EMERGENCIA DE LOS PROCESOS DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA EN UNA CLASE CON ESTUDIANTES EN EDAD EXTRAESCOLAR

CAROLINA MARIA LUQUE ZABALA
2010185008
LUIS ALEJANDRO ROBAYO LEÓN
2010185019

Asesorado por:
ÓSCAR MOLINA JAIME

BOGOTÁ D.C.
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
2011

EMERGENCIA DE PROCESOS DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA EN UNA CLASE CON ESTUDIANTES EN EDAD EXTRAESCOLAR

CAROLINA MARIA LUQUE ZABALA
2010185008
LUIS ALEJANDRO ROBAYO LEÓN
2010185019

Asesorado por:
ÓSCAR JAVIER MOLINA JAIME
Profesor asociado al Departamento de Matemáticas

Tesis de grado para optar el titulo de
Magister en Docencia de las Matemáticas

BOGOTÁ D.C.
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
2011

DEDICATORIA

A mi familia por su apoyo, comprensión y paciencia, y a todas las personas que hicieron parte de este proceso y que de alguna u otra manera contribuyeron en mi formación profesional y personal.

Carolina

A mi familia, quienes me acompañaron durante todo este largo camino, brindándome su apoyo y la fuerza necesaria para continuar. En especial quiero agradecer a mi mamá y Carolina, porque me brindaron palabras de aliento en los momentos más difíciles.

Alejandro

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos de manera muy especial a Jeanette Parada y Rafael Rodríguez, directivos del colegio Gabriel Echavarría de Madrid (Cundinamarca), por brindarnos el espacio para la implementación de este estudio. También agradecemos a los estudiantes que participaron en la realización de este proyecto, por su motivación, disposición y empeño en el desarrollo del trabajo propuesto.

A nuestro profesor y asesor Óscar Javier Molina Jaime por sus valiosos aportes y consejos que fueron la base para el desarrollo del presente estudio y que contribuyeron a nuestra formación profesional.

De igual manera, agradecemos a los docentes y compañeros de la Maestría con quienes compartimos nuestro proceso de formación.

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría: en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores, hemos dado los respectivos créditos.

RESUMEN ANALÍTICO EDUCATIVO (R.A.E.)

TIPO DE DOCUMENTO: Tesis de Grado

ACCESO AL DOCUMENTO: Universidad Pedagógica Nacional

TÍTULO DEL DOCUMENTO: EMERGENCIA DE PROCESOS DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA EN UNA CLASE CON ESTUDIANTES EN EDAD EXTRAESCOLAR

AUTORES: LUQUE ZABALA CAROLINA MARIA
ROBAYO LEÓN LUIS ALEJANDRO

PUBLICACIÓN: Bogotá D.C., Universidad Pedagógica Nacional, 2011.

UNIDAD PATROCINANTE: Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas

PALABRAS CLAVE: Actividad demostrativa. Producción de teoremas. Estudiantes en edad extraescolar. Geometría dinámica.

DESCRIPCIÓN: En este trabajo se presenta un estudio realizado con estudiantes en edad extraescolar quienes estaban nivelando los grados octavo y noveno de educación media, en el colegio Gabriel Echavarría de Madrid (Cundinamarca) durante el segundo semestre del 2010. El propósito del estudio es indagar sobre la posibilidad de evidenciar el constructo de actividad demostrativa, propuesto por el grupo *Æ•G* en este contexto. El objetivo principal del estudio es identificar las acciones de los estudiantes en edad extraescolar que reflejan su involucramiento en los procesos de la actividad demostrativa en clase de geometría.

Para cumplir con el objetivo del estudio, en primer lugar se caracteriza lo qué significa producir teoremas en la escuela, basándonos en el constructo de teorema propuesto por Mariotti (1997, 2006) y se diseñan categorías de análisis que permiten identificar si existe un involucramiento por parte de los estudiantes en la producción de teoremas y por ende en la actividad demostrativa. Estas categorías se basan en las fases de producción de teoremas

propuestas por Boero (1999), a las que se les diseñan indicadores y acciones que permitieran evidenciarlas. En segundo lugar, se realizó una fase de inducción que involucró a los estudiantes en una aproximación metodológica en la que se estudia la geometría euclidiana a través de una participación activa, el trabajo en grupo y el uso de la geometría dinámica. Los análisis de la actividad de los estudiantes de acuerdo con dos situaciones problemas donde una de ellas provee el hecho geométrico útil para justificar el establecido a partir de la otra.

Con base en el análisis, se realiza un reporte final en el que se concluye si existió un involucramiento en los procesos de la actividad demostrativa por parte de los estudiantes.

FUENTES: Para el desarrollo del presente trabajo se consultaron en total 30 fuentes, distribuidas entre tesis, artículos de revista en versión impresa y/o electrónica, libros de educación matemática y documentos oficiales sobre el currículo escolar colombiano. Estos recursos fueron clasificados de la siguiente manera:

- 20 publicaciones referidas a la enseñanza y aprendizaje de la demostración, y la geometría dinámica: Boero (1999), Camargo (2010), Crespo (2005), Christou, Mousoulides, Pitallis y Pitta-Patanzi (2005), De Villiers (1993), Furinghetti, Olivero y Domingo (2001), Gutiérrez (2005, 2007), Hanna (2000), Ibañes y Ortega (2005), Jones (2000), Larios (2002, 2006), Mariotti (1997, 2006), Moreno (1996), Parra y Piñeros (2011), Sáenz (2002) y MEN (2004).
- 3 publicaciones referidas a las producciones del grupo *Æ•G* en relación con la actividad demostrativa e innovaciones de la enseñanza de la demostración: Molina, Samper, Perry, Camargo y Echeverry (2010); Perry, Camargo, Samper, y Rojas (2006); Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina (2008).
- 4 publicaciones referidas a la educación para adultos e investigaciones en educación matemática con población de adultos: Agüero (2006), Ávila (1999), Bastán y Elguero (2005), Barrio de la Puente, Barrio de la Puente y Quintanilla (2006), Elguero (2009).
- 3 documentos sobre el currículo escolar colombiano, MEN (1998, 2004, 2006).

- 1 documento en relación con métodos de investigación educativa: Cohen y Manion (1999).

CONTENIDOS: El presente trabajo se ha organizado en seis capítulos, distribuidos de la siguiente manera: en el primero, se describe la problemática, se presentan los objetivos y la revisión de antecedentes de acuerdo a los intereses del estudio. En el segundo se presenta el referente teórico que fundamentó el estudio. En el tercer capítulo se describe el diseño metodológico del estudio, centrado en tres aspectos: el tipo de investigación, las características de la población cuyas acciones fueron objeto de estudio y las etapas que lo conforman. El cuarto capítulo describe las categorías de análisis utilizadas para analizar la actividad de los estudiantes. En el capitulo cinco se expone el análisis y los resultados de la investigación. En el capitulo seis se mencionan las conclusiones del estudio en relación con la actividad de los estudiantes, los objetivos del estudio, los aspectos a tener en cuenta en futuros estudios y las reflexiones sobre la incidencia del trabajo realizado en nuestra formación personal y profesional.

METODOLOGÍA: De acuerdo con los intereses del estudio, la investigación se enmarca en una metodología de carácter cualitativo, descriptivo e interpretativo, que corresponde a un estudio de caso. Es un estudio de caso porque se busca describir las acciones que realiza un grupo de tres estudiantes cuando se enfrentan a una situación geométrica que indaga sobre las propiedades del triángulo. Para ello, se realizaron unos primeros registros de audio y video de las sesiones trabajadas, entrevistas y se usaron las producciones escritas de los estudiantes. Posteriormente, se hizo la transcripción de las sesiones en la que los estudiantes solucionaban dos situaciones problema que involucraba la conjetura de un hecho geométrico. Paralelo al registro de estos datos, se diseñaron las categorías de análisis con las cuales se analizarían las transcripciones. El establecimiento de las categorías de análisis nos permitió seleccionar y depurar los episodios que finalmente se considerarían los datos del estudio.

CONCLUSIONES: En relación con la actividad de los estudiantes en edad extraescolar, se evidenció que las acciones de la actividad demostrativa emergen en una clase en la que la geometría dinámica, la interacción social y la solución a situaciones problema se articulan para conducir a los estudiantes a producir conjeturas y justificaciones desde el punto de vista de la actividad demostrativa.

La actividad de los estudiantes en edad extraescolar permitió reconocer la necesidad de ampliar el constructo de actividad demostrativa para el contexto escolar, como por ejemplo, extender las definiciones que se dan a las acciones de verificar y explorar. En relación con la exploración, los estudiantes dieron muestra de diferentes maneras de explorar: arrastrar para identificar invariantes, tomar medidas para identificar relaciones entre los objetos involucrados en la situación y lanzar hipótesis de solución para luego corroborarlas haciendo uso de las herramientas de Cabri. Por otra parte, la acción de verificación a diferencia de la definida en el constructo de actividad demostrativa, no sólo se lleva a cabo cuando los estudiantes van comprobar un invariante encontrado, también cuando verifican una hipótesis de solución y construcciones realizadas.

Otro aporte de este trabajo en relación con el aprendizaje de la demostración en la escuela es la concepción de teorema que proponemos para al contexto escolar. En este sentido, plateamos una analogía entre los elementos que componen la definición de teorema propuesta por Mariotti (1997) y los elementos que están inmersos en el constructo de actividad demostrativa y que consideramos son próximos a tal definición en el contexto escolar.

Por otro lado, el análisis de la actividad de los estudiantes en edad extraescolar nos ha llevado a considerar cuestiones para futuros estudios Algunas de ellas son *¿en qué sentido sería provechoso o no proponer situaciones próximas al contexto laboral de los estudiantes para la construcción del conocimiento y la emergencia de acciones de la actividad demostrativa?* Teniendo en cuenta que los estudiantes lograron plantear justificaciones cuando apenas se estaban iniciando en el proceso de justificar *¿de qué manera se orientaría el trabajo con los estudiantes para dar continuidad a la producción de justificaciones próximas a una demostración formal?*

Fecha Elaboración Resumen: 1 de Diciembre de 2011.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS, ILUSTRACIONES Y ESQUEMAS

TABLAS

ILUSTRACIONES

ESQUEMAS

INTRODUCCIÓN

Un tema en constante debate en la Educación Matemática es la pertinencia de la enseñanza y aprendizaje de la demostración en el ámbito escolar. Existen quienes piensan que enseñar la demostración en la escuela es un rotundo fracaso y los que por el contrario, señalan que la demostración es fundamental para comprender las matemáticas (Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006). El grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (*Æ•G*) de la Universidad Pedagógica Nacional es uno de los grupos de investigación, en Colombia, interesados en indagar sobre la importancia de la demostración en la clase de matemáticas. Sus investigaciones se han enfocado en las aproximaciones para su enseñanza y aprendizaje en diferentes niveles y bajo diversos contextos.

Desde el año 2006, el grupo *Æ•G* ha adelantado sus investigaciones sólo en la educación superior. Ha decidido indagar sobre la posibilidad de aprender a demostrar en los niveles de básica y medida de educación formal. En este sentido, nuestro estudio de grado asociado al grupo, está interesado en contribuir a su producción respondiendo de manera parcial la hipótesis alrededor de la posibilidad de aprender a demostrar en estos niveles. La población escogida para poner a prueba dicha hipótesis son estudiantes en edad extraescolar de un institución de educación formal y el objetivo principal de este estudio es identificar acciones, en este tipo de población, que reflejen su involucramiento en los procesos de la actividad demostrativa en una clase de geometría. Para tal efecto, el estudio se ha dividido en seis capítulos que se describen a continuación.

En el primer capítulo se da a conocer la problemática y se justifica la pertinencia de realizar esta investigación; adicional a esto se delimita el problema, se exponen la pregunta de investigación, los objetivos y se presenta una síntesis de la revisión de los antecedentes bibliográficos tenidos en cuenta de acuerdo a los intereses que abarca el estudio.

El segundo capítulo describe el marco teórico que sustenta este estudio. En primer lugar, se daremos a conocer la postura frente a lo que creemos debe ser la demostración en la escuela; en segundo lugar, exponemos el constructo teórico de actividad demostrativa propuesto por el grupo *Æ•G;* en tercer lugar, explicaremos lo que significa producir teoremas en el marco de la actividad demostrativa con base en la propuesta de Boero (1999). Además, hacemos alusión a un ambiente favorable a aprender a demostrar en el que las situaciones problema, las interacciones sociales y la geometría dinámica enmarcan elementos que posibilitan y potencian el aprendizaje de la demostración.

En el tercer capítulo se describe detalladamente el diseño metodológico del estudio. La descripción se centra en tres aspectos: el tipo de investigación, las características de la población con los que se trabajó y las etapas que conformaron el desarrollo del estudio. En el último aspecto se mencionan las tareas propuestas a los estudiantes y los instrumentos de recolección de datos utilizados.

En el cuarto capítulo presentamos las categorías e indicadores que se construyeron para describir e interpretar los datos de la investigación, los cuales se diseñaron con base en el trabajo der Boero (1999) en relación con las fases en la producción de un teorema. Para ello, se especifica cómo se elaboró y codificó cada una de las categorías. Posteriormente, se describe cada una de ellas junto con los indicadores que las constituyen.

En el quinto capítulo se expone el análisis del estudio. Los análisis se realizaron con base en episodios tomados de transcripciones de clase y entrevistas; también se tuvo en cuenta las producciones escritas realizadas por los estudiantes.

Finalmente, en el capitulo seis, se mencionan las conclusiones del estudio en relación con la actividad de los estudiantes, los objetivos del estudio, los aspectos a tener en cuenta en futuras investigaciones y las reflexiones sobre la incidencia del trabajo realizado en nuestra formación personal y profesional.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El presente capitulo tiene como objeto exponer el planteamiento del problema que orienta este estudio. Tal planteamiento está constituido por: la justificación del problema, la pregunta de investigación, objetivos y la revisión de algunos antecedentes que guardan relación con el estudio que se prevé realizar. Dicha revisión bibliográfica estuvo guiada por dos ejes: las investigaciones centradas en la enseñanza y aprendizaje de la demostración en la escuela básica y media, y las investigaciones en educación matemática cuya población son estudiantes en edad extraescolar.

1.1 JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

La preocupación sobre cómo propiciar procesos de argumentación y demostración en el aula de matemáticas ha conducido a que los interesados en el tema adelanten estudios alrededor del mismo (de Villers, 1993; Boero, 1999; Hanna, 2000; Godino y Recio, 2001; Larios, 2002; Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2008). El grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ•G) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) es uno de los grupos de investigación, en Colombia, interesados en indagar sobre la importancia de la demostración en la clase de matemáticas y las posibles aproximaciones para su enseñanza y aprendizaje en diferentes niveles y bajo diversos contextos.

Desde el año 2006, el grupo Æ•G ha adelantado estudios alrededor de la enseñanza y aprendizaje de la demostración en un curso de geometría plana en el marco del programa de formación inicial de profesores de matemáticas que ofrece la UPN. Específicamente se ha centrado en realizar una innovación en la enseñanza de la geometría buscando cambiar un curso centrado en la enseñanza directa de contenidos por uno centrado en el aprendizaje de la práctica de demostrar en el campo de la geometría plana (Perry et al. 2008). La innovación realizada por el grupo Æ•G no sólo ha perfilado una perspectiva diferente de la demostración (como proceso y producto y no sólo como producto acabado) y de lo que significa aprender a demostrar, sino que también ha puesto en relieve tres elementos claves de un entorno favorable para aprender a demostrar: las situaciones problema, la interacción social de la clase y el uso de la geometría dinámica. Según Perry et al. (2008), la articulación de estos tres elementos permite que los estudiantes se involucren en una actividad demostrativa y ellos reconozcan en esta una actividad fundamental del quehacer matemático que conduce a la comprensión y la argumentación dentro de una comunidad.

Apoyados en su experiencia y bajo la hipótesis de la posibilidad del aprendizaje de la demostración en cualquier contexto escolar, el grupo Æ•G ha decidido mirar hacia la escuela y cuestionarse sobre la posibilidad de aprender y enseñar a demostrar en los niveles de básica y media de educación formal. La inquietud por enseñar y aprender a demostrar en la escuela no sólo es consecuencia del interés del grupo por hacer que su innovación curricular impacte en los niveles de básica y media de educación formal, sino que también es fruto de la necesidad de afrontar una problemática reconocida por la comunidad internacional de educadores interesados en el tema: el abandono de la demostración en el ámbito escolar.

Según Healy, Holyes y Dreyfus (1998; 1999, citados por Perry et al., 2006), el currículo de secundaria ha optado por dejar de lado las actividades de carácter demostrativo o por incluirlas en el contexto escolar haciendo una presentación de la demostración como un producto acabado, lo cual ha conducido al fracaso de su enseñanza y abandonar los intentos de involucrar la demostración en el currículo escolar.

El abandono de la demostración en el ámbito escolar se ha convertido en una preocupación de algunos educadores matemáticos, específicamente los interesados en didáctica de la geometría, quienes han generado discusiones en torno a la pertinencia que tiene la enseñanza de la demostración en la educación básica y media. Existen quienes opinan que es imposible llevar la demostración en la escuela, y los que por el contrario, creen que es indispensable dado que es una actividad característica de las matemáticas que conduce a la comprensión de los objetos de esta disciplina (Perry et al., 2006).

Centrándonos en el contexto colombiano, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (MEN, 2006) evidencian una posición en pro de enseñar la demostración en la escuela. Manifiestan que la enseñanza no debe centrarse en la demostración como mecanismo de validación, sino que es un objetivo fundamental de la escuela proporcionar a los estudiantes experiencias en las que esté presente el uso de argumentos, pruebas, refutaciones, contraejemplos, entre otras, para aproximarlos a la demostración.

En este sentido, nuestro trabajo de grado como tesis asociada a la línea de investigación en geometría de la UPN, pretende contribuir a la producción científica del grupo y de manera parcial responder a la cuestión que sus integrantes y las políticas educativas se han planteado alrededor del aprendizaje de la demostración en el contexto escolar.

1.2 DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

Los aspectos expuestos en el apartado anterior, es decir, la complejidad del aprendizaje de la demostración, la política educativa nacional en relación a la demostración y los intereses particulares del grupo de investigación *Æ•G,* nos permiten considerar la pertinencia de desarrollar un trabajo que evidencie la posibilidad de aprendizaje en un aula de clase de secundaria en el que la producción de los estudiantes se enmarque en la actividad demostrativa.

Dado que uno de los autores de este estudio es docente de matemáticas en un colegio para estudiantes en edad extraescolar[1], consideramos pertinente indagar en esta población la

[1] Según el decreto 3011 del 19 de diciembre de 1997 de Ministerio Nacional de Educación, la educación básica formal para adultos se dirige a personas de más de trece años que nunca ingresaron a la escuela o que han cursado menos de los tres primeros grados de básica o a las personas de más de quince años que hayan finalizado el ciclo de educación básica primaria y demuestren que han estado por fuera del servicio público educativo formal dos años o más. En este sentido, tomamos el término edad extraescolar, para referirnos a las

posibilidad antes mencionada. Además, consideramos que un estudio como el que se pretende hacer sería un aporte a las investigaciones en educación matemática, ya que, como lo manifiesta Ávila (1999) son pocos los estudios relativos a la demostración con población adulta. Un estudio como el que se pretende realizar permitiría dar cuenta de las acciones llevadas a cabo por estudiantes en edad extraescolar cuando se enfrentan a una tarea geométrica concerniente a propiedades del triángulo que permitan identificar la emergencia de los procesos de la actividad demostrativa en el aula de matemáticas.

De acuerdo con el contexto presentado hasta el momento, la pregunta que orienta el estudio que se pretende realizar es: *¿Cuáles acciones reflejan un involucramiento de los estudiantes en edad extraescolar en los procesos de la actividad demostrativa y dan indicios de la posibilidad de aprendizaje de la demostración en la escuela?*

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 OBJETIVO GENERAL

Identificar acciones de estudiantes en edad extraescolar que reflejan un involucramiento en los procesos de conjeturación y justificación de la actividad demostrativa en una clase de geometría.

1.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Decantar los referentes que permitan definir el marco teórico y las categorías de análisis que abarcan este estudio.
- Diseñar categorías de análisis que den cuenta de las acciones que permiten determinar si los estudiantes están involucrados en los procesos de actividad demostrativa.
- Analizar la actividad de los estudiantes con base en las categorías establecidas.

---

personas que se encuentran adelantando sus estudios de educación básica en el marco de la educación para adultos.

- Determinar sí el involucramiento de los estudiantes en la aproximación metodológica del grupo Æ•G favorece la emergencia de acciones de los procesos de la actividad demostrativa.

1.4 REVISIÓN DE ALGUNOS ANTECEDENTES BIBLIOGRÁFICOS

En este apartado realizamos una breve descripción de las investigaciones que consideramos han tenido relevancia en la construcción de nuestro estudio. La revisión de antecedentes se ha centrado en dos aspectos: el apartado 1.4.1 muestra varias investigaciones asociadas a la enseñanza y aprendizaje de la demostración tanto en la educación superior como escolar; estos estudios direccionan los elementos tanto teóricos como metodológicos de este estudio. En el apartado 1.4.2 se presenta la revisión de investigaciones en educación matemática que ha contemplado la población de estudiantes en edad extraescolar con el objetivo de indagar acerca de las características a tener en cuenta cuando se trabaja con este tipo de población.

1.4.1 ESTUDIOS SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA DEMOSTRACIÓN EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR Y EN LA ESCUELA

Para la revisión de antecedentes centrados en la enseñanza y aprendizaje de la demostración, en primer lugar, se revisaron los reportes de investigación y las producciones escritas del grupo de investigación Æ•G.

Por un lado, Perry et al. (2006) manifiestan que la demostración proporciona a los estudiantes comprensión y conocimiento del quehacer matemático. Sin embargo, lograr que los estudiantes demuestren de manera formal no es algo instantáneo. Para ello, es necesario que ellos cambien su concepción de demostración. Basándose en esta idea, el grupo Æ•G ha elaborado el constructo actividad demostrativa, a través del cual se plantea que la práctica de demostrar la constituyen dos procesos: conjeturación y justificación. El primer proceso busca que el estudiante reconozca el contenido geométrico y las propiedades que subyacen en un enunciado matemático, y el segundo proceso, se da cuando el estudiante indaga acerca de una posible vía de justificación, después de tener la plena seguridad de una conjetura.

La noción de actividad demostrativa ha llevado al grupo Æ•G a desarrollar una innovación en la enseñanza de la geometría (en publicaciones posteriores la denominan aproximación metodológica) con miras a apoyar el aprendizaje de la demostración. En tal innovación se destacan tres elementos fundamentales para generar un ambiente favorable para el aprendizaje de la demostración: las situaciones problema[2], las interacciones sociales y el uso de geometría dinámica. En Molina et al. (2010), se amplían estos elementos y se resalta el papel del profesor como orientador de las normas sociales y socio-matemáticas que conforman los ambientes de aprendizaje. Estos documentos son de interés dado que nos proveen un primer referente teórico para nuestro estudio: actividad demostrativa. Adicionalmente, nos proporcionan información útil sobre la aproximación metodológica a seguir en la implementación de las situaciones en el marco de la clase.

Existen investigadores internacionales que reportan estudios con los mismos intereses del grupo Æ•G. Investigaciones como las de Larios (2002), Mariotti et al. (1997), Boero (1999), exploran, cada uno bajo su propuesta, la manera en que llevan la demostración al ámbito escolar.

El estudio de Larios (2002) expone una caracterización de la demostración en la escuela que es pertinente para este estudio. El artículo ratifica una posición de la demostración como proceso y resalta que para su enseñanza es importante tener en cuenta acciones empíricas como la observación, el análisis, la argumentación y la elaboración de conjeturas; además, enfatiza en la importancia de una metodología constructivista como herramienta del docente de matemáticas en la escuela. Por otro lado, nos permite anticipar que la aproximación metodológica del grupo Æ•G puede ser llevada al contexto de la escuela

[2] Se entenderá como *situación problema* una tarea de carácter geométrico, que provee múltiples métodos de solución. Además debe cumplir con tres características: la estructura del enunciado debe ser breve y no sugerir algún método de solución (Furinghetti, 2001), las preguntas deben buscar que el estudiante de cuenta de las relaciones y propiedades de un objeto geométrico, y deben solicitarle al estudiante un tipo de justificación. (Molina et al, 2010).

media dado que Larios (2002) resalta la los mismos elementos mencionados por el grupo que contribuyen a conformar un entorno favorable para el aprendizaje de la demostración, tal es el caso de las interacciones sociales, la situaciones problema y el uso de software de geometría.

A propósito de la investigación anterior, Mariotti (1997) señala en las investigaciones realizadas en el contexto escolar que los mismos elementos que contribuyen a conformar un entorno favorable para aprender a demostrar: la interacción social y el uso de software de geometría dinámica. Cabe señalar que los resultados de las investigaciones realizadas por Mariotti (1997**)** evidencian que los estudiantes muestran una actividad matemática centrada en la producción de teoremas. Para los autores un teorema es un constructo que consta de tres elementos: enunciado, demostración y teoría en la que enmarca la demostración. Este artículo es de interés dado que la noción de teorema propuesta por esta autora será útil para entender lo que significa producir teoremas en la escuela.

Boero (1999), bajo la concepción de teorema de Mariotti (1997), afirma que en la escuela es posible involucrar a los estudiantes en una cultura de construcción de teoremas. Señala que ésta se enmarca en el desarrollo de competencias inherentes a la producción de una conjetura y su posterior comprobación. Cuando los estudiantes están inmersos en una cultura de producción de teoremas, el autor manifiesta que es posible distinguir algunos aspectos relevantes de las actividades matemáticas que desarrollan, las cuales enuncia como seis fases: producción de una conjetura, formulación del enunciado de acuerdo con convenciones culturales compartidos, exploración del contenido (y los límites de validez) de la conjetura, selección y encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva, organización de la cadena de argumentos en la forma de una prueba que es aceptable desde el punto de vista de los estándares matemáticos vigentes, y aproximación a la prueba formal. Es importante señalar que estas fases se constituirán en las categorías con las cuales se realizará el análisis de la producción de los estudiantes en el marco de este estudio.

Dado que las investigaciones centradas en el aprendizaje de la demostración marcan una fuerte tendencia por usar la geometría dinámica, decidimos revisar algunos estudios que den cuenta de sus ventajas. Para nuestros fines investigativos los documento revisados fueron Mariotti (2006) y Larios (2006) quienes describen algunas ventajas de utilizar el software de geometría dinámica en la clase de matemáticas. Entre ellas se destacan la exactitud que provee al realizar construcciones y el dinamismo que proporciona a las construcciones geométricas a través del arrastre. Estas características facilitan el trabajo de procesos empíricos previos a la demostración, como lo es la visualización y la exploración de conjeturas. Además de estas ventajas, se resalta la que menciona Hanna (2000) quien describe cómo se potencia el proceso de visualización en los estudiantes al hacer uso de Cabri.

1.4.2 ESTUDIOS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA CUYA POBLACIÓN ES ESTUDIANTES EN EDAD EXTRAESCOLAR

La revisión de algunos antecedentes en educación matemática nos permite manifestar que existe una carencia de estudios centrados en población de adultos. Según Ávila (1999), no es necesario realizar una investigación que dé cuenta de la cantidad de estudios en educación matemática con este tipo de población, dado que existen indicadores que permiten estimar este valor. Un ejemplo de estos indicadores está en el número reducido de producciones de artículos de revistas o memorias de los congresos, ya que éstos enmarcan los temas e intereses vigentes en educación matemática de la época en que fueron realizados. Específicamente, manifiesta que este indicador muestra que el número de producciones enfocadas en educación matemática para adultos es muy reducido en la década de los ochenta y noventa. Además, afirma que una de las principales razones del estancamiento de la investigación en población de adultos, es la escasez de recursos que las instancias financieras invierten en éste tipo de investigaciones, puesto que las personas que gestionan estos recursos ven prioritario otro tipo de población como la de los jóvenes.

La revisión de antecedentes evidencio, además, que en los últimos años existe un número de investigaciones en educación matemática centrados cuya población es la de adultos enmarcadas en una metodológica denominada etnomatemática (Elguero, 2009; Agüero, 2006). Las investigaciones en etnomatemática centran su interés en las matemáticas que una comunidad especifica (tribu indígena, modistas, pintores, campesinos, entre otras) puede desarrollar en sus labores cotidianas, por ejemplo, al hacer compras, presupuestos de gastos, realizar mezcla de pinturas, al jugar, entre otras. Este tipo de investigaciones no son pertinentes para el presente estudio dado que, en primer lugar, se interesa por reportar las acciones de los adultos en su entorno natural, en el que no existe ningún tipo de intervención por parte de los investigadores. Y en segundo lugar, el trabajo de campo se realiza en entornos diferentes al salón de clases, por ejemplo sus sitios de trabajo, hogares, barrios, tiendas, entre otras.

Teniendo en cuenta que existen pocas investigaciones en educación matemática que involucran una población adulta, consideramos que nuestro estudio es pertinente dado que provee datos que permiten caracterizar la práctica de demostrar en esta población particular.

No obstante, encontramos dos investigaciones que tratan sobre la enseñanza de las matemáticas para población de adultos en un contexto escolar. Uno de estos trabajos es el de Bastán y Elguero (2005) quienes reseñan una experiencia en clase de matemáticas con estudiantes adultos que nivelan la educación básica. Los autores señalan que aunque los estudiantes en edad adulta tienen las mismas capacidades de aprendizaje que un estudiante adolescente, la heterogeneidad del grupo y sus deberes como adulto (ocupaciones laborales y familiares, conocimientos previos, expectativas que tienen a futuro con los estudios que realiza) afectan su proceso de aprendizaje. Esto implica que las estrategias metodológicas de clase tienen unas características específicas, y aunque esta investigación no las describe, señala que las clases de matemáticas deben promover la abstracción, generalización y resolución de problemas. Estas acciones permiten que los estudiantes adultos amplíen sus expectativas respecto a lo educativo y logren superación desde el punto de vista cognitivo.

Por otro lado, Barrio de la Puente et al. (2006) propone el uso de software educativos para la enseñanza de algunos temas de geometría y estadística. Los resultados reflejan que los estudiantes tienen una actitud positiva y más receptiva hacia las matemáticas. Sin embargo, recomiendan ser cuidadosos con este tipo de población, dado que características como la heterogeneidad implica realizar fases de inducción sobre el uso de este tipo de software. Así se evitará dificultades a nivel técnico que pueden entorpecer el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Tanto el documento de Bastán y Elguero (2005) como el de Barrio de la

Puente et al. (2006), son estudios que permiten identificar características a tener en cuenta cuando se trabaja con población adulta (la heterogeneidad del grupo puede afectar los procesos de enseñanza-aprendizaje, y la importancia de realizar fases de inducción al implementar software de matemática) que se deben tener en cuenta en el trabajo de campo que se desarrollará en este estudio.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

En este capítulo daremos cuenta de los referentes teóricos que sustentan esta propuesta. Primero describiremos nuestra postura frente a lo que creemos debe ser la demostración en la escuela, centrándonos en la importancia de reconocer esta práctica como un proceso y no sólo como un producto; en segundo lugar, daremos cuenta del constructo *actividad demostrativa* del grupo Æ•G (Perry et al., 2006), con la finalidad de precisar lo que significa la demostración como proceso; en tercer lugar, explicaremos lo que significa producir teoremas en el marco de la actividad demostrativa y las fases de dicha producción, basándonos en los trabajos de Boero (1999) y Mariotti (1997; 2006) sobre la producción de teoremas; en cuarto lugar, haremos una descripción de un entorno favorable para aprender a demostrar, haciendo alusión a lo que consideramos un ambiente de actividad demostrativa desde la postura del grupo Æ•G; en quinto y último lugar, expondremos algunas ideas acerca del potencial de la geometría dinámica en el aprendizaje y enseñanza de la demostración.

2.1 LA DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS Y EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

La demostración es una práctica propia de las matemáticas, fundamental para la construcción y validación del conocimiento en esta ciencia. Según Sáenz (2002), esta práctica, desde el punto de vista matemático, se constituye en un discurso deductivo que parte de una hipótesis, con base en unos referentes teóricos y reglas de razonamientos válidas, plantea una conclusión o tesis, la cual, mediante dicho discurso, es validada y adquiere el estatus de verdad matemática. Desde esta perspectiva, la demostración se considera como un tipo de justificación que da validez a una afirmación y que es necesaria para ampliar el conocimiento matemático.

El carácter de validación que se le atribuye a la demostración hace que ésta se vea como un producto cuya finalidad es la justificación de un resultado con base en unas reglas preestablecidas por la comunidad de matemáticos. La demostración desde el punto de vista matemático se caracteriza por ser una cadena deductiva que respeta reglas de deducción. Dicha cadena no exhibe la manera en la que fue elaborada, es decir, descontextualiza el proceso de descubrimiento de la proposición que se demuestra y el razonamiento seguido para construir su justificación. Desde el punto de vista de la educación matemática, tal presentación de la demostración solamente destaca su función de validación dejando de lado otras funciones de ésta, tales como: explicación, sistematización, comunicación y descubrimiento (de Villiers, 1993)[3], las cuales están inmersas en la práctica de los matemáticos y se ocultan en sus resultados. Sáenz (2002), plantea que los descubrimientos de los matemáticos son escalonados y atienden más a lo empírico que a lo formal, pero es este último aspecto el que prevalece en lo que respecta a la presentación sistemática de resultados. Una consecuencia de reducir la demostración a un proceso de validación es enseñar ésta como un producto acabado que tiene como finalidad reconstruir los pasos que ha realizado el experto en matemáticas para validar una verdad en el marco de esta ciencia. La visión exclusiva de la demostración como método de validación, deja de lado los procesos empíricos en la enseñanza de la misma y niega la posibilidad de producir justificaciones propias (formales e informales) en el proceso de aprendizaje de la demostración.

La enseñanza de la demostración, desde el punto de vista formal, propende obstáculos en el proceso de aprendizaje de la misma porque oculta acciones propias del quehacer matemático, que motivan la elaboración de demostraciones formales y rigurosas en el

[3] Según de Villiers (1993) afirma que la demostración debe cumplir otras funciones además de la validación, tales como: *explicación* cuando el estudiante tiene un convencimiento de que algo es cierto, necesita profundizar en un discurso en el cual diga por qué es así y no de otra manera; *sistematización* cuando se plantean varios resultados dentro de un sistema de axiomas o teoremas*; comunicación,* cuando se busca la transmisión del conocimiento ya sea por resultados matemáticos entre profesionales, entre profesores, entre profesores y estudiantes, y entre ellos mismos; y de *descubrimiento,* cuando existe la invención de nuevos resultados.

marco del discurso matemático. Según Larios (2002) y Crespo (2005) la enseñanza de la demostración como un producto acabado sujeto a una presentación formal y rigurosa, no motiva la necesidad de la prueba en la escuela, ya que para los estudiantes no tiene sentido justificar algo dado, visualmente obvio o algo que han comprobado con ejemplos particulares. En este sentido, la demostración no contribuye a la comprensión de las matemáticas sino que se convierte en un ritual que consiste en reproducir una serie de pasos que no evidencian la manera como se ha construido el conocimiento matemático.

Teniendo en cuenta que la presentación formal de la demostración en el aula no favorece el aprendizaje de la misma, en el campo de la educación matemática se señala que para incluir esta práctica en la escuela se hace necesario ampliar la visión de ésta, dejando entrever que la demostración es un proceso y no solo un producto. Crespo (2005) manifiesta que es importante resaltar que la escuela no forma matemáticos, sino personas que necesitan comprender la manera de razonar en esta ciencia. Por ello, más que la importancia de la demostración en el sentido formal y riguroso de un matemático, en la escuela se debe atender al proceso que se sigue para descubrir y conjeturar lo que ha de ser demostrado e incentivar la necesidad de hacerlo. Así, en la enseñanza de la demostración, en el contexto escolar, debe cobrar importancia el razonamiento inductivo y las acciones empíricas que preceden el descubrimiento de una regularidad y la justificación de la misma.

Para Gutiérrez (2007), la demostración formal sólo es una manera sofisticada de justificación, pero no es la única forma de validación matemática. Por tanto, en la escuela se deben reconocer y aceptar otras maneras de justificar el conocimiento matemático que permitan aproximar a los estudiantes a la práctica de demostrar. Este autor manifiesta que en la actualidad, los educadores matemáticos que reconocen la importancia de aprender a demostrar en la escuela han coincidido en declarar que los estudiantes deben desarrollar habilidades de razonamiento deductivo a lo largo de su educación básica, dado que es este tipo de razonamiento el que a futuro les permitirá elaborar demostraciones formales.

Ibañes y Ortega (2005) manifiestan que los planteamientos de didactas de las matemáticas en relación con la importancia de la demostración en la escuela se corresponden con algunos sucesos de la historia de las matemáticas. En la historia de esta ciencia se muestra que nunca ha existido un acuerdo unánime acerca de los conceptos y procedimientos que se deben utilizar en una demostración. Inclusive se evidencia que a pesar de perseguir una rigurosidad cada vez más exigente en los procesos de validación, no ha sido posible alcanzar el rigor absoluto (Ibañes & Ortega, 2005). Según Moreno (1996), lo que ha enriquecido la construcción teórica de las matemáticas ha sido la multiplicidad de conceptos y procedimientos que fundamentan la teoría matemática, las diferentes justificaciones utilizadas para mostrar la validez de un resultado, así como los diferentes estilos y métodos de validación. Los modos de presentación de una demostración a través de la historia tienen algo en común, todos son producto de un "quehacer matemático" (Moreno, 1996) en el que subyace los procesos inductivos que se hacen invisibles en la presentación formal de una demostración y que contribuyen al convencimiento de lo que se desea demostrar. Según Larios (2002), en la escuela debe darse la oportunidad a los estudiantes de realizar procesos inductivos que los lleven a generalizar, a convencerse de lo que descubren y a sentir la necesidad de validar lo encontrado.

Reconocer la demostración como un proceso y no como un producto acabado implica comprender qué significa demostrar desde el punto de vista de un proceso e identificar las implicaciones que ello tiene en la enseñanza de la misma. Para explicar qué significa desmostar desde el punto de vista de un proceso, hemos tomado como referente el constructo de actividad demostrativa del grupo Æ•G, el cual describiremos en el apartado 2.2. En los apartados 2.3 y 2.4 aludiremos a las implicaciones que tiene la visión de la demostración como proceso en la enseñanza de la misma.

2.2 LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA EN EL ÁMBITO ESCOLAR

Las diferentes funciones que propone de Villiers (1993) para la demostración y la visión de esta práctica como proceso, nos ha inclinado a asumir la demostración como un proceso de validación y conjeturación. Con el objeto de precisar lo que entendemos por aprender a demostrar en un sentido procesual, en este apartado describimos el constructo *actividad demostrativa.*

El constructo actividad demostrativa es un referente teórico elaborado por el grupo de investigación Æ•G que incluye dos procesos: c*onjeturación y justificación*, los cuales, no necesariamente están desligados el uno del otro. El proceso de conjeturación se compone de las siguientes acciones: *visualizar, explorar, conjeturar* y *verificar*. Estas acciones son de tipo heurístico[4] y permiten a los estudiantes reconocer el contenido geométrico y las propiedades de los objetos geométricos subyacentes en un enunciado matemático.

La *visualización* es la acción por medio de la cual el estudiante identifica, percibe o evoca propiedades geométricas de una representación gráfica dada o construida. Esta acción le permite al aprendiz desconfigurar (aludir a las partes que componen la figura) y reconfigurar (mirar la figura como un todo) la representación dada[5], contribuyendo así al reconocimiento y caracterización de los elementos geométricos que la constituyen.

La indagación empírica por parte del estudiante sobre la representación gráfica, puede pasar de la simple observación o visualización, a una pesquisa que involucre procedimientos, tales como toma de medidas, hacer construcciones auxiliares, etc. Cuando la indagación del estudiante involucra otros modos de actuación distintos a la observación, que conducen a la manipulación de la figura, su proceder tiene el carácter de *exploración*. La acción de explorar propicia el estudio de casos particulares no sólo con la finalidad de identificar o establecer relaciones entre propiedades sino también con la intención de involucrase y atender al objetivo específico de la situación planteada (Perry, et al. 2006).

---

[4] Según Perry et al. (2006), la heurística se entiende como la actividad mental asociada con la resolución de problemas, específicamente con las estrategias que se utilizan para enfrentar una tarea para lo que hay definido un procedimiento de solución.

[5] Según MEN (2004), existen tres niveles de visualización: el *nivel global de precepción visual*, en el que se reconocen figuras prototípicas que se asocian con nombres de figuras geométricas; el *nivel de precepción de elementos constitutivos*, en el que se percibe la figura como constituida por elementos de una misma dimensión o dimensiones inferiores (desconfigurar), por ejemplo, las figuras bidimensionales pueden verse como formadas por figuras de la misma dimensión, unidimensionales (segmento) o de dimensión cero (punto). En el nivel de percepción de elementos constitutivos entran en juego dos aspectos que potencian la precepción: la *complementariedad* (reconfiguración) y el *solapamiento*, este último tiene que ver con el hecho de que las figura que reconocemos dentro de una configuración global comparten regiones de la figura original. El tercer nivel, el *nivel operativo de percepción visual*, está relacionado con las transformaciones visuales de la figuras. La manipulación visual de las figuras no necesariamente esta mediada por el discurso, un ejemplo de ello, son las pruebas sin palabras del teorema de Pitágoras. La visualización es una acción empírica, que en los distintos niveles le permite a los estudiantes percibir propiedades o características de las representaciones gráficas de objetos geométricos. Para efectos de este estudio solamente tendremos en cuenta los dos primeros niveles de visualización.

Tanto en la visualización como en la exploración, el estudiante tiene la oportunidad de reconocer algunas propiedades y relaciones geométricas de figuras específicas, que posteriormente se constituyen en una *generalización*, es decir, en enunciados generales que son producto de sus indagaciones empíricas alrededor de una situación determinada. Tal generalización se cristaliza en el enunciado de una conjetura a manera de proposición condicional.

Según Perry, et al. (2006), la satisfacción y el convencimiento personal del estudiante cuando plantea una hipótesis, lo conducen a la necesidad de generar una justificación de la misma. Los estudiantes, para asegurarse de la validez de su conjetura, pueden empezar por estudiar los posibles casos en los que ésta puede no cumplirse, realizando comprobaciones empíricas sobre la representación gráfica. Estas comprobaciones son actuaciones de *verificación*, que se dan cuando surge un cuestionamiento que suscita duda frente a la conjetura planteada o cuando se quiere ratificar una propiedad enunciada en ésta.

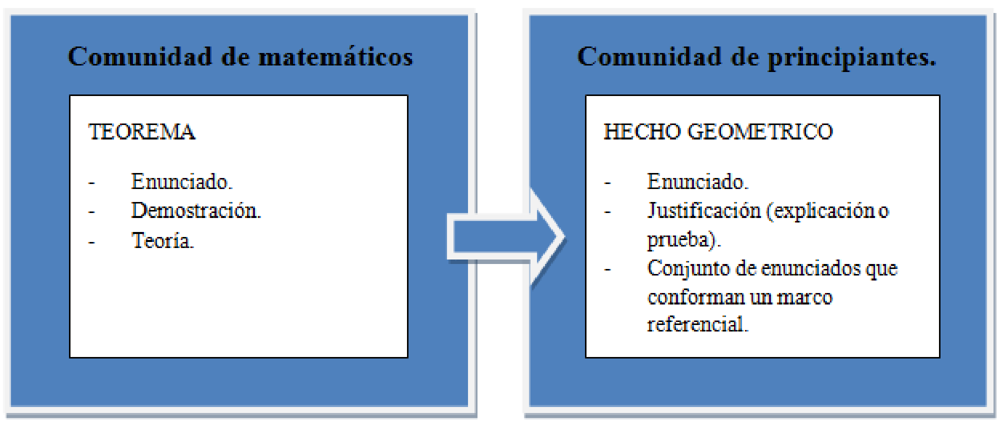
Cuando existe la plena seguridad de la veracidad de una conjetura dada, los estudiantes pueden proponer diversas vías de *justificación* (segundo proceso) de la misma: la *explicación*, la *prueba* o la *demostración formal*. La *explicación* se constituye en una acción de carácter empírico por medio de la cual el estudiante hace alusión a una figura para mostrar lo que en ella se ve y señalar posibles invariantes o propiedades observadas durante la exploración. En este modo de justificación, los argumentos de los estudiantes se apoyan en la evidencia. A diferencia de la explicación, la *prueba* se constituye en un modo de justificación en el que los resultados no se sustentan a través de una figura. La argumentación, desde el punto de vista de la prueba, se consolida en una justificación parcial en la que se realizan afirmaciones basadas en propiedades geométricas generales. Según Perry et al. (2006), las afirmaciones que pueden dar los estudiantes y que son indicios de la acción de probar, son aquellas fundamentadas en el conjunto de referentes estudiados o en las nuevas relaciones de dependencia encontradas en la figura, es decir, en términos de la prueba, los estudiantes pueden hacer uso de afirmaciones que no hacen parte del contenido geométrico estudiado en la clase. El uso de propiedades o definiciones no estudiadas previamente y la ausencia de una organización deductiva, es los que hace que la justificación no se constituya en una demostración formal. La *demostración formal*, como su nombre lo indica, es una acción mucho más rigurosa que las otras dos vías de justificación. Este tipo de justificación presenta una secuencia lógica de afirmaciones y razones, sustentadas en el referente teórico de la clase.

2.3 PRODUCIR TEOREMAS EN LA ESCUELA Y LAS FASES QUE CONLLEVA ESTA PRODUCCIÓN

Boero (1999) manifiesta que aprender a demostrar es involucrarse en una cultura de teoremas y teorías matemáticas, lo cual implica el desarrollo de competencias específicas inherentes a la producción de conjeturas y pruebas para las mismas con base en elementos del saber teórico. En este sentido, Boero al igual que el grupo Æ•G, atiende a una visión de la demostración como proceso, cuyo aprendizaje está ligado a la producción de conjeturas y justificaciones y en particular a la producción de teoremas.

Hablar de teoremas no sólo es referirse a enunciados que tienen el estatus de verdad matemática. Según Mariotti (1997) un teorema se constituye en la articulación de tres elementos en el campo teórico de las matemáticas: *afirmación* o *enunciado*, *demostración* y *teoría*. Para esta autora, un teorema matemático se caracteriza por estar inscrito en una teoría de referencia que contempla un conjunto de principios y reglas de deducción que permiten validar el enunciado mediante el cual se formula el teorema. Desde el punto de vista matemático, se demuestran "verdades" que adquiere validez en relación con una teoría especifica. Esta validez se obtiene de aceptar tanto la veracidad de las hipótesis como de los axiomas y reglas de inferencia establecidas (Mariotti, 2006). En este sentido, la definición propuesta por Mariotti es inherente a una construcción axiomática, rigurosa y formal de las matemáticas, la cual es afortunada en una comunidad de matemáticos pero no en una comunidad de principiantes, es decir, de personas que se están iniciando en el estudio de las matemáticas en un nivel no profesional.

Con respecto a lo anterior Mariotti (2006) señala que para los estudiantes inexpertos no es espontaneo llegar a una perspectiva teórica de las proposiciones matemáticas, lo que para los matemáticos es incuestionable y tácito (existencia y fiabilidad de un marco teórico en el que subyace la demostración de una afirmación), para los principiantes no lo es. Por tanto la idea de una verdad como teoría puede ser difícil de comprender. Esta afirmación no implica aceptar la imposibilidad de aproximar a los estudiantes al estudio de la demostración en un nivel de educación básica, más bien es una invitación a ser consientes de tal complejidad y a repensar la idea de teorema para aterrizarla al contexto escolar. En el siguiente diagrama planteamos una analogía entre los elementos que componen la definición de teorema propuesta por Mariotti (1997) y los elementos que están inmersos en el constructo de actividad demostrativa y que consideramos son próximos a la comprensión de teorema en el contexto escolar.



Esquema 1. *Caracterización de teorema en la escuela.*

Es claro que en la escuela no formamos matemáticos, por tanto, no construimos teorías matemáticas ni demostraciones formales y rigurosas como las que elaboran los expertos de esta ciencia. Pero si formulamos conjeturas que se pueden justificar con base en un sistema teórico local (conjunto de enunciados alrededor de un concepto, los cuales pueden estar conectados o aislados en el mundo de las matemáticas escolares) o en reglas sociomatemáticas que determinan los modos de validación en la clase; la diferencia entre la actividad de los matemáticos y la de los estudiantes a nivel escolar, es la que consideramos motiva la propuesta de una analogía como la del diagrama anterior. El reconocer que en la escuela no se producen teorías y demostraciones a un nivel formal, nos permite señalar que en el campo de la educación básica en matemáticas, en general no es posible hablar de teorema en el sentido estricto de Mariotti, lo cual no implica el abandono de la enseñanza de la demostración en esta nivel de formación más bien supone el reconocimiento de la proximidad teórica de las matemáticas que pueden hacer los estudiantes en la escuela: *enunciado* o *conjetura*, *justificación* y *conjunto de enunciados que conforma un marco referencial*.

El reconocimiento de dicha aproximación teórica a las matemáticas en el contexto escolar, nos conduce a no adoptar el término teorema para hacer referencia a aquellos enunciados que adquieren el estatus de verdad matemática dentro del aula sino más bien a utilizar el de "*hecho geométrico"*. En vista de que a nivel escolar se hace una aproximación teórica a las matemáticas a partir de una conjunto de enunciados que no necesariamente pertenecen a un sistema teórico explícito para los estudiantes, consideramos conveniente no precisar un estatus teórico para las proposiciones matemáticas estudiadas en el aula; es decir, no discriminar entre aquellas proposiciones que serían teoremas y aquellas que serían postulados sino optar por denominarlas todas como *hechos geométricos*. La razón de esta decisión es de carácter didáctico y está asociada a la construcción del marco referencial. Así y en correspondencia con el grupo *Æ•G* existen sólo dos tipos de enunciados en dicho marco: hechos geométricos y definiciones. Si distinguiéramos entre postulado y teorema ello implicaría establecer su diferencia y respetar su estatus en el proceso de construcción de tal marco referencial, lo que conduciría a tener que demostrar todo aquello a lo que se denomine teorema; no obstante, ello no siempre es posible en un contexto escolar, dado que hay justificaciones de proposiciones matemáticas que requieren de elementos teóricos con los que aún no cuentan los estudiantes que se están iniciando en el proceso de aprender a demostrar. Reconocer que no siempre es posible demostrar todo lo que se conjetura y que hay proposiciones matemáticas que sin ser justificadas son necesarios para evolucionar en la construcción del marco referencial, nos conduce a proponer para el caso de la escuela los dos tipos de proposiciones matemáticas antes mencionadas, definiciones y hechos geométricos; estos últimos ponen bajo el mismo estatus a postulados y teoremas inicialmente. Se espera que cuando los estudiantes ya tengan una mayor experiencia y cuenten con un marco referencial más amplio puedan distinguir y decidir cuándo es teorema o postulado un hecho geométrico. En este sentido, el hecho geométrico será un enunciado que puede tener una justificación con carácter de explicación, prueba o demostración (lo que usualmente sería teorema) o no tener justificación teórica (lo que sería un postulado). La aceptación de alguno de estos modos de validación, dependerá de la reglas sociomatemáticas establecidas en la clase, del alcance del marco referencial construido y de la complejidad teórica que tenga la justificación del hecho geométrico para el grupo particular que lo está estudiando.

Adoptar el término de hecho geométrico para referirnos a las verdades a nivel escolar y ser partidarios de los planteamientos de Boero (1999), nos permite señalar que ahora el aprender a demostrar está ligado a iniciar a los estudiantes en una cultura de hechos geométricos, es decir, a involucrarlos en la producción de conjeturas y justificaciones (actividad demostrativa) en el contexto escolar. Según Boero (1999) en tal involucramiento es posible distinguir algunos aspectos relevantes de las actividades matemáticas concernientes a la producción de hechos geométricos (en palabras de Boero, teoremas). Este autor enuncia estos aspectos como fases en la producción de conjeturas y pruebas matemáticas. Estas fases son:

I) Producción de una conjetura, lo cual incluye la exploración de la situación problema, identificación de "regularidades," reconocimiento de condiciones bajo las cuales éstas ocurren, identificación de argumentos para la plausibilidad de la conjetura producida, etc.

II) Formulación del enunciado de acuerdo con convenciones culturales compartidas.

III) Exploración del contenido (y los límites de validez) de la conjetura; elaboraciones heurísticas, semánticas (y aún formales) acerca de las relaciones entre hipótesis y tesis; identificación de argumentos apropiados para la validación, relacionados con la teoría de referencia, y ponderación de relaciones posibles entre ellos

IV) Selección y encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva, frecuentemente bajo la guía de la analogía o en casos específicos y apropiados, etc.

V) Organización de la cadena de argumentos en la forma de una prueba que es aceptable desde el punto de vista de los estándares matemáticos vigentes. Esta fase conduce a la producción de un texto para publicación.

VI) Aproximación a la prueba formal.

De acuerdo con Boero (1999), las seis fases mencionadas están interconectadas de manera no lineal en el trabajo de los matemáticos y son útiles para destacar momentos en la actividad matemática de los mismos. Dada la correspondencia entre el constructo de actividad demostrativa del grupo Æ•G y las fases de Boero, hemos escogido estas fases como nuestras categorías de análisis parta dar cuenta del involucramiento de los estudiantes en un ambiente de actividad demostrativa. En el capítulo correspondiente a las categorías de análisis ahondaremos en este aspecto, y precisamos tal correspondencia.

2.4 UN ENTORNO FAVORABLE PARA APRENDER A DEMOSTRAR.

Paralelo al constructo de actividad demostrativa, el grupo de investigación Æ•G ha desarrollado un enfoque metodológico para la enseñanza de la demostración en geometría plana. Tal enfoque se enmarca en una perspectiva sociocultural en la que profesor y estudiantes conforman una comunidad de clase con un objetivo común, construir colectivamente un *sistema axiomático local*[6]. Cada estudiante, como miembro de la clase, participa en la ampliación de este sistema, ya sea proponiendo conjeturas o involucrándose en la demostración de las mismas. Tal participación implica un acto social dado que las conjeturas deben ser aceptadas y las demostraciones construidas en el marco de la comunidad.

Bajo dicho enfoque, aprender a demostrar significa participar de la actividad demostrativa que se desarrolla el curso. Según Perry et al. (2008) aprender a demostrar es poder participar cada vez de manera más *genuina*, *autónoma* y *relevante* en el marco de la comunidad de la clase. Genuina en el sentido de ser una participación con una motivación interna que tiene como objetivo aportar a la construcción colectiva de la comunidad clase. Autónoma, en el sentido de evocar razones propias para fundamentar lo que se dice y lo que se hace, sin estar influenciadas por una autoridad. Relevante porque realiza aportes que son pertinentes y que son valiosos aún si son incorrectos. Molina et al. (2010) señalan que dada la importancia de la participación en el proceso de aprender a demostrar, se deben establecer normas sociomatemáticas que regulen su uso, tales como: escuchar lo que dicen los demás miembros de la clase, respetar el uso de la palabra, establecer que toda

[6] El *Sistema axiomático local* es un conjunto conformado por términos no definidos, enunciados (i.e. postulados, y teoremas) a través de los cuales se hace afirmaciones sobre los objetos involucrados en el tema, y las relaciones lógicas entre ellos. Por *sistema axiomático local* se entenderá un sistema axiomático referido a un núcleo conceptual, en particular, vinculado con el cuerpo teórico ya construido (Molina et al., 2010). Vale la pena resaltar que en nuestro caso hablaremos de la construcción de un marco referencial.

contribución es importante y aclarar que cualquier participación es esencial para generar ideas útiles aunque sean erróneas, etc.

En el enfoque metodológico propuesto por el grupo *Æ•G*, se resaltan tres elementos que son importantes para crear un entorno favorable para aprender a demostrar: *las situaciones problema propuestas a los estudiantes*, *la interacción social de la clase* y *el uso de la geometría dinámica*. Dado que la formulación de conjeturas es una práctica importante de la actividad demostrativa, las *situaciones problema* que se proponen a los estudiantes deben ofrecerles oportunidades para que se involucren en tal práctica. Estas situaciones deben propiciar experiencias de carácter empírico que conduzcan a la comprensión de la situación, a conjeturar y a buscar una justificación. Tales situaciones deben proponerse a los estudiantes, quienes trabajan en pequeños grupos y con el apoyo del software de geometría dinámica, con el fin de propiciar la interacción social entre los miembros de la clase. Las soluciones a las situaciones deben darse a conocer mediante una puesta en común en el marco de la clase, con el propósito de permitir a los estudiantes comunicar sus ideas y precisarlas en enunciados. Las soluciones dadas por los estudiantes se constituyen en materia prima útil para establecer un hecho geométrico relacionado con la situación propuesta. En este sentido, es a partir de las contribuciones de los diferentes miembros de la comunidad que se logra establecer un hecho geométrico y demostrarlo, lo cual significa que es responsabilidad de toda la comunidad culminar exitosamente la actividad.

La formulación de enunciados puede estar precedida por dos tipos de interacciones en el aula: la *conversación instruccional* y la *conversación matemática*. La *conversación instruccional* hace referencia a la interacción profesor-estudiante. El profesor, quien se considera el participante experto, escucha las soluciones de los estudiantes e interactúa con ellos, con la intención de conseguir que ellos precisen sus ideas, o por el contrario, que las descarten cuando no son útiles para lo que se pretende desarrollar en la clase. La *conversación matemática*, emerge en el marco del trabajo en grupo y en la puesta en común, específicamente cuando los estudiantes discuten sobre un tema matemático. En este tipo de discusiones los estudiantes manifiestan sus puntos de vista, los cuales son escuchados, interpretados, modificados y aceptados (o rechazados) por los demás miembros del grupo. El aval o rechazo de la comunidad posibilita la construcción grupal de una solución para la situación propuesta.

Como se dijo anteriormente, la solución de las situaciones debe estar apoyada en el uso de la geometría dinámica, la cual juega un papel importante dentro del enfoque metodológico que propone el grupo Æ•G, dado que se constituye en el instrumento que permite a los estudiantes llevar a cabo experiencias de tipo empírico que favorecen la interacción social entre los miembros del grupo (Perry et al., 2008). Dada la importancia de la geometría dinámica en el proceso de aprender a demostrar, hemos optado por ahondar en este aspecto en el siguiente apartado (2.4.1). Esto con miras a señalar el potencial de la geometría dinámica en relación con la emergencia de las acciones de la actividad demostrativa.

2.4.1 LA GEOMETRÍA DINÁMICA COMO HERRAMIENTA QUE FAVORECE EL APRENDER A DEMOSTRAR

En los últimos años diversas investigaciones sobre el tema de la demostración han coincidido en la elección de ambientes de geometría dinámica como entornos favorables para el desarrollo del razonamiento geométrico (Mariotti, 2006). Según Hanna (2000), las capacidades gráficas de este tipo de software no sólo ha impulsado la exploración en matemáticas y la inclusión de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las mismas, sino que también ha alentado a los estudiantes a conjeturar y probar en geometría.

Motivados por el potencial que diferentes autores le atribuyen al software de geometría dinámica para la enseñanza y el aprendizaje de la geométrica y en particular de la demostración (Perry et al., 2008; Hanna, 2000; Mariotti, 1997; Gutiérrez, 2005), hemos optado por utilizar este tipo de software en nuestro estudio, con la finalidad de identificar cómo la geometría dinámica contribuye a que estudiantes en edad extraescolar se involucren en los procesos de actividad demostrativa. Específicamente, estamos interesados en el uso del software de geometría dinámica *Cabri Geometre* (Cabri), dado que es el software utilizado por el grupo Æ•G en su innovación para la enseñanza de la demostración en geometría.

Según Mariotti (1997) son dos las características que se le atribuyen a Cabri en relación con la geometría euclidiana: (i) preserva una correspondencia entre las herramientas del software y las propiedades geométricas básicas, y (ii) permite interactuar con los objetos geométricos a través de la herramienta arrastre dotando de dinamismo a la geometría. En relación con la primera característica, Perry et al. (2008) manifiesta que los principios que se utilizaron en el diseño de Cabri se corresponden con los postulados de la geometría euclidiana, hecho que crea un vinculo entre las herramientas utilizadas en la construcción de una figura y sus propiedades geométricas. Los pasos que se siguen para realizar una construcción en Cabri se corresponden con las propiedades y relaciones geométricas de los elementos que la componen.

En cuanto al dinamismo que proporciona Cabri al estudio de la geometría euclidiana, Laborde (2000, citada por Mariotti, 2006), señala que ésta es una característica que hace que este software se convierta en una herramienta que potencia el aprendizaje de la geometría por encima del lápiz y el papel, debido a que permite articular acciones de visualización y conjeturación, a través de la herramienta arrastre. El arrastre permite modificar los objetos geométricos de una figura construida en Cabri y evidenciar que tales objetos conservan todas sus relaciones geométricas, algo que no sucede con la geometría estática de lápiz y papel, en la que los objetos geométricos se representan a través de la experiencia perceptual y de hechos que visualmente no se relacionan (Laborde 2000, citada por Mariotti, 2006). Adicional a las posibilidades de movimiento y transformación que ofrece la herramienta arrastre, Cabri cuenta con herramientas que permiten tomar medidas exactas y obtener representaciones precisas de los objetos geométricos, lo cual amplía su potencial frente a la geometría estática.

Las características atribuidas a este tipo de software permiten a los estudiantes experimentar y explorar, a través de diferentes modalidades de arrastre[7], múltiples ejemplos o casos particulares de objetos que se construyen en este entorno, permitiéndoles visualizar

[7] En Larios (2006) y Mariotti (2006) se realiza una descripción de las diferentes modalidades de arrastre que se pueden llevar a cabo con le uso de la geometría dinámica. Dado que no es objeto de nuestro trabajo realizar un análisis de los tipos de arrastre, no haremos un recuento de los mismos en el presente documento.

distintas representaciones gráficas de una misma figura geométrica, para identificar e inferir propiedades invariantes de la misma y establecer generalidades (Christou et al., 2004). Adicional a la exploración y reconocimiento de patrones invariantes, la herramienta arrastre posibilita la emergencia de argumentos y justificaciones en el marco de la práctica de aprender a demostrar. Según Mariotti (2006), en un entorno como Cabri, el arrastre ofrece a los estudiantes una fuerte evidencia perceptual de la veracidad de una propiedad y aunque esto no asegura que los alumnos se vean inmersos en una perspectiva teórica de la demostración, en términos pragmáticos esta herramienta proporciona un contexto para una cultura de preguntas acerca del por qué una construcción funciona. En otras palabras, Cabri puede generar un espacio propicio para la emergencia de justificaciones ya sean empíricas (explicación) o teóricas (pruebas o demostraciones) en el aula. En este sentido, el software de geometría dinámica se constituye en una herramienta útil para ofrecer una visión de la demostración como proceso, dado que propicia acciones de visualización, exploración, generalización, verificación y justificación, las cuales hacen parte de las funciones de la demostración en la práctica matemática (Hanna, 2000) y de las acciones de la actividad demostrativa (Perry et al., 2008).

El potencial que tiene la acción de arrastre en el entorno de la geometría dinámica, como se ha señalado, no se reduce a sus posibilidades de exploración. Para Mariotti (2006), su potencial es mucho más amplio, dado que favorece el desarrollo del pensamiento deductivo. Esta autora señala que el arrastre pone en evidencia las relaciones de dependencia entre los objetos involucrados en una construcción, puesto que, se observa cómo del movimiento de un objeto depende (i) el comportamiento de los demás objetos involucrados en la construcción y (ii) las propiedades invariantes de los mismos. La evidencia de tal dependencia Mariotti (2006) la expresa manifestando que, en el entorno de la geometría dinámica, la dependencia del movimiento se corresponde con la dependencia que hay entre las propiedades de los objetos geométricos involucrados en la construcción. Tal dependencia exhibe el vínculo entre las herramientas utilizadas en la construcción y las propiedades de los objetos involucrados en la misma. Según esta autora, tal relación de dependencia puede pasar inadvertida en el proceso de construcción pero es evidente ante la acción de arrastre y es la interpretación de la misma la que conduce a la producción de conjeturas y justificaciones matemáticas.

Los entornos de geometría dinámica favorecen el reconocimiento la producción de conjeturas en el sentido que permiten reconocer el antecedente y el consecuente de las mismas. Mariotti (2006) señala que las relaciones declaradas en la construcción se constituyen en las hipótesis, y las propiedades derivadas de ellas, que aparecen como invariantes ante el modo de arrastre se convierten en las posibles tesis. En conclusión, las conjeturas en un ambiente de geometría dinámica emergen de la interpretación de dependencia entre las propiedades que se utilizan en la construcción y los invariantes identificados mediante la acción de arrastre.

El arrastre no sólo facilita la producción de conjeturas también contribuye a la verificación y justificación de las mismas. Larios (2006) señala que esta herramienta (específicamente el arrastre de prueba) no solo permite deducir patrones sino que también permite verificar la permanencia de las relaciones geométricas descubiertas o construidas. El arrastre se constituye en un criterio de validación de una conjetura en el entorno de la geometría dinámica, en el sentido de que revela la veracidad de la misma si y solo si las propiedades de la construcción se mantienen ante la acción de arrastre (Mariotti, 1997). Para De Viliers (2003, citado por Mariotti, 2006) la función de verificación, emerge en el entorno de geometría dinámica cuando se busca constatar la veracidad de una proposición o cuando se busca confirmar la validez de una construcción. Para este autor, el convencimiento de que algo es verdad es lo que impulsa a la búsqueda de la prueba, en este sentido, pareciera que el criterio de validación que proporciona el arrastre motiva a los estudiantes a buscar argumentos que justifiquen los invariantes que observan.

Aún cuando existen dudas en relación con la contribución de la geometría dinámica a la producción de justificaciones matemáticas y existen investigaciones que indican que a través del uso de este tipo de software se puede vincular a los estudiantes al mundo teórico de la geometría. Por ejemplo, Jones (2000) señala que en el entorno de la geometría dinámica es posible motivar a los estudiantes a generar explicaciones sobre la base de las relaciones lógicas entre propiedades. Siguiendo con la misma idea, Hadas, Herschkowitz &

Schwarz (2000; citados por Mariotti, 2006), manifiestan que en ambientes de geometría dinámica la dialéctica entre los datos empíricos y la conjetura pueden conducir a los estudiantes a experimentar contradicción e incertidumbre, abriendo el camino hacia la necesidad de explicaciones que superen la evidencia empírica. Pero la emergencia de justificaciones no sucede solamente con el uso de Cabri, es necesario generar un ambiente de clase en el que se dé el espacio para que los argumentos surjan. Laborde (2000; citada por Mariotti, 2006), manifiesta que se necesita organizar un entorno adecuado que provoque la necesidad de la prueba. Es aquí donde adquiere significado otro de los elementos del enfoque metodológico del grupo Æ•G: la interacción social en la clase. Para Mariotti (1997), la evolución de la evidencia empírica a las justificaciones dentro de un sistema teórico se da cuando se exige explicar el razonamiento seguido en la solución de una tarea a los demás miembros de la clase y cuando las discusiones en el aula se direccionan a la búsqueda de razones que justifiquen por qué una conjetura o construcción es aceptable bajo unas reglas que en el marco de la clase se reconocen como validas.

CAPÍTULO 3

DISEÑO METODOLÓGICO

El presente capítulo da a conocer el proceso llevado a cabo para la realización de este estudio. En particular describimos tres aspectos metodológicos de la presente investigación: tipo de investigación, características de la población cuyas acciones fueron objeto de estudio y las etapas del estudio. El último aspecto consta de nueve etapas: revisión bibliográfica y construcción del marco teórico, diseño e implementación de la secuencia de situaciones propuestas a los estudiantes, selección del grupo de estudiantes, selección y descripción de las situaciones abordadas por los estudiantes, las cuales permitieron el análisis de su actividad, instrumentos de recolección de información, realización de transcripciones y ajustes de las mismas, diseño de las categorías de análisis, interpretación y análisis de la actividad de los estudiantes y escritura del informa final.

3.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

El interés por identificar las acciones de estudiantes en edad extraescolar que reflejan la emergencia de un ambiente de actividad demostrativa en el aula de matemáticas, enmarca nuestro estudio en una metodología de carácter cualitativo, descriptivo e interpretativo, que corresponde a un estudio de caso en la modalidad estructurada y no participante (Cohen & Manion, 1990). Es un estudio de caso cualitativo, descriptivo e interpretativo, porque buscamos describir las acciones que realiza un grupo de tres estudiantes cuando se enfrentan a una situación que indaga sobre las propiedades de los triángulos. Dichas acciones serán interpretadas y analizadas a la luz de las categorías de análisis que hemos establecido para este estudio, las cuales se presentan en el Capitulo 4. Es estructurado porque hemos utilizado la aproximación metodológica del grupo Æ•G con miras a involucrar a los estudiantes en un ambiente de clase específico en el que se desea observar la manera en la que los estudiantes interactúan y dan soluciones a situaciones particulares que se les proponen. Es no participativo porque el observador de los estudiantes, cuando están en medio de su actividad, no se involucra en ella.

3.2 CARACTERÍSTICAS DE LA POBLACIÓN CUYAS ACCIONES FUERON OBJETO DE ESTUDIO

El presente estudio se llevó a cabo durante el segundo semestre de 2010, en el Colegio Gabriel Echavarría de Madrid (Cundinamarca), con un grupo de 35 estudiantes, quienes se encontraban cursando los grados octavo y noveno de educación básica secundaria, en jornada nocturna. El rango de edades del grupo de estudiantes oscilaba entre los 24 y 57 años de edad. Su ocupación, en la mayoría de los casos, estaba relacionada con oficios operarios en empresas de flores, vidrios y panadería. Estos estudiantes estaban terminando sus estudios de secundaria porque las empresas en las que laboraban así lo exigían. Tal exigencia no implicaba un desinterés por parte de ellos en relación con su formación académica; más bien, como lo manifestaban ellos mismos, se constituía en una oportunidad para aprender, mejorar su calidad de vida e incluso para postularse a un ascenso laboral. En particular, se mostraban dispuestos e interesados en aprender matemáticas.

Uno de los aspectos característicos de este grupo de estudiantes fue la discontinuidad que presentaban en toda su experiencia escolar previa. Es decir, en la mayoría de los casos eran personas que habían dejado de estudiar formalmente por un largo periodo de tiempo (más de tres años) y que a habían ingresado a la institución, hace año y medio, a lo más. La discontinuidad escolar y el rango de edad enmarco al grupo de estudiantes en una población en edad extraescolar, cuyos individuos poseían experiencias académicas diferentes. El reconocimiento de la diversidad académica de los estudiantes nos condujo a indagar sobre sus experiencias en geometría, el manejo del computador y el uso de software en clase de matemáticas. Esto con el fin de recolectar información pertinente para el diseño de las situaciones problema que les propondríamos en el marco de este estudio.

La indagación sobre los aspectos citados, la realizamos con base en tres fuentes: plan de estudios de la institución, las respuestas a un cuestionario propuesto a los estudiantes y el testimonio de la profesora encargada de impartir la asignatura de matemáticas. El cuestionario (cuyas respuestas se dieron con lápiz y papel) contemplaba preguntas sobre: su edad, lugar de trabajo, razón por la que estaban nivelando el bachillerato, periodo de tiempo que habían dejado de estudiar, temas de geometría que habían abordado en su proceso de formación académica, habilidad con el manejo del computador y uso de software en clase de matemáticas.

La revisión del plan de estudios de la institución, nos arrojó como resultado un tratamiento nulo en geometría. En dicho plan no se contemplan temas relacionados con geometría para los grados de nivelación en secundaria. Por otro lado, la revisión del cuestionario nos permitió concluir que sus conocimientos geométricos estaban ligados al reconocimiento de representaciones gráficas de algunas figuras (triángulo, cuadrado, ángulo, circunferencia, entre otras.) que asociaban con sus respectivos nombres, con el uso de fórmulas para hallar áreas y perímetros, y con el uso de regla y transportador para medir la longitud de los lados de figuras dadas. Vale la pena señalar que aunque varios estudiantes mencionaron el uso de transportador, no especificaron en qué ocasiones lo utilizaban.

La revisión de dicho cuestionario, también nos permitió obtener algunas conclusiones en relación con su habilidad en el manejo del computador y el uso de software en clase de matemáticas. Según las respuestas de los estudiantes, éstos no tenían un alto dominio del computador dado que su uso era esporádico, en la mayoría de los casos exclusivo de la clase de informática (la cual tenía una intensidad horaria de 40 minutos semanales). En relación con el uso de software en clase de matemáticas, en general, manifestaron no haber utilizado tal recurso en el desarrollo de dicha asignatura. Esto último nos hizo conscientes de que el uso de la geometría dinámica en el entorno Cabri se constituiría en una experiencia nueva para ellos.

Según la docente encargada de la asignatura de matemáticas, quien es una de las autoras de este estudio, en los seis meses que llevaba orientando las clases, efectivamente no había abordado temas de geometría ni tampoco había incorporado el uso de las tecnologías en el aula de matemáticas. El testimonio de la profesora arrojó información adicional en relación con la metodología de clase. Según ella, la clase de matemáticas estaba enmarcaba en un modelo de enseñanza tradicional, en la que los estudiantes atendían a sus explicaciones y posteriormente realizaban los ejercicios propuestos por ella. En la dinámica de la clase no existía un espacio para que los alumnos comunicaran sus ideas y aportaran al conocimiento que se abordaba en el aula.

Consideramos que el haber obtenido información sobre las experiencias académicas de los estudiantes nos permitió tomar algunas decisiones en relación con el diseño y la implementación de las situaciones problema. En primer lugar, las propiedades y relaciones de los triángulos como eje temático de la implementación. En segundo lugar, nos llevó a diseñar e implementar situaciones que no sólo favorecieran el acercamiento de los estudiantes al conocimiento geométrico, sino que también fomentaran el trabajo en grupo, el uso de la geometría dinámica, la interacción social en la clase y la construcción de normas sociomatemáticas dentro de la misma. En el apartado 3.6.2 del presente capítulo describiremos de manera general las situaciones iniciales que se propusieron a los estudiantes y la dinámica de clase que se generó como consecuencia de su implementación. Dado que este trabajo corresponde a un estudio de caso, en el apartado 3.6.3, daremos cuenta de la manera cómo se seleccionó el grupo de estudiantes cuya actividad fue objeto de análisis en el presente estudio.

3.3 ETAPAS DEL ESTUDIO

El presente estudio se llevó a cabo mediante un proceso que se subdividió en diez etapas:

- ***Etapa 1.*** *Revisión bibliográfica y construcción del marco teórico.*
- ***Etapa 2.*** *Diseño e implementación de la secuencia de situaciones propuestas a los estudiantes.*
- ***Etapa 3.*** *Selección del grupo de estudiantes.*
- ***Etapa 4.*** *Selección y descripción de las situaciones cuyo tratamiento de los estudiantes permitieron el análisis de su actividad.*
- ***Etapa 5.*** *Instrumentos de recolección de información.*
- ***Etapa 6.*** *Realización de transcripciones y ajustes a las mismas.*
- ***Etapa 7.*** *Diseño de las categorías de análisis.*
- ***Etapa 8.*** *Interpretación y análisis de la actividad de los estudiantes.*
- ***Etapa 9.*** *Escritura del informe final.*

Las etapas mencionadas no fueron desarrolladas de manera secuencial, dado que a medida que íbamos avanzando en el desarrollo del proyecto, había momentos en los que trabajábamos paralelamente en dos o más de ellas. A continuación hacemos una descripción de cada una de las etapas citadas.

3.6.1 ETAPA 1. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA Y CONSTRUCCIÓN DEL MARCO TEÓRICO

Para la realización de este estudio se hizo una revisión bibliográfica centrada en dos aspectos: investigaciones asociadas a la enseñanza y aprendizaje de la demostración en el ámbito universitario y escolar, e investigaciones en educación matemática cuya población de estudio fueran estudiantes en edad extraescolar. Tal revisión nos permitió perfilar los referentes teóricos del estudio (actividad demostrativa, construcción de teoremas en la escuela), los elementos metodológicos de clase (entornos favorables para aprender a demostrar, importancia del trabajo en grupo, y el uso de la geometría dinámica para la construcción de dichos entornos) y las categorías de análisis del estudio (fases de Boero). También nos permitió recoger información sobre estudios cuya población está en edad extraescolar, la cual fue de utilidad en la implementación de las situaciones propuestas a los estudiantes.

3.6.2 ETAPA 2. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA SECUENCIA DE SITUACIONES PROPUESTAS A LOS ESTUDIANTES

El diseño e implementación de las situaciones propuestas a los estudiantes se subdividió en dos tipos de situaciones: *situaciones de inducción y situaciones encaminadas a establecer propiedades y relaciones de los triángulos*. Las situaciones de inducción fueron aquellas encaminadas a preparar a los estudiantes para acceder al estudio de la geometría euclidiana haciendo uso de la geometría dinámica y motivar su participación en la clase de geometría, particularmente en términos de la construcción del marco teórico de referencia de la clase. Con base en estas situaciones se establecieron las primeras nociones y definiciones: punto, recta, segmento, ángulo, rectas paralelas, rectas perpendiculares, puntos colineales, punto medio y relación de interestancia.

Las situaciones encaminadas a establecer propiedades y relaciones de los triángulos, se diseñaron con miras a construir un marco referencial que permitiera a los estudiantes conjeturar y justificar el hecho geométrico de la mínima distancia: *Sea L una recta y P un puntoque no pertenece a ella. Si $\overline{PQ} \perp l$ en Q y R es otro punto cualquiera de l, entonces,* $PQ < PR$. En este sentido se propusieron situaciones con miras a establecer las siguientes definiciones y hechos geométricos:

Definiciones	**Hechos geométricos**
Triángulo: Es la unión de tres segmentos cuyos extremos son tres puntos no colineales. *Triángulo isósceles*: Es un triángulo con dos de sus lados congruentes. *Triángulo equilátero*: Es un triángulo con tres lados congruentes. *Triángulo rectángulo*: Triángulo para el cual uno de sus ángulos es recto. *Triángulo escaleno*: Triángulo en el que cualquier par de lados no son congruentes. *Ángulo recto*: Es un ángulo cuya medida es de 90 grados. *Ángulo Obtuso*: Es un ángulo cuya medida es mayor de 90 grados. *Ángulo agudo*: Es un ángulo cuya medida es menor de 90 grados.	*Hecho geométrico del triángulo isósceles*: Si dos lados de un triángulo son congruentes entonces, los ángulos opuestos a estos lados son congruentes. *Hecho geométrico del triángulo equilátero:* Si los tres lados de un triángulo son congruentes, entonces todos sus ángulos son congruentes. *Hecho geométrico del triángulo rectángulo*: Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces los otros dos son agudos. *Hecho geométrico de la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo*: Si se suman las medidas de los ángulos de un triángulo entonces, su resultado es 180 grados. *Hecho geométrico*: Si en el ΔABC, la $m\angle A$ es mayor que $m\angle B$, entonces la medida de $\overline{BC}$ es mayor que la de $\overline{AC}$. *Hecho geométrico de la mínima distancia*: Sea l una recta y P un punto fuera de ella. Si $\overline{PQ} \perp l$ en Q y sea R otro punto cualquiera de l, entonces $PQ < PR$.

Tabla 1. *Definiciones y hechos geométricos propuestas en la fase de implementación.*

En el Anexo I se presenta una descripción todas de las situaciones propuestas a los estudiantes. Tal descripción da cuenta de cada situación propuesta así como de sus objetivos y de lo que esperábamos que hicieran los estudiantes al resolver cada una de ellas.

3.6.3 ETAPA 3. SELECCIÓN DE UN GRUPO DE ESTUDIANTES: SANDRA, MIGUEL Y DIEGO

La implementación de las situaciones se llevó a cabo en el marco de la clase, durante dos meses en 10 sesiones (de 40 min cada una). Desde el inicio de la implementación se indicó a los estudiantes que debían conformar grupos de tres o cuatro personas para trabajar en la clase de geometría. Tales grupos debían mantenerse en lo que restaba del año escolar. Dicha condición se planteó con la finalidad de observar el trabajo y la evolución de un mismo grupo en términos de las interacciones que se gestaban entre sus miembros, las estrategias que establecían para dar solución a la situación propuesta y el uso de Cabri como herramienta de exploración. Considerábamos que la observación de tales aspectos nos arrojaría información útil para seleccionar el grupo cuyas acciones serian objeto de estudio.

Durante el primer mes, observamos el trabajo de los diferentes grupos, logrando caracterizar la actividad de cada uno de manera general. Una visión global de lo que sucedía en la clase, a nuestro criterio, no se constituía en una pauta suficiente para seleccionar un grupo específico. Por ello decidimos definir criterios de selección ligados al propósito del presente estudio, que nos permitieran ser objetivos en la elección de tal grupo. Tales criterios se plantearon con base en los tres elementos que constituyen la aproximación metodológica propuesta por el grupo Æ•G y que consideramos esenciales para generar un entorno que favorece el aprendizaje de la demostración: las situaciones problema (aludiendo a estas en términos de las estrategias de solución propuestas por los estudiantes), la interacción social en la clase y el uso de la geometría dinámica. Los criterios establecidos, se exponen en la siguiente tabla:

Criterios en relación con:	**Criterios de selección del grupo**
Situaciones problema	• Plantean diferentes estrategias o métodos de solución (incluyendo las incorrectas) al momento de resolver las situaciones propuestas.
Interacción social	• Mantienen una buena comunicación entre los miembros del grupo. • Asumen diferentes roles durante el trabajo en grupo (el moderador de la discusión, el que maneja el software, el que registra la producción del grupo, etc.).´ • Participan activamente en la clase, mostrando disposición e interés frente a la misma.

	• Trabajan y discuten sobre temas matemáticos independientemente del aval del profesor.
Uso de la geometría dinámica	• Exhiben dominio y apropiación de las herramientas de Cabri en la exploración de las situaciones propuestas.

Tabla 2. *Criterios de selección del grupo de estudio.*

Dadas las condiciones de la población, durante la implementación se presentó una ausencia reiterada de algunos estudiantes a las clases, por motivos familiares o laborales. Esta nueva variable incorporó otro criterio de selección a los ya descritos en la tabla: *asistencia regular a las sesiones de clase*. Con base en los criterios mencionados, se realizó una observación más detallada de los grupos de la clase con el propósito de seleccionar aquel cuyas producciones se iban analizar. En este sentido, se escogió el grupo conformado por Sandra, Miguel y Diego.

El objetivo de seleccionar un grupo con base en los criterios establecidos, fue el de identificar aquellos estudiantes que participaban de la clase proponiendo y comunicando estrategias de solución con base en sus exploraciones en Cabri. Para nosotros era importante que ellos dieran a conocer sus ideas, porque de antemano considerábamos que sus afirmaciones y expresiones verbales nos permitirían identificar las acciones que darían cuenta de su involucramiento en un ambiente de actividad demostrativa. De igual manera era importante que manejaran el computador y el software, dado que las situaciones propuestas requerían de Cabri II Geometry para poder solucionarse.

3.6.4 ETAPA 4. SELECCIÓN DE LOS DATOS Y DESCRIPCIÓN DE LAS SITUACIONES CUYO TRATAMIENTO DE LOS ESTUDIANTES PERMITIERON EL ANÁLISIS DE SU ACTIVIDAD

La toma de datos y selección de episodios a analizar estuvo guiada por la intención de escoger dos situaciones cuya solución evidenciara continuidad en la actividad de los estudiantes. Particularmente, queríamos escoger dos situaciones que nos permitieran dar cuenta de razonamiento deductivo (en el sentido de que la solución de una de ellas sirviera a los estudiantes para justificar de manera teórica el resultado obtenido al solucionar la otra) por parte de los alumnos, alrededor de un hecho geométrico específico. En principio teníamos dos opciones: (i) las situaciones relacionadas con los hechos geométricos, *si en el* ΔABC *la* $m\angle A$ *es mayor que* $m\angle B$, *entonces la medida de* $\overline{BC}$ *es mayor que la de* $\overline{AC}$ y el de la mínima distancia antes referenciado, y (ii) las situaciones concernientes a los hechos geométricos de la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo y del triángulo rectángulo. Dado que no fue posible desarrollar por completo la situación relacionada con el hecho geométrico de la mínima distancia, nuestra primera opción quedo descartada y se optó por la segunda. Por tanto, decidimos analizar las acciones de los estudiantes al resolver las siguientes situaciones:

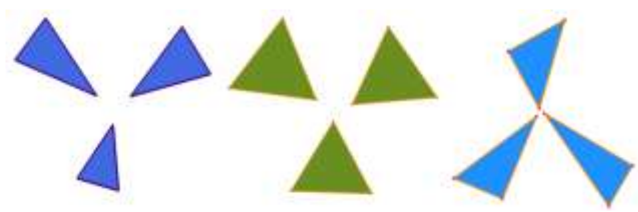
	Enunciado de la situación
Situación 1	*¿Para qué tipo de triángulo la suma interna de sus ángulos es 120? Formule una conjetura.*
Situación 2.	*a)* *Encuentre las propiedades invariantes que tienen en común los clanes de la tribu Chimú.* *b)* *Además de tener un ángulo de 90 qué otra característica tienen los ángulos de un triangulo rectángulo.* c) *Con base en las definiciones y hechos geométricos establecidos en clase justifique el hecho geométrico del triángulo rectángulo.*  Tribu Huari: Triángulos isósceles. Tribu Nazca: Triángulos equiláteros. Tribu Chimú Triángulos rectángulos

Tabla 3. *Enunciados de las situaciones problema*.

Tales situaciones se diseñaron y plantearon con miras a lograr que los estudiantes formularan y justificaran el hecho geométrico del triángulo rectángulo: *Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces los otros dos son agudos*. Esperábamos que tal hecho surgiera con la solución a la situación 2 y que se justificara con base en la conjetura que emergía al solucionar la situación 1. En este sentido, se propuso primero la situación 2 a los estudiantes, (ítem a y b), no al mismo tiempo pero si en ese orden, con miras a definir triángulo rectángulo (el marco referencial construido hasta el momento ya contaba con la definición de triángulo), ángulo recto, ángulo agudo y formular el hecho geométrico en cuestión. Posteriormente, se planteó a los estudiantes la situación 1 con el propósito de enunciar el hecho geométrico correspondiente a la suma de la medida de los ángulos de un triángulo. Por último, se propuso a los estudiantes retomar el hecho geométrico del triángulo rectángulo con miras a justificarlo con base en las definiciones y hechos geométricos establecidos en la clase (situación 2, ítem c), particularmente, el hecho geométrico de la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo. En la siguiente tabla se señalan las definiciones y hechos geométricos que se espera emergieran de la solución de cada situación.

	Enunciado de la situación	**Hechos geométricos y definiciones que se espera emergieran de la solución de cada situación.**
Situación 1	*¿Para qué tipo de triángulo la suma interna de sus ángulos es 120? Formule una conjetura.*	**Hecho geométrico**: Si se suman las medidas de los ángulos de un triángulo entonces su suma siempre es 180.
Situación 2	*a) Encuentre las propiedades invariantes que tienen en común los clanes de la tribu Chimú.*	**Definición de triángulo rectángulo**: Es un triángulo con un ángulo recto.
	b) Además de tener un ángulo de 90, ¿qué otra característica tienen los ángulos de un triangulo rectángulo?(Esta pregunta se propuso de manera oral a toda clase después de dar solución al ítem 2 de la situación 2)	**Definición ángulo recto**: Es un ángulo cuya medida es de 90 grados. **Definición ángulo agudo**: Es un ángulo cuya medida es menor de 90 grados. **Definición de ángulo obtuso**: En un ángulo cuya medida es mayor de 90 grados. **Hecho geométrico**: Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces los otros dos son agudos.

Tabla 4. *Definiciones y hechos geométricos inmersos en las situaciones problema.*

En relación con la situación 1 pretendíamos que los estudiantes construyeran un triángulo en el entorno de geometría dinámica Cabri, tomaran las medidas de sus ángulos y las sumaran (con lápiz y papel, dado que no conocían la herramienta calculadora de Cabri) para evidenciar lo que sucedía con la suma de dichas medidas. Suponíamos que los estudiantes iban a utilizar la herramienta arrastre para estudiar varios casos y a partir de ellos identificar que no existe triángulo cuya suma de las medidas de sus ángulos sea menor que 120 grados. Adicionalmente, esperábamos que identificaran que *la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180 grados*. Al solicitar una conjetura al respecto, esperábamos que los estudiantes escribieran un enunciado en el formato condicional "*si…entonces…*" (dado que éste era el formato utilizado para escribir los hechos geométricos en clase) que diera cuenta del invariante encontrado. Específicamente pretendíamos que plantearan una conjetura como la siguiente: *Si se suman las medidas de los ángulos de un triangulo entonces su suma siempre es 180 grados.*

Vale la pena resaltar que no esperábamos una justificación del hecho geométrico correspondiente a la suma de la medida de los ángulos de un triangulo, puesto que éramos conscientes de que su justificación requería de elementos teóricos (ángulos entre paralelas) no abordados en la clase. Por tanto esperábamos que los estudiantes lo avalaran teniendo en cuenta lo que veían en Cabri.

En relación con la situación 2, cada ítem de ésta tenía un propósito específico ligado a establecer y utilizar elementos teóricos que permitieran conjeturar y justificar el hecho geométrico del triángulo rectángulo. El ítem *a* se planteó con la finalidad de reconocer una propiedad invariante de los tres triángulos representados en Cabri (los cuales correspondían a tres clanes de la tribu Chimú). Específicamente esperábamos que los estudiantes exploraran los triángulos dados tomando las medidas de sus ángulos y sometiéndolos a la acción de arrastre, para luego reconocer que éstos tenían en común un ángulo cuya medida era de 90 grados. No se esperaba que los estudiantes formularan una definición , sólo pretendíamos que identificaran la propiedad invariante, buscando que ésta sirviera de base a la profesora para introducir la definición de triángulo rectángulo al marco referencial.

Dada la definición de triángulo rectángulo, se propuso a los estudiantes el ítem b de la situación 2. La solución a este ítem apuntaba a la formulación del hecho geométrico del triangulo rectángulo. Se esperaba que los estudiantes, a través de la acción de arrastre, identificaran que dos de los ángulos de un triángulo rectángulo miden menos de 90 grados. El reconocimiento de dicho invariante se utilizaría como pretexto para clasificar los ángulos según su medida e introducir las definiciones de ángulo recto, agudo y obtuso. Teniendo en cuenta el invariante encontrado por los estudiantes y las definiciones establecidas en clase, se esperaba que los estudiantes formularan el hecho geométrico del triángulo rectángulo en los siguientes términos: *Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces los otros dos son agudos.*

Luego de establecer el hecho geométrico correspondiente a la suma de los ángulos de un triángulo, se propuso a los estudiantes el ítem c de la situación 2, con el propósito de hacer que ellos utilizaran su marco teórico de referencia para justificar una proposición matemática desde el punto de vista teórico. Aunque no esperábamos una demostración formal y rigurosa, si esperábamos que los estudiantes elaboraran una prueba en la que se evidenciara el uso de definiciones y hechos geométricos del marco de referencia en la justificación. En este sentido esperábamos una prueba cercana (en términos de los garantes de la geometría que podían utilizar, más no en términos del formato y la organización deductiva en la que se presenta) a la siguiente demostración:

Afirmación	**Razón**
ΔABC es un triángulo con $\angle ACB$ recto	Dado en el enunciado.
$\angle ACB$ mide 90 grados	Definición de ángulo recto.
$m\angle ACB + \angle ABC + \angle CAB = 180$.	Hecho geométrico de la suma de medida de ángulos de un triángulo.
$90 + m\angle ABC + m\angle CAB = 180$.	Sustitución.
$m\angle ABC + m\angle CAB = 90$.	Propiedad de los números reales.
$m\angle ABC = 90 - m\angle CAB$, es decir, $m\angle ABC$ es menor de 90 grados. Con la $m\angle ABC > 0$.	Propiedad de los números reales.
$m\angle CAB = 90 - m\angle ABC$, es decir, $m\angle CAB$ es menor de 90 grados. Con la $m\angle CAB > 0$.	Propiedad de los números reales.
$\angle ABC$ y $\angle CAB$, son agudos	Definición de ángulo agudo.

Tabla 5. *Demostración formal del hecho geométrico de la situación 2.*

3.6.5 ETAPA 5. INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN.

En concordancia con el objetivo de este estudio, nos centramos en registrar las acciones del grupo de estudiantes durante las sesiones de clase por medio de registros de audio y video y a través de las producciones escritas de los mismos. Adicionalmente, realizamos dos entrevistas, una con miras a recapitular el proceso seguido por los alumnos en una de las situaciones propuestas (situación 1) y la otra con el objetivo de registrar algunas apreciaciones del grupo en relación con la aproximación metodológica propuesta para la clase. Es pertinente aclarar que la última entrevista no la hemos utilizado como fuente de información para analizar la actividad de los estudiantes en las dos situaciones mencionadas en el apartado 3.6.4 sino como sustento de las conclusiones y reflexiones que presentamos al final de este trabajo en relación con el tema de la entrevista.

Durante la implementación de las situaciones, contábamos con una cámara de video que se localizó detrás del grupo de estudiantes, con la finalidad de registrar tanto sus interacciones como las acciones relacionadas en Cabri. Durante el trabajo en grupo, la grabación de audio y video se focalizaba en la actividad de los estudiantes seleccionados, pero durante la puesta en común, la grabación se enfocaba en las intervenciones de la profesora y las interacciones de ella con los miembros de la clase. Para garantizar un buen registro de voz y no perder información sobre las acciones del grupo de estudiantes (sobre todo durante la puesta en común), adicionalmente empleamos una grabadora de audio, que ubicamos sobre la mesa del grupo.

Las grabaciones de audio y video, de clases y entrevistas, junto con las transcripciones de las mismas y las producciones escritas de los estudiantes se constituyeron en la materia prima utilizada para el análisis de la actividad de Sandra, Miguel y Diego. En la tabla 6, se señalan los instrumentos de recolección empleados para registrar información de la actividad de los estudiantes durante el tratamiento de cada situación.

	Instrumentos utilizados	
Situación 1. *Hecho geométrico de la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo*	Grabación de audio y video, y transcripción correspondiente a la sesión de clase en la que exploran e identifican el invariante.	1 sesión de clase (80 min)
	Entrevista realizada al grupo de estudiantes con miras a recapitular el proceso que siguieron para formular el hecho geométrico.	6.5 min.
Situación 2. *Hecho geométrico del*	Grabación de audio y video, y transcripción de la sesión de clase en la que se define triángulo	1 sesión de clase

triángulo rectángulo.	rectángulo, ángulo agudo, ángulo recto, exploran, identifican y formulan el hecho geométrico.	(80 min)
	Producción escrita de los estudiantes en la que plantean una justificación para el hecho geométrico mencionado.	Trabajo extra clase de los estudiantes.
Entrevista Final	Grabación de audio y video, y transcripción de la entrevista realizada al grupo de estudiantes sobre su percepción frente a la implementación realizada. En dicha entrevista se realizaron preguntas en relación con: la metodología, el contenido geométrico abordado, el uso de la geometría dinámica, el lenguaje geométrico utilizado y la importancia de la justificación en la clase de geometría.	(10 min)

Tabla 6. *Instrumentos de recolección de datos*.

Vale la pena aclarar que la entrevista final fue realizada por el observador (no por la profesora) de este estudio. Esto con el fin de otorgar plena libertad a los estudiantes de responder a las preguntas planteadas. No queríamos que las percepciones de los estudiantes frente a la implementación realizada se vieran influenciadas por actitudes de la profesora (gestos, énfasis en las preguntas, etc.) o por la presión de tener que contestar de manera correcta y convincente a lo que ella les preguntaba.

3.6.6 ETAPA 6. REALIZACIÓN DE TRANSCRIPCIONES Y AJUSTES A LAS MISMAS

Al finalizar la implementación, revisamos las grabaciones de audio y video de las sesiones de clase y de las dos entrevistas, con miras a identificar aquellas que mostraban continuidad en el trabajo de los estudiantes alrededor de un mismo objeto geométrico y que contenían una mayor evidencia de acciones de actividad demostrativa realizadas por los estudiantes. En este sentido, se eligieron las grabaciones concernientes a las dos situaciones citadas en el apartado 3.6.4 de este capítulo. Posteriormente realizamos la transcripción de las grabaciones correspondientes a la sesiones de clase en las que se abordaron tales situaciones y de las dos entrevistas.

La lectura superficial de las trascripciones nos llevó a identificar la necesidad de realizarles algunos ajustes con el fin de evidenciar en ellas una reproducción fiel de la actividad realizada por los estudiantes. En este sentido fue necesario:

- Enriquecerlas con gráficas, capturadas de los videos, para ilustrar las acciones de los estudiantes.
- Realizar aclaraciones en paréntesis cuadrados, para describir acciones no verbales de estudiantes y profesora. Es pertinente clarificar que dichas aclaraciones no se hicieron con la intención de hacer interpretaciones de la actividad de ninguno de los actores mencionados.
- Colocar etiquetas a los gráficos, tales como: nombrar vértices o resaltar números o etiquetas de la gráfica, para ilustrar las representaciones que realizaron los estudiantes.

La lectura y los ajustes realizados a las transcripciones nos permitieron identificar y seleccionar los episodios que serían útiles para el análisis de las acciones de los estudiantes. Los episodios escogidos se seleccionaron buscando evidencia sobre conversaciones que reflejaran la emergencia de un ambiente de actividad demostrativa en términos de las fases de Boero (1999) y las acciones de la actividad demostrativa

3.6.7 ETAPA 7. DISEÑO DE LAS CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Las categorías que utilizamos para el análisis de la actividad de los estudiantes se diseñaron con base en las seis fases que Boero (1999) propone para la producción de teoremas y demostraciones matemáticas. Cada fase propuesta por este autor se constituyó en una categoría de análisis para nosotros. Para cada una de las categorías, establecimos indicadores y acciones con base en la propuesta preliminar de Parra y Piñeros (2011) para dichas categorías, en el trabajo de Camargo (2010) en relación con las acciones de argumentar y demostrar en matemáticas y en las acciones del grupo de estudiantes que participo en la realización de este estudio. Es de resaltar que hay indicadores y acciones propuestas en el marco de las categorías que son emergentes del análisis de la actividad de los estudiantes. En el capítulo 4 del presente documento describiremos con detalle cada categoría, así como sus indicadores y acciones, y la relación de estas últimas con la actividad demostrativa.

3.6.8 ETAPA 8. INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS DE LA ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES

Para la interpretación y análisis de la actividad de los estudiantes se realizo, en primer lugar, una descripción general de la actividad que realizaron ellos en relación con las dos situaciones citadas en el apartado 3.6.4. Tal descripción nos permitió identificar que su actividad se subdividía en momentos, cada uno de ellos ligado a un propósito en términos de la solución de la situación, por ejemplo, construir una representación gráfica adecuada, formular el hecho geométrico, verificar la validez de un invariante, etc. Identificar tales momentos nos condujo a analizar la actividad de los estudiantes, resaltando en el marco de cada momento las acciones de las categorías de análisis que dan indicio de su involucramiento en los procesos de actividad demostrativa.

El análisis de la actividad de los estudiantes buscó no sólo reflejar acciones análogas a las acciones de la actividad demostrativa, sino también resaltar el potencial de Cabri en el proceso de conjeturación y justificación de los hechos geométricos que emergían al solucionar las situaciones propuestas. Dicho análisis también apuntó a identificar el tipo de participación de los estudiantes (genuina, autónoma y relevante), el rol que asumía cada uno de ellos dentro del grupo y la influencia de sus interacciones en las decisiones concernientes a la solución de las situaciones propuestas. Todo ello con miras a dar cuenta del involucramiento de los estudiantes en los procesos de actividad demostrativa, evidenciado la emergencia de acciones en relación con los tres elementos (situaciones problema, interacción social de la clase y uso de la geometría dinámica) que constituyen tal ambiente.

3.6.9 ETAPA 9. ESCRITURA DEL INFORME FINAL

Luego de realizar el análisis de la actividad de los estudiantes, seleccionamos para la escritura del informe final aquellos momentos de su actividad cuyo análisis reflejaba la emergencia de un ambiente de actividad demostrativa en términos de las acciones de las categorías de análisis y que mostraban algo diferente en comparación con otros momentos de su actividad. En este sentido, seleccionamos los siete momentos de la actividad de los estudiantes en relación con la situación 1 y sólo uno de los cuatro momentos en los que se subdividió su actividad en el marco de la situación 2, específicamente el concerniente a la justificación del hecho geométrico del triángulo rectángulo (cuarto momento). El análisis de los tres momentos previos se incluye en los anexos de este documento (ANEXO II), dado que tal análisis es similar al realizado para la situación 1.

Finalmente se sintetizó en este informe cada uno de los resultados tangibles (capítulos 2, 4, 5 y 6) que arrojó cada etapa del desarrollo del estudio realizado.

CAPÍTULO 4

CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

El presente capítulo tiene como objeto dar a conocer las categorías e indicadores de análisis que hemos construido con base en los trabajos de Boero (1999), Camargo (2010), Parra y Piñeros (2011) para describir e interpretar las acciones de estudiantes en edad extraescolar que reflejan la emergencia de un ambiente de actividad demostrativa en una clase de geometría. En primer lugar, señalamos cuáles son los referentes que tomamos de cada uno de los autores para la construcción de las categorías, indicadores y acciones, y explicamos la codificación asignada a cada una de ellas. Esta codificación será utilizada en el análisis de los datos para identificar y señalar las acciones de los estudiantes que reflejan la emergencia de una ambiente de actividad demostrativa. En segundo lugar, hacemos una descripción de cada categoría y sus indicadores, señalando las posibles acciones que pueden realizar los estudiantes en el marco de cada indicador y la relación de éstas con algunas de las acciones de la actividad demostrativa.

4.1 CONSTRUCCIÓN Y CODIFICACIÓN DE LAS CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Boero (1999) señala que la demostración vista como proceso se constituye en algo más que la simple demostración formal de un teorema es una actividad matemática que implica acciones que llevan a considerar tanto la producción de la conjetura como la construcción de su justificación. Boero enmarca estas acciones en lo que ha denominado *fases* en la producción de conjeturas y construcción de pruebas matemáticas. Las fases establecidas por este autor son:

I. *Producción de conjeturas.*
II. *Formulación del enunciado de acuerdo con convenciones culturales compartidas.*
III. *Exploración del contenidos (y limites de validez) de la conjetura.*
IV. *Selección y encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva.*
V. *Organización de la cadena de argumentos en la forma de una prueba que es aceptable desde el punto de vista de los estándares matemáticos vigentes.*
VI. *Aproximación a la prueba formal.*

De las fases mencionadas, las tres primeras se relacionan con el proceso de elaboración de conjeturas y las restantes con la producción de justificaciones. Dado que consideramos que las fases señaladas son un referente que nos permite categorizar la actividad demostrativa de los alumnos durante el desarrollo de una tarea propuesta, en el presente estudio hemos decidido tomar las fases como categorías de análisis. Los indicadores y acciones de las tres primeras categorías se han definido con base en la propuesta que realizan Parra y Piñeros (2011) en su trabajo de grado de licenciatura. Para la elaboración de los indicadores y acciones de las tres categorías restantes hemos tomado algunas ideas planteadas por Camargo (2010) en su tesis doctoral, en relación con los procesos de argumentar, demostrar y sistematizar. Es de resaltar que a pesar de haber tomado como base el trabajo de los autores citados hemos realizado algunas modificaciones y/o ampliaciones a su propuesta con base en las observaciones preliminares del trabajo de los estudiantes y en la revisión de la literatura especializada, por tanto, tales categorías se constituyen en uno de los productos de esta tesis.

En relación con la denominación de las fases compartimos una sugerencia que Parra y Piñeros (2011) plantean acerca de la fase de *producción de conjeturas*. Estos autores expresan que esta fase, por su nombre, parece recoger todas las acciones relacionadas con la producción de conjeturas. Para evitar dicha interpretación. Estos autores proponen renombrarla. Nosotros aceptamos y asumimos el cambio de denominación y decidimos designarla ***reconocimiento de la propiedad invariante***, dado que consideramos que es ello lo que se pretende en esta primera fase.

En los siguientes apartados de este capítulo describiremos cada una de las fases (que de ahora en delante, serán denominadas categorías) con sus respectivos indicadores, los cuales en algunos casos serán adaptaciones de los propuestos por Parra y Piñeros (2011). Los indicadores serán descritos, haciendo alusión a las posibles acciones que pueden realizar los estudiantes en el marco de cada uno de ellos. Consideramos que estas acciones nos permitirán dar cuenta del involucramiento de los estudiantes en un ambiente de actividad demostrativa y de las acciones de este tipo de actividad que llevan a cabo durante la solución de la situación propuesta. Es pertinente resaltar que tanto indicadores como acciones están definidas pensando en situaciones problema que deben solucionarse haciendo uso de la geometría dinámica, particularmente el software Cabri.

Para efectos del análisis de los datos de este estudio, hemos decidido codificar cada categoría, indicador y acción. La codificación asignada aparece al final de la categoría, indicador o acción en paréntesis. Tal codificación, en cada caso, se ha asignado de la siguiente manera:

- Para el caso de las categorías, la codificación será denotada por "C" seguido por un número romano. La numeración romana indica la categoría a la cual estamos haciendo alusión y se corresponde con el orden en el que Boero (1999) ha expuesto sus fases.

- Para el caso de los indicadores, la codificación será de la siguiente manera: "C" seguido de un número romano, "i" seguida de un número en su escritura induarábiga. Por ejemplo **(CI, i1)**. Indica la categoría (C) a la cual pertenece el indicador (i). Los indicadores son numerados para distinguir los indicadores de una misma categoría y se corresponde en el orden en el cual se describen en este capítulo.

- Para el caso de las acciones, la codificación se hará de la siguiente manera: denotamos el indicador añadiendo la letra "a" seguida de un número en su escritura induarábiga, por ejemplo, **(CI, i1, a1)**. Indica la categoría (C), el indicador (i) y la acción (a) que corresponde a dicho indicador. Las acciones han sido numeradas y su orden se corresponde con la manera en la que se van mencionando en el presente capítulo.

4.2 DESCRIPCIÓN DE LAS CATEGORÍAS E INDICADORES DE ANÁLISIS

En este apartado describiremos cada una de las categorías de análisis así como los indicadores que la componen. Cabe anotar que las posibles acciones que pueden realizar los estudiantes en el marco de cada indicador hacen parte de la descripción del mismo.

A modo de síntesis, al final de cada categoría se presenta una tabla que relaciona los indicadores con sus respectivas acciones y las acciones de la actividad demostrativa que consideramos están inmersas en cada indicador.

4.2.1 CATEGORÍA I. RECONOCIMIENTO DE LA PROPIEDAD INVARIANTE (CI)

Esta primera categoría enmarca todas las acciones que conducen al estudiante a identificar una regularidad en la tarea propuesta. Según Boero (1999), esta fase incluye: exploración de la situación problema, identificación de regularidades, reconocimiento de condiciones que permiten la ocurrencia de tales regularidades así como los argumentos para la plausibilidad de la misma. Dado que para el caso de la escuela nos parece demasiado amplio considerar dentro de la primera categoría los argumentos para la plausibilidad de la conjetura, en esta categoría no consideraremos dicha acción.

Con el propósito de establecer si en algún momento de su actividad, las acciones de los estudiantes se encuentran en esta categoría, Parra y Piñeros (2011) elaboraron indicadores para categorizar las acciones de los estudiantes durante el reconocimiento de la propiedad invariante. Los indicadores propuestos por estos autores son: interpretación de la situación propuesta, construcción de una representación gráfica asociada a la situación, verificación de la construcción, exploración de la construcción y predicción de la situación problema (plantean una solución de la situación sin explorarla). En general, las descripciones de estos indicadores han sido modificadas o complementadas por nosotros.

4.2.1.1 Interpretación de la situación **(CI, i1)**

Este indicador hace referencia a la manera como el estudiante entiende el enunciado (escrito o verbal) de la situación problema propuesta en relación con el contexto o condiciones que en ella se imponen y con la pregunta que la misma expone. El significado que le otorga el alumno a la situación puede evidenciarse a través del reconocimiento de objetos geométricos involucrados en la situación por parte del alumno **(CI, i1, a1)**. Dicho reconocimiento puede darse mientras el estudiante visualiza y/o explora las figuras geométricas en Cabri o incluso cuando generaliza y/o verifica, en el sentido de la actividad demostrativa, el invariante encontrado.

Además del reconocimiento de objetos geométricos, consideramos que la interpretación del estudiante también se refleja en acciones como: Identificación y señalamiento de lo qué es dado y/o debe encontrarse para resolver la situación **(CI, i1, a2)**; en la conceptualización (explícita o implícita) de objetos involucrados en la situación **(CI, i1, a4);** y en la manifestación explícita o implícita de posibles estrategias o hipótesis de solución **(CI, i1, a3)**. En esta última acción puede estar inmersa la acción de exploración de la actividad demostrativa, dado que el señalamiento implícito de posibles estrategias o hipótesis de solución está sujeto a acciones en el entorno de geometría dinámica, tales como: arrastre de figuras geométricas, toma de medidas, realización de construcciones auxiliares, etc.

La interpretación de la situación por parte del estudiante no es algo que se presente solamente en el inicio de su actividad, sino que también es un proceso que está presenta durante toda la actividad del alumno, desde la primera lectura que hace de la tarea hasta la formulación y justificación de la conjetura. Dado que consideramos que la interpretación de la situación por parte de los estudiantes es una acción continua en su actividad, en los siguientes indicadores mencionaremos algunas actuaciones que permiten evidenciar una interpretación correcta o no de la situación propuesta.

4.2.1.2. Construcción de una representación gráfica asociada a la situación problema **(CI, i2)**

El indicador **(CI, i2)** hace referencia a la construcción de figuras geométricas por parte del estudiante, en un entorno de geometría dinámica. Dicha construcción debe tener en cuenta las condiciones de los objetos involucrados en la situación **(CI, i2, a1).** La construcción debe ser robusta, es decir, no se modifican sus condiciones ante la acción de arrastre. La construcción de una representación gráfica acorde con la situación propuesta puede ocurrir de tres formas: (i) a medida que el estudiante lee la tarea va realizando la construcción con los objetos y las condiciones implicadas en la situación, (ii) el estudiante lee la situación y hace la construcción posteriormente, (iii) el estudiante realiza representaciones gráficas de los objetos en papel y lápiz y luego las reproduce dinámicamente. En esta última, vislumbra un interés por interpretar correctamente la situación antes de construirla en un entorno de geometría dinámica. Cualquiera de estas formas de construcción requiere una interpretación del enunciado, específicamente, exige el reconocimiento de objetos geométricos involucrados, así como una conceptualización (implícita o explícita) de los mismos y el reconocimiento de lo dado en la situación. En el marco de este indicador, el estudiante puede realizar otras acciones tales como: realizar la construcción evocando procedimientos de construcción previos **(C1, i2, a2)**, construir casos particulares atendiendo a objetos geométricos estudiados previamente y/o a referentes teóricos previos **(CI, i2, a3)**, planear el proceso de construcción antes de realizar la representación gráfica en el entorno de geometría dinámica **(CI, i2, a4)**; realizar construcciones que atienden a las propiedades de los objetos geométricos involucrados pero que no mantienen las propiedades ante la acción de arrastre **(CI, i2, a5)**; construir representaciones de la situación con base en las propiedades de los objetos geométricos involucrados logrando que dichas propiedades se mantengan ante la acción de arrastre **(CI, i2, a6).**

Es de resaltar que para construir una representación gráfica de la situación, el estudiante utiliza herramientas básicas de Cabri (punto, recta, triángulo, etc.), así como herramientas de medición y otras funciones de software como calcular, ocultar o arrastrar objetos, para cumplir con las condiciones de la situación. Durante el transcurso de la construcción, está implícita la acción de visualización de la actividad demostrativa, puesto que, durante ella pueden surgir sub-acciones como la de desconfigurar y/o reconfigurar las partes que componen la figura resultante, ello con el propósito de generar un control sobre la correcta representación de la situación.

4.2.1.3 Verificación de la construcción (CI, i3)

Construida la representación gráfica de la situación en el entorno de geometría dinámica, el estudiante la manipula por medio del arrastre para verificar que ésta satisface las condiciones de la situación dada. Si la construcción no es válida a través del proceso de verificación, el estudiante debe encontrar los errores cometidos en la construcción y con base en ellos corregirla. En este momento de la actividad de los estudiantes, éstos llevan a cabo acciones de visualización en el sentido de la actividad demostrativa, puesto que la verificación de la construcción requiere del reconocimiento de las partes que componen la figura geométrica construida así como la manipulación de la misma para comprobar su correspondencia con la situación planteada.

Durante la verificación de la construcción se evidencia la interpretación de los estudiantes en lo que tiene que ver con las condiciones de la situación, así como en lo que se pregunta. Las acciones que consideramos guían la verificación de la construcción son: usar herramientas de medición, arrastre y propiedades especificas (paralelas, perpendiculares, etc.) para verificar el cumplimiento de las condiciones de la situación y/o las relaciones entre los objetos geométricos involucrados en la misma **(CI, i3, a1)**; comparar el enunciado de la situación con la construcción realizada para verificar la correspondencia entre las dos representaciones **(CI, i3, a2)**; corregir errores en la construcción **(CI, i3, a3)**; y complementar, eliminar u ocultar objetos geométricos y etiquetas de la construcción con miras a mejorar la representación de la misma **(CI, i3, a4)**.

4.2.1.4 Exploración de la construcción (CI, i4)

Este indicador se corresponde por completo con la acción de exploración de la actividad demostrativa, dado que el estudiante explora con el propósito de identificar posibles relaciones (propiedades invariantes) entre los objetos involucrados en la construcción; en otras palabras, la exploración está dirigida a responder la pregunta de la situación planteada.

Las acciones que direccionan la exploración de la construcción son: utilizar herramientas de Cabri para determinar propiedades específicas (paralelismo, perpendicularidad, etc.) de la representación gráfica **(CI, i4, a1)**; tomar medidas para inferir propiedades (congruencia, semejanza, perpendicularidad, etc.) de la representación gráfica construida **(CI, i4, a2)**; usar el arrastre para identificar propiedades invariantes **(CI, i4, a3)**; estudiar hipótesis (soluciones propuestas por los estudiantes) de solución mediante la acción de arrastre, herramientas de medición y construcción de Cabri, para aceptarlas o rechazarlas **(CI, i4, a4)**; releer la situación para orientar la exploración de la construcción **(CI, i4, a5)**; comparar objetos construidos para visualizar relaciones entre ellos o propiedades comunes **(CI, i4, a6)**; comprobar resultados obtenidos al operar o manipular datos provenientes de la construcción realizada con miras a reconocer un patrón invariante **(CI, i4, a7)**; y reconocer elementos constitutivos de una figura construida o dada en Cabri **(CI, i4, a8)**. En estas acciones pueden estar implícitas las acciones de visualizar, explorar y generalizar de la actividad demostrativa, dado que se explora con miras a reconocer patrones invariantes a través de la observación e indagación de las propiedades geométricas de las figuras construidas en Cabri. En nuestro caso particular, donde el reconocimiento de invariantes está determinado por el uso de Cabri, consideramos no es posible identificar invariantes sin atender a la acción de visualizar. Por otro lado, en el marco de este indicador consideramos inmersa la acción de generalizar en el sentido del reconocimiento de una propiedad que se cumple en varios casos y que se reporta de manera oral o escrita.

En el marco de este indicador puede suceder que el estudiante realice acciones que no aportan a la solución al problema, tales como: toma de medidas que no son útiles para la solución de la situación, o arrastre de objetos que no corresponden con la intención de la pregunta. Las acciones no afortunadas son evidencia de una interpretación inadecuada de la situación, lo cual puede conducir al estudiante a releerla y reorientar la exploración.

4.2.1.5 Anticipación de la solución a la situación problema **(CI, i5)**

En ocasiones, para resolver la situación planteada el estudiante, no lleva a cabo acciones de exploración y verificación de la construcción dado que antes de hacerlo anticipa la solución de la tarea. La predicción de la solución de la situación puede presentarse en dos casos:

(i) Cuando el estudiante sospecha la solución del problema al momento de leer el enunciado por primera vez.

(ii) Cuando el estudiante formula una solución basado en la visualización de una construcción en papel o en Cabri.

En el primer caso, no hay inmersas acciones de la actividad demostrativa, puesto que el estudiante plantea la solución de la situación sin considerar el estudio de representaciones geométricas asociadas con la misma. En el segundo, se ve reflejada la acción de visualizar, dado que es a partir de la observación de la figura que el estudiante infiere propiedades o relaciones geométricas entre los objetos que componen la figura construida.

Para finalizar la caracterización de la Categoría **(CI)**, en la siguiente tabla se sintetizan las ideas relacionadas con esta primera categoría, sus indicadores y acciones.

CATEGORÍA I: RECONOCIMINETO DE LA PROPIEDAD INVARIANTE (CI).		
Indicadores	**Posibles acciones de los estudiantes.**	**Acciones de la actividad demostrativa**
Interpretación de la situación **(CI, i1)**	Identifica objetos geométricos involucrados en la situación propuesta **(CI, i1, a1)**.	Visualizar
	Reconoce y señala qué es dado y/o qué se pide resolver **(CI, i1, a2)**.	
	Manifiesta implícita o explícitamente posibles estrategias o hipótesis de solución **(CI, i1, a3)**.	
	Realiza conceptualizaciones (implícitas o explicitas) de objetos involucrados en la situación **(CI, i1, a4).**	
Construcción de una representación gráfica asociada a la situación problema **(CI, i2)**	Realiza representaciones gráficas en Cabri teniendo en cuenta las condiciones y propiedades invariantes de los objetos involucrados **(CI, i2, a1)**.	Visualizar
	Realiza la construcción evocando procedimientos de construcción previos **(CI, i2, a3)**.	
	Construye casos particulares atendiendo a objetos geométricos estudiados previamente y/o a referentes teóricos previos. **(CI, i2, a4)**.	
	Planea el proceso de construcción antes de realizar la representación gráfica en el entorno de geometría dinámica **(CI, i2, a5)**.	
	Realiza construcciones que atienden a las propiedades de los objetos geométricos involucrados pero que no mantienen las propiedades	

	ante la acción de arrastre **(CI, i2, a6)**.	
	Construye representaciones de la situación con base en las propiedades de los objetos geométricos involucrados logrando que dichas propiedades se mantengan ante la acción de arrastre **(CI, i2, a7).**	
Verificación de la construcción **(CI, i3)**	Usa herramientas de medición, arrastre y propiedades especificas, para verificar el cumplimiento de las condiciones de la situación y/o las relaciones entre los objetos geométricos involucrados en la misma **(CI, i3, a1)**.	Visualizar
	Compara el enunciado de la situación con la construcción realizada para verificar la correspondencia entre las dos representaciones. **(CI, i3, a2)**.	
	Corrige errores de la construcción. **(CI, i3, a3)**.	
	Complementa, elimina u oculta objetos geométricos y etiquetas de la construcción con miras a mejorar la interpretación de la misma. **(CI, i3, a4)**.	
Exploración de la construcción **(CI, i4)**	Utiliza herramientas de Cabri para determinar propiedades específicas (paralelismo, perpendicularidad, etc.) de la representación gráfica **(CI, i4, a1)**.	Visualizar Explorar Generalizar
	Toma medidas para inferir propiedades (congruencia, semejanza, perpendicularidad, etc.) de la representación gráfica construida **(CI, i4, a2).**	
	Usa el arrastre para identificar propiedades invariantes **(CI, i4, a3).**	
	Estudia hipótesis de solución mediante la acción de arrastre, herramientas de medición y construcción de Cabri, para aceptarlas o rechazarlas **(CI, i4, a4)**.	
	Relee la situación para orientar la exploración de la construcción. **(CI, i4, a5)**.	
	Comprueba objetos construidos para visualizar relaciones entre ellos o propiedades comunes **(CI, i4, a6).**	

	Comprueba resultados obtenidos al operar o manipular datos provenientes de la construcción con miras a reconocer un patrón invariante **(CI, i4, a7)**.	
	Reconoce elementos constitutivos de una figura construida o dada en Cabri **(CI, i4, a8)**.	
Predicción de la solución de la situación problema **(CI, i5)**	Realiza la lectura del enunciado y a partir de ella infiere una posible solución para la situación descrita. **(CI, i5, a1)**.	
	Visualiza la representación gráfica construida o dada y plantea una hipótesis de solución. **(CI, i5, a2)**.	Visualizar

Tabla 7. *Indicadores y acciones que constituyen la Categoría 1.*

4.2.2 CATEGORÍA II. FORMULACIÓN DEL ENUNCIADO DE LA CONJETURA DE ACUERDO CON CONVENCIONES CULTURALES COMPARTIDAS (CII)

En esta categoría las acciones de los estudiantes están dirigidas a la formulación de un enunciado que dé cuenta de la generalidad encontrada durante la exploración de situación propuesta. Boero (1999) manifiesta que en esta fase, la formulación del enunciado está sujeta a convenciones culturales compartidas, es decir, se realiza de acuerdo con las reglas institucionalizadas en la clase de geometría. En esta categoría juega un papel fundamental la acción *generalización* del constructo de *actividad demostrativa* dado que la formulación de la conjetura se inicia cuando se establece la propiedad invariante y se cristaliza con la escritura de la conjetura.

La formulación de la conjetura puede señalar claramente el antecedente y el consecuente sin tener en cuenta la estructura lógica del "*si… entonces*" o haciendo explicita dicha estructura. También puede contemplar uso de cuantificadores y atender a convenciones del lenguaje utilizado en clase. Los estudiantes al enunciar la conjetura pueden entrar a verificar su formulación; por tanto, pueden realizar diversas acciones al momento de establecer una conjetura. Dichas acciones se describen a continuación.

4.2.2.1 Verificación del invariante enunciado en la conjetura **(CII, i1)**

Este indicador se corresponde con la acción de verificar de la actividad demostrativa, puesto que, se busca comprobar si el invariante es válido. Esta acción surge cuando se plantea algún cuestionamiento que suscita duda frente a la conjetura planteada o cuando se quiere ratificar una propiedad enunciada en ésta. Bajo este indicador, los estudiantes pueden adelantar las siguientes acciones: utilizar el arrastre y/ o toma medidas con miras a verificar el invariante encontrado **(CII, i1, a1);** estudiar los posibles casos en los que el invariante podría no cumplirse **(CII, i1, a2).**

4.2.2.2 Correcto establecimiento del antecedente y el consecuente de la conjetura **(CII, i2)**

Este indicador hace referencia al correcto establecimiento del antecedente y consecuente, haciendo explícitos todos las condiciones dadas y el invariante encontrado. El correcto establecimiento del antecedente y el consecuente se da cuando el estudiante realiza la correspondencia entre el antecedente y las condiciones de la situación **(CII, i2, a1),** y entre el consecuente y los invariantes encontrados en la exploración **(CII, i2, a2)**. Otra acción de este indicador es explicitar todo lo dado y las propiedades invariantes halladas **(CII, i2, a3)**, atendiendo a la completitud del enunciado. Consideramos que en estas dos acciones está implícita la acción de generalizar de la actividad demostrativa, dado que se comunican los invariantes encontrados a través de un enunciado en forma de conjetura.

4.2.2.3 Estructura del enunciado **(CII, i3)**

Este indicador hace referencia a la escritura de la conjetura. El estudiante, al momento de escribir la conjetura, puede tener en cuenta convenciones institucionalizadas de la clase de geometría con el propósito de exhibir claramente las condiciones del enunciado y lo que se puede concluir de esas condiciones. Algunas de las acciones que puede realizar el estudiante en el momento de la escritura son: identificar y manifestar la relación entre antecedente y consecuente aludiendo a su dependencia en el momento de formular la conjetura **(CII, i3, a1)**; utilizar el formato condicional *si…entonces* en la formulación de la conjetura de manera explícita. **(CII, i3, a2)**; explicitar el antecedente y el consecuente de la conjetura sin utilizar el formato condicional *si…entonces* **(CII, i3, a3)**; utilizar la convenciones establecidas en la clase en términos del lenguaje y notación al nombrar objetos geométricos involucrados en la formulación del enunciado **(CII, i3, a4);** usar definiciones y/o hechos geométricos del marco referencial para escribir la conjetura **(CII, i3, a5)**.

Por la misma razón que señalamos en el primer indicador de esta categoría **(CII, i2)**, consideramos que en las acciones citadas para este indicador **(CII, i3)** esta inmersa la acción de generalizar de la actividad demostrativa.

4.2.2.4 Uso correcto de cuantificadores (CII, i4)

Este indicador se evidencia cuando al momento de formular la conjetura el estudiante USA usando los cuantificadores existencial o universal. El uso de estos cuantificadores puede ser explícito **(CII, i4, a1)** o implícito **(CII, i4, a2)**, es decir, no necesariamente pueden utilizar palabras como "para todo" y "existe" para reconocer el uso de cuantificadores en la escritura de la conjetura. En la siguiente tabla se señalan algunas de las frases que pueden sugerir el uso de cuantificadores en la escritura de la conjetura.

Frases que indican uso de cuantificador universal	**Frases que indican uso de cuantificador existencial.**
Para todo/ Para todos Cualquier / Cualquiera Independientemente del que sea Sin importar cual sea Para cada uno	Existe Hay uno / hay Para alguno / algunos Para este caso en particular En particular para Exactamente para

Tabla 8. *Expresiones que evidencian el uso de cuantificadores.*

El uso de cuantificadores refleja la acción de generalizar de la actividad demostrativa debido a que éste está implícito en la formulación del enunciado que alude al patrón encontrado y a las condiciones bajo las cuales se cumple.

4.2.2.5 Verificación de la formulación de la conjetura (CII, i5)

Para verificar la predicción o el invariante encontrado, el estudiante puede adelantar algunas acciones con miras a comprobar su correspondencia con la situación propuesta. Dichas acciones son: manipular la construcción mediante el arrastre con la finalidad de verificar que el invariante este explícito en la conjetura **(CII, i5, a1)**; reconocer y explicitar propiedades (o palabras) que sobran o faltan para escribir correctamente la conjetura **(CII, i5, a2)**; corroborar que las condiciones dadas estén en el antecedente y los invariantes encontrados en el consecuente **(CII, i5, a3)**. Dado que la verificación del enunciado puede darse a través de la manipulación y observación de la figura construida con el arrastre, creemos que en el marco de este indicador pueden presentarse acciones de visualización en el sentido de la actividad demostrativa.

La verificación de la conjetura puede conducir al estudiante a ratificarla o a reformularla con miras a no dejar dudas respecto a la veracidad de la misma (acción de verificar de la actividad demostrativa). La acción de verificación se presenta cuando el estudiante quiere precisar si su enunciado es fiable o no. Es de señalar que las acciones de este indicador pueden suceder antes o después de que el estudiante escriba la conjetura, dado que puede llevar a cabo acciones de verificación del patrón encontrado y sólo al estar seguro de la fiabilidad del mismo, formular la conjetura.

En la siguiente tabla se sintetizan las ideas relacionadas con la segunda categoría, sus indicadores y acciones.

<table>
<tr><th colspan="3">CATEGORÍA II: FORMULACIÓN DEL ENUNCIADO DE ACUERDO CON CONVENCIONES CULTURALES COMPARTIDAS (CII).</th></tr>
<tr><th>Indicadores</th><th>Posibles acciones del estudiante</th><th>Acciones de la actividad demostrativa</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Verificación del invariante enunciado en la conjetura (CII, i1).</td><td>Utiliza el arrastre y/ o toma medidas con miras a verificar el invariante encontrado (CII, i1, a1).</td><td rowspan="2">Verificar</td></tr>
<tr><td>Estudia los posibles casos en los que el invariante podría no cumplirse (CII, i1, a2).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Correcto establecimiento del antecedente y el consecuente de la conjetura.
(CII, i2)</td><td>Reconoce la relación entre antecedente y condiciones impuestas en la situación (CII, i2, a1).</td><td rowspan="2">Generalizar</td></tr>
<tr><td>Reconoce la relación entre consecuente e invariantes encontrados en la exploración. (CII, i2, a2).</td></tr>
</table>

Estructura del enunciado **(CII, i3)**	Identifica y manifiesta la relación entre antecedente y consecuente aludiendo a su dependencia en el momento de formular la conjetura **(CII, i3, a1)**.	Generalizar
	Utiliza el formato condicional "Si…entonces" en la escritura de la conjetura, haciendo explícito el antecedente y consecuente **(CII, i3, a2)**.	
	Explícita el antecedente y el consecuente pero no escribe la conjetura en el formato condicional **(CII, i3, a3)**.	
	Tiene en cuenta las convenciones establecidas en la clase en términos del lenguaje y notación al nombrar objetos geométricos involucrados. **(CII, i3, a4)**.	
	Usa definiciones y/o hechos geométricos del marco referencial para escribir la conjetura **(CII, i3, a5)**.	
Uso correcto de cuantificadores **(CII, i4)**	Usa los cuantificadores existencial y universal de forma explícita. **(CII, i4, a1)**.	Generalizar
	Usa los cuantificadores existencial y universal de forma implícita. **(CII, i4, a2)**.	
Verificación de la formulación de la conjetura. **(CII, i5)**	Utiliza la herramienta arrastre de Cabri para verificar que el invariante este explícito en la conjetura propuesta. **(CII, i5, a1)**.	Visualizar Verificar Generalizar
	Identifica y explícita que sobran o faltan propiedades o palabras para escribir correctamente el enunciado. **(CII, i5, a2)**.	
	Corrobora que las condiciones dadas estén en el antecedente y los invariantes encontradas en el consecuente. **(CII, i5, a3)**.	

Tabla 9. *Indicadores y acciones que constituyen la Categoría 2*.

4.2.3 CATEGORÍA III. EXPLORACIÓN DEL CONTENIDO DE LA CONJETURA Y LOS LÍMITES DE VALIDEZ DE LA MISMA (CIII)

En esta categoría se hace referencia a los argumentos elaborados con miras a explorar el contenido de la conjetura y los límites de validez de la misma. Abarca acciones que le permiten al estudiante generar argumentos para justificar la relación entre hipótesis y tesis, la plausibilidad y validación de la conjetura en relación con la teoría de referencia. En esta categoría los estudiantes pueden evocar argumentos, generalmente empíricos, o eventualmente teóricos sin producir cadenas deductivas.

Los indicadores que proponemos para esta categoría son: exploración del contenido de la conjetura, búsqueda de argumentos para la plausibilidad de la conjetura y reconocimiento de argumentos para explicar la validez de la conjetura.

4.2.3.1 Exploración del contenido de la conjetura (CIII, i1)

Este indicador hace referencia a identificar con base en la exploración de la figura, las circunstancias bajo las cuales la conjetura se cumple **(CIII, i1, a1)**. Estas circunstancias están relacionadas con las condiciones impuestas en la situación y la determinación de cual cuantificador universal y existencial; los estudiantes aluden a la relación de dependencia entre hipótesis y tesis. En el marco de este indicador surgen explicaciones (en el sentido de la actividad demostrativa) de carácter heurístico que buscan argumentar en qué casos y bajo qué condiciones es válida la conjetura.

Adicional a la acción de explicar, en este indicador, también están inmersas las acciones de exploración y visualización de la actividad demostrativa, dado que es a través de la manipulación y observación de representaciones gráficas que los estudiantes identifican las circunstancias bajo las cuales se cumple la conjetura propuesta.

4.2.3.2 Búsqueda de argumentos para la plausibilidad de la conjetura (CIII, i2)

En el marco de este indicador, el interés de los estudiantes se centra en la búsqueda de argumentos que justifiquen la validez de la conjetura. Es de resaltar que en este momento de la actividad de los estudiantes aún no hay certeza frente a los argumentos que pueden justificarla sino inquietud frente a la veracidad de la conjetura y las razones que podrían justificarla **(CIII, i2, a1)**. También pueden llevar a cabo acciones como: Esgrimir razones o puntos de vista en pro o en contra de una afirmación con el objeto de dar cuenta de la plausibilidad del enunciado **(CIII, i2, a2)**; sugerir una construcción auxiliar para enriquecer una representación que le permitan encontrar ideas para la justificación **(CIII, i2, a3)**.

La búsqueda de argumentos refleja la necesidad del estudiante de convencerse a si mismo y a los demás de la validez de la conjetura.

4.2.3.3 Selección de argumentos para explicar la validez de la conjetura (CIII, i3)

Luego de buscar argumentos que puedan justificar la conjetura, los estudiantes pueden seleccionar algunos de ellos para plantear una justificación de la conjetura. Bajo este indicador, el estudiante puede señalar argumentos empíricos o teóricos que justifiquen la validez de la conjetura. Las posibles acciones de los estudiantes en el marco de este indicador son: aludir a la representación gráfica para explicar la validez de la conjetura con base en lo que se observa y lo que sucede ante el arrastre **(CIII, i3, a1)**; asumir como argumento válido el procedimiento de exploración o representación que dio cuenta del consecuente establecido en el enunciado de la conjetura **(CIII, i3, a2)**; acompañar la explicación de una representación gráfica con la alusión a definiciones, hechos geométricos y/o procedimientos de construcción previos **(CIII, i3, a3);** usar casos particulares para explicar las condiciones bajo las cuales ocurre la regularidad y a partir de ellos afirma la generalidad **(CIII, i3, a4)**; utilizar herramientas de Cabri, que le permitan obtener datos de la figura (medida de lados y ángulos, relaciones de perpendicularidad y paralelismo, entre otras) con miras a apoyar las explicaciones **(CIII, i3, a5)**.

En todas las acciones de este indicador está presente la acción de explicar de la actividad demostrativa, ya que en estas primeras justificaciones los estudiantes plantean sus argumentos con base construcciones dinámicas. En la siguiente tabla se sintetizan las ideas relacionadas con la tercera categoría, sus indicadores y acciones.

CATEGORIA III: EXPLORACIÓN DEL CONTENIDO DE LA CONJETURA Y LOS LÍMITES DE VALIDEZ DE LA MISMA (CIII).		
Indicadores	**Posibles acciones del estudiante**	**Acciones de la actividad demostrativa**
Exploración del contenido de la conjetura **(CIII, i1)**.	Identifica las circunstancias bajo las cuales la conjetura se cumple **(CIII, i1, a1)**.	Explicar
Búsqueda de argumentos para la	Manifiesta inquietud frente a la veracidad de la conjetura y/o los	Explicar

plausibilidad de la conjetura **(CIII, i2)**.	posibles argumentos que podrían explicarla **(CIII, i2, a1)**.	
	Esgrime razones o puntos de vista en pro o en contra de una afirmación con el objeto de dar cuenta de la plausibilidad del enunciado **(CIII, i2, a2)**.	
	Sugiere una construcción auxiliar para enriquecer una representación que le permitan encontrar ideas para la justificación **(CIII, i2, a3)**.	
Selección de argumentos para explicar la validez de la conjetura **(CIII, i3)**.	Alude a la representación gráfica para explicar la validez de la conjetura con base en lo que se observa y lo que sucede ante el arrastre **(CIII, i3, a1).**	Explicar
	Asume como argumento válido el procedimiento de exploración o representación que dio cuenta del consecuente establecido en el enunciado de la conjetura **(CIII, i3, a2).**	
	Acompaña la explicación de una representación gráfica con la alusión a definiciones, hechos geométricos y/o procedimientos de construcción previos **(CIII, i3, a3)**.	
	Usa casos particulares para explicar las condiciones bajo las cuales ocurre la regularidad y a partir de ellos afirma la generalidad **(CIII, i3, a4)**.	
	Utiliza herramientas de Cabri, que le permiten obtener datos de la figura (medida de lados y ángulos, relaciones de perpendicularidad y paralelismo, entre otras) con miras a apoyar las explicaciones de tipo heurístico **(CIII, i3, a5)**	

Tabla 10. *Indicadores y acciones que constituyen la Categoría 3.*

4.2.4 CATEGORÍA IV. SELECCIÓN Y ENCADENAMIENTO DE ARGUMENTOS TEÓRICOS COHERENTES EN UNA CADENA DEDUCTIVA (C IV)

Esta categoría hace referencia al momento en el que el estudiante identifica, definiciones y hechos geométricos que le permiten justificar la conjetura. No se evidencia una organización en una cadena deductiva y no necesariamente se atiende a reglas de inferencia. El estudiante utiliza propiedades que conoce (estudiadas o no en clase de geometría) en su justificación y no necesariamente las explícita. Los indicadores que hemos definido para esta categoría son: selección de referentes teóricos pertinentes para la justificación de la conjetura y uso de referentes teóricos en la justificación de la misma.

4.2.4.1 Selección de referentes teóricos pertinentes para la justificación de la conjetura **(CIV, i1)**

Este indicador hace referencia a las posibles acciones que pueden realizar los estudiantes para identificar los referentes teóricos que les permiten justificar una conjetura. Estas acciones están encaminadas a indagar sobre la pertenencia de utilizar una definición o hecho geométrico específico en una justificación. Algunas de estas acciones son: revisar el antecedente y consecuente de un hecho geométrico con miras a identificar la relación de éste con lo que se desea justificar **(CIV, i1, a1)**; señalar definiciones y hechos geométricos que hacen alusión a los objetos geométricos que están involucrados en la conjetura que se quiere justificar **(CIV, i1, a2);** sugerir o planear un camino para realizar la justificación **(CIV, i1, a3)**; evaluar propuestas para la realización de la justificación **(CIV, i1, a4)**.

4.2.4.2 Encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva **CIV, i2)**

Este indicador hace referencia al uso de referentes teóricos en el proceso de justificación de una conjetura, los cuales pueden pertenecer o no al sistema teórico local construido en el marco de la clase de geometría. Algunas de las acciones que pueden adelantar los estudiantes en el marco de este indicador son: aludir a referentes teóricos del marco referencial construido en clase de geometría sin hacerlos explícitos en el proceso de justificación **(CIV, i2, a1)**; usar definiciones y hechos geométricos tomados de un marco referencial distinto al construido en clase de geometría (por ejemplo tomados de libros, evocados de clases de matemáticas previas, etc.) de manera implícita o explícita **(CIV, i2, a2)**; inferir propiedades que no han sido estudiadas en el marco de la clase, a partir de definiciones y hechos geométricos propios del sistema teórico construido **(CIV, i2, a3)**; plantear uno o más argumentos de manera informal en la que se evidencia una conexión deductiva **(CIV, i2, a4)**.

CATEGORÍA IV: SELECCIÓN Y ENCADENAMIENTO DE ARGUMENTOS TEÓRICOS COHERENTES EN UNA CADENA DEDUCTIVA (C IV).		
Indicadores	**Posibles acciones de los estudiantes**	**Acciones de la actividad demostrativa**
Selecciona referentes teóricos pertinentes para la justificación de una conjetura **(CIV, i1)**.	Revisa el antecedente y consecuente de un hecho geométrico con miras a identificar la relación de éste con lo que se desea justificar **(CIV, i1, a1).**	Probar
	Señala definiciones y hechos geométricos que hacen alusión a los objetos geométricos que están implícitos en la conjetura que se quiere justificar **(CIV, i1, a2).**	
	Sugiere o planea un camino para realizar la justificación **(CIV, i1, a3)**.	
	Evalúa propuestas para la realización de la justificación **(CIV, i1, a4)**.	
Encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva **(CIV, i2)**.	Alude a referentes teóricos del marco referencial construido en clase de geometría sin hacerlos explícitos en el proceso de justificación **(CIV, i2, a1).**	Probar
	Usa definiciones y hechos geométricos tomados de un marco referencial distinto al construido en clase de geometría de manera implícita o explícita **(CIV, i2, a2).**	
	Infiere propiedades que no han sido estudiadas en el marco de la clase, a partir de definiciones y hechos geométricos del sistema teórico construido **(CIV, i2, a3)**.	
	Plantea uno o más argumentos de manera informal considerando una posible conexión deductiva entre ellos **(CIV, i2, a4)**.	

Tabla 11. *Indicadores y acciones que constituyen la Categoría 4*.

4.2.5 CATEGORÍA V. ORGANIZACIÓN DE LA CADENA DE ARGUMENTOS EN LA FORMA DE UNA PRUEBA QUE ES ACEPTABLE DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LOS ESTÁNDARES MATEMÁTICOS VIGENTES (CV)

Esta categoría corresponde a la construcción de pruebas por parte del estudiante. Las acciones de los estudiantes en esta categoría se dan cuando él fundamenta sus justificaciones en el cuerpo de conocimientos que han sido institucionalizados en la clase de geometría, pero no necesariamente explicitar lo que justifica cada inferencia. Las cadenas en esta categoría son deductivas pero no necesariamente se hacen explícitos los garantes de cada afirmación. Los indicadores que dan cuenta de esta categoría son: uso del sistema teórico local y uso de reglas de inferencia.

4.2.5.1 Organización de la cadena de argumentos de forma deductiva y atendiendo a reglas de inferencia (CV, i1)

Bajo este indicador están todas aquellas acciones el permiten que usa el estudiante para elaborar y organizar una prueba aceptable desde el punto de vista de los estándares matemáticos: se enmarcan acciones como: reconocer que la conclusión de un paso de la justificación se constituye en la condición inicial del siguiente o siguientes pasos **(CV, i1, a1)**; evaluar las condiciones dadas o los pasos previos de la justificación para asegurar que son suficientes para establecer una conclusión **(CV, i1, a2)**; utilizar reglas de inferencia de manera implícita que son válidas matemáticamente **(CV, i1, a3)**.

4.2.5.2 Fundamenta sus justificaciones en el cuerpo de conocimientos institucionalizados en la clase de geometría (CV, i2)

Este indicador recoge todas aquellas acciones de los estudiantes que muestran el uso de referentes teóricos, convenciones y lenguaje geométrico (institucionalizados en clase) de manera implícita en la elaboración de una justificación matemática. En este sentido, consideramos acciones de esta indicador: utilizar definiciones y hechos geométricos institucionalizados en la clase de geometría para justificar un enunciado matemático **(CV, i2, a1)**; utilizar el lenguaje y la simbolización geométrica de acuerdo con el rigor y las normas sociomatemáticas establecidas en clase **(CV, i2, a2)**; dejar implícitos los garantes de afirmaciones hechas en el proceso de justificación **(CV, i2, a3)**.

CATEGORÍA V: ORGANIZACIÓN DE LA CADENA DE ARGUMENTOS EN LA FORMA DE UNA PRUEBA QUE ES ACEPTABLE DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LOS ESTÁNDARES MATEMÁTICOS VIGENTES (CV).		
Indicadores	**Posibles acciones de los estudiantes**	**Acciones de la actividad demostrativa**
Organización de la cadena de argumentos de forma deductiva y atendiendo a reglas de	Reconoce que la conclusión de un paso de la justificación se constituye en la condición inicial del siguiente o siguientes pasos **(CV, i1, a1).**	Probar

inferencia **(CV, i1)**.	Evalúa las condiciones dadas o los pasos previos de la justificación para asegurar que son suficientes al establecer una conclusión **(CV, i1, a2).**	
	Utiliza reglas de inferencia que son válidas matemáticamente de manera implícita **(CV, i1, a3)**.	
Fundamenta sus justificaciones en el cuerpo de conocimientos institucionalizados en la clase de geometría **(CV, i2)**.	Utiliza definiciones y hechos geométricos institucionalizados en la clase de geometría para justificar un enunciado matemático **(CV, i2, a1).**	Probar
	Utiliza el lenguaje y la simbolización geométrica de acuerdo con el rigor y las normas sociomatemáticas establecidas en clase **(CV, i2, a2).**	
	Deja implícitos los garantes de afirmaciones hechas en el proceso de justificación **(CV, i2, a3)**.	

Tabla 12. *Indicadores y acciones que constituyen la Categoría 5*.

4.2.6 CATEGORÍA VI. APROXIMACIÓN A LA PRUEBA FORMAL

Esta categoría corresponde la construcción de pruebas formales por parte del estudiante. Además de fundamentar sus justificaciones en el cuerpo de conocimientos que han sido institucionalizados en la clase de geometría y utilizar reglas de deducción socialmente aceptadas, construye cadenas de argumentos en las que las propiedades enunciadas así como sus relaciones son explícitas **(CVI, i1, a1)**. En esta categoría las pruebas son descontextualizadas, despersonalizadas y destemporalizadas **(CVI, i1, a2)**.

4.2.6.1 Construye cadenas de argumentos en las que el estudiante es consiente de las propiedades enunciadas, sus relaciones y reglas de inferencia **(CVI, i1)**

Este indicador encierra las acciones de los estudiantes que son evidencia de la construcción de justificaciones a través de cadenas deductivas y reglas de inferencia que explicitan los referentes teóricos utilizados en el proceso de deducción. Las acciones que proponemos son: hacer explicito lo dado, lo que infiere y el garante que sustenta cada inferencia **(CVI, i1, a1)**; utilizar reglas de deducción socialmente aceptadas de manera explícita

(CVI, i1, a2); usar el lenguaje y la simbolización geométrica de acuerdo con el rigor de los estándares matemáticos vigentes para la presentación de una demostración **(CVI, i1, a3).**

4.2.6.2 Elabora justificaciones descontextualizadas, despersonalizadas y destemporalizadas (CVI, i2)

Este indicado está relacionado con las acciones que buscan una demostración teniendo en cuenta la forma semántica y sintáctica de las demostraciones formales de los matemáticos. Para este indicador proponemos dos acciones: comunicar sus resultados como parte de una teoría y no como resultado de una situación particular **(CVI, i2, a1);** elaborar la justificación sin aludir a expresiones en tercera persona **(CVI, i2, a2)**, es decir, omitir el carácter de temporalidad a las afirmaciones que son garante de los argumentos que utilizan en su justificación.

CATEGORÍA VI: APROXIMACIÓN A LA PRUEBA FORMAL (CVI).		
Indicadores	**Posibles acciones de los estudiantes**	**Acciones de la actividad demostrativa**
Construye cadenas de argumentos en las que las propiedades enunciadas, sus relaciones y reglas de inferencia son explicitas **(CVI, i1).**	Hacer explicito lo dado, lo que infiere y el garante que sustenta cada inferencia **(CVI, i1, a1).**	Demostración formal
	Utilizar reglas de deducción socialmente aceptadas de manera explícita **(CVI, i1, a2).**	
	Usar el lenguaje y la simbolización geométrica de acuerdo con el rigor de los estándares matemáticos vigentes para la presentación de una demostración **(CVI, i1, a3).**	
Elabora justificaciones descontextualizadas, despersonalizadas y destemporalizadas **(CVI, i2).**	Comunica sus resultados como parte de una teoría y no como resultado de una situación particular **(CVI, i2, a1).**	Demostración formal
	Elabora su justificación sin aludir a expresiones en tercera persona **(CVI, i2, a2).**	

Tabla 13. *Indicadores y acciones que constituyen la Categoría 6.*

En particular para este estudio, no esperamos evidenciar en las acciones de los estudiantes en edad extraescolar, acciones enmarcadas en los indicadores de las categorías 5 y 6, dado que consideramos que el tiempo destinado en la implementación no fue suficiente para acercar a los estudiantes a la demostración formal.

Para efectos de la lectura de las categorías, hemos añadió un anexo (ANEXO VII) en el cual reportamos las tablas de indicadores y acciones correspondientes a cada categoría.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En este capítulo se presenta el análisis realizado a la actividad del grupo de estudiantes cuando se enfrentaron a las situaciones mencionadas en el apartado 3.6.4 de la metodología. Dicho análisis se realizó con base en episodios tomados de las transcripciones de las sesiones de clase y la entrevista, y en la producción escrita de los estudiantes. Las transcripciones se encuentran como anexo (ANEXOS III, IV y V) en este trabajo.

Para efectos de la presentación del análisis, primero aludimos a la descripción e interpretación de la actividad de los estudiantes en el marco de la situación concerniente a la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo. Posteriormente, realizamos la descripción y análisis de su actividad en relación con la situación concerniente a la formulación de la conjetura y el planteamiento de la justificación del hecho geométrico del triángulo rectángulo.

Para cada una de las situaciones hemos organizado el análisis de la siguiente manera: en primer lugar hacemos una descripción general de la actividad de los estudiantes aludiendo a los momentos en los que ésta fue dividida para su análisis. En segundo lugar, presentamos para cada uno de los momentos en los que dividió la actividad de los estudiantes, una descripción detallada de la misma y el análisis respectivo con base en las categorías descritas en el Capítulo 4. Finalmente, hacemos una síntesis del análisis realizado, mostrando resultados generales de la actividad de los estudiantes.

5.1 SITUACIÓN 1: ¿PARA QUÉ TIPO DE TRIÁNGULO LA SUMA DE LAS MEDIDAS DE SUS ÁNGULOS ES MENOR QUE 120 GRADOS?

5.1.1 DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES

Al iniciar la sesión, la profesora propuso a la clase abordar el siguiente problema: *¿Para qué tipo de triángulo la suma de la medida de sus ángulos es menor que 120 grados?* El grupo de estudiantes, escogido para este estudio, empezó construyendo un triángulo con la herramienta correspondiente de Cabri. Posteriormente, tomaron las medidas de sus ángulos y lados; manifestaron que estas últimas no eran necesarias porque la tarea sólo implicaba medir los ángulos. La observación de las medidas de los ángulos permitió al grupo de estudiantes hacer una primera estimación de la suma de las mismas, apreciando que la adición era mayor que 120. Esta primera estimación condujo a los alumnos a centrarse en la búsqueda de un triángulo específico en donde se cumpliera la propiedad establecida en la situación. Indagar por un triángulo particular encaminó la actividad de los estudiantes hacia la exploración de posibles estrategias de solución. Las estrategias utilizadas por los estudiantes fueron: someter el triángulo construido a la acción de arrastre para cambiar su tamaño y verificar si la medida de sus ángulos dependía de la longitud de sus lados; construir triángulos específicos (rectángulo, equilátero) para comprobar si alguno de ellos cumplía con la condición requerida; arrastrar un vértice del triángulo con miras a modificar la medida de uno de los tres ángulos, buscando mantener la medida de los otros dos ángulos cuyo vértice no se sometía al arrastre; y sumar las medidas de los ángulos. La adición de las medidas de los ángulos la realizaron utilizando lápiz y papel debido a que no conocían la herramienta "*calculadora*" de Cabri.

La estrategia de la suma de medidas de ángulos (no la estimación de la suma de las medidas de los ángulos), fue sugerida por la profesora al grupo de estudiantes desde el principio, pero ellos inicialmente no la aceptaron porque no les permitía encontrar el tipo triángulo para el cual la suma de las medidas de sus ángulos era menor que 120. Luego de descartar las demás estrategias citadas, por intervención de la profesora, los alumnos decidieron retomar la estrategia de la suma de las medidas de los ángulos del triángulo. En esta ocasión dicho método cobra sentido para ellos dado que observan que sin importar el triángulo construido la suma de las medidas de sus ángulos siempre es 180. Reconocer el invariante lleva a la solución de la situación, dado que uno de los integrantes del grupo manifiesta que no hay triángulo que satisfaga la condición del problema propuesto.

El reconocimiento y la aceptación del invariante por parte del grupo de estudiantes, se apoyó en la observación que hizo uno de sus integrantes del comportamiento de las medidas de los ángulos del triángulo cuando éste se sometía al arrastre. Específicamente, Sandra identificó que el resultado de la suma era invariante porque al tratar de disminuir la medida de uno de los ángulos del triángulo a través del arrastre, por lo menos una de las medidas de los otros dos ángulos aumentaba, lo cual implicaba conservar el valor de la suma de las medidas de los ángulos del triángulo.

Luego de haber identificado el invariante y haber solucionado la situación planteada, la profesora pidió a los estudiantes escribir el hecho geométrico correspondiente. La formulación del hecho geométrico estuvo guiada por la intención de los estudiantes de hacer explicito el antecedente y el consecuente de la situación en el formato condicional "si…entonces…" y por señalar que la propiedad era válida para todo triángulo. Finalmente, el hecho geométrico formulado por el grupo de estudiantes fue: *Si sumamos la medida de los ángulos de un triángulo entonces el resultado va a ser siempre 180*.

A continuación describiremos la actividad de los estudiantes, teniendo en cuenta las estrategias de solución que propusieron durante el desarrollo de dicha actividad. En este sentido, el trabajo de los estudiantes será descrito y analizado atendiendo a los siguientes momentos de su actividad:

- ***Momento 1***. *En la búsqueda de un triángulo particular: Interpretan la situación como la búsqueda de un triángulo específico que cumpla con la condición propuesta.*
- ***Momento 2.*** *Suman la medida de los ángulos: Utilizan una estrategia de solución sugerida por la profesora sin apropiarse de tal sugerencia.*

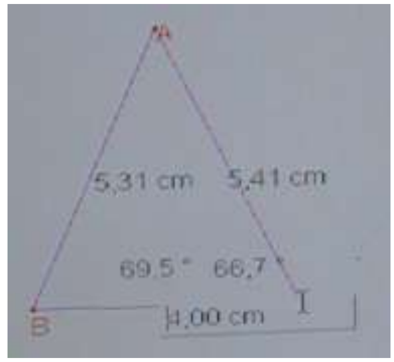
- ***Momento 3.*** *¿Cómo disminuir la medida de los ángulos?: Plantean y verifican hipótesis buscando disminuir la medida de los ángulos del triángulo.*
- ***Momento 4.*** *El triángulo rectángulo y equilátero: Exploran e identifican la regularidad luego de generar y descartar varias estrategias de solución de la tarea.*
- ***Momento 5.*** *Nuevamente suman la medida de los ángulos: Identifican la regularidad luego de haber generado y descartado varias estrategias de solución de la tarea.*
- ***Momento 6.*** *¿Pero por qué siempre da 180?: Justifican por qué es válido el invariante encontrado.*
- ***Momento 7.*** *¿Cómo escribimos el hecho geométrico?: Formulan el hecho geométrico correspondiente a la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo.*

5.1.2 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS MOMENTOS EN LOS QUE SE SUBDIVIDIÓ LA ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES

5.1.2.1 *Momento 1. En la búsqueda de un triángulo particular: interpretan la situación como la búsqueda de un triángulo específico que cumpla con la condición propuesta*

Luego de proponer la tarea a los estudiantes, ellos inician el desarrollo de la misma construyendo un triángulo con la herramienta correspondiente del programa. Posteriormente toman las medidas de los ángulos y lados del triángulo construido.

1.	Sandra	[Construye un triángulo, nombra sus vértices, mide sus tres lados y dos de sus ángulos,] Estamos hablando de ángulos, solo hay necesidad de medir los ángulos. ¿Ahí falta un ángulo, cierto? [Se refiere a que falta medir el ángulo BAC] El ABC, el ACB ¿Cuál falta?



2. Diego Es el de acá [Señala el $\angle CAB$].
3. Sandra ACB, ABC, falta uno. [señalan los ángulos del ΔABC] ¿CAB? Sumándolos.

En esta primera intervención, Sandra utiliza herramientas de Cabri para construir una representación de la situación planteada. Específicamente, utiliza las herramientas: *triángulo*, *medida de lados*, *medida de ángulos* y *nombrar*. La toma de medidas (**CI, i4, a2**) se constituye en una acción de exploración, que le permite a la estudiante buscar características particulares de la figura construida, concernientes a las medidas de los elementos que la componen. Medir los lados y ángulos del triángulo implica visualizar los segmentos y ángulos como elementos constitutivos del mismo (**CI, i4, a8**), dado que para tomar dichas medidas debe identificar los vértices del triángulo que los definen. Consideramos que la visualización de sus partes es la que permite a Sandra identificar que aún falta la medida de uno de los ángulos del triángulo y nombrar ($\angle ABC\ y\ \angle ACB$) los que ya ha medido [1,3]. Tal visualización también pudo estar influenciada por la definición de triangulo, dado que pudo haber considerado que un triángulo determina tres ángulos y aún falta uno de ellos por medir.

La construcción del triángulo y la alusión a sus ángulos son evidencia de que la estudiante reconoce dichos objetos como elementos geométricos involucrados en la situación **(CI, i1, a1)** Así como la identificación de que los lados del triángulo no están implicados en la tarea propuesta lo cual es una evidencia de una correcta interpretación del enunciado. Esto último conduce a que la estudiante centre su atención en la medida de los ángulos e identifiquen que aún falta medir uno de ellos ($\angle BAC$) para iniciar el estudio de la situación.

4.	Diego	[Observa los dos ángulos medidos, $m\angle ABC = 69.5$ y $m\angle ACB = 66.7$] Ahí da más de [mientras Sandra señala los vértices C, A y B para tomar la medida del $\angle CAB$]. […]
6.	Diego	[Observa la medida del $\angle CAB$] 43 coma 8. No, pero ahí da más, de 120.
7.	Sandra	[Lee de nuevo el problema] La suma interna de sus ángulos sea menor de 120 grados. Para qué tipo de triángulos.
8.	Diego	Ahí da mayor de 120. Da más de 120. [Mientras tanto Sandra mira a la pantalla].
9.	Sandra	Pero, dice ¿para qué tipo de triángulo? [Sandra comienza a escribir en una hoja lo que han hecho hasta el momento] Una idea, Diego.

En la intervención 4, Diego manifiesta que la suma de las medidas de los ángulos del triángulo sobrepasa los 120 grados. Dicha afirmación probablemente es producto de una estimación que hace usando las medidas de los $\angle ABC$ y $\angle ACB$. Esta estimación parece corroborarla cuando Sandra toma la medida del tercer ángulo [4 y 6]. Reiterar que la suma de las medidas de los ángulos es mayor que 120 [6], motiva a Sandra a leer nuevamente la tarea [7]. En su lectura, la estudiante cambia el orden de la pregunta, mencionando primero qué debe cumplir el triángulo (la suma interna de sus ángulos sea menor de 120 grados) y luego, enfatizando en *para qué tipo de triángulo* se cumple esa condición. Leer la tarea en esta dirección es otra evidencia de la correcta interpretación que hace la estudiante del enunciado en tanto que discrimina entre la condición de la situación (la suma de las medidas de los ángulos sea menor que 120 grados) y lo que se pide en la misma (un triángulo que cumpla dicha condición) **(CI, i1, a2).** Tal discriminación se vio favorecida por la toma de medidas y las intervenciones de Diego, permitiendo que Sandra interpretara correctamente la situación que se evidencia en la intervención 9, donde Sandra señala nuevamente que la tarea consiste en la búsqueda de un triángulo particular.

En la intervención 7, Sandra no cuestiona la condición impuesta al triángulo que se pide buscar y la toma como una afirmación cierta (i.e., toman como cierto que *la suma de las medidas de los ángulos es menor que 120*), quizás porque previamente no se había enfrentado a situaciones en las que la condición dada fuese falsa. No dudar de la posibilidad de construir un triángulo con dicha condición y admitirlo como cierto, hace que la estudiante asuma que las estimaciones realizadas por Diego [6,8] son producto de considerar un caso particular que no responde a la pregunta y además, la hace pensar que lo que han hecho hasta el momento no es correcto. Cuando Sandra, se dirige a Diego solicitándole una idea para la solución de la tarea [9], de manera implícita le sugiere descartar el triángulo que han construido y pensar en el tipo de triángulo que puede solucionarla. En este sentido, Sandra ha sugerido a su compañero reorientar la exploración de la construcción hacia la búsqueda de un triángulo específico **(C1, i4, a5)**, decisión que creemos es consecuencia de releer el enunciado [7], dado que ésta fue la acción que le permitió identificar lo que debían buscar.

5.1.2.2 *Momento 2. Suman la medida de los ángulos: utilizan una estrategia de solución sugerida por la profesora sin apropiarse de tal sugerencia.*

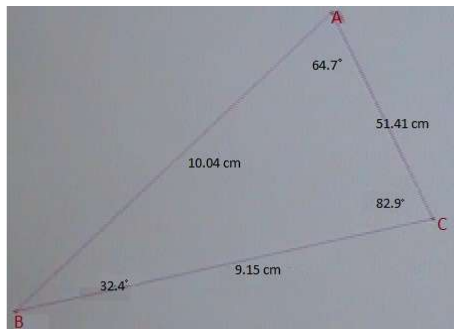
En el instante en que Sandra se pregunta acerca del tipo de triángulo, se acerca la profesora para indagar sobre lo que están haciendo. Sandra manifiesta que aún no han encontrado la manera de solucionar la situación, al tratar de explicar en qué consiste, señala nuevamente su preocupación por encontrar un triángulo específico. La profesora, al identificar que la pareja de estudiantes ha centrado su atención en la pregunta *¿para qué tipo de triángulo?*, decide cuestionarlos sobre la estrategia que deberían seguir para responder a la tarea.

29.	P	No, pero, no lea, explíquelo con sus palabras.
30.	Sandra	Es que en esas estoy yo. ¿Para qué tipo de triángulo?
31.	P	Pues, eso es lo que tengo que encontrar, ¿cierto? Pero ¿qué es lo que estoy pidiendo que haga con ese triángulo?
32.	Sandra	Que la suma de sus ángulos sea menor de 120 grados.

La intervención 31 de la profesora avala la correcta interpretación que da Sandra a la situación planteada [30], puesto que con la frase "*eso es lo que tengo que encontrar*", ella le corrobora a la estudiante que la tarea consiste en la búsqueda de un triángulo particular cuya suma de la medida de sus ángulos debe ser menor de 120. Aunque la intención de la profesora es encaminar a los estudiantes a identificar que la suma, y no la estimación, de las medidas de los ángulos es la estrategia apropiada para solucionar la tarea, la pregunta que realiza [31] no resulta afortunada ni coherente con este propósito, dado que lleva a Sandra a mencionar la condición de la situación [32] sin mencionar una estrategia para solucionarla.

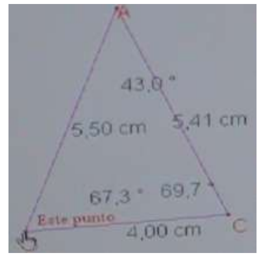
La intervención 32 de Sandra la hemos codificado como **C1, i1, a2**, porque en ella nuevamente recalca lo que se pide en la tarea. Identificar que los estudiantes no adoptan la estrategia de la suma de la medida de los ángulos, conduce a la profesora a realizar la pregunta nuevamente, pero esta vez haciendo explícito su propósito [39].

39.	P	Ah, listo. Entonces qué. Además, de eso ya tienes las medidas de los ángulos. Ahora, ¿yo qué debería empezar a hacer con esas medidas para responder a la pregunta?
40.	Diego	Sumarlos ¿no?
41.	P	Listo. Entonces ¿tú qué harías? [Dirige la pregunta a Diego]
42.	Diego	Pues sumarlos así, pero ni modos me da más de 120. [Se refiere al triángulo que tienen en ese momento en la pantalla]

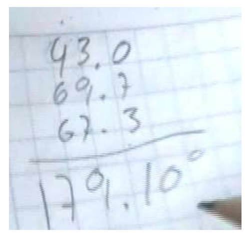


43.	P	Pues entonces suma esos y me dices cuánto te dio. Después muevan el triángulo y me dicen cuánto les da. [La profesora se retira del grupo].

44.	Sandra	[Arrastra los vértices del triángulo ABC]. Ese es el que teníamos. [Se refiere a que el triángulo que tienen ahora se parece al primero exploraron].



Ahí dice para qué tipo de triángulos, o sea. [Sandra observa que Diego suma las medidas de los tres ángulos en su cuaderno, obteniendo como resultado 179.10] Le da 179.



Con la pregunta [39], la profesora logra que Diego aluda a la suma de la medida de los ángulos. Sin embargo, no consigue que los estudiantes sean consientes de la utilidad de la estrategia que ella les sugiere, es decir, no consigue que ellos realicen varias veces la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo para observar que su suma es 180. La intervención 42 de Diego es evidencia de lo anterior puesto que el estudiante señala que no tiene sentido realizar la suma de la medida de los ángulos del triángulo, porque la suma da mayor de 120; dicha afirmación es coherente con el proceder del estudiante, quien inicialmente no efectúa la suma. Luego, sin estar convencido de la utilidad de la estrategia, la realiza con lápiz y papel tomando las medidas de los ángulos del triángulo que tiene en pantalla [44], probablemente como resultado de la insistencia de la profesora por hacer la adición de las medidas de los ángulos y estudiar otros casos [43].

A diferencia de Diego, Sandra no tiene en cuenta la estrategia indicada por la profesora; esto se revela al no sumar las medidas de los ángulos como ella lo aconseja y en manifestar, nuevamente, que la tarea requiere de un triángulo particular [44]. En la intervención 44 Sandra, de manera implícita, señala que no tiene sentido sumar las medidas de cualquier triángulo propuesto dado que la tarea sugiere encontrar uno específico. La suma que realiza Diego da como resultado 179,10. Al no ser la respuesta esperada (un número menor que 120), ésta genera en la pareja de estudiantes dudas acerca de la correcta aplicación del algoritmo de la suma y los impulsa a verificar sus procedimientos.

44.	Sandra	[…] Le da 179.
45.	Diego	179,10 grados.
46.	Sandra	Pero si nos tiene que dar menos de 120. ¿Está mal sumado?
47.	Diego	¿Sí está mal sumada? [Comprueba la suma realizada] tres, doce y siete, diecinueve, llevo una. Once y seis, diecisiete.
48.	Sandra	[Comprueba nuevamente la suma de las unidades] Diecinueve. Diez, dieciséis y una diecisiete.
49.	Diego	¿La suma de éste pasa acá? ¿No? [Señala las cifras después de la coma].
50.	Sandra	No. ¿O el uno? No.
51.	Diego	¿Sí? ¿Está mal sumado?

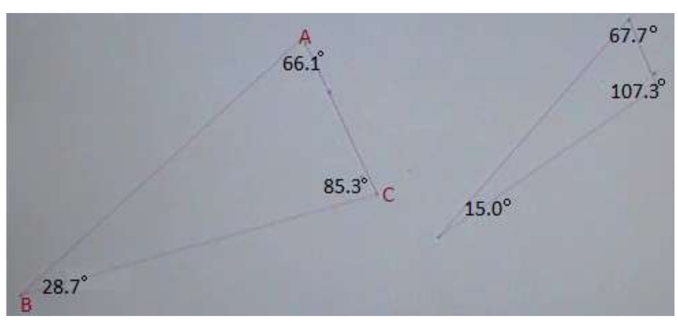
En el primer momento de la actividad de los estudiantes se mostró cómo ellos descartan los triángulos construidos al estimar que la suma de las medidas de sus ángulos no es menor que 120. Es de resaltar que en esta ocasión, el resultado obtenido por Diego [45] no suscita la misma reacción en ellos. Utilizar el algoritmo de la suma para obtener el resultado y no sólo hacer una estimación del mismo, contribuyó a que los estudiantes sintieran la necesidad de comprobar los cálculos [47 y 48] que obtuvieron al operar los datos [46]. Esta acción de comprobar probablemente, es producto de tener que dar cuenta del resultado a la profesora. Sospechar que la respuesta obtenida no es correcta y que el error está en la suma de la parte decimal [49], no es suficiente para que Sandra y Diego lo identifiquen y lo corrijan. No corregir la suma, les impide ver que el resultado es 180. El observador interviene para explicar a la pareja de estudiantes cómo corregir la suma que han realizado. Aunque hacen la corrección, el resultado obtenido no les genera inquietud ni es útil para la solución de la pregunta planteada. Posiblemente dicho resultado no hubiera pasado inadvertido para los estudiantes, si hubieran conocido y utilizado la herramienta calculadora de Cabri para sumar las medidas de los ángulos de triángulo. El uso de esta herramienta les habría mostrado rápidamente que en todos los casos la suma es 180.

5.1.2.3 *Momento 3. ¿Cómo disminuir la medida de los ángulos?: plantean y verifican hipótesis buscando disminuir las medidas de los ángulos del triángulo*

Luego de hacer la corrección de la suma, Sandra y Diego se centran en arrastrar los vértices del ΔABC con miras a estudiar otros casos y encontrar algún invariante.

53.	Sandra	Es algo obvio, pero uno no [Hace una pausa]. El que medía cuánto [Mira las medidas que esta sumando Diego], el que medía 43, 69 [Hace referencia a la medida del $\angle BCA$]. Igual si lo volvemos a mover. [Arrastra el triángulo, obteniendo otras medidas para los ángulos].

54.	Diego	Agrándelo, eso. Volvámoslo y subámoslo que dé así a ver si da igual. [Lo dice mientras Sandra arrastra el ΔABC del vértice B].
55.	Sandra	Da 66,1.
56.	Diego	No da, no da igual.
57.	Sandra	Para no confundirnos [Borra las medidas de los lados del triángulo]. Hagamos otro ¿no? [Mientras busca la herramienta triángulo]. No pero igual qué puede cambiar.
58.	Diego	Es que haga uno más chiquitico.
59.	Sandra	Uno más chiquito. [Risas]. Hagamos uno más pequeño, ¿cierto? [Con la herramienta triángulo construye otro triángulo al lado derecho del ΔABC]. Pero igual, ¡Ah! No encuentro la herramienta [Se refiere a la herramienta medida de ángulo].



60.	Diego	Que sus ángulos internos sumados me dan menor que.
61.	Sandra	¿Para qué?, es ¿para qué? ¿Cierto?

62.	Diego	Para. No hay triángulo, ahí le da más de 120.
63.	Sandra	En el tamaño no va, o sea, en el tamaño no va [observa el último triángulo construido].
64.	Diego	Es en el tipo de triángulo.

En las intervenciones 53, 54 y 55 de los estudiantes, se evidencia que ellos se enfocan en comparar la medida del $\angle BAC$ con la medida que se obtiene para éste mismo ángulo al arrastrar el vértice B del triángulo. Esto con miras a verificar si esta medida cambia ante el arrastre. En este sentido se evidencia la acción de exploración **C1, i4, a3,** dado que los estudiantes utilizan la herramienta arrastre de Cabri para identificar invariantes en la construcción realizada. Inferimos que querían verificar una hipótesis que tenían al momento de arrastrar el vértice B del ΔABC: *arrastrar el triángulo de un vértice* (B) *que no corresponde al punto de intersección de los dos segmentos que forman el ángulo* $(A$ *es el punto de intersección de los segmentos* BA *y* $AC)$ *no modifica la medida de dicho ángulo (en este caso el ángulo* $BAC)$. Ello es evidencia de la acción **CI, i4, a4,** porque usan la herramienta arrastre para verificar hipótesis de solución implícitas en sus acciones. La dependencia implícita que los estudiantes plantean entre ángulo y vértice es evidencia de la acción **CI, i1, a3,** dado que de manera implícita plantean una hipótesis de solución.

Plantear una hipótesis de solución para luego verificar si es cierta se constituye en una acción de exploración que tiene como objetivo encontrar un triángulo particular en donde la suma de las medidas de sus ángulos sea menor que 120. Creemos que en la hipótesis que manejaban los estudiantes subyace una conceptualización implícita de ángulo evidenciando la acción **CI, i1, a4**. Creer que no mover el vértice de un ángulo implica mantener su medida, nos motiva a pensar que los estudiantes no son consientes de que al arrastrar uno de los vértices del triángulo se cambia la posición de los rayos que define sus ángulos y por ende también se modifican sus medidas. Pensar que la medida del ángulo esta sujeta a la posición del vértice, nos permite inferir que los estudiantes han construido una noción de ángulo como *punto de intersección de dos rayos y no como la unión de los mismos.*

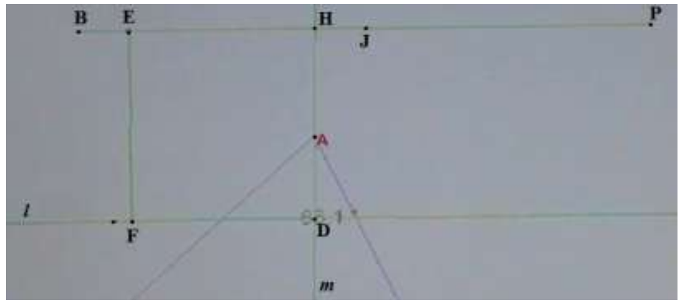
En la intervención 56 de Diego se descarta la validez de la hipótesis de solución citada. Observar que arrastrar uno de los vértices del triángulo modifica la medida de todos sus ángulos, orienta a Diego a establecer una nueva hipótesis de solución, evidenciando nuevamente la acción **(CI, i1, a3).** Esta nueva hipótesis, esta ligada a indagar sobre la dependencia que hay entre el tamaño del triángulo y la medida de sus ángulos. Aunque el supuesto: *disminuir la longitud de los lados del triángulo implica disminuir la medida de sus ángulos*, no es explicito, es posible inferirlo de las intervenciones 58 de Diego y 63 de Sandra. En la 63, Sandra, una vez llevada a cabo la idea de Diego, concluye que cambiar dichas longitudes (la de los lados del triángulo) no influye en el cambio de la medida de los ángulos del triángulo. Creemos que la construcción de dos triángulos (perceptualmente semejantes) [59], influyó en el rechazo de Sandra a tal hipótesis [63], dado que al tener la posibilidad de observarlos al mismo tiempo pudo comparar los ángulos correspondientes y visualizar que sus medidas no necesariamente disminuían cuando se reducía la longitud de los lados del triángulo. Visualizar los dos triángulos y compararlos identificando sus diferencias y semejanzas es una evidencia de la acción **CI, i4, a6**. El rechazo de la hipótesis mencionada impulsó a Diego a considerar nuevamente que la solución de la tarea dependía de un triángulo particular [64].

5.1.2.4 *Momento 4. El triángulo rectángulo y equilátero: exploran e identifican la regularidad luego de generar y descartar varias estrategias de solución de la tarea*

Descartar las hipótesis mencionadas, condujo a los estudiantes a estudiar algunos de los tipos de triángulos abordados en la clase (e.g., triángulo rectángulo y equilátero), como otra posible estrategia de solución para la tarea.

67.	Sandra	[…][8]. Ahí tocaría hacer como hicimos ése ¿cómo es que se llama? El polígono ese, ¿sí es polígono? ¿Sí? Y hacer un triángulo con medidas exactas. Se acuerda que hicimos una recta, ¿cómo se llama el triángulo? [Dirige las preguntas a Diego y comienza a realizar la siguiente construcción: traza $\overline{BP} \parallel l$ y $\overline{EF}$, aparentemente perpendicular, a $\overline{BP}$ y l. E es punto de $\overline{BP}$ y F un punto de l. Con la herramienta recta paralela, traza a m paralela a $\overline{EF}$ por el punto A del ΔABC. Sea D el punto de intersección de m y l, y H el punto de intersección de m y $\overline{BP}$. Posteriormente, halla el punto medio del segmento $\overline{EH}$, sin lograr ubicarlo dado que no señala los extremos de dicho segmento, sino los extremos de $\overline{BP}$. Por tanto obtiene el punto J que es el punto medio de $\overline{BP}$].

[8] Sandra estaba comentando a Diego que el tamaño del triángulo no influye en la medida de sus ángulos.



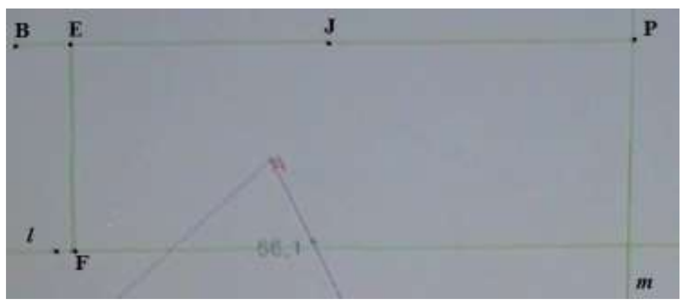
No me sale. A es que salió fue de este segmento [Se refiere al punto medio del segmento $\overline{BP}$]. ¿Cómo se borra?

68. Diego ¿Cuál? No.

69. Sandra Si mírelo acá hallo el punto medio de este segmento [señala el segmento $\overline{BP}$].

70. Diego Entonces le tocaba esta raya acá [se refiere a que la recta m debía haber pasado por J].

71. Sandra [Borra la recta m y la traza nuevamente pero pasando por el punto P]. Ahí esta el punto medio.

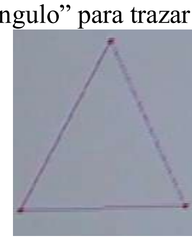


[Elige la herramienta triángulo y selecciona los puntos J y F, pero no puede trazar el triángulo] A ver si sale un triángulo. [Selecciona la herramienta triángulo nuevamente, pero al hacer clic en otro punto de la pantalla, y después seleccionar el punto J, observa que no puede trazar el triángulo que desea (ΔFEG)]. Mala opción. ¿Cómo se oculta? ¿No sabe cuál es?

En la intervención 67, Sandra manifiesta la intención de construir un triángulo con *medidas exactas*. Suponemos que se refiere a las medidas de los ángulos dado que en intervenciones anteriores ella había descartado la medida de los lados como parte de la solución de la tarea. En el episodio anterior [67 - 71], Sandra pone en evidencia la acción **CI, i2, a3,** dado que alude a procedimientos de construcción previos con miras a utilizar herramientas de Cabri (segmento, recta, recta paralela y punto medio de un segmento) que le permitan realizar una representación gráfica de un objeto geométrico abordado en clase. Aunque ella no hace explícito lo qué busca construir, por los pasos realizados suponemos que su objetivo era construir un triángulo rectángulo isósceles a partir de la construcción de un rectángulo, como se había trabajado en sesiones anteriores. Aunque Sandra no utiliza la herramienta "recta perpendicular" en su construcción, su proceder si evidencia la intención de hacer que $\overline{EF}$ sea perpendicular a $\overline{BP}$ y a l (por lo menos visualmente). La razón que puede justificar el no uso de la herramienta "recta perpendicular" de Cabri por parte de los estudiantes, es el no haberla utilizado en construcciones previas.

Durante su construcción, Sandra muestra dos dificultades con respecto al manejo de Cabri: (i) no identifica cómo seleccionar los objetos construidos en Cabri cuando un objeto está sobre otro [67] y (ii) no reconoce que la primera acción que realiza, luego de haber seleccionado una herramienta se constituye en el objeto inicial de su construcción. La segunda dificultad sucede en la intervención 71, en la que Sandra hace clic sobre la pantalla antes de seleccionar los vértices del triángulo y esto impide la construcción del triángulo con los vértices J, E, F, dado que la acción previa genera el primer vértice del polígono. La dificultad con el manejo del programa hace que ella no concluya su construcción y la descarte.

Al descartar la construcción anterior, los estudiantes deciden construir otro triángulo pero esta vez buscando que sea equilátero perceptualmente.

75.	Sandra	[Utiliza la herramienta "triangulo" para trazar un triángulo] ¿Cuál es pregunta? 
76.	Diego	Para qué tipo de triángulo la suma interna de sus ángulos es menor de 120 grados ¿Será que hay un tipo de triángulo que pueda darnos eso?
77.	Sandra	Pero tiene que ser que todos los ángulos sean iguales. ¿Cuál es ese triángulo? ¿Cuál es ese triángulo que todos sus ángulos?
78.	Diego	[Lee del cuaderno la definición de triángulo equilátero] triángulo equilátero es un triángulo que sus lados son congruentes.

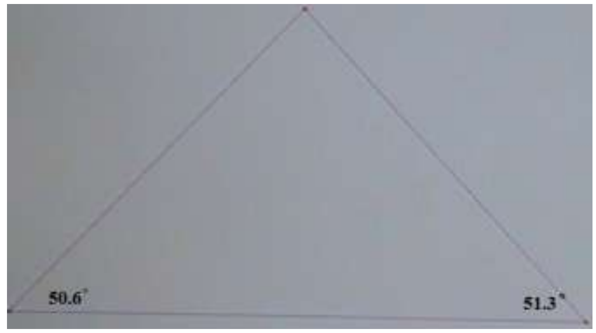
En la intervención 77, Sandra manifiesta su interés por construir un triángulo equilátero, al mencionar que "*tiene que ser que todos sus ángulos sean iguales…".* Aunque la estudiante parece ser consciente de la congruencia de los ángulos en este tipo de triángulos, el reconocimiento de tal propiedad no dirige su construcción en Cabri, la cual realiza con base en una percepción visual.

En la intervención 76, por primera vez Diego manifiesta la inquietud frente a la posibilidad de construir un triángulo específico que cumpla la propiedad solicitada. Dicha cuestión no es discutida y se obvia cuando Sandra propone considerar el triángulo equilátero [77] como posible solución a la situación planteada. La propuesta de construir este tipo de triángulo se constituye en una nueva estrategia de solución para la situación propuesta **(CI, i1, a3)**. La consideración de un triángulo equilátero obedece quizá a la posibilidad que ve Sandra de hacer que sus ángulos además de ser congruentes, tengan una medida específica que les permita determinar en qué caso la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es menor que 120 [77].

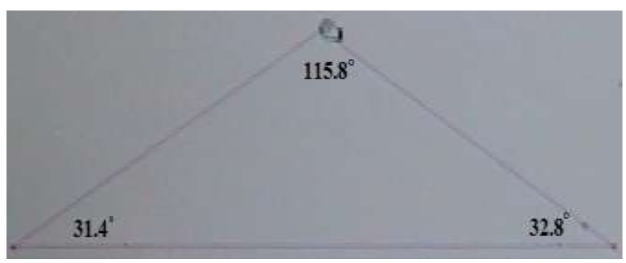
Realizar la construcción de un triángulo equilátero guiados por su percepción visual, conduce a Diego a verificar si el triángulo trazado se corresponde con el tipo de triángulo que buscan construir. A continuación se muestra un episodio de la clase en el que se muestran las acciones que llevan a cabo los estudiantes para verificar tal construcción.

80.	Diego	Vamos a medir los ángulos [Se refiere a los ángulos del triángulo construido. No toma las medidas de sus ángulos].
81.	Sandra	Por eso, pero si yo, el ángulo. Bueno si acá lo hacemos de 90 [señala un triángulo que esta dibujado en el cuaderno de Diego], entonces sería 180, entonces sería menos, pero imagínese solo son dos ángulos [señala dos ángulos del triángulo dibujado en el cuaderno] y son tres ángulos. Va tocar hacer uno, ¿cómo se hace un triángulo, que nos mida todos los ángulos de 45? ¿Cómo se hace un triángulo así? ¿Así? [Señala el triángulo dibujado en el cuaderno]. Apenas.

82.	Diego	¿Será que sí?
83.	Sandra	Ciento. [Hace los cálculos mentalmente] No mentiras nos pasaríamos. Claro. No hemos hecho nada.
84.	Diego	Si. [Toma las medidas de los ángulos del triángulo]



85.	Sandra	¿Por qué acá da cincuenta? ¿Por qué acá da diferente? [Se refiere a las medidas de los ángulos del triángulo construido] Se supone que estamos midiendo un ángulo igual. O sea. [No concluye la idea].
86.	Diego	¿Estos ángulos tienen que ser iguales? ¿No? [Señala los ángulos que miden 50.6 y 51.3 grados].
87.	Sandra	Se supondría. Claro que como lo corrí, no. [La estudiante vuelve a tomar la medida de los dos ángulos 50.6 y 51.3 grados. Obteniendo la misma medida] Si ahí esta bien.[Posteriormente, toma la medida del ángulo que falta y obtiene como resultado 78.0 grados] Hasta ahí ya íbamos cuadrando con la cuenta [Risas, arrastrar el triángulo] Acá aumenta [Se refiere al ángulo que mide 115,8 grados]



En la intervención 80 se observa la iniciativa de Diego por utilizar la herramienta "*medir ángulos*" para verificar que el triángulo construido es equilátero, lo cual es una evidencia de la acción **CI, i3, a1**, dado que usa herramientas de medición para comprobar la congruencia de los ángulos del triángulo construido. Es importante señalar que en su verificación subyace el hecho geométrico del triángulo equilátero, el cual señala que en este tipo de triángulos los ángulos son congruentes. Tomar y comparar las medidas de dos de los ángulos del triángulo, permitió a los estudiantes evidenciar que tales medidas no eran iguales y los condujo a reconocer que la construcción realizada no se correspondía con la construcción de un triángulo equilátero. En la intervención 87 de Sandra, se evidencia que la estudiante toma la medida del tercer ángulo con la intención de ver sí éste tiene una medida próxima a los 50 grados. Al observar que la medida es de 78 grados, confirma que el triángulo construido no es equilátero. Cuando la estudiante dice *“hasta ahí ya íbamos cuadrando con la cuenta…”* de manera implícita señala la posibilidad de obtener un triángulo equilátero a partir del triángulo construido, posibilidad que descarta al tomar la medida del tercer ángulo.

En la intervención 81, se evidencia que Sandra antes de medir los ángulos del triángulo construido en Cabri, trata de estimar cuanto deberían medir sus ángulos para dar solución a la situación propuesta. En primer lugar manifiesta que tales ángulos no pueden medir 90, dado que la suma de las medidas de los ángulos superaría los 120 solo con sumar dos ángulos de dicha medida. Luego plantea que los ángulos deben medir 45, opción que también descarta al realizar la suma y darse cuenta que con tres ángulos de dicha medida tampoco se cumpliría con la condición impuesta en la situación propuesta. El razonamiento realizado por la estudiante en relación con la medida de los ángulos del triángulo equilátero, no la conduce a alguna conclusión útil para la solución de la situación.

5.1.2.5 *Momento 5. Nuevamente suman la medida de los ángulos: Identifican la regularidad luego de haber generado y descartado varias estrategias de solución de la tarea*

La profesora se acerca nuevamente al grupo de estudiantes, para preguntarles sobre la manera como han abordado la situación propuesta. Observa que los estudiantes han construido varios triángulos, pero aún no han planteado una solución a la situación, por lo cual decide sugerirles de nuevo la estrategia de sumar las medidas de los ángulos del triángulo.

102.	P	Listo, entonces sumen esos a ver que pasa. Háganlo ahí en la hoja. […]
107.	P	No han hecho sumas y, entonces, cómo hacemos. [Diego comienza a sumar la medida de los ángulos del triángulo que han construido en Cabri].
108.	Sandra	Ahí sería…
109.	P	Y vuelva y mire otra opción, hasta que mire qué encuentra.
110.	Diego	[Obtiene como resultado180 grados. La suma la resuelve en la misma hoja en la que había realizado la suma que le había arrojado el mismo resultado] Nos da igual [Risas]. Igual que el de ahorita.
111.	Sandra	Entonces qué tipo de triángulo, es que la pregunta es: ¿para qué tipo de

triángulo…? [Sandra mira el cuaderno donde Diego está realizando las sumas]. Un tipo en especial. Y ¿por qué si las medidas son diferentes nos da lo mismo? Hagámoslo otra vez [Se refiere a sumar las medidas de los ángulos de otro triangulo obtenido a partir de la acción de arrastre] y sumemos otra vez. [al arrastrar obtiene un triangulo cuyas medidas de sus ángulos son 55,4; 76,9 y 47,7 grados] ¿Este ya da más?

112.	Diego	[Realiza la suma de los ángulos] Da igual.
113.	Sandra	[Risas] Disque da más.
114.	Diego	Así se agrande o se achique da 180 grados.
115.	Sandra	¿Y por qué da 180 grados? ¿Qué tipo de triángulo es este? [Risas, vuelve a arrastrar el triángulo y obteniendo las medidas de 75, 59 y 46 grados para sus ángulos]. Pero igual.
116.	Diego	Vuelve a dar 180 grados. [Suma las medidas de los tres ángulos y obteniendo 180 grados nuevamente] Da 180.
117.	Sandra	Espera bajamos éste [No se observa que esta señalando], pero es que si bajamos este, este aumenta, ¿no?
118.	Diego	Ahí da 180.
119.	Sandra	Mídalo así, de una.
120.	Diego	[Realiza la suma de las medidas 75, 59.9, 45.1 en su cuaderno] Ahí da lo mismo, da 180.
121.	Sandra	Mírelos.
122.	Diego	Da los mismos 180.
123.	Sandra	No es ningún tipo de triángulo que de, o ¿si? No debe haber, porque si todas las medida dan 180. Para que dé menos. Si un triángulo es. De la forma que dé, no hay triángulo que mida menos de 90 [creemos que la estudiante se equivoco y quería decir 120 grados]

Las intervenciones 102 y 107 de la profesora, motivaron a Diego a sumar la medida de los ángulos del triángulo construido en Cabri, obteniendo como resultado 180 grados [110]. El resultado que antes había pasado inadvertido para ellos ahora suscita inquietud y se constituye en una posible regularidad [110, 111]. Creemos que haber realizado una suma previa cuyo resultado también era 180 grados, hizo que los estudiantes, por primera vez, compararan los resultados obtenidos y se motivaran a verificar tal patrón en otros casos [112]. Evidenciar que tal suma siempre daba 180 condujo a Diego a manifestar como patrón invariante que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180 [114].

La intervención 111 de Sandra es reflejo de la acción **CI, i4, a3,** puesto que en ella muestra la utilidad del arrastre para estudiar casos particulares e identificar una propiedad invariante. Con la expresión "*¿por qué si las medidas son diferentes nos da lo mismo? Hagámoslo otra vez*" [111], Sandra manifiesta una inquietud por el resultado obtenido e impulsa a la verificación del mismo, utilizando la acción de arrastre para obtener un triángulo con diferentes medidas de ángulos que permitan verificar si tal resultado vuelve a repetirse. La acción de verificación también se ve reflejada en la intervención 117 de la estudiante, dado que en ella pone en evidencia la utilidad del arrastre para la verificación del patrón encontrado **(CII, i1, a1)**. Es importante señalar que es sólo hasta éste momento, que los estudiantes identifican la utilidad de la estrategia de la suma de las medidas de los ángulos para solucionar la situación propuesta, reconociendo que es la estrategia que les permite identificar el invariante. La aceptación de tal estrategia por parte de los estudiantes se da gracias a que ellos identifican por si mismos un patrón invariante en la suma de las medidas de los ángulos.

En la intervención 123 se evidencia que Sandra se apoyó en el invariante encontrado para proponer una primera solución a la situación. Cuando la estudiante manifiesta que "*no es ningún tipo de triángulo que dé, o ¿si? No debe haber, porque si todas las medidas dan 180…*", ella reconoce una regularidad en la suma de las medidas de los ángulos y de manera implícita la generaliza como propiedad invariante de todo triángulo, lo cual la conduce a señalar que no existe solución para la situación propuesta.

5.1.2.6 *Momento 6. ¿Pero por qué siempre da 180?: justifican por qué es valido el invariante encontrado*

Después de encontrar un patrón invariante en la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo, Sandra se pregunta en dos ocasiones el por qué de la ocurrencia de tal patrón.

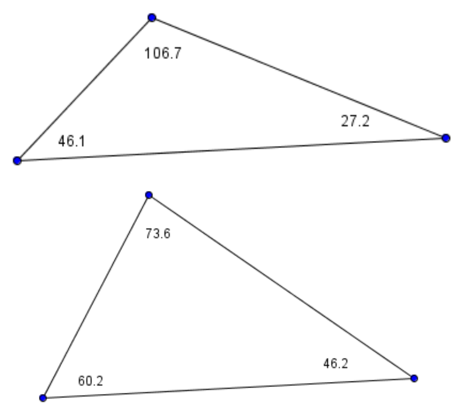
115.	Sandra	¿Y por qué da 180 grados? ¿Qué tipo de triángulos es este? [Risas, vuelve a arrastrar el triángulo]. Pero igual. […]
125.	Sandra	¿Qué mida menos? No pero que mida menos, no, que igual no. Porque igual siempre los vértices…Pero por qué, no me explico. Suma esto [se dirige a Diego, y le pide que sume las medidas de los ángulos del triángulo que está en pantalla. Tales medidas son: 119.1; 36 y 24] 119.1 [Es interrumpida por Diego].

En la intervención 115 se evidencia la intención de buscar una explicación que justifique por qué la suma de las medidas de los ángulos del triángulo da 180, lo cual es una evidencia de la acción **CIII, i2, a1**. Pensar que el patrón es propio de un triángulo particular direcciona las acciones de la estudiante hacia la verificación del patrón en otros triángulos, buscando identificar a través del arrastre **(CI, i4, a3)** en qué casos se cumple que dicha suma sea 180. El estudio de casos particulares se constituye en una acción encaminada a la búsqueda de argumentos basados en invariantes de las figuras construidas, las cuales ayudan a justificar una regularidad [125]. Esta búsqueda de argumentos pone en evidencia la acción **CIII, i3, a1,** dado que se alude a una representación gráfica para explicar la veracidad de una conjetura. Es de señalar que cuestionarse acerca del porqué del invariante es iniciativa de Sandra, dado que en ningún momento la profesora solicitó que justificaran su respuesta.

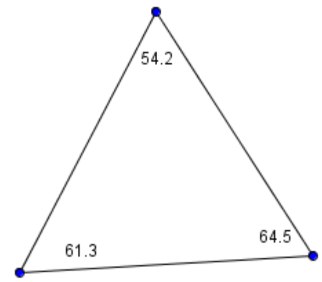
Sandra, en su intervención 125, menciona "…*las vértices…*" en un contexto en el que se está haciendo alusión a la medida de ángulos, lo cual nos hace pensar que la conceptualización de ángulo como punto de intersección de dos rayos, que señalábamos en apartados anteriores, es realmente la noción de ángulo que manejaban los estudiantes, en especial Sandra quién es la que hace alusión a los vértices.

Indagar sobre el porqué del patrón condujo a Sandra a identificar argumentos basados en las figuras construidas que le permitieran justificar la regularidad descubierta. El estudio de casos particulares, a partir de la acción de arrastre, le permitió a Sandra, observar cómo variaba la medida de los tres ángulos cuando se arrastraba uno de los vértices del triángulo.

131.	Sandra	Pero igual, al bajarlo siempre ese va aumentar y los otros van a disminuir. Entonces nos va a dar los mismos 180. ¿Si o no?, porque igual si lo subo, estos disminuyen y estos aumentan.[La estudiante arrastra uno de los vértices del triángulo, logrando que el ángulo pase de medir 106.7 a 73.6 grados].



132. Diego Lo que le digo es que ahora lo mueva con éste o con éste [Señala el ángulo que mide 46.4 y el que mide 27.2].



133. Sandra Si ve. [Le dice a Diego, al ver que el ángulo que esta arrastrando aumenta, y los otros dos disminuyen]. Si ve si éste aumenta, estos dos disminuyen; si éste aumenta los otros dos disminuyen. Pero igual la suma de los tres va a dar 180.

134. Diego 180.

135. Sandra [Escribe en el cuaderno: "Comenzamos haciendo un triángulo, nombramos sus vértices ABC, después le hacemos la suma de sus ángulos, lo hicimos de varias formas nos damos cuenta que las medidas del triángulo ABC es de 180 grados y podemos decir que no hay triángulo que sumando sus ángulos internos nos dé menos de 120 grados". Al terminar, lee al observador lo que ha escrito].

Hacer alusión a que al disminuir la medida de uno de los ángulos del triángulo se aumenta la medida de por lo menos uno de los otros dos ángulos [131], se constituye en una acción de visualización y exploración que le permite a Sandra observar una variación conjunta de la medida de los ángulos e identifica que lo que se resta a uno de los ángulos se la suma a los otros para mantener invariable la suma de las medidas de los mismos [133]. En las intervenciones 131y 133 de la estudiante, se ven reflejadas las acciones: **CI, i4, a8, CI, i4, a3** y **CIII, i3, a1**, puesto que, en ellas centra su atención en la medida de los ángulos reconociendo en estos elementos constitutivos del triángulo, reconoce y explica la propiedad invariante asociada a la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo a través de la acción de arrastre.

Vale la pena resaltar, que la variación conjunta de la medida de los ángulos del triángulo es una observación que Sandra había realizado previamente sin otorgarle la relevancia de las intervenciones 131 y 133. Es decir, a pesar de notar la variación de los ángulos, en un primer momento, no se percato de la importancia que tenía dicha observación para la solución de la tarea propuesta. Específicamente, Sandra observó la variación conjunta de los ángulos en el momento en que estaban verificando sí el triángulo construido era equilátero. Por tanto, la justificación planteada por Sandra se gesta en la exploración de casos particulares que en un momento de la actividad de los estudiantes se postularon como posible solución.

En la intervención 132 de Diego, el estudiante, de manera implícita, le manifiesta a Sandra no estar convencido del argumento que ella ofrece para validar la propiedad invariante. Por ello le sugiere someter nuevamente el triángulo a la acción de arrastre, pero esta vez considerando otro vértice. Dicha sugerencia es evidencia de la acción **CII, i1, a1** dado que señala la importancia de la arrastre para verificar la propiedad invariante. La intervención de Diego motiva a Sandra a repetir su explicación, aludiendo nuevamente a la representación gráfica para explicar a partir ésta la recurrencia del patrón, lo cual evidencia dos acciones sujetas al reconocimiento de argumentos para explicar la validez de una conjetura: el uso de representaciones gráficas para sustentar explicaciones **(CIII, i3, a1)** y el uso de casos particulares para explicar las condiciones bajo las cuales ocurre la regularidad y exponer una generalidad **(CIII, i3, a4)**.

La intervención 132 de Diego, resulta afortunada en términos de la aceptación de la regularidad dentro del grupo, dado que por un lado le permite a Sandra ratificar y convencerse del patrón descubierto [133] y por el otro lo lleva a él a aceptar la explicación de Sandra y la validez del invariante que ella propone. Esto se ve reflejado en la intervención 134, donde Diego afirma que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180. La aceptación de la propiedad invariante se ve reflejada en la intervención 135 de Sandra, en la que decide escribir lo encontrado, luego de repetir la explicación a su compañero. Al parecer la escritura del invariante esta motivada por la afirmación de Diego en la intervención 134, dado que Sandra pudo haberla tomado como una aceptación a su explicación.

Es de resaltar que Sandra da respuesta a la tarea solo hasta que ha encontrado un argumento que le permite justificarla y persuadir a su compañero. El texto que escribe esta estudiante y que luego lee al observador, evidencia su convencimiento de que no existe triángulo que cumpla con la condición impuesta en la situación y que además la suma de la medida de los ángulos de un triángulo es siempre 180.

5.1.2.7 *Momento 7. ¿Cómo escribimos el hecho geométrico?: formulan el hecho geométrico correspondiente a la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo*

Después de haber manifestado el reconocimiento de una generalidad, la profesora indicó al grupo de estudiantes formular el hecho geométrico correspondiente al patrón encontrado. Para dar cuenta de la manera como los estudiantes escribieron el hecho geométrico la profesora realizó una entrevista pidiéndoles que recapitularan lo que habían hecho para formularlo. En los siguientes fragmentos de la entrevista se evidencia lo que interpretan cuando se les pide formular un hecho geométrico.

14.	P	Listo. Cuando fueron a escribir el hecho geométrico, qué tuvieron en cuenta para escribirlo. [Los estudiantes se miran y no saben qué responder; la profesora vuelve a intervenir y replantea la pregunta]. O sea cuando les dicen escribir un hecho geométrico de un invariante que encontraron cuando estaban explorando en Cabri, ¿en qué piensan para escribir el hecho geométrico?
15.	Sandra	En qué tenemos.
16.	P	En lo primero que piensan es en lo que tienen, listo. ¿En esta situación que tenían?
17.	Diego	[Luego de una pausa] Un triángulo.
18.	P	¿Un triángulo?
19.	Diego	Decía que si sumamos la medida de los tres ángulos de un triángulo.

La profesora pregunta a Sandra, Diego y Miguel los aspectos que tienen en cuenta al establecer el hecho geométrico de la suma de la medida de los ángulos interiores de un triángulo. Las intervenciones de Sandra y Diego [14 -19] dan cuenta de la acción **CII, i2, a1**, ya que en ellas exhiben la necesidad de establecer el antecedente antes de empezar a escribir el hecho geométrico, es decir, la necesidad de reconocer qué es lo dado en la tarea propuesta, antes de formular la conjetura. La relación que establecen entre antecedente y condiciones impuestas en la situación se ve reflejada en la respuesta que da Diego a la profesora cuando ella les pregunta acerca de lo dado en la situación propuesta [16]. El estudiante manifiesta que lo dado es un triángulo [17, 19].

En las intervenciones posteriores de la entrevista realizada a los estudiantes, se percibe su intención de identificar las partes que constituyen el hecho geométrico (no sólo el antecedente sino también el consecuente) entes de escribirlo, así como la intención de formularlo de acuerdo con las convenciones establecidas en la clase (estructura *si…entonces…)*.

22.	P	Después de tener en cuenta lo que tienen ¿qué hacen?
23.	Diego	Pues nos damos cuenta de que el resultado siempre va a hacer de 180 grados independientemente el triángulo que sea.
24.	Sandra	Y comenzamos a formar, que si tenemos un triángulo que es de lo que estamos hablando, entonces comenzamos a armar con *sí* y *entonces*. O sea que por lo menos con el si tenemos un triángulo ya comenzando así vamos armando el hecho geométrico.

Al preguntarle a los estudiantes qué hacen después de identificar lo dado (antecedente) en la situación, Diego manifiesta que lo siguiente es dar cuenta del invariante encontrado [23], es decir, señala que lo siguiente que deben escribir es el consecuente de la conjetura, reflejando así la relación entre invariante encontrado y consecuente **(CII, i2, a2)**. En la intervención 24, Sandra alude nuevamente al antecedente de la conjetura y al término entonces, sin hacer explicito el significado que le otorga a este último. Es de resaltar que en la intervención de Sandra, ella hace énfasis en utilizar los términos si y entonces en la escritura de la conjetura **(CII, i3, a2)** y especifica cuando debe escribir cada uno de ellos, pero no alude al consecuente del hecho geométrico ni al significado del entonces en la escritura del mismo, lo cual conduce a la profesora a cuestionarlos sobre el significado que le dan al *si* y al *entonces* al momento de formular el hecho geométrico.

32.	Sandra	*Si*, que tenemos o que estamos explorando.
33.	Diego	*Si* para medir.
34.	P	Explícame cómo, cómo [La pregunta va dirigida a Sandra].
35.	Sandra	*Si*, lo que tenemos o lo que estamos explorando, el triángulo. En este caso estamos viendo el triángulo, entonces aseguramos que es un triángulo. Si tengo un triángulo.
		[…]
39.	Sandra	Ahí ya después, si tenemos un triángulo, depende si ya nos sabemos el nombre, o sea como el caso del isósceles o el, el, cuál era el que estábamos mirando, el triángulo rectángulo, o sea cuando les tenemos ya el nombre, por lo menos en este caso no teníamos sino un triángulo. Entonces ya al saber que teníamos un triángulo [mira la hoja] me perdí. Definimos como hicimos para saber que, o sea que la, que sumando siempre los ángulos del triángulo nos iba a dar 180 grados, entonces ahí ya como que lo especificamos, como hicimos para sacar el para sacar el entonces.
40.	Diego.	[Habla al mismo tiempo que Sandra] Para formar el hecho geométrico.

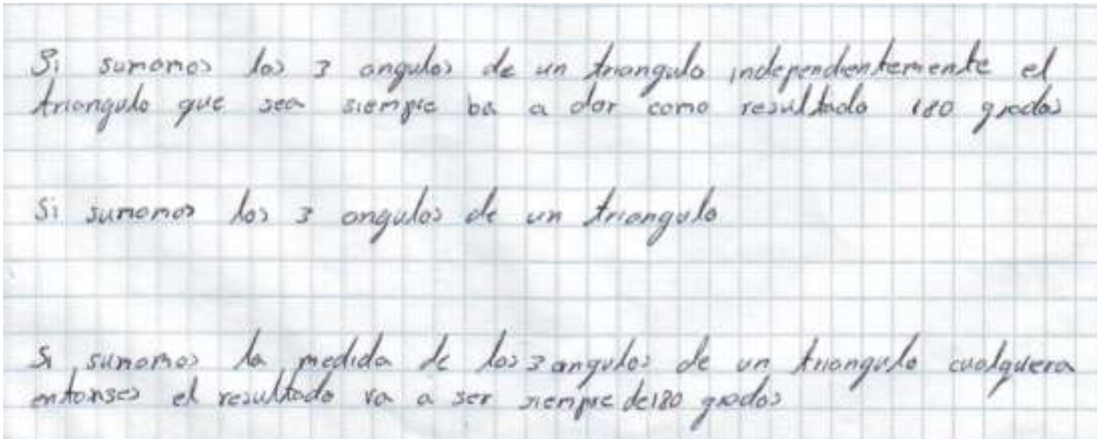
En la intervención 32 de Sandra se evidencia el significado que ella le otorga al termino que precede el *sí* en la escritura del hecho geométrico, manifestando que éste indica que se va a dar cuenta de lo dado en la situación propuesta, es decir, del antecedente del hecho geométrico **(CII, i2, a1)**, el cual es, para el caso de la situación 1, un triángulo [35]. En la intervención 40 de la estudiante también se evidencia que ella es consciente de que el que el hecho geométrico no se ha formulado solo con mencionar el antecedente, sino que también es necesario hacer mención a la regularidad encontrada, es decir, el consecuente **(CII, i2, a2)**.

Dado que los estudiantes no habían hecho una referencia explícita de lo que para ellos significaba el *entonces*, la profesora decidió preguntar acerca el papel que jugaba el *entonces* en la formulación del hecho geométrico.

41.	P	Hace un rato me decían, me estaban hablando del *entonces* ¿el *entonces* que papel juega?
42.	Diego	El *entonces* es como la definición de lo que estábamos buscando.
43.	Miguel	Lo que estábamos buscando, como ya entonces, al decir entonces es como ya decir el resultado de lo que estábamos buscando.
44.	Sandra	Lo que analizamos.
45.	Diego	El *entonces* quiere decir la respuesta a lo que queríamos buscar.

Las intervenciones de los tres estudiantes [42-45] corroboran lo que en párrafos anteriores ya habíamos mencionado, la relación que establecen entre el invariante encontrado y la tesis del hecho geométrico; es decir de nuevo se da la acción **CII, i2, a2**. En este sentido, el grupo de estudiantes muestra que para ellos determinar un hecho geométrico significa dar cuenta de una regularidad encontrada citando las condiciones bajo la cuales se cumple.

Luego de hacer explícito el significado del entonces en la escritura del hecho geométrico, se direccionó la entrevista hacia la manera cómo los estudiantes habían planteado su conjetura en relación con la tarea propuesta. Como los estudiantes habían escrito tres versiones del hecho geométrico (Imagen 1), la profesora decidió indagar sobre las razones que los motivaron a escribirlas y las diferencias que encontraban entre las conjeturas planteadas.


Si sumamos los 3 angulos de un triangulo independientemente el triangulo que sea siempre ba a dar como resultado 180 grados

Si sumamos los 3 angulos de un triangulo

Si sumamos la medida de los 3 angulos de un triangulo cualquiera entonses el resultado va a ser siempre de180 grados

Ilustración 1. *Dos versiones de la conjetura propuesta por Sandra, Diego y Miguel*.

49.	Diego	[Lee lo que han escrito] Si sumamos los tres ángulo de un triángulo independiente del triángulo que sea siempre va a dar como resultado 180 grados.
50.	P	Ustedes habían escrito esa y enseguida intentaron escribir otra.
51.	Miguel	Otra.
52.	Diego	Pero no nos dio.
53.	P	Pero esa no la completaron. Y después pasaron a ésta [señala el papel]
54.	Diego	Y ahí si ya nos quedó como más, como más, más especifica.
55.	P	¿Qué estaban buscando al tratar de escribir otra conjetura?
56.	Sandra	Pues dejarla lo mejor escrita posible, o sea que no quedará [Es interrumpida por Diego]
57.	Miguel	O sea como dejarla mejor.

En el episodio anterior, los estudiantes señalan que la razón por la cual optaron por escribir otra conjetura luego de haber formulado la primera version del hecho geometrico tiene que ver con hacerla más clara [54, 56]. El término *más clara* parece estar asociado a la búsqueda de una conjetura que quedara escrita en términos de los convenios de la clase, es decir, en el formato condicional *"si… entonces…"* que ya habian mencionado en intervenciones anteriores. Este supuesto se corrobora en las intervenciones que siguen:

58.	P	Listo. Y cuáles son los cambios que hay de esta conjetura inicial que hicieron a esta segunda conjetura.
59.	Diego	Que a la primera aquí le metimos el *si*.
60.	P	Listo.
61.	Sandra	Todas lo tienen.
62.	Diego	Por eso. Y ya la última pues ya tiene el *entonces*.
63.	P	¿La primera no tenía el *entonces?* [Mueve la cabeza diciendo que no][…]

Como se puede evidenciar en las intervenciones 59, 62 y 63, al reescribir la conjetura los estudiantes estaban buscando usar el formato condicional **(CII, i5, a3)**. En la intervención 62, Diego manifiesta que una de las razones que los motiva a escribir otra versión de la conjetura es la ausencia del término *entonces*. En las siguientes intervenciones los estudiantes señalan otras razones para la reescritura del hecho geométrico.

63.	P	[…] Listo. ¿Qué otros cambios hay de aquí a aquí? [Señala las dos conjeturas escritas].
64.	Miguel	Por lo menos en la primera nosotros dijimos si sumamos los tres ángulos, en la última nosotros dijimos si sumamos la medida de los tres ángulos.
65.	Diego	Si pues, porque para sumar ángulos cómo.
66.	Miguel	¿Cómo si no tenemos la medida?¿cómo vamos a sumar ángulos si no tenemos la medida? […]
69.	Miguel	Ahora otra cosa, cuando decimos un triángulo independientemente, pues cuando decimos que es un triángulo ya sabemos que es cualquier triángulo, aquí ya no le colocamos eso, de un triángulo cualquiera.
70.	Sandra	Le cambiamos el independiente por cualquiera que también sobra. [Risas].
71.	P	¿Qué?
72.	Sandra	Esta palabra independiente y cualquiera también sobran porque sabíamos que estábamos hablando de un triángulo.
73.	Miguel	Independientemente y cualquiera, pues a mí me parece que es cómo lo mismo.
74.	Sandra	Por eso pero igual sobra esa palabra.
75.	Miguel	Ahí sobra, en ambas sobra.

Cuando Diego y Miguel manifiestan que no tiene sentido sumar ángulos [64-66] y que es necesario hablar de la suma de la medida de los ángulos, se evidencia precisión y una mayor apropiación del lenguaje geométrico utilizado en clase en comparación con el lenguaje usado en la escritura de las primeras conjeturas propuestas por el grupo (**CII, i3, a4**), dado que en la primera versión no hacen tal salvedad. Cuando Sandra y Miguel manifiestan que al volver a escribir la conjetura tuvieron en cuenta que el independiente y cualquiera eran palabras que sobraban [72 y 73] porque ya sabían que estaban hablando de un triángulo, se reconoce el uso implícito del cuantificador universal (para todo) en la formulación del hecho geométrico, en vista de que sus intervenciones señalan que es una propiedad que se cumple *para todos* los triángulos **(CII, i4, a2)**.

5.2 SITUACIÓN 2: EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO DOS DE SUS ÁNGULOS SON AGUDOS

La actuación de los estudiantes en el marco de la situación 2 fue similar, en términos del proceso de conjeturación, a la expuesta para situación 1. En relación con el proceso de justificación identificamos una diferencia fundamental en la actuación de los estudiantes durante la solución de la segunda situación: elaboraron una prueba para su conjetura con base en los referentes teóricos de la clase. Tal justificación es reflejo de actuaciones nuevas de los estudiantes en relación con el segundo proceso de la actividad demostrativa. Por ello hemos decidimos presentar en este apartado, solamente el análisis de las acciones que ellos realizaron en el marco de dicho proceso, específicamente, el análisis correspondiente al momento cuatro de su actividad. El análisis de los tres primeros momentos se presenta en el ANEXO II del este documento.

5.2.1 DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES

Una de las situaciones propuestas a los estudiantes durante la implementación fue el problema de la armonía de las tribus, el cual se enunció de la siguiente manera:

> Algunas tribus indígenas, para mantener la armonía de su pueblo, distribuyen su territorio de tal manera que todos los clanes de la tribu se organicen de la misma forma. Tribus indígenas como los Huari, Nazca y Chimú han construido las viviendas en su territorio de tal manera que cada clan (conformado por tres familias) debe edificar sus casas logrando que éstas queden ubicadas en forma triangular.
> La ubicación de las viviendas en estas tres tribus coincide en su forma triangular, pero la disposición de cada clan en cada uno de estas tribus es diferente.
>
> a. Abre el archivo Huari y encuentra las propiedades invariantes que tienen en común los clanes que conforman a la tribu Huari.
> b. Repite el ejercicio con el archivo Nazca.
> c. Repite el ejercicio con el archivo Chimú.

En sesiones previas los estudiantes ya habían abordado los ítems (a y b) relacionados con las tribus Huari y Nazca, específicamente, habían determinado las propiedades invariantes que tenían en común los triángulos que conformaban dichas tribus, respectivamente: *congruencia de dos de los lados y ángulos en cada triángulo Huari*, y *congruencia de todos los lados y ángulos en cada triángulo de la tribu Nazca*. Con base en los invariantes encontrados, la profesora estableció las definiciones de triángulo isósceles y equilátero y además condujo a los estudiantes a establecer hechos geométricos[9] correspondientes a estos dos tipos de triángulos. En la imagen 2, se muestran los triángulos dados a los estudiantes en cada uno de los archivos citados.

Ilustración 2. *Representación de cada una de las tribus en Cabri.*

Con el objetivo de continuar con la solución del problema de la armonía de las tribus, la profesora les solicitó abrir el archivo Chimú, encontrar las propiedades comunes e invariantes de los triángulos que conformaban dicha tribu y realizar un registro escrito de las mismas. El grupo de Miguel y Sandra iniciaron su actividad nombrando los vértices de los tres triángulos y tomando las medidas de ángulos y lados en cada caso. Observar las medidas de los ángulos en los tres triángulos permitió a los estudiantes identificar y proponer un primer invariante: *todos los triángulos tienen un ángulo de noventa grados.* Este invariante fue verificado utilizando la acción de arrastre. Vale la pena resaltar que dicha verificación no fue intencional sino producto de la búsqueda de otras propiedades invariantes, dado que mientras arrastraban uno de los triángulos (ΔABC) para identificar patrones invariantes, observaron que se mantenía la propiedad mencionada.

El arrastre del ΔABC, condujo a los estudiantes a obtener un triángulo rectángulo isósceles y a proponer un invariante a partir de dicho caso particular: *dos lados del triángulo son congruentes*. El invariante citado fue avalado por el grupo sin ser verificado en otros casos.

[9] *Hecho geométrico del triángulo isósceles*: Si un triángulo es isósceles entonces tiene dos ángulos congruentes opuestos a sus lados congruentes.

Hecho geométrico del triángulo equilátero: Si un triángulo es equilátero entonces todos sus ángulos son congruentes.

El arrastre del ΔABC, llevó a Sandra a proponer un tercer invariante nuevamente con base en un triángulo rectángulo isósceles: *los triángulos poseen un ángulo de 45 grados*. Este último invariante fue verificado por los estudiantes mediante el arrastre y descartado al observar que la medida de dos de los ángulos del triángulo no era siempre de 45 grados.

Mediante una puesta en común dirigida por la profesora, Sandra y Miguel decidieron socializar el invariante relacionado con la congruencia de los lados del triángulo. Tal invariante fue descartado por los estudiantes luego de que la profesora, con ayuda de la acción de arrastre, les mostrara que dicha congruencia no se mantiene para cualquier transformación del triángulo dado. Luego de descartar el invariante propuesto por Sandra y Miguel, otro de los miembros de la clase decide comunicar el invariante enunciado del *ángulo de noventa grados* (primer invariante encontrado por Sandra y Miguel), el cual fue avalado por la clase al comprobar que dicho patrón se mantenía ante la acción de arrastre. El invariante del ángulo recto fue tomado por la profesora para definir *triángulo rectángulo*.

Posteriormente, la profesora propuso a todos los estudiantes responder la siguiente pregunta: *Además de tener un ángulo de medida 90 grados ¿qué otra particularidad podemos encontrar en los ángulos de este tipo de triángulos?* La solución a esta situación se dio en el marco de la clase y con intervención de la profesora, quien utilizó la herramienta arrastre de Cabri para mostrar a los estudiante la variación de las medidas de los otros dos ángulos del triangulo rectángulo. Al observar que los estudiantes no encontraban un patrón, decidió formular la pregunta *¿cómo son los otros dos ángulos con respecto al de 90?* Dicha cuestión permitió a un estudiante identificar y expresar que los otros dos ángulos del triángulo median menos de 90 grados. La clase avaló este invariante y la profesora propuso escribirlo en forma de hecho geométrico (con formato "*si... entonces…"*).

Ante la indicación de la profesora, Sandra y Miguel optaron por trabajar en grupo para redactar el hecho geométrico correspondiente a la medida de los ángulos de un triangulo rectángulo. El hecho geométrico enunciado por los estudiantes fue: *Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90 entonces los otros dos ángulos van a ser menores*.

Mientras los estudiantes formulaban el hecho geométrico, uno de sus compañeros de clase decidió escribir su propuesta en el tablero, la cual expresaba el consecuente del hecho geométrico en los mismos términos en los que Sandra y Miguel lo habían propuesto. El hecho geométrico propuesto por el estudiante condujo a que la profesora se mostrara en desacuerdo con la relación de orden que proponía en su conjetura. La profesora manifestó que no tenía sentido señalar que los ángulos eran menores sin indicar cuáles eran las cantidades comparadas, es decir, sin indicar con respecto a qué las medidas de los otros dos ángulos eran menores. La intervención de la profesora llevó a Sandra y Miguel a reconocer que compartían la misma imprecisión en su enunciado y los condujo a corregirlo. Así, Sandra y Miguel, realizaron otra formulación del hecho geométrico de la siguiente manera: "*Si un* Δ *rectángulo tiene un ángulo* $\measuredangle$ de 90^0*entonces los otros dos son menores el* $\measuredangle$ de 90^0". Mientras Sandra y Miguel reformulaban el enunciado del hecho geométrico, otro estudiante propuso su versión en el tablero: *Si se tiene un triángulo que tiene un ángulo de 90*^{o} *entonces los otros dos ángulos son menores que el que tiene 90*^{o}. Esta última propuesta fue la avalada por la clase y por la profesora. Es de aclarar que la versión de Miguel y Sandra no se expuso ante la clase.

Luego de aceptar la formulación del hecho geométrico, la profesora decidió definir ángulo recto, agudo y obtuso. Con el uso de estas nuevas definiciones, propuso a todos los estudiantes reescribir el hecho geométrico escrito en el tablero. Ante tal indicación, Sandra y Miguel deciden trabajar en grupo para reescribir el hecho geométrico y realizan la siguiente propuesta: *Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces los otros dos ángulos son agudos*. En esta ocasión, Sandra y Miguel deciden proponer su versión ante la clase. Su propuesta fue avalada e institucionalizada como un nuevo hecho geométrico del sistema teórico local de la clase.

Con miras a justificar el hecho geométrico correspondiente a las medidas de los ángulos de un triángulo rectángulo, la profesora propone otra situación a los estudiantes, relacionada con la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo: *¿Para qué tipo de triángulo la medida de sus ángulos es menor que 120 grados?* Esta nueva situación se hace necesaria dado que proporciona la emergencia del hecho geométrico: *Si se suman las medidas de los* *ángulos de un triángulo entonces esa suma es siempre 180 grados*, el cual es útil para la justificación del hecho geométrico correspondiente al triángulo rectángulo.

Luego de establecer el hecho geométrico relacionado con la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo, la profesora solicitó a todos los estudiantes retomar el hecho geométrico del triángulo rectángulo para explicar por qué es cierto lo que en él se plantea. Para dar tal explicación les sugirió utilizar las definiciones y hechos geométricos institucionalizados en la clase. Sandra y Miguel produjeron un texto en el que aludían al hecho geométrico correspondiente a la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo, las definiciones de ángulo agudo y recto para explicar la validez del hecho geométrico relacionado con las medidas de los ángulos en un triángulo rectángulo.

Con la intención de realizar una descripción más detallada y analizar la actividad de los estudiantes en relación con la formulación y justificación del hecho geométrico del triángulo rectángulo, hemos dividido su actividad en los siguientes momentos:

- ***Momento 1.*** *Los triángulos de la tribu Chimú: proponen y descartan invariantes de los triángulos representados en Cabri.*
- ***Momento 2.*** *Los triángulos tiene en común un ángulo de 90 grados: socializan los dos invariantes encontrados y reconocen que uno de ellos no es cierto.*
- ***Momento 3.*** *Un triángulo rectángulo tiene dos ángulos son agudos: formulan el hecho geométrico atendiendo a las definiciones institucionalizadas en la clase.*
- ***Momento 4.*** *Justificación del hecho geométrico del triángulo rectángulo: justifican el hecho geométrico con base en el conjunto de enunciados que conforman el marco referencial de la clase.*

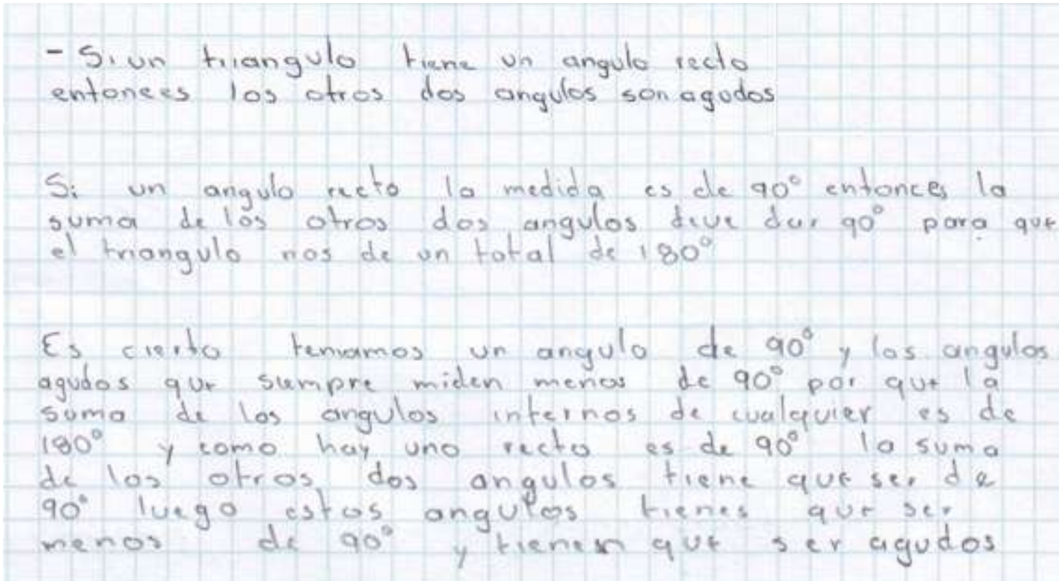
5.2.2 DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE LOS MOMENTOS EN LOS QUE SE SUBDIVIDIÓ LA ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES

5.2.2.1 *Momento 4. Justificación del hecho geométrico del triángulo rectángulo: justifican el hecho geométrico con base en el conjunto de enunciados que conforman el marco referencial de la clase*

Luego de haber establecido el hecho geométrico correspondiente a la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo, la profesora solicitó al grupo de estudiantes que, con base en las definiciones y hechos geométricos establecidos en la clase, justificaran por qué en un triángulo rectángulo dos de sus ángulos son agudos.

Los estudiantes sacaron las hojas en las que habían registrado definiciones y hechos geométricos institucionalizados en la clase y comenzaron a leer las definiciones de triángulo rectángulo, ángulo agudo, ángulo recto y el hecho geométrico que debían justificar. Como tenían a disposición el archivo correspondiente a la tribu Chimú, lo utilizaron para arrastrar el triángulo rectángulo y verificar que dos de sus ángulos eran agudos. Ante tal verificación Sandra manifestó que los ángulos siempre tenían que ser agudos porque la suma de la medida de los tres ángulos del triangulo era 180. Luego de dicha afirmación, Sandra escribió: *Si un ángulo recto la medida es de 90 entonces la suma de los otros dos ángulos debe dar 90 para que el triángulo nos dé un total de 180*.

En ese momento se dio por terminada la clase y se indicó a los estudiantes escribir la justificación y entregarla como tarea para la siguiente sesión. Sandra y Miguel deciden quedarse para terminar la justificación y entregarla de una vez a la profesora. La producción escrita de los estudiantes se presenta en la Figura 6.



- Si un triangulo tiene un angulo recto
entonces los otros dos angulos son agudos

Si un angulo recto la medida es de 90° entonces la
suma de los otros dos angulos deue dar 90° para que
el triangulo nos de un total de 180°

Es cierto tenemos un angulo de 90° y los angulos
agudos que siempre miden menos de 90° por que la
suma de los angulos internos de cualquier es de
180° y como hay uno recto es de 90° la suma
de los otros dos angulos tiene que ser de
90° luego estos angulos tienes que ser
menos de 90° y tienen que ser agudos

Ilustración 3. *Texto escrito por Sandra.*

En la producción escrita de los estudiantes se evidencia la intención de organizar una cadena de argumentos que justifique el hecho geométrico. En dicha justificación, los estudiantes no especifican los garantes de sus inferencias, pero se evidencia que de manera implícita utilizan las definiciones de ángulo recto y ángulo agudo, el hecho geométrico correspondiente a la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo y la noción de adición como sustracción complementaria (i.e., basan su deducción en plantear cuánto falta para tener 180), como garantes de sus deducciones. El uso de la noción de adición como sustracción complementaria, se evidencia en la afirmación "…*como hay uno recto es de 90 la suma de los otros dos tiene que ser de 90…*". La emergencia de dicha noción es un reflejo de la acción **CIV, i2, a3,** ya que los estudiantes aluden a ideas matemáticas que no son propias del marco referencial construido en clase. Por otro lado, el uso implícito de las definiciones citadas y del hecho geométrico de la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es evidencia de la acción **CIV, i2, a1** puesto que los estudiantes utilizan referentes del sistema teórico local construido en clase de geometría para elaborar su prueba.

La justificación realizada por los estudiantes se constituye en una prueba más que en una demostración, dado que no explicitan los garantes que utilizan para realizar sus afirmaciones. Tampoco hay una organización que evidencie el uso de reglas de deducción de manera implícita, adicionalmente, se apoyan en referentes teóricos que no son propios del marco referencial de la clase (la noción de adición como sustracción complementaria).

5.3 RESULTADOS GENERALES DEL ANÁLISIS

Con base en los análisis previos, presentamos una síntesis de la actividad de los estudiantes. En términos generales, las acciones realizadas por los estudiantes, en el marco de cada una de las situaciones propuestas, ponen en evidencia acciones de la actividad demostrativa en el proceso de solución de las mismas. Adicionalmente, las acciones citadas y codificadas reflejan el potencial de la geometría dinámica en la solución de las situaciones propuestas a los estudiantes.

Como insumo para sustentar lo anterior, a continuación se presenta una tabla que sintetiza la frecuencia con la que aparecieron las acciones de las categorías de análisis de la actividad de los estudiantes, señalando los procesos y las acciones de la actividad demostrativa que dichas acciones reflejan.

Categoría	Acciones	Frecuencia	Acción de la actividad demostrativa que se refleja
CI Reconocimiento de la propiedad invariante.	CI, i1, a1	3	Visualizar
	CI, i1, a2	5	
	CI, i1, a3	3	
	CI, i1, a4	1	
	CI, i2, a3	1	
	CI, i3, a1	1	
	CI, i4, a2	1	Visualizar Explorar Generalizar
	CI, i4, a3	4	
	CI, i4, a4	2	
	CI, i4, a5	1	
	CI, i4, a6	2	
	CI, i4, a8	3	
CII Formulación del enunciado de la conjetura de acuerdo con convenciones culturales compartidas.	CII, i1, a1	4	Verificar
	CII, i2, a1	2	Generalizar
	CII, i2, a2	4	
	CII, i3, a1	1	
	CII, i3, a2	2	
	CII, i3, a4	2	

	CII, i3, a5	1	
	CII, i4, a2	1	
	CII, i5, a2	1	Visualizar Verificar Generalizar
	CII, i5, a3	1	
Frecuencia de acciones que reflejan el proceso de conjeturación de la actividad demostrativa		**46**	
CIII **Exploración del contenido de la conjetura y los límites de validez de la misma.**	CIII, i2, a1	1	Explicar
	CIII, i3, a1	3	
	CIII, i3, a4	1	
CIV **Selección y encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva.**	CIV, i2, a1	1	Probar
	CIV, i2, a3	1	
Cantidad de acciones que reflejan el proceso de justificación de la actividad demostrativa		**7**	

Tabla 14. *Frecuencia con la que aparecen las acciones de las categorías de análisis en la actividad de los estudiantes. En este conteo se incluyen las acciones citadas en el anexo II.*

De acuerdo con la tabla, podemos deducir que las acciones de la actividad de los estudiantes estuvieron más ligadas al proceso de conjeturación que al de justificación de la actividad demostrativa, lo cual se debe, quizás, a que ellos se estaban iniciando en el proceso de justificar con base en los referentes teóricos de la clase y tenían un poco más de experticia en lo relativo a conjeturar. Es de resaltar que los estudiantes realizaron acciones de los dos procesos de la actividad demostrativa. Tales acciones no sólo dan cuenta de aquellas del constructo en cuestión sino también del uso de la geometría dinámica en la exploración, generalización y explicación de propiedades invariantes, así como de la interacción de los estudiantes en el proceso de solución de las situaciones propuestas. En lo que sigue, explicitaremos estas ideas.

En relación con las acciones de la actividad demostrativa, la actividad de los estudiantes permitió evidenciar las siguientes acciones: *visualizar, explorar, verificar, generalizar, explicar y probar*. En las dos situaciones propuestas, los estudiantes dieron muestra de visualizar al identificar los elementos constitutivos del triángulo (vértices, lados y ángulos). En relación con la exploración, los estudiantes dieron muestra de diferentes maneras de explorar, todo ello potenciado por el uso de Cabri: arrastrar para identificar invariantes, tomar medidas para identificar relaciones entre los objetos involucrados en la situación en la situación y lanzar hipótesis de solución para luego corroborarlas haciendo uso de las herramientas de Cabri. En relación con este último modo de exploración, se evidenció que era el más común en la actividad de los estudiantes. Es de resaltar que estas hipótesis estaban sujetas a los conocimientos teóricos o procedimientos de construcción abordados previamente en clase. Esta forma de exploración nos llevó a identificar, en el proceder de los estudiantes, un modo de verificar distinto al que propone el constructo de actividad demostrativa. La acción de verificación en términos de la actividad demostrativa es una acción que se lleva a cabo cuando los estudiantes desean comprobar un invariante encontrado. Con el modo de exploración descrito pudimos evidenciar que ellos no sólo verifican invariantes sino que también verifican construcciones realizadas.

En relación con la acción de generalizar, la actividad de los estudiantes nos permitió evidenciar cómo ellos cristalizan sus generalizaciones en enunciados que formulan como conjeturas. La formulación de tales enunciados puso de manifiesto el interés de los estudiantes por comunicar los hechos geométricos de acuerdo a los convenios establecidos en la clase. Se evidenció que para los estudiantes fue importante escribir los objetos geométricos involucrados utilizando la notación y los términos usados para referirse a ellos en el marco de la clase. También fue importante el uso del formato *"si… entonces…"* para dar cuenta tanto del antecedente como el consecuente de la propiedad. Con la escritura del hecho geométrico también pudimos evidenciar que los estudiantes tienden a verificar la formulación de la conjetura, buscando identificar si tanto antecedente como consecuente están completos, si hay claridad en los términos utilizados, si sobran o faltan palabras, etc. La acción de verificar en este sentido tampoco se corresponde con la de la actividad demostrativa dado que se busca verificar un enunciado mas no un invariante. Es de resaltar que durante la formulación de la conjetura los estudiantes utilizaron los referentes teóricos de la clase para aludir a los objetos geométricos involucrados tanto en el hecho geométrico del triángulo rectángulo como el concerniente a la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo.

Aunque no esperábamos que los estudiantes justificaran el hecho geométrico de la suma de las medidas de los ángulos, por motivación propia ellos decidieron aludir a la representación gráfica construida en Cabri para argumentar por qué era cierto que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180. Tal motivación no sólo refleja una participación genuina por parte de los estudiantes sino también la acción de explicar de la actividad demostrativa y la utilidad del arrastre en la producción de justificaciones que permitan validar un invariante encontrado. Consideramos que haber propuesto a los estudiantes la situación que no tenía solución, puesto que no es posible encontrar un triángulo donde la suma de la medida de sus ángulos sea menor que 120, contribuyó para que ellos se inquietaran por el resultado obtenido y buscaran justificarlo.

La acción probar de la actividad demostrativa se vio reflejada en la justificación del hecho geométrico del triángulo rectángulo, dado que en el texto elaborado por los estudiantes se evidencia la utilidad y el uso de los referentes teóricos de la clase en la justificación de un hecho geométrico. Es de resaltar que la justificación planteada por los estudiantes era, en términos generales, la que esperábamos.

En relación con los tres elementos que constituyen un entorno favorable para aprender a demostrar, consideramos que las acciones de los estudiantes dan muestra de haber adoptado dos de ellos en su actividad: la interacción social y el uso de la geometría. En el análisis realizado se evidencia que los estudiantes, ante las situaciones propuestas, iniciaban una exploración de las mismas que los condujera a identificar una propiedad invariante en ellas, para luego plantear una conjetura al respecto y una justificación para la misma. En términos de la interacción de la clase se evidencia que siempre hubo una comunicación entre los miembros del grupo que permitió no sólo solucionar las situaciones propuestas, sino también evidenciar su interés por contribuir a la construcción del marco referencial de la clase. Las afirmaciones dadas por los estudiantes en el marco de sus conversaciones, siempre las fundamentaron con razones propias y las expusieron con miras a apoyar la construcción de una definición o hecho geométrico. Por otro lado, sus acciones permitieron evidenciar el potencial de la geometría en la solución de las situaciones, particularmente en la exploración de las mismas; en el reconocimiento de propiedades invariantes; en la verificación de propiedades invariantes, conjeturas, construcciones e hipótesis de solución; y en la búsqueda de argumentos para la validación de los invariantes encontrados.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

En este capítulo presentamos las conclusiones de este estudio en relación con la actividad de los estudiantes, los objetivos propuestos para el estudio mismo, los aspectos a tener en cuenta en futuros estudios y las reflexiones sobre la incidencia del trabajo realizado en nuestra formación personal y profesional.

Con respecto a la actividad de los estudiantes, consideramos que sus acciones son reflejo de la posibilidad de aprender a demostrar (en el sentido de la actividad demostrativa) en la escuela. En el marco de su actividad ellos dieron muestra de la emergencia de acciones de la actividad demostrativa: *visualizar*, *explorar*, *generalizar*, *verificar*, *explicar* y *probar*, lo cual es indicio de la posibilidad de generar procesos de conjeturación y justificación en un contexto escolar particular. De estas acciones las que se presentaron con mayor frecuencia en la actividad de los estudiantes fueron las asociadas al proceso de conjeturación, quizás porque las situaciones previas que se les habían propuesto estaban vinculadas con dicho proceso. En el marco de las dos situaciones propuestas, los estudiantes partieron de la visualización y exploración de representaciones gráficas para encontrar invariantes en las mismas y establecer conjeturas al respecto, las cuales posteriormente eran verificadas por ellos con ayuda de Cabri. Las acciones de explicar y probar del proceso de justificación fueron menos frecuentes en la actividad de los estudiantes tal vez porque apenas se estaban iniciando en dicho proceso. A pesar de ser la primera vez que se proponía a los estudiantes elaborar una justificación de un hecho geométrico, ellos mostraron apropiación de los conocimientos abordados en la clase en la formulación de la prueba que de antemano esperábamos de ellos.

En relación con los objetivos del estudio, consideramos que el surgimiento de las acciones de la actividad demostrativa se vio favorecido por la implementación de la aproximación metodológica del grupo Æ•G en la clase de geometría. Consideramos que las acciones de la actividad demostrativa emergen en un ambiente en el que la geometría dinámica, la interacción social y la solución a situaciones problema se articulan para conducir a los estudiantes a producir conjeturas y justificaciones desde el punto de vista de la actividad demostrativa. En una entrevista realizada a los estudiantes sobre sus apreciaciones en relación con la aproximación metodológica utilizada, ellos reconocen de manera implícita a Cabri como un elemento que favorece los procesos de la actividad demostrativa, en su actividad.

1.	Diego	Pues lo que pasa es que con Cabri, con el programa que nos enseñó aquí la profe, con ese programa uno puede construir la figura que quiera y pues, como le digo yo, llegar a una definición de exactamente qué quiere decir la figura o cómo es, medidas y longitudes de todo.
		[…]
9.	Diego	Lo que pasa es que anteriormente uno cuando veía figuras geométricas, únicamente decía esta figura, medida de ángulos y ya. Entonces era muy poco lo que veía uno de eso. Ya ahorita uno explora bien las figuras y se mete realmente uno a ver qué está investigando de la misma figura.
		[…]
27.	Sandra	Nos daba las variaciones [se refieren a Cabri], o sea ahí podíamos ver cambios del triángulo o de la figura que estuviéramos haciendo. O sea, uno ahí podía sacar invariantes, porque si, cuando nos daban el triángulo, en el programa, digamos había un punto

que no se podía mover muchas veces. Pero los que nosotros hacíamos en Cabri si se podían mover. Pero entonces uno ahí podía sacar conclusiones como fue lo de sumados los ángulos siempre nos da 180, por lo que lo arrastrábamos.

Las intervenciones de Sandra y Diego son muestra de la importancia de Cabri en la exploración y reconocimiento de propiedades invariantes. En la intervención 9, Diego, de manera implícita, reconoce un cambio de rol en los estudiantes en comparación con la metodología previa a la que se implementó en este estudio, dado que el estudiante señala que con el uso de Cabri tiene la oportunidad de involucrase en la situación propuesta. En los siguientes episodios de la entrevista los estudiantes aluden a su cambio de rol en dentro del aula.

11.	Miguel	Pues fuera de ello, a mí me parece que si ha habido bastantes cambios porque ahorita sí podemos explorar; antes era sólo anotar numeritos y aprender.
12.	Sandra	Ya tenemos otro punto de vista, ya podemos esculcar más, explorar más. O sea ya no nos comemos todo tan entero.

Pese a que los estudiantes participan más de la clase y de la construcción del conocimiento geométrico, sigue siendo importante el papel del profesor, dado que es él quien dirige las discusiones y la institucionalización del conocimiento dentro del aula. En otras palabras, la participación de los estudiantes no suprime la participación e intervención del profesor dentro del aula, dado que es necesario un experto que permita a los estudiantes explorar y producir ideas propias pero que también los oriente hacia la construcción de un conocimiento válido en términos de los convenios matemáticos vigentes.

En otros episodios de la entrevista realizada también se hace explícita su apropiación de normas sociomatemáticas de la clase, lo cual también es reflejo de su involucramiento en los proceso de la actividad demostrativa desde la postura del grupo Æ•G. En particular, señalan la importancia de utilizar un lenguaje apropiado para referirse a los objetos geométricos y la importancia de la justificación en la comprensión y validación de los hechos geométricos establecidos en la clase. Las siguientes intervenciones son producto de la comparación que hacen los estudiantes cuando se les solicita señalar diferencias entre la metodología previa y la metodología de clase que se propuso en este estudio, particularmente en relación con la manera de comunicarse dentro del aula y justificar los invariantes propuestos.

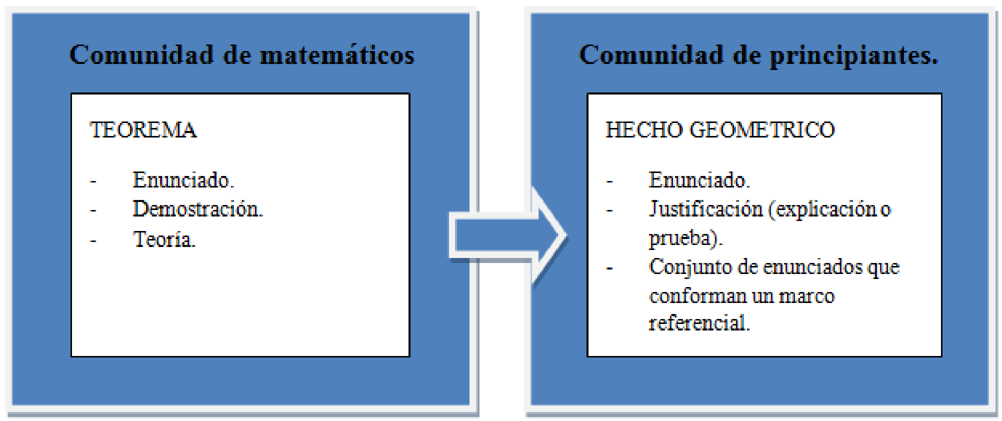
5.	Sandra	Cambiamos de dialecto. Ya no decimos línea, sino segmento.

		Aprendimos mucho.
		[…]
40.	Diego	Por ahí hubo una anotación de que decíamos que el ángulo más abierto y no era así, era el ángulo de mayor medida.
		[…]
45.	Diego	Pues ahí lo que pasa es que cuando explorábamos la figura y sacábamos el hecho geométrico, entonces ahí teníamos que explicar por qué sí era cierto ese hecho geométrico, y entonces se hicieron ejercicios de que en un texto en palabras de uno especificar de que si era cierto lo que estábamos diciendo ahí… el por qué de lo que hay ahí sí es cierto.
46.	Sandra	Para poder convencer [se refiere al para qué de la justificación].
		[…]
48.	Sandra	Para entenderlo mejor, para tenerlo más claro, para saber el por qué. Era como el repaso de lo que habíamos hecho, eso era como decir más explicado los pasos que se hicieron para sacar el hecho geométrico.

En las intervenciones de Sandra y Diego se ve reflejado que los estudiantes son cocientes de la necesidad de justificar lo que conjeturan, lo cual es síntoma de su involucramiento en la práctica de demostrar proposiciones matemáticas.

Es de señalar que el análisis de la actividad de los estudiantes nos condujo a reconocer la necesidad de ampliar el constructo de actividad demostrativa para el contexto escolar. Dicha ampliación es en el sentido de reconocer la verificación no sólo como una acción dirigida a comprobar un invariante sino también como una acción que conduce a la verificación de construcciones y elaboración de enunciados que dan cuenta de una generalidad. Adicionalmente, tal análisis nos permitió identificar un modo de exploración que no está contemplado explícitamente en el constructo de actividad demostrativa y que consideramos es una manera común de explorar en la escuela; tal modo de exploración es: lanzar soluciones hipotéticas basadas en los conocimientos previos de la clase para luego corroborar sí éstas se constituyen en la solución acertada. Encontramos que es común en los estudiantes pensar que la solución de una situación nueva está ligada a un objeto geométrico o a su relación con otros que han sido abordados anteriormente. Por ello plantean sus primeros caminos de solución con base en ellos.

Otro aporte de este trabajo en relación con el aprendizaje de la demostración en la escuela es la concepción de teorema que proponemos para al contexto escolar. En este sentido, la definición propuesta por Mariotti para Teorema, inherente a una construcción axiomática, rigurosa y formal de las matemáticas, podría ser modificada para ajustarla al contexto escolar. Ello no implica aceptar la imposibilidad de aproximar a los estudiantes al estudio de la demostración en un nivel de educación básica; más bien es una invitación a ser consientes de tal complejidad y a repensar la idea de teorema para aterrizarla al contexto escolar. En este marco, planteamos una analogía entre los elementos que componen la definición de teorema propuesta por Mariotti (1997) y los elementos que están inmersos en el constructo de actividad demostrativa y que consideramos son próximos a la comprensión de teorema en el contexto escolar.



Esquema 1. *Caracterización del teorema en la escuela.*

Es claro que en la escuela no formamos matemáticos. Por tanto, no construimos teorías matemáticas ni demostraciones formales y rigurosas como las que elaboran los expertos de esta ciencia, pero si formulamos conjeturas que se pueden justificar con base en un sistema teórico local (conjunto de enunciados alrededor de un concepto, los cuales pueden estar conectados o aislados en el mundo de las matemáticas escolares) o en reglas sociomatemáticas que determinan los modos de validación en la clase.

Por otro lado, en relación con los demás objetivos propuestos para este estudio, consideramos que la revisión bibliográfica realizada nos aportó en la construcción de nuestro marco teórico, en particular, en el enriquecimiento sobre los constructos de actividad demostrativa, la "producción de teoremas y demostraciones en el contexto escolar" y el potencial de la geometría dinámica en el aprendizaje de la demostración. Dicha revisión también nos aportó al diseño de las categorías de análisis. Si bien tomamos a Boero (1999), Parra y Piñeros (2011) y Camargo (2010) como referentes para la construcción de las categorías, es de destacar que nosotros hicimos un aporte a la elaboración de las mismas, en tanto las complementamos con indicadores y acciones emergentes del análisis de los datos de este estudio; también propusimos una codificación para las mismas. La construcción de tales categorías se constituye en un primer intento por caracterizar la actividad de los estudiantes en edad extraescolar en términos de la actividad demostrativa; por ello consideramos que éstas pueden ser estudiadas y enriquecidas en el marco de futuros estudios relacionados con la posibilidad de actividad demostrativa en un contexto escolar particular. Es de resaltar que dichas categorías están construidas teniendo en cuenta el uso de Cabri para la solución de las situaciones propuestas a los estudiantes, por ello consideramos que podrían ser útiles en estudios que contemplen el uso de la geometría dinámica para su realización.

Los resultados obtenidos mediante el análisis de la actividad de los estudiantes, nos ha llevado a considerar que en relación con este tipo de estudios aún hay cuestiones por solucionar, que eventualmente podrían convertirse en el foco de indagación de futuros estudios. En particular, nos han surgido tres preguntas: (i) dadas las condiciones particulares de la población cuyas acciones fueron objeto de estudio *¿en qué sentido sería provechoso o no proponer situaciones próximas al contexto laboral de los estudiantes para la construcción del conocimiento y la emergencia de acciones de la actividad demostrativa,?*; teniendo en cuenta que los estudiantes lograron plantear justificaciones cuando apenas se estaban iniciando en el proceso de justificar *¿de qué manera se orientaría el trabajo con los estudiantes para dar continuidad a la producción de justificaciones próximas a una demostración formal?*; los estudiantes han hecho explicita la importancia de Cabri en su actividad y nosotros hemos identificado en el uso del software un elemento importante para la generación de un ambiente de actividad demostrativa. De no utilizarse dicho software sino otro tipo de herramienta diferente a la geometría dinámica *¿se darían cambios en la actividad de los estudiantes? ¿Cuáles y en qué sentido?* Aun cuando no era nuestro centro de análisis, evidenciamos indicios de una participación autónoma, genuina y relevante, y de interacciones sociales por parte de los estudiantes, por ello consideramos pertinente realizar un trabajo que corrobore o rechace la hipótesis de la posibilidad de este tipo de participación e interacción en el aprendizaje de la demostración. Las cuestiones citadas quedan sin respuesta en el marco de estudio pero se espera que sirvan de dirección para el desarrollo de otras investigaciones interesadas en el aprendizaje de la demostración en la escuela.

Para finalizar, la realización del presente estudio aportó de manera significativa a nuestra formación profesional ya que permitió desarrollar habilidades propias de la labor de investigar, tales como: sintetizar información, plantear un problema, analizar información con base en categorías, etc. Adicionalmente nos proporcionó una mirada analítica de las acciones de los estudiantes en edad extraescolar que nos permitieran evidenciar la posibilidad de innovaciones en el aprendizaje de la geométrica en la escuela. La realización de este estudio también generó interés por continuar desarrollando trabajos que aporten a la educación matemática en relación con la manera en que los estudiantes de educación básica y media de educación formal pueden realizar procesos de generalización y justificación en matemáticas y en particular, en geometría. Por ultimo, es de resaltar que el desarrollo de este estudio nos permitió involucrarnos en una comunidad académica dado que los avances parciales del mismo fueron presentados en ponencias de eventos centrados en educación matemática. En este sentido, presentamos comunicaciones breves en el X Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística, y en el 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agüero, M. (2006). *El pensamiento práctico de una cuadrilla de pintores. Estrategias para la solución de problemas en situaciones matematizables de la vida cotidiana.* México: Universidad Iberoamericana.

Ávila A. (1999). *Una tarea necesaria. (La investigación en educación matemática de jóvenes y adultos).* Recuperado el 26 de Octubre de 2011 de http://descartes.ajusco.upn.mx/varios/piem/publicaas.html

Barrio de la Puente, J., Barrio de la Puente, M., & Quintanilla, M. (2006). Tecnología y educación en las matemáticas. *Revistas Complutense de Educación.* 18(1), 113-132.

Bastán, M. & Elguero, C. (2005). El escenario socio-cultural en la formación matemática del sujeto adulto. Una indagación en alumnos de nivel medio. *Premisa* (*Revista de la sociedad argentina de educación matemática*), 7(27), 23-25.

Boero, P. (1999). *Argumentation and mathematical proof: A complex productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education.* International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof. Traducción realizada por Patricio Herbst.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de al demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.* Tesis doctoral. Universitat de Valéncia, Valencia, España.

Crespo, M. (2005). *La* importancia de la argumentación matemática en el aula. *Premisa* (*Revista de la Sociedad Argentina de Educación*), 26, 15-30.

Christou, C., Mousoulides, N., Pitallis, M. & Pitta-Patanzi, D. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2(3), 339-352.

Cohen, L. & Maníon, L. (1999). *Métodos de investigación educativa*. Madrid, España: La muralla.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon*, 26, 15-30.

Elguero, C. (2009). *Construcción social de ideas en torno al número racional en un escenario sociocultural del trabajo.* Tesis de maestría. Instituto Politécnico Nacional. México D. F. México.

Furinghetti, F., Olivero, F. Y Domingo, P. (2001). *Students approaching proof through conjectures: snapshots in a classroom*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32(3), 319-335.

Gutiérrez, A. (2005). *Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica.* En A. Maz; B. Gómez; M. Torralbo (*eds*.). Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM, 27-44. Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Gutiérrez, A. (2007). *Geometría, demostración y ordenadores.* Recuperado el 3 de junio de 2011 de http://www.uv.es/gutierre/textos.html.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1), 5-23.

Ibañes M., & Ortega, T. (2005). Dimensiones de la demostración en bachillerato. *Revista Número Sociedad Canaria Isaac Newton*, 1, 19-39.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for a deductive reasoning: students' interpretation when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1 y 2), 55-85.

Larios, V. (2002). Demostraciones y conjeturas en la escuela media. *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas*. 3, 45-55.

Larios, V. (2006). *Demostrar es un problema o el problema es demostrar*. Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro.

Mariotti, A. (1997). *Justifying and proving in geometry: the mediation of a microworld*. En Hejny. M, Novotna. J. (*eds.*). Proceedings of the European Conference on Mathematical Education, 21-26. Prague: Prometheus Publishing House.

Mariotti, A. (2006). *Proof and proving in mathematics*. En A. Gutierrez, P. Boero (*eds.*). Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future, 173-204.

Ministerio de Educación Nacional, (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares. Serie Lineamientos Curriculares.* Dirección general de Investigación y desarrollo pedagógico.

Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares básicos de calidad.

Ministerio de Educación Nacional (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Proyecto: Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media de Colombia. Dirección de la educación preescolar, básica y media. Primera edición, enlace editores LTDA.

Molina, O., Samper, C., Perry, P., Camargo, L., & Echeverry, A. (2010). Estudio del cuadrilátero de Saccheri como pretexto para la construcción de un sistema axiomático local. *UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* (24), 117-134.

Moreno, G. (1996). Una perspectiva sobre la demostración. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 144 (1), 123-136.

Parra, D. Y Piñeros, A. (2011). *Elaboración de conjeturas: El caso de una pareja de estudiantes en una clase de geometría plana.* Tesis de Licenciatura en Matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C. & Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas.* Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A., & Molina, O. (2008). *Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores.* En A. Cano; F. Contreras; E. Olvera (*eds*.). Libro electrónico del XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza de las Matemáticas: "Innovando la enseñanza de las matemáticas", 1-18. Toluca, México: Universidad Autónoma del Estado de México.

Sáenz, C. (2002). *Sobre conjeturas y demostraciones en la enseñanza de las matemáticas.* Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 46-62.

ANEXOS

ANEXO I. SECUENCIA DE SITUACIONES PROPUESTAS A LOS ESTUDIANTES.

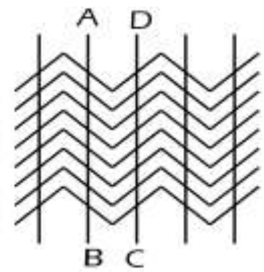
El diseño e implementación de las situaciones propuestas a los estudiantes se subdividió en dos tipos de situaciones: *situaciones de inducción y situaciones encaminadas a establecer propiedades y relaciones de los triángulos*. A continuación realizamos una breve exposición de cada una de estas situaciones, con el fin de dar cuenta de lo que se pretendía con cada una de ellas.

Las situaciones de inducción.

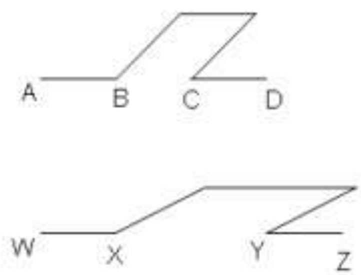
En vista de que la experiencia previa de los estudiantes en relación con la geometría estaba ligada a la clasificación de figuras geométricas en términos de su representación gráfica y nombre, y en algunos casos al dominio de fórmulas para el cálculo de área y perímetro, consideramos pertinente iniciar la implementación proponiendo a los estudiantes situaciones denominadas de inducción, con los siguientes objetivos: preparar a los estudiantes para acceder al estudio de la geometría euclidiana haciendo uso de la geometría dinámica y motivar su participación en la clase de geometría, particularmente en términos de la construcción del marco de referencia de la clase.

En este sentido diseñamos y propusimos a los estudiantes situaciones de inducción que condujeran a realizar las siguientes acciones: observar y comprobar percepciones visuales, configurar y reconfigurar imágenes dadas, utilizar Cabri para determinar propiedades variantes e invariantes y reconstruir figuras dadas en Cabri con base en las propiedades invariantes de las mismas, construir un lenguaje geométrico adecuado para la clase, etc. Inicialmente se propuso a los estudiantes situaciones en las que ellos pudieran evidenciar que la percepción visual no es suficiente para dar cuenta de las propiedades geométricas de una figura. Un ejemplo de este tipo de situaciones son las siguientes:

¿Puede garantizar que la distancia de A a D es la misma que de B a C? Describa cómo verifica su apreciación.



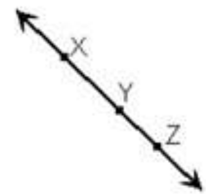
Observe la figura, ¿se puede afirmar que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, están en la misma recta? ¿Qué pasa con los segmentos $\overline{WX}$ y $\overline{YZ}$? Busque la manera de comprobar su respuesta.



Las situaciones anteriores se diseñaron con el objetivo de conducir a los estudiantes a observar y comprobar percepciones visuales de figuras dadas. Particularmente esperáramos que sus verificaciones fuera de carácter empírico, es decir, que realizaran pliegues, calcaran, recortaran, sobrepusieran figuras, etc., para validar o refutar sus afirmaciones ante los demás miembros de la clase. Además de motivarlos a verificar y a justificar sus afirmaciones, diseñamos este tipo de situaciones pensando en utilizarlas para ejemplificar e introducir las primeras definiciones al marco referencial de la clase, específicamente las definiciones de segmento y rectas paralelas, así como su notación en cada caso.

Si bien la percepción visual no es una acción suficiente para deducir propiedades geométricas de una figura, sí se constituye en una acción que permite identificar los elementos que la conforman y caracterizan. Pensando en la importancia que tiene la percepción visual o visualización en la caracterización y exploración inicial de las figuras, diseñamos y propusimos a los estudiantes situaciones en las que ellos tuvieran que configurar y des-configurar representaciones. Un ejemplo de este tipo de situaciones es la siguiente:

Describa lo que observa en la figura.



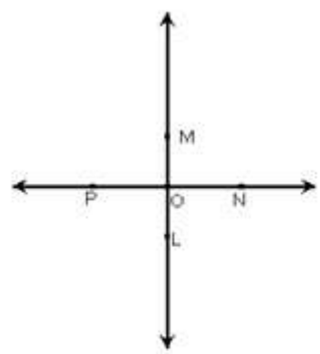
Al pedir a los estudiantes que describieran lo que observaban en la figura, pretendíamos que ellos aludieran a la figura como un todo (configurar) y que mencionaran sus partes (desconfigurar). Particularmente, esperábamos que surgieran expresiones de los estudiantes que aludieran a objetos geométricos tales como punto, recta, segmento, punto medio, etc. En el momento de la implementación los estudiantes manifestaron que la figura era una "*flecha*", con tres puntos y tres letras. Como hasta el momento no se había acordado en la clase un lenguaje específico para referirse a los objetos geométricos implícitos en la situación, inicialmente se permitió a los estudiantes referirse a ellos utilizando lenguaje coloquial. Estas primeras expresiones de los estudiantes se tomaron como base para introducir las nociones de punto y recta, así como sus respectivas notaciones al marco referencial. Se aprovecho para aclarar que las letras mayúsculas se utilizaban para nombrar puntos en una figura y acordar el tipo de lenguaje que se debía utilizar para referirse a los objetos geométricos citados.

En la siguiente tabla se muestran algunas expresiones iniciales de los estudiantes que en el marco de la clase se fueron modificando con el objetivo de hacer que ellos aludieran a los objetos geométricos en términos de una notación y lenguaje propio de las matemáticas.

Expresiones iniciales de los estudiantes	**Descripción verbal de la propiedad.**	**Notación y escritura de la propiedad.**	**Definición o relación que emerge.**
Los puntos están continuos.	Los puntos A, B y C son colineales.	A, B y C son colineales.	*Definición de puntos colineales:* Tres o más puntos son coloniales si pertenecen a una misma recta.
Un punto esta en la mitad de los otros dos	El punto Y esta entre X y Z	$X - Y - Z$ Y es punto medio del segmento $\overline{XZ}$.	*Relación de interestancia:* Y esta entre X y Z si X, Y y Z son puntos colineales y $XY + YZ = XZ$. *Definición de punto medio*: Y se llama punto medio del segmento $\overline{XZ}$ si Y esta entre X y Z, y $XY = XZ$.

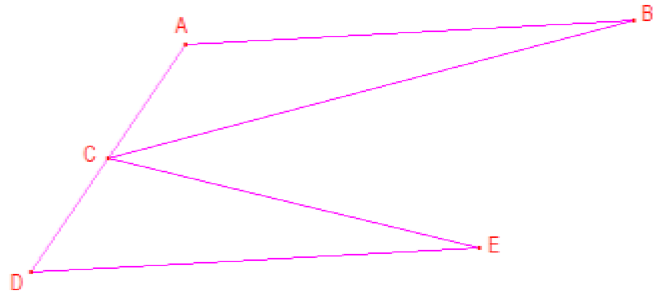
Las expresiones "*un punto esta en la mitad de los otros dos*", "*los puntos están continuos*", permitieron introducir las definiciones de puntos colineales, punto medio, congruencia de segmentos y la relación de interestancia al marco referencial. Al plantear la definición de punto medio, se hizo la aclaración de que no era suficiente con percibir que el punto Y esta en la mitad de los otros dos para asegurar que es el punto medio del segmento $\overline{XZ}$. Ante tal aclaración los estudiantes decidieron tomar las medidas de los segmentos $\overline{XY}$ y $\overline{YZ}$ para comprobar que eran iguales y confirmar que Y era el punto medio del segmento $\overline{XZ}$. Con el pretexto de verificar y justificar las afirmaciones que los estudiantes realizaban en torno a las figuras propuestas, decidimos plantearles una nueva situación en la que se involucrará Cabri como herramienta de verificación. La situación propuesta fue la siguiente:

¿Qué puede afirmar de la siguientes figuras?



Al preguntar a los estudiantes qué podían afirmar de las figuras dadas, pretendíamos que ellos utilizaran las nociones, definiciones y notaciones incluidas a hasta el momento en el marco referencial para hacer una descripción de la figura. En relación con dicha figura señalaron características como: "*hay dos rectas que se cortan*", "*los puntos M, O, L, son colineales*", "*O es el punto medio de* $\overline{PN}$ *y* $\overline{ML}$", la justificación de esta última expresión sirvió de pretexto para introducir por primera vez Cabri en la solución de las situaciones propuestas. Se indicó a los estudiantes abrir un archivo en el que estaba la figura en cuestión y utilizando la acción de arrastre la profesora les mostró que el punto O podía moverse a lo largo de la recta que contenía los puntos M y L y por tanto no siempre estaba entre dichos puntos, ni era el punto medio de los segmentos citados. Utilizando el arrastre, los estudiantes verificaron la propiedad de colinealidad de los puntos M, O y L, y P y N. Con la dirección de la profesora nombraron el punto de intersección de las dos rectas y tomaron la medida del ángulo que formaban al intersecarse, evidenciando que su medida era de 90 grados. El uso de Cabri permitió introducir otras definiciones a marco referencial, la definición de punto de intersección y rectas perpendiculares. Adicionalmente, el uso de Cabri permitió aludir al significado de propiedad invariante, como una propiedad que se mantiene ante la acción de arrastre.

Luego de permitir a los estudiantes explorar y utilizar las herramientas de Cabri para encontrar propiedades invariantes de figuras dadas, se propuso listar las propiedades invariantes de la siguiente figura para luego reconstruirla con base en dichas propiedades.



Vale la pena resaltar que esta era la primera vez que se pedía a los estudiantes realizar una construcción en Cabri. Las construcciones realizadas por los estudiantes fueron blandas, es decir, la figura construida no mantenía las propiedades enlistadas ante la acción de arrastre y por tanto no conservaba las propiedades invariantes de la figura dada. Al ser la primera vez que se le pedía a los estudiantes realizar una construcción, la profesora decidió hacer la reconstrucción en el marco de la clase, cuando los pasos para la construcción de la figura dada. Con esta situación finalizó la implementación de las situaciones de inducción.

En síntesis, tales situaciones permitieron: favorecer el desarrollo de acciones de la actividad demostrativa, tales como: visualizar, explorar, verificar y explicar en el proceso de solución de las situaciones propuestas; establecer los primeros elementos teóricos del marco referencial; potenciar el uso de la geometría dinámica como herramienta para explorar, identificar propiedades invariantes, verificar y construir; establecer normas sociomatemáticas que regularan la participación de los estudiantes y los procesos de construcción y validación del conocimiento matemático. Algunas de la normas sociomatemáticas establecidas, fueron: las propiedades invariantes se descubren mediante la exploración en Cabri de las situaciones propuestas; toda propiedad invariante se constituye en un elemento útil para caracterizar una figura geométrica y para establecer enunciados, los cuales luego de justificarse (formal o informalmente) se incluyen en el marco referencial de la clase; las propiedades y conjeturas matemáticas se comunican en le marco de la clase para discutir su veracidad y en tanto buscar su aceptación de todos los miembros de la clase, etc.

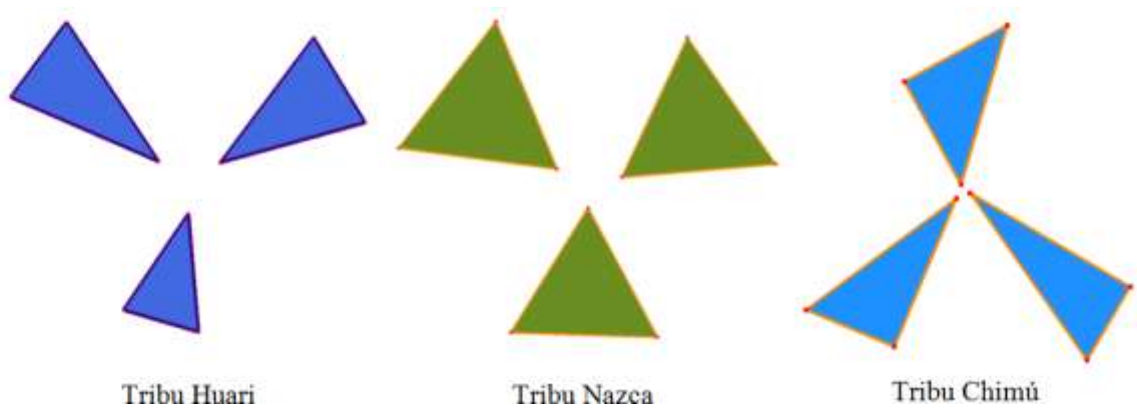
Las situaciones encaminadas a establecer propiedades y relaciones de los triángulos.

Las situaciones encaminadas a establecer propiedades y relaciones de los triángulos, se diseñaron con miras a construir un marco referencial que permitiera a los estudiantes conjeturar y justificar el hecho geométrico de la mínima distancia: *Sea L una recta y P un punto fuera de ella. Si $\overline{PQ} \perp L$ en Q y sea R otro punto cualquiera de L, entonces $PQ < PR$.* Para ello planeamos situaciones que nos permitieran clasificar los triángulos según sus lados, clasificar los ángulos según su medida y establecer relaciones entre lados y ángulos de un triángulo.

Inicialmente se propuso a los estudiantes una situación denominada " La armonía de las tribus", el cual se enuncia a continuación:

Algunas tribus indígenas para mantener la armonía de su pueblo distribuyen su territorio de tal manera que todos los clanes de la tribu se organicen de la misma forma. Tribus indígenas como los Huari, Nazca y Chimú han construido las viviendas en su territorio de tal manera que cada clan (conformado por tres familias) debe edificar sus casas logrando que estas queden ubicadas en forma triangular.
La ubicación de las viviendas en estas tres tribus coincide en su forma triangular, pero la disposición de cada clan en cada uno de estas tribus es diferente.

d. Abre el archivo Huari y encuentra las propiedades invariantes que tienen en común los clanes que conforman a la tribu Huari.
e. Repite el ejercicio con el archivo Nazca.
f. Repite el ejercicio con el archivo Chimú.



El problema anterior tenía como objetivo que los estudiantes exploraran los triángulos dados en cada archivo con miras a encontrar sus propiedades invariantes. Con base en tales propiedades se establecieron las definiciones de triángulo, triángulo isósceles, equilátero y rectángulo. Es de resaltar que los todos los triángulos de la tribu Huari eran isósceles, los Nazca eran equiláteros y los de la tribu Chimú eran triángulos rectángulos. El tratamiento de tal problema también permitió incluir en el marco referencial las definiciones de ángulo recto, agudo y obtuso, y los siguientes hechos geométricos, los cuales se asocian con cada ítem respectivamente:

- Hecho geométrico del triángulo isósceles: *Si* dos lados de un triángulo son congruentes *entonces,* los ángulos opuestos a estos lados son congruentes.
- Hecho geométrico del triángulo equilátero: *Si* los tres lados de un triángulo son congruentes, *entonces* todos sus ángulos son congruentes.
- Hecho geométrico del triángulo rectángulo: *Si* un triángulo tiene un ángulo recto *entonces* los otros dos son agudos.

En el capítulo 5 dedicado al análisis de la actividad de los estudiantes describimos las acciones que ellos realizaron alrededor del ítem c del problema de la armonía de las tribus, específicamente aludimos a las acciones que llevaron a cabo para conjeturar y justificar el hecho geométrico del triángulo rectángulo. Previa a la justificación de tal hecho se propuso otra situación con miras a conjeturar el hecho geométrico concerniente a la suma de las medidas de los ángulos en un triángulo, el cual era necesario para plantear una justificación teórica del hecho geométrico del triángulo rectángulo. La situación propuesta a los estudiantes fue: *¿para qué tipo de triángulo la suma de las medidas de sus ángulos es menor que 120 grados?* En el capítulo citado también realizamos la descripción y análisis de las acciones de los estudiantes en relación con esta última situación, aludiendo al proceso que seguido por los estudiantes para conjeturar y justificar el hecho de la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo: *Si se suman las medidas de los ángulos de un triangulo entonces, su resultado va a ser siempre 180.*

Con la justificación del hecho geométrico del triángulo rectángulo, finalizó la implementación de las situaciones relacionadas con el problema de la armonía de las tribus.

La siguiente situación propuesta a los estudiantes fue: *Si comparó dos de los lados de un triángulo ¿cómo puedo determinar cuál tiene mayor longitud sin tomar la medida de los lados del triángulo?* Esta situación estaba encaminada a lograr que los estudiantes conjeturaran el hecho: *Si en el* ΔABC *la* $m\angle A$ *es mayor que* $m\angle B$, *entonces la medida de* $\overline{BC}$ *es mayor que la de* $\overline{AC}$. Los alumnos en relación con esta situación construyeron un triángulo y tomaron la medida de sus ángulos, a partir de dichas medidas dedujeron inicialmente que el lado de mayor longitud es el opuesto la ángulo de mayor medida, luego plantearon que para saber cuál de los dos lados de un triángulo de mayor longitud es suficiente comparar la medida de los ángulos opuestos a tales lados, dado que el de mayor longitud será el opuesto al ángulo de mayor medida. Con base en tal deducción, se estableció e incluyó el hecho citado al marco referencial.

Por último se propuso a los estudiantes una situación denominada el problema de Juan, la cual se enunció de la siguiente manera:

Juan vive en una vereda y su finca esta un poco alejada de la carretera principal. Para desplazarse desde su finca hasta la carretera hay dos caminos. Debido a que transportarse por cualquiera de los dos caminos le demanda bastante tiempo, él ha decidido estudiar la posibilidad de construir un tercer camino que una su finca con la carretera, de tal manera que este sea el más corto.

Con esta última situación se pretendía que los estudiantes construyeran una representación gráfica asociada al problema y con base en la exploración de la misma dedujeran el hecho geométrico de la mínima distancia: *Sea* L *una recta y* P *un punto fuera de ella. Si* $\overline{PQ} \perp L$ *en* Q *y sea* R *otro punto cualquiera de* L, *entonces* $PQ < PR$. Adicionalmente se pretendía que el hecho mencionado fuera justificado teóricamente por los estudiantes con base en las definiciones y hechos geométricos establecidos en la clase, en particular queríamos que evidenciaran la utilidad del hecho geométrico de la desigualdad triangular para la justificación de este último. Por falta de tiempo esta última situación no puedo solucionarse por completo y por tanto no se lograron los objetivos esperados con la misma.

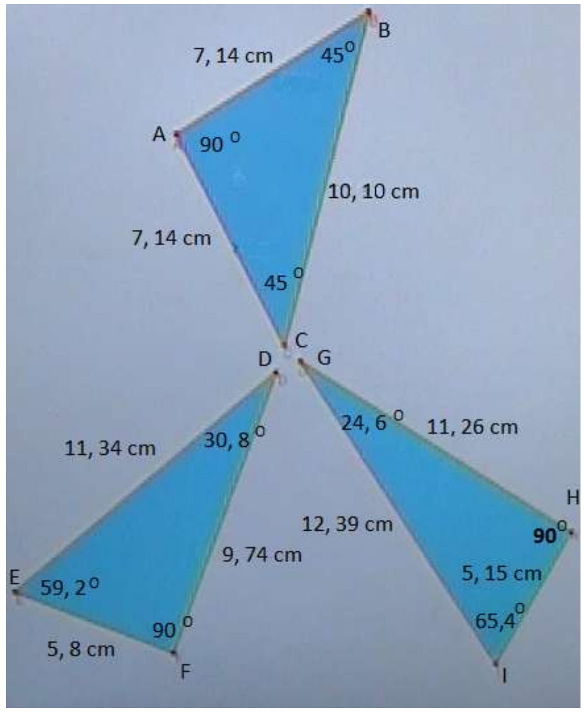
ANEXO II. DESCRIPCIÓN DE LOS TRES PRIMEROS MOMENTOS DE LA ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES EN RELACIÓN CON LA SITUACIÓN 2.

A continuación presentamos el análisis realizado a los tres primeros momentos de la actividad de los estudiantes en relación con el proceso de conjeturación del hecho geométrico del triángulo rectángulo.

Momento 1. Los triángulos de la tribu Chimú: proponen y descartan invariantes de los triángulos representados en Cabri.

Luego de proponer el ítem c del problema de la armonía de las tribus a los estudiantes, ellos deciden abordar la solución de la misma tomando medidas de lados y ángulos. Inician su actividad utilizando la herramienta *Nombrar* para etiquetar cada uno de los vértices de los tres triángulos representados en el archivo Chimú**.** Posteriormente con las herramientas "*Distancia o longitud*" y "*Medida de ángulo*" obtienen la medida de lados y ángulos de cada uno de los triángulos representados.

2.	Miguel	Primero que todo nombramos, nombramos los puntos. Luego, estamos tomando las medidas.
		[…]
5.	Miguel	[El grupo mide los ángulos] A se obtiene el ángulo de A, B y C [Sandra toma la medida del $\angle ABC$ del ΔABC] 45 grados centígrados. Ahora el de A, C y B.
6.	Sandra	Ahí se puede hacer otro.
7.	Miguel	El de *B*, *A* y *C*. [Miden $\angle BAC$] Ahora el del otro, *D*, *E* y *F*. [Miden los ángulos del ΔDEF].
8.	Sandra	Son totalmente distintos. ¿No?
9.	Miguel	Todos tres tienen un ángulo de noventa grados ¿Cuál marco? *G*, *H* e *I*. Ahora el de *I*, *G* y *H* [Sandra toma la medida de los ángulos del ΔIGH].



10.	Sandra	Lo único que tienen en común es que los tres ángulos, es que tienen uno en común uno de noventa grados. [No han arrastrado vértices de los triángulos]

En las primeras intervenciones de Miguel se muestra que él hace alusión a los vértices de cada triángulo para mencionar sus ángulos. El señalamiento de los vértices evidencia que el estudiante reconoce los elementos constitutivos de los triángulos dados en la figura de Cabri **(CI, i4, a8)**, específicamente, identifica sus vértices y ángulos **(CI, i1, a1)** como objetos geométricos involucrados en la situación. Tal reconocimiento permitió a Miguel direccionar el trabajo de su compañera, indicándole los ángulos que ella debía medir [5, 7, 9]. La toma de medidas de los ángulos contribuyó para que Sandra identificara una propiedad común [10]: *los tres triángulos representados en Cabri tienen un ángulo cuya medida es 90 grados*. Consideramos que el reconocimiento de esta propiedad se dio tras comparar la medida de los ángulos de los tres triángulos y visualizar propiedades comunes, lo cual es evidencia de la acción **CI, i4, a6.** Es de resaltar que los estudiantes infieren su primer invariante luego de tomar medidas y sin hacer uso de la acción de arrastre.

Las primeras intervenciones de los estudiantes dan cuenta de una correcta interpretación de la situación dado que de manera implícita señalan lo que está dado como condiciones y lo que se pide resolver **(CI, i1, a2),** particularmente, se infiere que asumen la situación como un problema en el que se pide identificar propiedades invariantes y comunes a los triángulos representados en Cabri. La búsqueda de propiedades invariantes se ve reflejada en la última intervención de Sandra [10], en la que manifiesta que lo único que tienen en común los tres triángulos es un ángulo con una medida de 90 grados. Dicha búsqueda también se manifiesta en la intervención 8 de la estudiante, en la cual de manera implícita señala la intención de reconocer propiedades invariantes en la medida de los ángulos.

Después de establecer el invariante citado, Sandra sugiere arrastrar el ΔABC, con miras a indagar sobre otras propiedades invariantes de los triángulos representados en Cabri.

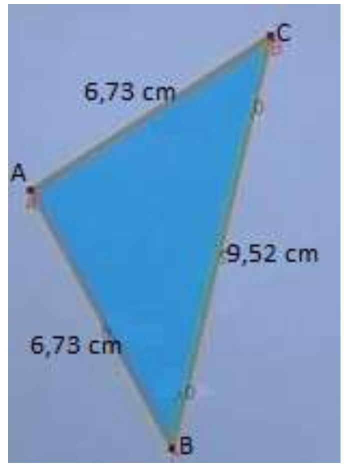
14.	Sandra	Ahora miramos si tienen ¿qué más? Movámoslo ya [arrastra el vértice del ΔABC].
15.	Miguel	Halamos. Y si lo movemos [Arrastra el vértice *C* del ΔABC].
16.	Sandra	Sigue siendo el ángulo de noventa grados.
17.	Miguel	Hale el *A*, hale el *A* [Sin embargo Sandra arrastra el punto *C*].
18.	Sandra	Ah. Qué hale el *A*.
19.	Miguel	Hale el *A*, ¿si se puede? [Sandra arrastra el punto *A* del ΔABC, el cual no se deja mover] no se descuadra, 90 grados y no se descuadra.

La intervención 14 de Sandra evidencia la intención de arrastrar el ΔABC con miras a indagar sobre otros invariantes. El arrastre de dicho triángulo no conduce a identificar un nuevo patrón, sino a verificar la propiedad ya establecida [16, 19]. Es de señalar que los estudiantes sólo comprueban que uno de los triángulos tiene un ángulo recto y no verifican que los otros dos triángulos también tienen dicho ángulo. En las intervenciones de Miguel, específicamente en la 15 y 19, se ve reflejada la acción **CII, i1, a1**, dado que alude la utilidad del arrastre para verificar la propiedad invariante del ángulo recto.

Luego de verificar el invariante del ángulo de noventa grados, el grupo de estudiantes retoma la exploración de los triángulos de la tribu Chimú, nuevamente con la intención de identificar invariantes.

24.	Sandra	Igual no hay medidas iguales. [Arrastran ΔABC hasta obtener $\overline{AB} \approx \overline{AC}$]. A sí, el de estos dos segmentos [habla al tiempo Miguel]. Estos dos son congruentes.

[Señalan $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$].



25.	Miguel	El de los dos segmentos, el de *BA* y *AC*, son congruentes. El de los dos segmentos. Pero, el del ángulo también es de noventa grados.
26.	Sandra	Estos dos son congruentes. [Señala los $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$].
		[…]
29.	Miguel	Bueno, que más decimos de ése [ΔABC].
30.	Sandra	Esto es tribu Chimú, escriba el nombre de los dos [Marcar la hoja que van a presentar] Te acuerdas como la vez pasada hicimos, cómo se llamaba cuándo, se deformaba un ángulo. Es que acá hay dos segmentos [$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$] que son congruentes.
31.	Miguel	Entonces aquí decimos el segmento *BA*.
32.	Sandra	Con la raya.
33.	Miguel	Congruente es con las dos rayitas y la de encima. [Escribe en el cuaderno $\overline{\mathrm{BA}} \cong \overline{\mathrm{AC}}$] Bueno ¿qué más se puede decir de ése? [ΔABC].

La acción de arrastre le permite a Sandra establecer un caso particular correspondiente a un triángulo rectángulo isósceles [24]. A partir de dicho caso, la estudiante propone como invariante la congruencia de dos de los lados del ΔABC, sin verificar sí dicha propiedad se mantiene ante la acción de arrastre y sí se cumple en los otros dos triángulos del archivo Chimú (ΔDEF y ΔGHI). En las intervención 25 y 33 de Miguel se evidencia que él no se percata de que la propiedad propuesta por Sandra es producto de un caso particular y en consecuencia la toma como un invariante de la situación. La aceptación por parte de Miguel de dicha propiedad la manifiesta cuando decide escribirla como invariante en su cuaderno [33]. No utilizar la acción de arrastre para verificar el invariante propuesto, nos permite inferir que los estudiantes aún no son consientes que para generalizar una propiedad que se piensa como invariante es necesario evidenciar, a través del arrastre, que ésta se cumple en cualquier caso.

Luego de escribir que dos de los lados del ΔABC son congruentes, los estudiantes se disponen a escribir el invariante relacionado con el ángulo de 90 grados. La escritura del invariante los conduce a especificar qué entienden por dicho término.

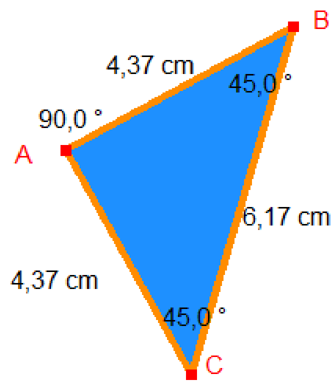
77.	Miguel	[Lee lo que han escrito] Tres. Nos damos cuente que el lado AB es congruente con el lado AC. Bueno, usted lo que quiere decir es de éste ángulo ¿cierto? [Señala el $\angle BAC$, que mide 90 grados]. Que por más de que lo arrastramos no se deforma.
78.	Sandra	No, sigue siendo un ángulo de 90 grados.
79.	Miguel	Entonces, eso se llama.
80.	Sandra	[Interrumpe a Miguel] Y que es invariable.
81.	Miguel	Invariante. [Risas].
82.	Sandra	Eso, invariante. Es invariante, es un ángulo invariante.
83.	Miguel	Invariante, a pesar de que se arrastra no se deforma [lee en su cuaderno algo relacionado con invariante]. Entonces podemos decir que el ángulo BAC.
84.	Sandra	BAC.
85.	Miguel	¿Si se puede hablar de un ángulo invariante?
86.	Sandra	Claro. Igual es invariante porque no es [No concluye la idea].
87.	Miguel	Cuarto paso [Interrumpe a Sandra]. Cuarto, si dícteme [Se refiere a los pasos de la exploración]. Si el ángulo BAC es invariante porque a pesar de que se arrastre no se deforma. A la de dios.

En la intervención 77 de Miguel, él alude a la razón que les permite proponer el ángulo de 90 grados como propiedad invariante de los tres triángulos. Específicamente, comenta que ante el arrastre se mantiene un ángulo recto en uno de los tres triángulos, lo cual evidencia la acción **CI, i4, a3,** dado que manera implícita alude a la utilidad del arrastre para identificar propiedades invariantes. Es importante resaltar que el estudiante no señala que la propiedad invariante del ángulo de 90 grados es común a los tres triángulos, dejando de lado una de las condiciones de la tarea: encontrar propiedades comunes a los tres triángulos representados.

Cuando Sandra alude al término “invariable” [80] se da la oportunidad para que Miguel exprese lo que entiende por dicho término [83] y reafirme que la propiedad del ángulo recto si corresponde a una propiedad invariante. La cuestión que ronda a los estudiantes ya no es determinar el invariante sino el cómo escribirlo. Tal inquietud conduce a Miguel a preguntarse sí es posible hablar de un ángulo invariante en términos de la escritura de la propiedad hallada [85]. Al no encontrar respuesta a su pregunta decide escribir que el $\angle BAC$ es invariante. Esta manera de dar cuenta del invariante no resulta afortunada dado que no explicita qué es lo invariante en el ángulo señalado.

Mientras Miguel escribe en su cuaderno, las propiedades invariantes encontradas hasta el momento, Sandra arrastra el ΔABC con la intención de identificar otra propiedad invariante.

88.	Sandra	[Le dicta a Miguel] El $\angle BAC$ es invariante, pero espérate, espérate, que yo tenga acá. Pero hay otro de estos.



89.	Miguel	¿Qué?
90.	Sandra	Mira que éste ángulo de *ACB*, tampoco cambia [$m\angle ACB = 45$].
91.	Miguel	Muévalo, muévalo. [Sandra arrastra el vértice *B* del ΔABC, y la medida del $\angle ACB$ cambia]. Sí, sí cambia. Como no se va a deformar, si al usted correrlo allá [Señala el vértice *B*] se hace chiquitico el ángulo.

En la intervención 90 se evidencia que Sandra parece establecer un nuevo invariante basándose nuevamente en un caso particular, específicamente en un triángulo rectángulo isósceles. Es de resaltar que en esta ocasión Miguel no asume tal invariante y propone verificarlo ante la acción de arrastre [91]. El arrastre en este caso se constituye en una herramienta de verificación que le permite a Miguel descartar la propiedad propuesta por su compañera. Creemos que el haber aludido previamente al significado de invariante, contribuyó para que en esta ocasión no asumiera como invariante la propiedad propuesta por Sandra guiándose sólo por la percepción.

Momento 2. Los triángulos tienen en común un ángulo de 90 grados: socializan los dos invariantes encontrados y reconocen que uno de ellos no es cierto.

La profesora solicita a toda la clase dejar de trabajar en grupos, para socializar los invariantes comunes de los triángulos de la tribu Chimú que han encontrado hasta el momento. Ello con el objetivo de permitir a los estudiantes comunicar sus invariantes e indagar sobre la validez de los mismos, para luego determinar cuáles de ellos pueden institucionalizarse como hecho geométrico de acuerdo con las normas socio-matemáticas de la clase.

La socialización se inicia cuando la profesora, con ayuda de un video-beam, proyecta la representación, en Cabri, del archivo tribu Chimú y solicita que uno de los participantes de la clase comparta los invariantes que han propuesto en su grupo. Miguel, por voluntad propia, decide exponer a la clase el invariante relacionado con la congruencia de dos de los lados del ΔABC.

93.	Miguel	Que hay dos lados que son congruentes.
94.	Sandra	Dos segmentos. Dos segmentos.
95.	Miguel	Dos segmentos que son congruentes.
96.	P	Dos lados que son congruentes.
97.	Miguel	[Aclara] Dos segmentos que son congruentes.
98.	P	Dos segmentos que son congruentes.
99.	Miguel	Si.
100.	P	En ¿cuál? [Se refiere a los triángulos que conforman la tribu Chimu].
101.	Miguel	En la figura primera [Se refiere al ΔABC].
102.	P	En la primera Miguel. En éste en éste [Señala el ΔABC].
103.	Miguel	En la primera de, en la primera de arriba.
104.	P	O sea que me ubico en éste. [Señala el ΔABC]. Bueno, ¿cuáles son congruentes?
105.	Miguel	Nos encontramos que AC y CB. [En ese momento ambos lados miden 7,14 cm.].
106.	P	Él dice que *AC* y *CB*, son congruentes. [En ese momento ambos lados miden 7,14 cm].
107.	Sandra	Ahí no.
108.	Miguel	¿Por qué no?
109.	Sandra	Ese esta igual que acá. [Señala el ΔABC de su computador, posteriormente arrastra uno de los vértices].
110.	Miguel	Ahí no china [Sandra] porque al moverlo se descuadra [arrastre].

La participación de Miguel durante la socialización propuesta por la profesora, permitió a Sandra identificar que el invariante de los lados congruentes, que había expuesto Miguel a la clase, no era cierto [107]. Es de resaltar que la profesora no interviene en la decisión de descartar tal invariante sino que es la herramienta arrastre de Cabri la que les permite invalidar el invariante propuesto [109, 110]. En este sentido, vemos reflejada la acción **CII, i1, a1**, dado que es a través del uso del arrastre que verifican y descartan el invariante propuesto.

Vale la pena señalar que aunque Miguel es quien decide participar en la puesta en común, Sandra también asume un rol de participación, al ir controlando las afirmaciones de su compañero. Esto se evidencia en las intervenciones 94 y 107. En la intervención 94 la estudiante le sugiere a Miguel utilizar el lenguaje geométrico apropiado para dar cuenta del supuesto invariante y en la 107 inválida sus afirmaciones al identificar que el invariante propuesto no se cumple en todos los casos. Las intervenciones de Sandra evidencian que para ellos el trabajo en grupo no se reduce a un momento de la clase que determina la profesora.

Luego de refutar el invariante propuesto por Miguel, la profesora permite a otro grupo exponer uno de los invariante encontrados. En este momento de la clase, participa otro estudiante, quien propone el siguiente invariante: *los triángulos tienen un ángulo de noventa grados.* Este invariante es avalado por la clase, en particular, por Sandra y Miguel quienes en su trabajo en grupo también lo habían identificado. Durante la socialización no se proponen más invariantes y toda la clase acepta que solamente hay un invariante común a todos los triángulos representados en Cabri.

Momento 3. Los triángulos tienen en común un ángulo de 90 grados: socializan los dos invariantes encontrados y reconocen que uno de ellos no es cierto.

El invariante correspondiente al ángulo recto fue utilizado por la profesora como base para definir *triángulo rectángulo*. Siendo ella la que definió este tipo de triángulo de la siguiente manera: *Es un triángulo que tiene uno de sus ángulos de 90 grados, es decir, uno de sus ángulos es recto.* Es de señalar que hasta el momento en el marco de la clase no se había definido ángulo recto, pero la profesora decide aprovechar la definición citada para resaltar que los ángulos cuya medida es de 90 grados reciben una denominación particular, ángulos rectos.

Luego de establecer la definición de triángulo rectángulo, la profesora propuso una nueva pregunta a los estudiantes: *Además de tener un ángulo de medida 90 grados ¿qué otra particularidad podemos encontrar en los ángulos de este tipo de triángulos?* Dicha cuestión tuvo como objetivo buscar que los estudiantes indagaran acerca del comportamiento de los otros dos ángulos del triángulo rectángulo e identificaran un invariante.

La pregunta propuesta por la profesora se solucionó en el marco de la clase y fue ella quien direccionó la exploración del ΔABC del archivo Chimú, arrastrando el triángulo de sus vértices. La exploración realizada por la profesora tenía la intención de permitir a los estudiantes visualizar varios casos, para que a partir de ellos concluyeran que la medida de los otros dos ángulos del triángulo rectángulo era menor de 90 grados. En el siguiente episodio se exhibe lo que sucedió en la clase luego de que la profesora propusiera la pregunta a los estudiantes.

147.	Miguel	¿Qué otra particularidad?
148.	P	¿Qué sucede con los otros ángulos?
149.	Sandra	Que son variantes. Que no cambian.
150.	Miguel	No.
		[…]
155.		Cambian [Varios estudiantes].
156.	P	Listo, cambian y ¿cómo cambian?
157.	Sandra	Ambos son, no, cambian igual. A no.
158.	P	Disminuyen o aumentan. Y ese disminuir es cómo. Por ejemplo, muevo éste de acá. [Mueve el $\angle DAS$]. Miren ¿qué medida tienen los otros dos ángulos? [El $\angle ASD$ mide 59.5 grados, y el $\angle DAS$ mide 30.8 grados].
		[…]
161.	Sandra	[Se dirige a Miguel] uno disminuye el otro aumenta, mire ponga cuidado.
162.	P	[La profesora deja de arrastrar el ΔDAS] Ahí que medidas quedaron.
163.		27, 6 y 62,7. [Varios estudiantes].
164.	P	Listo, ahora lo voy a mover aquí. [Arrastra el vértice A del ΔDAS] ¿Con qué medidas quedaron?
165.	Miguel	34.6 grados y 55.4. [Al mismo tiempo hablan otros estudiantes].
		[…]
170.	P	Y ¿cómo son con respecto al de 90 grados?
		[…]

178.	P	Listo, no son congruentes. [Al ver que ésta respuesta no le servía la profesora decidió intervenir de nuevo] ¿Cómo son esas medidas con respecto al ángulo que sabemos que es de 90?
179.	Estudiante(1)	Ah, que son menores.

En el episodio de la clase se evidencia que Sandra y Miguel buscan participar de la solución de la pregunta, sin embargo no logran contribuir a la solución de la misma. A pesar de que la profesora les indica comparar la medida de los ángulos con la medida del ángulo de 90 grados [170, 178], los estudiantes no logan establecer que dicha medida es menor de 90. La participación de estos estudiantes está dirigida a señalar la variabilidad [149] de dos ángulos del triángulo rectángulo con miras a identificar un patrón en este. En la intervención 157 de Sandra se evidencia que la estudiante está tratando de identificar sí las medidas de los ángulos varían siguiendo alguna regularidad. La búsqueda de un patrón de variabilidad también se evidencia en la intervención 161 de la estudiante. Consideramos que si la profesora hubiese dado un tiempo para abordar la pregunta en grupos, Miguel y Sandra habrían tenido la posibilidad de explorar, por ellos mismos, el triángulo rectángulo y probablemente haber identificado algún patrón en la medida de sus ángulos.

En la intervención 179 se evidencia que es otro estudiante quien identifica que las medidas de dos de los ángulos de un triángulo rectángulo son menores de 90 grados. Ante esta intervención, la profesora decide proponer al estudiante escribir en el tablero un hecho geométrico que dé cuenta de lo que ha encontrado. En este momento, Sandra y Miguel deciden establecer su propio hecho geométrico sin atender a lo que sucede en la clase.

193.	Sandra	Si un rectángulo. Si un rectángulo. [No termina la idea].
194.	Miguel	No, el ángulo de 90 grados.
195.	Sandra	Ah, un triángulo rectángulo.
196.	Miguel	Si un ángulo de noventa grados. [Es interrumpido por Sandra].
197.	Sandra	No, si un triángulo tiene un ángulo de 90 grados. Si el triángulo. Si un triángulo rectángulo tiene. Ah no. Si hablamos de un triángulo ABC.
		[…]
199.	Sandra	No, Si un triángulo rectángulo ABC tiene un ángulo de 90 grados, no. Rectángulo [No concluye la idea].
200.	Miguel	Algo le falta. Si un triangulo rectángulo entonces. No. [No concluye la idea].

En las intervenciones anteriores se evidencian los primeros intentos de los estudiantes por establecer el antecedente del hecho geométrico solicitado por la profesora. En las intervenciones 195, 197 y 199 de Sandra, se refleja la acción **CI, i1, a2,** dado que en ellas se alude a las condiciones de la situación propuesta, específicamente a lo dado en la misma. Incluir la palabra *si* al intentar escribir las condiciones de la situación, permite evidenciar la acción **CII, i2, a1**, ya que los estudiantes de manera implícita asocian lo dado en la situación (un triángulo rectángulo) con el antecedente del hecho geométrico.

Es de resaltar que al tratar de establecer el antecedente de la situación, los estudiantes buscan utilizar el lenguaje geométrico acordado en clase. En la intervención 197 de Sandra se evidencia que ella sugiere a su compañero no referirse a un ángulo de 90 grados sino a un triángulo con un ángulo de 90 grados, incluso propone el término triángulo rectángulo. En esta intervención de la estudiante, pueden notarse dos cosas: (i) identifica la bicondicionalidad de la definición de triángulo rectángulo al señalar que si tiene un triángulo con un ángulo de 90 grados entonces puede decir que es un triángulo rectángulo; y (ii) reconoce los objetos geométricos involucrados y dados en la situación, lo cual es evidencia de las acciones **CI, i1, a1** y **CI, i1, a2,** en vista de que reconoce antecedente y consecuente respectivamente. Estas dos acciones reflejan una correcta interpretación de la situación por parte de la estudiante dado que muestran que ella es consiente de los objetos geométricos sobre los cuales debe escribir el hecho geométrico. Creemos que la correcta interpretación que da la estudiante a la situación propuesta, es la que le permite intervenir para sugerir la manera en que se puede empezar a escribir el hecho geométrico.

En la intervención 200 de Miguel se evidencia su aceptación a la propuesta de Sandra, en relación con la manera en la que se puede escribir el antecedente del hecho geométrico. Cuando el estudiante expresa "*si un triángulo rectángulo entonces*" no solo esta aludiendo al antecedente sino que también está manifestando la necesidad de dar cuenta del consecuente. El interés por mencionar el consecuente del hecho geométrico también se evidencia con la expresión "*algo le falta*" [200]. El siguiente fragmento presenta la manera en la que los estudiantes establecen el consecuente del hecho geométrico.

204.	Miguel	Entonces, los ángulos son menores que 90. [Es interrumpido por Sandra].

205.	Sandra	Van, van. Entonces los ángulos van a ser menores. Los dos ángulos opuestos van a ser menores. Van a ser menores. [Después de una pausa vuelve a intentarlo] Si un ángulo de 90 grados, no. Si el triángulo rectángulo. [Lo interrumpe Miguel].
206.	Miguel	Tiene un ángulo de 90 grados.
207.	Sandra	Entonces, los otros dos ángulos van a ser menores.
208.	Miguel	No, vea eso va a ser. Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90 entonces los otros dos ángulos van a ser menores. Le pegamos. [Mientras la clase sigue los estudiantes Sandra y Miguel realizan una versión del hecho geométrico].

En las intervenciones 204 y 205 los estudiantes dan cuenta del consecuente del hecho geométrico y lo asocian con el invariante encontrado, evidenciando la acción **CII, i2, a2**, en la que se establece que los estudiantes reconocen la relación entre consecuente e invariantes encontrada en la exploración. Es de resaltar que los estudiantes buscan escribir el hecho geométrico en el formato condicional *"si… entonces…"*, haciendo explicito el antecedente (si tengo un triángulo rectángulo) y consecuente de la conjetura (entonces los otros dos ángulos son menores), lo cual se corresponde con la acción **CII, i3, a2**. Esta manera de formular el enunciado del hecho geométrico también pone en evidencia la acción **CII, i3, a1** dado que los estudiantes identifican y manifiestan la relación de dependencia entre antecedente y consecuente al momento de formular la conjetura [208].

Aunque se evidencia la intención de los estudiantes por diferenciar el antecedente y consecuente, y hacer explícita tal discrepancia en la formulación del enunciado, no logran formular un hecho geométrico cuyas condiciones iniciales sean suficientes y la tesis sea completa en el sentido de dar cuenta del invariante encontrado. En la intervención 208 Miguel manifiesta que el antecedente del hecho geométrico debe quedar escrito como "*si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90 grados"*. Dicha formulación del antecedente permite inferir que el estudiante no identifica la expresión triángulo rectángulo como una condición suficiente para referirse a lo dado en la situación, por ello propone condiciones innecesarias (tiene un ángulo de 90 grados) en la formulación del enunciado. Por otro lado, la intervención 208 del estudiante deja ver que el consecuente que ha propuesto para la formulación del enunciado del hecho geométrico, no da cuenta del invariante de la situación. El consecuente propuesto por Miguel establece que los ángulos deben ser menores, pero no especifica que la medida de los otros dos ángulos del triángulo debe ser menor de 90 grados, es decir, el estudiante propone expresar en el consecuente una relación de orden sin comparar cantidades.

Al considerar que han terminado con la formulación del hecho geométrico, Sandra y Miguel deciden atender nuevamente a lo que está sucediendo en la clase. Al observar el tablero, se dan cuenta que uno de los miembros de la clase ha propuesto el siguiente hecho geométrico: "*Si* $\angle = 90^0$ *entonces los otros dos ángulos son menores"*. Ante tal versión, la profesora decide cuestionar a la clase acerca del lenguaje y convenciones utilizados para escribir el antecedente y consecuente del mismo. En primer lugar, cuestiona si la expresión "$\angle = 90^0$" da cuenta de lo que se quiere establecer como antecedente, conduciendo al estudiante que propuso el hecho geométrico a reconocer que tal expresión no alude a un triángulo rectángulo. En segundo lugar, cuestiona al estudiante sobre la palabra *menores* que ha utilizado en la formulación del consecuente, manifestándole que no es claro a qué se refiere porque no hace explícito a quién son menores. Es pertinente señalar que en este momento de la clase el rol de Sandra y Miguel es de observadores, dado que no participan en el cuestionamiento que realiza la profesora.

Observar la interacción profesora-estudiante, le permite a Miguel y a Sandra identificar que han cometido el mismo error al formular el consecuente del hecho geométrico, esto los conduce nuevamente a trabajar en grupo con miras a reformular el hecho que han propuesto.

227.	Miguel	Entonces son menores que el ángulo de noventa. Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de noventa grados entonces los otros dos son menores que, de noventa grados, ¡ah no! Entonces son menores que el ángulo de noventa. [Lee el hecho geométrico propuesto: "*Si un* Δ *rectángulo tiene un ángulo* $\measuredangle$ *de* 90^0*entonces los otros dos son menores el* $\measuredangle$ *de* 90^0"] Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90 grados entonces los otros dos son menores que el ángulo de noventa grados.
228.	Sandra	Los otros dos ángulos menores que el ángulo de noventa grados.
229.	Miguel	Ángulos.
230.	Sandra	A ver si, póngale ahí *ángulo* porque si no.
231.	Miguel	[Reformula el consecuente de manera verbal pero no escrita] A ver entonces queda, los otros dos ángulos van a ser menores que el ángulo de noventa grados. Claro léalo.

En las intervenciones anteriores se pude evidenciar que Miguel y Sandra utilizan lo sucedido en clase para precisar el consecuente del hecho geométrico que ellos han propuesto. Es de resaltar que aunque Miguel verbaliza correctamente el antecedente [228] y el consecuente del hecho geométrico [231], dicha verbalización no se corresponde con la escritura del mismo. En particular, en la intervención 228 se puede notar que los estudiantes a la hora de formularlo no tienen en cuenta las convenciones establecidas en la clase en términos de lenguaje y notación, al nombrar los objetos geométricos involucrados en el enunciado de la conjetura. Específicamente, utilizan símbolos como “Δ” y “∡” para omitir palabras, lo cual es una costumbre generalizada de la clase. Dicha costumbre se originó gracias a que la profesora no había precisado en que ocasiones podían utilizar tales símbolos.

Cuando Miguel y Sandra deciden atender nuevamente a lo que esta sucediendo en clase, observan que uno de sus compañeros ha propuesto una versión del hecho geométrico y lo ha escrito en el tablero de la siguiente manera: *Si hay un triángulo que tiene un ángulo de* 90^o *entonces los otros dos ángulos son menores que el que tiene* 90^o. Esta formulación del hecho geométrico es avalada por la clase se toma como una versión aceptable del hecho geométrico dado que es entendible para todos en términos de escritura y señala el invariante y las condiciones bajo las cuales se cumple.

Con miras a sintetizar más el enunciado del hecho geométrico, la profesora introdujo las definiciones de *ángulo recto*, *agudo* y *obtuso*. Luego de plantear estas definiciones, la profesora propuso a los estudiantes, redactar de nuevo el hecho geométrico, utilizando las definiciones establecidas en la clase. Ante esta nueva situación, Miguel y Sandra deciden nuevamente trabajar en grupo para reescribir el hecho geométrico con las condiciones que ha impuesto la profesora.

249.	Sandra	Un triángulo rectángulo.
250.	Miguel	Un triángulo rectángulo tiene.
251.	Sandra	No, pero si ahí es, si un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto, que es recto.
252.	Miguel	Tiene un ángulo recto entonces tiene dos ángulos, que miden.
253.	Sandra	Dos ángulos, dos ángulos, dos ángulos agudos.[Miguel habla al mismo tiempo].
254.	Miguel	Cómo lo escribimos acá.

255.	Sandra	Si un triángulo rectángulo. Si un triángulo rectángulo [Le dicta a Miguel el hecho geométrico].
256.	Miguel	Tiene un ángulo recto.
257.	Sandra	No, porque un triángulo rectángulo es porque tiene un ángulo recto ¿no?

En la intervención 251 de Sandra se evidencia la intención de utilizar el formato condicional “*si… entonces…*” para la formulación del hecho geométrico, específicamente para formular el antecedente del mismo. Tal intención también de ve reflejada en la intervención 252 de Miguel, en la que alude al *entonces* para luego enunciar el consecuente. Las intervenciones 251 y 252 son reflejo de la acción **CII, i3, a2** dado que utiliza el formato condicional para hacer formular el hecho geométrico. Es de resaltar que Sandra identifica que no es necesario escribir en el antecedente que el triángulo tiene un ángulo recto puesto que ya se ha dicho que es un triángulo rectángulo [257]. La intervención 257 de Sandra es reflejo de la acción **CII, i5, a2,** puesto que, explicita que sobran propiedades en la formulación del antecedente del hecho geométrico. En este sentido, consideramos afortunada la nueva situación que propuso la profesora dado que el haber pedido reformular el hecho geométrico utilizando las definiciones establecidas en clase, condujo a Sandra a identificar que estaban aludiendo a condiciones innecesarias al escribir el antecedente. El uso de definiciones en la reformulación del hecho geométrico, también se evidencia en las intervenciones 251 de Sandra y 252 de Miguel, en la que plantean el consecuente del hecho geométrico en términos de la definición de ángulo agudo, reflejando a la acción **CII, i3, a5**, dado que hacen uso de los referentes teóricos para formular el hecho geométrico. .

Luego de discutir sobre la manera en la que deberían escribir el hecho geométrico, Sandra y Miguel deciden redactar el enunciado del mismo. En el siguiente fragmento se muestra el trabajo de los estudiantes.

259.	Sandra	Escriba triángulo, no haga ese muñeco. [Se refiere que Miguel dibuja “△ ", en vez de escribir la palabra “triángulo”].
260.	Miguel	Si un triángulo tiene un ángulo. Si un triángulo tiene un ángulo.
261.	Sandra	Tiene un ángulo recto.
262.	Miguel	Escribimos recto.
263.	Sandra	Si. Es un ángulo recto.
264.	Miguel	Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces tiene dos ángulos agudos [Escribe en el cuaderno], entonces tiene dos ángulos agudos. Y obtuso no, ¡a no! No porque son los que miden más de 90.
265.	Sandra	No, porque no hay un ángulo que mida más de 90. [Lo dice al mismo

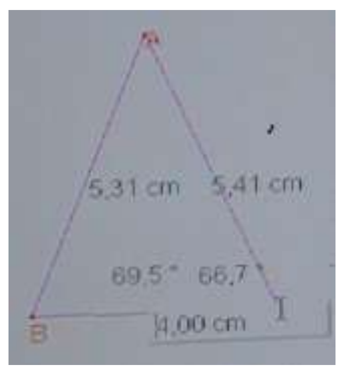
tiempo que lo menciona Miguel].

En la intervención 259 de Sandra se evidencia su intención por utilizar el lenguaje y la notación matemática según los normas socio-matemáticas de la clase **(CII, i3, a4)**, dado que reconoce que el símbolo utilizado para denotar un triángulo particular no debe utilizarse para aludir a tal objeto geométrico en términos generales. La intervención de Sandra contribuye a que Miguel plantee el antecedente del hecho geométrico de acuerdo con el lenguaje establecido en clase. De igual manera se vuelve a evidenciar que utiliza el formato condicional y que han utilizado la definición de ángulo agudo.

ANEXO III. TRANSCRIPCIÓN CONCERNIENTE A LA ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES EN RELACIÓN CON LA SITUACIÓN 1.

En esta sesión la profesora propuso a los estudiantes la situación 1: *¿Para qué tipo de triángulos la suma de los ángulos internos de un triángulo es 120?* Además, solicito a cada grupo de trabajo entregar al finalizar la clase un escrito que diera cuenta de los pasos de construcción y explicarán como exploraban la situación.

5.	Sandra	[Construye un triángulo, nombra sus vértices, mide sus tres lados y dos de sus ángulos,] Estamos hablando de ángulos, solo hay necesidad de medir los ángulos. ¿Ahí falta un ángulo, cierto? [Se refiere a que falta medir $\angle BAC$] El ABC, el ACB, ¿Cuál falta?



6.	Diego	Es el de acá [Señala $\angle CAB$].
7.	Sandra	ACB, ABC, falta uno [señalan los ángulos del ΔABC]. ¿CAB? Sumándolos.
8.	Diego	[Observa los dos ángulos medidos, $m\angle ABC = 69.5$ y $m\angle ACB = 66.7$] Ahí da más de [mientras Sandra señala los vértices C, A y B para tomar la medida del $\angle CAB$].
9.	Sandra	La suma de los internos.
10.	Diego	[Observa la medida del $\angle CAB$] 43 coma 8. No, pero hay da más, de 120.
11.	Sandra	[Lee de nuevo el problema] La suma interna de sus ángulos sea menor de 120

		grados. Para qué tipo de triángulos.
12.	Diego	Ahí da mayor de 120. Da más de 120. [Mientras tanto Sandra mira a la pantalla].
13.	Sandra	Pero, dice ¿para qué tipo de triángulo? [Sandra comienza a escribir en una hoja lo que han hecho hasta el momento] Una idea, Diego.
14.	Diego	¿Cómo?
15.	Sandra	Una idea
16.	Diego	Ni forma de hacerlo más pequeño, por qué [No concluye la idea]
17.	Sandra	Igual, si lo movemos. O sea se supone que para que sea un triángulo, si lo movemos, si hacemos uno más pequeño, igual si lo vamos a mover acá con esto va a ser grande ¿no? ¿cierto? [En ese momento toma uno de los vértices del triángulo y empieza a cambiar de tamaño del triángulo].
18.	Diego	Si.
19.	Sandra	Pero dice para qué tipo de triángulo la suma interna de sus ángulos.
20.	Diego	Y la suma interna ¿es de esto? ¿Sí o no? [Señala los tres ángulos del ΔABC]
21.	Sandra	Si.
22.	Diego	Es menor de 120 grados, es menor.
23.	P	[La profesora se acerca al grupo de trabajo de Sandra y Diego] ¿Haber y ustedes cómo van en el trabajo?
24.	Sandra	No, profe.
25.	P	¿No van? Listo, hicieron un triángulo.
26.	Sandra	Hicimos un triángulo.
27.	P	Léame la tarea.
28.	Sandra	Por qué tipo [Interrumpe la profesora para corregirle]
29.	P	Para qué tipo.
30.	Sandra	[Lee la pregunta] ¿Para qué tipo de triángulos la suma interna de sus´ángulos es 120 grados?
31.	P	Listo, entonces ¿en qué consiste la tarea?
32.	Sandra	[Lee de nuevo la tarea] pará que tipo de triángulos. [Es interrumpida por la profesora]
33.	P	No, pero no lea, explíquelo con sus palabras.

34. Sandra Es que no esas estoy yo ¿Para qué tipo de triángulos?

35. P Pues, eso es lo que tengo que encontrar, ¿cierto? Pero ¿qué es lo que estoy pidiendo que haga con ese triángulo?

36. Sandra Que la suma de sus ángulos sea menor de 120 grados.

37. P Pues eso es lo que tengo que encontrar, ¿cierto? Pero ¿qué es lo que estoy pidiendo que haga con ese triángulo?

38. Sandra ¿De los vértices?

39. P No, no. De los lados. [Lo dice mientras habla Sandra]

40. Sandra Hay yo entendí vértices. De los lados no.

41. P ¿Por qué no tiene sentido hablar de la medida de los lados?

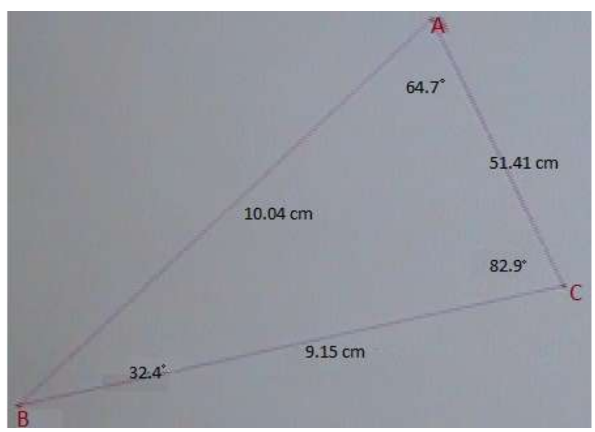
42. Sandra Porque estamos hablando de los ángulos.

43. P Ah, listo. Entonces qué. Además, de eso ya tienes las medidas de los ángulos. Ahora, ¿yo qué debería empezar a hacer con esas medidas para responder a la pregunta?

44. Diego Sumarlos ¿no?

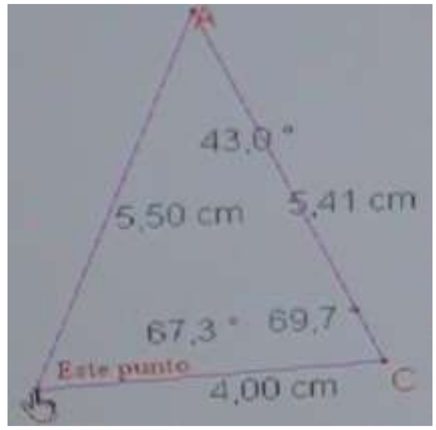
45. P Listo, entonces ¿tú qué harías? [Dirige la pregunta a Diego]

46. Diego Pues sumarlos así, pero ni modos me da más de 120. [Se refiere al triángulo que tienen en ese momento en la pantalla]

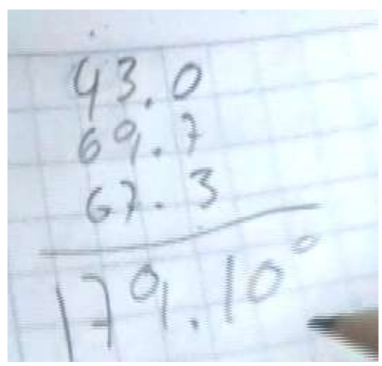


47. P Pues entonces suma esos y me dices cuánto te dio, después muevan el triángulo y me dicen cuánto les da. [La profesora se retira del grupo].

48. Sandra [Arrastra los vértices ΔABC] Ese es el que teníamos. [Se refiere a que el triángulo que tienen ahora se parece al primero que exploraron].



Ahí dice para qué tipo de triángulos, o sea. [Sandra observa que Diego suma la medida de los tres ángulos en su cuaderno, obteniendo como resultado 179.10] Le da 179.



49. Diego 179,10 grados.

50. Sandra Pero, si nos tiene que dar menos de 120 ¿Está mal sumado?

51. Diego ¿Si está mal sumada? [Comprueba la suma realizada] tres, doce y siete, diecinueve, llevo una. Once y seis, diecisiete.

52. Sandra [Comprueba nuevamente la suma de las unidades] Diecinueve. Diez, dieciséis y una diecisiete.

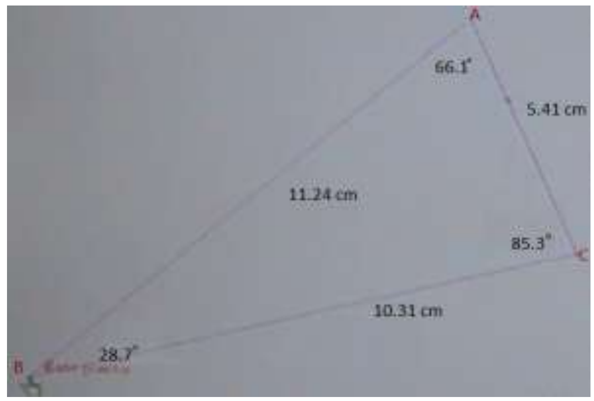
53. Diego ¿La suma de éste para acá? ¿No? [Señala las cifras después de la coma]

54. Sandra No. ¿O el uno? No.

55. Diego ¿Sí?, ¿está mal sumado?

56. O — Ésta mal sumada. Cuando tú sumas siete más tres te da diez y llevas a la columna siguiente ese valor. [Diego vuelve a revisar la suma con las indicaciones del observador y obtiene 180 grados]

57. Sandra — Es algo obvio, pero uno no [Se refiera a las sugerencia del observador]. El media cuánto [Mira las medidas que esta sumando Diego], el que media 43,69 [Hace referencia a la medida del $\angle BCA$]. Igual si lo volvemos a mover. [Arrastra el triángulo, obteniendo otras medidas para los ángulos].



58. Diego — Agrándelo, eso. Volvámoslo y subámoslo que de así a ver si da igual. [Lo dice mientras Sandra arrastra el ΔABC del vértice B].

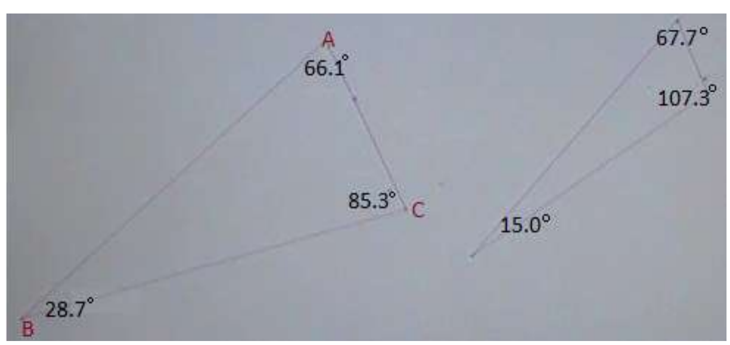
59. Sandra — Da 66,1.

60. Diego — No da, no da igual.

61. Sandra — Para no confundirnos [Borra las medidas de los lados del triángulo]. Hagamos otro ¿no? [Mientras busca la herramienta triángulo]. No pero igual que puede cambiar.

62. Diego — Es que haga uno más chiquitico.

63. Sandra — Uno más chiquitico [Risas] Hagamos uno más pequeño, ¿cierto? [Con la herramienta triángulo construye otro triángulo al lado derecho del ΔABC]. Pero igual, ¡Ah! No encuentro la herramienta [Se refiere a la herramienta medida de ángulo].



64. Diego Que sus ángulos internos sumados me dan menor que.

65. Sandra ¿Para qué?, es ¿para qué? ¿Cierto?

66. Diego Para. No hay triángulo, ahí le da más de 120.

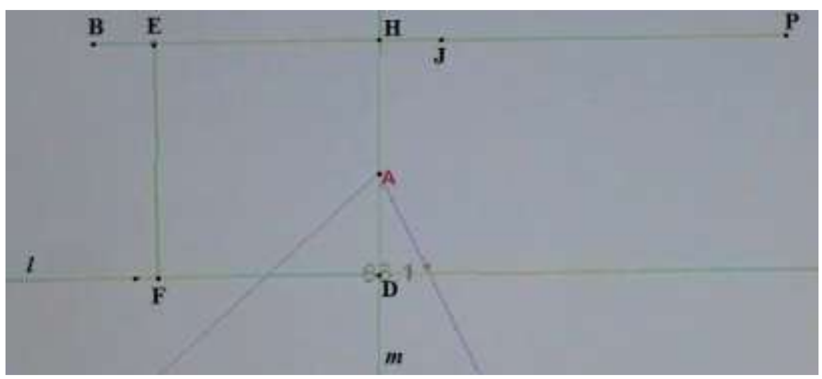
67. Sandra En el tamaño no va, o sea, en el tamaño no va [observa el último triángulo construido].

68. Diego Es en el tipo de triángulo.

69. Sandra Porque en el tamaño no va. No es en el tamaño.

70. Diego Es que [No termina la idea].

71. Sandra Pero, no va en el tamaño del ángulo, del triángulo, entonces. Ahí tocaría hacer como hicimos ése ¿cómo es que se llama? El polígono ese, ¿sí es polígono? ¿Sí? Y hacer un triángulo con medidas exactas. Se acuerda que hicimos una recta, ¿cómo se llama el triángulo? [Dirige las preguntas a Diego y comienza a realizar la siguiente construcción: traza $\overline{BP} \parallel l$ y $\overline{EF}$, aparentemente perpendicular, a $\overline{BP}$ y l. E es punto de $\overline{BP}$ y F un punto de l. Con la herramienta recta paralela, traza a m paralela a $\overline{EF}$ por el punto A del ΔABC. Sea D el punto de intersección de m y l, y H el punto de intersección de m y $\overline{BP}$. Posteriormente, halla el punto medio del segmento $\overline{EH}$, sin lograr ubicarlo dado que no señala los extremos de dicho segmento, sino los extremos de $\overline{BP}$. Por tanto obtiene el punto J que es el punto medio de $\overline{BP}$].



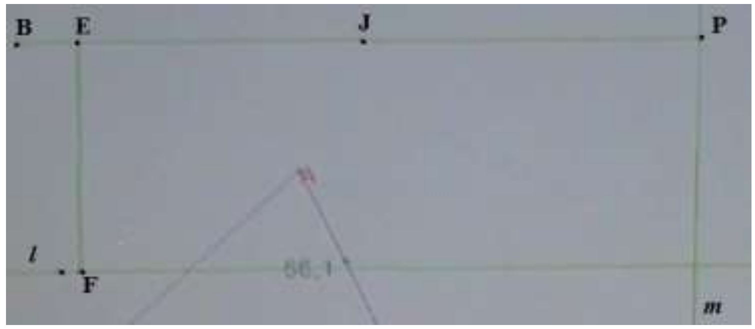
No me sale. A es que salió fue de este segmento [Se refiere al punto medio del segmento $\overline{BP}$]. ¿Cómo se borra

72. Diego ¿Cuál? No.

73. Sandra Si mírelo acá hallo el punto medio de este segmento [señala $\overline{BP}$].

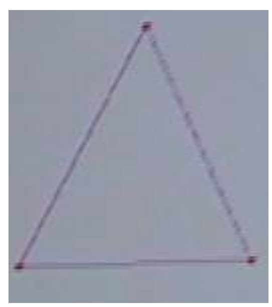
74. Diego Entonces le tocaba esta raya acá [se refiere a que la recta m debía haber pasado por J].

75. Sandra [Borra la recta m y la traza nuevamente pero pasando por el punto P]. Ahí está el punto medio.



[Elige la herramienta triángulo y selecciona los puntos J y F, pero no puede trazar el triángulo] A ver si sale un triángulo. [Selecciona la herramienta triángulo nuevamente, pero al hacer clic en otro punto de la pantalla, y después seleccionar el punto J, observa que no puede trazar el triángulo que desea (ΔFEG)]. Mala opción. ¿Cómo se oculta? ¿No sabe cuál es?

76.	Diego	No.
77.	Sandra	[Borra la recta *l* y busca la herramienta ocultar]
78.	Diego	Hay mucho espacio. Toca que borre esta raya de acá [Señala la recta *m*]
79.	Sandra	[Utiliza la herramienta “triángulo” para trazar un triángulo] ¿Cuál es pregunta?



80.	Diego	[Lee la pregunta de nuevo] Para qué tipo de triángulo la suma interna de sus ángulos es menor de 120 grados ¿Será que hay un tipo de triángulo que pueda darnos eso?
81.	Sandra	Pero tiene que ser que todos los ángulos sean iguales ¿Cuál es ese triángulo? ¿Cuál es ese triángulo que todos sus ángulos?
82.	Diego	[Lee del cuaderno la definición de triángulo equilátero] triángulo equilátero es un triángulo que sus lados son congruentes.
83.	Sandra	Son congruentes. Entonces debe ser un triángulo congruente. Porque es equilátero y que sus ángulos sean, a no pero igual el ángulo va a ser el mismo. Como es que son equiláteros, entonces sus ángulos van a ser. Es que cuanto debe medir, lo de [De nuevo no concluye la idea]
84.	Diego	Vamos a medir los ángulos [Se refiere a los ángulos del triángulo que han

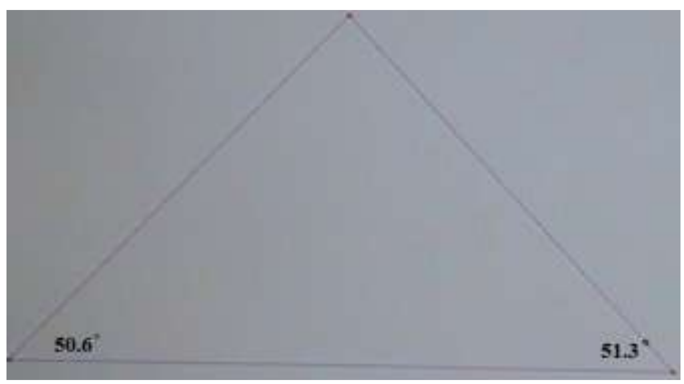
construido en la pantalla, sin embargo no toman la medidas]

85. Sandra Por eso, pero si yo, el ángulo. Bueno si acá lo hacemos de 90. Por eso, pero si yo, el ángulo. Bueno si acá lo hacemos de 90 [señala un triángulo que esta dibujado en el cuaderno de Diego], entonces sería 180, entonces sería menos, pero imagínese solo son dos ángulos [señala dos ángulos del triángulo dibujado en el cuaderno] y son tres ángulos. Va tocar hacer uno, ¿cómo se hace un triángulo, que nos mida todos los ángulos de 45? ¿Cómo se hace un triángulo así? ¿Así? [Señala el triángulo dibujado en el cuaderno]. Apenas.

86. Diego ¿Será que si?

87. Sandra Ciento [hace los cálculos mentalmente]. No mentiras nos pasaríamos. Claro. No hemos hecho nada.

88. Diego Si [Toma las medidas de los ángulos del triángulo].

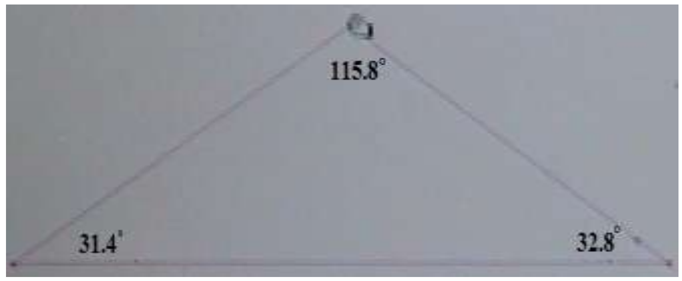


89. Sandra ¿Por qué acá de cincuenta? ¿Por qué acá da diferente?[Se refiere a las medidas de los ángulos del triángulo construido] Se supone que estamos midiendo un ángulo igual. O sea [No concluye la idea].

90. Diego ¿Estos ángulos tienen que ser iguales? ¿No? [Señala los ángulos que miden 50.6 y 51.3].

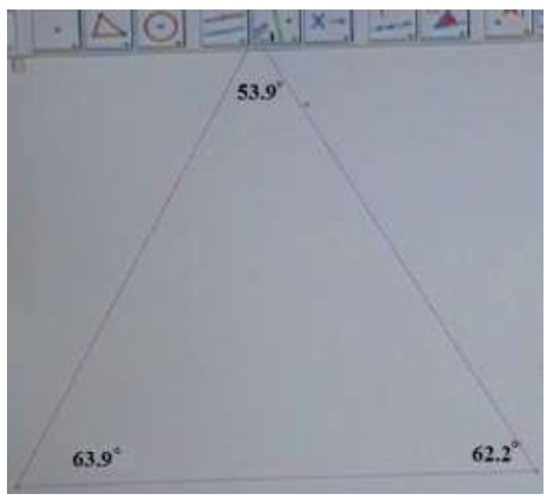
91. Sandra Se supondría. Claro que como lo corrí, no. [La estudiante vuelve a tomar la medida de los dos ángulos 50.6 y 51.3 Obteniendo la misma medida] Si ahí está bien.[Posteriormente, toma la medida del ángulo que falta y obtiene como

resultado 78.0] Hasta ahí ya íbamos cuadrando con la cuenta [Risas, arrastrar el triángulo] Acá aumenta [Se refiere al ángulo que mide 115,8]



92. Diego Si.

93. Sandra Pero acá abajo no. [Se refiere a los ángulos que miden 31.4 y 32.8] Si ves, que los dos ángulos opuestos, disminuyen y el de arriba aumenta. Tiene que quedar por halla bien arriba. [Sandra vuelve a arrastrar uno de los vértices del triángulo] Ahí están los 120 [Risas]. ¿Ya ha escrito algo en la hoja?



94. Diego No

95. Sandra ¿No? [La profesora se acerca al grupo de Sandra y Diego]

96. P ¿Qué paso Sandra? Y ¿por qué tantos triángulos Sandra? [En la pantalla del computador aparecen tres triángulos construidos]

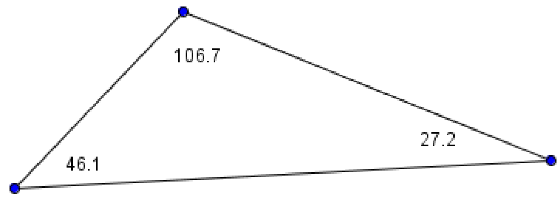
97. Sandra Profe porque estamos mirando hartas opciones.

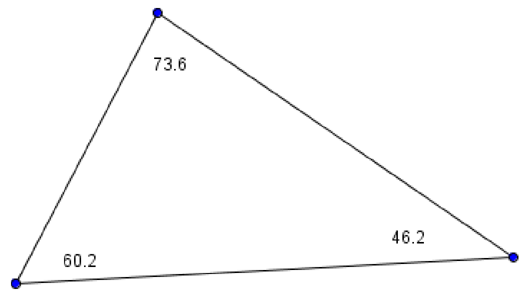
98. P ¿Hartas opciones, Sandra? Y por ejemplo si yo hago esto [La profesora arrastra uno de los triángulos que aparecen en pantalla] ¿esta no es una opción distinta?

99. Sandra Si.

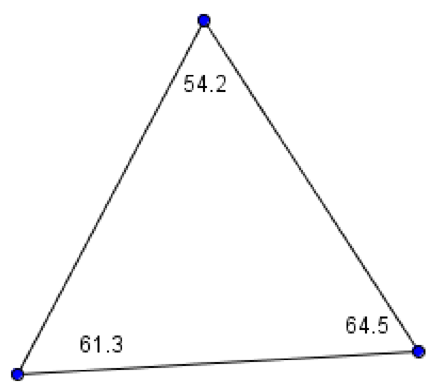
100.	P	Y si yo hago esta [Vuelve a arrastrar el triángulo] ¿No es una opción distinta? [Vuelve a arrastrar el triángulo]. Y si hago esta ¿No es una opción distinta? [Vuelve a arrastrar el triángulo]
101.	Sandra	Si. Hemos intentado también [Se refiere a arrastrar los triángulos]
102.	P	¿Tengo que hacer varios triángulos para tener opciones distintas?
103.	Sandra	No.
104.	P	Listo, tenemos por ejemplo éste. [Señala uno de los triángulos que aparecen en pantalla] ¿Qué es lo que nos interesa de ése triángulo, según la tarea?
105.	Sandra	Sumados, que sumados los ángulos nos den menos de 120 [Diego también responde]
106.	P	Listo, entonces sumen esos a ver qué pasa. Háganlo ahí en la hoja.
107.	Sandra	Qué van a ser [No concluye la idea].
108.	P	Es que si me está haciendo una carta me tiene que decir cuántas veces sumo.
109.	Diego	Toca dibujar el triángulo.
110.	Sandra	¿Cuántas sumas ha hecho? [Risas]
111.	Diego	No han hecho sumas y, entonces, cómo hacemos. [Diego comienza a sumar los ángulos del triángulo que han construido en Cabri]
112.	Sandra	Ahí sería…
113.	P	Y vuelva y mire otra opción, hasta que mire qué encuentra.
114.	Diego	[Obtiene como resultado 180 grados. La suma la resuelve en la misma hoja en la cual había realizado una suma anterior que le había arrojado el mismo resultado] Nos da igual [Risas]. Igual que el de ahorita.
115.	Sandra	Entonces qué tipo de triángulo, es que la pregunta es. Para qué tipo de triángulo… [Sandra mira la hoja donde Diego realizo las sumas]. Un tipo en especial. Y ¿por qué si las medidas son diferentes nos da lo mismo? Hagámoslo otra vez [Se refiere a sumar las medidas de los ángulos de otro triangulo obtenido a partir de la acción de arrastre] y sumemos otra vez. [al arrastrar obtiene un triangulo cuyas medidas de sus ángulos son 55,4; 76,9 y 47,7] ¿Este ya da más?
116.	Diego	[Realiza la suma de los ángulos] Da igual.
117.	Sandra	[Risas] Disque da más.
118.	Diego	Así se agrande o se achique da 180 grados.
119.	Sandra	¿Y por qué da 180 grados? ¿Qué tipo de triángulo es este? [Risas, vuelve a arrastrar el triángulo y obteniendo las medidas de 75, 59 y 46 grados para sus

		ángulos]. Pero igual.
120.	Diego	Vuelve a dar 180 grados. [Suma las medidas de los tres ángulos y obteniendo 180 grados nuevamente] Da 180.
121.	Sandra	Espera bajamos éste [No se observa que está señalando], pero es que si bajamos este, este aumenta, ¿no? [Se refiere a la variación de los ángulos]
122.	Diego	Ahí da 180.
123.	Sandra	Mídalo así, de una.
124.	Diego	[Realiza la suma de las medidas 75, 59.9, 45.1 en su cuaderno] Ahí da lo mismo, da 180].
125.	Sandra	Mírelos.
126.	Diego	Da los mismos 180.
127.	Sandra	No es ningún tipo de triángulo que de, o ¿sí? No debe haber, porque si todas las medidas dan 180. Para que dé menos. Si un triángulo es. De la forma que dé, no hay triángulo que mida menos de 90. ¿Puede? [Los estudiantes querían decir 120]
128.	Diego	180 [Interrumpe Sandra].
129.	Sandra	¿Qué mida menos? No pero que mida menos, no, que igual no. Porque igual siempre las vértices…Pero por qué, no me explico. Suma esto [se dirige a Diego, y le pide que sume las medidas de los ángulos del triángulo que está en pantalla. Tales medidas son: 119.1; 36 y 24] 119.1 [Es interrumpida por Diego].
130.	Diego	Da lo mismo mira [Lo suma mentalmente] 30, 60 y 119 da 180 grados.[No mencionan los decimales de los grados]
131.	Sandra	Hay una unidad muy grande y esa es la que sobrepasa [Se refiere al ángulo mide 119.1].
132.	Diego	Y mueva otro, y coja otro y vera que igual va a dar 180.
133.	Sandra	Es que ya si, hemos movido todos los puntos. Y con esto. Pues lo que yo le dije acá, lo que yo. Este fue el que hicimos ahorita.
134.	Diego	Si y ahora lo puede mover.
135.	Sandra	Pero igual, al bajarlo siempre ese va aumentar y los otros van a disminuir. Entonces nos va a dar los mismos 180. ¿Sí o no?, porque igual si lo subo, estos disminuyen y estos aumentan. [La estudiante arrastra uno de los vértices del triangulo, logrando que el ángulo pase de medir 106.7 a 73.6 grados].





136. Diego — Lo que le digo es que ahora lo mueva con éste o con éste [Señala el ángulo que mide 46.4 y el que mide 27.2].



137. Sandra — Si ve. [Le dice a Diego, al ver que el ángulo que está arrastrando aumenta, y los otros dos disminuyen]. Si ve si éste aumenta, estos dos disminuyen, si este aumenta los otros dos disminuyen. Pero igual la suma de los tres va a dar 180.

138. Diego — 180.

139. Sandra — [Escribe en el cuaderno: “Comenzamos haciendo un triángulo, nombramos sus vértices ABC, después le hacemos la suma de sus ángulos, lo hicimos de varias formas nos damos cuenta que las medidas del triángulo ABC es de 180 grados y podemos decir que no hay triángulo que sumando sus ángulos internos nos de menos de 120 grados. Al terminar lee al observador lo que ha escrito].

ANEXO IV. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA REALIZADA A LOS ESTUDIANTES, LA CUAL INDAGABA ACERCA DE LA MANERA EN LA QUE ELLOS FORMULARON EL HECHO GEOMÉTRICO DE LA SUMA DE LAS MEDIDAS DE LOS ÁNGULOS DE UN TRIÁNGULO.

Corresponde a la entrevista realizada al grupo de Sandra, Miguel y Diego, en la cual se indaga acerca de la manera cómo establecen el hecho geométrico de la suma de la medida de los ángulos de un triángulo.

1.	P	Cuál era la tarea ahí [Se refiere a la tarea de establecer el hecho geométrico] que me cuenten cuál era la tarea en ese momento [los estudiantes miran la hoja].
2.	Sandra	Sacar el hecho geométrico
3.	Diego	No. Era decir por qué
4.	Sandra	No, es el hecho geométrico del triángulo, del que cuando le teníamos que sacar los ángulos, las medidas, ese es el hecho geométrico del triángulo. Esa era la tarea.
5.	P	¿Sí? Listo, entonces la tarea era escribir el hecho geométrico relacionado con qué.
6.	Sandra	Un triángulo. Un triángulo que tenía que tener una medida, o sea la tarea era sacarle
7.	P	[Interrumpe a Sandra] ¿Qué se estaba buscando?
8.	Sandra	O se la idea era hacer un triángulo que se podía medir, midiendo sus ángulos nos daba menos de 120.Pero [La profesora interviene]
9.	P	¿La medida?
10.	Sandra	O sea midiendo, no [piensa en lo que dijo la profesora], sumando la medida de los ángulos tenía que darnos menor de 120, pero nos dimos cuenta que la sumarlos nos daba todo 180 así los moviéramos.
11.	P	Y cómo te diste cuenta.

12.	Sandra	Los movimos los sumamos, o sea los movíamos y los sumábamos en varias ocasiones los sumamos o sea moviéndoles cualquier punto nos dábamos cuenta o sea los volvíamos a sumar y volvíamos y movíamos otro punto y volvíamos a sumar, entonces nos dimos cuenta que siempre, daba 180 grados.
13.	Diego	Siempre nos daba 180 grados.
14.	P	Listo. Cuando fueron a escribir el hecho geométrico, qué tuvieron en cuenta para escribirlo. [Los estudiantes se miran y no saben qué responder; la profesora vuelve a intervenir y replantea la pregunta]. O sea cuando les dicen escribir un hecho geométrico de un invariante que encontraron cuando estaban explorando en Cabri, ¿en qué piensan para escribir el hecho geométrico?
15.	Sandra	En qué tenemos.
16.	P	En lo primero que piensan es en lo que tienen, listo. ¿En esta situación que tenían?
17.	Diego	[Luego de una pausa] Un triángulo.
18.	P	¿Un triángulo?
19.	Diego	Decía que si sumamos la medida de los tres ángulos de un triángulo.
20.	P	¿Eso era lo que tenían?
21.		Aja [Todos los miembros del grupo].
22.	P	Después de tener en cuenta lo que tienen ¿qué hacen?
23.	Diego	Pues nos damos cuenta de que el resultado siempre va a hacer de 180 grados independientemente el triángulo que sea.
24.	Sandra	Y comenzamos a formar, que si tenemos un triángulo que es de lo que estamos hablando, entonces comenzamos a armar con *sí* y *entonces*. O sea que por lo menos con el si tenemos un triángulo ya comenzando así vamos armando el hecho geométrico.
25.	P	Bueno el *sí*, o sea tú empiezas por el *sí* ¿sí?
26.	Diego	Sí. [Sandra afirma moviendo la cabeza].
27.	P	Listo, Y entonces después qué.
28.	Diego	Pues escribimos *entonces* [Risas]
29.	P	¿Y entonces de una?
30.	Miguel	No.

31.	Diego	No, pues.
32.	Sandra	*Si*, que tenemos o que estamos explorando.
33.	Diego	*Si* para medir.
34.	P	Explícame cómo, cómo [La pregunta va dirigida a Sandra].
35.	Sandra	*Si*, lo que tenemos o lo que estamos explorando, el triángulo. En este caso estamos viendo el triángulo, entonces aseguramos que es un triángulo. Si tengo un triángulo.
36.	Miguel	Si tenemos un triángulo.
37.	Sandra	Si tenemos un triángulo.
38.	P	Listo.
39.	Sandra	Ahí ya después, si tenemos un triángulo, depende si ya nos sabemos el nombre, o sea como el caso del isósceles o él, el, cuál era el que estábamos mirando, el triángulo rectángulo, o sea cuando les tenemos ya el nombre, por lo menos en este caso no teníamos sino un triángulo. Entonces ya al saber que teníamos un triángulo [mira la hoja] me perdí. Definimos como hicimos para saber que, o sea que la, que sumando siempre los ángulos del triángulo nos iba a dar 180 grados, entonces ahí ya como que lo especificamos, como hicimos para sacar el para sacar el entonces.
40.	Diego	[Habla al mismo tiempo que Sandra] Para formar el hecho geométrico,
41.	P	Hace un rato me decían, me estaban hablando del *entonces*, el *entonces* que papel juega.
42.	Diego	El *entonces* es como la definición de lo que estábamos buscando.
43.	Miguel	Lo que estábamos buscando, como ya entonces, al decir entonces es como ya decir el resultado de lo que estábamos buscando.
44.	Sandra	Lo que analizamos.
45.	Diego	El *entonces* quiere decir la respuesta a lo que queríamos buscar.
46.	P	Listo. La primera conjetura de ustedes cuál fue.
47.	Sandra	Mostrando el papel dice cual es.
48.	P	La lees por favor.
49.	Diego	[Lee lo que han escrito] Si sumamos los tres ángulo de un triángulo independiente del triángulo que sea siempre va a dar como resultado 180 grados.
50.	P	Ustedes habían escrito esa y enseguida intentaron escribir otra.

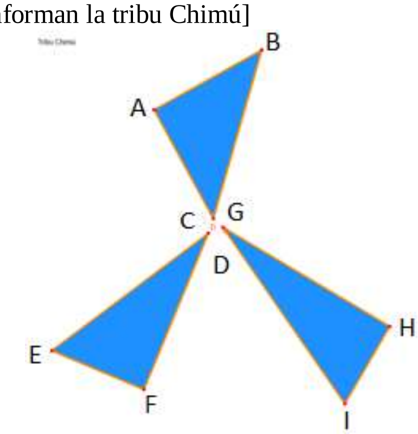
51.	Miguel	Otra.
52.	Diego	Pero no nos dio.
53.	P	Pero esa no la completaron. Y después pasaron a esta [señala el papel]
54.	Diego	Y ahí si ya nos quedo como más, como más, más especifica.
55.	P	Que estaban buscando al tratar de escribir otra conjetura.
56.	Sandra	Pues dejarla lo mejor escrita posible, o sea que no quedara [Es interrumpida por Diego]
57.	Miguel	O sea como dejarla mejor.
58.	P	Listo. Y cuáles son los cambios que hay de esta conjetura inicial que hicieron a esta segunda conjetura.
59.	Diego	Que a la primera aquí le metimos el *si*.
60.	P	Listo.
61.	Sandra	Todas lo tienen.
62.	Diego	Por eso. Y ya la última pues ya tiene el *entonces*.
63.	P	¿La primera no tenía el *entonces*? [Diego mueve la cabeza diciendo que no]. Listo. ¿Qué otros cambios hay de aquí a aquí [Señala el papel]
64.	Miguel	Por lo menos en la primera nosotros dijimos si sumamos los tres ángulos, en la última nosotros dijimos si sumamos la medida de los tres ángulos.
65.	Diego	Si pues, porque para sumar ángulos cómo.
66.	Miguel	Cómo si no tenemos la medida, cómo vamos a sumar ángulos si no tenemos la medida.
67.	P	Listo. Qué más.
68.	Sandra	Si sumamos los tres ángulos de un triángulo, nos sobro la medida [Risas]
69.	Miguel	Ahora otra cosa, cuando decimos un triángulo independientemente, pues cuando decimos que es un triángulo ya sabemos que es cualquier triángulo, aquí ya no le colocamos eso, de un triángulo cualquiera.
70.	Sandra	Le cambiamos el independiente por cualquiera que también sobra. [Risas]
71.	P	¿Qué?
72.	Sandra	Esta palabra independiente y cualquiera también sobran porque sabíamos que estábamos hablando de un triángulo.

73.	Miguel	Independientemente y cualquiera, pues a mí me parece que es cómo lo mismo.
74.	Sandra	Por eso pero igual sobra esa palabra.
75.	Miguel	Ahí sobra, en ambas sobra.
76.	P	Listo. Gracias.

ANEXO V. TRANSCRIPCIÓN CONCERNIENTE A LA ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES EN RELACIÓN CON LA SITUACIÓN 2.

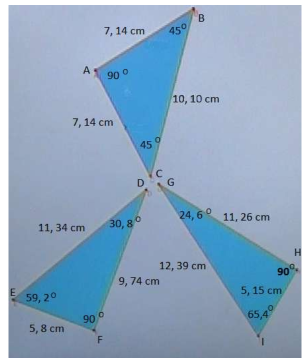
A continuación se presenta la transcripción de la sesión de trabajo en la que se propuso a Sandra, Miguel y Diego el problema de la armonía de las tribus, específicamente el ítem c correspondiente a la tribu Chimú. Los estudiantes que participaron en esta sesión de clase y no hacen parte del grupo cuyas acciones fueron objeto de estudio, se han etiquetado como Estudiante (1), Estudiante (2) y Estudiante.

1.	Sandra	[El observador pregunta al grupo que han realizado] Estamos tomando las medidas de los segmentos. [Se refiere a las medidas de los lados de los triángulos que conforman la tribu Chimú]



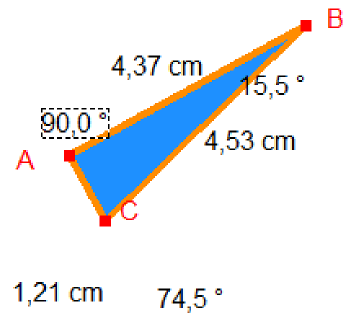
2.	Miguel	Primero que todo nombramos, nombramos los puntos. Luego estamos tomando las medidas. [Es interrumpida por Sandra]
3.	Sandra	De los segmentos de cada aparente triángulo. [Hay un momento de silencio]¿Se pueden medir ángulos?
4.	O	Sí, claro que sí. [Habla para toda la clase]. En esta si se pueden sacar ángulos.
5.	Miguel	[El grupo mide los ángulos] A se obtiene el ángulo de A, B y C [Miden $\angle ABC$ del ΔABC] 45 grados centígrados. Ahora el de A, C y B.
6.	Sandra	Ahí se puede hacer otro. [Señala un ángulo que no se ha medido]

7.	Miguel	El de *B*, *A* y *C*. [Miden $\angle BAC$] Ahora el del otro, *D*, *E* y *F*. [Miden los ángulos del ΔDEF]
8.	Sandra	Son totalmente distintos. ¿No?
9.	Miguel	Todos tres tienen un ángulo de noventa grados ¿Cuál marco? *G*, *H* e *I*. Ahora el de *I*, *G* y *H* [Sandra toma la medida de los ángulos del ΔIGH].



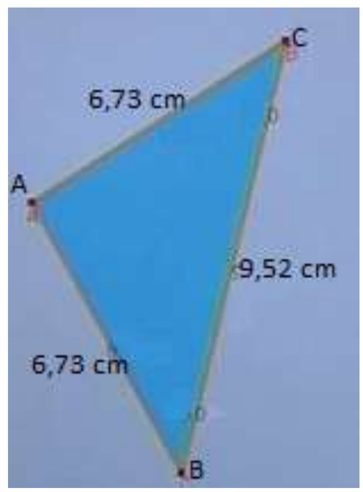
10.	Sandra	Lo único que tienen en común es que los tres ángulos, es que tienen uno en común uno de noventa grados. [No han arrastrado vértices de los triángulos]
11.	Miguel	Todos tienen un ángulo de noventa.
12.	Sandra	Por ahora.
13.	Miguel	¿Y ahora qué?
14.	Sandra	Ahora miramos si tienen ¿qué más? Movámoslo ya [arrastra el vértice del ΔABC].
15.	Miguel	Halamos. Y si lo movemos [Arrastra el vértice *C* del ΔABC]
16.	Sandra	Sigue siendo el ángulo de noventa grados.
17.	Miguel	Hale el *A*, hale el *A* [Sin embargo Sandra arrastra el punto *C*]
18.	Sandra	Ah. Que hale el *A*.
19.	Miguel	Hale el *A*, ¿si se puede? [Sandra arrastra el punto *A* del ΔABC, el cual no se deja mover] no se descuadra, 90 grados y no se descuadra.
20.	Sandra	Pero entonces. [No termina la idea dado que el grupo escucha indicaciones de la profesora]
21.	P	Recuerden que deben explicar cómo mueven la figura y qué conclusiones sacan. [Se dirige a la clase]

22. Sandra [Mientras la profesora da las indicaciones, La estudiante arrastra el punto *C* del ΔABC]. Pero todos cambian ¿No?



23. Miguel Pero menos el de noventa grados.

24. Sandra Igual no hay medidas iguales. [Arrastran ΔABC hasta obtener $\overline{AB} \approx \overline{AC}$]. A sí, el de estos dos segmentos [habla al tiempo Miguel]. Estos dos son congruentes. [Señalan $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$]



25. Miguel El de los dos segmentos, el de *BA* y *AC*, son congruentes. El de los dos segmentos. Pero, el del ángulo también es de noventa grados.

26. Sandra Estos dos son congruentes. [Señala $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$].

27. Miguel Oiga, y nos toca ir escribiendo en una hojita. Bueno que escribimos. Yo voy escribiendo y usted me va dictando.

28. Sandra Usted ya sabe los pasos.

29. Miguel Bueno, que más decimos de ése [ΔABC].

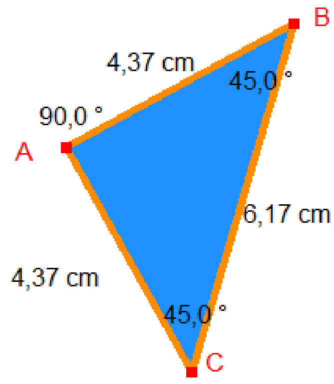
30. Sandra Esto es tribu Chimú, escriba el nombre de los dos [Marcar la hoja que van a presentar] Te acuerdas como la vez pasada hicimos, cómo se llamaba cuándo, se deformaba un ángulo. Es que acá hay dos segmentos [$\overline{AB}$ y $\overline{AC}$] que son

congruentes.

31.	Miguel	Entonces aquí decimos el segmento *BA*.
32.	Sandra	Con la raya.
33.	Miguel	Congruente es con las dos rayitas y la de encima. [Escribe en el cuaderno $\overline{\mathrm{BA}} \cong \overline{\mathrm{AC}}$] Bueno ¿qué más se puede decir de ése? [ΔABC]
34.	Sandra	Que son congruentes, pero el ángulo BAC.
35.	Miguel	¿Qué iba a decir?
36.	Sandra	Que tienen un ángulo de 90 grados, pero es lo único que tiene congruencia en los tres.
37.	Miguel	Pues no dice que esos son triángulos.
38.	Sandra	Pues tiene tres puntos.
39.	Miguel	Bueno, pues si lo miramos así, si de pronto [Señala los vértices del ΔABC].
40.	Sandra	Pero igual es un triángulo, tiene los tres puntos.
41.	Miguel	¿Cuándo dibuje la figura hice paralelos?
42.	Sandra	No, paralelos no hay. Pero es que en una figura que hicimos la vez pasada nosotros miramos algo así, en el que se puede formar un ángulo. [Interrumpe Miguel].
43.	Miguel	¿Usted qué es lo que quiere decir que no le entiendo? Porque es que toca entender bien las vainas para uno escribir en la hoja. El segmento *AB*, es congruente con el segmento *AC*. Si o no.
44.	Sandra	Pero, entonces acá no se puede decir que es opuesto. Que está en el centro.
45.	Miguel	El ángulo del segmento *AC*, porque el segmento *BA*. ¿Por qué? *AC*.
46.	Sandra	Pero, entonces acá no se puede decir que es opuesto. Que está en el centro.
47.	Miguel	A no, eso es cuando los dos [No termina la idea].
48.	Sandra	Por eso, pero es que acá solo hay uno.
49.	Miguel	Oiga china.
50.	Sandra	Ah.
51.	Miguel	Qué escribí.
52.	Sandra	Bueno, espérate. [Observa el cuaderno donde han escrito los invariantes] es

		que tú acá debiste haber escrito “El primer paso que hicimos fue medir el segmento BAC.”
53.	Miguel	Pero es que íbamos acá [Risas].
54.	Sandra	Listo, entonces, primer paso [le dicta a Miguel]. Escriba ahí, primero. [Señala la hoja].
55.	Miguel	Primero.
56.	Sandra	Nombramos cada segmento, los tres segmentos.
57.	Miguel	Nombramos los tres segmentos.
58.	Sandra	Si, los tres segmentos de los tres triángulos.
59.	Miguel	Si es válido de los tres triángulos.
60.	Sandra	Bueno, de las tres figuras. Tomamos la medida de los tres segmentos. [Interrumpen su conversación en el momento que la profesora se dirige a la clase]
61.	P	Ya encontraron las invariantes, o todavía no. Esperamos, si. [Se dirige a toda la clase]
62.		Si [Varios estudiantes].
63.	P	¿Sí? [Da más tiempo para la actividad]
64.	Miguel	[Continua hablando con Sandra] Tomamos la figura de los segmentos.
65.	Sandra	[Risas] La medida.
66.	Miguel	Toca echarle corrector. [Corrige el error de escribir “figura” en vez de “medida”] Tomamos la medida de los segmentos.
67.	Sandra	Los cuales los nombramos con *A*, *B*, *C*.
68.	Miguel	Tercer paso.
69.	Sandra	Nos damos cuenta que el segmento *AB* es congruente con el segmento *AC* [Le dicta a Miguel. Los estudiantes han escrito en la hoja: (1) Nombramos los tres segmentos de las tres figuras. (2) Tomamos la medida de los tres segmentos. (3) Nos damos cuenta que $\overline{\overline{AB}} \cong \overline{AC}$].
70.	Miguel	Si es así [Le preguntan al observador]
71.	O	Lo importante es que les quede clara la idea.
72.	Sandra	Son los dos congruentes, pero hay ¿cómo se diría?, es que no entiendo. [Se refiere a cómo decir que cada triángulo tiene un ángulo recto]

73.	Miguel	¿Qué no entiende y yo le explico?
74.	Sandra	No, es lo que yo le digo. Donde queda el ángulo de 90 grados que es lo que nos se puede deformar.
75.	Miguel	Hay qué podemos decir profes [Pregunta de nuevo al observador].
76.	O	No les puedo ayudar muchachos. Defiéndanse como puedan. Anoten todo lo que hacen y van tomando ideas.
77.	Miguel	[Lee lo que han escrito en la hoja] Tres. Nos damos cuenta que el segmento AB es congruente con AC. Bueno, usted lo que quiere decir es de éste ángulo cierto [Señala el $\angle BAC$] Qué por más que los arrastramos no se deforma.
78.	Sandra	No, sigue siendo un ángulo de noventa grados.
79.	Miguel	Entonces, eso se llama.
80.	Sandra	[Interrumpe a Miguel] Y que es invariable.
81.	Miguel	Invariante. [Risas]
82.	Sandra	Eso, invariante. Es invariante, es un ángulo invariante.
83.	Miguel	Invariante, a pesar de que se arrastra no se deforma [lee en su cuaderno algo relacionado con invariante]. Entonces podemos decir que el ángulo BAC.
84.	Sandra	BAC.
85.	Miguel	¿Si se puede hablar de un ángulo invariante?
86.	Sandra	Claro. Igual es invariante porque no es [No concluye la idea].
87.	Miguel	Cuarto paso [Interrumpe a Sandra]. Cuarto, si dícteme [Se refiere a los pasos de la exploración]. Si el ángulo BAC es invariante porque a pesar de que se arrastre no se deforma. A la de dios.
88.	Sandra	[Le dicta a Miguel, mientras arrastra el ΔABC] El ángulo BAC es invariante, pero espérate, espérate, que yo tenga acá. Pero hay otro de estos.

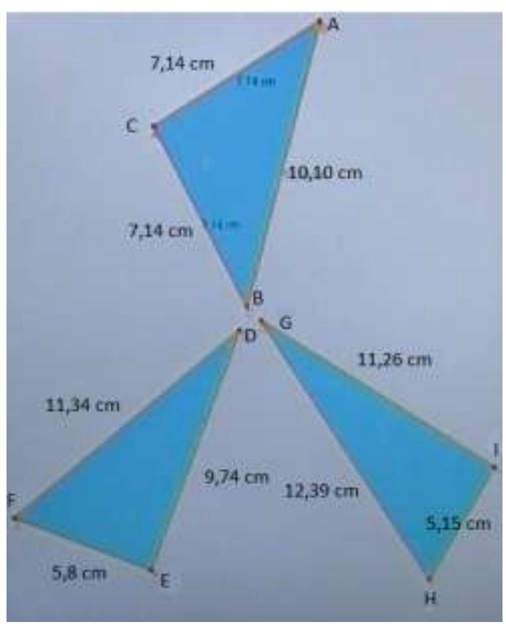


89. Miguel ¿Qué?

90. Sandra Mira que éste ángulo de ACB, tampoco cambia [$m\angle ACB = 45$].

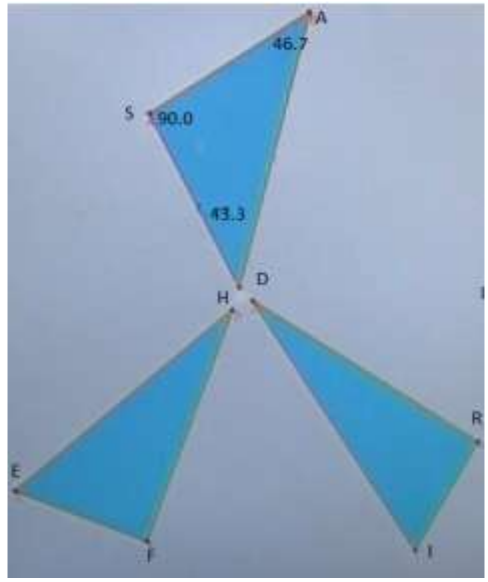
91. Miguel Muévalo, muévalo. [Sandra arrastra el vértice B del ΔABC, y la medida del $\angle ACB$ cambia]. Sí, sí cambia. Como no se va a deformar, si al usted correrlo allá [Señala el vértice B] se hace chiquitico el ángulo.

92. p [La profesora da por terminado el trabajo en grupos para iniciar la puesta en común. En el tablero tiene proyectado, con un video-beam, el archivo tribu Chimú, nombra los triángulos y toma la medida de sus lados. Es importante señalar que ella obtuvo las mismas medidas que Sandra y Miguel registraron en la intervención 9, dado que abrió el archivo tribu Chimú yno arrastro ninguno de los triángulos. Sin embargo, cambio la manera en que nombraron los tres triángulos]. Bueno yo ya nombre los lados y tome sus medidas. En relación con los lados ¿Qué encontraron?



93.	Miguel	Que hay dos lados que son congruentes.
94.	Sandra	Dos segmentos. Dos segmentos.
95.	Miguel	Dos segmentos que son congruentes.
96.	P	Dos lados que son congruentes.
97.	Miguel	[Aclara] Dos segmentos que son congruentes.
98.	P	Dos segmentos que son congruentes.
99.	Miguel	Si.
100.	P	En ¿cuál? [Se refiere a los triángulos que conforman la tribu Chimú].
101.	Miguel	En la figura primera [Se refiere al ΔABC]
102.	P	En la primera Miguel. En éste en éste [Señala el ΔABC]
103.	Miguel	En la primera de, en la primera de arriba.
104.	P	O sea que me ubico en éste. [Señala el ΔABC]. Bueno, ¿cuáles son congruentes?
105.	Miguel	Nos encontramos que *AC* y *CB*. [En ese momento ambos lados miden 7,14 cm].
106.	P	Él dice que *AC* y *CB*, son congruentes.
107.	Sandra	Ahí no.
108.	Miguel	¿Por qué no?
109.	Sandra	Ese esta igual que acá. [Señala el ΔABC de su computador, posteriormente arrastra uno de los vértices].
110.	Miguel	Ahí no china [Sandra] porque al moverlo se descuadra. [Arrastre].
111.	P	Eso dice Miguel, que dice usted Estudiante(1).
112.	Estudiante(1)	Esos varían.
113.	Miguel	Hay no profe, borre eso mejor [Risas]. Se descuadra la medida, borre eso mejor. Esas medidas cambian profe. [Sandra, arrastra uno de los triángulos desde su computador para mostrarle a Miguel que lo que propuso no es un invariante].
114.	P	Listo, movamos aquí, si yo muevo aquí qué pasa [Mueve un vértice de los triángulos y las medidas de los lados cambian]. Le parecieron iguales, tienen

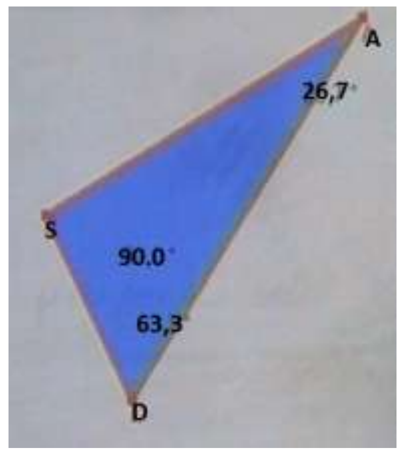
		la misma medida.
115.		No [Responden varios estudiantes].
116.	P	No, o sea que ese no me sirve. ¿Qué otra cosa encontraron cuando exploraron la figura?
117.	Aldemar	Las tres figuras tienen un ángulo de noventa grados, que no varían.
118.	P	Las tres figuras tienen un ángulo de noventa. Yo no he tomado aquí la medida de los ángulos. Bueno antes de pasar con los ángulos, definamos que pasa con los lados. ¿Hay algo en particular con los lados? ¿Qué encontraron con los lados?
119.	Miguel	[Mientras la profesora continua, Miguel observa los cuatros pasos que habían escrito en el papel] o sea que esa vaina nos quedo mal.
120.	Sandra	No son congruentes porque se cambian las medidas [Se dirige a la profesora].
121.	Estudiante(1)	No son congruentes [Se dirige a la profesora].
122.	P	Estudiante(1) dice aquí que no son congruentes. O sea que éste triángulo [Señala el ΔADS] se diferencian de los que habíamos visto antes [Se refiere a los triángulos de la tribu Nazca (equilátero) y Huari (isósceles)]. Los de antes les encontrábamos que tenían dos lados congruentes, en el otro encontramos que eran tres, en éste que pasa.
123.		Nada [Varios estudiantes].
124.	P	Uno mueve y se da cuenta que jamás se encuentran congruentes, esos triángulos también tienen un nombre, y a esos los vamos a llamar triángulos escalenos. [Escribe la definición en el tablero: "Triángulo escaleno: Es un triángulo que no tiene ningún par de lados congruentes", mientras los estudiantes copian la definición, la profesora borra las medidas de los tres ángulos, cambia los nombres que dio a los tres triángulos inicialmente y toma la medida del ΔADS].



Listo ahora. [Señala a un estudiante] Usted decía algo con los ángulos, cierto ¿qué decía? [El estudiante no responde]

125.	Sandra	Escalenos [Miguel también responde al mismo tiempo].
126.	Miguel	Escalenos, yo había visto eso en quinto de primaria, peo yo ya no me acuerdo [Le comenta a Sandra].
127.	P	Esas definiciones son en la cartulina blanca. Todas las definiciones son en la cartulina blanca. Hemos dado varias.
128.	Sandra	Éstos [Señala los triángulos del archivo tribu Chimú, que aparecen en la pantalla de su computador] tienen ángulos de noventa grados por eso son escalenos.
129.	Miguel	No, leamos bien [Lee lo que está escrito en el tablero] Es un triángulo que no tiene un par de lados congruentes.
130.	P	[Deja un tiempo para que los estudiantes copien la nueva definición] Bueno, Estudiante (2) decía algo respecto a los ángulos. Qué decía Estudiante (2).
131.	Estudiante(2)	Que los tres ángulos. Que los tres ángulos tienen ángulos de noventa grados
132.	P	Los tres triángulos se caracterizan por qué.
133.	Estudiante(2)	Porque tienen un ángulo de noventa grados [Los responden al mismo tiempo Sandra y Miguel]
134.	P	Un ángulo de noventa grados ¿Tomamos todos la medida de los ángulos?
135.	Sandra	Si, señora [también lo mencionan otros estudiantes incluido Miguel].

136.	P	Y ¿encontraron eso?
137.	Sandra	Si señora [también lo mencionan otros estudiantes incluido Miguel].
138.	P	Y si yo muevo éste, voy a coger éste triángulo [Arrastra el ΔADS por el vértice D]. ¿Qué pasa con el ángulo?
139.	Sandra	Sigue siendo de noventa. De noventa grados [Miguel también contesta].
140.	P	Qué pasa si muevo desde aquí. [Arrastra el ΔADS por el vértice A] Recuerden que tengo que intentarlo con todos. ¿Cambio? [Los ΔADS y ΔADS]



141.	Sandra	No, señora [Otros estudiantes también responden entre ellos Miguel].
142.	P	Listo, movamos éste. [Mueve el vértice S del triángulo ADS]. ¿Qué pasa?
143.	Miguel	Sigue de noventa grados.
144.	P	Sigue de noventa. O sea que además de eso, esos triángulos tienen una particularidad, y es que uno de sus ángulos es de 90. Esos triángulos los vamos a llamar triángulos rectángulos. Les voy a escribir por acá porque no me alcanzan a ver los de atrás. [Escribe la definición en el tablero: "Triángulo rectángulo: Es un triángulo que tiene uno de sus ángulos de 90 grados, es decir uno de sus ángulos es recto". Deja un tiempo prudencial para que los estudiantes copien la definición].
145.	Miguel	[Pregunta a Sandra] Otra definición, sí. Llevamos otras cierto, como la del equilátero, cierto. Vamos con el otro, triángulo rectángulo. Es un triángulo en el cuál uno de sus ángulos mide 90 grados.[Lo dice mientras observa lo que escribe la profesora] Uno de sus ángulos de 90 grados. Es decir es un ángulo recto. ¿Es recto, cómo así?
146.	P	Además de mirar si uno de los ángulos mide 90 grados, ¿Qué otra particularidad encuentro yo en los ángulos de ese triángulo?
147.	Miguel	¿Qué otra particularidad?

148.	P	¿Qué sucede con los otros ángulos?
149.	Sandra	Que son variantes. Que no cambian.
150.	Miguel	No.
151.		Que tiene 45 grados [Varios estudiantes].
152.	P	¿Sí?, por ejemplo, éste yo lo muevo. [Mueve uno de los ángulos que aparece el pantalla y el ángulo de 45 cambia] ¿Se mantiene la medida de los 45 grados?
153.		No [Varios estudiantes].
154.	P	Cambian. [No obtiene respuesta, decide intervenir otra vez] Si yo muevo esos ángulos ¿Qué pasa con la medida de esos otros ángulos?
155.		Cambian [Varios estudiantes].
156.	P	Listo, cambian y ¿cómo cambian?
157.	Sandra	Ambos son, no, cambian igual. A no.
158.	P	Disminuyen o aumentan. Y ese disminuir es cómo. Por ejemplo, muevo éste de acá. [Mueve el $\angle DAS$]. Miren ¿qué medida tienen los otros dos ángulos? [El $\angle ASD$ mide 59.5 grados, y el $\angle DAS$ mide 30.8 grados].
159.	Miguel	59.5 grados y 30.8 grados [Otros estudiantes también responden].
160.	P	Listo ahora lo muevo. [Arrastra el ΔDAS]. Listo, ahí con qué medidas quedaron.
161.	Sandra	[Se dirige a Miguel] uno disminuye el otro aumenta, mire ponga cuidado.
162.	P	[La profesora deja de arrastrar el ΔDAS] Ahí que medidas quedaron.
163.		27, 6 y 62,7. [Varios estudiantes].
164.	P	Listo, ahora lo voy a mover aquí. [Arrastra el vértice A del ΔDAS] ¿Con qué medidas quedaron?
165.	Miguel	34.6 grados y 55.4. [Al mismo tiempo hablan otros estudiantes].
166.	P	O sea que uno de los triángulos ¿cuánto mide?
167.		90 grados [Responden varios estudiantes]
168.	P	¿Y los otros?
169.		Varían. [Varios estudiantes]

170.	P	Y ¿cómo son con respecto al de 90 grados?
171.		Son de 45. [Estudiantes].
172.	P	De 45, ahí hay ángulos de 45.
173.		No. [Estudiantes]
174.	P	Ahí ¿cómo son los ángulos? [En este caso de nuevo señala el ΔDAS. El $m\angle ADS = 90$, $m\angle DAS045.77$ y $\angle ASD = 44.98$].
175.	Sandra	No, son variables. Variantes. Variables.
176.	P	¿Cómo? ¿Cómo? ¿Qué dicen por allá? Por allá decían que son cómo.
177.		No son congruentes. [Estudiantes].
178.	P	Listo, no son congruentes. [Ésta respuesta no es pertinente, la profesora decidió intervenir de nuevo] ¿Cómo son esas medidas con respecto al ángulo que sabemos que es de 90?
179.	Estudiante(1)	Ah, que son menores.
180.	P	¿Cómo?
181.	Estudiante(1)	Son menores.
182.	P	Son menores y entonces en un triángulo de ese tipo ¿qué va a pasar? Que voy a encontrar qué. [No recibe ninguna respuesta y decide intervenir de nuevo] Que voy a encontrar que un ángulo es de 90 y...
183.	Sandra	Y los opuestos son, no son variables [Además de otros estudiantes].
184.	P	Y los otros son ¿qué?
185.	Sandra	Son opuestos, no, no.
186.	P	¿Cómo son los otros dos?
187.	Estudiante(1)	Menores de 90.
188.	P	¿Cómo son?
189.	Estudiante(1)	Menores de 90.
190.	P	Listo, dígame cómo escribo ese hecho geométrico. Es más, pase y lo escribe. [Le da el marcador Estudiante(1), y él pasa al tablero] ¿Cómo escribiría eso que me acaba de decir?
191.	Estudiante(1)	¿Cómo se llama? [Se refiere al triangulo]

192.	P	Triángulo rectángulo.
193.	Sandra	[Sandra y Miguel intentan establecer el hecho geométrico por su cuenta] Si un rectángulo. Si un rectángulo. [No termina la idea].
194.	Miguel	No, el ángulo de 90 grados.
195.	Sandra	Ah, un triángulo rectángulo.
196.	Miguel	Si un ángulo de noventa grados. [Es interrumpido por Sandra].
197.	Sandra	No, si un triángulo tiene un ángulo de 90 grados. Si el triángulo. Si un triángulo rectángulo tiene. Ah no. Si hablamos de un triángulo ABC.
198.	Miguel	Haga un triángulo. [Se refiere a cambiar la palabra triángulo por el símbolo Δ]
199.	Sandra	No, Si un triángulo rectángulo ABC tiene un ángulo de 90 grados, no. Rectángulo [No concluye la idea].
200.	Miguel	Algo le falta. Si un triangulo rectángulo entonces. No. [No concluye la idea].
201.	Sandra	Si un triángulo. Si un triángulo.
202.	Miguel	No, mire [Le dice a otro compañero]
203.	Sandra	Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90 grados. Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90 grados. Entonces [Es interrumpida por Miguel].
204.	Miguel	Entonces, los ángulos son menores que 90. [Es interrumpido por Sandra].
205.	Sandra	Van, van. Entonces los ángulos van a ser menores. Los dos ángulos opuestos van a ser menores. Van a ser menores. [Después de una pausa vuelve a intentarlo] Si un ángulo de 90 grados, no. Si el triángulo rectángulo. [Lo interrumpe Miguel].
206.	Miguel	Tiene un ángulo de 90 grados.
207.	Sandra	Entonces, los otros dos ángulos van a ser menores.
208.	Miguel	No, vea eso va a ser. Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90 entonces los otros dos ángulos van a ser menores. Le pegamos. [Mientras la clase sigue los estudiantes Sandra y Miguel realizan una versión del hecho geométrico].
209.	P	[La profesora da indicaciones a la clase, el grupo de Sandra y Miguel siguen trabajando] ¿Qué es lo de noventa grados? ¿El triángulo?
210.		El ángulo [varios estudiantes].

211.	Estudiante(3)	Si un triángulo tiene un ángulo de 90 grados. [La profesora le da un marcador para que el escriba al otro lado del tablero el hecho geométrico]
212.	P	[El hecho geométrico propuesto por Estudiante(1) y Estudiante(3), con ayuda de los compañeros quedaron así: (1) Si un Δ rectángulo entonces $\angle 90$ y dos menores de 90. (2) Si $\angle = 90$ entonces los otros dos ángulos son menores] Bien vamos con la primera versión de la conjetura. [Lee la versión] Si un triángulo rectángulo entonces ángulo de 90 y dos menores de 90. ¿Entendieron?
213.		No. [Contestaron varios estudiantes entre los que estaban Sandra y Miguel]
214.	P	Eso era lo que quería decir Estudiante(1).
215.	Sandra	No profe [Sandra manifestó su desacuerdo].
216.	Estudiante(1)	Si [Risas].
217.	Aldemar	No, pero nos dio la idea.
218.	P	Ahora miremos el de acá. [Lee el otro hecho geométrico]. Si ángulo igual a 90 grados entonces los otros dos ángulos son menores. ¿Entendieron? De quién está hablando allá. [Señala la primera conjetura].
219.	Estudiante(1)	De un triángulo.
220.	P	Y en dónde me dice que está hablando de un triángulo, no dice, y en éste [Señala la segunda conjetura] es claro.
221.		No [estudiantes].
222.	P	Qué era lo que querían decir. Allá atrás que era lo que quería decir. [Señala al estudiante Estudiante(3)].
223.	Estudiante(3)	Que si hay un triángulo que tiene un ángulo de 90 grados entonces los otros dos ángulos son menores.
224.	P	¿Menores que quién?
225.	Estudiante(3)	Que el de noventa.
226.	P	Y porque no lo escribió así [Risas, Estudiante(3) decide corregir la conjetura que escribió en el tablero].
227.	Miguel	Entonces son menores que el ángulo de noventa. Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de noventa grados entonces los otros dos son menores que, de noventa grados, ¡ah no! Entonces son menores que el ángulo de noventa. [Lee el hecho geométrico propuesto: "*Si un Δ rectángulo tiene un ángulo $\measuredangle$ de* 90^0*entonces los otros dos son menores el* $\measuredangle$ *de* 90^0"] Si un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90 grados entonces los otros dos son menores que el ángulo de noventa grados.

228.	Sandra	Los otros dos ángulos menores que el ángulo de noventa grados.
229.	Miguel	Ángulos.
230.	Sandra	A ver si, póngale ahí *ángulo* porque si no.
231.	Miguel	[Reformula el consecuente de manera verbal pero no escrita] A ver entonces queda, los otros dos ángulos van a ser menores que el ángulo de noventa grados. Claro léalo.
232.	P	Cada uno me está escribiendo su conjetura en la hojita y no importa que sea distinta a las que están escritas allá [Se refiere a las dos versiones escritas en el tablero].
233.	Miguel	[Lee una de las conjeturas que están escritas en el tablero] Si un triángulo rectángulo con un ángulo de noventa grados entonces los otros dos ángulos. [Sandra y Miguel interrumpen su conversación porque la docente comienza a dar instrucciones a todo el grupo].
234.	P	Él [Estudiante(3)] acaba de cambiar la forma en que escribió el hecho geométrico y ahora escribe [Lee] Si hay un triángulo que tiene un ángulo de noventa grados entonces los otros dos ángulos son menores que el que tiene noventa grados. Ahora ¿si se entiende?
235.	Sandra	[En voz baja pregunta a Miguel] Pero ¿cuál triángulo? [Miguel no responde].
236.		Si [Varios estudiantes].
237.	P	Esta diciendo que si tiene un triángulo, no cualquiera, uno que tiene 90 grados, qué voy a encontrar, que cómo son los otros dos ángulos.
238.	Sandra	Menores [Otros estudiantes responden lo mismo].
239.	P	Que miden menos de noventa grados, listo. Resulta que yo aquí tengo ángulos de noventa. [Señala uno de los triángulos rectángulos que aparecen en el tablero].
240.	Miguel	Bueno, ya sabiendo que tiene un ángulo de noventa, ya sabemos que se trata de un triángulo rectángulo. Si me entiende [se dirige a Sandra].
241.	Sandra	Si.
242.	Miguel	Sin necesidad de mencionar las dos cosas.
243.	P	Vamos a definir aquí [Escribe en el tablero] para arreglar esa conjetura aún más, cuáles son los ángulos a los que me voy a referir. Ángulo recto, un ángulo de noventa grados. Ángulo agudo, es un ángulo que mide menos de noventa grados, y un ángulo obtuso, es un ángulo que mide más de noventa grados. Listo. [La profesora define a los estudiantes las tres clasificaciones de los ángulos según su medida] Esas definiciones van en la hojita blanca. [hay un tiempo de espera mientras los estudiantes copian las definiciones] Ahora

quién me redacta, utilizando las definiciones, el hecho geométrico distinto, ese que está ahí [señala la conjetura que está escrita en el tablero] La idea es la misma pero quién la redacta utilizando las definiciones de ángulos [Algunos estudiantes intentan responderle] No me lo diga, escriban en la hojita cada quién utilizando esas definiciones.

244.	Miguel	[La grabación se centra en el grupo de Sandra y Miguel, quienes comienzan a redactar] Vea lo que tiene que ser es [es interrumpida por Sandra]
245.	Sandra	O sea que lo que hay que decir es que el triángulo rectángulo tiene que tener un ángulo recto y uno agudo.
246.	Miguel	Es un ángulo que mide 90.
247.	Sandra	Por eso, el recto mide 90 y los dos miden, a no mentiras.
248.	Miguel	Leamos, un ángulo tiene [Para hacer la conversión, los estudiantes comienzan a leer el hecho geométrico que tenían anteriormente y las definiciones de los tres tipos de ángulos al mismo tiempo].
249.	Sandra	Un triángulo rectángulo.
250.	Miguel	Un triángulo rectángulo tiene.
251.	Sandra	No, pero si ahí es, si un triángulo rectángulo tiene un ángulo recto, que es recto.
252.	Miguel	Tiene un ángulo recto entonces tiene dos ángulos, que miden.
253.	Sandra	Dos ángulos, dos ángulos, dos ángulos agudos [Miguel habla al mismo tiempo].
254.	Miguel	Cómo lo escribimos acá.
255.	Sandra	Si un triángulo rectángulo. Si un triángulo rectángulo [Le dicta a Miguel el hecho geométrico].
256.	Miguel	Tiene un ángulo recto.
257.	Sandra	No, porque un triángulo rectángulo es porque tiene un ángulo recto ¿no?
258.	Miguel	Entonces, si un triángulo. Lo escribiremos si un triángulo, si, si un triángulo tiene un ángulo recto. Bueno diga si o no [Borran todo lo que habían escrito hasta ese momento].
259.	Sandra	Escriba triángulo, no haga ese muñeco. [Se refiere que Miguel dibuja “$\triangle$ ", en vez de escribir la palabra “triángulo”].
260.	Miguel	Si un triángulo tiene un ángulo. Si un triángulo tiene un ángulo.
261.	Sandra	Tiene un ángulo recto.

262.	Miguel	Escribimos recto.
263.	Sandra	Si. Es un ángulo recto.
264.	Miguel	Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces tiene dos ángulos agudos [Escribe en el cuaderno], entonces tiene dos ángulos agudos. Y obtuso no, ¡a no! No porque son los que miden más de 90.
265.	Sandra	No, porque no hay un ángulo que mida más de 90. [Lo dice al mismo tiempo que lo menciona Miguel].
266.	Miguel	Profe, profe. [Lee la definición a la profesora] Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces tiene dos ángulos agudos.
267.	P	Dos ángulos agudos. Listo. [Le contesta a Miguel, y después se dirige a la clase] Les recojo las hojitas. Listo ya los voy a poner unos chulitos para que ya no puedan cambiar lo que escribieron, que ya quede así. Listo. O sea que ya no me pueden cambiar.
268.	Miguel	Y si cambio de hoja profe, ya no se puede. O sea que quedo mal.
269.	Sandra	[Relee el hecho geométrico que ya había escrito] A ver, si tengo un triángulo que tiene un ángulo de noventa grados, o sea un ángulo recto. Entonces tiene dos ángulos agudos.
270.	Miguel	Pero obtuso no, porque es el que tiene más de noventa.
271.	Sandra	Pero espera que es lo que estoy tratando de decir, si un triángulo de noventa grados entonces tiene un ángulo recto, y dos ángulos agudos.
272.	P	[Después de revisar el trabajo realizado por todos los grupos, la profesora interviene] ya he mirado como están las versiones, hasta el momento no tenemos una sola versión del hecho geométrico, pero tenemos que dejar una sola, entonces quién pasa y me cuenta que versión nueva le hizo a ese hecho geométrico. Quién. Pero no todos.
273.	Miguel	Yo profe [Miguel levanta la mano] Yo escribo.
274.	Sandra	Escribe lo de los ángulos [Le realiza una recomendación a Miguel]
275.	P	Miguel me escribe encimita de ese hecho geométrico. [Del escrito anteriormente].
276.	Miguel	Dícteme Sandra.
277.	E1 1	[Risas] Si tengo un triángulo que tiene un ángulo recto.
278.	P	Por qué no me lo escribe en palabras. [Lo menciona porque Miguel utiliza símbolos para representar el triángulo y el ángulo] Un recto [le falto mencionar ángulo].

279.	Miguel	[Termina de escribir su conjetura y la lee] Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces.
280.	P	Entonces.
281.	Sandra	Tiene dos ángulos agudos.
282.	P	Como son los que.
283.	Miguel	Entonces tiene dos ángulos agudos.
284.	Sandra	Sus otros dos ángulos son agudos.
285.	Miguel	[Lee la conjetura nuevamente] Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces tiene dos ángulos agudos.
286.	P	Lo dejamos escrito así [Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces tiene dos ángulos agudos] Lo dejamos escrito así. O alguien piensa que lo podemos escribir mejor. [No responden]. Miremos aquí [Señala lo que escribió Miguel]. En el anterior decía: Si hay un triángulo que tiene un ángulo de 90, como es un ángulo de 90 yo como lo puedo llamar.
287.	Sandra	Ángulo recto [Otros estudiantes también respondieron].
288.	P	¿He dicho lo mismo, cierto?
289.		Si señora [Varios estudiantes].
290.	P	Listo, entonces los otros dos ángulos son menores que el de 90 grados, como son menores entonces como se llaman.
291.		Agudos [Varios estudiantes].
292.	P	Agudos queda mejor decir, entonces tiene dos ángulos agudos o queda mejor decir entonces los otros dos ángulos son agudos. ¿Cómo lo dejamos?
293.	Sandra	Los otros dos ángulos son agudos. [Lo responde también Miguel y otros compañeros]
294.	P	Listo, entonces hecho geométrico 3, ahora si lo vamos a escribir bien y ese va para la hojita amarilla. [La profesora escribe en el tablero el hecho geométrico 3 “Si un triángulo tiene un ángulo recto entonces los otros dos ángulos son agudos”. Después da un tiempo prudencial para que los estudiantes copien en las hojas amarillas el hecho]. Listo, hecho geométrico 3. La idea es que siempre el hecho geométrico nos quede muy claro, sepamos de que nos están hablando y que es lo que está concluyendo, cierto. O sea que ¿qué debo tener? ¿Qué es lo que debo tener?
295.	Sandra	Bien, bien que bien. Bien Miguel.

296.	Miguel	¿Hojita amarilla? ¿Cuál amarilla? A es que es una hojita amarilla y una blanca. Hecho geométrico 3.
297.	Sandra	Una blanca y dos amarillas. Éste es el hecho geométrico 3, cierto. [La profesora da un tiempo prudencial para que los estudiantes copien el hecho geométrico 3 en las hojas amarillas]
298.	P	La idea es que el hecho geométrico nos quede muy claro. Si. Sepamos de que nos están hablando y que nos están pidiendo. O sea que ¿Qué debo tener?
299.	Sandra	Para sacar el hecho.
300.	P	Si.
301.	Sandra	La definición.
302.	P	¿Qué debo tener? ¿Qué me dan que yo esté seguro? El triángulo tiene qué.
303.	Sandra	Una definición.
304.	Miguel	No.
305.	Santos	Un ángulo recto.
306.	Miguel	Oiga. [Se dirige a Sandra]
307.	P	Eso es lo que tengo, y qué es lo que concluyo.
308.		Que los otros dos son agudos. [Varios estudiantes]
309.	P	Son agudos, cierto. Si es claro o no es claro para todos.
310.		Si es claro. [Además de lo afirman otros estudiantes]
311.	P	En el hecho geométrico ¿qué es lo que se tiene? [Le pregunta al estudiante Estudiante(2)]
312.	Santos	Un ángulo recto.
313.	P	Un ángulo recto.
314.	Santos	Un triángulo.
315.	P	Un triángulo con que característica.
316.	Santos	Con un ángulo recto y dos ángulos agudos.
317.	P	No, eso es lo que tengo un triángulo con un ángulo recto, es decir, un triángulo rectángulo y qué concluyo.

318.	Sandra	Que ese triángulo rectángulo tiene. O sea, teniendo eso podemos concluir que tengo un triángulo rectángulo que es con un ángulo de 90 grados que sería recto y dos que son menores que serían agudos.
319.	P	[Se acerca al tablero] Haber, antes del entonces es lo que tengo un triángulo con un ángulo recto. Y entonces, ¿qué concluyo de ese triángulo?
320.	Sandra	Que los otros dos son agudos. [La afirmación la hacen otros estudiantes]
321.	P	Que los otros dos ángulos son agudos. Antes del entonces lo que tengo, después del entonces lo que yo puedo concluir de ese triángulo. Si es claro, se entiende la idea. Listo, no vamos a salir. Mejor dicho, ciérreme el archivo Chimú. [La profesora da por terminado el trabajo y se dispone a proponer otra actividad]

ANEXO VI. TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA REALIZADA A LOS ESTUDIANTES, LA CUAL INDAGABA ACERCA DE SUS APRECIACIONES FRENTE A LA APROXIMACIÓN METODOLÓGICA IMPLEMENTADA EN EL MARCO DE ESTE ESTUDIO.

Esta transcripción corresponde a la entrevista realizada a Sandra, Miguel y Diego con le objetivo de indagar a cerca de sus apreciaciones sobre la aproximación metodológica implementada en el marco de este estudio. La entrevista se realizo al finalizar la implementación de las situaciones y fue hecha por el observador de la clase.

El entrevistador inicio preguntando a los estudiantes acerca de las diferencias metodológicas que encontraban entre la nueva metodología y el trabajo previo que realizaban en la clase de matemáticas.

2.	Diego	Pues lo que pasa es que con Cabri, con el programa que nos enseño aquí la profe, con ese programa uno puede construir la figura que quiera y pues, como el digo yo, llegar a una definición de exactamente qué quiere decir la figura o cómo es, medidas y longitudes de todo.
3.	Sandra	Cambiamos de dialecto ya no decimos línea, segmentos, aprendimos arto.
4.	P	¿Ustedes podían proponer en esta clase?
5.	Miguel	Dar ideas, como dar ideas.
6.	P	Exacto. ¿Eso se podía hacer?
7.	Sandra	Pero respecto a lo que nos tocaba hacer, porque dar ideas.
8.	P	A claro obviamente era guiado. ¿Pero en las clases anteriores podían hacer eso?, ¿Podían proponer cosas?
9.	Sandra	No, porque no conocíamos el tema sino nos lo daban a conocer.
10.	Diego	Lo que pasa es que anteriormente uno cuando veía figuras geométricas, únicamente decía esta figura medida de ángulos y ya, entonces era muy poco lo que veía uno de eso, ya ahorita uno explora bien las figuras y se mete realmente uno a ver que esta investigando de la misma figura.
11.	P	O sea que concluyo, si hay diferencias.
12.	Diego	Si claro.

13.	Miguel	Pues fuera de ello, a mí me parece que si ha habido bastantes cambios porque ahorita si podemos explorar antes era solo anotar numeritos y aprender.
14.	Sandra	Ya tenemos otro punto de vista, ya podemos esculcar más, explorar más. O sea ya no nos comemos todo tan entero.
15.	P	Lo que quiero que me digan es contenidos geométrico que ustedes sientes que hayan aprendido ahí. No que me digan aprendí mucho, díganme por lo menos aprendí tal concepto, creo que lo aprendí bien [Los estudiantes no responden]. Recuerden que hicimos hechos geométricos, definiciones, todo eso. Entonces que recuerdan de todo eso.
16.	Sandra	Qué es un triángulo equilátero. O sea, ya lo podemos como diferenciar. Uno decía triángulo y es triángulo y ya, y así nos quedábamos ya no se decía más.
17.	P	Y ahora en qué se diferencian.
18.	Sandra	Por ejemplo que un triángulo equilátero es el que tiene sus tres lados iguales.
19.	P	El uso de Cabri, el programa del computador les ha facilitado el aprendizaje y si se los ha facilitado en qué sentido.
20.	Diego	Pues en muchísimas cosas, porque como eso tiene una serie de ventanas donde uno va a explorar herramientas, entonces eso cualquier figura que sea, entonces uno explora y el saca uno de todo.
21.	Miguel	Lo que pasa es que uno antes por lo menos, yo me acuerdo que uno podía hacer un triángulo, y para uno tomarle las medidas tocaba con una regla o una escuadra, pero en el programa de Cabri ahí uno encuentra todo, tomarle la medida a los ángulos, segmentos, todo, entonces si es un programa muy bueno.
22.	Sandra	Y pues que uno aprendió a sacarle todo eso, primero uno hacia un triángulo y punto.
23.	Diego	Usted hacia un triángulo y listo estuvo el triángulo, pero ahora vas más allá de los triángulos
24.	Sandra	Por lo menos cuando nos hacían sacarle solo los ángulos y no tomarle medidas y uno [No concluye la idea]. O sea como que no pensaba uno más allá de lo que veía.
25.	P	Bueno y también les parecía importante, lo que tu tanto nombrabas el arrastre, ¿eso era importante**?**
26.	Sandra	Claro.
27.	P	¿Por qué?
28.	Sandra	Nos daba las variaciones, o sea ahí podíamos ver cambios del triángulo o de la figura que estuviéramos haciendo. O sea, uno ahí podía sacar definiciones, por que si, cuando nos daban el triángulo, en el programa digamos había un punto que no se podía mover muchas veces, pero los que nosotros hacíamos en Cabri si

		se podían mover, pero entonces uno ahí podía sacar definiciones como fue lo de sumados los ángulos siempre nos da 180, por lo que lo arrastrábamos.
29.	Diego	Y también de un punto de intersección puede uno iniciar cualquier clase de figura, entonces algo buenísimo también.
30.	P	Pero, pero digamos que no todo fue bueno hubo alguna dificultad, cuándo empezaron con el programa.
31.	Diego	Pues si al comienzo un poco, por no tener conocimiento del programa.
32.	Sandra	Pero expresarnos, o sea uno siempre, hasta el momento ha sido difícil.
33.	Diego	Si claro.
34.	Sandra	Uno las tiene ahí pero como que no tiene las palabras.
35.	Miguel	Si a veces uno puede tener las ideas, pero no sabe como decirlas.
36.	P	Pero eso ya va en el lenguaje, yo quiero saber en el programa, y no al inicio yo se que al inicio hubo conflicto con el programa, quiero saber si al final hay alguna dificultad en ese programa al manejarlo.
37.		No. [Varios estudiantes]
38.	P	Porque la profesora les insistía tanto en el uso del buen lenguaje matemático, se acuerdan que ella siempre les hacia énfasis en eso, por que creían que insistía tanto en que tenia que ser bien escrito bien especifico.
39.	Sandra	Porque la matemática también tiene lenguaje. También hay que mirar que se oye más bonito. No, en serio.
40.	P	Pero no era solo por eso.
41.	Diego	Por ahí hubo un anotación de que decíamos que el ángulo más abierto y no era así era el ángulo de mayor medida
42.	P	Y por qué tenía que hacer énfasis en eso.
43.	Diego	Porque al comienzo no teníamos bien claro como era la expresión para nombrar el ángulo entonces eran como detallitos, como ahí.
44.	P	Yo lo hablo más como en la notación, por ejemplo, cómo tenían que notar un ángulo.
45.	P	En el curso se ha insistido mucho en que lo que se hacia se tenia que justificar, ¿si se acuerdan?, ¿por qué creen que era importante justificar?, ¿por qué se insistía tanto en que se deben justificar las cosas?
46.	Diego	Pues ahí lo que pasa es que cuando explorábamos la figura y sacábamos el hecho geométrico, entonces ahí teníamos que explicar por qué sí era cierto ese hecho

geométrico, y entonces se hicieron ejercicios de que en un texto en palabras de uno especificar de que si era cierto lo que estábamos diciendo ahí… el por qué de lo que hay ahí sí es cierto.

47.	Sandra	Para poder convencer. [Se refiere al para qué de la justificación]
48.	P	Si pero necesito saber, bueno y por qué, por qué era importante hacerlo.
49.	Sandra	Para entenderlo mejor, para tenerlo más claro, para saber el por qué. Era como el repaso de lo que habíamos hecho, eso era como decir más explicados los pasos que se hicieron para sacar el hecho geométrico.
50.	Diego	Si paso a paso ir sacando, por qué salió ese hecho geométrico.
51.	Sandra	Explicar exactamente como se saco cada cosita. Las cositas que se sacaron para sacar una cosita. Espere me explico. Digamos que el triángulo, si, tenemos el triángulo, entonces como hicimos para hacer el triángulo, justificar que si yo tengo tres puntos no colineales voy a sacar un triángulo, o sea porque ya es fijo que yo teniendo tres puntos no colineales voy a empezar a hacer un triángulo, entonces en el, me perdí.
52.	P	¿Qué les permitía justificar?, o sea, en que se apoyaban para justificar algo.
53.	Sandra	En lo que teníamos.
54.	P	¿Y qué tenían?
55.	Sandra	Cuando teníamos ya las definiciones o los hechos geométricos como tal, o sea para justificar un hecho geométrico o para justificar las definiciones que teníamos, o sea teniendo una definición nosotros nos basábamos para sacar.
56.	P	Tengo una pregunta, ¿nosotros justificábamos hechos geométricos y definiciones?
57.	Sandra	No.
58.	P	¿Qué justificábamos?
59.	Sandra	Se unía, no, para justificar el hecho geométrico.
60.	P	Pero en clase que justificábamos hechos geométricos y definiciones.
61.	Sandra	No, no. El hecho geométrico y nos basábamos en las definiciones para sacar el hecho geométrico.

ANEXO VII. TABLAS DE LAS CATEGORIAS DE ANÁLISIS

CATEGORÍA I: RECONOCIMINETO DE LA PROPIEDAD INVARIANTE (CI).		
Indicadores	**Posibles acciones de los estudiantes.**	**Acciones de la actividad demostrativa**
Interpretación de la situación **(CI, i1)**	Identifica objetos geométricos involucrados en la situación propuesta **(CI, i1, a1)**.	Visualizar
	Reconoce y señala qué es dado y/o qué se pide resolver **(CI, i1, a2)**.	
	Manifiesta implícita o explícitamente posibles estrategias o hipótesis de solución **(CI, i1, a3)**.	
	Realiza conceptualizaciones (implícitas o explicitas) de objetos involucrados en la situación **(CI, i1, a4).**	
Construcción de una representación gráfica asociada a la situación problema **(CI, i2)**	Realiza representaciones gráficas en Cabri teniendo en cuenta las condiciones y propiedades invariantes de los objetos involucrados **(CI, i2, a1)**.	Visualizar
	Realiza la construcción evocando procedimientos de construcción previos **(CI, i2, a3)**.	
	Construye casos particulares atendiendo a objetos geométricos estudiados previamente y/o a referentes teóricos previos. **(CI, i2, a4)**.	
	Planea el proceso de construcción antes de realizar la representación gráfica en el entorno de geometría dinámica **(CI, i2, a5)**.	
	Realiza construcciones que atienden a las propiedades de los objetos geométricos involucrados pero que no mantienen las propiedades ante la acción de arrastre **(CI, i2, a6)**.	
	Construye representaciones de la situación con base en las propiedades de los objetos geométricos involucrados logrando que dichas propiedades se mantengan ante la acción de arrastre **(CI, i2, a7).**	

<table>
<tr><td rowspan="4">Verificación de la construcción

(CI, i3)</td><td>Usa herramientas de medición, arrastre y propiedades especificas, para verificar el cumplimiento de las condiciones de la situación y/o las relaciones entre los objetos geométricos involucrados en la misma (CI, i3, a1).</td><td rowspan="4">Visualizar</td></tr>
<tr><td>Compara el enunciado de la situación con la construcción realizada para verificar la correspondencia entre las dos representaciones. (CI, i3, a2).</td></tr>
<tr><td>Corrige errores de la construcción. (CI, i3, a3).</td></tr>
<tr><td>Complementa, elimina u oculta objetos geométricos y etiquetas de la construcción con miras a mejorar la interpretación de la misma. (CI, i3, a4).</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Exploración de la construcción

(CI, i4)</td><td>Utiliza herramientas de Cabri para determinar propiedades específicas (paralelismo, perpendicularidad, etc.) de la representación gráfica (CI, i4, a1).</td><td rowspan="8">Visualizar

Explorar

Generalizar</td></tr>
<tr><td>Toma medidas para inferir propiedades (congruencia, semejanza, perpendicularidad, etc.) de la representación gráfica construida (CI, i4, a2).</td></tr>
<tr><td>Usa el arrastre para identificar propiedades invariantes (CI, i4, a3).</td></tr>
<tr><td>Estudia hipótesis de solución mediante la acción de arrastre, herramientas de medición y construcción de Cabri, para aceptarlas o rechazarlas (CI, i4, a4).</td></tr>
<tr><td>Relee la situación para orientar la exploración de la construcción. (CI, i4, a5).</td></tr>
<tr><td>Comprueba objetos construidos para visualizar relaciones entre ellos o propiedades comunes (CI, i4, a6).</td></tr>
<tr><td>Comprueba resultados obtenidos al operar o manipular datos provenientes de la construcción con miras a reconocer un patrón invariante (CI, i4, a7).</td></tr>
<tr><td>Reconoce elementos constitutivos de una figura construida o dada en Cabri (CI, i4, a8).</td></tr>
</table>

Predicción de la solución de la situación problema **(CI, i5)**	Realiza la lectura del enunciado y a partir de ella infiere una posible solución para la situación descrita. **(CI, i5, a1)**.	
	Visualiza la representación gráfica construida o dada y plantea una hipótesis de solución. **(CI, i5, a2)**.	Visualizar
CATEGORÍA II: FORMULACIÓN DEL ENUNCIADO DE ACUERDO CON CONVENCIONES CULTURALES COMPARTIDAS (CII).		
Indicadores	**Posibles acciones del estudiante**	**Acciones de la actividad demostrativa**
Verificación del invariante enunciado en la conjetura **(CII, i1)**.	Utiliza el arrastre y/ o toma medidas con miras a verificar el invariante encontrado **(CII, i1, a1)**.	Verificar
	Estudia los posibles casos en los que el invariante podría no cumplirse **(CII, i1, a2).**	
Correcto establecimiento del antecedente y el consecuente de la conjetura. **(CII, i2)**	Reconoce la relación entre antecedente y condiciones impuestas en la situación **(CII, i2, a1)**.	Generalizar
	Reconoce la relación entre consecuente e invariantes encontrados en la exploración. **(CII, i2, a2)**.	
Estructura del enunciado **(CII, i3)**	Identifica y manifiesta la relación entre antecedente y consecuente aludiendo a su dependencia en el momento de formular la conjetura **(CII, i3, a1)**.	Generalizar
	Utiliza el formato condicional "Si…entonces" en la escritura de la conjetura, haciendo explícito el antecedente y consecuente **(CII, i3, a2)**.	
	Explícita el antecedente y el consecuente pero no escribe la conjetura en el formato condicional **(CII, i3, a3)**.	
	Tiene en cuenta las convenciones establecidas en la clase en términos del lenguaje y notación al nombrar objetos geométricos involucrados. **(CII, i3, a4)**.	
	Usa definiciones y/o hechos geométricos del marco referencial para escribir la conjetura **(CII, i3, a5)**.	

Uso correcto de cuantificadores **(CII, i4)**	Usa los cuantificadores existencial y universal de forma explícita. **(CII, i4, a1)**.	Generalizar
	Usa los cuantificadores existencial y universal de forma implícita. **(CII, i4, a2)**.	
Verificación de la formulación de la conjetura. **(CII, i5)**	Utiliza la herramienta arrastre de Cabri para verificar que el invariante este explícito en la conjetura propuesta. **(CII, i5, a1)**.	Visualizar Verificar Generalizar
	Identifica y explícita que sobran o faltan propiedades o palabras para escribir correctamente el enunciado. **(CII, i5, a2)**.	
	Corrobora que las condiciones dadas estén en el antecedente y los invariantes encontradas en el consecuente. **(CII, i5, a3)**.	

CATEGORIA III: EXPLORACIÓN DEL CONTENIDO DE LA CONJETURA Y LOS LÍMITES DE VALIDEZ DE LA MISMA (CIII).		
Indicadores	**Posibles acciones del estudiante**	**Acciones de la actividad demostrativa**
Exploración del contenido de la conjetura **(CIII, i1)**.	Identifica las circunstancias bajo las cuales la conjetura se cumple **(CIII, i1, a1)**.	Explicar
Búsqueda de argumentos para la plausibilidad de la conjetura **(CIII, i2)**.	Manifiesta inquietud frente a la veracidad de la conjetura y/o los posibles argumentos que podrían explicarla **(CIII, i2, a1)**.	Explicar
	Esgrime razones o puntos de vista en pro o en contra de una afirmación con el objeto de dar cuenta de la plausibilidad del enunciado **(CIII, i2, a2)**.	
	Sugiere una construcción auxiliar para enriquecer una representación que le permitan encontrar ideas para la justificación **(CIII, i2, a3)**.	
Selección de argumentos para explicar la validez de la conjetura **(CIII, i3)**.	Alude a la representación gráfica para explicar la validez de la conjetura con base en lo que se observa y lo que sucede ante el arrastre **(CIII, i3, a1).**	Explicar
	Asume como argumento válido el procedimiento de exploración o representación que dio cuenta del consecuente establecido en el enunciado de la conjetura **(CIII, i3, a2).**	

	Acompaña la explicación de una representación gráfica con la alusión a definiciones, hechos geométricos y/o procedimientos de construcción previos **(CIII, i3, a3)**.	
	Usa casos particulares para explicar las condiciones bajo las cuales ocurre la regularidad y a partir de ellos afirma la generalidad **(CIII, i3, a4)**.	
	Utiliza herramientas de Cabri, que le permiten obtener datos de la figura (medida de lados y ángulos, relaciones de perpendicularidad y paralelismo, entre otras) con miras a apoyar las explicaciones de tipo heurístico **(CIII, i3, a5)**	
CATEGORÍA IV: SELECCIÓN Y ENCADENAMIENTO DE ARGUMENTOS TEÓRICOS COHERENTES EN UNA CADENA DEDUCTIVA (C IV).		
Indicadores	**Posibles acciones de los estudiantes**	**Acciones de la actividad demostrativa**
Selecciona referentes teóricos pertinentes para la justificación de una conjetura **(CIV, i1)**.	Revisa el antecedente y consecuente de un hecho geométrico con miras a identificar la relación de éste con lo que se desea justificar **(CIV, i1, a1).**	Probar
	Señala definiciones y hechos geométricos que hacen alusión a los objetos geométricos que están implícitos en la conjetura que se quiere justificar **(CIV, i1, a2).**	
	Sugiere o planea un camino para realizar la justificación **(CIV, i1, a3)**.	
	Evalúa propuestas para la realización de la justificación **(CIV, i1, a4)**.	
Encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva **(CIV, i2)**.	Alude a referentes teóricos del marco referencial construido en clase de geometría sin hacerlos explícitos en el proceso de justificación **(CIV, i2, a1).**	Probar
	Usa definiciones y hechos geométricos tomados de un marco referencial distinto al construido en clase de geometría de manera implícita o explícita **(CIV, i2, a2).**	
	Infiere propiedades que no han sido estudiadas en el marco de la clase, a partir de definiciones y hechos geométricos del sistema teórico construido **(CIV, i2, a3)**.	

	Plantea uno o más argumentos de manera informal considerando una posible conexión deductiva entre ellos **(CIV, i2, a4)**.	
CATEGORÍA V: ORGANIZACIÓN DE LA CADENA DE ARGUMENTOS EN LA FORMA DE UNA PRUEBA QUE ES ACEPTABLE DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LOS ESTÁNDARES MATEMÁTICOS VIGENTES (CV).		
Indicadores	**Posibles acciones de los estudiantes**	**Acciones de la actividad demostrativa**
Organización de la cadena de argumentos de forma deductiva y atendiendo a reglas de inferencia **(CV, i1)**.	Reconoce que la conclusión de un paso de la justificación se constituye en la condición inicial del siguiente o siguientes pasos **(CV, i1, a1).**	Probar
	Evalúa las condiciones dadas o los pasos previos de la justificación para asegurar que son suficientes al establecer una conclusión **(CV, i1, a2).**	
	Utiliza reglas de inferencia que son válidas matemáticamente de manera implícita **(CV, i1, a3)**.	
Fundamenta sus justificaciones en el cuerpo de conocimientos institucionalizados en la clase de geometría **(CV, i2)**.	Utiliza definiciones y hechos geométricos institucionalizados en la clase de geometría para justificar un enunciado matemático **(CV, i2, a1).**	Probar
	Utiliza el lenguaje y la simbolización geométrica de acuerdo con el rigor y las normas sociomatemáticas establecidas en clase **(CV, i2, a2).**	
	Deja implícitos los garantes de afirmaciones hechas en el proceso de justificación **(CV, i2, a3)**.	
CATEGORÍA VI: APROXIMACIÓN A LA PRUEBA FORMAL (CVI).		
Indicadores	**Posibles acciones de los estudiantes**	**Acciones de la actividad demostrativa**
Construye cadenas de argumentos en las que las propiedades enunciadas, sus relaciones y reglas de inferencia son explicitas **(CVI, i1).**	Hacer explicito lo dado, lo que infiere y el garante que sustenta cada inferencia **(CVI, i1, a1).**	Demostración formal
	Utilizar reglas de deducción socialmente aceptadas de manera explícita **(CVI, i1, a2).**	
	Usar el lenguaje y la simbolización geométrica de acuerdo con el rigor de los estándares matemáticos vigentes para la presentación	

	de una demostración **(CVI, i1, a3).**	
Elabora justificaciones descontextualizadas, despersonalizadas y destemporalizadas **(CVI, i2).**	Comunica sus resultados como parte de una teoría y no como resultado de una situación particular **(CVI, i2, a1).**	Demostración formal
	Elabora su justificación sin aludir a expresiones en tercera persona **(CVI, i2, a2).**	