Conceptos Geométricos en Modelación 3D

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
GRUPO PIRAMIDE

PUBLIO SUÁREZ SOTOMONTE
psuarez2002@hotmail.com

Resumen

Se pretende hacer una panorámica de los conceptos y estructuras geométricas y algebraicas que fundamentan algunos de los procesos de representación tridimensional de objetos. Así mismo, se presentan breves consideraciones didácticas para el desarrollo del pensamiento geométrico dentro del ámbito de la geometría dinámica, estudiando las relaciones entre los sistemas semióticos de representación y las representaciones mentales, claves para la construcción de conceptos geométricos. Finalmente se describen algunos tópicos particulares en donde se evidencian los conceptos y estructuras geométricas mencionadas.

Introducción

En el ámbito de la Geometría Dinámica, actualmente en pleno desarrollo, los problemas geométricos adquieren una nueva dimensión. El papel mediador del computador implica la modificación de contenidos, metodología de aprendizaje y de enseñanza y los enfoques de resolución de problemas. Al respecto en [4], L. Moreno conceptúa "las herramientas computacionales modifican la naturaleza de las exploraciones y la relación de dichas exploraciones con la sistematicidad del pensamiento matemático" y respecto a los problemas que se pueden plantear manifiesta "la capacidad computacional de las herramientas informáticas, amplía el rango de los problemas que son susceptibles de ser abordados por los estudiantes". Así, al emprender el aprendizaje de los distintos tipos de geometría, se pueden trabajar ambientes de geometría dinámica, para afrontar nuevos retos, adoptando enfoques de resolución de problemas.

La exploración en estos nuevos sistemas semióticos de representación se puede iniciar con el uso de aplicaciones como Cabri, Sketchpad, Regla y Compás y Cynderella, entre otros. La idea no es trabajar las representaciones como se hace usualmente en dibujos con regla, compás, lápiz y papel, que pueden ser útiles en una etapa previa. Los dibujos en las aplicaciones de geometría dinámica, denominados "dibujos dinámicos", tienen dos nuevas componentes que los distinguen de sus antecesores. El primero, el dominio de funcionamiento, al cual hacen parte los algoritmos empleados en las construcciones gráficas a partir de primitivas de dibujo, de relación, de transformación y de medición (que contiene la aplicación) o de macro-construcciones hechas por el usuario a partir de éstas. De hecho, en [4] se dice: "... Las macro-construcciones se encuentran entre los principales recursos estructurales de Cabri, ... Podemos decir que una macro es una acción geométrica encapsulada, reificada. Una acción geométrica cristalizada. Es decir una macro es como un signo". El segundo componente de un dibujo dinámico es el dominio de variación, que permite dejar como variables los parámetros empleados en la construcción, el cual le proporciona la dinámica al dibujo y por ende una nueva dimensión.

Los Sistemas de Representación

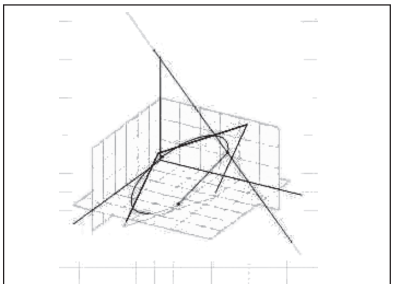
Los sistemas semióticos de representación juegan un papel clave para la comunicación y la actividad matemática. En [3] Duval manifiesta: "las transformaciones matemáticas no pueden efectuarse independientemente de un sistema semiótico de representación. Y ésta función de transformación sólo la pueden cumplir las representaciones semióticas y no las representaciones mentales". A propósito de la relación intrínseca entre representaciones semióticas y mentales, no pueden oponerse como dominios diferenciados. Vigotski y Piaget coinciden: "El desarrollo de las operaciones mentales, se efectúa como una interiorización de las representaciones semióticas, de la misma manera que las imágenes mentales son una interiorización de los perceptos" [3].

La riqueza y diversificación de estos sistemas semióticos de representación hacen que el trabajo con la geometría dinámica sea importante como soporte de las representaciones mentales y la construcción de conceptos geométricos.

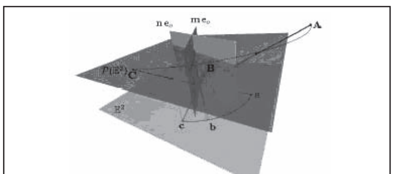
Las aplicaciones de geometría dinámica, inicialmente fueron concebidos para trabajar espacios en una y dos dimensiones. Actualmente ya se dispone de aplicaciones para trabajar el espacio tridimensional,

MEMORIAS SÉPTIMO ENCUENTRO COLOMBIANO DE MATEMÁTICA EDUCATIVA

adaptando las anteriores aplicaciones para dibujos 3D, o aplicaciones especiales como Cabri 3D y Calques 3D. La experiencia que tenga el estudiante en los ambientes de geometría dinámica, potencian la creatividad e imaginación y propician un manejo activo del plano y el espacio, desarrollan las competencias para representar objetos y estimulan el pensamiento geométrico.



Gráfica 1. Dibujo dinámico en Calques 3D



Gráfica 2. Variedades lineales

A continuación se describen algunos conceptos y estructuras geométricas y algebraicas que subyacen en los procesos de representación de objetos 3D en el ordenador. El propósito al evidenciar éstas áreas y temáticas, radica en el hecho de considerar el paso intermedio en el aprendizaje y construcción de conceptos geométricos, mediado por las nuevas herramientas de la informáticas y también invitar a los docentes a experimentar y profundizar en dichos tópicos para estimular el diseño de estrategias para trabajar ambientes de Geometría Dinámica que permitan al estudiante tener experiencia suficiente en los sistemas semióticos de representación.

Conceptos y Estructuras

La modelación de objetos en computador es una de las temáticas de Computación Gráfica de mayor desarrollo en las ultimas tres décadas. Los enfoques y métodos descubiertos están basados en conceptos de distintos tipos de geometría. En ellos subyacen conceptos elementales de geometría euclidiana, geometría vectorial, geometría afín, geometría proyectiva, geometría diferencial, geometrías no euclidianas, geometría computacional y geometría fractal. A continuación se describen algunas estructuras algebraicas de conceptos geométricos que son importantes para la manipulación de transformaciones en el plano y espacio tridimensional.

La modelación o modelización geométrica se entiende como el proceso científico abstracto, por el cual en el ámbito de una determinada geometría se elabora una teoría que conceptualmente puede reflejar la características esenciales de un objeto o fenómeno. Por ejemplo el espacio vectorial real $\Re^3$, "modeliza" el espacio físico tridimensional. En dicho proceso el modelo final solo representa sucintamente parte del objeto sometido a modelación. El proceso de modelación se puede refinar de acuerdo al grado de fidelidad con que se desee representar el objeto. En el caso del espacio tridimensional, en un modelo pueden ser describibles las magnitudes, como altura anchura o profundidad. Si se desea enriquecer el modelo, se pueden construir esquemas en los cuales se tenga en cuenta el color, la textura, la radiosidad, las sombras, entre otras.

El escenario natural para representar objetos del plano o espacio tridimensional es el espacio vectorial real, dotado con la suma de vectores y el producto de un escalar por un vector, denotado $(\Re^n +,\cdot)$. La representación de variedades lineales, como puntos (vectores), rectas planos e hiperplanos, usualmente se hace con las representaciones paramétricas. Al manipular transformaciones básicas de los modelos, es necesario considerar las transformaciones entre espacios vectoriales. Son de especial interés las transformaciones lineales. De manera general, el espacio vectorial de transformaciones de E en F, como espacios vectoriales, con la suma de transformaciones y el producto de un escalar por una transformación. Dicho espacio vectorial se denota por $(L(E,F),+,\cdot)$; si n=dim(E) y m=dim(F), el espacio vectorial $(L(E,F),+,\cdot)$ es isomorfo al espacio vectorial de matrices $m\times n$, con la suma de matrices y el producto de un escalar por una matriz, $(M_{m\times n},+,\cdot)$. De manera específica, la colección de automorfismos en un espacio vectorial $(E,+,\cdot)$ con la composición usual de transformaciones, tiene estructura de grupo, llamado el grupo lineal de E, denotado $(GL(E),\circ)$. Dicho grupo es isomorfo al grupo de matrices cuadradas con el producto usual, denotado $(M_{n\times n},*)$.

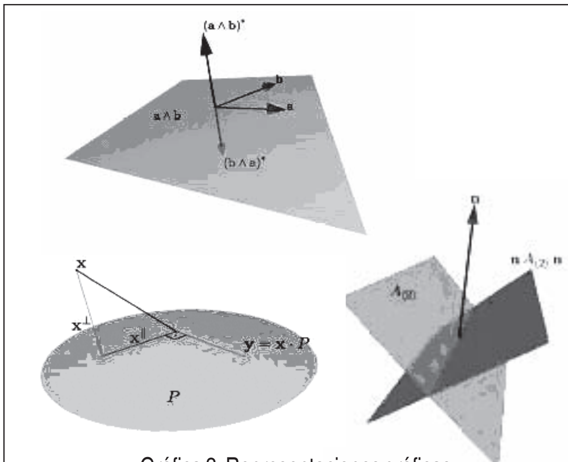
La colección de transformaciones afines regulares con la composición usual de transformaciones, tiene estructura de grupo. Se denomina comúnmente grupo afín y se denota $GA(E)$. Las afinidades regulares son usadas en métodos de segmentación para reconstrucción de superficies a partir de modelos volumétricos. Dos grupos de métodos han sido trabajados, "Marching Cubes" y "Octrees".

Los espacios euclideos, obtenidos al dotar a un espacio vectorial de un producto interior, se constituye en el contexto para tratar con las propiedades métricas de modelos representados. Es frecuente encontrar algoritmos en donde la información necesaria va desde el calculo de normales, distancias, ángulos y sus medidas, hasta el cálculo de áreas y volúmenes. Y con la definición de producto vectorial, se trabajan de manera permanente los problemas métricos entre variedades lineales, como distancias y ángulos entre ellas, relaciones de ortogonalidad y paralelismo. Además, es común el problema de encontrar los lugares geométricos de intersecciones entre variedades lineales, o entre una variedad lineal con una figura plana ó un sólido. Por ejemplo, se deben construir algoritmos para encontrar de manera rápida y eficiente, la intersección (si existe) entre un rayo y un triángulo en el espacio tridimensional.

Se consideran algunas transformaciones básicas como las traslaciones, las simetrías, las homotecias o cambios de escala y las rotaciones. Son bien conocidas las estructuras, grupo abeliano de traslaciones en un espacio vectorial E, denotado $(\Im,\circ)$, dotado de la composición usual de funciones que es isomorfo al grupo abeliano aditivo de vectores. El grupo abeliano de homotecias $(H,\circ)$, isomorfo al grupo abeliano multiplicativo de escalares no nulos $(K^*,\cdot)$. Adicionalmente los grupos de simetrías y el grupo de rotaciones completan las estructuras básicas, para manipulación básica de los modelos 2D y 3D.

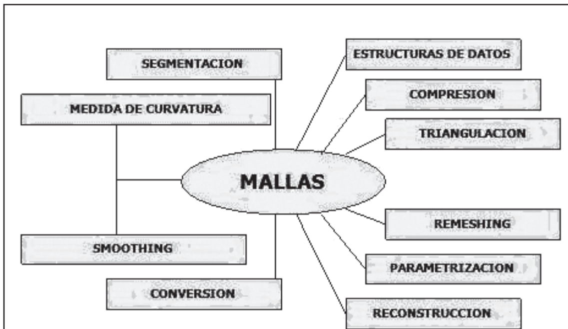
Aplicaciones Gráficas para Visualización Tridimensional

Las aplicaciones gráficas disponibles en el medio, para modelación 3D, generalmente usan algunas librerías para gráficos como OpenGL o paquetes de librerías como Java 3D, en lenguajes de programación como Visual Basic, Visual C++ o Java. Para el manejo de las transformaciones bidimensionales y tridimensionales, se usan comúnmente las coordenadas homogéneas, expresadas matricialmente, como se ilustra en la siguiente gráfica.

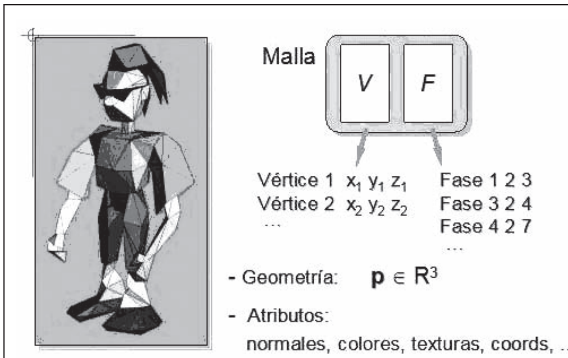


Gráfica 3. Representaciones gráficas y operaciones en espacios euclideos.

Al abordar el estudio de la modelación de objetos 3D, se iniciará con la descripción sencilla de un modelo tridimensional. Para representar un objeto en computador, tal vez el mas sencillo, es el de obtener las coordenadas cartesianas de ciertos puntos del objeto real, tomados por un escáner. El resultado es una colección finita de puntos, con información opcional de color, dirección o normal y textura. El término "nube de puntos" es usualmente utilizado para la colección de puntos de la frontera del objeto a modelar. Para representar la superficie de frontera del objeto se usan mallas poligonales, de manera particular mallas triangulares, como el modelo más sencillo y práctico.



Gráfica 4. Temas relativos a las mallas.



Gráfica 5. Estructuras de datos para mallas.

Algunos Tópicos en Modelación 3D

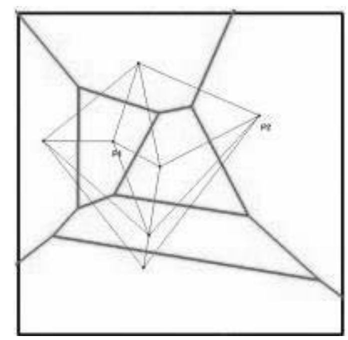
Uno de los primeros problemas que surge en este proceso de modelación, es el de obtener una malla triangular a partir de la "nube de puntos". Este problema no es elemental pues existen infinitas mallas triangulares posibles. Para encontrar una malla que represente adecuadamente un objeto, es necesario hacer uso de conceptos elementales relativos a la geometría euclidiana del plano y espacio tridimensional para la triangulación ó tetrahedralización de la nube de puntos obtenida.

Algunos conceptos elementales de geometría euclidiana son empleados en algoritmos de triangulación de una colección finita de puntos. Los algoritmos mas conocidos son el diagrama de Voronoi y la triangulación de Delanuay. Los puntos notables de un triángulo son considerados, como es el caso del baricentro.

Diagramas de Voronoi y Triangulación de Delanuay

Sea S un conjunto finito del espacio métrico $(\Re^n, d)$. La fase Voronoi para un punto esta $x \in S$ dada por todos aquellos puntos del espacio que están más cerca que a cualquier otro punto de S. Esto es $F_x = \{y \in \Re^n \,/\, d(x,y) < d(y,s), \forall s \in S - \{x\}\}$. El conjunto F_x es siempre un conjunto no vacío, abierto y convexo, además es equipotente a $\Re^n$. Este concepto se puede generalizar a un subconjunto T de S, conservando las mismas propiedades. El diagrama de Voronoi de S, está formado por las fases de cada uno de sus puntos, es decir $Dv(S) = \{F_x \,/\, x \in S\}$. El diagrama de Voronoi se puede generalizar considerando las fases de subconjuntos de S. Para $T \subseteq S$, se define análogamente el conjunto F_T como el conjunto de todos los puntos equidistantes a cualquier punto de T, cuya distancia a cualquiera de los puntos de T es menor que la distancia a cualquier otro punto de $S-T$. Así queda determinado el diagrama de Voronoi de S, como la colección de fases de subconjuntos de S. Esto es $Dv(S) = \{F_T \,/\, T \in S\}$.

Una triangulación de Delanuay es aquella en la cual ningún punto es interior al circuncentro de cualquier otro. Existe una sola triangulación que cumple dicho requerimiento. En la siguiente gráfica se muestra un ejemplo del algoritmo aplicado a una colección de puntos y se visualiza la relación existente entre el diagrama de Voronoi y la triangulación obtenida. Para hacer a triangulación de una colección de la frontera de un objeto se establece una función biyectiva entre subconjuntos del plano y el espacio. Al hacer la triangulación de los puntos del plano queda determinada la triangulación de los puntos en el espacio. Existen diversas aplicaciones para la triangulación de un conjunto de puntos del plano, como se muestra en la figura.



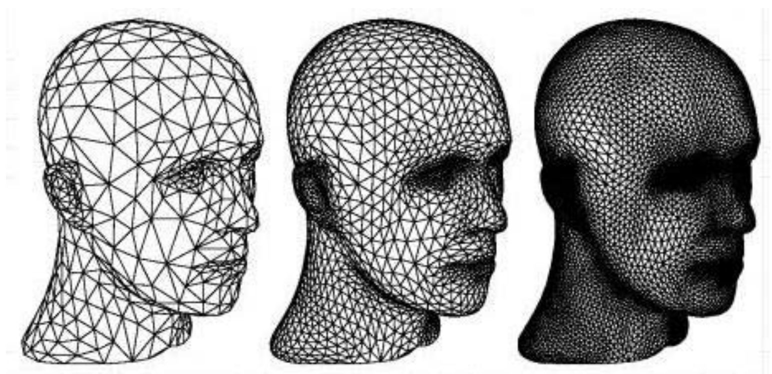
Gráfica 6. Diagramas de Voronoi y Triangulación de Delanuay

Simplificación de Mallas Triangulares

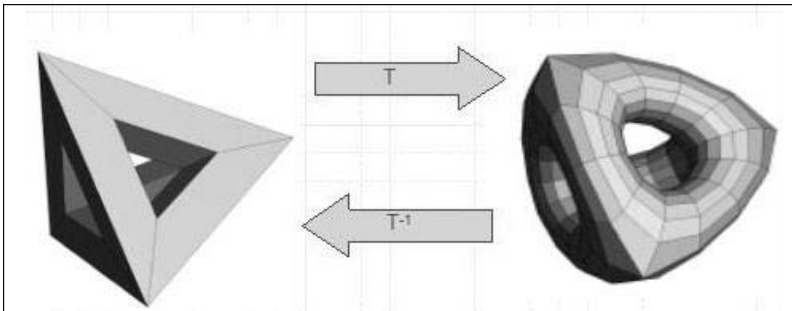
A partir de un modelo volumétrico es posible la reconstrucción de la superficie de frontera de un modelo tridimensional. Dicha superficie se representa como una malla triangular, la cual es susceptible de reducción, teniendo en cuenta criterios de preservación de características topológicas y geométricas del objeto modelado. Varios enfoques han sido introducidos en este campo, por ejemplo un famoso método de simplificación geométrica de mallas es el propuesto por Hoppe, denominado "Progressive Meshes", basado en operaciones reducción de ejes. Un segundo método bien conocido "Quadric Error Metric", lo proponen Garland y Heckbert, en donde se optimiza una ecuación cuadrática, producto del análisis de propiedades métricas locales, para reducción geométrica del modelo. Para la reducción topológica del modelo, un conjunto de métodos es introducido por Andujar[6], en el cual mediante las fases de discretización, reconstrucción y reducción, se simplifica topológicamente el modelo, entendida como el número de piezas disconexas del modelo.

Subdivisión de Superficies

Se aborda ahora el problema de refinar una malla triangular para obtener un modelo mas preciso del objeto modelado. Los esquemas de subdivisión y refinamiento de mallas triangulares son usualmente usados para tal fin. Entre los esquemas de subdivisión se puede mencionar "Loop Subdivisión" y los esquemas de subdivisión de orden tres y cuatro, entre otros.



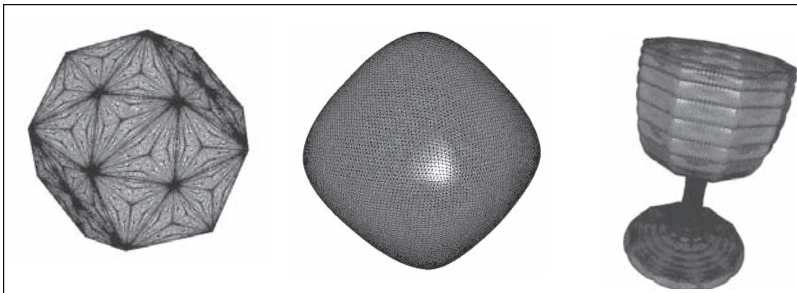
Gráfica 7. Proceso de refinamiento de una malla.



Gráfica 8. Esquema de subdivisión de superficies

Conclusión

Son diversas las áreas de la Computación Gráfica, en donde subyacen las teorías Matemáticas correspondientes a la Geometría, el Análisis Matemático, el Álgebra, la Topología y el Análisis Numérico. Es necesario incorporar los ambientes de la Geometría Dinámica para la representación bidimensional y tridimensional, en los cursos de formación geométrica, como estrategia para trabajar con diversos sistemas semióticos de representación, en donde la experimentación y profundización en las áreas aquí evidenciadas, con enfoques apropiados para resolver problemas matemáticos, sirvan para lograr las representaciones mentales, base de la construcción de conceptos y el desarrollo del pensamiento geométrico.



Gráfica 9. Modelos obtenidos por esquemas de subdivisión

Referencias bibliográficas:

[1] Lecciones de Álgebra y Geometría. C. Alsina y E. Trillas. Editorial Gustavo Gilli, S A. Barcelona, 1984.

[2] Gráficación por Computador. James D. Foley y Otros. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana.. Barcelona 1996.

[3] Semiosis y Pensamiento Humano. Raymond Duval. Editorial Universidad del Valle, Cali, 1999.

[4] Argumentación y Formalización Mediadas por Cabri Géomètre. Revista Tecnologías Computacionales. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá, 2002.

[5] Interactive Computer Graphics. Edward Angel. Editorial Addison-Wesley, New York, 2000.

[6] Topology-reducing Surface Simplification Using a Discrete Solid Representation. ACM Transaction on Graphics, 2002.