. Obtén otras familias de funciones cambiando el valor de m o el de b según el caso.

Ilustración 41: Tic en el registro grafico Libro Proyecto Sé Matemáticas 8

Para el **registro simbólico** se logra establecer su existencia a través de lo que el libro denomina formulas, estas expresiones son escogidas porque su estructura es adecuada como aplicación de las reglas establecidas previamente, es decir, estas expresiones son empleadas para la manipulación de situaciones que han sido previamente presentadas a través de una expresión verbal y para su utilización son transformadas a un registro simbólico, además son también empleadas en la designación de propiedades o reglas que han sido conceptualizadas anteriormente y se resumen por medio de estas. El **perfil** del libro se enmarca dentro del carácter tanto **tecnológico** como **comprensivo**.

■ Relaciones expresadas por fórmulas

Es muy frecuente presentar la relación de dependencia entre dos magnitudes mediante una **fórmula** o **expresión algebraica**. La fórmula permite calcular el valor de la variable dependiente según los valores que tome la variable independiente.

Ejemplo 3 El perímetro de un cuadrado en función del lado l , viene dada por la expresión:

$$P = 4l$$

El perímetro depende de la medida del lado, por lo tanto, existe una dependencia entre la magnitud *lado del cuadrado* l y la magnitud *perímetro del cuadrado* P .

■ Dominio y rango de una función

El **dominio de una función** f de X en Y , es el conjunto de partida X . Se denota como $D_f = X$ o $D(f) = X$.

El **rango** o **recorrido de una función** f es el conjunto formado por las imágenes de los elementos del dominio y puede ser igual al conjunto de llegada Y , o estar contenido en él.

Se escribe $R_f \subseteq Y$. Se denota como $R(f) \subseteq Y$.

Ilustración 42: Registro simbólico Libro Proyecto Sé Matemáticas 8

5.4.1 Conclusiones del análisis del libro Proyecto Sé Matemáticas 8.

- Se conciben las matemáticas como una organización lógica de enunciados, reglas y procedimientos que se emplean como técnicas o destrezas para pensar sobre los conceptos y aplicarlos a diversas situaciones.
- El aprendizaje se intenta dar mediante el establecimiento de una red de relaciones con otros contenidos que pueden ser matemáticos o no, al finalizar la unidad a través del espacio **matemáticas en contexto**, se presentan diferentes situaciones con las que se puede relacionar el concepto matemático estudiado.
- La construcción del concepto se da en la aplicación de ejercicios y problemas, pero primero se imparte el concepto o la regla y luego se aplica, no es construido por medio de una situación.
- Se evidencia el trabajo con los diferentes registros de representación y se promueven algunos procesos de traslación aunque no en todos los casos.
- Se logra observar la concordancia con los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) en matemáticas a través del desarrollo de los procesos básicos y los pensamientos.

5.5 Comparación de los libros de texto de la Reforma de las Matemáticas Modernas y los libros de texto actuales.

Luego de haber establecido un análisis de dos libros de la Reforma de las Matemáticas Modernas y dos libros actuales en cuanto a la forma como se presenta el concepto de función, se realiza una comparación entre los dos grupos de textos a partir de las conclusiones obtenidas a partir de dicho análisis y finalmente poder establecer los elementos diferentes y/o semejantes que existen entre ambos grupos y ambas épocas.

Libros de texto de la Reforma de las Matemáticas modernas.	Libros de texto actuales
<ul style="list-style-type: none"> • No se involucran situaciones contextualizadas • El concepto de función no se relaciona con aspectos cotidianos o de otras ciencias. 	<ul style="list-style-type: none"> • Se trabaja con situaciones contextualizadas. • El aprendizaje se da a través de las relaciones entre el concepto y situaciones de la realidad.
<ul style="list-style-type: none"> • El registro tabular y el gráfico es escaso, se manejan como ideogramas pero no se plantean en la implementación de las actividades o ejercicios • El registro gráfico se limita al aspecto conjuntista (Diagramas de Venn). 	<ul style="list-style-type: none"> • Para el desarrollo del concepto de función se manejan los diferentes registros de representación.
<ul style="list-style-type: none"> • El aprendizaje que se promueve es memorístico. 	<ul style="list-style-type: none"> • El desarrollo y el estudio del concepto de función es más detallado
<ul style="list-style-type: none"> • No se desarrollan los procesos de traslación entre registros. 	<p>Se potencializan algunos procesos de traslación entre registros.</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Las actividades propuestas conducen a la repetición y la ejercitación solamente. 	<ul style="list-style-type: none"> • Las actividades propuestas manejan diferentes procesos del aprendizaje como la ejercitación, el razonamiento, la resolución de problemas.
<ul style="list-style-type: none"> • El lenguaje empleado corresponde a una estructura formal axiomática a través de la simbología lógica. 	<ul style="list-style-type: none"> • Se presentan gran número de actividades pero con enfoques diferentes.
<ul style="list-style-type: none"> • El desarrollo y estudio del concepto de función es muy general. 	<ul style="list-style-type: none"> • En el estudio del concepto se incluyen procesos que enriquecen el aprendizaje como las evaluaciones por competencias y las pruebas saber
<ul style="list-style-type: none"> • La estructura del desarrollo del concepto es predecible, en el sentido en que se sigue la secuencia de impartir el concepto, dar ejemplos y ejercicios, no se incluyen actividades diferentes. 	<ul style="list-style-type: none"> • El inicio del estudio del concepto está dado por una actividad de introducción que sirve de motivación a la curiosidad del estudiante.

<ul style="list-style-type: none"> • El énfasis del libro se pone en las definiciones y reglas, de forma que el concepto de función esta dado. 	<ul style="list-style-type: none"> • El énfasis del libro está puesto en la conexión entre la definición y una situación real, de forma que el concepto de función se adquiere partiendo de situaciones propias para luego construir el concepto.
---	--

Tabla 9: comparación de los libros analizados

El análisis detallado de cada texto ha generado unas características propias a las condiciones en las que este se desarrolla, de este modo, se han logrado establecer los libros de la Reforma de las Matemáticas Modernas como textos de un perfil expositivo, por el contrario los textos actuales se clasifican como textos comprensivos, en este sentido la comparación entre ambos grupos de texto en cuanto a la forma como es presentado el concepto de función muestra grandes diferencias como se logra observar en la tabla 9.

De esta manera es correcto afirmar que ha existido una evolución de los libros de texto desde una mirada epistemológica entre el año 1960 - 1980 y la actualidad desde el 2006.

6. CONCLUSIONES GENERALES

A partir de todos los elementos estudiados en la presente investigación se puede concluir:

- En esta investigación se ha considerado una problemática orientada a la comprensión del concepto de función con la influencia del libro de texto, la época y las exigencias curriculares que este conlleva, a raíz de todo lo trabajado se logra concluir que los elementos que brinda un libro de texto para el desarrollo del concepto de función facilitan o dificultan la comprensión de este, en el sentido que la forma como es presentado es fundamental en su construcción y apropiación, en los capítulos 2 y 3 se presenta una caracterización del concepto en cuanto a los elementos epistemológicos asociados con la evolución de un carácter estático a uno variacional y la importancia de los registros de representación en los procesos de enseñanza y aprendizaje, ejes importantes que deben ser considerados en los libros de texto los cuales se convierten en obstáculos en los libros de textos de la Reforma de las Matemáticas Modernas y elementos importantes para desarrollar en los libros actuales, de allí el inicio de las marcadas diferencias entre ambos grupos.
- El aporte en la búsqueda de soluciones a la problemática mencionada anteriormente se centra en:
 - ✓ La implementación de una rejilla de análisis presentada en el capítulo 4 que permitió caracterizar cada libro de texto seleccionada de manera que se estableciera la forma como se desarrolla el concepto de función desde la Reforma de las Matemáticas Modernas y desde los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) para los textos actuales.
 - ✓ La evidencia en la existencia de diferencias entre los grupos de texto desarrollado en el capítulo 5, que permite dar cuenta del manejo dado a los obstáculos y dificultades en la comprensión del concepto de función y como se llevan a cabo los procesos para superar estas dificultades en Colombia; lo que permite concluir que el desarrollo de una renovación curricular después de la Reforma de las matemáticas Modernas en Colombia logro encaminar la

Educación Matemática hacia una mirada diferente de en la forma como se presentan los conceptos en los libros de texto..

- Es clara la existencia de grandes diferencias desde la forma como se presenta el concepto de función entre los libros de texto de la Reforma de las Matemáticas Modernas y los libros de texto actuales de acuerdo a lo trabajado en los capítulos 4 y 5, la influencia de las respectivas reformas curriculares que rigen cada grupo de libros establecen divergencias en cuanto a la forma de presentar el concepto de función respondiendo a las exigencias y requerimientos que estas manejan, de allí el que se logren encontrar las siguientes diferencias:.
 - ✓ Existe una marcada diferencia a nivel de las actividades que se proponen entre el grupo de libros pertenecientes a la Reforma de las Matemáticas Modernas y el grupo de libros pertenecientes a la actualidad, en el sentido que en el primer grupo el interés está puesto en la ejercitación repetitiva y memorística del concepto y las propiedades, por el contrario los textos actuales presentan variedad en las actividades, desarrollando procesos de resolución de problemas y no solo la ejercitación, logrando así establecer conexiones entre el concepto de función y situaciones contextualizadas a través de problemas que describen situaciones reales o problemas que conducen a la visualización del concepto de función desde el punto de vista de otras ciencias.
 - ✓ Teniendo en cuenta la reforma curricular bajo la cual se enmarca cada libro se observa una diferenciación en cuanto a la estructura matemática conforme a la que se desarrolla el concepto, los textos de la Reforma de las Matemáticas Modernas presentan una estructura característica desde la lógica y la teoría de conjuntos, su lenguaje es riguroso y fuerte en el desarrollo de procesos deductivos, los textos actuales poseen un lenguaje más flexible, se formaliza el concepto y las diferentes propiedades pero se intentan explicar este de formas no solo matemáticas.
 - ✓ El conocimiento matemático desde los textos de la Reforma de las Matemáticas Modernas se considera como una acumulación de enunciados, reglas y

procedimientos en donde el punto de partida es la definición del concepto de función y el establecer las diferentes propiedades que lo acompañan en donde importa más la estructura matemática, en los textos actuales el interés no se centra en la conceptualización formal sino en lograr construir el concepto a través de la experimentación, se considera que los conceptos se adquieren partiendo de situaciones propias de la realidad que permiten la construcción de estos.

- ✓ Considerando los registros de representación como fundamentales en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función se logran evidenciar diferencias en la implementación de estos en los grupos de texto analizados, los libros de texto actuales son fuertes en el empleo de los diferentes registros (tabular, verbal, grafico, simbólico) tanto en la conceptualización como en la aplicación de esta por medio de las actividades, el concepto de función en estos textos es estudiado desde los diferentes puntos de vista que los registros de representación lo permiten, estableciendo conexiones entre ellos, de manera que no se convierten en distintos conceptos sino en uno solo estudiado de diferentes maneras. Los textos de la Reforma de las Matemáticas Modernas por su parte no desarrollan todos los registros asociados al concepto de función, es escaso el manejo del registro tabular y el grafico y lo poco que se emplean es en la formalización del concepto pero no se propone su uso en las actividades para el estudiante; con respecto a los otros registros, se logra observar que estos textos son fuertes en el manejo del registro simbólico.
- ✓ En cuanto a los procesos de traslación entre registros, los texto de la Reforma de las Matemáticas Modernas no proponen actividades en las que se evidencia el cambio de un registro a otro, todas las actividades se manejan únicamente en el registro simbólico, en la conceptualización se presenta solamente la traslación entre el registro simbólico al grafico representado este último por medio de los diagramas de Venn, pero no se plantean ejercicios o problemas que permitan al estudiante desarrollar estos procesos. Los textos actuales por el contrario si desarrollan los procesos de traslación tanto en la parte conceptual como en las actividades que se proponen, sin embargo, estos solo se presentan

con mayor fuerza en un solo sentido, es decir, existe la traslación de los registros verbal a simbólico, simbólico a tabular, tabular a gráfico, pero en el sentido inverso es escaso tanto las actividades como el desarrollo desde la parte conceptual.

- Los aportes que deja esta investigación a nuestra formación y ejercicio docente se orientan hacia el reconocimiento de la importancia que tienen los registros de representación en la caracterización del concepto de función, en este sentido que el desarrollo de los procesos de traslación potencializan la construcción y comprensión del concepto logrando así una correcta aprehensión del mismo.
- Otro gran aporte que nos deja este trabajo se enmarca en la importancia que tiene el libro de texto en la Educación Matemática y en el ejercicio docente, porque aunque existen muchos desaciertos tanto en su selección como implementación nuestra labor debe orientarse a seguir un correcto proceso de selección de los libros de texto que responda a las diferentes necesidades donde se tenga una mirada formal y contextualizada de las matemáticas y se permita desarrollar diferentes procesos que puedan garantizar el aprendizaje de los estudiantes.
- Finalmente reconocemos que al evidenciar las diferencias existentes entre los textos analizados se logra identificar una evolución en cuanto a la forma como es presentado el concepto de función desde la Reforma de las Matemáticas Modernas hasta nuestros días, mostrando que ha existido un interés en introducir cambios que favorezcan a la Educación Matemática, lo que lleva a pensar en las problemáticas que aún persisten, de este modo en el presente trabajado de grado quedaría pendiente para desarrollar en un futuro el estudio de ¿cómo estos cambios pueden ser potencializados a fin de obtener un mejoramiento en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de función?, por otro lado valdría la pena indagar ¿cómo se desarrolló la formación de docentes desde la época de la Reforma de las Matemáticas Modernas hasta el momento y cómo ha influenciado está en la Educación Matemática actual?

7. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Albis, V., & Sánchez, C. (2011). Los colombianos y las matemáticas modernas en Colombia, *XIII CIAEM – IACME*, Recife, Brasil.

Álvarez, D., González, M., Vizmanos, J., Bellom, M., Hervas, J & Pinzón, A (2012). *Proyecto sé Matemáticas 8*. Bogotá: Ediciones S.M

Arbeláez, G; Arce, J; Guacaneme, E; Sánchez, G; (1999) *Análisis de Textos Escolares en Matemáticas*, Cali, Instituto de Educación y Pedagogía; Universidad del Valle.

Arrieche, M. (2002). *La teoría de conjuntos en la formación de maestros: facetas y factores condicionantes del estudio de una teoría matemática* (tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada.

Decreto 080 (1974). Por el cual se deroga al Decreto número 045 de 1962 y se dictan otras disposiciones sobre Educación Media. DIARIO OFICIAL NÚMERO 34038 lunes 11 de marzo de 1974

Decreto 1710 (1963). Por el cual se adopta el Plan de Estudios de la Educación Primaria Colombiana y se dictan otras disposiciones. DIARIO OFICIAL NÚMERO 31169 sábado 31 de agosto de 1963

Dolciani, M., Wooton, W., Beckenbach, E & Markert, W (1969). *Matemáticas modernas para escuelas secundarias 2*. México : Publicaciones cultural S.A

García G. (1996). Reformas en la enseñanza de las matemáticas escolares: perspectivas para su desarrollo. *Revista Ema*, 1(3), 195-206.

García, M., Llinares, S. (1999).El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución. *Qurriculum* (10y11). Recuperado el 8 de Agosto de 2013 de

http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza&articulo_id=2686.

Garzón, D., Guacaneme, E., Obando, G., & Villa-Ochoa, J. (2013). Informe sobre la formación inicial y continua de profesores de matemáticas: El caso de Colombia. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Año 8. Especial Noviembre. 11-49. recuperado de <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/1281>

González, A & Sierra, V (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las ciencias*. 22(3).389-408.

Guzmán, L., Silva, L., Muñoz, V & Urrego, N (2011). *ZonActiva Matemáticas* 8. Bogotá: Norma

Hernández, J. (2000). Una mirada hacia las matemáticas modernas. *Las matemáticas del siglo XX una mirada en 101 artículos*. (pp.299-304). España: Universidad de La Laguna: Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas: Nivola.

MEN, *catálogo de libros de texto escolar*, tomado de: http://64.76.190.172/textos_escolares/contenidos/presentacion_del_catalogo.php. El 25 de noviembre de 2014.

Ministerio De Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. MEN. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. MEN. Bogotá, Colombia.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2011). *Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas*. *PNA*, 5(3), 105-127.

Ospina. (2012). *las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal*. (Tesis de maestría). Universidad Autónoma de Manizales, Manizales.

Porras, F. (2012). *El concepto de función en la transición bachillerato universidad* (tesis de maestría). Universidad del valle, Cali, Colombia.

Ruiz, A. (1992). Las matemáticas modernas en las Américas, Filosofía de una Reforma, *Educación Matemática (Revista Iberoamericana de Educación Matemática)*, México: Vol. 4, No. 1, abril 1992. También publicado por la UNESCO en el libro *Las Matemáticas en las Américas VIII*, París, 1993.

Ruiz, A. & Barrantes, H. (2011), En los orígenes de la CIAEM, *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 6. Número 7.13-46. Costa Rica

Ruiz, L. (1998). *La noción de función: Análisis epistemológico y didáctico* (tesis Doctoral). Universidad de Granada. España.

Sánchez, C. (2001). 50 Años de Matemáticas Modernas en Colombia. *Boletín de Matemáticas Nueva Serie*, VIII (2), 3 – 28.

Wills, D., Guarín, H., Londoño & Gómez, R. (1978). *Matemática Moderna Estructurada 3*. Bogotá: Norma