

Relevante mathematische Kompetenzen von  
Ingenieurstudierenden im ersten Studienjahr –  
Ergebnisse einer empirischen Untersuchung

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

doctor rerum naturalium

(Dr. rer. nat.)

im Fach: Didaktik der Mathematik

eingereicht an der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Humboldt-Universität zu Berlin

von

Malte Lehmann

Präsidentin der Humboldt-Universität zu Berlin

Prof. Dr.-Ing. Dr. Sabine Kunst

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

Prof. Dr. Elmar Kulke

1. Gutachterin: Prof. Dr. Bettina Rösken-Winter
2. Gutachter: Prof. Dr. Andreas Filler
3. Gutachter: Prof. Dr. Benjamin Rott

Tag der mündlichen Prüfung: 19.03.2018

## Danksagungen

Diese Arbeit wäre ohne die Unterstützung so vieler Menschen nicht gelungen. Zuerst möchte ich meiner Doktormutter Frau Prof. Bettina Rösken-Winter danken für die Betreuung bei der Bearbeitung meiner Arbeit. Die vielen intensiven Gespräche sowie das konstruktive und hilfreiche Feedback haben mich immer wieder angeregt, über die Inhalte meiner Arbeit zu reflektieren und mich motiviert, den Weg weiterzugehen.

Ich möchte auch meinen beiden weiteren Gutachtern Herrn Prof. Andreas Filler und Herrn Prof. Benjamin Rott für ihr Feedback zu meiner Arbeit danken, wodurch diese an Qualität gewonnen hat.

Ein besonderer Dank gilt meiner früheren Bochumer Kollegin und Freundin Birgit für die vielen Gespräche, Diskussionen, Erfahrungsaustausche aber auch die Freude über erreichte Ziele.

Zudem möchte ich meinen Kolleg\*innen aus Berlin danken, die zu jeder Zeit für Gespräche und Diskussionen da waren und mich immer unterstützten und ermutigten: Birgit, Caroline, Constanze, Elke, Henni, Jochen, Julia, Markus, Rebekka, Regine, Sebastian, Sven, Thomas und Victoria. Besonders möchte ich an dieser Stelle Stefan für seine Unterstützung bei oft mühsamen Tätigkeiten meiner Arbeit danken. Mit euch allen hat es immer Spaß gemacht.

Besonders möchte ich auch meiner Familie danken, die immer viel Verständnis für meine Arbeit aufgebracht hat und mich immer bei meinem Ziel der Promotion unterstützt hat.

Last but not least möchte ich den Teilnehmerinnen und Teilnehmern an meiner Untersuchung danken, die an bis zu drei Zeitpunkten bereitwillig viele Seiten Testaufgaben ausgefüllt und in vielen Stunden Gruppen- und Einzelarbeit die Daten für meine Arbeit geliefert haben.

# Abstract

Missing competences in mathematics and sciences are cited by students as a reason for the drop-out in engineering sciences (Heublein et al., 2017). However, the competences that are relevant for students at the beginning of their engineering studies have so far not been investigated in an empirical way. The aim of this study is to analyse relevant mathematical competences of engineering students, taking into account both knowledge and the application of knowledge and the interrelationships between the two.

A study in mixed method design was developed for this purpose. In this study, students are tested with regard to their dispositions in mathematics and physics at the beginning of their studies and at the end of the first year of their studies using quantitative methods. At these two points in time and a further time at the end of the first semester, the situation-specific skills in processing math and physics tasks were examined with the help of a theoretical framework for solving mathematical problems, using qualitative methods. This theoretical framework included for the mathematical tasks the aspects heuristics (Bruder & Collet, 2011; Schoenfeld, 1980) and problem solving phases (Polya, 1957) as well as the model of *Epistemic Games* (Tuminaro, 2004) for the analysis of the processing of physical tasks.

The results show interrelationships between mathematical and physical dispositions. In addition, it became clear that there is a need of problem solving aspects in order to analyse the processes involved in the working on maths and physics tasks in the first year of studies. Based on the qualitative descriptions, clusters of student cases could be formed. These clusters show the interrelationships between dispositions and situation-specific skills of particularly high-performing and underperforming students.

# Zusammenfassung

Fehlende Kompetenzen in Mathematik und Naturwissenschaften werden von Studierenden als ein Grund für den Studienabbruch in Ingenieurwissenschaften angegeben (Heublein et al., 2017). Welche Kompetenzen für Studierende zu Beginn des Ingenieurstudiums relevant sind, ist jedoch bisher wenig empirisch untersucht. Das Ziel der vorliegenden Studie ist, relevante mathematische Kompetenzen von Ingenieurstudierenden zu analysieren und dabei sowohl Wissensbestände als auch die Anwendung von Wissen und die Zusammenhänge zwischen beiden Bereichen zu berücksichtigen.

Dazu wurde eine Studie im Mixed-Methods Design entwickelt. In dieser werden die Studierenden hinsichtlich ihrer Dispositionen in Mathematik und Physik zu Beginn des Studiums und am Ende des ersten Studienjahres mit quantitativen Methoden getestet. Zu diesen beiden und einem weiteren Zeitpunkt am Ende des ersten Semesters wurden zudem die situationsspezifischen Fähigkeiten bei der Bearbeitung von Mathematik- und Physikaufgaben mit Hilfe eines theoretischen Rahmens zum mathematischen Problemlösen mit qualitativen Methoden untersucht. Dieser Theorierahmen umfasste für die Mathematikaufgaben die Aspekte Heuristiken (Bruder & Collet, 2011; Schoenfeld, 1980) und Problemlösephasen (Polya, 1957) sowie das Modell der *Epistemic Games* (Tuminaro, 2004) zur Analyse der Bearbeitung von Physikaufgaben.

Die Ergebnisse zeigen Zusammenhänge zwischen mathematischen und physikalischen Dispositionen. Zusätzlich wird die Bedeutung von Aspekten des Problemlösens deutlich, um die Prozesse bei den Bearbeitungen von Mathematik- und Physikaufgaben im ersten Studienjahr zu analysieren. Auf Grundlage der qualitativen Beschreibungen konnten Cluster von Fällen von Studierenden gebildet werden. Mit Hilfe dieser Cluster zeigen sich Zusammenhänge zwischen den Dispositionen und situationsspezifischen Fähigkeiten bei den besonders leistungsstarken und leistungsschwachen Studierenden.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Kompetenzmodellierung und Kompetenzmessung</b>	<b>7</b>
2.1	Definition von Kompetenz . . . . .	8
2.2	Kompetenzmodellierung . . . . .	10
2.2.1	Kompetenzstrukturmodelle . . . . .	11
2.2.2	Kompetenzentwicklungsmodelle . . . . .	12
2.3	Kompetenzmessung . . . . .	14
2.4	Kompetenzmodellierung und Kompetenzmessung im schulischen Kontext . . . . .	15
2.4.1	Bildungsstandards . . . . .	16
2.4.2	Kompetenzmessung in der Schule . . . . .	20
2.5	Kompetenzmodellierung und Kompetenzmessung in der Hoch- schule . . . . .	22
2.6	Kompetenzmodellierung in der Ingenieurausbildung . . . . .	23
2.7	Zusammenfassung . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Mathematik und Physik in der Ingenieurausbildung</b>	<b>27</b>
3.1	Transitionen im Bildungsbereich mit Fokus auf der Mathematik	28
3.1.1	Transitionen vom Elementar- bis zum Sekundarbereich .	28
3.1.2	Transition von der Schule zur Hochschule . . . . .	30
3.1.3	Mathematik in Schule und Hochschule . . . . .	32
3.2	Die Mathematikausbildung für Ingenieure . . . . .	36
3.2.1	Entwicklung von der Input- zur Outputorientierung . . .	36
3.2.2	Entwicklung der Kompetenzorientierung . . . . .	38
3.3	Rolle der Mathematik in der Physik . . . . .	40

3.4	Kompetenzerwartungen in Veranstaltungen zur Technischen Mechanik . . . . .	45
3.5	Zusammenfassung . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Kompetenz des Problemlösens</b>	<b>49</b>
4.1	Mathematikdidaktische Perspektive . . . . .	51
4.1.1	Relevanz des Problemlösens . . . . .	51
4.1.2	Verwendung des Begriffs Problem . . . . .	52
4.1.3	Rolle des Problemlösens im Mathematikunterricht . . . . .	53
4.1.4	Modelle der äußeren Struktur: Phasen und ihre Übergänge	57
4.1.5	Modelle der inneren Struktur: Heuristiken und ihr Einsatz	69
4.2	Physikdidaktische Perspektive . . . . .	80
4.2.1	Modell des wissenszentrierten Problemlösens . . . . .	81
4.2.2	Epistemic Games . . . . .	84
4.3	Problemlösen im Kontext der Ingenieurausbildung . . . . .	95
4.4	Verwendung des Begriffs „Problem“ in der vorliegenden Arbeit	100
<b>5</b>	<b>Projekt KoM@ING</b>	<b>103</b>
5.1	Forschungsprogramm KoKoHs – Kompetenzmodellierung und Kompetenzerfassung im Hochschulsektor . . . . .	103
5.1.1	Ausgangslage . . . . .	103
5.1.2	Projekte und Forschungsinhalte . . . . .	104
5.2	Überblick KoM@ING . . . . .	106
5.2.1	Qualitative Teilprojekte . . . . .	109
5.2.2	Quantitative Teilprojekte . . . . .	110
5.3	Zusammenfassung . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Synthese und Forschungsfragen</b>	<b>113</b>
6.1	Relevante mathematische Kompetenzen von Ingenieurstudierenden als Forschungsgegenstand . . . . .	113
6.2	Forschungsfragen . . . . .	117
6.2.1	Forschungsfragen in Bezug auf Dispositionen . . . . .	117
6.2.2	Forschungsfragen in Bezug auf situationsspezifische Fähigkeiten . . . . .	118
6.2.3	Forschungsfragen in Bezug auf Zusammenhänge . . . . .	120

<b>7</b>	<b>Studie zur Untersuchung relevanter mathematischer Kompetenzen</b>	<b>123</b>
7.1	Mixed-Methods im Rahmen der Studie . . . . .	124
7.2	Design der Studie zur Untersuchung relevanter mathematischer Kompetenzen . . . . .	125
7.3	Stichprobenbeschreibung . . . . .	127
7.4	Mathematik- und Physikausbildung für Ingenieure an der Ruhr-Universität Bochum . . . . .	131
7.4.1	Mathematikausbildung der Ingenieurstudierenden . . . . .	131
7.4.2	Physikausbildung der Ingenieurstudierenden . . . . .	134
7.5	Erhebungsinstrumente . . . . .	135
7.5.1	Erhebung mathematischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums . . . . .	136
7.5.2	Erhebung physikalisch-technischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums . . . . .	137
7.5.3	Fachkompetenz Mathematik . . . . .	138
7.5.4	Fachkompetenz Technische Mechanik: Statik und Elastostatik . . . . .	140
7.5.5	Force Concept Inventory . . . . .	141
7.6	Videographie und <i>Lautes Denken</i> . . . . .	144
7.6.1	Videographie . . . . .	145
7.6.2	<i>Lautes Denken</i> . . . . .	147
7.7	Auswahl der Aufgaben für die Gruppen- und Einzelarbeit . . . . .	149
7.7.1	Aufgaben der Gruppenarbeit zur Schulmathematik und -physik . . . . .	149
7.7.2	Aufgaben der Einzelarbeit zur Höheren Mathematik und Technischen Mechanik . . . . .	155
<b>8</b>	<b>Datenanalyse</b>	<b>159</b>
8.1	Qualitative Methoden . . . . .	160
8.1.1	Inhaltsanalytische Methoden . . . . .	160
8.1.2	Kategoriensystem zur Analyse der Bearbeitungsprozesse	161
8.1.3	Auswertung der Videodaten . . . . .	176
8.1.4	Bestimmung der Intercoder-Übereinstimmung . . . . .	178
8.2	Quantitative Methoden . . . . .	184

8.2.1	Bestimmung von Zusammenhängen zwischen Aspekten fachspezifischer Dispositionen . . . . .	184
8.2.2	Bestimmung von kausalen Zusammenhängen zwischen fachspezifischen Dispositionen . . . . .	185
8.2.3	Moderator- und Mediatoreffekte . . . . .	186
8.2.4	Umgang mit fehlenden Werten . . . . .	187
<b>9</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>191</b>
9.1	Dispositionen . . . . .	191
9.1.1	Mathematische und physikalische Kompetenzen der Studierenden . . . . .	192
9.1.2	Zusammenhänge zu Beginn des Studiums . . . . .	195
9.1.3	Zusammenhänge am Ende des ersten Studienjahres . . .	199
9.2	Situationsspezifische Fähigkeiten . . . . .	204
9.2.1	Innere Struktur: Einsatz von Heuristiken zu den drei Erhebungszeitpunkten . . . . .	205
9.2.2	Äußere Struktur: Ablauf der Problemlösephasen bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben . . . . .	252
9.2.3	Äußere Struktur: Ablauf der Problemlösephasen bei der Bearbeitung physikalischer Aufgaben . . . . .	268
9.3	Zusammenhänge zwischen Dispositionen und situationsspezifischen Fähigkeiten . . . . .	294
9.3.1	Zusammenhänge bei Mathematikaufgaben . . . . .	295
9.3.2	Zusammenhänge bei Physikaufgaben . . . . .	306
<b>10</b>	<b>Fazit</b>	<b>315</b>
10.1	Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse . . . . .	315
10.1.1	Dispositionen . . . . .	315
10.1.2	Situationsspezifische Fähigkeiten . . . . .	319
10.1.3	Zusammenhänge zwischen Dispositionen und situationsspezifischen Fähigkeiten . . . . .	327
10.2	Reflexion der Methoden . . . . .	331
10.3	Implikationen für die Ingenieurausbildung und weitere Forschungsansätze . . . . .	333

<b>A Aufgaben der Gruppen- und Einzelarbeit</b>	<b>337</b>
A.1 Mathematikaufgaben . . . . .	337
A.1.1 Aufgaben der Gruppenarbeit zur Schulmathematik . . .	337
A.1.2 Aufgaben der Einzelarbeit zur Höheren Mathematik . . .	343
A.2 Physikaufgaben . . . . .	348
A.2.1 Aufgaben der Gruppenarbeit zur Schulphysik . . . . .	348
A.2.2 Aufgaben der Einzelarbeit zur Technischen Mechanik . .	357
<b>B Kategoriensystem</b>	<b>365</b>
<b>C Transkriptionsregeln</b>	<b>375</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>377</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Kompetenz als ein Kontinuum . . . . .	10
2.2	Mathematische Kompetenzen in den Bildungsstandards für den Primarbereich . . . . .	17
2.3	Mathematische Kompetenzen in den Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife . . . . .	18
2.4	Physikalische Kompetenzen in den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss . . . . .	19
3.1	Modellierungskreislauf basierend auf physikalischem Mathematisierungsmodell . . . . .	44
3.2	Kompetenzmodell zur Technischen Mechanik im Projekt KOM-ING . . . . .	46
4.1	Darstellung einer Problemsituation . . . . .	53
4.2	Problemlösephasen nach Polya (1957) . . . . .	58
4.3	Problemlösephasen nach Schoenfeld (1980) . . . . .	60
4.4	Problemlösephasen nach Mason et al. (2010) . . . . .	60
4.5	Problemlösephasen nach Wilson et al. (1993) . . . . .	61
4.6	Problemlösephasen nach Rott (2014) . . . . .	68
4.7	Modell zum physikalischen Problemlösen nach Reinhold et al. (1999) . . . . .	82
4.8	Übersicht mathematische Epistemic Games mit konzeptuellem Verständnis . . . . .	90
4.9	Übersicht mathematische Epistemic Games ohne konzeptuelles Verständnis . . . . .	93
4.10	Übersicht argumentative Epistemic Games . . . . .	95
5.1	Überblick zu KoKoHs-Dömanen . . . . .	105

5.2	Schematische Darstellung des Projektes KoM@ING . . . . .	106
6.1	Modell zur Erfassung mathematischer Kompetenzen von Ingenieurstudierenden . . . . .	115
7.1	Design und zeitlicher Ablauf der Studie . . . . .	126
7.2	Beispielitem aus der Erhebung mathematischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums . . . . .	137
7.3	Beispielitem aus der Erhebung physikalisch-technischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums . . . . .	138
7.4	Rahmenmodell für die Modellierung mathematischer Kompetenzen von Ingenieuren . . . . .	138
7.5	Beispielitem aus dem Test Fachkompetenz Mathematik . . . . .	139
7.6	Theoretisches Kompetenzmodell Fachkompetenz Technische Mechanik . . . . .	140
7.7	Beispielitem aus dem Test Fachkompetenz Technische Mechanik: Statik und Elastostatik . . . . .	141
7.8	Beispielitem aus dem Force Concept Inventory . . . . .	142
7.9	Anordnung der Videoaufnahmen . . . . .	147
7.10	HM-Beispielitem HM13 aus der Gruppenarbeit . . . . .	150
7.11	TM-Beispielitem TM3 aus der Gruppenarbeit . . . . .	151
7.12	TM-Beispielitem TM10 aus der Gruppenarbeit . . . . .	152
7.13	HM-Beispielitem HM9 aus der Einzelarbeit . . . . .	155
7.14	TM-Beispielitem TM6 aus der Einzelarbeit . . . . .	156
8.1	Kategoriensystem der inneren Struktur zur Analyse der Videoaufnahmen . . . . .	163
8.2	Beispielitem für die Kodierung von Heurismen . . . . .	168
8.3	Entscheidungsbaum für die Kodierung der <i>Epistemic Games</i> . . . . .	171
8.4	Beispielitem für die Kodierung von EGs . . . . .	173
8.5	Beispiele für Moderatormodelle . . . . .	186
8.6	Beispiel für Mediatormodell . . . . .	187
9.1	Pfadmodell zum Messzeitpunkt 1 . . . . .	197
9.2	Erstes Mediatormodell zum Messzeitpunkt 1 . . . . .	198
9.3	Zweites Mediatormodell zum Messzeitpunkt 1 . . . . .	198

9.4	Pfadmodell zum Messzeitpunkt 3 . . . . .	201
9.5	Erstes Mediatormodell zum Messzeitpunkt 3 . . . . .	202
9.6	Zweites Mediatormodell zum Messzeitpunkt 3 . . . . .	203
9.7	Advanced Organizer für die Ergebnispräsentation der <i>situationspezifischen Fähigkeiten</i> . . . . .	204
9.8	Beispiel zur Analyse des Einsatzes von Heurismen . . . . .	206
9.9	Heatmap zur Anzahl der <i>Heuristischen Hilfsmitteln</i> am ersten Messzeitpunkt . . . . .	210
9.10	Aufgaben HM10 und HM11 aus der Gruppenarbeit am ersten Messzeitpunkt . . . . .	211
9.11	Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Gruppenarbeit von Aufgabe HM10 am ersten Messzeitpunkt . . . . .	212
9.12	Abbildungen aus einer erfolgreichen Gruppenarbeit von Aufgabe HM10 am ersten Messzeitpunkt . . . . .	214
9.13	Heatmap zur Anzahl der Heuristischen Strategie <i>Vorwärtsarbeiten</i> am ersten Messzeitpunkt . . . . .	216
9.14	Aufgabe HM14 aus der Gruppenarbeit am ersten Messzeitpunkt	217
9.15	Abbildungen aus einer nicht erfolgreichen Gruppenarbeit von Aufgabe HM14 am ersten Messzeitpunkt . . . . .	218
9.16	Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Gruppenarbeit von Aufgabe HM14 am ersten Messzeitpunkt . . . . .	219
9.17	Aufgabe HM13 aus der Gruppenarbeit am ersten Messzeitpunkt	221
9.18	Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Gruppenarbeit von Aufgabe HM13 am ersten Messzeitpunkt . . . . .	222
9.19	Abbildung aus einer erfolgreichen Gruppenarbeit von Aufgabe HM13 am ersten Messzeitpunkt . . . . .	222
9.20	Heatmap zur Anzahl von <i>Heuristischen Hilfsmitteln</i> am zweiten Messzeitpunkt . . . . .	226
9.21	Abbildung aus einer erfolgreichen Gruppenarbeit von Aufgabe HM14 am zweiten Messzeitpunkt . . . . .	228
9.22	Heatmap zur Anzahl der Heuristischen Strategie <i>Vorwärtsarbeiten</i> am zweiten Messzeitpunkt . . . . .	230
9.23	Aufgabe HM14 und HM15 aus der Gruppenarbeit am zweiten Messzeitpunkt . . . . .	231

9.24	Abbildung aus einer erfolgreichen Gruppenarbeit von Aufgabe HM15 am zweiten Messzeitpunkt . . . . .	231
9.25	Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Gruppenarbeit von Aufgabe HM13 am zweiten Messzeitpunkt . . . . .	234
9.26	Abbildung aus einer erfolgreichen Gruppenarbeit von Aufgabe HM13 am zweiten Messzeitpunkt . . . . .	235
9.27	Heatmap zur Anzahl von <i>Heuristischen Hilfsmitteln</i> am dritten Messzeitpunkt . . . . .	239
9.28	Aufgabe HM4 aus der Einzelarbeit am dritten Messzeitpunkt . .	240
9.29	Abbildung aus einer erfolgreichen Einzelarbeit von Aufgabe HM4 am dritten Messzeitpunkt . . . . .	241
9.30	Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Einzelarbeit von Aufgabe HM4 am dritten Messzeitpunkt . . . . .	242
9.31	Heatmap zur Anzahl der Heuristischen Strategie <i>Vorwärtsarbeiten</i> am dritten Messzeitpunkt . . . . .	243
9.32	Aufgabe HM9 aus der Einzelarbeit am dritten Messzeitpunkt . .	244
9.33	Abbildung aus einer erfolgreichen Einzelarbeit von Aufgabe HM9 am dritten Messzeitpunkt . . . . .	245
9.34	Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Einzelarbeit von Aufgabe HM9 am dritten Messzeitpunkt . . . . .	247
9.35	Aufgabe HM7 aus der Einzelarbeit am dritten Messzeitpunkt . .	249
9.36	Abbildung aus einer erfolgreichen Einzelarbeit von Aufgabe HM7 am dritten Messzeitpunkt . . . . .	250
9.37	Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Einzelarbeit von Aufgabe HM7 am dritten Messzeitpunkt . . . . .	251
9.38	Beobachtete <i>Epistemic Games</i> zum ersten Messzeitpunkt . . . .	270
9.39	Aufgabe TM9 aus der Gruppenarbeit am ersten Messzeitpunkt .	271
9.40	Abbildung aus einer erfolgreichen Gruppenarbeit von Aufgabe TM9 am ersten Messzeitpunkt . . . . .	272
9.41	Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Gruppenarbeit von Aufgabe TM9 am ersten Messzeitpunkt . . . . .	273
9.42	Aufgabe TM6 aus der Gruppenarbeit am ersten Messzeitpunkt .	274
9.43	Abbildung aus einer erfolgreichen Gruppenarbeit von Aufgabe TM6 am ersten Messzeitpunkt . . . . .	275

9.44	Beobachtete <i>Epistemic Games</i> zum zweiten Messzeitpunkt . . .	278
9.45	Aufgabe TM8 aus der Gruppenarbeit am zweiten Messzeitpunkt	279
9.46	Abbildung aus einer erfolgreichen Gruppenarbeit von Aufgabe TM8 am zweiten Messzeitpunkt . . . . .	280
9.47	Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Gruppenarbeit von Auf- gabe TM8 am zweiten Messzeitpunkt . . . . .	281
9.48	Aufgabe TM12 aus der Gruppenarbeit am zweiten Messzeitpunkt	283
9.49	Abbildung aus einer erfolgreichen Gruppenarbeit von Aufgabe TM12 am zweiten Messzeitpunkt . . . . .	284
9.50	Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Gruppenarbeit von Auf- gabe TM12 am zweiten Messzeitpunkt . . . . .	285
9.51	Beobachtete <i>Epistemic Games</i> zum dritten Messzeitpunkt . . .	287
9.52	Aufgabe TM7 aus der Einzelarbeit am dritten Messzeitpunkt . .	288
9.53	Abbildung aus einer erfolgreichen Einzelarbeit von Aufgabe TM7 am dritten Messzeitpunkt . . . . .	289
9.54	Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Einzelarbeit von Aufga- be TM7 am dritten Messzeitpunkt . . . . .	290
9.55	Aufgabe TM2 aus der Einzelarbeit am dritten Messzeitpunkt . .	291
9.56	Abbildung aus einer erfolgreichen Einzelarbeit von Aufgabe TM2 am dritten Messzeitpunkt . . . . .	292
9.57	Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Einzelarbeit von Aufga- be TM2 am dritten Messzeitpunkt . . . . .	293
9.58	Darstellung des Erfolgs bei der Anwendung von Heurismen am ersten Messzeitpunkt . . . . .	296
9.59	Darstellung des Erfolgs bei der Anwendung von Heurismen am dritten Messzeitpunkt . . . . .	302
9.60	Vergleich zwischen den Clustern bei der Anwendung von Heu- rismen und <i>Dispositionen</i> am dritten Messzeitpunkt . . . . .	306
9.61	Darstellung des Erfolgs bei der Anwendung von <i>Epistemic Ga- mes</i> am ersten Messzeitpunkt . . . . .	308
9.62	Vergleich zwischen Erfolg bei der Anwendung von <i>Epistemic Games</i> und <i>Dispositionen</i> am ersten Messzeitpunkt . . . . .	310
9.63	Darstellung des Erfolgs bei der Anwendung von <i>Epistemic Ga- mes</i> am dritten Messzeitpunkt . . . . .	311

9.64 Vergleich zwischen Erfolg bei der Anwendung von <i>Epistemic Games</i> und <i>Dispositionen</i> am dritten Messzeitpunkt . . . . .	313
A.1 Aufgabe HM1 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	337
A.2 Aufgaben HM2 bis HM4 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	338
A.3 Aufgaben HM5 und HM6 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	339
A.4 Aufgabe HM7 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	339
A.5 Aufgabe HM8 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	340
A.6 Aufgabe HM9 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	340
A.7 Aufgaben HM10 und HM11 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	341
A.8 Aufgabe HM12 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	341
A.9 Aufgabe HM13 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	342
A.10 Aufgaben HM14 und HM15 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	342
A.11 Aufgabe HM16 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	343
A.12 Aufgabe HM1 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	343
A.13 Aufgabe HM2 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	344
A.14 Aufgabe HM3 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	344
A.15 Aufgabe HM4 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	345
A.16 Aufgabe HM5 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	345
A.17 Aufgabe HM6 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	346
A.18 Aufgabe HM7 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	346
A.19 Aufgabe HM8 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	347
A.20 Aufgabe HM9 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	347
A.21 Aufgabe TM1 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	348
A.22 Aufgabe TM2 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	348
A.23 Aufgabe TM3 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	349
A.24 Aufgabe TM4 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	350
A.25 Aufgabe TM5 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	351
A.26 Aufgabe TM6 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	352
A.27 Aufgaben TM7 und TM8 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	353
A.28 Aufgabe TM9 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	354
A.29 Aufgabe TM10 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	354
A.30 Aufgabe TM11 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	355
A.31 Aufgabe TM12 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	355
A.32 Aufgabe TM13 zu Messzeitpunkt 1 und 2 . . . . .	356

A.33 Aufgabe TM1 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	357
A.34 Aufgabe TM2 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	358
A.35 Aufgabe TM3 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	358
A.36 Aufgabe TM4 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	359
A.37 Aufgabe TM5 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	360
A.38 Aufgabe TM6 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	361
A.39 Aufgabe TM7 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	362
A.40 Aufgabe TM8 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	363
A.41 Aufgabe TM9 zu Messzeitpunkt 3 . . . . .	364



# Tabellenverzeichnis

4.1	Vergleich von Phasenmodellen . . . . .	59
4.2	Überblick zu <i>Heuristischen Hilfsmitteln</i> . . . . .	73
4.3	Überblick zu <i>Heuristischen Strategien</i> . . . . .	76
4.4	Überblick zu <i>Heuristischen Prinzipien</i> . . . . .	80
4.5	Mathematische Ressourcen der <i>Knowledge Base</i> . . . . .	86
4.6	Übersicht über die Ontological und Structural Components . . .	89
5.1	Teilprojekte KoM@ING . . . . .	108
5.2	Entwickelte Testinstrumente . . . . .	112
7.1	Überblick über die Studiengänge der Teilnehmerinnen . . . . .	128
7.2	Mathematik- und Physiknoten der Hochschulzugangsberechtigung	129
7.3	Umfang des Mathematik- und Physikunterrichts der Teilnehme- rinnen in der Oberstufe . . . . .	130
7.4	Übersicht über Gruppen des ersten und zweiten Messzeitpunktes	131
7.5	Inhalte der Mathematikvorlesungen . . . . .	133
7.6	Vorlesungen zu physikalischen Grundlagen . . . . .	134
7.7	Inhalte der Mechanikvorlesungen . . . . .	135
7.8	Mathematikaufgaben in der Gruppenarbeit . . . . .	153
7.9	Physikaufgaben in der Gruppenarbeit . . . . .	154
7.10	Mathematikaufgaben in der Einzelarbeit . . . . .	157
7.11	Aufgaben aus der Technischen Mechanik in der Einzelarbeit . .	158
8.1	Kategoriensystem der inneren Struktur – <i>Heuristische Hilfsmittel</i>	165
8.2	Kategoriensystem der inneren Struktur – <i>Heuristische Strategien</i>	166
8.3	Kategoriensystem der inneren Struktur – <i>Heuristische Prinzipien</i>	167
8.4	Kategoriensystem der äußeren Struktur – Mathematik . . . . .	170
8.5	Kategoriensystem der äußeren Struktur – Physik . . . . .	175

8.6	Beispiel für die Kodierung der Phasen . . . . .	179
8.7	Übereinstimmungen bei der Kodierung der Heurismen im Beispiel	180
8.8	Übereinstimmungen bei der Kodierung der Heurismen . . . . .	181
8.9	Übereinstimmungen bei der Kodierung der Problemlösephasen .	182
8.10	Übereinstimmungen bei der Kodierung der <i>Epistemic Games</i> . .	183
9.1	Personenfähigkeitsschätzer der Teilnehmerinnen . . . . .	193
9.2	Ergebnisse des Shapiro-Wilk-Tests zu Beginn des ersten Semesters	196
9.3	Korrelationsmatrix der <i>Dispositionen</i> zu Beginn des ersten Semesters . . . . .	196
9.4	Ergebnisse des Shapiro-Wilk-Tests zum Ende des ersten Studienjahres. . . . .	200
9.5	Korrelationsmatrix der <i>Dispositionen</i> zum Ende des ersten Studienjahres . . . . .	200
9.6	Überblick zur Nutzung von <i>Heuristischen Hilfsmitteln</i> am ersten Messzeitpunkt. . . . .	208
9.7	Überblick zur Nutzung von weiteren <i>Heuristischen Strategien</i> und <i>Heuristischen Prinzipien</i> am ersten Messzeitpunkt. . . . .	220
9.8	Überblick zur Nutzung von <i>Heuristischen Hilfsmitteln</i> am zweiten Messzeitpunkt. . . . .	225
9.9	Überblick zur Nutzung von weiteren <i>Heuristischen Strategien</i> und <i>Heuristischen Prinzipien</i> am zweiten Messzeitpunkt. . . . .	233
9.10	Überblick zur Nutzung von <i>Heuristischen Hilfsmitteln</i> am dritten Messzeitpunkt. . . . .	238
9.11	Überblick zur Nutzung von weiteren <i>Heuristischen Strategien</i> und <i>Heuristischen Prinzipien</i> am dritten Messzeitpunkt. . . . .	248
9.12	Kategorien der Phasenverläufe bei mathematischen Problemen .	254
9.13	Typen und Häufigkeit des Auftretens von Problemlösephasen zum ersten MZP - Nach Gruppen sortiert . . . . .	257
9.14	Typen und Häufigkeit des Auftretens von Problemlösephasen zum ersten MZP - Nach Aufgaben sortiert . . . . .	258
9.15	Typen und Häufigkeit des Auftretens von Problemlösephasen zum zweiten MZP - Nach Gruppen sortiert . . . . .	261
9.16	Typen und Häufigkeit des Auftretens von Problemlösephasen zum zweiten MZP - Nach Aufgaben sortiert . . . . .	262

9.17	Typen und Häufigkeit des Auftretens von Problemlösephasen zum dritten MZP - Nach Studierenden sortiert . . . . .	266
9.18	Typen und Häufigkeit des Auftretens von Problemlösephasen zum dritten MZP - Nach Aufgaben sortiert . . . . .	267
9.19	Übersicht über beobachtete <i>Epistemic Games</i> . . . . .	268
9.20	Cluster von Gruppen anhand der Nutzung von Heurismen am ersten Messzeitpunkt . . . . .	297
9.21	<i>Dispositionen</i> der Cluster am ersten Messzeitpunkt . . . . .	300
9.22	Cluster von Studierenden anhand der Nutzung von Heurismen am dritten Messzeitpunkt . . . . .	303
B.1	Erste Version des Kategoriensystems zur Verwendung von Heu- ristischen Hilfsmitteln . . . . .	365
B.2	Erste Version des Kategoriensystems zur Verwendung von Heu- ristischen Strategien . . . . .	366
B.3	Erste Version des Kategoriensystems zur Verwendung von Heu- ristischen Prinzipien . . . . .	368
B.4	Erste Version des Kategoriensystems zum Durchlaufen von Pro- blemlösephasen nach Polya . . . . .	369
B.5	Erste Überarbeitung des Kategoriensystems zur Verwendung von Heuristischen Hilfsmitteln . . . . .	370
B.6	Erste Überarbeitung des Kategoriensystems zur Verwendung von Heuristischen Strategien . . . . .	371
B.7	Erste Überarbeitung des Kategoriensystems zur Verwendung von Heuristischen Prinzipien . . . . .	372
B.8	Erste Überarbeitung des Kategoriensystems zum Durchlaufen von Problemlösephasen nach Polya . . . . .	372

# Kapitel 1

## Einleitung

Die Ausbildung von Ingenieurinnen<sup>1</sup> ist ein wichtiger Bereich der tertiären Bildung in Deutschland. Im Wintersemester 2013/14<sup>2</sup> waren mit 293.326 Studierenden 11,2% aller deutschen Studierenden allein in den vier Studienfächern Maschinenbauwesen, Elektrotechnik, Wirtschaftsingenieurwesen (mit ingenieurwissenschaftlichem Schwerpunkt) und Bauingenieurwesen eingeschrieben (Statistisches Bundesamt, 2014). Gleichzeitig sind diese und andere ingenieurwissenschaftliche Studienfächer von einer hohen Abbruchquote betroffen. Diese lag bei Ingenieurstudierenden, die im Jahr 2010/2011 ihr Studium begonnen haben, bei 32%<sup>3</sup> und wurde damit nur von Studienfächern in den Naturwissenschaften und der Mathematik mit 39% Abbruchquote übertroffen (Heublein et al., 2017). Eine Ursache für den Studienabbruch liegt in der ungenügenden Vorbereitung auf das Studium. Dies umfasst sowohl die selbstingeschätzte Vorbereitung als auch die „mehr oder weniger fachgebundene[n] Kompetenzen in Mathematik, Naturwissenschaften, Englisch und Deutsch bei Studienbeginn“ (Heublein et al., 2017, S. 88). Des Weiteren trägt „mangelhaftes Bewältigen der Studieneingangsphase [...] in dieser Fächergruppe [den Ingenieurwissenschaften] zum Studienabbruch bei“ (Heublein et al., 2017, S.

---

<sup>1</sup>Für eine bessere Lesbarkeit wird die weibliche Form verwendet, dies schließt ausdrücklich jeweils die männliche Form mit ein. Im Methoden- und Ergebniskapitel werden sowohl männliche als auch weibliche Formen verwendet, um eine bessere Unterscheidung zwischen den einzelnen Studierenden zu ermöglichen.

<sup>2</sup>Die Teilnehmerinnen der Studie haben in diesem Semester ihr Studium aufgenommen.

<sup>3</sup>Gleichzeitig hat sich die Abbruchquote im Vergleich zu den Studienanfängern in den Jahren 2008/2009, bei denen diese noch bei 48% lag, deutlich verringert.

265). Besonders beim Maschinenbaustudium, so Heublein et al. weiter, ist jedoch auch davon auszugehen, „dass es den Hochschulen gelungen ist, den Leistungsproblemen zu Studienbeginn mit geeigneten Maßnahmen zu begegnen“ (S. 265). Gleichzeitig sind die für das Ingenieurstudium spezifischen Hürden bisher wenig theoretisch und empirisch untersucht.

Um diese Forschungslücke zu schließen, wurden im Rahmen der im Jahr 2012 aufgelegten Förderlinie Kompetenzmodellierung und Kompetenzmessung im Hochschulbereich (KoKoHs)<sup>4</sup> auch Projekte gefördert, in denen die kritische Phase des Studieneingangs bei Ingenieurstudierenden im Hinblick auf zu erlangende Kompetenzen untersucht werden sollte. So existierten bis dahin keine Kompetenzmodelle zu den grundlegenden Fächern Höhere Mathematik und Technische Mechanik sowie zu prozessorientierten Kompetenzen. Eine wichtige Facette dieser ist das Problemlösen, das sowohl in den Curricula der schulischen als auch der universitären Mathematikausbildung als eine bedeutende zu erlernende Kompetenz beschrieben wird. Im schulischen Kontext geschieht dies durch die Bildungsstandards der Primar- und Sekundarstufe. In der universitären Ausbildung wird beispielsweise im Bericht „A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education“ der *European Society for Engineering Education* die Bedeutung des Problemlösens betont und als eine der Kompetenzen beschrieben, die Ingenieurinnen im Studium erwerben sollen.

Das Ziel dieser Arbeit ist, für Ingenieurstudierende im ersten Studienjahr relevante mathematische Kompetenzen zu identifizieren und vor dem Hintergrund der Anforderungen des Studiums zu beschreiben. Dies geschieht mit Hilfe eines Kompetenzmodells, das neben einer dispositionellen, eine situative Perspektive und die Zusammenhänge zwischen beiden berücksichtigt. Im Rahmen der zweiten Perspektive wird das Vorgehen von Ingenieurstudierenden beim Bearbeiten von typischen Mathematik- und Physikaufgaben aus der Phase des Übergangs zwischen Schule und Hochschule hinsichtlich Merkmalen und Methoden des mathematischen Problemlösens analysiert. Das Modell ermöglicht damit einen erweiterten Blick auf relevante mathematische Kompetenzen, der über die Messung mit Tests hinaus auch die aus fachdidaktischer Perspektive interessanten Prozesse aufgreift. Die Ergebnisse können helfen, geeignete Konzepte für die Unterstützung in der Studieneingangsphase zu entwickeln.

---

<sup>4</sup>Gefördert durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung

Kapitel 2 enthält die theoretischen Grundlagen für diese Untersuchung, indem die wichtigen Konstrukte, Modelle und Erkenntnisse der Kompetenzmodellierung und -messung zusammengetragen werden. Dafür wird zunächst der Begriff der Kompetenz für die vorliegende Arbeit definiert und das zugrundeliegende Modell zur Beschreibung von Kompetenzen vorgestellt (Abschnitt 2.1). Anschließend werden die theoretischen Grundlagen zur Kompetenzmodellierung (Abschnitt 2.2) und -messung (Abschnitt 2.3) dargestellt, um deren Anwendung in den beiden Bereichen Schule (Abschnitt 2.4) und Hochschule (Abschnitt 2.5) und insbesondere im Ingenieurstudium (Abschnitt 2.6) beschreiben zu können. Diese Abschnitte zeigen die Notwendigkeit der intensiven Thematisierung von Kompetenzforschung in der Ingenieurausbildung auf.

Die relevanten mathematischen Kompetenzen werden sowohl im Kontext von Mathematik- als auch von Physikaufgaben untersucht. Im anschließenden Kapitel 3 werden daher die beiden Domänen Mathematik und Physik im Hinblick auf das Ingenieurstudium dargestellt. Da zudem die Studieneingangsphase als Übergang von der Schule zur Hochschule ein besonderer Abschnitt in der Ausbildung ist, wird in Abschnitt 3.1 das Phänomen der Transitionen im Bildungsbereich mit Fokus auf die Rolle der Mathematik vorgestellt. Anschließend folgen Ausführungen zur Mathematikausbildung für Ingenieure (Abschnitt 3.2) im Spannungsfeld zwischen Input- und Kompetenzorientierung. Die wichtige Rolle der Mathematik in der Physik und die Verbindung dieser beiden Domänen werden in Abschnitt 3.3 adressiert. Abschließend wird die physikalische Ausbildung von Ingenieurstudierenden in der Technischen Mechanik thematisiert (Abschnitt 3.4).

Das folgende Kapitel 4 widmet sich einer wichtigen Facette der relevanten mathematischen Kompetenzen, dem Problemlösen. Dieses bildet die theoretische Rahmung, um die *situationsspezifischen Fähigkeiten* zu erfassen und die entsprechenden Prozesse der Studierenden beim Bearbeiten von Mathematik- und Physikaufgaben abzubilden. Dazu wird zum einen in Abschnitt 4.1 die fachspezifische Perspektive der Mathematik auf das Problemlösen, und hier besonders im Rahmen des Mathematikunterrichts, präsentiert. Zum anderen werden Modelle der äußeren Struktur: Phasen des Problemlöseprozesses (Abschnitt 4.1.4) und Modelle der inneren Struktur: Heuristiken und ihr Einsatz (Abschnitt 4.1.5) detailliert beschrieben. Die zweite fachspezifische Perspekti-

ve auf das Problemlösen, die für diese Arbeit von Bedeutung ist, ist die der Physikdidaktik. In Abschnitt 4.2 wird zuerst mit dem Modell des wissenszentrierten Problemlösens eine Herangehensweise an das Lösen von Problemen in der Physik vorgestellt (Abschnitt 4.2.1). Anschließend werden die *Epistemic Games*, die in Verbindung zum Modell des wissenszentrierten Problemlösens stehen und sich zur Beschreibung der Phasen beim Problemlösen (mathemathikhaltiger) Physikaufgaben eignen, vorgestellt (Abschnitt 4.2.2). Der folgende Abschnitt zum Problemlösen in der Ingenieurausbildung (Abschnitt 4.3) macht deutlich, dass bereits Modelle existieren, welche die Arbeiten aus der Mathematik und der Physik für die Ingenieurausbildung aufgegriffen haben und zeigen, dass dies gewinnbringend ist. Im letzten Abschnitt 4.1.2 dieses Kapitels werden die drei Perspektiven zusammengeführt.

Das Forschungsprojekt, in dessen Rahmen diese Dissertation entstanden ist, wird in Kapitel 5 vorgestellt. Dazu wird zunächst das Forschungsprogramm „Kompetenzmodellierung und Kompetenzerfassung im Hochschulsektor“ (Ko-KoHs) mit Ausgangslage und den Teilprojekten beschrieben (Abschnitt 5.1). Anschließend wird das Projekt KoM@ING mit seinen Forschungszielen und Teilprojekten detailliert präsentiert, um den Kontext der Entstehung der vorliegenden Arbeit zu verdeutlichen (Abschnitt 5.2).

Der Theorieteil wird durch eine Synthese seiner Kapitel (Abschnitt 6.1) abgeschlossen, gefolgt durch die daraus resultierenden Forschungsfragen (Abschnitt 6.2).

Der Methodenteil der Dissertation gliedert sich in die beiden Kapitel zum Studiendesign und zur Datenerhebung (Kapitel 7) sowie zur Datenanalyse (Kapitel 8). Nach der Darstellung des generellen methodischen Ansatzes der Mixed-Methods (Abschnitt 7.1) erfolgt die Beschreibung des Designs (Abschnitt 7.2), der Stichprobe (Abschnitt 7.3) und der Mathematik- und Physikausbildung an der Ruhr-Universität Bochum (Abschnitt 7.4), um den Kontext der Untersuchung einzuordnen. Aufgrund des Mixed-Methods-Ansatzes werden sowohl quantitative Daten mit Hilfe von Tests erhoben, die in Abschnitt 7.5 präsentiert werden, als auch qualitative Daten durch Videographie, deren Umsetzung in Abschnitt 7.6 beschrieben wird. Das Kapitel 8 zur Datenanalyse greift die Vorgehensweise auf, stellt zuerst Verfahren für die Auswertung der qualitativen Videodaten vor (Abschnitt 8.1), und präsentiert anschließend Methoden

für die Auswertung der quantitativen Testdaten (Abschnitt 8.2).

Die Ergebnisdarstellung in Kapitel 9 folgt der Logik der Forschungsfragen und stellt die Befunde, mit deren Hilfe die Forschungsfragen beantwortet werden können, vor. Abschließend werden die Resultate im Hinblick auf die Fragestellungen und die zugrundeliegende Theorie diskutiert, weitere Forschungsaktivitäten in diesem Bereich aufgezeigt (Abschnitt 10.1), die eingesetzten Methoden reflektiert (Abschnitt 10.2), und mögliche Implikationen für die Ingenieurausbildung (Abschnitt 10.3) dargestellt.



# Kapitel 2

## Kompetenzmodellierung und Kompetenzmessung

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen zum Begriff der Kompetenz sowie ihrer Modellierung und Messung insbesondere im tertiären Bildungsbereich dargelegt. Einer allgemeinen Einführung in die Thematik (2.1, 2.2, 2.3) folgt eine Darstellung der Kompetenzforschung im schulischen Bereich (2.4). An diese schließt sich die Beschreibung der Kompetenzforschung an der Hochschule an (2.5). Ein kurzer Überblick über die Untersuchungen von Kompetenzen im Ingenieurstudium (2.6) rundet das Kapitel ab. Der Fokus liegt auf dem Schul- und Hochschulbereich, Forschungsarbeiten aus der beruflichen Bildung werden nur ergänzend berichtet.

Dieses Kapitel bildet somit zum einen die Grundlage für die Ausführungen zu den mathematischen und physikalischen Anforderungen des Ingenieurstudiums, die in den letzten Jahren eine Ausrichtung hin zu einer kompetenzbezogenen Formulierung von Lernzielen erfahren haben (vgl. Kapitel 3); zum anderen bilden die dargestellten Diskussionen die Basis für die Ausführungen zum Kompetenzmodell, das in der vorliegenden Arbeit zum Einsatz kommt (vgl. Kapitel 6).

## 2.1 Definition von Kompetenz

Seit 15 Jahren nimmt der Begriff *Kompetenz* eine wichtige Stellung sowohl in der empirischen Bildungsforschung (Hartig & Klieme, 2006; Klieme, Hartig & Rauch, 2008) als auch in der bildungspolitischen Debatte (Klieme, 2003; Renkl, 2012) ein. In dieser Zeit hat die Definition des Kompetenzbegriffs vielfache Modifikationen und Konkretisierungen erfahren. Als Grundlage diente dabei in vielen Fällen die Definition von F. E. Weinert (1999, 2001), der verschiedene Varianten von Kompetenz unterscheidet. Unter anderem definiert er diese im Sinne von Handlungskompetenz, welche die drei Facetten (1) *Dispositionen*, (2) Fertigkeiten, Strategien bzw. bereichsspezifische Fähigkeiten und (3) motivationale Orientierung beinhaltet und diese auf ein bestimmtes Handlungsfeld bezieht oder im Sinne von „Metakompetenzen als Wissen, Strategien oder auch Motivationen, die Erwerb und Anwendung von Kompetenzen in verschiedenen Inhaltsbereichen erleichtern“ (Klieme, 2004, S. 11).

Während Weinert anfangs noch eine Beschränkung des Kompetenzbegriffs auf die kognitiven *Dispositionen* empfiehlt (F. E. Weinert, 1999), weicht er später von dieser Einschränkung ab und erweitert das Verständnis von Kompetenz explizit auf nicht-kognitive *Dispositionen*: Er definiert Kompetenzen als „die bei Individuen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um bestimmte Probleme zu lösen, sowie die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten, um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“ (F. E. Weinert, 2001, S. 27–28) und gibt so eine Definition von Kompetenz, die seitdem zum „Referenzzitat [geworden ist], auf das sich viele Bemühungen um Bildungsstandards und Kompetenzmodelle beziehen“ (Klieme, 2004, S. 12). Häufig liegt jedoch die Konzentration auf dem kognitiven Aspekt; so wird auch im DFG-Schwerpunktprogramm *Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen* verfahren: „Für das SPP [Schwerpunktprogramm] definieren wir Kompetenzen als kontextspezifische kognitive Leistungsdispositionen, die sich funktional auf Situationen und Anforderungen in bestimmten Domänen beziehen“ (Klieme & Leutner, 2006, S. 879). Begründet wird die Fokussierung kognitiver Kompetenzfacetten in Forschungsprojekten und

-arbeiten mit Zweckmäßigkeitserwägungen und pragmatischen Überlegungen. Diese Forschung zweifelt zum einen nicht die Bedeutung anderer Einflussfaktoren wie Intelligenz,<sup>1</sup> motivationale Einstellungen oder emotionale Faktoren an (Fleischer, Koeppen, Kenk, Klieme & Leutner, 2013) und zum anderen berücksichtigt sie Weinerts Auffassung, „kognitive und motivationale/volitionale Aspekte von Kompetenz getrennt zu erforschen“ (O. Wilhelm & Nickolaus, 2013, S. 24).

In der aktuellen Diskussion in der Bildungsforschung wird der Begriff Kompetenz meist nicht auf den kognitiven Aspekt beschränkt definiert, sondern z. B. als „complex ability constructs that are context-specific, trainable, and closely related to real life“ (Koeppen, Hartig, Klieme & Leutner, 2008, S. 1). Blömeke, Gustafsson und Shavelson (2015) explizieren die nicht-kognitiven Aspekte und erfassen Kompetenz als „the latent cognitive and affective – motivational underpinning of domain-specific performance in varying situations“ (S. 1). In diesen beiden Ansätzen Kompetenz zu definieren, sind zwei Perspektiven enthalten: Erstens werden Kompetenzen aus einer analytischen Perspektive als *Dispositionen* beschrieben, die Kognition und robust affektiv-motivationale Merkmale umfassen.<sup>2</sup> Zweitens werden Kompetenzen aus einer situationsbezogenen Perspektive als Fähigkeiten und Fertigkeiten aufgefasst, deren Anwendung von spezifischen Situationen beeinflusst wird (Blömeke et al., 2015; Koeppen et al., 2008; Depaepe, Verschaffel & Kelchtermans, 2013). Diese zwei Perspektiven stehen nicht im Gegensatz zueinander, sondern weisen auf verschiedene Arten der Konzeptualisierung von Kompetenz und damit auch auf verschiedene Messverfahren hin wie Multiple-Choice- oder Constructed-Response-Items, video-basierte Verfahren sowie *Performanz*-Messungen in Alltagssituationen. Als ein Kontinuum aufgefasst, das sowohl eine dispositionelle als auch eine situierte Perspektive erfasst, erfährt das Verständnis von Kompetenz eine dynamische Sichtweise. Hierdurch wird das Zusammenspiel von *Dispositionen* und *situationsspezifischen Fähigkeiten* wie Wahrnehmen, Interpretieren und

---

<sup>1</sup>Zu Unterschieden und Gemeinsamkeiten der beiden Konstrukte Kompetenz und Intelligenz existiert eine breite Debatte. Die beiden Konstrukte lassen sich hinsichtlich der Kontextualisierung, der Lernbarkeit und des Fokus bei der Definition von Binnenstrukturen voneinander abgrenzen (vgl. Hartig & Klieme, 2006).

<sup>2</sup>Unter *Dispositionen* werden im weiteren Verlauf der Arbeit kognitiven Voraussetzungen für die Arbeit mit Mathematik- und Physikaufgaben verstanden.

Entscheidungen treffen, die gleichermaßen die *Performanz* eines Individuums bestimmen, beobachtbar (vgl. Abbildung 2.1). Weiterhin vermitteln Wahrnehmung und Interpretation einer spezifischen Situation im Zusammenspiel mit darauf beruhenden Entscheidungen (Schoenfeld, 2011) zwischen *Dispositionen* und *Performanz*. Dabei ermöglichen die situationspezifischen Fähigkeiten eine Vernetzung und flexible Nutzung vorher getrennt erworbener Kompetenzfacetten (Blömeke et al., 2014).

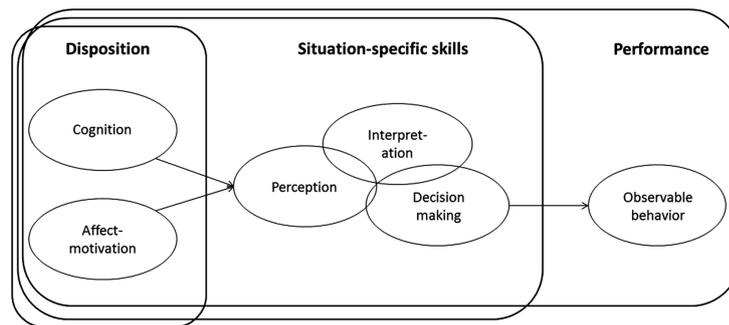


Abbildung 2.1: Kompetenz als ein Kontinuum, Modell nach Blömeke et al. (2015, S. 7).

## 2.2 Kompetenzmodellierung

Kompetenzmodelle<sup>3</sup> dienen der Beschreibung der Struktur, des Niveaus und der Entwicklung von Kompetenzen (Klieme & Leutner, 2006). Bei der Kompetenzmodellierung können zwei verschiedene Arten von Modellen unterschieden werden, die eng miteinander verbunden sind (Klieme & Leutner, 2006). Mit Hilfe theoretischer Kompetenzmodelle lassen sich Strukturen definieren und

<sup>3</sup>Die Unterscheidung zwischen Kompetenzmodellierung und Kompetenzmessung wird in dieser Arbeit wie folgt vorgenommen: Unter Kompetenzmessung fallen alle Verfahren, Konzepte und Inhalte, welche konkret für die Entwicklung und Analyse von Aufgaben genutzt werden. Bei der Kompetenzmodellierung steht die Konstruktion des Kompetenzmodells im Vordergrund. Die Nutzung von Testergebnissen zur Bestimmung von Kompetenzniveaus fällt in den Bereich der Kompetenzmodellierung, da dadurch gegebenenfalls das Modell modifiziert wird.

Niveaus charakterisieren (Klieme & Leutner, 2006) und somit Kompetenzstrukturmodelle und Kompetenzniveauumodelle bzw. Kompetenzentwicklungsmodelle ausdifferenzieren (Hartig & Klieme, 2006; Schecker & Parchmann, 2006). Psychometrische Modelle dagegen ermöglichen es, aus dem Verhalten einer Person in einer Testsituation auf die Ausprägungen spezifischer Kompetenzen zu schließen (M. Wilson, 2003; Hartig, 2008). Hier sind insbesondere Modelle auf Basis der Item-Response Theory (IRT) von Bedeutung (Klieme & Leutner, 2006). Diese Modelle führen zu Messverfahren, mit denen die modellierten Kompetenzen erfasst werden können. Zu beachten ist dabei, dass „Kompetenzmodelle für spezifische Populationen in spezifischen (mehr oder weniger breit angelegten) Kontexten zu spezifischen Zeitpunkten entwickelt“ werden (Robitzsch, 2013, S. 43) und daher eine Generalisierbarkeit nicht ohne Weiteres möglich ist. Auf eine ähnliche Problematik weisen Kunter und Klusmann (2010) hin. So wird bei vielen Arbeiten zu Kompetenzen von Lehrpersonen die Frage der Repräsentativität der Stichprobe für die Zielpopulation nicht ausreichend berücksichtigt.

Klieme und Leutner (2006) stellen heraus, dass „die Entwicklung theoretisch begründeter und empirisch geprüfter Kompetenzmodelle als Ausgangspunkt für die Entwicklung von psychometrischen Modellen und schließlich von Messverfahren [...] z.Zt. immer noch die grundlegende inhaltliche Herausforderung der Kompetenzmessung [ist]“ (S. 883). Die Konstruktion von Kompetenzmodellen wird in den beiden folgenden Abschnitten thematisiert.

### 2.2.1 Kompetenzstrukturmodelle

Kompetenzstrukturmodelle beschreiben die Dimensionalität von Kompetenzen und können auf Grundlage theoretischer Annahmen und mit Hilfe faktorenanalytischer Methoden formuliert werden (Hartig & Klieme, 2006). Die Modelle dienen der Erklärung, welche und wie viele (Teil-)Kompetenzen in einem bestimmten Zusammenhang differenziert erfasst werden können (Hartig & Klieme, 2006; Nickolaus & Seeber, 2013). Die Entscheidung über die Anzahl der Dimensionen muss dabei auch vom Einsatzzweck abhängig gemacht werden (Schecker & Parchmann, 2006). So ist die Ausdifferenzierung des Kompetenzmodells zu den Bildungsstandards in drei Dimensionen für die Zielgruppe der Lehrpersonen handhabbar, eine komplexere Darstellung würde der Adressie-

rung dieser Gruppe jedoch zuwiderlaufen (Schecker, Fischer & Wiesner, 2004). Die Entwicklung solcher Kompetenzmodelle verläuft generell in vier Schritten (vgl. M. Wilson, 2005; Mayer & Wellnitz, 2014): (1) Aufbauend auf bereits definierten Kompetenzen wird ein Kompetenzmodell aufgestellt, das sowohl theoretisch als auch empirisch fundiert ist. (2) Dieses theoretische Modell wird nachfolgend in ein psychometrisches Modell überführt, das „zwischen Messoperation und Kompetenzmodell [...] vermittelt, d.h. [...] begründet, wie ein Messergebnis (z. B. Anzahl und Art der gelösten Aufgaben) im Sinne des Kompetenzmodells zu interpretieren ist“ (Klieme & Leutner, 2006, S. 877). Je nach Anzahl der im vorherigen Schritt identifizierten Konstrukte kann ein Messmodell ein- oder mehrdimensional sein, wobei aus pragmatischen Gründen oft auf ein eindimensionales Modell zurückgegriffen wird (Hartig & Höhler, 2010). (3) Zur Entwicklung des Testinstruments werden die Konstrukte durch Testaufgaben operationalisiert. (4) Abschließend wird überprüft, ob das postulierte theoretische Modell durch die Ergebnisse des Testinstruments bestätigt werden kann.

Aus Kompetenzstrukturmodellen lassen sich im allgemeinen Kompetenzentwicklungsmodelle ableiten, jedoch betont S. Weinert (2007), dass dies nicht in allen Kompetenzbereichen möglich ist und daher auf die jeweiligen Besonderheiten des Kompetenzerwerbs Rücksicht genommen werden muss.

### 2.2.2 Kompetenzentwicklungsmodelle

Bei Kompetenzmessungen im Bildungsbereich ist von Interesse, welche fachbezogenen Leistungsanforderungen bzw. Kriterien, die auf eine bestimmte Weise hierarchisch angeordnet sind (Nickolaus & Seeber, 2013), Lernende erfüllen. Die ermittelten Testwerte müssen demnach kriteriumsorientiert interpretiert werden (Klauer, 1987; Goldhammer & Hartig, 2008). Da eine inhaltliche Beschreibung jedes einzelnen Punktes auf einer kontinuierlichen Skala von Testwerten nicht möglich ist, schlagen zum Beispiel Beaton und Allen (1992) das sogenannte *Scale anchoring* vor: „Scale anchoring involves a statistical component that identifies items that discriminate between successive points on the proficiency scale using specific item characteristics“ (S. 191). Es werden repräsentative Itemgruppen ausgewählt, anhand derer eine inhaltliche Beschreibung der Niveaus stattfindet.

Über solche und ähnliche Verfahren gewonnene Abschnitte werden als Kompetenzniveaus oder Kompetenzstufen<sup>4</sup> bezeichnet, und für diese können im Anschluss kriteriumsorientierte Beschreibungen der Lernerkompetenzen formuliert werden (Hartig, 2007). Die Formulierung von Kompetenzniveaus kann generell post hoc oder a priori erfolgen. Während bei TIMSS-II (Baumert et al., 1997), TIMSS-III (Baumert et al., 2000) und PISA (Baumert, Artelt, Klieme & Stanat, 2001) die Kompetenzniveaus anhand der empirischen Testdaten und der jeweiligen Anforderungsmerkmale der verwendeten Aufgaben und somit nach der Testung gebildet wurden (post-hoc), bauen die Kompetenzniveaus der Large-Scale Studien DESI<sup>5</sup> (Beck & Klieme, 2003) und IGLU<sup>6</sup> (Bos et al., 2003) auf zuvor formulierten Kompetenzmodellen auf (a priori). Die anschließende Bestimmung der Schwellen zwischen diesen Niveaus stellt eine große Herausforderung dar und kann über unterschiedliche Methoden erreicht werden (Hartig & Klieme, 2006). Dass eine solche Bestimmung von Schwellen komplex ist, zeigt sich bei der Entwicklung der Kompetenzniveaus in der DESI-Studie (vgl. Hartig, 2007). Die Formulierung der Kompetenzniveaus wird in diesem Ansatz nach empirischen Kriterien vorgenommen. Dies wird in drei Schritten verwirklicht: Zuerst werden für alle Aufgaben anhand einer Rasch-Analyse die Schwierigkeitsschätzer ermittelt. Danach werden den Aufgaben schwierigkeitsgenerierende Merkmale zugeordnet und schließlich die Schwierigkeitsschätzer mittels einer linearen Regressionsanalyse auf diese Merkmale zurückgeführt.

---

<sup>4</sup>Die Bezeichnung der Abschnitte als Stufen oder Niveaus wird in der Literatur diskutiert. So nutzen Studien im Zusammenhang mit PISA (Programme for International Student Assessment) und TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) häufig den Begriff Stufe als Übersetzung des englischen Begriffs „level“ (Hartig & Klieme, 2006; Hartig, 2007). A. Helmke und Hosenfeld (2004) weisen jedoch darauf hin, dass im deutschen Sprachgebrauch mit dem Begriff *Stufe* die „Vorstellung von *qualitativ* unterschiedlichen Zuständen“ (S. 63) einhergeht. So spricht man in der Entwicklungspsychologie von Stufen im Zusammenhang mit dem „plötzlichen“ Verständnis von Konzepten, wie zum Beispiel im Piagetschen Modell der kognitiven Entwicklung die Erkenntnis der Objektpermanenz.

<sup>5</sup>Deutsch Englisch Schülerleistungen International

<sup>6</sup>Internationale Grundschul-Lese-Untersuchung

## 2.3 Kompetenzmessung

Ein integraler Bestandteil aller Bemühungen, Kompetenzen zu modellieren, bildet die Messung und damit die empirische Überprüfung zuvor postulierter Modelle durch entsprechende Testaufgaben. Da „Kompetenz [...] die Verbindung zwischen Wissen und Können her[stellt] und [...] als Befähigung zur Bewältigung unterschiedlicher Situationen zu sehen [ist]“ (Klieme, 2004, S. 13), ist auch das Spektrum möglicher Aufgabentypen sehr breit: schriftliche Tests, Gruppenaufgaben, Computersimulationen, Arbeitsproben, Interviews, Kurzvorträge oder Gruppendiskussionen (Klieme, 2004; Frey, 2006). Paper-Pencil-Tests sind dabei die verbreitetste Form der Kompetenztests (Frey & Hartig, 2013). Jedoch ist diese Art von Tests nicht für die Messung aller Kompetenzen geeignet. Frey und Hartig (2013) benennen drei Kompetenzbereiche, in denen sich computerbasierte Tests als vorteilhaft gegenüber Paper-Pencil-Tests erweisen: „a) Kompetenzen, bei denen eine zeitkritische Ausführung komplexer Interaktionen zentral ist, b) komplexen Kompetenzstrukturen sowie c) Kompetenzen, deren Ausübung an einen Computer gebunden ist“ (S. 53). Im Bereich der komplexen Kompetenzstrukturen, die „in der Regel kontextspezifisch und handlungsbezogen definiert [sind] und [...] zumeist auf differenzierten theoretischen Konzeptionen [basieren], [...] [die für eine] reliable und valide vollständige Abbildung [...] in der Regel eine umfangreiche empirische Datenbasis“ (Frey & Hartig, 2013, S. 54–55) erfordern, werden auch Videostudien genutzt, um diese Kompetenzen zu messen. So beschreiben Seidel, Prenzel, Rimmele, Dalehefte und Herweg (2006) als ein Ergebnis der IPN Videostudie, dass mit Fragebogenverfahren die Kompetenzen von Lehrpersonen nicht zuverlässig erhoben werden können. Beispiele für den Einsatz von Videostudien zur Erfassung von komplexen Konstrukten im Zusammenhang mit Kompetenzen sind die TIMSS-Videostudie (Stigler & Hiebert, 1997), die DESI-Videostudie (T. Helmke et al., 2008) und die IPN Videostudie (Seidel et al., 2006).

Kunter und Klusmann (2010) machen im Zusammenhang mit Kompetenzmessung auf den Unterschied zwischen objektiven und subjektiven Erfassungsmethoden aufmerksam. Die Nutzung der einen oder anderen Methode kann zu unterschiedlichen Gültigkeitsbereichen führen. Frey (2006) stellt heraus, dass hauptsächlich auf die subjektive Erfassung in Form von Selbstberichten zu-

rückgegriffen wird und nur selten objektive Verfahren genutzt werden. Während objektive Verfahren häufig den Charakter von Tests haben und somit im Zusammenhang mit der Kompetenzmessung von Lernern im schulischen und universitären Bereich als gewohntes Format genutzt werden können, sind sie im Zusammenhang mit der Kompetenzmessung von Lehrenden und im Kontext von Fort- und Weiterbildungen nicht im gleichen Maße einsetzbar. Laut Frey (2006) wird hier eher mit Selbstberichten gearbeitet.

## 2.4 Kompetenzmodellierung und Kompetenzmessung im schulischen Kontext

Nachdem in den vorherigen Abschnitten die theoretischen Grundlagen und Methoden zur Kompetenzmodellierung und -messung wiedergegeben wurden, folgt nun die Beschreibung der konkreten Umsetzung im schulischen Kontext. Die Forschungsarbeiten in diesem Bereich stellen zudem die Grundlage für die Ansätze dar, Kompetenzmodellierung und Kompetenzmessung im Hochschulbereich zu etablieren.

Im schulischen Kontext haben die Themen *Kompetenzen* und *Kompetenzmessung* insbesondere durch die Large-Scale Erhebungen wie PISA (Baumert et al., 2001), TIMSS (Baumert et al., 1997, 2000; Köller, Baumert & Bos, 2001) und PIRLS<sup>7</sup> (Bos et al., 2003) große Bedeutung erlangt und sind in den Fokus der Öffentlichkeit gerückt. Zusätzlich zu diesen internationalen Studien wurden in Deutschland mit VERA<sup>8</sup> (A. Helmke & Hosenfeld, 2003) Vergleichsarbeiten in der Grundschule und der Mittelstufe eingeführt, um Lehrkräften „einen Überblick darüber zu geben, auf welchem Stand sich [i]hre Klasse hinsichtlich des Erreichens der Bildungsstandards befindet“ (VERA-Projektgruppe am Zentrum für Empirische Pädagogische Forschung, 2014).

---

<sup>7</sup>Progress in International Reading Literacy Study, in Deutschland: IGLU.

<sup>8</sup>Vergleichsarbeiten

## 2.4.1 Bildungsstandards

Die Ergebnisse der Dritten Internationalen Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie (TIMSS) 1997 und später die Ergebnisse der ersten PISA-Teilstudie 2001, die in Deutschland zum sogenannten „PISA-Schock“ (vgl. z. B. Seitz, 2003; Renkl, 2012) führten, stellten die positive Wahrnehmung des deutschen Schulsystems durch die Bildungspolitik in Frage und mündeten in Forderungen nach weiteren Evaluationsmaßnahmen und einer umfassenden Umstrukturierung der schulischen Wissensvermittlung. Ebenso wurde die Modellierung und Messung von Kompetenzen im primären und sekundären Bildungsbereich in den Fokus der Forschung gerückt (Renkl, 2012). Im Zuge dieser Kompetenzorientierung wurde in den neu formulierten Bildungsstandards für die Primar- und Sekundarstufe, welche als Leistungs- und Inhaltsstandards die Outcome- bzw. Outputseite des Lernens fokussieren (vgl. Kultusministerkonferenz, 2005a), die Vermittlung von Kompetenzen als zentrales Ziel schulischer und beruflicher Bildung festgelegt (Köller, 2010). Das Fach Mathematik steht dabei besonders im Fokus<sup>9</sup>: Für den Primarbereich (Kultusministerkonferenz, 2004), für den mittleren Schulabschluss (Kultusministerkonferenz, 2003) und für die allgemeine Hochschulreife (Kultusministerkonferenz, 2012) existieren Bildungsstandards.

### 2.4.1.1 Bildungsstandards für Mathematik in der Primar- und Sekundarstufe

Die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich beschreiben die allgemeinen mathematischen und die inhaltsbezogenen Kompetenzen (vgl. Abbildung 2.2), die von Schülerinnen und Schülern am Ende der 4. Klasse erreicht werden sollen (vgl. Kultusministerkonferenz, 2004; Walther, Selter & Neubrand, 2012). Diesen beiden Kompetenzdimensionen wird noch eine dritte Dimension, die der Anforderungsbereiche, hinzugefügt. „Die Anforderungsbereiche erlauben erfahrungsbasierte Einschätzungen von Aufgaben hinsichtlich Angemessenheit, Qualität und Komplexität der von Schülerinnen und Schü-

---

<sup>9</sup>Lediglich für das Fach Deutsch wurden ebenfalls für alle drei Schulstufen Bildungsstandards verabschiedet.

lern zu erbringenden kognitiven Leistungen“ (Walther, Selter & Neubrand, 2012, S. 21). Die inhaltsbezogenen Kompetenzen beziehen sich dabei auf die Leitideen Zahlen und Operationen, Raum und Form, Muster und Strukturen, Größen und Messen sowie Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit. Die drei Dimensionen lassen sich auf vorherige Ansätze der Modellierung mathematischer Kompetenzen, wie zum Beispiel bei PISA 2003 (OECD, 2003), zurückführen. Dort werden die drei Dimensionen mit „Competencies“, „Overarching Ideas“ und „Competency Clusters“ bezeichnet.

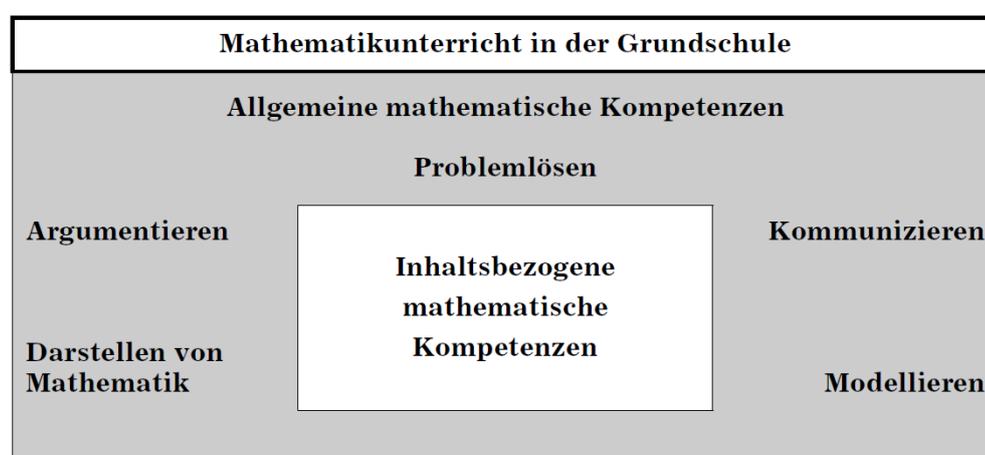


Abbildung 2.2: Mathematische Kompetenzen in den Bildungsstandards für den Primarbereich (KMK, 2005, S. 7).

Auf eine vergleichbare Weise werden in den Bildungsstandards für den Sekundarbereich die zu fördernden Kompetenzen für die gymnasiale Oberstufe beschrieben (vgl. Abbildung 2.3). Jedoch wurden die Leitideen modifiziert: Algorithmus und Zahl, Messen, Raum und Form, Funktionaler Zusammenhang sowie Daten und Zufall (Blum, Drücke-Noe, Hartung & Köller, 2006). Über die Modellierung mathematischer Kompetenz hinaus thematisieren die Bildungsstandards Mathematik die drei Grunderfahrungen nach Winter (H. Winter, 1995) und versuchen die dort formulierten „allgemeinen Bildungsziele in Form weit gefächerter Kompetenzanforderungen zu erfassen und zu konkretisieren“ (Blum, 2006, S. 21).

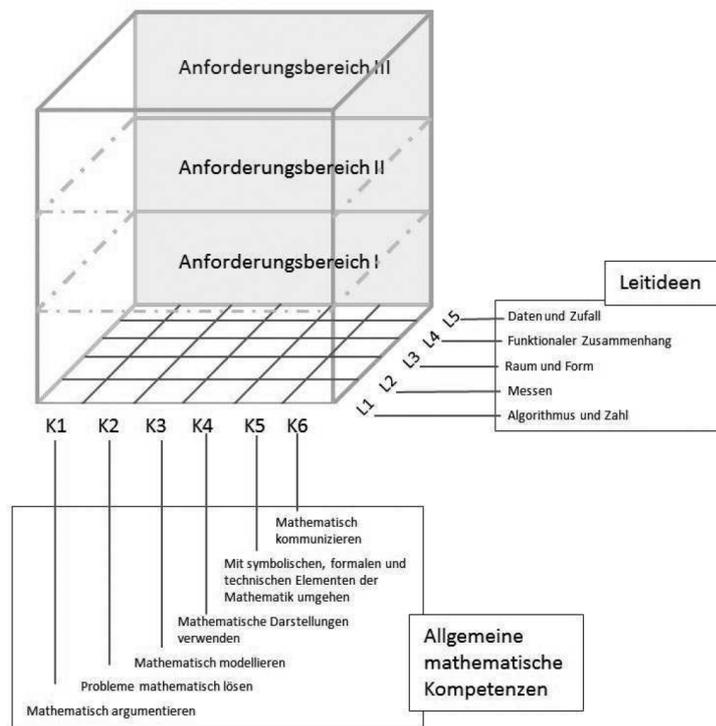


Abbildung 2.3: Mathematische Kompetenzen in den Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife (KMK, 2012, S. 12).

#### 2.4.1.2 Bildungsstandards für Physik in der Sekundarstufe

Ähnlich den Bildungsstandards im Fach Mathematik kann aufbauend auf den Standards im Fach Physik ein dreidimensionales Kompetenzmodell postuliert werden. Dieses unterscheidet zwischen der Prozessdimension „Kompetenzbereich“, der Inhaltsdimension „Basiskonzepte“ und der Anspruchsdimension „Anforderungsbereich“ (vgl. Abbildung 2.4). Die Kompetenzbereiche gliedern sich in Fachwissen, Erkenntnisgewinnung, Kommunikation und Bewertung und sind damit allgemeiner gefasst als die Kompetenzbereiche in den Bildungsstandards für das Fach Mathematik. Die Basiskonzepte in der Physik entsprechen den Leitideen in der Mathematik. Die Anforderungsbereiche sind ähnlich zu denen im Fach Mathematik in aufsteigender Schwierigkeit von der Wiedergabe über die Anwendung bis hin zum Transfer des Gelernten angeordnet. Dabei machen die Bildungsstandards jedoch keine Aussagen zu den zu behandelnden fachlichen Schwerpunkten (Deutsche Physikalische Gesellschaft, 2016).

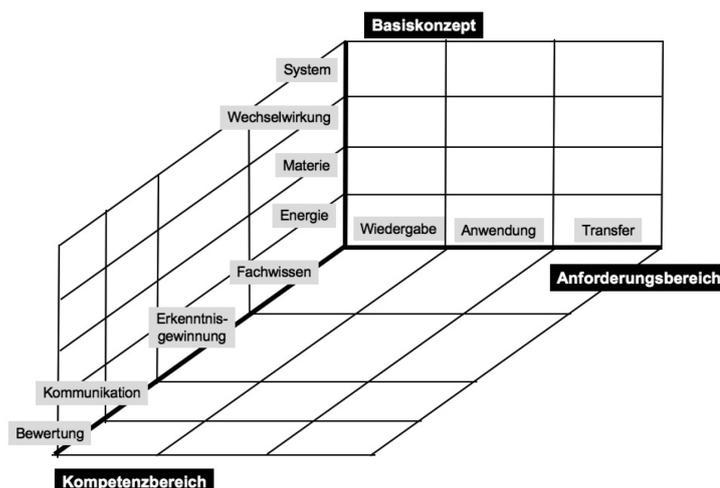


Abbildung 2.4: Physikalische Kompetenzen in den Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss (Schecker & Parchmann, 2006, S. 55).

### 2.4.1.3 Problemlösen in den Bildungsstandards

In den Bildungsstandards für das Fach Mathematik bildet die Kompetenz Probleme mathematisch zu lösen eine der sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler von der Primarstufe bis zur allgemeinen Hochschulreife erlernen sollen (Walther, van den Heuvel-Panhuizen & Granzer, Dietlinde, Köller, Olaf, 2012; Blum et al., 2006). In der Physik wird die Kompetenz, Probleme zu lösen nicht explizit genannt, jedoch zielen die einzelnen Kompetenzbereiche stets auf das Lösen physikalischer Probleme: „Als strukturierter Wissensstand bildet das Fachwissen die Basis zur Bearbeitung physikalischer Probleme und Aufgaben“ (Kultusministerkonferenz, 2005b, S. 8). Im Kernlehrplan für das Fach Physik in der Sekundarstufe II des Landes Nordrhein-Westfalen wird dieser Anspruch noch deutlicher: „Sie [eine vertiefte physikalisch-naturwissenschaftliche Bildung] umfasst Fähigkeiten, konzeptuelles Wissen und methodische Fertigkeiten anzuwenden, um spezifische Fragestellungen, Probleme und Problemlösungen zu erkennen, Phänomene mit theoretischen und experimentellen Methoden systematisch zu untersuchen“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013b, S. 11). Somit liegt sowohl in den Bildungsstandards für das Fach Mathematik als auch für das Fach Physik ein wesentlicher Schwerpunkt auf dem Erwerb von Problemlösekompetenzen (Kultusministerkonferenz, 2004, 2005b,

2012) und bildet einen wichtigen Bestandteil der schulischen Ausbildung in den beiden Unterrichtsfächern.

## 2.4.2 Kompetenzmessung in der Schule

Wie bereits zu Beginn dieses Kapitels beschrieben, werden im schulischen Kontext Kompetenzen durch verschiedene Large-Scale Erhebungen international vergleichbar gemessen.<sup>10</sup> Die bekannteste dieser Erhebungen ist die Erhebung im Rahmen des Programme for International Student Assessment der OECD (PISA), die seit 2000 alle drei Jahre durchgeführt wird (Baumert et al., 2001; Prenzel, 2005, 2007; Prenzel, Sälzer, Klieme & Köller, 2013). Diese soll hier als Prototyp stellvertretend für andere Large-Scale Erhebungen (z. B. TIMSS, IGLU) detaillierter vorgestellt werden.

Bei der Testung werden international vergleichbare Domänen und Schulfächer untersucht, die „aussagekräftig mit Testverfahren erfasst und zuverlässig bewertet werden können [...]. Außerdem sollten sie möglichst auch eine generalisierbare Einschätzung über die Qualität der Schulen zulassen und [...] sollten [...] für das Leben nach der Schule relevant sein“ (Prenzel et al., 2013, S. 14). Aus diesem Grund war neben den Kompetenzen in Mathematik und in den Naturwissenschaften auch die Lesekompetenz in allen bisherigen Erhebungen Untersuchungsgegenstand. Dabei orientiert sich der Kompetenzbegriff in den PISA Untersuchungen an F. E. Weinert (1999) und wird bei Klieme, Funke, Leutner, Reimann und Wirth (2001) wie folgt als Arbeitsdefinition beschrieben: „Kompetenzen sind Systeme aus spezifischen, prinzipiell erlernbaren Fertigkeiten, Kenntnissen und megakognitivem Wissen, die es erlauben, eine Klasse von Anforderungen in bestimmten Alltags-, Schul- oder Arbeitsumgebungen zu bewältigen“ (S. 182). Die Kompetenzmodelle wurden als post-hoc Kompetenzniveaumodelle (vgl. 2.2.2) mit fünf bis sechs Niveaus für die Bereiche Mathematik, Naturwissenschaften und Lesen konzipiert, die sich aus den jeweiligen psychometrischen Testmodellen ergaben (Prenzel, 2005). Die Aus-

---

<sup>10</sup>In diesem Abschnitt soll nicht auf die Möglichkeit, durch Schulnoten Kompetenzen zu messen, eingegangen werden. Zwar sind Schulnoten häufig ein sehr guter Prädiktor für das Vorwissen, jedoch steht im Rahmen dieser Arbeit das Vergeben von Schulnoten und die damit zusammenhängende Diagnose von Schülerleistungen durch die Lehrperson nicht im Vordergrund, im Gegensatz zur Kompetenzmessung durch Kompetenztests.

wertung der PISA-Daten, sowohl international als auch national für Erweiterungsstichproben wie dem Ländervergleich bei der Erhebung 2003, wurde mit Methoden der Item-Response Theory durchgeführt (vgl. Adams & Wu, 2002; OECD, 2005; Prenzel, 2005). Damit ist es mit Hilfe der Kompetenzwerte möglich, diejenigen Aufgaben zu bestimmen, welche von den jeweiligen Schülerinnen und Schülern mit hoher Wahrscheinlichkeit gelöst werden können (Prenzel, 2007). Wie in Abschnitt 2.2.2 beschrieben, können die Kompetenzskalen daran anschließend in Kompetenzniveaus unterteilt und inhaltlich beschrieben werden. Mit diesen Skalierungen sind unterschiedliche Vergleiche möglich, so können verschiedene Länder und somit Bildungssysteme verglichen werden, es können aber auch Entwicklungen in den einzelnen (Bundes-)Ländern über die verschiedenen Erhebungen hinweg aufgezeigt werden (Prenzel, 2005, 2007).

Wichtig bei der Interpretation der Ergebnisse ist die Einschränkung, dass die PISA Ergebnisse nur zur „Beurteilung der Qualität von Bildungssystemen und nicht zu einer Diagnostik der Kompetenzen von einzelnen Jugendlichen“ (Prenzel, 2007, S. 372) geeignet sind.

Auf vergleichbare Weise werden auch andere Large-Scale Erhebungen wie zum Beispiel TIMSS, IGLU oder auch die bundesweiten Vergleichsarbeiten VERA durchgeführt und ausgewertet. Während jedoch erstgenannte auf die Überprüfung der Bildungssysteme abzielen (Prenzel, 2007; Kultusministerkonferenz, 2006), lassen die Vergleichsarbeiten Rückmeldungen auf Ebene einzelner Schülerinnen und Schüler zu (A. Helmke & Hosenfeld, 2004; Kultusministerkonferenz, 2006). Es zeigt sich also, dass die Kompetenzmodellierung und Kompetenzmessung im schulischen Bereich sehr unterschiedliche Ziele verfolgt, jedoch zumeist auf ähnliche Verfahren der Erhebung und Auswertung zurückgreift. Diese Vorgehensweisen haben sich über die Jahre bewährt und können somit methodische Grundlagen für Ansätze zur Kompetenzmodellierung und Kompetenzmessung im Hochschulbereich bilden.

## 2.5 Kompetenzmodellierung und Kompetenzmessung in der Hochschule

Gegenüber dem sekundären Bildungsbereich gibt es erst wenige Studien zum Thema Kompetenzmodellierung und -messung in der Hochschule. Dieser Bereich wurde von Seiten der empirischen Bildungsforschung bisher wenig untersucht (Lenzen, Krüger & Wulf, 2008) und empirische Arbeiten stellen immer noch eine Ausnahme dar (Zlatkin-Troitschanskaia & Kuhn, 2010). Daraus resultiert unter anderem auch ein Fehlen „an Konzepten, die sich paradigmatisch am Kompetenzkonzept orientieren“ (Heiner et al., 2013, S. 99). Die Gründe für dieses Defizit an empirischer Hochschulforschung sind vielfältig, unter anderem sehen Lenzen et al. (2008) das im „19. Jahrhundert entstandene Fehlverständnis, demzufolge das Studium der Wissenschaften als solches bildend sei und die Lehrenden folglich keiner spezifischen Ausbildung bedürfen“ (S. 513) als ursächlich an. Ein weiterer Grund liegt in der fehlenden Etablierung von Forschungsinstituten für Hochschulforschung. Zusätzlich stellen die hohen Ansprüche an die Forschungsmethodik bei der Modellierung und Messung akademisch vermittelter Kompetenzen eine hohe Herausforderung für die Forschung im tertiären Bereich dar (Blömeke & Zlatkin-Troitschanskaia, 2013). So konstatieren Zlatkin-Troitschanskaia und Kuhn (2010) in ihrem systematischen Überblick über die Hochschulforschung, dass im nationalen Hochschulbereich keine Forschungsansätze existierten, „die den Kriterien nationaler und internationaler Vergleichsstudien aus dem Schulbereich (wie z. B. VERA oder PISA) entsprechen“ (S. 3). Lediglich im Bereich der Lehrerbildung konnten mit COACTIV (Baumert & Kunter, 2006), COACTIV-R (Brunner et al., 2006) und TEDS-LT (Blömeke et al., 2011) Projekte identifiziert werden, die eine entsprechende Qualität bei der objektiven Messung von Kompetenzen aufwiesen.

Um diese Forschungslücke zu schließen, wurde durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung das Forschungsprogramm „Hochschulforschung“ gestartet (Blömeke & Zlatkin-Troitschanskaia, 2013). Nach den beiden Förderlinien „Hochschulforschung als Beitrag zur Professionalisierung der Hochschullehre“ und „Wissenschaftsökonomie“ (vgl. Blömeke & Zlatkin-Troitschanskaia, 2013) wurde als dritte Förderinitiative „Kompetenzmodellierung und Kompetenzerfassung im Hochschulsektor (KoKoHs)“ 2010 ausgeschrieben.

Durch die Projektlinie KoKoHs wurde in Deutschland eine breite empirische Basis für die Kompetenzmodellierung und -messung im Hochschulbereich gelegt (vgl. Abschnitt 5.1). Neben Projekten aus den Bildungswissenschaften, den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, der Lehrerbildung in den MINT-Fächern und zu Forschungskompetenzen und Selbstregulation wurden besonders auch die Ingenieurwissenschaften in den Fokus genommen, in denen in drei Projekten die Modellierung, Erfassung und Vermittlung von Kompetenzen untersucht wurden (Blömeke & Zlatkin-Troitschanskaia, 2013).

## 2.6 Kompetenzmodellierung in der Ingenieurausbildung

Arbeiten zur Kompetenzmodellierung im Ingenieurstudium sind in Deutschland bisher eher selten. Die Situation stellte sich vor ein paar Jahren noch so dar, dass weder für die Fachkompetenz in ingenieurwissenschaftlichen Studiengänge noch für die Mathematik der Ingenieurwissenschaften bisher Kompetenzmodellierungen und Instrumente der Kompetenzerfassung vorlagen (Heiner et al., 2013). So beschränkte sich die Situation in der Mathematik der Ingenieurwissenschaften auf die Beschreibung von Lernzielen und Lernzieltaxonomien (vgl. Mustoe & Lawson, 2002). Durch die Forschungsarbeiten im Projekt KoKoHs (vgl. Abschnitt 5.1) sind unterschiedliche Ansätze hinzugekommen. Die Veranstaltungen zur Mathematik und Physik liegen insbesondere in den ersten Semestern des Ingenieurstudiums und finden somit hauptsächlich in der Phase des Übergangs von der Schule zur Hochschule statt. Aus diesem Grund sind die Kompetenzmodelle, die sich aus den Bildungsstandards für die beiden Fächer Mathematik und Physik (Blum et al., 2006; Kultusministerkonferenz, 2005b) ergeben, auch für die Studieneingangsphase von Bedeutung. Aufgrund der komplexen Struktur und Vielfältigkeit des Ingenieurstudiums (Maschinenbau, Bauingenieurwesen etc.) müssen sehr unterschiedliche Kompetenzfacetten untersucht werden. Daraus ergeben sich mehrere und teilweise komplexe Modelle zu verschiedenen Zeitpunkten des Studiums. Im Bereich der mathematischen Kompetenzen nutzen Neumann et al. (2015) ein eindimensionales Partial-Credit-Modell (vgl. Masters, 1982), um die Mathematikkompetenz von Ingenieurstudierenden zu Beginn des Studiums abzubilden. Dieses Modell be-

schreibt eine mathematische Kompetenz über alle drei getesteten Inhaltsbereiche (Algebra und mathematische Grundlagen, Analysis und Geometrie) und unterteilt diese nicht in drei einzelne Kompetenzen in den jeweiligen Inhaltsbereichen (wie im Falle eines dreidimensionalen Modells). In der Physik bzw. der Technischen Mechanik konnten Behrendt, Dammann, Stefanica, Markert und Nickolaus (2015) mit einem dreidimensionalen Modell (Statik, Dynamik und Basisideen) die beste Passung für die Beschreibung der Kompetenzen zu Beginn des Studiums erreichen.

In der fortgeschrittenen Bachelorphase, in der zum Beispiel deutlicher zwischen Kompetenzen in der Statik und Dynamik unterschieden werden muss, zeigen sich komplexere Modelle als am besten passend (Dammann, Behrendt, Stefanica & Nickolaus, 2016; Musekamp, Spöttl, Mehrafza, Heine & Heene, 2014). Neben diesen quantitativen, auf IRT-Modellen basierenden Ansätzen zur Kompetenzmodellierung werden auch stärker qualitative Ansätze genutzt, um Kompetenzen, die bereits im schulischen Kontext erforscht sind, auch für das ingenieurwissenschaftliche Studium zu untersuchen. Hierzu zählen zum Beispiel die mathematischen Modellierungs- und Problemlösekompetenzen (Biehler, Kortemeyer & Schaper, 2015; Lehmann, Roesken-Winter & Schueler, 2015), die aufbauend auf Arbeiten aus dem schulischen Bereich (vgl. z. B. Blum & Leiß, 2007; Bruder & Collet, 2011) analysiert werden.

Bei vielen dieser Ansätze zeigt sich ein weiterer Aspekt, welcher die Kompetenzforschung an der Hochschule gegenüber der schulischen aufwendiger gestaltet. So berichten sowohl Dammann et al. (2016) und Musekamp et al. (2014) auf quantitativer Ebene, als auch Lehmann et al. (2015) und Biehler et al. (2015) auf qualitativer Ebene die enge Verknüpfung mathematischer und physikalischer Kompetenzen, die gegenüber der Schule sehr viel stärker bei den Aufgabenbearbeitungen miteinander interagieren. Dies stimmt mit der Sichtweise von S. Weinert (2007) überein, dass „Kompetenzen, die in einem Bildungsabschnitt [...] bereichsspezifisch erworben werden, [...] oftmals in den nächsten Bildungsabschnitt [...] als ‚bereichsübergreifende Grundkompetenzen‘ ein[gehen]“ (S. 90).

## 2.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde gezeigt, dass in der Diskussion über den Begriff der „Kompetenz“, die in der empirischen Bildungs- und Sozialforschung geführt wird, unterschiedliche Wege verfolgt werden. Das Wissen um die verschiedenen Modellierungsmöglichkeiten aber auch die verschiedenen Definitionen von „Kompetenz“ führen zu differenzierten Methoden der Kompetenzmessung. Durch Weiterentwicklungen in der Methodik (Verschiebung von Papier- und Bleistift-Tests hin zu computer- bzw. videobasierten Testverfahren) können Kompetenzbereiche gemessen werden, die zuvor methodisch nicht erfasst werden konnten. An dieser Stelle zeigt sich die Bedeutung des Modells von Blömeke et al. (2015). Es integriert neben der dispositionellen Perspektive, in der überwiegend Wissen in Form von Papier- und Bleistift-Tests erhoben wird, auch das Handeln, das zentral für den Kompetenzbegriff ist, in Form der *situationsspezifischen Fähigkeiten* und setzt diese mit den *Dispositionen* in Zusammenhang.

In diesem Kapitel wurde auch gezeigt, dass im schulischen Bereich bereits zu vielen Kompetenzfacetten geforscht wurde und wird. Es wurde dargelegt, auf welchen Grundlagen eine Kompetenzforschung im tertiären Bildungsbereich aufbauen kann und muss. Diese kurze Darstellung zeigt die aktuell noch unbefriedigende Situation der Kompetenzforschung hinsichtlich der Forschung im Hochschulbereich im Allgemeinen und im Ingenieurbereich im Speziellen, der jedoch durch die Einrichtung des Förderprogramms KoKoHs und der damit verbundenen Forschung einen An Schub erhalten hat. Um Kompetenzen im Bereich des Ingenieurstudiums zu untersuchen, sind neben der methodischen Grundlage besonders die Inhalte in den Mathematik- und Physikveranstaltungen von Bedeutung. Diese werden im nächsten Kapitel vorgestellt.



# Kapitel 3

## Mathematik und Physik in der Ingenieurausbildung

In diesem Kapitel wird die spezifische Situation, in welcher diese Arbeit entstanden ist, dargestellt. So wurden in der vorliegenden Studie Bearbeitungen von mathematischen und physikalisch (-technischen) Aufgaben durch Studierende der Ingenieurwissenschaften im ersten Studienjahr untersucht. In Abschnitt 3.1 wird die Thematik der Übergänge im Bildungsbereich aufgegriffen, um die allgemeinen Bedingungen und Charakteristika des ersten Studienjahres für Studierende einordnen zu können. Anschließend werden Inhalte und Ausrichtung der Mathematikausbildung im Ingenieurstudium (3.2) und deren Entwicklung dargestellt. Um den Zusammenhang zwischen der Mathematik- und der Physikausbildung im Ingenieurstudium zu verdeutlichen, wird im folgenden Abschnitt (3.3) der Stellenwert der Verwendung von Mathematik in der Physik dargelegt. Die Präsentation der Physikausbildung im Ingenieurstudium (3.4) rundet das Kapitel ab.

## 3.1 Transitionen im Bildungsbereich mit Fokus auf der Mathematik

Transitionen<sup>1</sup> im Bildungssystem stellen die Lernenden vor hohe Anforderungen (Blömeke, 2016). Im Kontext der Mathematikausbildung wird in diesem Zusammenhang besonders der zunehmende Formalisierungs- und Abstraktionsgrad der Lerninhalte thematisiert (vgl. A. Fischer, Heinze & Wagner, 2009; Griese, 2016; Rach, 2014; Roppelt, 2009).

### 3.1.1 Transitionen vom Elementar- bis zum Sekundarbereich

Ein allgemeiner Blick auf Transitionen zeigt, dass bereits der Wechsel vom Kindergarten in das Schulsystem bei Kindern mit Problemen verbunden sein kann. So berichten Faust, Kratzmann und Wehner (2012), dass in unterschiedlichen Studien zwischen einem Drittel und der Hälfte der Kinder Übergangsprobleme haben. Diese lassen sich unter anderem auf die „Anpassung an die affektiv-neutraleren, universalistischen und an Leistung orientierten schulischen Interaktionen“ (Faust et al., 2012, S. 198) zurückführen. Um diesen Problemen entgegenzuwirken, ist die Berücksichtigung der Anschlüsse und Rückbezüge auf das Mathematiklernen zwischen Kindergarten und Grundschule essentiell (vgl. Schuler, Pelzer, Wittkowski & Wittmann, 2015) und wird als notwendig erachtet, um einen individuellen Übergang zu ermöglichen (Schuler, Engler, Pelzer & Wittmann, 2013). Dafür sind neben institutionellen auch außerinstitutionelle und individuelle Bedingungen entscheidend (Hellmich, 2007). Dazu zählen auf institutioneller Ebene unter anderem „Erziehungs- sowie Lehr- und Lernprozesse, die einerseits von Frühpädagoginnen [...] und andererseits von Lehrerinnen [...] initiiert, begleitet und unterstützt werden“ (Hellmich, 2007, S. 2–3). Zu den außerinstitutionellen Bedingungen zählen zum Beispiel der sozioökonomische Status des Elternhauses sowie das Bildungsniveau der Eltern.

---

<sup>1</sup>Der Begriff Transition dient der Abgrenzung des umgangssprachlichen Begriffs „Übergang“ vom wissenschaftlichen Konzept und betont die spezifische theoretische Sichtweise (Kluczniok & Roßbach, 2008). Welzer (1993) definiert den Begriff wie folgt: „Transitionen bezeichnen demnach sozial prozessierte, verdichtete und akzelerierte Phasen in einem in permanentem Wandel befindlichen Lebenslauf“ (S. 37).

Unter den individuellen Bedingungen werden schließlich diejenigen gefasst, „die entweder kognitive, motivationale, affektive oder zum Beispiel soziale Faktoren bei Lehr-Lernprozessen betreffen“ (Hellmich, 2007, S. 4).

Mathematische Kompetenzen werden bereits in frühen Jahren von Kindern erworben (Krajewski, Grüßing & Peter-Koop, 2009; Grüßing, 2009). Für diese Zeit wird eine Kompetenzstruktur angenommen, die sich aus vier (Ehmke et al., 2009) bis fünf (Clements & Sarama, 2007) Inhaltsbereichen sowie kognitiven mathematischen Prozessen zusammensetzt. Zudem wird mehrfach darauf hingewiesen, dass diese frühe Kompetenzentwicklung für den späteren Bildungsweg von entscheidender Wichtigkeit ist (z. B. Mengen-Zahlen Kompetenzen: Krajewski & Schneider, 2006; Zählfähigkeiten: Hasemann, 2001). Für das Fach Mathematik existieren, im Gegensatz zum Primar- und Sekundarbereich, für den Elementarbereich keine konkreten Bildungsstandards (Schuler et al., 2015), sondern lediglich Bildungs- und Orientierungspläne (Grüßing, 2009). Die anschließende Transition in den Primarbereich bedeutet eine Formalisierung und Systematisierung der zuvor elementaren, an die reale Welt anknüpfenden mathematischen Konzepte, wie zum Beispiel Hinzuzählen und Verteilen, hin zu arithmetischen Operationen, die von konkreten Situationen abstrahieren (Clements & Sarama, 2007; Reiss, 2009).

In der Primarstufe wird die Kompetenzorientierung durch die Bildungsstandards festgeschrieben und charakterisiert (Kultusministerkonferenz, 2004) (vgl. auch Abschnitt 2.4.1.1). Während der vierjährigen<sup>2</sup> Grundschulzeit entwickelt sich die mathematische Kompetenz über mehrere Niveaus. Reiss (2004) schlägt ein Modell mit fünf Niveaus<sup>3</sup> vor, das die Entwicklung mathematischer Kompetenzen von Kindern von „numerischen und begrifflichem Grundlagenwissen“ der verschiedenen Jahrgangsstufen hin zu „anspruchsvollem Problemlösen im mathematischen Kontext“ (S. 646–647) beschreibt. Zudem kommt dem Primarbereich die Aufgabe zu, grundlegende Kompetenzen für den weiteren Bildungsweg sicher und tragfähig aufzubauen (Reiss, 2009).

Während die Transition vom Elementar- in den Primarbereich für nahezu alle

---

<sup>2</sup>Reiss (2004) berücksichtigt hier nicht die in manchen Bundesländern bevorzugte sechsjährige Grundschulzeit (vgl. Land Berlin, 2004; Land Brandenburg, 2002).

<sup>3</sup>Reiss (2004) spricht in diesem Zusammenhang von Stufen. Aufgrund der Diskussion in Abschnitt 2.2.2 spreche ich von Niveaus.

Schülerinnen und Schüler mit dem Wechsel zur Grundschule gleich verläuft,<sup>4</sup> stellt die Transition in den Sekundarbereich aufgrund der Besonderheit des deutschen Bildungssystems eine Selektion und ein „besonders einschneidendes Lebensereignis dar“ (Ufer, 2009, S. 87, vgl. auch Reiss, 2009; Maaz, Hausen, McElvany & Baumert, 2006). Mit der Transition einher gehen für viele Schülerinnen und Schüler — deutlich stärker als bei der Transition vom Elementar- in den Primarbereich — Hindernisse in unterschiedlichen Bereichen: soziale Beziehungen zu Mitschülerinnen und Mitschülern sowie Lehrpersonen, organisatorische Strukturen, Wechsel vom Klassenlehrersystem hin zum Fachlehrersystem (Ufer, 2009). Die damit verbundenen notwendigen Anpassungsleistungen können als mögliche Ursachen von beobachteten Leistungsrückgängen nach der Transition angesehen werden. Zusätzlich findet ein Wandel der verwendeten Lehr- und Lernmethoden statt (McGee, Ward, Gibbons & Harlow, 2003). Ufer (2009) weist darauf hin, dass eine „Konzeptionierung mathematischer Kompetenzen am Übergang“ (S. 99), die sowohl über Schulstufen als auch über Schulformen hinweg generalisiert, fehlt. Für beide Transitionen (Elementar- zu Primarbereich und Primar- zu Sekundarbereich) wird von Autorinnen ein kohärenteres Mathematiklernen gefordert, um auftretenden Schwierigkeiten im Fach entgegenzuwirken (Krajewski et al., 2009; Grüßing, 2009; Ufer, 2009).

### 3.1.2 Transition von der Schule zur Hochschule

Nach den Transitionen vom Elementar- hin zum Sekundarbereich, welche bereits mit Hürden und Problemen verbunden sind, folgt für viele Lernende der Wechsel an eine Hochschule, welcher besonders in Studiengängen mit mathematischen Anteilen die Studierenden vor hohe Herausforderungen stellt (vgl. z. B. Blömeke, 2016; Frank & Roeckerath, 2016; Griese, 2016; Heimes, Leiser, Kneip & Pulham, 2016). Dies zeigt sich auch in den konstant hohen Abbruchzahlen in Studiengängen mit mathematischem Fachanteil gegenüber anderen Studiengängen (Heublein, Schmelzer, Sommer & Wank, 2008; Heublein, Richter, Schmelzer & Sommer, 2012). Als wichtige Gründe hierfür werden von den Studierenden Leistungsprobleme und mangelnde Motivation genannt (Heublein, Hutzsch, Schreiber, Sommer & Besuch, 2010). Hilgert (2016)

---

<sup>4</sup>Dies meint den Wechsel auf institutioneller Ebene. Auf individueller Ebene kann der Wechsel durch die verschiedenen Lehr-Lernprozesse unterschiedlich ausfallen.

stellt fest, dass bei Studierenden dann Schwierigkeiten auftreten, wenn folgende Schlüsselqualifikationen während des Studiums nicht erworben werden:

- Fähigkeit und Bereitschaft zur Selbstmotivation; Aufbringen von Interesse an vertieftem Fachverständnis,
- Fähigkeit und Bereitschaft zur Reflexion über den eigenen Lernfortschritt,
- Fähigkeit und Bereitschaft zu angemessenem Arbeitseinsatz und
- Fähigkeit und Bereitschaft zur Entwicklung eigenständiger Lösungsstrategien (S. 695).

Diese Liste verdeutlicht die hohen Anforderungen an die Studierenden beim Übergang, da zum einen der Erwerb dieser Qualifikationen an sich bereits anspruchsvoll ist und zum anderen dieser Erwerb in den ersten Semestern stattfinden muss, da in diesem Zeitraum die meisten Studienabbrüche stattfinden. Ein besonderes Merkmal der Transition zum Tertiärbereich ist, dass Mathematiklernen in der Schule und an der Hochschule sehr unterschiedlich wahrgenommen wird. Einige Autoren nutzen in diesem Zusammenhang den Begriff des „abstraction shock“, um die Verschiedenheit des Mathematiklernens zu beschreiben (Artigue, Batanero & Kent, 2007; Clark & Lovric, 2009; Tall, 2004). Die damit verbundene mathematikbezogene Selbstwirksamkeitserwartung stellt ein wichtiges Merkmal für den Studienerfolg dar (Blömeke, 2016); sie „wird definiert als die subjektive Gewissheit, neue und schwierige Anforderungssituationen auf Grund eigener Kompetenzen bewältigen zu können“ (Schwarzer & Jerusalem, 2002, S. 35). Bereits in der Schule ist Mathematik ein polarisierendes Fach (Henn & Kaiser, 2001), und in der Folge führen die hohen Anforderungen mathematischer Lehrveranstaltungen an der Hochschule zu vielen Studienabbrüchen. So geben 32% der Studienabbrecher in der Mathematik und in den Naturwissenschaften und 24% der Studienabbrecher in den Ingenieurwissenschaften Leistungsprobleme als ausschlaggebenden Grund für ihren Abbruch an (Heublein et al., 2010).

Die wesentlichen Unterschiede zwischen dem Lehren und Lernen von Mathematik in der Schule und an der Hochschule werden im folgenden Abschnitt detaillierter beschrieben.

### 3.1.3 Mathematik in Schule und Hochschule

Zwischen der Schul- und Hochschulmathematik zeigen sich deutliche Diskrepanzen, die sich durch die „veränderte Sicht auf die Disziplin Mathematik sowie durch eine neue Lernkultur“ (Reichersdorfer, Ufer, Lindmeier & Reiss, 2014, S. 38) erklären lassen. Als hauptsächliche Ursache für diese wird oft die unterschiedliche Denkweise gesehen. So fanden Grünwald, Kossow, Sauerbier und Klymchuk (2004) in einer Befragung von 63 Hochschuldozierenden aus 24 Ländern heraus, dass das „höhere Denkniveau in der Hochschulmathematik“ (Grünwald et al., 2004, S. 285) von 72% der Befragten als Hauptgrund für die Unterschiede zwischen Schul- und Hochschulmathematik angesehen wird. Dieser liegt dabei weit vor anderen, wie zum Beispiel „Die Art und Weise des Bestehens der Prüfung an der Schule (37%)“ oder den „Verschiedene[n] Wege[n] des Lehrens und des Lernens (30%)“ (Grünwald et al., 2004, S. 286–287). Differenzierter unterscheidet Rach (2014) den Lerngegenstand Mathematik in der Schule und an der Hochschule mit Hilfe verschiedener Charakteristika: Ziele der Mathematik, mathematische Denkprozesse, Begriffsbildung und Beweisen. Während die ersten drei Charakteristika auch für die Mathematikausbildung im Ingenieurstudium von Bedeutung sind, ist dies beim Beweisen weniger gegeben: „mathematics lectures for engineering students concentrate less on abstract concepts and proofs, and more on calculations and computations“ (Griese, 2016, S. 212). Aus diesem Grund werden die drei Charakteristika in Anlehnung an Rach (2014) hier kurz im Hinblick auf das Ingenieurstudium wiedergegeben:

Der Kontrast zwischen den *Zielen der Mathematik in Schule und Hochschule* wird bereits durch die grundlegend andere Ausrichtung der beiden Institutionen gesetzt. Das Schulfach Mathematik wird unter Berücksichtigung der drei Grunderfahrungen nach H. Winter (1995) unterrichtet (vgl. Kultusministerkonferenz, 2003) und liefert einen Beitrag zum Bildungsauftrag der Schule, in dem das Ziel der Allgemeinbildung im Vordergrund steht (Blömeke, 2016). Damit übereinstimmend lautet die Definition von *Mathematical literacy*, welche im Rahmen der PISA-Erhebungen genutzt wird:

Mathematical literacy is an individual’s capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgements and to use and engage with mathematics

in ways that meet the needs of that individual's life as a constructive, concerned and reflective citizen. (OECD, 2003, S. 24)

Eine zentrale Zielsetzung des Mathematikunterrichts liegt somit in der Befähigung, Mathematik im Alltag zu nutzen (vgl. auch Maaß, 2006). Dagegen dient die Hochschulmathematik dem Kennenlernen der Mathematik als Wissenschaft und der „Vermittlung von spezifischen Begrifflichkeiten, Theorien und Arbeitsweisen“ (Reichersdorfer et al., 2014, S. 38), welche für das jeweilige Studienfach notwendig sind (Alpers, 2016). Besonders im Ingenieurstudium dient die Mathematikausbildung nicht der Allgemeinbildung, sondern der Bewältigung von Anwendungsproblemen und der Befähigung zum „Aufstellen und Arbeiten in mathematischen Modellen[, die] wesentlicher Bestandteil zahlreicher Anwendungsfächer des Ingenieurstudiums“ (Alpers, 2016, S. 651) sind.

Die *mathematischen Denkprozesse* unterscheidet Rach (2014) in Anlehnung an Tall (2008) in *conceptual-embodied world* bzw. *proceptual-symbolic world* für den Schulkontext sowie in *axiomatic-formal world* für den Hochschulkontext. Axiomatik und Formalisierung, die seit Hilbert die Hochschulmathematik charakterisieren, sind im schulischen Kontext nur von geringer Bedeutung (A. Fischer et al., 2009). Während die ersten beiden Welten nach Tall (2008) ihren Ursprung in der realen Welt haben, kennzeichnen formale Definitionen und Beweise den Hochschulbereich (Tall, 2008). Reichersdorfer et al. (2014) sprechen in Anlehnung an Heintz (2000) im schulischen Bereich von einer inhaltlichen Axiomatik, in welcher Axiome „Eigenschaften von bekannten Begriffen [sind], die allgemein als korrekt angesehen werden“ (S. 38–39) bzw. im Hochschulbereich von einer formalen Axiomatik, in der „Begriffe vollständig durch die in Axiomen festgelegten Eigenschaften bestimmt“ (S. 39) sind. Zudem orientiert sich das Mathematiklernen in der Schule nicht an einer formalen Axiomatik und dem deduktiven Aufbau, sondern vielmehr an pädagogisch-psychologischen Lernvoraussetzungen (Freudenthal, 1979).

Das dritte von Rach (2014) beschriebene und für die Mathematikausbildung im Ingenieurstudium wichtige Charakteristikum stellt die unterschiedliche *Begriffsentwicklung in Schule und Hochschule* dar. In der Schule dominiert „die ontologische Bindung an die Realität [...]. Damit geht die Schulmathematik kaum über das begriffliche Niveau und den Wissensstand des 19. Jahrhunderts hinaus“ (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 16). An der Hochschule werden dagegen

moderne mathematische Theorien untersucht, „die Phänomene der mentalen Welt, dargestellt als abstrakte Mengen mit spezifischen Struktureigenschaften, organisieren“ (Hefendehl-Hebeker, 2016, S. 16). Rach (2014) verweist in diesen Zusammenhang auf die von Tall und Vinner (1981) eingeführten Konzepte *concept image* und *concept definition*.

Das *concept image* stellt die *cognitive structure* zu einem bestimmten mathematischen Konzept dar, die sich bei jeder Person individuell entwickelt. Die *cognitive structure* besteht aus den *mental pictures*, den mit dem Konzept verknüpften Eigenschaften und Prozessen und den individuellen Erfahrungen (Tall & Vinner, 1981; Vinner, 1983). Die *mental pictures* werden dabei wie folgt verstanden: „P’s [the person] mental picture of C [the concept] is the set of all pictures that have ever been associated with C in P’s mind“ (Vinner, 1983, S. 293), wobei die *pictures* jegliche visuelle Repräsentation beinhalten. Die *concept definition* beschreibt Vinner (1983) folgendermaßen: „By ‘concept definition’ we mean here a verbal definition that accurately explains the concept in a non-circular way“ (S. 293) dar. Beide Konzepte sind keine fixen Strukturen, sondern können sich über die Zeit ändern. Während das *concept image* bereits aufgrund seiner Beschaffenheit – die Erfahrungen der jeweiligen Person mit dem Konzept bilden einen Teil des *concept image* – einer zeitlichen Veränderung unterliegt, ist dies auch bei der *concept definition* möglich. Diese kann sich zu einer *personal concept definition* entwickeln: „In this way a *personal concept definition* can differ from a *formal concept definition*, the latter being a concept definition which is accepted by the mathematical community“ (Tall & Vinner, 1981, S. 152). In dieser individualisierten Form stellt die *personal concept definition* einen Teil des *concept image* dar (Tall & Vinner, 1981). Die Ausbildung des *concept image* wird in besonderer Weise auch durch die Lehrenden beeinflusst (Vinner, 1983; Bingolbali & Monaghan, 2008). Bingolbali und Monaghan (2008) konnten beispielsweise zeigen, dass Maschinenbaustudierende bei einem Test zum Thema Ableitung den Änderungsraten-Aspekt gegenüber dem Tangenten-Aspekt für Erklärungen bevorzugten bzw. zur Definition des Begriffs Ableitung nutzen. Der Tangenten-Aspekt wiederum wurde von Mathematikstudierenden favorisiert.

The results to all six questions show a clear trend, that students’ concept images of the derivative changed as they progressed from

entry to the end of the first year: ME [Mechanical Engineering] students' concept images of the derivative developed in the direction of rate change orientations and M [Mathematics] students' concept images developed in the direction of tangent orientations. (S. 30)

Ebenso zeigten die beiden Gruppen bei denjenigen Aufgaben bessere Leistungen, in denen der jeweilige Aspekt eher betont wurde.

In der Phase der Transition von der Schule zur Hochschule stellen die Interaktionen zwischen *concept definition* und *concept image* bei einer Vielzahl von mathematischen Konzepten für die Studierenden eine besondere Herausforderung dar. *Concept images* von Studierenden sind aus der Schulzeit an Beispiele und Prototypen gebunden. Aus dieser Phase heraus sind die Studierenden es nicht gewohnt, dass Definitionen eine hohe Bedeutung haben und werden an der Hochschule mit den dazugehörigen formalen *concept definitions* – möglicherweise zum ersten Mal – konfrontiert (A. Fischer et al., 2009).

Die zuvor berichteten Unterschiede beziehen sich auf kognitive und inhaltliche Anforderungen, in denen sich die Schulmathematik von der Mathematik an der Hochschule unterscheidet. A. Fischer und Wagner (2009) weisen darauf hin, dass affektiv-motivationale Charakteristika wie Motivation, Selbstregulation und Selbstkonzept ebenfalls bedeutend sind (vgl. auch Griese, 2016).

Zudem wird die Entwicklung von Kompetenzstrukturmodellen gefordert, welche die Inhalte der Sekundarstufe 2 und des ersten Studienjahres miteinander verbinden. Tests, welche auf diesen Modellen basieren, könnten dazu beitragen, „die wesentlichen Unterschiede in den Kompetenzanforderungen beim Mathematiklernen in der Schule und an der Hochschule [zu] identifizier[en]“ (A. Fischer & Wagner, 2009, S. 266) und das Verständnis der Übergangsproblematik fördern.

Dieser Abschnitt macht deutlich, dass zusätzlich zu den allgemeinen Schwierigkeiten bei Transitionen im Bildungssystem die unterschiedlichen Anforderungen an das Mathematiklernen in der Schule und an der Hochschule den Lernenden den Wechsel erschweren. Für ein besseres Verständnis der spezifischen Situation zu Beginn des Ingenieurstudiums wird die Entwicklung der Konzepte und Inhalte in der Mathematikausbildung von Ingenieuren im nächsten Abschnitt detaillierter dargestellt.

## 3.2 Die Mathematikausbildung für Ingenieure

Mathematik ist sowohl als eigenständiger Inhaltsbereich als auch in Form mathematischer Verfahren und Konzepte in anderen Kontexten ein wichtiger Bestandteil des ingenieurwissenschaftlichen Studiums. Sie bildet eine Grundlage für spätere Lehrveranstaltungen, die technische Aspekte fokussieren. In diesem Abschnitt werden die curricularen Entwicklungen in der Mathematikausbildung für Ingenieure von einer Input- hin zu einer Kompetenzorientierung vorgestellt.

### 3.2.1 Entwicklung von der Input- zur Outputorientierung

Die Beschreibung von Standards für die Mathematikausbildung im Ingenieurstudium hat über die letzten Jahrzehnte einen Wandel von verpflichtenden Inhalten (vgl. Barry & Steele, 1992) über sogenannte „Learning Outcomes“ (vgl. Mustoe & Lawson, 2002) bis hin zu einer kompetenzorientierten Beschreibung von Lernzielen (vgl. Alpers, Demlova, Fant, Gustafsson & Lawson, 2013) erfahren.

Ein erster Versuch, die Studieninhalte auf eine gemeinsame Basis zu stellen, war das *Core Curriculum in Mathematics for the European Engineer*, das 1992 von der European Society of Engineering Education (SEFI) veröffentlicht wurde. Dieses Curriculum beinhaltet eine Zusammenstellung von Inhalten zu den Themen Analysis, Lineare Algebra, Diskrete Mathematik und Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, die nach Barry und Steele (1992) wie folgt zu verstehen ist: „the Core [Curriculum] itself represents the ABSOLUTE MINIMUM, of pure mathematics that should be made available to engineering students in any European institution“ (S. 13, Großschreibung im Original). Eine Weiterentwicklung erfolgte durch Mustoe und Lawson (2002), welche die mathematischen Inhalte<sup>5</sup> über ein 4-Level-Core-Model beschreiben, in dem die jeweiligen Cores aufeinander aufbauen.

*Core Zero* umfasst Learning Outcomes, die bereits zu Beginn des Studiums von den Studierenden beherrscht werden sollten, wobei Mustoe und Lawson (2002) einschränken, dass es aufgrund von unterschiedlichen Schulausbildungen nötig

---

<sup>5</sup>Zusätzlich zu den von Barry und Steele (1992) aufgeführten Inhalten wurden die Algebra und die Geometrie und Trigonometrie aufgenommen.

sein kann, dass einige Inhalte noch im Laufe des ersten Studienjahres behandelt werden müssen. Zu den genannten Inhalten, welche auch in den Kernlehrplänen für das deutsche Abitur enthalten sind, zählen zum Beispiel lineare, quadratische und kubische Gleichungen, Ableitungen und Integrale (vgl. Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013a). Das Thema Komplexe Zahlen wird ebenfalls dem Core Zero zugeordnet (Mustoe & Lawson, 2002), ist jedoch kein verpflichtender Inhalt der deutschen Schulausbildung (vgl. Kultusministerkonferenz, 2012).

*Core Level 1* enthält Inhalte, die alle Ingenieurstudierende in unterschiedlicher Tiefe in ihrem Studium erlernen müssen. Hierzu zählen unter anderem Themen wie Vektoralgebra, Matrizen und hyperbolische Funktionen.

*Core Level 2 – Electives* umfasst Themen, welche nicht mehr Studieninhalte für alle Studierende darstellen, sondern solche, die je nach Spezialisierung (zum Beispiel Elektrotechnik) häufiger oder seltener im Studium behandelt werden. Hierzu zählen unter anderem Differentialgleichungen, Fourierreihen, Graphen oder Eigenwertprobleme. Zudem werden diese Themen vermehrt auch außerhalb von Mathematikveranstaltungen behandelt: „The material is now advanced enough for simple real engineering problems to be addressed (Mustoe & Lawson, 2002, S. 32).

In *Core Level 3 – Specialist Modules* sind schließlich Inhaltsbereiche beschrieben, die nicht mehr in Mathematikveranstaltungen, sondern im Kontext von Problemstellungen aus dem Ingenieurbereich gelehrt werden. Zu den Inhalten zählen Graphentheorie, Nicht-Euklidische Geometrie oder Chaos-Theorie.

Die Entwicklung von einer Input- hin zu einer Outputorientierung mit Learning Outcomes zeigt sich insbesondere in den Formulierungen der Inhalte. Während im Curriculum von Barry und Steele (1992) Inhalte in Form von Listen präsentiert werden, benennen Mustoe und Lawson (2002) Fähigkeiten und Handlungen, welche die Studierenden nach dem Bearbeiten der Themen beherrschen sollen. Ein Beispiel ist die folgende Formulierung: „As a result of learning this material you should be able to define and sketch the functions  $\sinh$ ,  $\cosh$ ,  $\tanh$ “ (Mustoe & Lawson, 2002, S. 22). Eine Ausnahme bilden die Inhalte des Core 3, die in Form einer Liste beschrieben werden.

### 3.2.2 Entwicklung der Kompetenzorientierung

In den beiden ersten Versionen des Curriculums wird noch kein Bezug auf Kompetenzen genommen. Dies geschieht erst in der Überarbeitung des Curriculums von Alpers et al. (2013). Dort findet eine Orientierung am Kompetenzbegriff des dänischen KOM Projekts (Niss & Højgaard, 2011) statt. Dieser Begriff wird von Niss (2003) wie folgt definiert:

*Mathematical competence* then means the ability to understand, judge, do and use mathematics in a variety of intra- and extra-mathematical contexts and situations in which mathematics plays or could play a role. Necessary, but certainly not sufficient, prerequisites for mathematical competence are lots of factual knowledge and technical skills [...]. (S. 6–7)

Diese Definition umfasst die beiden Komponenten *knowledge in action* (understand, judge, do and use mathematics) und *knowledge of action* (factual knowledge and technical skills). Niss stellt so die Bedeutung des Handlungswissens heraus und verdeutlicht zugleich die Rolle des Faktenwissens als Basis des Handlungswissens, indem er dieses als „necessary, but certainly not sufficient“ charakterisiert.

Im KOM Projekt werden acht Kompetenzen identifiziert, die auch für das SEFI Curriculum grundlegend sind (Alpers et al., 2013, S. 13–14):

- Thinking mathematically
- Reasoning mathematically
- Posing and solving mathematical problems
- Modelling mathematically
- Representing mathematical entities
- Handling mathematical symbols and formalism
- Communicating in, with, and about mathematics
- Making use of aids and tools

Aufgegriffen wird die Definition von *Mathematical competence* insofern, als sie sowohl *knowledge in action* als auch *knowledge of action* adressieren. So wird zum Beispiel die Kompetenz *Handling mathematical symbols and formalism* wie folgt beschrieben:

This competency includes the ability to understand symbolic and formal mathematical language and its relation to natural language as well as the translation between both. It also includes the rules of formal mathematical systems and the ability to use and manipulate symbolic statements and expressions according to the rules. (Alpers et al., 2013, S. 14)

Sowohl die Fähigkeit, Symbole und die formale mathematische Sprache zu verstehen (*knowledge in action*), als auch die Fähigkeit, symbolische Ausdrücke gemäß den Regeln zu verändern (*knowledge of action*), werden in dieser Definition aufgegriffen. Auf vergleichbare Weise werden auch die weiteren sieben Kompetenzen im SEFI-Curriculum beschrieben.

Auch Cardella (2008) fordert eine Mathematikausbildung, die über die alleinige Vermittlung von Inhalten hinaus Facetten mathematischer Kompetenz berücksichtigt und macht zusätzlich auf die Bedeutung von affektiv-motivationalen Variablen aufmerksam. Sie verweist in diesem Zusammenhang insbesondere auf die Arbeit von Schoenfeld (1992). Als eine Aufgabe der mathematischen Community sieht sie, eine breite Auffassung von Mathematik, das *mathematical thinking*, für die Lehre zu berücksichtigen: „Schoenfeld [...] describes mathematical thinking as not only involving the mathematics content knowledge we [the mathematics education community] want engineering students to learn, but also problem-solving strategies, metacognitive processes, beliefs and affects and practices“ (Cardella, 2008, S. 151).

Diese Darstellung verdeutlicht den Wandel der Curricula in der Ingenieurausbildung und zeigt den Weg zur Kompetenzorientierung im Studium auf. Eine ähnliche Verwendung des Kompetenzbegriffes in den Bildungsstandards und im SEFI Curriculum ermöglicht eine Anschlussfähigkeit, wie sie von einigen Autoren (vgl. A. Fischer & Wagner, 2009; Heinze & Grüßing, 2009) im Zusammenhang mit der Übergangsproblematik von der Schule zur Hochschule gefordert wird (vgl. Abschnitt 3.1). Alpers (2016) weist darauf hin, dass bei der Formulierung von mathematischen Hochschul-Curricula die Nutzung des

Konzepts der mathematischen Kompetenz, wie sie im KOM-Projekt entwickelt wurde (vgl. Niss, 2003; Niss & Højgaard, 2011), „die Kommunikation an der Schnittstelle Schule/Hochschule“ (S. 647) erleichtern würde. Als Grund nennt Alpers (2016): „Da Niss auch wesentlichen Einfluss auf die Pisa-Studie hatte, hat das Konzept starken Einfluss auf die Entwicklung von Schul-Curricula gehabt, die das Kompetenzkonzept nutzen“ (S. 647).

Eine umfassende Mathematikausbildung im Ingenieurstudium ist jedoch kein Selbstzweck. Auch in anderen Bereichen des Studiums hat die Mathematik eine hohe Bedeutung. So bildet sie auch für die physikalisch-technischen Veranstaltungen eine wichtige Grundlage. Aus diesem Grund wird im nächsten Abschnitt die Rolle der Mathematik in der Physik näher betrachtet.

### 3.3 Rolle der Mathematik in der Physik

In der Physik können auf zwei Arten Erkenntnisse erzielt werden: „(1) the method of experiment and observation, and (2) the method of mathematical reasoning“ (Dirac, 1939, S. 1). Mit dieser Aussage stellt Dirac heraus, dass auch deduktives Vorgehen für den Fortschritt der Physik als Wissenschaft wichtig ist. Die theoretische Physik, neben der Experimentalphysik der zweite Ansatz Physik zu betreiben, nutzt empirische Erkenntnisse aus Experimenten, um diese mit Hilfe mathematischer Verfahren als Naturgesetze zu formulieren und „mittels Deduktion auf größere Bereiche der Natur anzuwenden und Voraussagen zu machen, wobei in der Regel völlig neue Einsichten gewonnen werden“ (Schmutzer, 2005, S. 26). Ein Beispiel für diese Vorgehensweise ist die Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie durch Einstein, die – zuerst aus Überlegungen zur Elektrodynamik theoretisch entwickelt – erst anschließend experimentell bestätigt wurde. Dies zeigt, dass sich Mathematik und Physik in einer engen wechselseitigen Beziehung befinden (Krey, 2012), welche „ein wichtiger Grund für den Erfolg der Wissenschaft Physik“ (Uhden, 2012, S. 43) ist. Ausdruck dieser engen Verbundenheit ist zudem der Umstand, dass Mathematik oft als Sprache der Physik (vgl. Redish, 2005; Nolting, 2003) bzw. großer Teil dieser Sprache (Sherin, 2001) bezeichnet und betont wird, dass sie wichtige Hilfsmittel für die Untersuchung physikalischer Zusammenhänge liefert (Kircher, Girwidz & Häußler, 2015). Neben dieser Kommunikationsfunk-

tion, die von vielen Autorinnen als zentral angesehen wird (vgl. Wigner, 1960; Sherin, 2001; Redish, 2005), hat die Verwendung mathematischer Verfahren noch weitere Funktionen in der Physik, welche jedoch nicht von allen Autoren in gleicher Weise berücksichtigt werden. Dazu stellt Krey (2012) fest, „dass eine befriedigende oder konsensfähige Antwort auf die Frage nach der Rolle der Mathematik in der Physik bis heute aussteht“ (S. 39). So sieht beispielsweise Wigner (1960) die Funktionen mathematischer Verfahren zum einen in ihrer Rolle als Werkzeug: „to evaluate the results of the laws of nature, to apply the conditional statements to the particular conditions which happen to prevail or happen to interest us“ (S. 6). Zum anderen bieten mathematische Konzepte seiner Meinung nach eine fruchtbare Grundlage für die Formulierung von Naturgesetzen: „the concepts of mathematics are not chosen for their conceptual simplicity [...] but for their amenability to clever manipulations and to striking, brilliant arguments“ (S. 7). Auch Uhden (2012) beschreibt neben der Kommunikations- und Werkzeugfunktion eine „strukturierende Funktion“ (S. 43) mathematischer Verfahren in der Physik:

Theoretische Herleitungen werden erst durch den deduktiven Charakter der Mathematik ermöglicht, physikalische Gedanken können durch mathematische Analogien strukturiert und angeleitet werden. Bei der Abstraktion und Generalisierung physikalischer Zusammenhänge ist die Mathematisierung ein unabdingbarer Prozess, der Einsichten in neue Strukturen ermöglicht und zu neuen physikalischen Ergebnissen führt. (S. 44)

Insbesondere in der Möglichkeit, abstrakte Zusammenhänge mit Hilfe mathematischer Verfahren zugänglich darzustellen, sehen auch andere Autorinnen einen großen Vorteil. Krey (2012) verweist in diesem Zusammenhang auf R. Fischer (2006), der die Bedeutung von Mathematik allgemein darin sieht, dass „sie eine Materialisierung von Abstraktem darstellt, wobei mit Letzterem ‚Dinge‘ gemeint sind, die den Sinnen nicht direkt zugänglich sind“ (S. 12). Dafür stellt die Mathematik Zeichensysteme (z. B. Ziffern, algebraische Notationen, Funktionsgraphen etc.) zur Verfügung, „mit denen Abstrakta dargestellt und manipuliert werden“ (Krey, 2012, S. 12) können. Die Kombination aus Zeichen- und Regelsystem führt dazu, dass „die mathematische Darstellung physikalischer Sachverhalte [...] maximal informativ bei einem Minimum an verwendete-

ten Zeichen und Symbolen“ (Kircher et al., 2015, S. 122) ist. Für R. Fischer (2006) wird die Materialisierung „besonders mathematisch [...], wenn ein Regelsystem zur Manipulation dieser [...] mitgeliefert wird“ (S. 12–13). Dies führt schließlich zu einer kognitiven Entlastung, die Krey (2012) als eine weitere Funktion der Verwendung mathematischer Verfahren in der Physik ansieht. Es zeigt sich zusammenfassend, dass die oben genannten Funktionen mathematischer Verfahren in der Physik auf unterschiedlichen Ebenen grundlegend für die Beschäftigung mit der Wissenschaft Physik sind und sich beide Fachdisziplinen in Teilen einer nahezu identischen Vorgehensweise und Symbolik bedienen. Gleichzeitig existieren Unterschiede; so zeigen Manogue, Browne, Dray und Edwards (2006) auf, dass unterschiedliche Zielsetzungen existieren: „physics is about describing fundamental relationships between physical quantities whereas mathematics is about rigorously pursuing the consequences of sets of basic assumptions“ (S. 345). Für die Beschreibung physikalischer Zusammenhänge ist die Interpretation von Symbolen und Ergebnissen notwendig. Damit ist das Vorgehen in der Physik nicht alleine die Anwendung bereits gelernter mathematischer Verfahren. Meredith und Marrongelle (2008) beschrieben es wie folgt: „[physics] is a reinterpretation of mathematical conventions in the context of physical principles“ (S. 576). Redish (2005) nimmt ebenfalls Bezug auf die Interpretation von mathematischen Symbolen:

But using math in science (and particularly in physics) is not just doing math. It has a different purpose – representing meaning about physical systems rather than expressing abstract relationships – and it even has a distinct semiotics – the way meaning is put into symbols – from pure mathematics. (S. 1)

Die Herangehensweise in der Physik, Symbole mit einer inhaltlichen Bedeutung zu versehen, um damit physikalische Zusammenhänge interpretieren zu können, führt dazu, dass die gemeinsame Symbolik von Physikerinnen und Mathematikerinnen unterschiedlich interpretiert werden kann. Redish (2005) macht dies an folgender Aufgabe und den verschiedenen Herangehensweisen von Physikerinnen und Mathematikerinnen deutlich:

If  $A(x, y) = K(x^2 + y^2)$        $K$  is a constant  
What is  $A(r, \Theta) = ?$

Während die Mathematikerin aus der Perspektive ihrer Fachdisziplin zur Lösung  $A(r, \Theta) = K(r^2 + \Theta^2)$  gelangen wird, da  $r$  und  $\Theta$  einzusetzende Variablen darstellen, wird die Physikerin, aufgrund der in der Physik gebräuchlichen inhaltlichen Bedeutung der Symbole, zur Lösung  $A(r, \Theta) = Kr^2$  gelangen. Aus Sicht der beiden Fachdisziplinen wäre die jeweils andere Lösung nicht richtig, da sie grundlegende Konventionen missachten würde. Die Antwort der Mathematikerin würde dem Verständnis von Symbolen in der Physik widersprechen, da mit  $r^2$  und  $\Theta^2$  unterschiedliche Einheiten addiert werden würden. Die Mathematikerin könnte wiederum einwenden, dass bei einem Wechsel der Funktion auch deren Name geändert werden müsste (z. B.  $A(x, y) = B(r, \Theta)$ , Redish, 2005). Diese Lösung würde jedoch der physikalischen Vorgehensweise, Symbolen eine Bedeutung zuzuschreiben, zuwiderlaufen ( $B$  ist in der Physik die übliche Bezeichnung für das Magnetfeld). Dieses kurze Beispiel zeigt bereits welche Differenzen zwischen den beiden Fachdisziplinen auftreten können, obwohl die gleiche Symbolik genutzt wird.

Die unterschiedlichen Herangehensweisen zeigen sich nicht nur auf der Ebene der einzelnen Symbole, sondern auch auf der Ebene der Gleichungen: diese dienen in der Physik vor allem der Darstellung physikalischer Zusammenhänge (Manogue et al., 2006) und sind nicht nur eine Berechnungsmethode:

It is not just a way to calculate a result. It is a way to generate a whole ensemble of results: not just the one you are currently calculating, but all possible situations with the same physics but different values for the parameters. (Redish, 2005, S. 4)

Hier wird deutlich, dass Gleichungen in der Physik stets im Zusammenhang mit dem physikalischen System, aus dem sie entwickelt wurden, interpretiert werden müssen. Dieser Prozess erfolgt im Schritt der Modellierung von realen physikalischen Systemen hin zu beispielsweise mathematischen Beschreibungen. Das Denken in und die Arbeit mit solchen Modellen stellt eine entscheidende Tätigkeit von Physikerinnen dar (Mikelskis-Seifert, Thiele & Wüscher, 2005) und ist „ein wesentliches Merkmal physikalischer Erkenntnis“ (Uhlen, 2012, S. 48). Symbolische Modelle, zu denen auch mathematische zählen, bilden „die wichtigste Art der Darstellung von theoretischen Modellen (im weiteren Sinne)“ (Kircher et al., 2015, S. 806). Die wichtige Rolle der Mathematik beim Modellieren wird in schematischen Darstellungen des Modellierungskreislaufs

deutlich. Uhden (2012) schlägt hier eine Variante vor (siehe Abbildung 3.1), welche im Gegensatz zu anderen gängigen Arbeiten (vgl. Blum & Leiß, 2007; Redish, 2005) keine Trennung zwischen mathematischem und physikalischem Modell vornimmt. Vielmehr sind sowohl Pfade der Mathematisierung (a) als auch der Interpretation (b) vorgesehen, die jeweils strukturelle Fähigkeiten darstellen. Zudem existieren Pfade zwischen dem Modell und der Mathematik, die rein technische Operationen (c) abbilden. Uhden (2012) grenzt strukturelle Fähigkeiten gegenüber technischen Fähigkeiten insofern ab, als technische Fähigkeiten „sich [...] auf rein mathematische Manipulationen [beziehen], während die strukturellen Fähigkeiten das Übersetzen zwischen mathematischen Strukturen und physikalischer Bedeutung beinhalten“ (S. 52). Diese Unterscheidung greift zwei der oben genannten Funktionen von mathematischen Verfahren in der Physik auf, nämlich „mathematische Verfahren als Werkzeuge“ (Pfad c) und „mathematische Verfahren als Mittel der Strukturierung“ (Pfade a und b). Zusätzlich wird im Modell die Notwendigkeit der Interpretation mathematischer Ausdrücke aufgegriffen, die Manogue et al. (2006) betonen: „rightly, interpretation is the realm of science“ (S. 345). Die „restliche Welt“ wird durch die Pfade der Vereinfachung/Idealisierung (d) und Validierung (e) mit dem Modell verbunden.

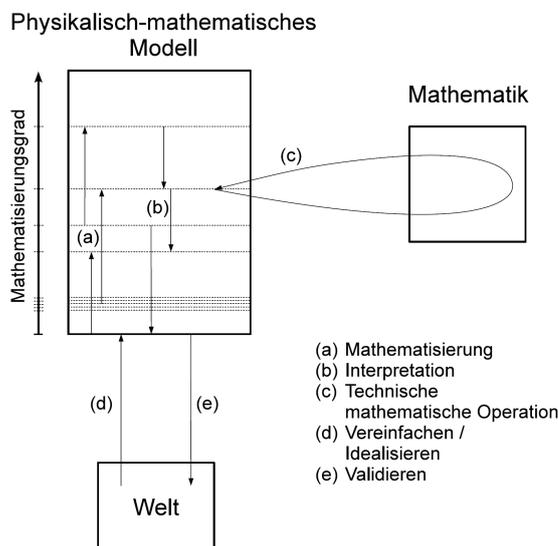


Abbildung 3.1: Modellierungskreislauf basierend auf physikalischem Mathematisierungsmodell nach Uhden (2012, S. 62).

### 3.4 Kompetenzerwartungen in Veranstaltungen zur Technischen Mechanik

Die Physikausbildung stellt neben der Mathematikausbildung die grundlegende Basis im ingenieurwissenschaftlichen Studium dar.<sup>6</sup> Die Technische Mechanik ist dabei ein Teilgebiet der Mechanik und befasst sich mit der Bewegung von Körpern und mit den Konzepten Kraft und Masse (Tipler, Mosca & Wagner, 2015) und stellt die ingenieurwissenschaftliche Ausdifferenzierung der Mechanik dar; „[s]o werden Kräfte in der TM [Technischen Mechanik] beispielsweise als Lager-, Zug-, Druck- oder Schubkräfte bezeichnet“ (Dammann et al., 2016, S. 354). Zudem bildet sie die Grundlage für eine Vielzahl ingenieurwissenschaftlicher Vertiefungsfächer (Musekamp, Spöttl & Mehrafza, 2015). Wie bereits erwähnt, existieren nur wenige Arbeiten zum Thema Kompetenzmodellierung in der Technischen Mechanik. Aus diesem Grund werden hier die Arbeiten zur Kompetenzmodellierung des Lernens in der Technischen Mechanik aus den beiden KoKoHs Projekten KoM@ING (Behrendt et al., 2015) und KOM-ING (Musekamp & Pearce, 2015) vorgestellt.

Ähnlich zur Mathematikausbildung herrscht an vielen deutschen Hochschulen auch in der Physikausbildung weitestgehend Übereinstimmung über die Inhalte (Dammann et al., 2016). Sowohl in den Lehrwerken als auch in den Modulbeschreibungen lassen sich die drei Inhaltsbereiche Statik, Elastostatik<sup>7</sup> und Dynamik (Kinematik und Kinetik) wiederfinden (Behrendt, 2011). Dabei nehmen besonders die Inhalte der (vor-)universitären Mathematikausbildung eine wichtige Rolle ein (Dammann et al., 2016; Nickolaus, Behrendt, Dammann, Stefanica & Heinze, 2013). So müssen physikalische bzw. mechanische Probleme für ihre Lösung häufig in mathematische Modelle übersetzt werden (vgl. Abschnitt 3.3).

---

<sup>6</sup>Bei diesen Beschreibungen beschränke ich mich auf grundlegende Veranstaltungen im Ingenieurstudium in den ersten beiden Semestern, die im Zusammenhang mit Physik bzw. mit Technischer Mechanik stehen. Weiterführende Veranstaltungen wie zum Beispiel Werkstoffkunde, Elektrotechnik oder Thermodynamik werden hier nicht berücksichtigt.

<sup>7</sup>Teilweise wird diese auch als Festigkeitslehre bezeichnet.

Ausgehend von Kompetenzmodellierungen in anderen technischen Domänen (vgl. Nickolaus & Seeber, 2013), wird sowohl bei Musekamp et al. (2015) als auch bei Dammann et al. (2016) die Kompetenzstruktur des Lernens in der Technischen Mechanik zunächst entlang der drei oben genannten Inhaltsbereiche modelliert. Dammann et al. (2016) fügen mit dem deklarativen und prozeduralen Wissen (vgl. auch Nickolaus et al., 2013) die kognitiven Anforderungen als zweite Dimension in die Modellierung hinzu. Das Modell von Musekamp et al. (2015) umfasst zwei Ebenen bzw. zwei Matrizen (vgl. Abbildung 3.2): Kontext und Kontextspezifische Leistungsdispositionen. Musekamp et al. (2014) beschreiben die beiden Ebenen wie folgt:

The matrix on the left defines the objective requirements of competence in the sense of supra-individually valid expectations of behavior (context). The right matrix represents the internal, mental requirements which are necessary for the mastery of the context side (context-specific achievement dispositions). While the context side of the EM [engineering mechanics] Model represents the setting of norms, the disposition side can be seen as a hypothetical construct which requires empirical testing. (S. 7)

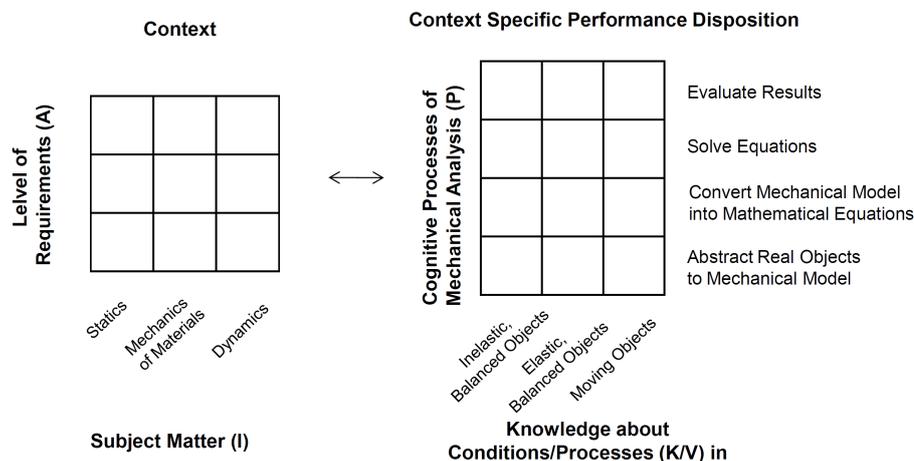


Abbildung 3.2: Kompetenzmodell zur Technischen Mechanik im Projekt KOM-ING nach (Musekamp et al., 2014, S. 8).

Während die Kontext-Ebene mit den Dimensionen Fachinhalte (Statik, Festigkeitslehre und Dynamik) und Anforderungsbereiche vergleichbar mit dem

Modell von Dammann et al. (2016) ist, stellt die Ebene der kontextspezifischen Leistungsdispositionen eine Erweiterung dar.<sup>8</sup>

Dammann et al. (2016) konnten zeigen, dass in den beiden Bereichen Statik und Elastostatik inhaltsspezifische zweidimensionale Modelle und in der Dynamik ein eindimensionales Modell am besten auf die Daten aus einer Testung von 496 (Statik/Elastostatik) bzw. 296 (Dynamik) Studierenden passten. Daraus folgern sie, dass sich die Wissensarten deklarativ und prozedural für keine der drei Inhaltsbereiche als relevant für die Kompetenzstruktur darstellen und die inhaltliche Komponente somit im Modell dominiert. Hier zeigt sich die gegenüber der Modellierung der mathematischen Kompetenz (vgl. Neumann et al., 2015) (eindimensionales Partial-Credit-Modell, siehe Abschnitt 2.6) komplexere Struktur in der Technischen Mechanik, die eine empirische Überprüfung bzw. Testung schwieriger gestaltet.

### 3.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde gezeigt, welche Hindernisse Studierende in den ersten Semestern an der Hochschule überwinden müssen. Dabei bildet die Transition von der Schule zur Hochschule die dritte und bisweilen schwierigste Hürde im Bildungsweg von Studierenden (Blömeke, 2016). Es wurde dargelegt, wie wichtig eine Anschlussfähigkeit der Mathematikausbildung über die verschiedenen Transitionen ist, damit der Wechsel gelingt. Die Entwicklung des Curriculums für die Mathematikausbildung im Ingenieurstudium hin zu einer Kompetenzorientierung ist in diesem Zusammenhang als ein wichtiger Schritt zu einem Abbau von Schwierigkeiten zu sehen. Diese Kompetenzorientierung ist in physikalischen Vorlesungen wie der Technischen Mechanik noch nicht sehr verbreitet, was auch an der komplexen Struktur der Domäne liegen kann.

---

<sup>8</sup>Zu diesem Modell liegen zum Zeitpunkt dieser Arbeit noch keine empirischen Ergebnisse vor.



# Kapitel 4

## Kompetenz des Problemlösens

Dieses Kapitel beschreibt die theoretischen Grundlagen aus den fachdidaktischen sowie fachlichen Diskussionen, auf denen die Analysen der Aufgabebearbeitungen fußen. Die theoretischen Grundlagen des Verständnisses von Problemlösen in der Mathematikdidaktik, wie es in der heutigen Zeit unterrichtet und untersucht wird, basieren zum einen auf Arbeiten früherer Mathematiker und Philosophen wie Hadamard (1954), Poincaré (2003) und Dewey (1991) und zum anderen auf Forschung aus dem Fachgebiet der (Kognitions-)Psychologie und wurden dort bereits in den 1930er Jahren thematisiert. Während Hadamard (1954) und Poincaré (2003) den Problemlöseprozess als einen kreativen Prozess mit Inkubations- und Illuminationsphasen, auch mit unbewussten Handlungen, beschreiben, sehen Dewey (1991) und auch Polya (1957) den Problemlöseprozess als Abfolge logischer Überlegungen von der Planung über die Durchführung bis zur Überprüfung.<sup>1</sup> Ausgehend von der fachwissenschaftlichen Diskussion wird die Fähigkeit, Probleme zu lösen, später auch in den Fachdisziplinen der Mathematik- und Physikdidaktik eingehend diskutiert. Dieser Diskurs hat in den 50er Jahren des letzten Jahrhunderts begonnen und reicht bis in die heutige Zeit, in der die Kompetenz des Problemlösens im Rahmen der Debatte um die Kompetenzorientierung in der Bildung eine neue Relevanz erhält (siehe Abschnitte 2.4 und 2.5).

Dieses Kapitel ist wie folgt strukturiert: Abschnitt 4.1 widmet sich ausführlich einer mathematikdidaktischen Perspektive. Zunächst wird das Verständnis des

---

<sup>1</sup>Eine ausführlichere Beschreibung der verschiedenen Ansätze bei der Beschreibung von Problemlösen findet sich zum Beispiel bei (Rott, 2013).

Begriffes *Problemlösen* dargestellt. In diesem Zusammenhang wird – um die Bedeutung in der schulischen Ausbildung zu betonen – zusätzlich die Rolle des Problemlösens im Unterricht thematisiert. Im weiteren Verlauf werden die verschiedenen Herangehensweisen in Modelle der äußeren und inneren Struktur untergliedert und vorgestellt. Hierbei werden Ansätze präsentiert, die Phasen, Strategien und Methoden des Problemlösens thematisieren.

Im sich daran anschließenden Abschnitt wird eine physikdidaktische Perspektive auf das Problemlösen vorgestellt. Hier wird insbesondere auf die Fokussierung von Fachwissen im Modell des wissenszentrierten Problemlösens eingegangen, welches sich durch die Orientierung an der Expertiseforschung herausgebildet hat. Anschließend werden sogenannte Epistemic Games, die eng mit dem Modell des wissenszentrierten Problemlösens zusammenhängen, auf Grund ihrer Bedeutung für diese Arbeit ausführlich präsentiert. Dieses Modell fokussiert die Anwendung von Mathematik bei der Bearbeitung physikalischer Probleme.

Im Abschnitt 4.3 werden Forschungszugänge zum Problemlösen im ingenieurwissenschaftlichen Studium präsentiert. Da der Beginn dieser Ausbildung von Lehrveranstaltungen zur Mathematik und Physik geprägt ist, wird das Lehren von und das Forschen zum Problemlösen in den Ingenieurwissenschaften durch die Perspektiven dieser Fachdisziplinen beeinflusst. Diese Situation wird exemplarisch durch die Präsentation von drei Ansätzen illustriert: Zuerst durch einen, welcher das Modellieren und Mathematisieren in den Mittelpunkt stellt, daran anschließend durch ein Modell, welches Phasen und Strategien zur Beschreibung des Problemlöseprozesses nutzt, und zuletzt wird eine Vorgehensweise präsentiert, welche einem Phasenmodell die Nutzung von Vorwissen und Repräsentationen hinzufügt. Abgeschlossen wird das Kapitel mit Überlegungen zum Gebrauch des Begriffes *Problem* in der vorliegenden Arbeit. Hier werden auf Grundlage der vorherigen Abschnitte die Fragen „Was ist ein Problemlöseprozess?“ und „Was ist eine Problemaufgabe?“ für die empirische Studie geklärt.

## 4.1 Mathematikdidaktische Perspektive

### 4.1.1 Relevanz des Problemlösens

Sowohl national als auch international nimmt das Problemlösen einen wichtigen Platz in den Mathematikcurricula ein (vgl. Reiss & Törner, 2007; Törner, Schoenfeld & Reiss, 2007; Rott, Kuzle & Čadež, 2016). In Deutschland ist die Kompetenz, mathematische Probleme zu lösen, ein integraler Bestandteil (der Vorgaben) der Mathematikausbildung in allen Bereichen der schulischen Bildung und findet sich in den Bildungsstandards sowohl der Primar- als auch der Sekundarstufe wieder (Kultusministerkonferenz, 2003, 2004, 2012). Die Relevanz des Problemlösens für die Mathematikausbildung wird zudem von H. Winter (1995) betont. Er spricht sich für einen Mathematikunterricht aus, der den Schülerinnen die Grunderfahrung ermöglichen sollte, „in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, [...] zu erwerben“ (S. 37). Auf vergleichbare Weise wird auch in der universitären Mathematikausbildung als ein Ziel gefordert, mathematische Problemlösekompetenzen zu fördern (siehe Abschnitt 3).

Die Veröffentlichungen zum Problemlösen innerhalb der mathematikdidaktischen Forschung zeigen unterschiedliche Herangehensweisen an das Thema. Die Zugänge können in zwei große Bereiche unterteilt werden: Zum einen wird fokussiert, den Problemlöseprozess in seinen einzelnen Phasen und Phasenübergängen zu beschreiben (siehe zum Beispiel Polya, 1957; Schoenfeld, 1980; Mason, Burton & Stacey, 2010; J. W. Wilson, Fernandez & Hadaway, 1993; Yimer & Ellerton, 2010; Rott, 2014). Die entsprechenden Ansätze konzentrieren sich darauf, die äußere Struktur des Problemlösens zu erfassen. Zum anderen gibt es die Bestrebungen, das Problemlösen über die eingesetzten Methoden, Verfahren und Strategien zu definieren (Bruder & Collet, 2011; Chinnappan & Lawson, 1996; Schoenfeld, 1985). Bei diesem Ansatz kann von der inneren Struktur<sup>2</sup> des Problemlösens gesprochen werden. Im Folgenden werden diese beiden Strukturen, aufbauend auf einer Definition der Begriffe *Problem* und *Problemlösen* und der Unterscheidung zwischen Problem und Aufgabe in der mathematikdidaktischen Forschung, ausführlich behandelt.

---

<sup>2</sup>Die Begriffe *äußere Struktur* und *innere Struktur* werden im Abschnitt 4.1.3 detaillierter beschrieben.

### 4.1.2 Verwendung des Begriffs Problem

Die Verwendung der Begriffe *Problem* und *Problemlösen* ist innerhalb der Mathematikdidaktik nicht einheitlich, weist jedoch einige Ähnlichkeiten mit der Begriffsdefinition in der Psychologie auf. So findet sich auch hier der Barrierebegriff (vgl. Dörner, 1976) wieder: „Im folgenden verstehen wir unter einem Problem eine Aufgabe, die dem Bearbeiter beim Lösen eine Barriere entgegenstellt“ (Vollrath, 1992, S. 1). Weiter greift Vollrath (1992) die Dreiteilung von Dörner (1976) auf, indem er den Ausgangszustand, den angestrebten Zielzustand und die Problembarrriere als wesentliche Merkmale benennt. Auf eine ähnliche Weise definiert auch Schoenfeld (1985) ein Problem: Seiner Ansicht nach ist ein Problem eine Aufgabe, welche ein Individuum lösen möchte, zu der sie oder er aber keinen Zugang besitzt, um auf direktem Wege zur Lösung zu gelangen. Insbesondere ist es nach Schoenfeld vom Individuum selbst abhängig, ob ein Problem als ein solches angesehen wird oder nicht. Henderson und Pinory (1953) betonen bei ihrer Beschreibung von Problemlösen ebenfalls die Rolle des Individuums. Um von einem Problem sprechen zu können, reicht es ihrer Meinung nach nicht aus, dass ein Ziel existiert und der Erreichung dieses Ziels eine individuelle Blockade entgegensteht. Zusätzlich muss das Individuum selbst das Ziel erreichen wollen: „If he accepts the ‚problem‘ as his own, [...] then the solution of the ‚problem‘ becomes his goal“ (S. 231). Dabei schränken sie ein: „What may be a problem for one individual may not be a problem for another. A problem for a particular individual today may not be a problem for him tomorrow“ (S. 229) und ergänzen, dass das Vorliegen einer Problemsituation auch von einer zeitlichen Komponente beeinflusst wird. In vielen Arbeiten das mathematischen Problemlösen wird ein Bezug auf die drei Komponenten (vgl. Abbildung 4.1) eines Problems und die Orientierung am Individuum hergestellt (vgl. Heinze, 2007; Mason et al., 2010; Reiss & Törner, 2007; Polya, 1957; Schoenfeld, 1985, 2007). Die Dreiteilung des Prozesses in Ausgangszustand, Hürde bzw. Weg und Endzustand und der Kenntnis dieser durch die Problemlöserin führt zu acht möglichen Aufgabentypen, von denen die zwei, bei denen der Weg und der Endzustand unbekannt sind als Problem-aufgabe bzw. Problemsituation bezeichnet werden (vgl. Leuders, 2003).



Abbildung 4.1: Schematische Darstellung einer Problemsituation mit den drei Komponenten Ausgangs- und Endzustand und Hürde.

### 4.1.3 Rolle des Problemlösens im Mathematikunterricht

Neben der Begriffsdefinition ist ein Ziel von mathematikdidaktischer Forschung, die unterschiedlichen Facetten von Problemlösen zu benennen, ihre Einsatzmöglichkeiten im Mathematikunterricht bzw. in der Mathematikausbildung zu diskutieren und die jeweiligen Vor- und Nachteile zu erörtern. So gilt Problemlösen „als eine Schlüsselkompetenz und wichtige prozessbezogene Kompetenz im Mathematikunterricht“ (Herold, 2015, S. 380). Stanic und Kilpatrick (1989) und Leuders (2003) fassen unterschiedliche Sichtweisen auf das Problemlösen überblicksartig zusammen. Während erstere übergeordnete Ziele aus dem Feld des Problemlösens für den schulischen Kontext ableiten, befasst sich letzterer explizit mit verschiedenen Tätigkeiten im Mathematikunterricht, welche als Problemlösen angesehen werden.

Nach Stanic und Kilpatrick (1989) nimmt mathematisches Problemlösen in schulischen Curricula drei unterschiedliche Rollen ein: *Problem Solving as Context*, *Problem Solving as Skill* und *Problem Solving as Art*. In der ersten Rolle *Problem Solving as Context* sind Probleme und Problemlösen Mittel, um andere Ziele im Mathematikunterricht zu erreichen. So würden Probleme beispielsweise dazu eingesetzt, um dem Unterrichtsfach Mathematik eine Legitimierung zu geben: „Presumably, at least some problems related in some way to real-world experiences were included in the curriculum to convince students and teachers of the value of mathematics“ (Stanic & Kilpatrick, 1989, S. 13). Eine weitere Möglichkeit, Probleme im Sinne des *Problem Solving as Context* einzusetzen, ist, mit ihnen zuvor gelehrt Fähigkeiten und Konzepte zu vertiefen und zu konsolidieren. Diesen Einsatz von Problemen bezeichnet Leuders (2003) als *Problemlösen als Bearbeiten von (Text-)Aufgaben* und sieht darin

jene Realität im Mathematikunterricht, in der Schülerinnen Aufgaben bearbeiten, in denen sie zuvor gelernte Verfahren einsetzen, und in denen Anfangs- und Endzustand sowie die einzusetzenden Mittel bekannt sind. Diese Sichtweise kategorisiert er, wie Dörner (1976), nicht als Problemlösen, sondern als Aufgabenlösen. Eine derartige Verwendung von Problemen findet sich oft am Ende von thematischen Abschnitten in Lehrbüchern, um die zuvor behandelten Verfahren einzuüben. Mit dieser Sichtweise korrespondiert eine weitere Perspektive, das *Problemlösen als Lernen*. Diese beschreibt jegliches Lernen als einen Problemlöseprozess. So ist „ein ‚Problem‘ [...] schlichtweg eine Diskrepanz zwischen der Erwartung eines Individuums und der von ihm wahrgenommenen tatsächlichen Situation“ (Leuders, 2003, S. 119). Für Leuders ist diese Sichtweise nicht hilfreich, da sie „zu weit [greift], um die Spezifität mathematischen Problemlösens zu erfassen“ (S. 119).

*Problem Solving as Skill* betont Problemlösen als wichtige Fähigkeit, die ihren Platz im Curriculum verdient hat. Schoenfeld (1992) macht deutlich, dass im Verständnis dieser Rolle Problemlösen wie folgt gelehrt werden kann: „(a) A task is used to introduce a technique; (b) The technique is illustrated; (c) More tasks are provided so that the student may practice the illustrated skills.“ (S. 12). Ziel des Mathematikunterrichts ist es, Problemlösefähigkeiten, wie auch Faktenwissen und Prozeduren, im „mathematischen Werkzeugkoffer“ der Schülerinnen verfügbar zu machen.

Die Rolle des *Problem Solving as Art* fußt auf den Arbeiten von Polya. Dieser befasste sich mit der „idea of heuristic (art of discovery)“ (Stanic & Kilpatrick, 1989, S. 15), um sie in der Schule einsetzen zu können. Für Polya ist Problemlösen eine handwerkliche Kunst („practical art“) „like swimming, or skiing, or playing piano“ (Polya, 1981; zitiert nach Stanic & Kilpatrick, 1989, S. 16). In diesem Verständnis kann Problemlösen seiner Ansicht nach nicht wie beim *Problem Solving as Skill* unterrichtet werden: „techniques of problem solving need to be illustrated by the teacher, discussed with the students, and practiced in an insightful, nonmechanical way“ (Stanic & Kilpatrick, 1989, S. 16).

Auch Leuders (2003) erachtet die Perspektive, *Problemlösen und Problemfinden als Mathematik betreiben*, als die geeignetste Form, Problemlösen im Mathematikunterricht zu behandeln und beschreibt ein erweitertes Verständnis von Problemlösen. Dieses umfasst nicht nur den Prozess des Problemlösens,

sondern auch die vorgelagerte Handlung, ein *Problem zu finden*, und die nachgelagerte Handlung, ein *Problem weiterzuentwickeln*. Schülerinnen entdecken „Probleme und Fragestellungen in inner- wie außermathematischen Kontexten“, erfassen dabei „die Problemsituation genauer und bewerten, ob eine Frage interessant und verfolgenswert erscheint“ (Leuders, 2003, S. 122). Während das Auffinden von Problemen ein tieferes Verständnis des gesamten Prozesses des Problemlösens bei den Schülerinnen und Schülern fördert, führt die Weiterentwicklung von Problemen zu neuen mathematischen Begriffen und Verfahren. Der Prozess des Problemlösens im weiteren Sinne besteht demnach aus den drei Schritten *Problem finden*, *Problem lösen* und *Problem weiterentwickeln*. Während in der dritten Rolle, dem *Problem Solving as Art*, für viele Mathematikerinnen die wahre Natur des mathematischen Problemlösens liegt,<sup>3</sup> wirft sie gleichzeitig auch ein entscheidendes Problem auf:

[...] we see problem solving as art as the most defensible, the most fair, and the most promising. But at the same time it is the most problematic theme because it is the most difficult to operationalize in textbooks and classrooms. The problem for mathematics educators who believe that problem solving is an art form is how to develop this artistic ability in students. (Stanic & Kilpatrick, 1989, S. 17)

Diese Äußerung macht das Dilemma deutlich, in dem sich der Mathematikunterricht an der Schule bzw. die Mathematikausbildung im tertiären Bereich in Hinblick auf Problemlösen befindet. Auf der einen Seite spiegeln die beiden ersten Verständnisse von Problemlösen, das *Problem solving as context* und das *Problem solving as a skill*, nicht die Komplexität und das Potential des Problemlösens wider, welche ihm von der Mathematik her zugeschrieben werden. Auf der anderen Seite sind gerade diese beiden weniger anspruchsvollen Verständnisse einfacher im Unterricht bzw. der Ausbildung umzusetzen als das Verständnis des Problemlösens als Kunst.

Leuders (2003) beschreibt neben den drei vorherigen Sichtweisen zwei weitere: *Problemlösen als Beweisen* und *Problemlösen als Rätsellösen*. Während erstere auch von Polya (2010) als problemlösende Tätigkeit thematisiert wird,

<sup>3</sup>Halmos (1980) spricht gar vom „Herz der Mathematik“.

wird letztere von Charles und Lester (1982) als Klassifikation von Problemen erwähnt. Die erste Sichtweise fokussiert die innermathematische Tätigkeit des Beweisens, setzt ein „grundlegendes Verständnis formaler argumentativer Methoden der Mathematik voraus“ (Leuders, 2003, S. 120) und ist deswegen ungeeignet, um auch jüngere Schülerinnen und Schüler an das Problemlösen heranzuführen. Als letzte Sichtweise beschreibt *Problemlösen als Rätsellösen* die Tendenz in einigen Ländern, Problemlösen anhand von Rätseln zu thematisieren. „Puzzles depend on luck or guessing or a use of unusual strategies toward their solution“ (Charles und Lester, 1982 zitiert nach Hembree, 1992, S. 249). Leuders bemängelt hier besonders den unreflektierten Einsatz des Problemlösens, der zu keinen tragfähigen Ideen im Mathematikunterricht führe.

Stanic und Kilpatrick (1989) und auch Leuders (2003) argumentieren übereinstimmend, dass das Problemlösen im Kontext des Mathematikunterrichts<sup>4</sup> mehr ist als die eigentliche Fertigkeit, ein aktuell auftretendes Problem zu lösen. Durch das Favorisieren des Verständnisses *Problem solving as art* machen Stanic und Kilpatrick (1989) deutlich, in welchem Sinn das Entdecken ein zentraler Aspekt des Problemlösens ist. Leuders (2003) betont, dass *Problemlösen und Problemfinden als Mathematik betreiben* die den Kern der Mathematik treffendste Sichtweise ist, um Problemlösen als Unterrichtsgegenstand einzusetzen. Dabei macht er deutlich, dass diese Vorgehensweise sich nicht nur auf den eigentlichen Lösungsprozess beschränkt, sondern zusätzlich aus den beiden Schritten *Problem finden* und *Problem weiterentwickeln*, die erst eine ganzheitliche Betrachtung des Problems an sich ermöglichen.

Stanic und Kilpatrick (1989) und Leuders (2003) thematisieren im Hinblick auf die Begriffe *Problem* und *Problemlösen* Inhalte, Grundannahmen in der Typisierung und unterschiedliche Zielsetzungen des Problemlösens im Mathematikunterricht. Diese stellen die Grundlage für eine Vielzahl von Modellen dar, die den Prozess und die Tätigkeiten während des Problemlösens illustrieren und die besondere Stellung des Problemlösens gegenüber dem Abarbeiten von reinen Routineaufgaben herausstellen. Nach Philipp (2013) können die Modelle hinsichtlich ihrer jeweiligen Schwerpunktsetzung in Modelle der *äußeren Struk-*

---

<sup>4</sup>Die Einschränkung auf den schulischen Mathematikunterricht resultiert aus der Position der Autoren. Die vertretene Sichtweise lässt sich auf das Lehren von mathematischem Problemlösen im Allgemeinen erweitern.

*tur* und der *inneren Struktur* unterteilt werden. Modelle der *äußeren Struktur* bilden die verschiedenen Phasen im Bearbeitungsprozess von Problemen und die möglichen Übergänge zwischen diesen ab. Hier liegt der Fokus auf der Organisation und dem zeitlichen Ablauf des Bearbeitungsprozesses. Dahingegen thematisieren Modelle der *inneren Struktur* Strategien und Heurismen, welche beim Lösen von Problemen eingesetzt werden. In diesen Modellen werden zudem die kognitiven Prozesse und Beliefs betrachtet, die im Zusammenhang mit Problemlösen von Bedeutung sind.

Äußere und innere Struktur sind dabei nicht als unabhängige und nebeneinander existierende Systeme zu verstehen. Beide Strukturen werden vielfach kombiniert, indem zum Beispiel bestimmte Heurismen (Bestandteile der inneren Struktur) besonders zu bestimmten Zeitpunkten im Problemlöseprozess (äußere Struktur) Anwendung finden. Diese Modelle dienen der Unterstützung von Lehrenden und Lernenden, der Beschreibung empirischer Beobachtungen oder vereinen beide Aspekte. In den folgenden beiden Abschnitten werden ausgewählte Modelle der *äußeren* und der *inneren* Struktur des Problemlösens in der Mathematik vorgestellt, verglichen und diskutiert.

#### 4.1.4 Modelle der äußeren Struktur: Phasen und ihre Übergänge

Mit den Veröffentlichungen von Polya Mitte des 20. Jahrhunderts wurde die Forschung hinsichtlich des mathematischen Problemlösens auf ein neues Fundament gestellt. So nutzen die meisten Modelle zum Problemlösen die vier nachstehenden Phasen von Polya als Grundlage (vgl. Fernandez, Hadaway & Wilson, 1994): *Verstehen des Problems*, *Ausdenken eines Plans*, *Durchführung des Plans* und *Rückschau* (siehe Abbildung 4.2). Im Folgenden wird das Modell von Polya präsentiert, um es als Grundlage für die späteren Analysen im empirischen Teil dieser Arbeit zu nutzen. Die vier Phasen des Modells werden dabei vergleichend zu weiteren ausgewählten Problemlösemodellen diskutiert. Diese orientieren sich am Modell von Polya und fügen diesem dabei Aspekte hinzu. Zunächst wird für ein besseres Verständnis der einzelnen Phasen die Struktur von Phasenmodellen zum mathematischen Problemlösen dargestellt. Anschließend folgt die detaillierte Betrachtung der einzelnen Phasen.

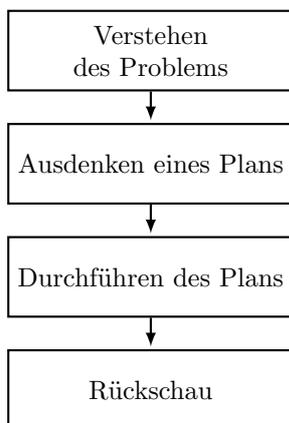


Abbildung 4.2: Problemlösephasen nach Polya (1957).

Alle hier thematisierten Modelle lassen sich aufgrund ihrer Struktur entweder als *linear* und oder als *zyklisch* beschreiben. Diese Unterteilung lässt sich wie folgt verstehen: *Lineare* Modelle legen im Prozess des Problemlösens einen eindeutig bestimmten Anfangs- und Endzustand fest. Die jeweiligen Autorinnen argumentieren dabei mit einem (streng) linearen Bearbeitungspfad zwischen diesen beiden Zuständen. Diese Modelle schließen zwar Zyklen nicht explizit aus, begrenzen diese aber auf wenige Phasenübergänge, insbesondere werden keine Zyklen zwischen dem Anfangszustand, dem *Verstehen des Problems* und dem Endzustand, dem Reflektieren bzw. Verifizieren des Lösungsprozesses angenommen. Die Modelle von Polya (1957) und Schoenfeld (1980) sind den linearen zuzuordnen. Als Repräsentanten *zyklischer* Modelle werden die Arbeiten von Mason et al. (2010) und J. W. Wilson et al. (1993) vorgestellt (vgl. Tabelle 4.1). Diese unterscheiden sich von den linearen Modellen von Polya und Schoenfeld dadurch, dass sie zwischen nahezu allen Phasen Übergänge zulassen, explizit auch zwischen Anfangs- und Endzustand.

Mit seinem Modell illustriert Polya einen idealisierten Lösungsprozess und präsentiert ein Vorgehen, welches auf einem direkten Weg zur Lösung führt. Er bietet in erster Linie Methoden an, wie beim Problemlösen Brüche und Irrwege innerhalb einer Phase aufgedeckt und korrigiert werden können (z. B. das Bearbeiten ähnlicher Probleme oder die Überprüfung einzelner Schritte im

Tabelle 4.1: Vergleich der Ebenen der Phasenmodelle von Polya (1957), J. W. Wilson et al. (1993), Schoenfeld (1980) und Mason et al. (2010).

Ebene	Polya	Schoenfeld	Mason et al.	Wilson et al.
1	Verstehen des Problems	Analysis	Entry	Understanding the Problem
2	Ausdenken eines Plans	Exploration ↔ Design	Attack	Making a Plan
3	Durchführen des Plans	Implementation		Carrying Out the Plan
4	Rückschau	Verification	Review	Looking Back

Dargestellt ist eine mögliche Reihenfolge der thematisierten Modelle. Die Struktur ändert sich von links nach rechts von linear hin zu zyklisch.

Lösungsprozess auf ihre Richtigkeit hin). Globale Fehler im Lösungsprozess, welche einen Wechsel in eine vorherige Phase bzw. einen kompletten Neustart zur Folge hätten, liegen nicht im Fokus seines Modells.

Ein weiteres bekanntes Modell stammt von Schoenfeld (1980). Er unterteilt den Prozess in fünf Phasen, welche sich eng an denen von Polya orientieren (vgl. Abbildung 4.3). Schoenfelds Modell stellt ebenfalls einen idealisierten Ablauf des Problemlöseprozesses dar. Es gibt das Vorgehen von Expertinnen wieder, wie es sich aus seinen Untersuchungen ergeben hat. Zugleich nutzt er es in seinen universitären Kursen zum Problemlösen. Das Hinzufügen der *Exploration*-Phase erlaubt eine Unterscheidung in strukturierte und weniger strukturierte Ansätze und betont dabei zusätzlich die Wichtigkeit des Einsatzes selbstregulatorischer Fähigkeiten beim Problemlösen.

Das erste *zyklische* Modell stammt von Mason et al. (2010). Dieses greift die Phasen *Ausdenken eines Plans* und *Durchführen des Plans* von Polya auf, führt diese jedoch zur *Attack*-Phase zusammen. Zudem sind zwischen allen Phasen mögliche Übergänge vorgesehen.<sup>5</sup> Mason et al. (2010) beschreiben den Pro-

<sup>5</sup>Mason et al. beschreiben in ihrem Buch verschiedene Varianten des Modells. Die hier dargestellte ist eine mögliche, in anderen fehlt beispielsweise der Pfeil bzw. Übergang zwischen

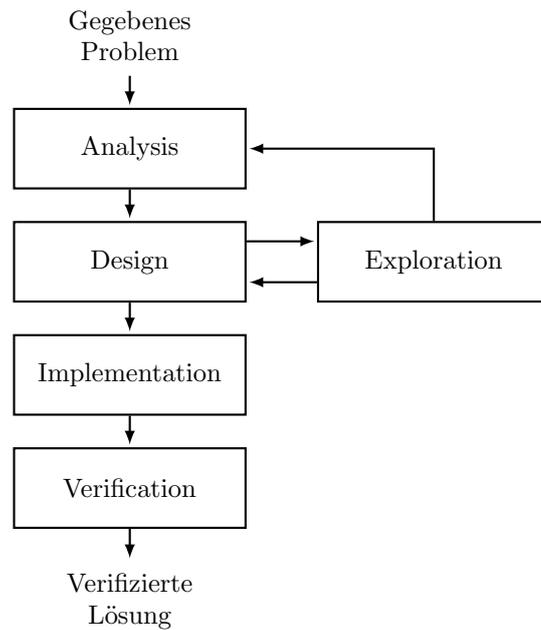


Abbildung 4.3: Problemlösephasen nach Schoenfeld (1980, S. 800).

blemlöseprozess in ihrem Modell mit Hilfe von drei Phasen: Der *Entry*-Phase, der *Attack*-Phase und der *Review*-Phase (vgl. Abbildung 4.4).

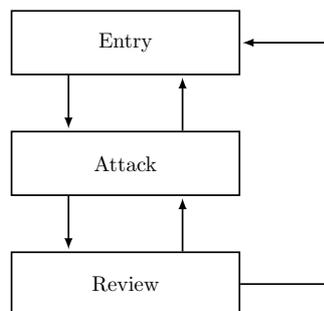


Abbildung 4.4: Problemlösephasen nach Mason et al. (2010, S. 26).

Sehr eng an Polya orientiert sich das Modell von J. W. Wilson et al. (1993), das von diesen als eine dynamische und zyklische Interpretation des ursprünglichen angesehen wird (Fernandez et al., 1994). Dies zeigt sich in der kreisförmigen

---

*Review*- und *Entry*-Phase.

Anordnung der Phasen sowie den rückläufigen Pfeilen zwischen den einzelnen Phasen (siehe Abbildung 4.5). Die jeweiligen Phasen mit ihren verschiedenen charakteristischen Aktivitäten bleiben gegenüber dem ursprünglichen Modell unverändert. J. W. Wilson et al. (1993) illustrieren die Dynamik in ihrem Modell mit einem möglichen Problemlöseprozess eines Studierenden:

A student may begin with a problem and engage in thought and activity to understand it. The student attempts to make a plan, and in the process may discover a need to understand the problem better. Or, when a plan has been formed, the student may attempt to carry it out and be unable to do so. The next activity may be attempting to make a plan, or going back to develop a new understanding of the problem, or posing a new, possibly related, problem to work on. (S. 61)

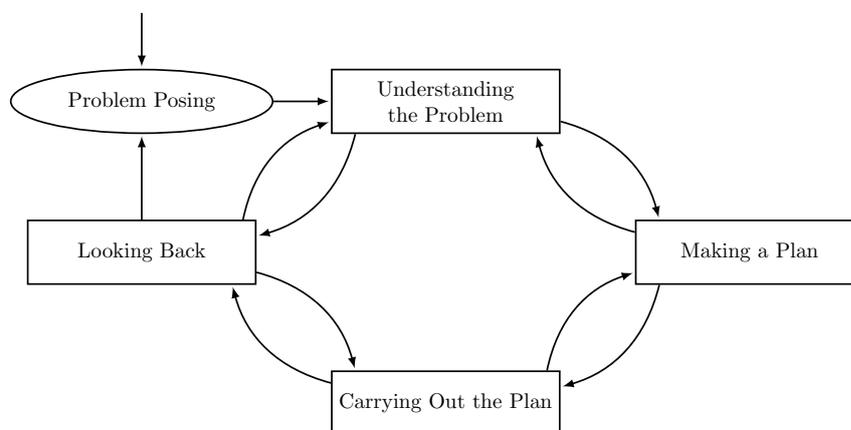


Abbildung 4.5: Problemlösephasen nach Wilson et al. (1993, S. 62).

Dieses Modell nutzen J. W. Wilson et al. (1993) in Kursen zum mathematischen Problemlösen als Grundlage, um eine Vielzahl von Zielen zu diskutieren: „pedagogical, curricular, instructional, and learning issues involved with the goals of mathematical problem solving in our schools“ (S. 61). Außerdem verstehen sie es als eine Antwort auf die in amerikanischen Lehrbüchern oft anzutreffenden linearen Problemlösemodelle, welche ihrem Verständnis nach nicht

die wahre Natur des Problemlösens in der Mathematik wiedergeben. In einer Erweiterung des Modells (vgl. Fernandez et al., 1994) fügen die Autorinnen die „Managerial Processes“ hinzu. Diese beschreiben die metakognitiven Prozesse, die bereits im Modell von Schoenfeld ein wichtiges Kernelement darstellen. An den Übergängen zwischen den jeweiligen Phasen bilden diese Prozesse die Grundlage für Entscheidungen, aus bekannten Heurismen die nützlichen auszuwählen oder neue Heurismen zu testen bzw. abzuleiten.

Nach der allgemeinen Beschreibung der Struktur der Modelle folgt nun die detaillierte Betrachtung der einzelnen Phasen im Problemlöseprozess, die ausgehend von Polya mit den jeweiligen Ergänzungen der anderen Autorinnen vorgestellt werden.<sup>6</sup>

### **Verstehen des Problems**

In der ersten Phase *Verstehen des Problems* muss das Problem in seiner Gänze durchdrungen und inhaltlich verstanden werden (Polya, 1957, Schoenfeld, 1980, Mason et al., 2010, vgl. auch Polya, 1964). Dazu sollte die Problemlöserin in der Lage sein, die wichtigsten Bestandteile der Problemstellung wie die gesuchten Unbekannten, die gegebenen Daten und die Bedingungen der Problemsituation wiederzugeben und umzuformulieren. Zudem sollte das Problem von unterschiedlichen Seiten analysiert werden, um alternative Zugänge zu erschließen. Mason et al. (2010) empfehlen dafür, sich an den folgenden Leitfragen zu orientieren: „Was weiß ich?“, „Was suche ich?“ und „Was kann ich einführen?“ (S. 27). Alle Autorinnen nennen in diesem Zusammenhang auch die Möglichkeiten, sich durch den Einsatz von Heurismen, wie dem Anfertigen von Zeichnungen oder durch das Einführen von sinnvollen Bezeichnungen und Notationen, dem Problem zu nähern und den Verstehensprozess zu unterstützen. Zusätzlich kann die Betrachtung von „results of specializing“ (Mason et al., 2010, S. 26), von Ergebnissen aus Beispielen, beim Problemverständnis helfen.

---

<sup>6</sup>Eine vergleichbare Diskussion findet sich auch bei Rott (2014).

## Ausdenken eines Plans

Die zweite Phase, das *Ausdenken eines Plans*, bildet eine Schlüsselposition beim Finden einer Lösung des Problems. Für diese schlägt Polya, wie auch für die übrigen Phasen, Fragen vor, die sich die Problemlöserin stellen sollte: „Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? [...] Kennt ihr eine Aufgabe mit einer ähnlichen Unbekannten?“ (Polya, 2010, S. 23–24). Diese Fragen zielen dabei auf die Verwendung bestimmter Heurismen, die den Lösungsprozess in der jeweiligen Phase unterstützen können (vgl. Abschnitt 4.1.5). Während Polya (1957) sowohl für die inhaltlichen als auch für die strukturellen Planungen eine Phase vorsieht, spaltet Schoenfeld diese in zwei getrennte aber interagierende Komponenten auf. In der *Design*-Phase wird die Strukturierung des Lösungsprozesses organisiert. Schoenfeld (1980) empfiehlt zu diesem Zeitpunkt das folgende Vorgehen: „an outline of the solution should be developed at a rough qualitative level and then elaborated in detail as the solution process proceeds“ (S. 802). Schoenfeld versteht diese Phase nicht als eine eigene, von den anderen getrennte Phase, stattdessen dient sie dazu den gesamten Lösungsprozess zu steuern: „it entails keeping a global perspective on the problem and proceeding hierarchically“ (S. 802). Die Aktivitäten dieser Phase interagieren mit den Handlungen in der *Exploration*-Phase, die wiederum der zweiten Phase im Modell von Polya ähnelt. Um Lösungsideen zu generieren, muss die Problemlöserin in der Lage sein, Zusammenhänge zwischen den gegebenen Informationen und den gesuchten Unbekannten herzustellen. Hierfür ist es nötig, den Großteil der Heurismen einzusetzen, um zum Beispiel mit Hilfe der Analyse von ähnlichen Problemen aus der Vergangenheit oder Modifizierungen des gegebenen Problems Lösungsansätze zu generieren.

Für Polya folgt als nächster Schritt das *Durchführen des Plans*, dagegen kann der Prozess bei Schoenfeld auf zwei unterschiedliche Weisen verlaufen. Entweder hat die *Exploration*-Phase einen substanziellen Fortschritt gebracht und in der Folge wird der Planungsprozess in der *Design*-Phase fortgeführt, oder die *Analysis*-Phase muss ein weiteres Mal genutzt werden, um mit den Informationen aus der *Exploration*-Phase das Problem möglicherweise neu anzugehen. Während des Bearbeitungsprozesses kann und sollte die problemlösende Person nach Schoenfeld häufiger zwischen diesen beiden Phasen wechseln. Mit der Darstellung der *Design*- und *Exploration*-Phase stellt Schoenfeld die Notwen-

digkeit einer permanenten Kontrolle („control“) des gesamten Lösungsprozesses noch deutlicher heraus als Polya.

Das Modell von Mason et al. (2010) hebt sich von den beiden vorherigen insofern ab, als die Planung und Durchführung in der *Attack*-Phase vereint werden. Mason et al. greifen hier das Thema der Barrieren im Problemlöseprozess (vgl. Abschnitt 4.1.2) auf und beschreiben, dass in dieser Phase viele Störungen („STUCK“-Momente) im Prozess auftreten können, welche die Problemlöserin zwingen, die Bearbeitung zu unterbrechen und eventuell in die vorherige Phase zurückzukehren, um ein Hindernis zu überwinden („AHA“-Moment). Für Mason et al. (2010) ist zudem die Verwendung von Spezialisierungen und Generalisierungen eine wichtige Komponente im Problemlöseprozess. Die *Attack*-Phase ist wie folgt gekennzeichnet: Nach einem „STUCK“-Moment kann die Betrachtung eines Spezialfalls der Problemlöserin helfen, die Situation zu verstehen („AHA“-Moment). Eine anschließende Generalisierung befähigt sie, den Lösungsprozess fortzuführen.

### **Durchführen des Plans**

Nachdem sowohl der Plan zur Lösung als auch der Entwurf für die Herangehensweise an das Problem vorliegen, müssen die zusammengefügte Informationen für das *Durchführen des Plans* genutzt werden. Die Beschreibung dieser Phase gleicht sich bei Polya und Schoenfeld. Beide betonen, dass es wichtig ist, mit Ruhe und Sorgfalt vorzugehen und sich im Verlauf des Bearbeitungsprozesses der Richtigkeit der einzelnen Schritte bewusst zu sein. Der Unterschied zwischen „seeing“ und „proving“ (Polya, 1957, S. 13) sollte bei der Prüfung jedes einzelnen Schrittes bewusst nachvollzogen werden. Damit wird die Vorgehensweise zur Lösung des Problems transparent gemacht.

### **Rückschau**

Wenn die Lösung des Problems ermittelt wurde, folgt die kritische Phase der *Rückschau*. In dieser sollte zum einen die Korrektheit des Ergebnisses noch einmal in Gänze überprüft werden und zum anderen, der viel entscheidendere Punkt, sollte die Reflexion des Lösungsweges dazu genutzt werden, die eigenen

Problemlösefähigkeiten zu verbessern. Zudem sollten die Ergebnisse, Methoden und Prozesse in einen größeren Kontext gestellt werden (Mason et al., 2010). D. h., der eigene Lernprozess wird durch die Reflexion der Vorgehensweise und aller eingesetzter Methoden angeregt und führt dazu, dass zukünftige Probleme mit einem erweiterten Repertoire an Möglichkeiten bearbeitet werden können, also Lernen stattfindet.

Mason et al. (2010) stellen die besondere Bedeutung der *Entry*- und *Review*-Phase im gesamten Lösungsprozess heraus:

Most people fail to resolve questions satisfactorily because of inadequate attention to Entry and Review. The Attack phase can only come about if the question has been satisfactorily entered, and if time has been devoted in the past to learning from experience by reviewing key moments in thinking. (S. 25)

Im Unterschied zu den beiden Modellen von Polya und Schoenfeld weisen Mason und et al. explizit auf die Möglichkeit hin, in die *Entry*-Phase zurückzukehren, falls in der *Review*-Phase Fehler oder Ungenauigkeiten in der Lösung entdeckt wurden (Mason et al., 2010). Insgesamt stellt dieses Modell die Möglichkeit, bei der Bearbeitung eines Problems zu scheitern, deutlicher heraus als die beiden vorherigen. So kann die *Attack*-Phase auch mit einem Abbruch enden. Für Mason et al. sind Scheitern bzw. „Steckenbleiben“ wichtige Facetten beim Problemlösen und fördern die kognitiven Leistungen: „Probably the single most important lesson to be learned is that being stuck is an honourable state and an essential part of improving thinking“ (Mason et al., 2010, S. viii). Während J. W. Wilson et al. (1993) auf die ersten drei Phasen nur am Rande eingehen, und damit implizit die Ausführungen Polyas übernehmen, betonen sie, wie auch die vorherigen Autorinnen, die Wichtigkeit der letzten Phase *Looking back* in ihrer Modellierung des Problemlöseprozesses. Wenn diese Phase von den Studierenden durchgeführt wird, fördert dies in besonderer Weise die Fähigkeit, Probleme zu lösen. In diesem Zusammenhang benennen sie Schlüsselaktivitäten, welche schon bei Polyas Modell entscheidend waren: „checking the result, checking the argument, deriving the result differently, using the result, or the method, for some other problem, reinterpreting the problem, interpreting the result, or stating a new problem to solve“ (S. 64). Diese unterschiedlichen Aktivitäten führen bei Yimer und Ellerton (2010) zu einer Unter-

teilung der *Rückschau*-Phase in eine *Evaluation*, in der von der Problemlöserin das Ergebnis auf Korrektheit überprüft wird, und in eine *Internalization*, in der der Lösungsprozess und die eingesetzten Strategien reflektiert werden. Rott (2014) konnte in seiner Studie keine *Internalization* beobachten. In einem Vergleich von Schulbüchern aus China, Singapur und den USA konnten Fan und Zhu (2007) Ähnliches zeigen, nämlich dass in mehr als der Hälfte der Fälle die *Rückschau*-Phase dazu genutzt wird, die Lösung zu überprüfen, seltener werden Prozeduren und das Problem selbst reflektiert.

Gegenüber den vorherigen Modellen benennen J. W. Wilson et al. (1993) eine zusätzliche Phase, die des *Problem Posing*. Falls diese Phase im Anschluss an einen erfolgreichen Problembearbeitungsprozess stattfindet, kann dieser Zeitpunkt genutzt werden, um über das Problem zu reflektieren. So ist es möglich, das Problem durch Umformulierung oder Erweiterung der Problemstellung sowie Übertragung auf andere Probleme über den gerade abgeschlossenen Bearbeitungsprozess hinaus nutzbar zu machen. Dieser Zusatz, welcher mit dem *Problemlösen und Problemfinden als Mathematikbetreiben* von Leuders (2003) vergleichbar ist, macht deutlich, dass dieses Modell zumindest teilweise den Zweck eines Lehr-Modells hat.

Die Darstellung der verschiedenen Modelle (siehe Abbildungen 4.2 bis 4.5 und auch Tabelle 4.1) macht deutlich, dass sich diese neben den möglichen (zyklischen) Übergängen zwischen den Phasen hauptsächlich im Grad der Ausdifferenzierung der einzelnen Phasen im Bearbeitungsprozess unterscheiden. So verwenden Wilson et al. in ihrem Modell dieselben Phasenbenennungen wie Polya in seinem Modell und übernehmen auch die Beschreibungen der Phasen. Ihr Modell unterscheidet sich jedoch in zwei wesentlichen Punkten von dem von Polya. So lassen Wilson et al. explizit auch Sprünge in die vorherige Phase zu. Außerdem beschreiben sie die Möglichkeit, nach einer erfolgreichen *Rückschau* neue Probleme zu stellen, die im Zusammenhang mit dem gerade gelösten Problem stehen. Auch beim Modell von Schoenfeld ist die enge Verbindung zu Polyas Modell deutlich zu erkennen. Bis auf die Ausdifferenzierung der Planentwicklung in zwei Phasen und die stärkere Hervorhebung selbstregulatorischer Handlungen ähneln sich die beiden Modelle sehr. Mason et al. orientieren sich ebenfalls an Polyas Modell, wobei sie durch die Verschmelzung der Phasen *Ausdenken eines Plans* und *Ausführen des Plans* zur *Attack*-Phase

eine Phase weniger verwenden. Gleichzeitig fügen sie Inhalte, zum Beispiel aus Polyas zweiter Phase, ihrer Eröffnungsphase hinzu. So schlagen sie in dieser Phase bereits als eine der leitenden Fragen vor, nach analogen oder ähnlichen Problemen zu suchen, was Polya erst für die zweite Phase empfiehlt. Die Besonderheit und Wichtigkeit der beiden ersten Phasen im Bearbeitungsprozess heben auch Chinnappan und Lawson (1996) hervor: „the planning process forced the solver to make optimum use of information that was identified and information that was generated“ (S. 13). Von den bisher präsentierten Modellen stellen nur Mason et al. Hindernisse und Hürden im Bearbeitungsprozess als nützliche und wichtige Erfahrung dar, die für das Erlernen von Problemlösen im Allgemeinen, aber auch für das Lösen des vorliegenden Problems im Speziellen hilfreich sein können.

Die Modelle in Tabelle 4.1 beschreiben idealtypische Lösungsprozesse, wie sie in der Arbeit von Expertinnen zu erkennen sind und die zum Lehren bzw. Lernen von Problemlösen hilfreich sind. Im Gegensatz dazu hat Rott (2014) Schülerinnen beim Lösen von Problemen beobachtet und ein Modell aufgestellt, dem diese Beobachtungen als Grundlage dienen. Dieses Modell orientiert sich nur an den empirischen Daten und stellt die realen Übergänge und Abläufe in Problemlöseprozessen dar. Dadurch wird es deutlich komplexer als die vorherigen, es ist jedoch auch näher an realen Problemlöseprozessen ausgerichtet.

### Phasenmodell nach Rott

Aufbauend auf den Arbeiten von Polya (1957), Schoenfeld (1985), Mason et al. (2010) und J. W. Wilson et al. (1993) hat Rott (2014) ein Phasenmodell erstellt, das die Unterteilung von Schoenfeld (1985) nutzt, den Ablauf dieser Phasen jedoch zyklisch interpretiert (siehe Abbildung 4.6). Rott (2014) benennt vier Eigenschaften, welche leitend für die Entwicklung seines Modells waren: Zuerst sollte es mit dem Modell möglich sein, strukturiertes und unstrukturiertes Verhalten zu unterscheiden (*Planning*<sup>7</sup> Phasen gegenüber *Exploration*-Phase). Zweitens sollten die *Planning* und *Implementation*-Phase verbunden sein, um planendes Verhalten abbilden zu können. Sowohl lineare und zyklische Prozesse sollten dargestellt werden können als auch metakognitive Aktivitäten sowie selbstreguliertes Verhalten explizit enthalten sein.

---

<sup>7</sup>Hierbei handelt es sich um die oben vorgestellte *Design*-Phase.

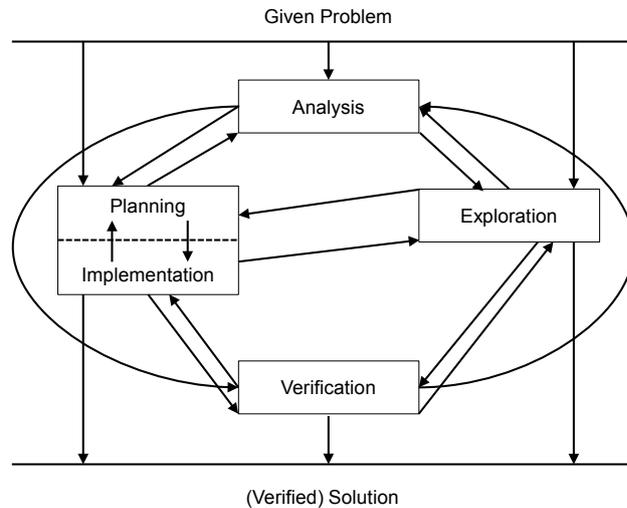


Abbildung 4.6: Problemlösephasen nach Rott (2014, S. 273).

Die zuvor genannten Eigenschaften werden wie folgt in das Modell (vgl. Abbildung 4.6) integriert. Sowohl die *Planning* als auch die *Exploration*-Phase sind als unterscheidbare Phasen vorhanden. Die Möglichkeit, planendes Verhalten abzubilden, ist durch die enge Verknüpfung der *Planning* und *Implementation*-Phasen gegeben. Lineare Bearbeitungsprozesse können ebenso wie zyklische Prozesse dargestellt werden, wobei lineare Bearbeitungen durch senkrechte Pfeile im Modell dargestellt werden. Die letzte Eigenschaft des Modells, metakognitive Aktivitäten und selbstreguliertes Verhalten abzubilden, wird durch die Pfeile zwischen den Phasen dargestellt, welche einen „(expliziten oder impliziten) Einsatz von Metakognition“ (Rott, 2013, S. 298) symbolisieren. Dieses Modell, welches auf der Grundlage von Beobachtungen entstanden ist, ist deutlich komplexer als die zuvor vorgestellten Modelle. Dies verdeutlicht noch einmal, dass es sich bei den vorherigen Modellen um idealisierte Prozessdarstellungen handelt, wohingegen das Modell von Rott versucht, alle beim Problemlösen tatsächlich auftretenden Prozesse abzubilden. Reale Problemlöseprozesse von Novizen sind in ihrer Vielfalt eher durch komplexere Modelle darstellbar. Gleichzeitig zeigt sich an diesem Modell, dass die einzelnen Handlungen im Prozess über alle Modelle hinweg vergleichbar bleiben.

### 4.1.5 Modelle der inneren Struktur: Heurismen und ihr Einsatz

Nach den verschiedenen Ansätzen zur Erläuterung der *äußeren Struktur* des Problemlösens werden nun die Elemente der *inneren Struktur* vorgestellt. Dabei ist zu beachten, dass beide Strukturen nicht als getrennten Systeme zu verstehen sind. Vielmehr sind sie eng miteinander verbunden. Dies zeigt sich darin, dass viele Autorinnen in ihren Modellen Heurismen bestimmten Phasen zuordnen. So beschreibt Schoenfeld (1980) in seinem Modell die häufig verwendeten Heurismen im Zusammenhang mit den jeweiligen Phasen, und Bruder und Collet (2011) weisen bei verschiedenen Heurismen auf die besondere Eignung in bestimmten Phasen hin. Tietze, Klika und Wolpers (2000) ordnen in ihrem Planungsschema für das Lösen von Problemen auch unterschiedliche Heurismen bestimmten Phasen zu, in denen diese den jeweils vorherrschenden Prozess in besonderem Maße unterstützen können.

Die Begriffe *Heuristik* und *Heurismen* werden in der deutschsprachigen Literatur nicht einheitlich verwendet.<sup>8</sup> Tietze et al. (2000) sprechen von globalen und lokalen Heuristiken, wobei sie Heuristik als Kurzform für heuristische Regeln, Prinzipien und Hilfen verwenden. Dabei beziehen sich die globalen Heuristiken „mehr auf den Problemlöseprozess in seiner Gesamtheit“ (Tietze et al., 2000, S. 99) während die lokalen Heuristiken „dem Schüler helfen [sollen], zielgerichtet Hypothesen zu entwickeln und sie effektiv und mit geringem Aufwand zu überprüfen. Beispiele hierfür sind ‚Suche und benutze Spezialfälle‘ oder ‚Nutze analoge Aufgaben‘“ (Tietze et al., 2000, S. 102). Zu den globalen Heuristiken zählen Tietze et al. (2000) neben der Wahl der Arbeitsrichtung auch das Zerlegen des Lösungsprozesses in verschiedene Phasen. In diesem Zusammenhang verweisen die Autoren explizit auf das Phasenmodell von Polya (vgl. Abschnitt 4.1.4). Beachtet werden muss dabei aber, dass Polya den Begriff Heuristik auf eine andere Weise verwendet. Er versteht unter diesem Begriff einen Wissenszweig, der sowohl zur Logik, zur Philosophie als auch zur Psychologie gehört und zum Ziel hat, Methoden und Regeln des Entdeckens und Lernens zu studieren (Polya, 1957). „Zu [den] [...] spezifischen Zielen [der Heuristik] gehört es, in allgemeiner Formulierung die Gründe herauszustellen, für

---

<sup>8</sup>In der englischsprachigen Literatur wird dagegen nur von *heuristics* gesprochen.

die Auswahl derjenigen Momente bei einem Problem, deren Untersuchung uns bei der Auffindung der Lösung helfen könnte“ (Polya, 1964, S. 5). Ähnliche Definitionen finden sich in vielen Veröffentlichungen zum Problemlösen (z. B. Bruder & Collet, 2011). Schoenfeld (1985) definiert Heurismen wie folgt:

Heuristic strategies are rules of thumb for successful problem solving, general suggestions that help an individual to understand a problem better or to make progress toward its solution. Such strategies include exploiting analogies, introducing auxiliary elements in a problem or working auxiliary problems, arguing by contradiction, working forward from the data, decomposing and recombining, exploiting related problems, drawing figures, generalizing and using the ‚inventor’s paradox‘, specializing, using reduction ad absurdum and indirect proof, varying the problem, and working backward.  
(S. 23)

Dies betont den Aspekt, dass Heurismen zum Lösen von Problemen keine Algorithmen sind, die stringent zum Ziel führen. Auf ähnliche Weise verstehen Bruder und Collet (2011) Heurismen als Verfahren, welche sich grundsätzlich von „den aus der Mathematik bekannten algorithmischen und quasialgorithmischen Verfahren z. B. zum Umformen von Termen und Lösen von Gleichungen“ (S. 42) unterscheiden. „[S]ie bieten lediglich Orientierung [...] beim Lösen einer Aufgabe“ und „keine Lösungsgarantie wie die Algorithmen“ (S. 42). Im Gegensatz zu Algorithmen können Heurismen zudem für eine größere Anzahl von Problemen als Hilfen herangezogen werden (vgl. Polya, 1964; Tietze et al., 2000; Heinze, 2007; Rott, 2013).<sup>9</sup>

Schoenfeld benennt in seiner obigen Definition eine große Anzahl von möglichen Methoden, welche sich so auch bei anderen Autorinnen wiederfinden. Die Aufzählungen unterscheiden sich hauptsächlich in der Art und Weise, wie die Heurismen kategorisiert werden, sei es nach Abstraktionsgrad wie bei Bruder und Collet (2011), nach der grundlegenden Vorgehensweise wie bei Schwarz (2006), nach Domänenspezifität wie bei Chinnappan und Lawson (1996) oder nach Generalisierungseigenschaft wie bei Tietze et al. (2000). Während Bruder und

---

<sup>9</sup>Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werde ich den Begriff *Heurismen* für Werkzeuge und Methoden zum Problemlösen nutzen. Den Begriff *Heuristik* nutze ich für die Wissenschaft vom Problemlösen.

Collet (2011) die drei Kategorien *heuristische Hilfsmittel*, *heuristische Strategien* und *heuristische Prinzipien* vorschlagen, unterteilen Chinnappan und Lawson (1996) Heurismen in *Domain-related Actions*, *Domain-specific Actions* sowie *Task-specific actions*. Tietze et al. (2000) wiederum unterscheiden zwischen *globalen* und *lokalen Heuristiken*.

Argumentativ werde ich nun wie folgt vorgehen: Aufbauend auf der Klassifikation von Bruder und Collet (2011) werde ich die für die vorliegende Arbeit wichtigen Heurismen vorstellen, diskutieren und Unterschiede bzw. Gemeinsamkeiten zwischen verschiedenen Autorinnen herausarbeiten. Dabei werde ich Bruder und Collet folgend zuerst *heuristische Hilfsmittel*, danach *heuristische Strategien* und abschließend *heuristische Prinzipien* thematisieren.<sup>10</sup>

## Heuristische Hilfsmittel

Heuristische Hilfsmittel dienen dazu, Probleme durch andere Repräsentationsformen für die Problemlöserin bearbeitbar zu machen (*Tabelle*, *Gleichung*, *Informative Figur*), mögliche Lösungswege zu strukturieren (Lösungsgraph) oder vorhandenes Wissen und bekannte Zusammenhänge für die Lösung zu aktivieren (Wissensspeicher). Die Hilfsmittel sollen die Problemlöserin dabei unterstützen, die wesentlichen Aspekte des Problems herauszuarbeiten und diese für den weiteren Prozess in den Fokus zu nehmen. So kann der Wechsel bzw. die Kombination verschiedener Repräsentationsformen selbst als Heurismus verstanden werden (Tietze et al., 2000; Zimmermann, 2003; Schwarz, 2006).

Damit eine *Abbildung* im Sinne von Bruder und Collet (2011) eine *Informative Figur* darstellt, muss diese Informationen enthalten, die mögliche Zusammenhänge und Beziehungen zwischen den Elementen aufzeigen. Zu solchen Visualisierungen zählen Bruder und Collet die Darstellung von Anzahl, Größen und Anteilen durch Längen von Strecken oder Größen von Flächen, die Darstellung von Rechenoperationen (z. B. Rechteck als Repräsentation einer Multiplikation zweier reeller Zahlen) oder die Darstellung von Zuordnungen mehrerer Größen

---

<sup>10</sup>Die Darstellung ist nicht als vollständige Übersicht über Heurismen zu verstehen. Es existiert eine Vielzahl von Klassifikationen, die über die hier gewählte Darstellung hinausgehen, auch von den hier genannten Autorinnen.

(z. B. Koordinatensystem und Graphen von Funktionen) (vgl. Bruder & Collet, 2011, S. 47). Auch Polya (1957) sieht in der Anfertigung von *Abbildungen* eine wichtige Unterstützung für den Problemlöseprozess. So stellt er als besonderen Vorteil die Sicherung von Informationen durch eine Zeichnung heraus: „[a] detail pictured in our imagination may be forgotten; but the detail traced on paper remains [...]“ (Polya, 1957, S. 103–104). Mit Hilfe einer symbolischen Notation, die auf Basis einer *Abbildung* entstehen kann, ist im Anschluss eine Weiterarbeit auch ohne die *Abbildung* möglich, zum Beispiel bei der Überführung der Zusammenhänge in eine *Gleichung*. Als eine der grundlegenden heuristischen Techniken findet sich das Anfertigen einer *Abbildung* in nahezu allen Übersichten zu Problemlösestrategien wieder (vgl. Schoenfeld, 1985; Chinnappan & Lawson, 1996; Tietze et al., 2000; Zimmermann, 2003).

Eine weitere Repräsentationsform, die nach Bruder und Collet (2011) als heuristisches Hilfsmittel genutzt werden kann, ist die *Tabelle*. In der Funktion eines Heurismus ist sie kein reines Datenblatt, sondern dient vielmehr der Unterstützung anderer heuristischer Verfahren (z. B. der heuristischen Strategie *Systematisches Probieren* oder dem heuristischen Prinzip *Invarianzprinzip*) durch die Strukturierung von Informationen.

Während *Tabellen* nur in wenigen Arbeiten zum Problemlösen als Heurismus angesprochen werden, werden *Gleichungen* als Heurismus im Problemlöseprozess von vielen Autorinnen thematisiert (vgl. Polya, 1957; Schoenfeld, 1985; Chinnappan & Lawson, 1996; Tietze et al., 2000; Schwarz, 2006; Brockmann-Behnen, Gawlick & Elschenbroich, 2014). Nach Bruder und Collet (2011) sind *Gleichungen* sowohl dazu geeignet, Informationen eines Problems zu reduzieren, als auch komplexe Zusammenhänge mit vielen Bedingungen übersichtlich zusammenzufassen. Die Funktion eines heuristischen Hilfsmittels haben *Gleichungen* jedoch „nur in der Phase des Mathematisierens eines Sachverhalts“ (Bruder & Collet, 2011, S. 68). Mit dieser Einschränkung unterscheiden sich Bruder und Collet (2011) von Chinnappan und Lawson (1996), die *Equation-handling* als eine *Domain-specific Action* ansehen, die über die Phase des Mathematisierens hinaus angewendet werden kann. Während Bruder und Collet die Nutzung von *Gleichungen* nur in den ersten beiden Phasen als eine heuristische Methode ansehen, kann für Chinnappan und Lawson auch das Rechnen mit *Gleichungen*, welches eher in der Phase der *Durchführung* stattfindet,

einen Heurismus darstellen. Da *Gleichungen* ein umfassenderes Fachwissen benötigen als *Informative Figuren* oder *Tabellen* und damit domänenspezifischer aufzustellen sind, ist die Problemlöserin mit Hilfe der *Gleichungen* in der Lage, Probleme allgemeiner zu lösen als mit *Informativen Figuren* oder *Tabellen*. Für Polya ist das Aufstellen einer *Gleichung* aus den gegebenen Informationen vergleichbar mit der Übersetzung von einer Sprache in eine andere (Polya, 1957). Die Schwierigkeit besteht für ihn darin, dass die Voraussetzungen eines Problems nicht immer ohne weiteres in mathematische Symbole übersetzt werden können: „[b]efore we start writing formulas, we may have to rearrange the condition, and we should keep an eye on the resources of mathematical notation while doing so“ (Polya, 1957, S. 174–175). In seinen Erklärungen wird deutlich, dass er die heuristische Funktion von *Gleichungen* eher in der Phase des Mathematisierens des Problems verortet sieht.

Tabelle 4.2 gibt einen Überblick zu den beschriebenen heuristischen Hilfsmitteln und stellt zudem dar, welche weiteren Autorinnen diese Heurismen thematisieren.

Tabelle 4.2: Überblick zu *Heuristischen Hilfsmitteln*

Heurismus	Autorinnen	Einordnung durch Autorinnen
Abbildung	Bruder und Collet (2011)	Heuristisches Hilfsmittel
	Chinnappan und Lawson (1996)	Domain-related Actions
	Polya (1957)	Verstehen der Aufgabe
	Schoenfeld (1980)	Analysis Phase
	Schwarz (2006)	Heurismen der Variation der Problemstellung
	Tietze et al. (2000)	Lokale Heuristiken
	Zimmermann (2003)	
Gleichung	Fan und Zhu (2007)	
	Bruder und Collet (2011)	Heuristisches Hilfsmittel
	Chinnappan und Lawson (1996)	Domain-specific Actions
	Tietze et al. (2000)	Lokale Heuristiken

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Fortsetzung von der vorherigen Seite

Heurismus	Autorinnen	Einordnung durch Autorinnen
	Brockmann-Behnsen et al. (2014)	
	Zimmermann (2003)	
	Fan und Zhu (2007)	
Tabelle	Bruder und Collet (2011)	Heuristisches Hilfsmittel
	Fan und Zhu (2007)	
	Schwarz (2006)	Heurismen der Variation der Darstellung

### Heuristische Strategien

Heuristische Strategien<sup>11</sup> beschreiben, ähnlich wie heuristische Prinzipien, allgemeine Prozesse und Verfahren während der Problembearbeitung. Sie können in allen Phasen des Lösungsprozesses eingesetzt werden, aufeinander aufbauen oder kombiniert werden. Bruder und Collet (2011) benennen die folgenden Strategien: *Systematisches Probieren*, *Analogieschlüsse*, *Vorwärtsarbeiten*, *Rückwärtsarbeiten* und *Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes*.

Bruder und Collet (2011) beschreiben das *Systematische Probieren* als eine Aufwertung des Herumprobierens zu einer heuristischen Strategie durch die bewusste Anwendung von Kriterien, „nach denen man weitere Berechnungen oder Darstellungen“ (S. 71) durchführen kann. *Systematisches Probieren* kann genutzt werden, um eine Problemsituation besser zu verstehen und Prozesse in Problemen können nachvollzogen werden, indem durch systematisches Einsetzen aufeinanderfolgender Werte die jeweiligen Wirkungen überprüft werden (Bruder & Collet, 2011; Schwarz, 2006; Söhling, 2014). Zudem können beim Modellieren systematisch Größen und Werte variiert werden, um Rückschlüsse auf ihren Einfluss zu ziehen.

<sup>11</sup>Dieser Begriff wird sehr unterschiedlich verwendet. Wie oben bereits erwähnt, werden in der englischsprachigen Literatur unter *heuristic strategies* alle Methoden und Verfahren der *inneren Struktur* zusammengefasst. Teilweise werden diese auch nur als *heuristics* bezeichnet. Ich werde den Begriff *heuristische Strategien* im Sinne von Bruder und Collet (2011) verwenden.

Die Strategie der *Analogieschlüsse* ist im Vergleich zu anderen Heuristiken eine Methode, welche in vielen alltäglichen Bereichen Anwendung findet. Sie kann dazu genutzt werden, Lösungsideen für ein Problem abzuleiten oder allgemeine Verfahrensweisen auf das aktuelle Problem zu übertragen (vgl. z. B. Anderson, 2001; Schoenfeld, 1985; Heinze, 2007; Tietze et al., 2000). Indem die Problemlöserin mit Hilfe des *Analogieschlusses* unterschiedliche Aspekte des Problems fokussiert, kann sowohl eine inhaltliche als auch eine methodische Ebene untersucht werden. So ist es möglich, nach Problemen mit derselben „oder eine[r] ähnliche[n] Voraussetzung oder [denselben] oder ähnliche[n] Daten oder eine[r] ähnlichen Struktur der Bedingung [...]“ (Polya, 1964, S. 13) wie dem aktuell vorliegenden Problem zu suchen. Dabei beruhen die Wirksamkeit von *Analogieschlüssen* und das Lernpotenzial in der Möglichkeit, „Heuristiken auf andere Themengebiete zu transferieren“ (Bruder & Collet, 2011, S. 83; vgl. auch Polya, 1964, S. 13). Analogien beziehen sich dabei nicht notwendigerweise auf ein gesamtes Problem, vielmehr können sie bereits das Finden von Lösungen zu einzelnen Teilen des Problems fördern. Bruder und Collet (2011) verbinden in diesem Zusammenhang die Strategie *Analogieschlüsse* mit der Strategie *Unbekanntes auf Bekanntes* zurückzuführen. Hierbei wird die vorliegende Problemsituation so modifiziert, dass ein *Analogieschluss* möglich ist. Schoenfeld (1980) nennt in diesem Zusammenhang zwei verschiedene Methoden, welche die Problemlöserin bei der Findung einer Lösung unterstützen können: „Consider slightly modified problems [...] Consider broadly modified problems“ (S. 801). Hierbei werden Bedingungen abgeschwächt und neu aufgestellt, oder alle bis auf eine Variable fixiert, um anschließend die Auswirkung dieser einen Größe zu untersuchen. Eine strenge Anwendung des *Analogieschlusses* findet sich auch in vielen mathematischen Beweisen wieder, hier kann die Nutzung von Isomorphismen oder Homomorphismen als *Analogieschluss* verstanden werden. Analogien sind neben ihrem Nutzen für das Finden von Problemlösungen auch zu einem anderen Zeitpunkt für den Lernprozess hilfreich. So kann es eine mögliche Aktivität in der Reflexionsphase sein, nach analogen Fragestellungen, Problemen und Situationen zu suchen (vgl. Mason et al., 2010, S. 42).

Die Strategie des *Vorwärtsarbeitens* kann zu vielen Zeitpunkten während der Problembearbeitung genutzt werden (Bruder & Collet, 2011): Studierende wid-

men sich einem Problem und starten damit, die gegebenen Informationen oder Teilergebnisse zusammenzustellen und die Bearbeitung durch *Vorwärtsarbeiten* bis zum Erreichen der gewünschten Lösung fortzuführen. Schritt für Schritt können so Zwischenergebnisse generiert werden. Das Vorgehen ist vergleichbar mit der Beweismethode der vollständigen Induktion und wird von Schwarz (2006) in der Kategorie *Heurismen der Induktion* genannt. Bruder und Collet (2011) schlagen mehrere Schlüsselfragen vor, die bei der Verfolgung der Strategie hilfreich sein können: Was ist gegeben? Was muss ich über das, was gegeben ist, wissen? Was kann ich durch diese Information bestimmen? *Vorwärtsarbeiten* zeigt sich so in einem strukturierten und geplanten Abarbeiten eines Lösungsplans. Schwarz (2006) sieht hier Verbindungen zur Mittel-Ziel-Analyse (vgl. Anderson, 2001), insofern genau wie dort auch beim *Vorwärtsarbeiten* versucht wird, den Unterschied zwischen dem aktuellen Zustand und dem Zielzustand zu verringern.

Während ich die drei ersten Strategien ausführlich präsentiert habe, sind die beiden letzten im Zusammenhang mit dieser Arbeit nicht von Relevanz. Einen Überblick, welche weiteren Autorinnen die Strategien *Analogieschluss*, *Vorwärtsarbeiten* und *Systematisches Probieren* im Zusammenhang mit mathematischen Problemlösen thematisieren, gibt Tabelle 4.3.

Tabelle 4.3: Überblick zu *Heuristischen Strategien*

Heurismus	Autorinnen	Einordnung durch Autorinnen
Analogieschluss	Bruder und Collet (2011)	Heuristische Strategie
	Polya (1957)	Verstehen der Aufgabe
	Schoenfeld (1980)	Analysis Phase
	Schwarz (2006)	Heurismen der Variation der Problemstellung
	Tietze et al. (2000)	Lokale Heuristiken
	Zimmermann (2003)	
Vorwärtsarbeiten	Fan und Zhu (2007)	
	Bruder und Collet (2011)	Heuristische Strategie
	Tietze et al. (2000)	Lokale Heuristiken

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Fortsetzung von der vorherigen Seite

Heurismus	Autorinnen	Einordnung durch Autorinnen
	Schwarz (2006)	Heurismen der (unvollendeten) Induktion
Systematisches Probieren	Bruder und Collet (2011) Schwarz (2006)	Heuristische Strategie Heurismen der (unvollendeten) Induktion

### Heuristische Prinzipien

Heuristische Prinzipien beschreiben elaboriertere mathematische Methoden als heuristische Strategien und erfordern daher ein höheres konzeptuelles Verständnis. Das bedeutet, während heuristische Hilfsmittel und heuristische Strategien eher auf allgemeine Merkmale des Problemlöseprozesses aufsetzen, sind heuristische Prinzipien eng mit dem mathematischen Kontext des Problems verbunden. Im Einklang mit Sewerin (1979) schlagen Bruder und Collet (2011) die folgenden heuristischen Prinzipien vor: das *Invarianzprinzip*, das *Extremalprinzip*, das *Symmetriepinzip*, *Zerlegen und Ergänzen*, das *Prinzip der Fallunterscheidung* und das *Transformationsprinzip*.

Erkundet eine Person ein Problem, indem sie nach Objekten sucht, welche unter bestimmten Transformationen konstant bleiben, so nutzt die Person das *Invarianzprinzip*. Insbesondere bei der Bearbeitung von Problemen, in denen Prozesse von Bedeutung sind, kann das *Invarianzprinzip* helfen, Lösungsideen zu entwickeln und Lösungen zu erarbeiten (vgl. Grieser, 2013). Auch bei diesem Heurismus zeigt sich die enge Verbindung zu anderen heuristischen Hilfsmitteln und Strategien. So schlagen Peter und Winklmaier (2002) vor, das *Invarianzprinzip* gemeinsam mit den Schülerinnen am Thema „Zuordnungen“ einzuführen. Dabei sollen diese mit Hilfe des heuristischen Hilfsmittels der *Tabelle* und der Strategie *Systematisches Probieren* auch unter Ausnutzung von Invarianten zu einer Lösung der gestellten Probleme gelangen. Schwarz (2006) macht in diesem Zusammenhang auf eine Schwierigkeit bei der Anwendung

des *Invarianzprinzips* aufmerksam und zeigt die Bedeutung dynamischer Geometriesoftware auf:

Die vorgestellten Beispiele haben deutlich gemacht, dass es eine beachtliche Vielfalt von Objekten gibt, die bei der Anwendung des Invarianzprinzips als Invarianten in Betracht gezogen werden können; im Allgemeinen gibt es jedoch kein systematisches Vorgehen zur *Entdeckung* geeigneter Invarianten, mit einer wichtigen Ausnahme: Der Einsatz *dynamischer Geometriesoftware* (DGS) macht *Invarianten geometrischer Transformationen* sichtbar. (S. 53)

Die hier angesprochene Komplexität verdeutlicht die zuvor erwähnte Notwendigkeit eines höheren konzeptuellen Verständnisses, und auch technische Hilfsmittel als Unterstützung einzusetzen.

Das *Extremalprinzip* ist eng verknüpft mit dem Lösungsprozess von Optimierungsproblemen. Die Anwendung des Prinzips eignet sich in besonderem Maße für Probleme, in denen Objekte gesucht werden, welche bestimmte Charakteristika erfüllen müssen.<sup>12</sup> Bei diesem Prinzip werden zur Gewinnung einer Lösungsidee bzw. einer Lösung besonders die Randbedingungen des Problems, die Extrema, betrachtet.

Beim Einsatz des *Symmetriepinzips* untersucht die Problemlöserin die Informationen aus der Problemstellung nach Mustern und Identitäten zwischen den Elementen. Dies können vergleichbare Ausdrücke auf den beiden Seiten einer *Gleichung* sein oder Symmetrien bei einem Geometrieproblem, welche eine Teilung des Gesamtproblems in Einzelprobleme ermöglichen (Polya, 1957). Jedoch sind Symmetrien nicht nur auf geometrische Probleme beschränkt, sondern können auf einer übergeordneten Ebene bei vielen Problemen genutzt werden. Bruder und Collet (2011) betonen, dass insbesondere das bewusste Erzeugen von Symmetrien den Grundgedanken dieses Prinzips widerspiegelt und helfen kann, Probleme zu lösen. Schwarz (2006) argumentiert vergleichbar zu Bruder

<sup>12</sup>Beispiele aus der Schulmathematik sind Optimierungsaufgaben: „Wie kann man mit einem Stück Draht bekannter Länge an einer Hauswand ein möglichst großes Blumenbeet abstecken?“ (Bruder & Collet, 2011, S. 99). Darüber hinaus kann es bei Problemen helfen, welche eine große Menge an Objekten beinhalten: „Entlang eines Kreises seien 1000 Zahlen angeordnet. Jede ist der Mittelwert ihrer beiden Nachbarn. Zeige, dass alle Zahlen gleich sind“ (Grieser, 2013, S. 212).

und Collet sowie zu Polyas Empfehlung der Teilung in Einzelprobleme, indem er deutlich macht, dass „*versteckte* Symmetrien einer Problemstellung“ (S. 70) besonders durch einen Repräsentationswechsel in eine geometrische Darstellung sichtbar werden können.

*Zerlegen und Ergänzen* ist ein weiteres heuristisches Prinzip, es übertrifft die bisher vorgestellten durch seine Universalität. Diese zeigt sich darin, dass das Zerlegen des Lösungsprozesses in verschiedene Phasen Aspekte der äußeren Struktur des Bearbeitungsprozesses aufweist (siehe Abschnitt 4.1.4). So beschreibt Polya (1957) für die erste Phase, in welcher das Problem in seiner Gänze verstanden werden soll, den Prozess, die gegebenen Informationen zu zerlegen, diese zu verstehen und danach wieder zusammzusetzen. Dies kann in einer neuen Art und Weise geschehen, welche es ermöglicht, das Problem zielführend zu bearbeiten. Auch in einigen der vorherigen Heurismen ist dieses Prinzip wiederzuerkennen. So kann das *Symmetrieprinzip* genutzt werden, um Probleme in beispielsweise zwei symmetrische Teilprobleme zu unterteilen. Die Lösung eines Teilproblems führt daraufhin zur Lösung des anderen und des Gesamtproblems. Im Zusammenhang mit der empirischen Studie sind die drei berichteten Prinzipien von Bedeutung, sodass auf die Darlegung der weiteren verzichtet wird. Einen Überblick, welche weiteren Autorinnen die relevanten Prinzipien thematisieren, gibt Tabelle 4.4.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Heurismen in vielen Fällen nicht isoliert betrachtet bzw. von der Problemlöserin eingesetzt werden können, um ein Problem erfolgreich zu lösen. So dienen heuristische Hilfsmittel häufig dazu, Strategien durchzuführen oder zu unterstützen. Die Strategien wiederum ergeben sich häufig aus den Prinzipien, die der Lösung eines Problems zu Grunde liegen. Vor allem bei den Hilfsmitteln führt erst eine Kombination dazu, dass sie den Status eines Heurismus einnehmen. So wird eine Zeichnung erst zu einem Heurismus, wenn diese so gestaltet ist, dass aus ihr Ideen entwickelt werden können, die den Lösungsprozess vorantreiben.

Tabelle 4.4: Überblick zu *Heuristischen Prinzipien*

Heurismus	Autorinnen	Einordnung durch Autorinnen
Invarianzprinzip	Bruder und Collet (2011) Schwarz (2006)  Zimmermann (2003) Grieser (2013)	Heuristisches Prinzip Heurismen der Variation der Problemstellung
Extremalprinzip	Bruder und Collet (2011) Tietze et al. (2000) Schwarz (2006)  Grieser (2013)	Heuristisches Prinzip Lokale Heuristiken Heurismen der Variation der Problemstellung
Symmetrieprinzip	Bruder und Collet (2011) Polya (1957) Zimmermann (2003) Fan und Zhu (2007) Schwarz (2006)	Heuristisches Strategie Rückschau  Heurismen der Variation der Problemstellung
Zerlegen und Ergänzen	Bruder und Collet (2011) Tietze et al. (2000) Polya (1957)	Heuristisches Prinzip Lokale Heuristiken Rückschau

## 4.2 Physikdidaktische Perspektive

Nachdem im Abschnitt zuvor die Forschungszugänge zum Problemlösen in der Mathematikdidaktik vorgestellt und diskutiert wurden, wird in diesem Abschnitt eine physikdidaktische Perspektive hinsichtlich des Problemlösens eingenommen. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts sind nur solche Ansätze von Bedeutung, welche mathematische Methoden zur Lösung von physikalischen Problemen untersuchen. Diese Einschränkung ist insofern wichtig, da in der Physik – in wissenschaftlicher Hinsicht – Probleme gemeinhin auf zwei Weisen gelöst werden können (vgl. Dirac, 1939). Vereinfacht dargestellt lassen sich die

beiden folgenden Fälle unterscheiden: Während einerseits das Experimentieren am realen Objekt als Problemlösen aufgefasst wird (Hammann, Phan & Bayrhuber, 2008) und so eine induktive Herangehensweise gewählt wird, wird andererseits ein Problem deduktiv mit Hilfe einer Mathematisierung der realen Welt fokussiert, wodurch das mathematische Problemlösen eine wichtige Rolle einnimmt. In der vorliegenden Arbeit werden physikalische Aufgaben aus Paper-Pencil-Tests eingesetzt, aus diesem Grund beschränken sich die weiteren Ausführungen auf das mathematische Problemlösen in der Physik.

Argumentativ ist der Abschnitt wie folgt aufgebaut: Ausgehend von der Diskussion des Modells des wissenszentrierten Problemlösens nach Reinhold, Lind und Friege (1999) wird das Modell der *Epistemic Games* ausführlich diskutiert. Dieses Modell zum mathematikbezogenen Problemlösen in der Physik von Tuminaro und Redish (2007) bildet die Grundlage für die Analysen der Aufgabenbearbeitungen aus der Physik und der Technischen Mechanik im Rahmen der in dieser Arbeit berichteten empirischen Studie.

#### 4.2.1 Modell des wissenszentrierten Problemlösens

Das Problemlösen ist, ähnlich wie zuvor in der Mathematik, ein zentraler Bestandteil in der Physik als Wissenschaft und erfährt eine große Beachtung innerhalb der physikdidaktischen Forschung (vgl. Reinhold et al., 1999; Maloney, 2011). So bezeichnen Docktor und Heller (2009) Problemlösen als „one of the primary goals, teaching tools, and evaluation techniques of physics courses“ (S. 1). Im Vergleich zur mathematikdidaktischen Forschung wird in der Physikdidaktik unter anderem das Konstrukt des wissenszentrierten Problemlösens in Abgrenzung zum strategiebezogenen Problemlösen der Psychologie genutzt. So orientiert sich die physikdidaktische Forschung zum Problemlösen in neuerer Zeit an der Expertiseforschung,<sup>13</sup> da hier das Fachwissen explizite Berücksichtigung findet (vgl. Reinhold et al., 1999; Friege & Lind, 2003; Larkin & Reif, 1979). Maloney (2011) begründet diese Wissensfokussierung wie folgt:

What is the value of identifying potential general problem-solving skills like planning, using heuristics and evaluating the solution,

---

<sup>13</sup>Eine detaillierte Beschreibung zur Expertiseforschung findet sich zum Beispiel bei Gruber und Ziegler (1996).

when the actual application of each varies widely depending on each situation? How useful is it for an individual to be able to plan, but not have the specific domain knowledge needed to accomplish the plan? (S. 7)

Er ordnet das Handlungswissen bezüglich Heuristiken dem eigentlichen Fachwissen unter, im Gegensatz zu Niss (2003), welcher Faktenwissen als Basis des Handlungswissens darstellt (vgl. Abschnitt 3.2.2). Zwar ist in der mathematikdidaktischen Forschung zum Problemlösen der Kontext immer ein wichtiges Element, dies zeigt sich besonders in den heuristischen Prinzipien, für die mathematische Verfahren grundlegend sind (vgl. Bruder und Collet, 2011), jedoch erfolgt in dieser Diskussion in der Regel keine so deutliche Zweiteilung innerhalb der Problemlösemodelle wie im folgenden Modell des wissenszentrierten Problemlösens (vgl. Abbildung 4.7). Eine Ausnahme bildet Schoenfeld (2011), der die heuristischen Strategien der Wissensbasis zuordnet.

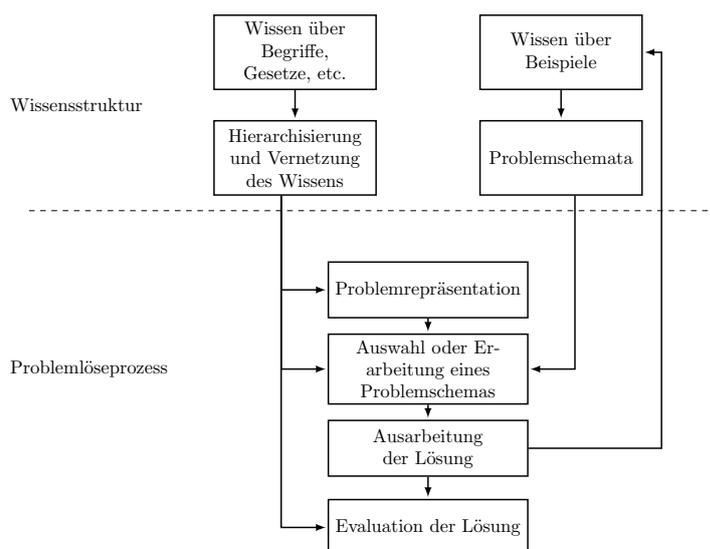


Abbildung 4.7: Modell zum physikalischen Problemlösen nach Reinhold et al. (1999, S. 55)

Das Modell, für das „nicht nur empirische Ergebnisse, sondern auch naheliegende Interpretationen und Vermutungen, die sich in der Literatur finden“ (Reinhold et al., 1999, S. 54) herangezogen wurden, stellt das Problemlösen in der Physik über zwei Ebenen dar, die Wissensstruktur und den eigentlichen Problemlöseprozess. Die Wissensstruktur bildet die Grundlage für ein

erfolgreiches Problemlösen und hat ihre theoretische Grundlage in der bereits erwähnten Expertiseforschung. Sie gliedert sich in zwei Bereiche auf, in denen sich Novizen von Experten unterscheiden. Während Novizen ihr Wissen über Begriffe und Gesetze vorwiegend isoliert abspeichern und in Begriffsnetzen stärker auf einzelne und konkrete Begriffe fokussieren, findet bei Experten ein Abspeichern der Informationen in größeren „chunks“ (Larkin, 1977; zitiert nach Reinhold et al., 1999, S. 47) und in stärker vernetzten und hierarchisierten Strukturen statt. Dadurch werden nach Reinhold et al. (1999) bei „häufige[m] Gebrauch des Wissens [...] deklarative Problemrepräsentationen mit Prozeduren verbunden und bilden Problemschemata, die dann beim Problemlösen aktiviert werden können“ (S. 47). Das Wissen über Beispiele wird in Form von Repräsentationen im Gedächtnis abgespeichert und unterscheidet sich bei Novizen und Experten auf eine vergleichbare Weise, wie das Wissen über Begriffe und Gesetze.

In diesem und ähnlichen Modellen wird eine weniger strenge Definition des Begriffs *Problem* verwendet als zuvor in der mathematikdidaktischen Betrachtung. Unter anderem müssen die Mittel zum Schließen der Lücke zwischen Anfangszustand und Endzustand nicht unbekannt sein, damit es sich um ein Problem handelt. Zudem sind Probleme „unter Einsatz von Fachwissen eindeutig lösbar, und ganz ohne Fachwissen ist in der Regel eine Lösung überhaupt unmöglich“ (Friege & Lind, 2003, S. 65).

Die Modellierung des eigentlichen Problemlöseprozesses orientiert sich an der Stufeneinteilung von Dewey (2002), reduziert diese für das Problemlösen in der Physik jedoch auf vier Stufen. In der ersten Stufe muss das eigentliche Problem identifiziert werden. Reinhold et al. (1999) sprechen von „der Erarbeitung einer angemessenen Problemrepräsentation“ (S. 51). Mögliche Repräsentationen sind Skizzen, physikalische Konzepte und Idealisierungen (Brandenburger, Mikelskis-Seifert & Labudde, 2014). Diese entsprechen einer Übersetzung der gegebenen Problemsituation in die Sprache der Physik, sind in der Regel zu Beginn von qualitativer Natur und führen bei Expertinnen zu mathematischen Darstellungen. Novizen dagegen können im Allgemeinen die Situation nicht adäquat und für eine quantitative Darstellung förderlichen Weise abbilden (Reinhold et al., 1999). Stattdessen nutzen sie oberflächliche Repräsentationen, welche ihnen aus dem Alltag bekannt sind, im Gegensatz zu Expertinnen,

die solche wählen, die wichtige physikalische Prinzipien und Konzepte verbinden (Maloney, 2011).

In der folgenden Stufe, Reinhold et al. (1999) nennen sie „die Auswahl eines geeigneten Problemschemas“ (S. 51), findet „der Ansatz einer möglichen Lösung statt“ (Dewey, 2002, S. 58). An dieser Stelle sind die Problemschemata für den weiteren Fortschritt in der Problembearbeitung von Bedeutung. Liegen keine Schemata vor, kann durch die Nutzung von Fachwissen ein möglicher Lösungsweg entwickelt werden (Brandenburger et al., 2014). Die abgerufenen Problemschemata bedingen den weiteren Lösungsprozess, der in der nächsten Stufe, der Ausarbeitung der Lösung, durchgeführt wird. In der letzten Stufe wird abschließend die Lösung auf ihre Richtigkeit hin überprüft. Eine wichtige Verbindung zwischen der mathematik- und physikdidaktischen Perspektive ist, dass das Modell von Dewey (2002), das hier die Basis bildet, große Ähnlichkeiten zum Modell von Polya (1957) aufweist: „Insgesamt stellt man fest das [sic] beide Stufenmodelle sich nur in Unwesentlichem voneinander unterscheiden. In den wesentlichen Punkten entsprechen sie sich“ (Neuhaus, 2002, S. 429).

Die hohe Bedeutung der Wissensstruktur im Problemlöseprozess steht ebenso im Modell der *Epistemic Games* im Fokus. Dieses wird im folgenden Abschnitt detailliert ausgeführt, da es neben dem Phasenmodell von Polya (1957) und den Heurismen von Bruder und Collet (2011) die dritte theoretische Grundlage der empirischen Untersuchung dieser Arbeit darstellt.

## 4.2.2 Epistemic Games

Dieser Abschnitt gliedert sich wie folgt: Nach einer kurzen allgemeinen Einführung in die *Epistemic Games* (EG)<sup>14</sup> werden ihre beiden Komponenten, die *Ontological Components*<sup>15</sup> und die *Structural Components*, nach denen die einzelnen EGs voneinander unterschieden werden können, vorgestellt und diskutiert. Daran schließt sich eine Darstellung der sechs Games an.

EGs beschreiben die äußere Struktur des Problemlösens im Sinne des wissens-

<sup>14</sup>Tuminaro und Redish (2007) begründen die Verwendung *epistemic* wie folgt: „The activities are ‘epistemic’ in the sense that students engage in these activities as a means of constructing new knowledge“ (S. 4).

<sup>15</sup>Tuminaro (2004) definiert Ontologie wie folgt: „*Ontology* – the description of a system in terms of the kinds of objects relevant for its description and their characteristics“ (S. 6).

zentrierten Problemlösens. Neben der Modellierung des Phasenverlaufs und der jeweils enthaltenen Prozeduren und Handlungen adressieren sie zudem die kognitiven Ressourcen, welche bei der Problemlösung von Bedeutung sind. Dadurch sind sie komplexer als die Modelle für Bearbeitungsprozesse von mathematischen Problemen.

Tuminaro (2004) beschreibt EGs wie folgt: „[An epistemic game] is a pattern of activities that can be associated with a collection of resources“ (S. 60). Die Analyse mit Hilfe der EGs fördert nach Tuminaro und Redish (2007) das Verständnis über das Wissen und die Schlussfolgerungen, welche während eines Problemlöseprozesses von der Problemlöserin genutzt werden.

Tuminaro (2004) adaptiert in seiner Dissertation das Modell der EGs und der *Epistemic Forms*, welches von Collins und Ferguson (1993) als Erklärung sowohl von Regeln und Strategien als auch von Zielstrukturen wissenschaftlicher Untersuchungen von Experten eingeführt wurde. Redish (2004) definiert die beiden Strukturen wie folgt:

*An epistemic game* is a coherent activity that uses particular kinds of knowledge and the processes associated with that knowledge to create knowledge or solve a problem. [...] *An epistemic form* is an external structure or representation and the cognitive tools to manipulate and interpret that structure. [...] An abacus, slide rule, free-body diagram, and a position-velocity graph are all epistemic forms. (S. 30)

Die EGs beschreiben kurze Episoden von wenigen Minuten Länge, in denen Studierende kohärente Aktivitäten durchführen, an denen sich zeigt, wie mathematisches und physikalisches Wissen in einen organisierten Ablauf integriert werden.

### **Komponenten der Epistemic Games**

Jedes EG besitzt eine Ontologie und Struktur, durch die es sich von den übrigen unterscheidet (siehe Tabelle 4.6). Diese beiden Komponenten verdeutlichen die enge Verknüpfung zwischen mathematischem und physikalischem Wissen sowie Fähigkeiten innerhalb der EGs.

Zur Ontologie eines jeden EG gehören die *Knowledge Base* und die *Epistemic*

*Form.* Die *Knowledge Base* definiert die mathematischen Ressourcen, welche die Problemlöserin benötigt und anwenden muss, um ein ihr gestelltes Problem zu lösen. Tuminaro (2004) unterscheidet vier Arten mathematischer Ressourcen, welche im Problemlöseprozess eingesetzt werden: Das *Intuitive Mathematics Knowledge*, die *Reasoning Primitives*, die *Symbolic Forms* und die *Interpretive Devices* (siehe Tabelle 4.5).

Tabelle 4.5: Mathematische Ressourcen der *Knowledge Base*, die nach Tuminaro (2004) in den EG genutzt werden.

Mathematische Ressource	Beschreibung
Intuitive Mathematics Knowledge	Einfache mathematische Fähigkeiten, die auch für abstrakte mathematische Denkweisen benötigt werden.
Reasoning Primitives	Basales Verständnis von physikalischen Mechanismen
Symbol Forms	Modellierung des Verständnisses physikalischer Formeln
Interpretive Devices	Argumentationsstrategien, die beim Problemlösen genutzt werden, um Informationen aus physikalischen Gleichungen zu erhalten.

Tuminaro (2004) nennt als Beispiele für *Intuitive Mathematics Knowledge* die Fähigkeiten *counting*, *ordering*, *pairing* (Fähigkeit, zwei Objekte für eine gemeinsame Betrachtung zu gruppieren) und *subitizing* (Simultane Zahlerfassung): „Subitizing is the ability that humans have to immediately differentiate sets of one, two, and three objects from each other“ (Tuminaro, 2004, S. 40). Die *Reasoning Primitives* haben ihren Ursprung in zumeist oberflächlichen Interpretationen physikalischer Erfahrungen und entwickeln sich ausgehend von unstrukturiertem und isoliertem Wissen hin zu Bestandteilen großer Systeme.<sup>16</sup> Bei diesem Vorgang werden bestimmte *Primitives* entweder in ihrer Wichtigkeit und Nützlichkeit herab- oder heraufgestuft (vgl. diSessa, 1993) oder neu

<sup>16</sup>Vergleiche dazu auch die Entwicklung des Wissens über Begriffe und Gesetze bei Reinhold et al. (1999), welche in Abschnitt 4.2.1 näher erläutert werden.

strukturiert. Tuminaro (2004) nennt als Beispiel für ein *Reasoning Primitive* das *Blocking*. Dies beschreibt die Vorstellung von Novizen, dass unbelebte Objekte keine aktive Rolle in einer physikalischen Situation ausüben können:

For example, many introductory physics students do not think that a table can exert a normal force on a book placed on top of it. Rather, these students think the book does not fall to the floor simply because the table is ‘in the way’. (Tuminaro, 2004, S. 47)

Die *Symbolic Forms* basieren auf einem Framework von Sherin (2001) zur Modellierung des Verständnisses physikalischer Formeln, welche, wie bereits in Abschnitt 3.3 dargelegt, eine zusätzliche Bedeutungsebene neben der rein mathematischen aufweisen. *Symbolic Forms* bestehen demnach aus zwei Teilen, dem *Symbol Template* und dem *Conceptual Schema*. Das Schema stellt das konzeptuelle Verständnis der physikalischen Situation dar, welches im mathematischen Ausdruck beschrieben ist. Die unterschiedliche Bedeutung der beiden Bestandteile lässt sich anhand des folgenden Beispiels von Tuminaro (2004) verdeutlichen:

A student would use the symbol template,  $\square = \square$ , when invoking the conceptual schema of *balancing*. For instance the utterance, ‘the normal force of a table on a block is *balancing* the gravitational force of the earth on the block, ‘corresponds with the algebraic expression  $N_{T \text{ on } B} = W_{E \text{ on } B}$  [...] The student also utilizes the same symbol template,  $\square = \square$ , in association with the conceptual schema *same amount*. For instance, the mathematical expression associated with the utterance, ‘the velocity of block A is the *same* as the velocity of Block B,‘ is  $v_A = v_B$ . (S. 20)

Die *Interpretive Devices* ähneln in Teilen den heuristischen Strategien und Prinzipien beim mathematischen Problemlösen. So stellt das Device *Changing Parameters* die argumentative Vorgehensweise dar, in einem physikalischen Ausdruck eine Variable zu variieren und die übrigen zu fixieren, was dem *Invarianzprinzip* ähnelt. Sherin (1996) fasst die beiden zuletzt diskutierten mathematischen Ressourcen, die *Symbolic Forms* und die *Interpretive Devices*, wie folgt zusammen: „In sum, the Theory of Forms and Devices describes a collection of knowledge that allows initiates in physics to see a certain type of

meaningful structure in physics expressions“ (S. 17).

Neben der *Knowledge Base* gehört zur Ontologie die *Epistemic Form*. Sie stellt die Zielstruktur der Lösung eines Problems dar und beeinflusst den gesamten Prozess der Problembearbeitung. So kann die *Epistemic Form* eine physikalische Gleichung verlangen, wodurch mathematische Berechnungen zur Lösung erforderlich sind. Die *Epistemic Form* kann auch aus der Beschreibung einer physikalischen Situation bestehen, was wiederum fachliche Argumentationen erfordert. Dabei ist es möglich, dass unterschiedliche EGs die gleiche *Epistemic Form* erzeugen. Ein Beispiel für eine solche *Epistemic Form* ist eine Liste. Sie ist die Zielstruktur eines List-making-Games (Collins & Ferguson, 1993).

Neben den *Ontological Components* gibt es die *Structural Components*. Diese bestehen aus den *Entry and Ending Conditions* sowie den einzelnen *Moves* der EGs. Die *Entry and Ending Conditions* ergeben sich aus den individuellen Interpretationen der vorliegenden Problemsituationen durch die Problemlöserin und werden durch die jeweiligen Erwartungen dieser an die Situation beeinflusst. Dieses sogenannte *Framing* (vgl. z. B. Tannen, 1993; Scherr & Hammer, 2009) beschreibt den Einfluss von Erwartungen und früheren Erfahrungen auf die Art und Weise, wie eine Situation interpretiert wird, was von der Situation erwartet wird, oder welche Aktionen als angemessen angesehen werden: „A student may frame a physics problem as an opportunity for sensemaking or as an occasion for rote use of formulas“ (Scherr & Hammer, 2009, S. 149) und ist damit vergleichbar zu den oben beschriebenen Problemschemata. Tuminaro und Redish (2007) weisen auf eine Studie von Hinsley, Hayes und Simon (1977) hin, in welcher diese zeigen, dass Studierende in der Lage sind, sehr schnell ein physikalisches Problem einer Kategorie von Problemen zuzuordnen. Diese Kategorisierung beeinflusst auch die Wahl des EG für das jeweilige Problem.

Die *Moves* beschreiben die Aktivitäten, die während des Problemlöseprozesses auftreten (Tuminaro, 2004). Diese werden bei der Darstellung der einzelnen EGs ausführlicher erklärt.

### **Vorstellung der Epistemic Games**

Tuminaro (2004) nutzt die zuvor dargestellten Komponenten, um sechs EGs aus Beobachtungen von Studierenden, die physikalische Probleme bearbeiten,

Tabelle 4.6: Ontologie und Struktur, mit denen die einzelnen EG beschrieben und gegenüber anderen abgegrenzt werden können (Tabelle übernommen aus Tuminaro (2004, S. 61)).

<i>Ontological Components</i>		<i>Structural Components</i>	
Knowledge Base	Cognitive resources associated with the game.	Entry and ending conditions	Conditions for when to begin and end playing a particular game.
Epistemic Form	Target structure that guides inquiry.	Moves	Activities that occur during the course of an e-game.

zu identifizieren. Es handelt sich somit um ein deskriptives Modell, das typische Vorgehensweisen von Physikstudierenden beim Problemlösen beschreibt. Im Folgenden werden die sechs EGs mit ihren wichtigsten Charakteristika und Unterscheidungsmerkmalen vorgestellt und erörtert.<sup>17</sup>

Aufgrund des Entstehungskontextes in einem algebra-basierten Physikkurs fokussieren die EGs die Modellierung von Problembearbeitungen, in denen mathematische Verfahren notwendig sind. Sie lassen sich in drei übergeordnete Kategorien unterteilen, welche sich hinsichtlich dieser Mathematisierung unterscheiden. Kortemeyer und Biehler (2017) sprechen von „quantitative sense-making, qualitative sense-making, and rote equation chasing (without understanding the underlying physical situation)“ (S. 2). Zwei Games haben einen starken Fokus auf eine mathematisch (quantitativ) orientierte Lösung eines Problems: *Mapping Meaning to Mathematics* und *Mapping Mathematics to Meaning*. Eine weitere Kategorie bilden das *Physical Mechanism Game* und das *Pictorial Analysis Game*. Den beiden Games ist gemeinsam, dass die Studierenden für die Lösung der Probleme nicht auf physikalische Gleichungen zurückgreifen, sondern sich ihres alltäglichen Physikverständnisses bedienen bzw. grafische Repräsentationen nutzen, um sich der Lösung eines Problems qualitativ anzunähern. Eine letzte Kategorie bilden die beiden Games *Recursive Plug-and-Chug* und *Transliteration to Mathematics*. In diesen beiden berechnen Studierende Problemlösungen mit Hilfe physikalischer Formeln und

<sup>17</sup>Für eine detailliertere Beschreibung sei hier auf Tuminaro (2004) verwiesen.

Gleichungen, ohne dabei ein konzeptuelles Verständnis der jeweiligen physikalischen Situation zu zeigen. Im EG *Transliteration to Mathematics* wird zudem deutlich, dass sie bereits bearbeitete Probleme als Lösungsmuster nutzen.

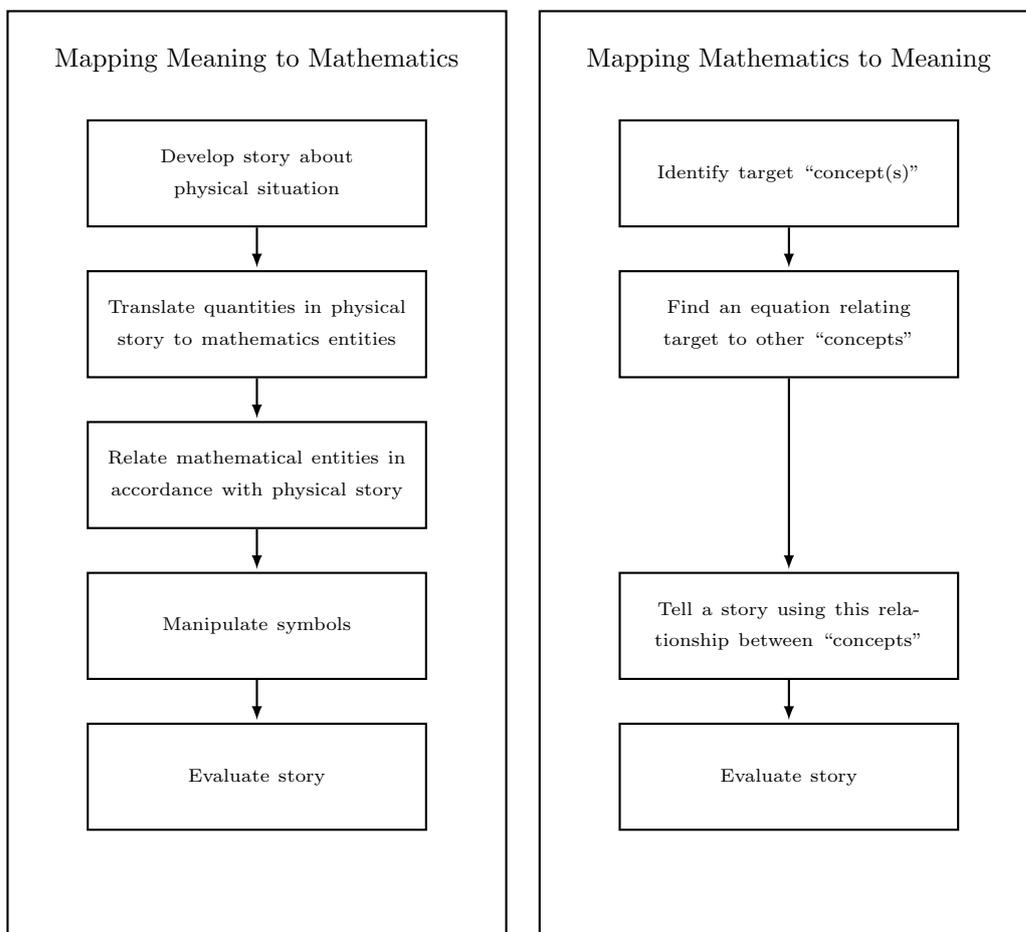


Abbildung 4.8: Ablauf der beiden mathematischen EG mit konzeptuellem Verständnis *Mapping Meaning to Mathematics* und *Mapping Mathematics to Meaning* (Tuminaro, 2004, S. 63 und S. 67).

Im EG *Mapping Meaning to Mathematics* (siehe Abbildung 4.8) beginnen die Studierenden damit, auf ihrem eigenen konzeptuellen Verständnis der physikalischen Situation aufbauend, eine Repräsentation über die Problemsituation zu entwickeln (Erster *Move*, vergleichbar mit der ersten Phase im Modell von Reinhold et al., 1999). Anschließend übersetzen sie diese Repräsentation in mathematische Ausdrücke (Zweiter *Move*). Bei der Übersetzung ist die Ein-

haltung von Konventionen hinsichtlich der Bezeichnungen<sup>18</sup> entscheidend. Dies ist notwendig, um im nächsten Schritt bekannte physikalische Gleichungen und Formeln zu nutzen, um die mathematischen Ausdrücke im Sinne der konzeptuellen Repräsentation über die anfängliche physikalische Situation (siehe Erster *Move*) zusammenführen zu können (Dritter *Move*). Nachdem im vierten *Move* die mathematischen Ausdrücke mit Hilfe mathematischer Regeln und Prozeduren zu einer mathematischen Lösung umgeformt wurden, kann im fünften *Move* der Lösungsprozess auf unterschiedliche Weise evaluiert werden: „checking the solution with a worked example (or solution in the back of the book), checking their [physics students'] quantitative answer with their conceptual story, or checking their solution against an iconic example“ (Tuminaro, 2004, S. 62).

Beim zweiten mathematischen EG *Mapping Mathematics to Meaning* (siehe Abbildung 4.8) beginnen die Studierenden mit der Suche und Identifikation des Zielkonzeptes bzw. der Zielkonzepte (Erster *Move*). Ein Zielkonzept kann beispielsweise die *Kraft* bei der Betrachtung einer Kollision zweier Körper sein (Tuminaro, 2004). Der zweite *Move* ist durch die Suche nach physikalischen Gleichungen und Formeln, welche das Zielkonzept mit anderen Konzepten in Relation setzen, gekennzeichnet. Diese Zusammenhänge nutzen die Studierenden im dritten *Move*, um eine Geschichte zur Lösung des Problems zu formulieren. Abschließend führen die Studierenden eine zusammenfassende Evaluation des Lösungsprozesses durch. Diese kann je nach gefordertem Lösungsformat unterschiedlich ausfallen.

Die beiden EGs unterscheiden sich in den Vorgehensweisen und den Denkprozessen sowie in der Art und Weise, wie Mathematik in physikalischen Aufgaben genutzt werden kann. Während in beiden EGs die ontologischen Komponenten (*Knowledge Base* und *Epistemic Form*) vergleichbar sind, unterscheiden sie sich deutlich in ihrer Struktur (*Entry and Ending Conditions* und *Moves*): „In Mapping Meaning to Mathematics, students begin with a conceptual story and then translate it into mathematical expressions. In contrast, in Mapping Mathematics to Meaning students begin with a physics equation and then develop a conceptual story“ (Tuminaro & Redish, 2007, S. 6).

---

<sup>18</sup>Redish (2005) macht deutlich, dass in physikalischen Gleichungen bzw. Formeln viele Variablen bereits definiert sind. So steht zum Beispiel die Variable  $B$  in der Regel für das Magnetfeld.

Die beiden folgenden EGs (siehe Abbildung 4.9) illustrieren den Einsatz mathematischer Verfahren, wobei die Studierenden kein konzeptuelles Verständnis der Aufgabe, der mathematischen Verfahren sowie anderer Lösungsbestandteile zeigen. Während die Studierenden beim EG *Recursive Plug-and-Chug* nur auf einer symbolischen Ebene das Problem zu lösen versuchen und nicht auf konzeptuelles Verständnis zurückgreifen, nutzen die Studierenden beim zweiten EG, *Transliteration to Mathematics*, Beispielaufgaben und -lösungswege, um ein gegebenes Problem zu lösen. Auch dieses EG beschreibt, dass die Studierenden auf einer symbolischen Ebene arbeiten, ohne auf inhaltliches Verständnis zu rekurrieren.

Aufgrund der selben *Epistemic Form* existieren Parallelen zwischen den beiden EGs *Recursive Plug-and-Chug* und *Mapping Mathematics to Meaning*. So ähneln sich beide EGs im ersten *Move*, der Suche nach einem Ziel. Während jedoch bei *Mapping Meaning to Mathematics* ein Zielkonzept im Vordergrund steht, ist es bei *Recursive Plug-and-Chug* lediglich eine gesuchte Zielgröße. Im zweiten *Move* wird dann eine Gleichung aufgestellt, welche diese Größe mit anderen Größen in Verbindung setzt. Wenngleich auch dieser Schritt dem zweiten aus dem Game *Mapping Meaning to Mathematics* ähnelt, so ist er deutlich weniger komplex. Im folgenden Schritt entscheiden Studierende dann, ob sie noch weitere Größen bestimmen müssen, oder ob die anfangs ermittelte Zielgröße die einzige Unbekannte darstellt. Bei mehreren Unbekannten müssen Teilziele erstellt werden und es muss mit dem EG von vorne begonnen werden. Eine Rückkopplung des Ergebnisses zur Problemsituation findet nicht statt.

*Transliteration to Mathematics* beginnt, wie das EG zuvor, mit der Bestimmung der Zielgröße. Anschließend wird im zweiten *Move* nach einem Lösungsschema aus zuvor bearbeiteten Aufgaben gesucht, das zum vorliegenden Problem passt.<sup>19</sup> In dieses Schema werden im dritten *Move* alle bekannten Größen eingesetzt und so die Aufgabe gelöst. Bei diesen Schritten verfahren die Studierenden algorithmisch und auf einer symbolischen Ebene ohne Bezug zu konzeptuellem Verständnis.

Durch diese beiden EGs wird der Umstand deutlich, dass Studierende auch ohne ein konzeptuelles Verständnis erfolgreich sein können (Tuminaro & Re-

---

<sup>19</sup>Dieses Schema ist nicht vergleichbar mit den Problemschemata aus dem Modell von Reinhold et al. (1999), es ist vielmehr algorithmischer Natur.

dish, 2007) und deswegen eine richtige Lösung keine hinreichende Bedingung für die Einschätzung der Qualität des Problemlösens ist.

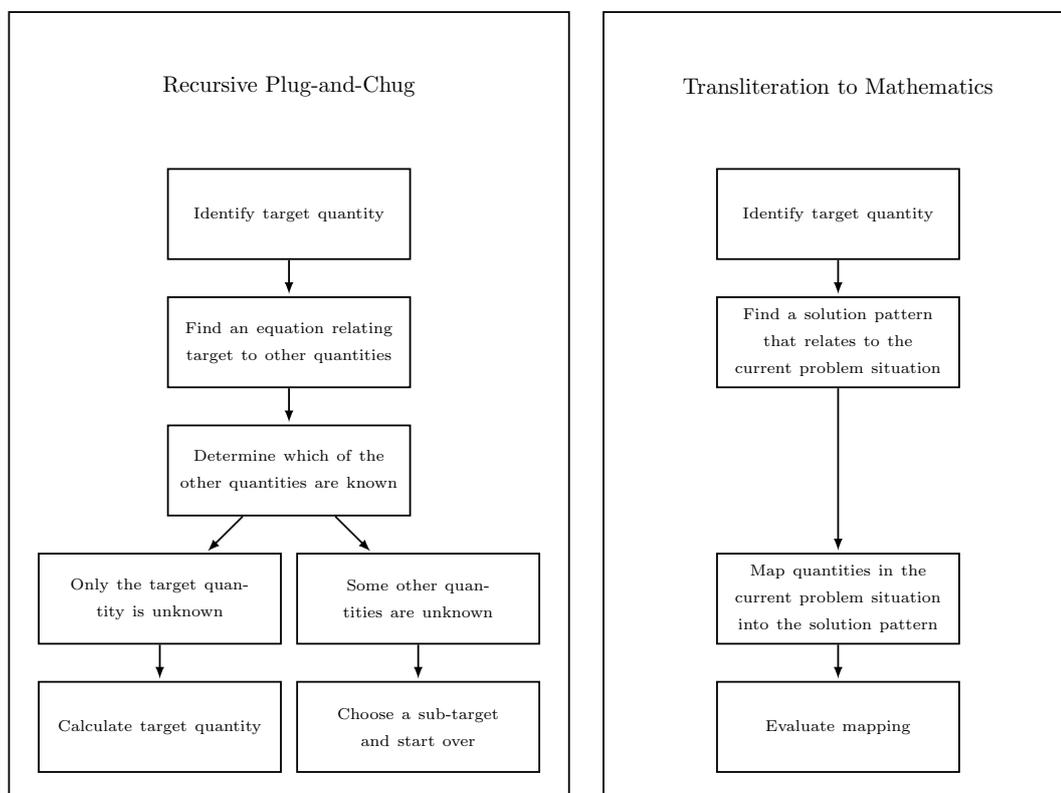


Abbildung 4.9: Ablauf der beiden mathematischen *Epistemic Games* ohne konzeptuelles Verständnis *Recursive Plug-and-Chug* und *Transliteration to Mathematics* (Tuminaro, 2004, S. 76 und S. 79).

Die beiden EGs *Physical Mechanism Game* und *Pictorial Analysis-Game* (siehe Abbildung 4.10) lassen sich gegenüber den übrigen insofern abgrenzen, dass physikalische Gleichungen und mathematische Berechnungen nicht im Vordergrund stehen. Während die *Epistemic Form* in den beiden mathematischen EGs jeweils explizit eine physikalische Gleichung darstellt, ist dies beim *Physical Mechanism Game* nicht zwingend der Fall. Einerseits ähnelt der erste *Move* des *Physical Mechanism Game* dem des *Mapping Meaning to Mathematics*, andererseits entwickeln die Studierenden den konzeptuellen Hintergrund nicht in dem Sinne weiter, wie es beim mathematischen EG geschieht. Jedoch kann ein *Physical Mechanism Game* im Bearbeitungsprozess eine Vorstufe zu einem komplexeren EG darstellen.

Auf vergleichbare Weise verhält es sich mit dem *Pictorial Analysis-Game*. Dieses unterscheidet sich von den übrigen EGs besonders durch seine *Epistemic Form*, welche eine Zeichnung bzw. ein Diagramm ist, das die Studierenden von einer physikalischen Situation anfertigen. Dabei variieren die Inhalte der einzelnen Schritte deutlich, je nachdem welche Art von externer Repräsentation die Studierenden anfertigen, zum Beispiel ein Freikörperbild oder ein Schaltbild. Tuminaro (2004) beschreibt das EG mit Hilfe des folgenden Beispiels:

So, (1) Emma tacitly identifies force as the important concept, and then (2) decides that a free-body diagram is the appropriate external representation. [...] Alisa confirms Emma's tacit assumption that force is the important concept; in particular, Alisa notes that friction is what they ultimately need to determine. Before the students can go to move (4) and begin to fill in the slots in the free-body diagram, they must decide what free-body diagram to draw. In move (3), they decide they can treat the two crates on top of each other as one big crate. (S. 74)

Das Ergebnis des *Pictorial Analysis-Game* kann anschließend als Ausgangspunkt für ein darauf aufbauendes EG dienen.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass die EGs Problemlösen in der Physik, insbesondere im Zusammenhang mit der Nutzung von Mathematik, beschreiben und die verschiedenen mathematischen und physikalischen Wissenskomponenten fokussieren. So können die EGs einerseits in die Gruppe der Modelle des wissenszentrierten Problemlösens eingeordnet werden. Andererseits ergibt sich über den starken Fokus auf mathematische Inhalte und Konzepte ein Modell zum physikalischen Problemlösen. Eine Ausnahme bilden die beiden zuletzt beschriebenen EGs, *Physical Mechanism Game* und *Pictorial Analysis*. Sie setzen keinen expliziten Bezug zur Mathematik in der Problembeschreibung bzw. in den Lösungsschritten voraus. Welche EGs von den Studierenden eingesetzt werden, hängt sowohl von deren *Entry Conditions* als auch vom jeweiligen Problem und seiner *Epistemic Form* ab. Nur wenn zum Beispiel in der Aufgabe physikalische Gleichungen gegeben oder als Lösung gefordert sind, ist die Nutzung der mathematischen EGs sinnvoll. Bei Problemen, für die eine verbale Erklärung zur Lösung ausreicht, sind die mathematischen EG nicht immer notwendig.

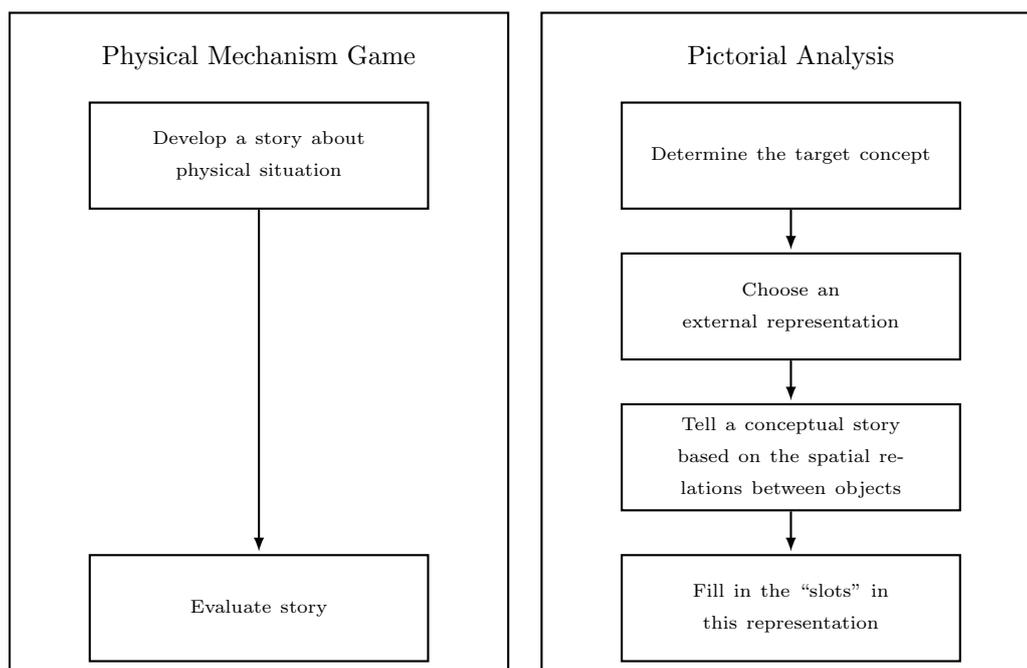


Abbildung 4.10: Ablauf der beiden argumentativen Epistemic Games *Physical Mechanism-Game* und *Pictorial Analysis* (Tuminaro, 2004, S. 72 und S. 74).

### 4.3 Problemlösen im Kontext der Ingenieurausbildung

Die Ausbildung spezieller Fähigkeiten zum Problemlösen ist ein wichtiger Bestandteil in der Ausbildung von Ingenieurstudierenden (Jonassen, Strobel & Lee, 2006). Während von zukünftigen Ingenieurinnen erwartet wird, dass sie sich globalen Herausforderungen stellen müssen, bleibt das analytische Problemlösen trotzdem eine zentrale Fähigkeit, welche Studierende erlernen müssen (Litzinger et al., 2010). Entsprechend konnte eine Studie zeigen, dass die Bearbeitung von Lehrbuchproblemen die häufigste und zeitaufwändigste Tätigkeit von zukünftigen Ingenieurinnen in ihrem Studium ist (Taraban, Craig & Anderson, 2011).

Veranstaltungen zur Mathematik und Physik bilden die Grundlage einer spezialisierten Ingenieurausbildung (vgl. Kapitel 3). Jedoch zeigt sich, dass Studierende Probleme haben, ihr mathematisches Wissen in physikalischen Kontexten anzuwenden (vgl. Neumann et al., 2015; Bajracharya & Thompson, 2016).

Auch aus diesem Grund kommt dem mathematischen und physikalischen Problemlösen eine hohe Bedeutung zu, sodass sich hieran auch die Forschung zum Problemlösen in der Ingenieurausbildung orientiert. Im Folgenden werden drei Ansätze dargestellt, die verschiedene Elemente wie Phasenmodelle, Strategien oder Nutzung von Vorwissen und Repräsentationen, die vom mathematischen und physikalischen Problemlösen bekannt sind, in unterschiedlicher Kombination nutzen: Zuerst wird kurz ein Stufenmodell, welches das Modellieren und Mathematisieren in den Mittelpunkt stellt (Gray, Constanzo & Plesha, 2005), vorgestellt, anschließend wird das *McMaster Problem Solving (MPS) 6-Stage-Model*, das Phasen und Strategien nutzt, um den Problemlöseprozess zu beschreiben (Woods, 2000) dargestellt und abschließend wird ein Ansatz präsentiert, welcher einer Phasenstruktur die Nutzung von Vorwissen und Repräsentationen hinzufügt (Litzinger et al., 2010).

### Modeling-based Problem-Solving Strategy

Gray et al. (2005) kombinieren Aspekte des Modellierens und des Problemlösens und führen damit zwei Bereiche zusammen, deren enge Verbindung auch in der Mathematikdidaktik breit diskutiert wird (vgl. Rott, 2013). Die Autorinnen sehen für beide Aktivitäten enge Verbindungen und schlagen ein Modell zur Beschreibung des Lösungsprozesses von Mechanik- bzw. Statik- und Dynamik-Problemen vor. Ihr fünfstufiges, vorwiegend lineares Modell beinhaltet die folgenden Stufen: *Road Map*, *Modeling*, *Governing Equations*, *Computation* und *Discussion & Verification*. Diese Phasen ähneln in ihrer Anordnung und ihrer Beschreibung den Modellen zum mathematischen Problemlösen von Polya (1957) und Schoenfeld (1980). Eine Ausnahme bildet die Phase *Governing Equations*. In dieser müssen die Studierenden die Gleichungen im Sinne der *three basic elements*<sup>20</sup> organisieren. Hier ist es insbesondere wichtig, die Lösbarkeit der Gleichungen insofern sicherzustellen, dass bei  $n$  Unbekannten auch  $n$  Gleichungen aufgestellt werden.

Explizit wird der Bezug zur Mathematik durch das Ziel, mit Hilfe dieses Ansatzes das Lösen von Statik- und Dynamik-Problemen auf ein mathematisches

<sup>20</sup>Diese sind „(i) the Newton-Euler equations and/or balance laws, (ii) material or constitutive equations, and (iii) the kinematic equations“ (Gray et al., 2005, S. 3).

Fundament zu setzen. Zudem fokussieren Gray et al. (2005) die Organisation und Berechnung von notwendigen Gleichungen, sodass sich hier Analogien zu den quantitativen EGs (vgl. Abschnitt 4.2.2) zeigen.

### McMaster Problem Solving (MPS) 6-Stage-Model

Auf Grundlage einer ausführlichen Literaturrecherche zum Problemlösen aus den unterschiedlichsten Bereichen (z. B. Wirtschaft, Mathematik, Psychologie, Medizin) stellt Woods (2000) ein evidenz-basiertes Modell zum Problemlösen vor, welches im Rahmen des *MPS Program*<sup>21</sup> entstanden ist (vgl. Woods et al., 1997). Woods (2000) nutzt als Grundlage des Modells eine strenge Definition von Problemlösen und grenzt es gegenüber Routineaufgaben wie folgt ab:

In *exercise solving*, we retrieved a plan that was used in the past. We use pattern recognition and identify a match between the current problem situation and our internal collection of problems we have solved successfully in the past [...] in *problem solving*, we must create a plan. We are unable to find a match between the current problem situation and our internal collection of problems. (S. 444)

Das MPS 6-Stage-Model basiert auf einer Zusammenstellung von elf Kriterien, die dem Ziel dienen, eine universell einsetzbare Basisstrategie zu ermöglichen (Woods, 2000). Einige Kriterien lassen eine breite Anwendbarkeit, auch in außeruniversitären Bereichen, zu: „The strategy should be useful and not an academic intervention. [...] The strategy should promote flexibility in its application“ (S. 444). Andere Kriterien berücksichtigen (meta-)kognitive Aktivitäten:

10. The strategy should be related to results expected from the stage rather than to the methods; where methods are selected, then these should relate to the types of cognitive and attitudinal skills used.

---

<sup>21</sup>Woods et al. (1997) beschreiben dieses Programm wie folgt: „[The McMaster Problem Solving Program is] a 25-year project in which we defined problem solving, identified effective methods for developing students’ skill in problem solving, implemented a series of four required courses to develop the skill, and evaluated the effectiveness of the program“ (S. 75).

11. The strategy should promote behaviors of successful problem solvers. For example, successful problem solvers ‘monitor’ the process about once per minute. (S. 445)

Auf Grundlage dieser Kriterien folgt die Erstellung eines zyklischen Modells mit sechs Phasen: *Engage: I want to and I can*, *Define-the-stated-problem*, *Explore*, *Plan*, *Do It* und *Look Back*. Die erste Phase umfasst die Begegnung mit dem Problem und die Motivation zur Durchführung der Problembearbeitung. Das Ziel der zweiten Phase ist, die gegebenen Informationen zu klassifizieren. Um die Erreichung des Ziels zu überwachen, dienen die Fragen: „Have all of the conditions of the problem been noted?“ und „Has the stated goal been stated correctly?“ (S. 449). Die *Explore*-Phase bezeichnet Woods selbst als die „probably the most underrated, most challenging and least understood stage of all stages“ (S. 449). In dieser Phase werden die Problembeschreibung, das Fachwissen und vorher erfolgreich gelöste Probleme miteinander verknüpft. Darauf aufbauend wird ein Ziel festgelegt und mit den vorhandenen Daten zusammengeführt. In der anschließenden *Plan*-Phase wird das Vorgehen strukturiert, wobei auch Strategien wie Rückwärtsarbeiten, *Systematisches Probieren* oder Teilprobleme bilden zum Einsatz kommen. Das Monitoring dieser Phase wird durch Fragen wie zum Beispiel „What is the overall, organized plan?“ (S. 449) unterstützt. An das folgende *Durchführen des Plans* schließt die Reflexionsphase (*Look Back*) an. In dieser werden die vorherigen Schritte auf Fehler hin überprüft, außerdem wird in dieser Phase das eigene Lernen von Problemlösen reflektiert. Woods (2000) fügt diesen sechs Phasen eine siebte, die *Transition*-Phase hinzu, die nach jeder der vorherigen sechs Phasen auftreten kann und hauptsächlich dem Monitoring dient.<sup>22</sup>

Das MPS-6-Stage-Model weist Gemeinsamkeiten zu den Modellen des mathematischen Problemlösens auf. Über die Phasenordnung und die Phasencharakterisierung zeigt sich ein Bezug zum Modell von Polya (1957). Die zyklische Anordnung und die zentrale Position einer Monitoring-Phase weist Ähnlichkeiten zum Modell von J. W. Wilson et al. (1993) und dessen Weiterentwicklung durch Fernandez et al. (1994) auf.

---

<sup>22</sup>Woods (2000) verweist in diesem Zusammenhang explizit auf Schoenfeld (1985).

## Integrated Problem Solving Model

Litzinger et al. (2010) verwenden in ihrer Studie zur Untersuchung von Problemlösen in der Statik das *Integrated Problem Solving Model*, welches auf Studien zum Problemlösen aus der Mathematik, der Physik und der Chemie aufbaut, und basierend auf Think-aloud Protokollen von Studierenden entwickelt wurde (Litzinger et al., 2010). Dieses Modell beschreibt Problemlösen mit Hilfe der drei Dimensionen *Problem-Solving Processes*, *Prior Knowledge* sowie *Symbol Systems*, das die Form, in der die Informationen vorliegen, beschreibt, und nutzt die folgenden Phasen des Problemlösens: *Problem Recognition*, *Problem Framing* und *Problem Synthesis* (McCracken & Newstetter, 2001).

In der ersten Phase *Problem Recognition* finden das Verstehen des Problems und die Planung des Vorgehens statt (Dimension: *Problem-Solving Processes*). Dazu nutzt die Problemlöserin ihr Vorwissen, um Muster zu erkennen und die Tiefenstruktur des Problems zu bestimmen (Dimension: *Prior Knowledge*). Das *Symbol System* liegt in dieser Phase verbal bzw. visuell in Form der Problembeschreibung vor. In der folgenden Phase *Framing* besteht die Handlung der Problemlöserin im Zeichnen des Freikörperbildes zu der Problemsituation. Während in dieser Phase das *Symbol System* hauptsächlich auf dem Diagramm beruht und bei dessen Anfertigung Vorwissen zu Konzepten und Prozeduren abgerufen werden, sind in der letzten Phase *Synthesis* die Gleichungen, ihre Organisation und die Evaluation des Ergebnisses auf mathematischer Ebene (Dimension: *Symbol System*) die bestimmenden Elemente.

In ihrer Studie nutzen Litzinger et al. (2010) dieses Modell, um Unterschiede zwischen schwachen und starken Studierenden bei der Bearbeitung von Problemen hinsichtlich ihrer genutzten Wissens Elemente und ihrer (meta-)kognitiven Strategien aufzudecken. Dabei fanden sie heraus, dass leistungsstarke Studierende einer ansteigenden Schwierigkeit in den Problemen durch ein erhöhtes Monitoring begegnen. Schwache Studierende ändern dahingegen ihre Strategien nicht. Zudem stellten sie fest, dass leistungsstarke Studierende viel häufiger „principle-based“ und „anticipative“ *Self-explanation*, „a strategy that facilitates the activation and application of knowledge during problem solving“ (Litzinger et al., 2010, S. 348) einsetzen als schwache Studierende.

Hinsichtlich des Rückgriffs auf Vorwissen und das Mapping dieses Wissens auf die vorliegende Problemsituation zeigen sich Parallelen zu den *Epistemic*

*Games* (Tuminaro & Redish, 2007). Diese werden von Litzinger et al. zudem explizit in ihren Ausführungen genannt.

### **Zusammenfassung**

Zusammenfassend zeigen sich viele Gemeinsamkeiten zwischen den Modellen zum Problemlösen in den Ingenieurwissenschaften und in der Mathematik sowie in der Physik. Die Autorinnen nennen explizit die Phasenmodelle von Polya (1957) und Schoenfeld (1985) sowie die EG nach Tuminaro und Redish (2007) als Grundlage für ihre eigenen Überlegungen, welche dann auf die spezifischen Kontexte der Ingenieurwissenschaften angepasst wurden. Dabei konzentrieren sich die Autorinnen auf Probleme aus dem Ingenieurkontext. Welches Vorgehen Ingenieurstudierende bei grundlegenden mathematischen und physikalischen Problemen zeigen, wird nicht behandelt. Ein Ziel der vorliegenden Arbeit, ist es, diesen Bereich detaillierter zu betrachten.

## **4.4 Verwendung des Begriffs „Problem“ in der vorliegenden Arbeit**

In diesem Abschnitt werden die vorherigen Ausführungen zum Problemlösen zusammengefasst und für die vorliegende Untersuchung eine Arbeitsdefinition generiert. Diese Definition wird zum einen aus den vorgestellten mathematikdidaktischen und physikdidaktischen Perspektiven und zum anderen aus der Anlage der Studie und den dort eingesetzten Materialien motiviert. Die vorgestellten Definitionen des Begriffes *Problem* legen jeweils unterschiedliche Schwerpunkte. In der mathematikdidaktischen Perspektive spielen neben den Methoden bzw. Algorithmen auch die Funktionen von Problemlöseaufgaben eine wichtige Rolle. Die vorgestellten Modelle aus der physikdidaktischen Forschung unterstreichen zudem die Bedeutung des Fachwissens und die Unterscheidung von Expertinnen und Novizen. Zudem wird in der Forschung zum Problemlösen auch häufig auf „standard (words) problems“ zurückgegriffen (vgl. Hembree, 1992; Lee, 1982).

In der vorliegenden Studie wird das Problemlösen bei Studierenden im ersten

Studienjahr ihres Ingenieurstudiums untersucht. Genutzt werden dabei Aufgaben, die nicht primär für die Ermittlung von Problemlösekompetenzen erstellt wurden, sondern Teile von Fachwissenstests zur Mathematik und Physik bzw. Technischen Mechanik darstellen. Diese Aufgaben ähneln solchen, die Studierende bzw. Schülerinnen während ihres Studiums bzw. in der Schule lösen müssen, und spiegeln daher die Anforderungen zu Beginn des Studiums annehmbar wider. Einige dieser Aufgaben lassen sich durch Nennen von Faktenwissen beantworten. Sie ermöglichen einen kontrastierenden Vergleich zu Aufgaben, die den Einsatz von Heuristiken erfordern. An einige Studierende werden größere Anforderungen als an andere gestellt. Aufgaben, welche von einigen Studierenden rein algorithmisch gelöst werden können, stellen für andere Studierende eine Barriere dar. Diese Studierenden müssen auf heuristisches Vorgehen zurückgreifen, um zu einer adäquaten Lösung zu gelangen. Aufgrund dieser theoretischen und praktischen Überlegungen führe ich die beiden folgenden Definitionen für die Begriffe *Problemlöseprozess* und *Problem* ein:

Ein Problemlöseprozess erfordert eine über die Anwendung eines Algorithmus hinausgehende Bearbeitung einer Aufgabe. Ein Routineprozess ist eine Aufgabenbearbeitung, bei der nach dem Verstehen der Aufgabe sofort eine algorithmische Bearbeitung der Aufgabe ohne Auftreten von Hindernissen einsetzt. Alle anderen Fälle sind Problemlöseprozesse. Eine Aufgabe ist genau dann ein Problem, wenn für ihre korrekte Lösung der Problemlöserin kein Routineprozess zur Verfügung steht.



# Kapitel 5

## Projekt KoM@ING

In diesem Kapitel werden, aufbauend auf den Darstellungen in Abschnitt 2.5, die Besonderheiten der Kompetenzmessung und -modellierung im Hochschulbereich und der aktuelle Stand der Forschung vor Beginn des Forschungsprogramms *Kompetenzmodellierung und Kompetenzerfassung im Hochschulsektor* (KoKoHs) beschrieben. Nach einer Einführung in dieses Programm, in dessen Rahmen das Projekt KoM@ING durchgeführt wurde, werden das Projekt und seine Teilprojekte näher beschrieben. Dieses Kapitel dient dazu, die vorliegende Arbeit in den Kanon vergleichbarer Arbeiten zur Kompetenzmodellierung im Feld der Hochschulforschung einzuordnen.

### 5.1 Forschungsprogramm KoKoHs – Kompetenzmodellierung und Kompetenzerfassung im Hochschulsektor

#### 5.1.1 Ausgangslage

Die erste Förderlinie des Forschungsprogramms KoKoHs, die von 2011 bis 2015 vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) eingerichtet wurde, war eine Reaktion auf die bis dahin fehlende empirische Fundierung der Hochschulausbildung (Blömeke & Zlatkin-Troitschanskaia, 2013; Zlatkin-Troitschanskaia & Kuhn, 2010; Zlatkin-Troitschanskaia, Pant, Kuhn, Toepper & Lautenbach, 2016). Dieses Defizit bestand, obwohl der Bedarf an solchen

Arbeiten besonders durch die zahlreichen bildungspolitischen Maßnahmen, welche in Folge des „PISA-Schocks“ eingeleitet wurden (Blömeke & Zlatkin-Troitschanskaia, 2013), noch verstärkt wurde. So hat insbesondere der Bologna-Prozess im Hochschulbereich zu großen Veränderungen geführt (M. Winter, Rathmann, Trümpler & Falkenhagen, 2012; Zlatkin-Troitschanskaia et al., 2016). In diesem Zusammenhang betonen Blömeke und Zlatkin-Troitschanskaia (2013), dass „nur auf der Basis von Wirksamkeitsprüfungen [...] evidenzbasierte Aussagen zum *output* bzw. *outcome* einer heterogenen Hochschullandschaft gewonnen und für nachhaltige Entwicklungs- und Optimierungsmaßnahmen auf struktureller, organisatorischer und individueller Ebene genutzt werden [können]“ (S. 2). Zudem bedarf es für erfolgreiche Konzepte an der Hochschule einer theoretischen und empirischen Fundierung (Blömeke & Zlatkin-Troitschanskaia, 2013).

Wie in Abschnitt 2.5 berichtet, ist das Forschungsprogramm KoKoHs bereits die dritte Förderinitiative im Förderprogramm „Hochschulforschung“ des BMBF, die als Reaktion auf die Forschungsdesiderate in der empirischen Hochschulforschung eingerichtet wurde. Als grundlagenorientiertes Forschungsprogramm sollten die folgenden übergeordneten Ziele erreicht werden (Blömeke & Zlatkin-Troitschanskaia, 2013):

- Die Leistungsfähigkeit des nationalen tertiären Bildungssystems im fortschreitenden internationalen Wettbewerb [...] erhalten,
- einen Beitrag zur Anschlussfähigkeit an die internationale Kompetenzforschung in der Hochschule [...] leisten und
- Grundlagen für eine Evaluation des Kompetenzerwerbs und der Kompetenzentwicklung an Hochschulen [...] schaffen, damit evidenzbasiert organisationale und individuelle Maßnahmen eingeleitet, hinsichtlich ihrer Wirkung kontrolliert und optimiert werden können. (S. 3)

### 5.1.2 Projekte und Forschungsinhalte

Für das Forschungsprogramm ist die grundlegende Definition von Kompetenz nach F. E. Weinert (2001) (siehe Abschnitt 2.1) leitend. Dabei werden sowohl kognitive Leistungsdispositionen als auch „motivationale, volitionale

und soziale Bereitschaften und Fähigkeiten, das erworbene Wissen variabel in unterschiedlichen Situationen anwenden zu können“ (Blömeke & Zlatkin-Troitschanskaia, 2013, S. 4) untersucht. „In den meisten Projekten [werden dabei] kognitive Leistungsdispositionen als Kern von generischen bzw. domänenspezifischen Kompetenzen fokussiert und als latente Persönlichkeitsmerkmale von den allgemeinen kognitiven Fähigkeiten wie Intelligenz abgegrenzt“ (Blömeke & Zlatkin-Troitschanskaia, 2013, S. 4). Wie Abbildung 5.1 zeigt, besteht das Forschungsprogramm aus fünf Clustern und beinhaltet Projekte aus den vier Fachdisziplinen *Wirtschafts- und Sozialwissenschaften*, *Ingenieurwissenschaften*, *Bildungswissenschaften* und *Lehrerbildung MINT-Fächer* sowie aus dem Bereich der *Forschungskompetenzen und Selbstregulation*, in denen neben domänenspezifischen auch generische Kompetenzen untersucht werden. Während die Projekte aus den vier Fachdisziplinen die spezifischen Kompetenzstrukturen der jeweiligen Domänen aufgreifen, fokussieren die Projekte im Bereich *Forschungskompetenzen und Selbstregulation* domänenübergreifende Kompetenzen, wie die Fähigkeit „mit wissenschaftlicher Originalliteratur“ (Blömeke & Zlatkin-Troitschanskaia, 2013, S. 16) umzugehen. Die vorliegende Arbeit ist im Rahmen des Clusters 1: Ingenieurwissenschaften angesiedelt.



Abbildung 5.1: Überblick zu KoKoHs-Domänen (Blömeke & Zlatkin-Troitschanskaia, 2013, S. 5)

Die Projekte in den fünf Clustern befassen sich schwerpunktmäßig mit der (Weiter-)Entwicklung von Kompetenzmodellen, „hierbei sind neben (1) übergeordneten institutionelle[n] Anforderungen (2) insbesondere die spezifischen Charakteristika eines Fachs bzw. der Domäne [...] zu berücksichtigen“ (Blömeke

& Zlatkin-Troitschanskaia, 2013, S. 7–8). Zudem ist die Generierung psychometrischer Modelle und geeigneter Testinstrumente (vgl. Abschnitte 2.2 und 2.3) ein weiterer Schwerpunkt. Bei letzterem ist die hohe Heterogenität im Forschungsbereich *Hochschule* von Bedeutung. In diesem Zusammenhang ist das Itemformat bei der Erstellung von Mess- und Testinstrumenten wichtig, da der vorherrschende Fokus auf geschlossene Formate hinsichtlich der heterogenen Studierendenschaft kritisch reflektiert werden soll. Durch diese Vielseitigkeit der Förderlinie sollen in den fünf „Clustern Ingenieurwissenschaften, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, Bildungswissenschaften, Lehrerbildung MINT-Fächer sowie Forschungskompetenzen und Selbstregulation [...] die Grundlagen geschaffen [werden], die dem Erhebungszweck einer individuellen und intraindividuellen Diagnostik und Evaluation im Hochschulbereich gerecht werden“ (Blömeke & Zlatkin-Troitschanskaia, 2013, S. 10).

## 5.2 Überblick KoM@ING

Das Projekt KoM@ING ist eines von drei Projekten<sup>1</sup> aus dem KoKoHs-Cluster: Ingenieurwissenschaften. Es gliedert sich in drei Teilprojekte an sechs Standorten (vgl. Abbildung 5.2). Das zentrale Ziel liegt in der Kompetenzmodellierung bzw. in der Untersuchung der Kompetenzentwicklung bezogen auf die Hochschulmathematik und ihre Verwendung in den Studiengängen Elektrotechnik, Maschinenbau und Bauwesen (Heiner, Wilkesmann, Biehler et al., 2016), hauptsächlich in den ersten beiden Semestern des Studiums.

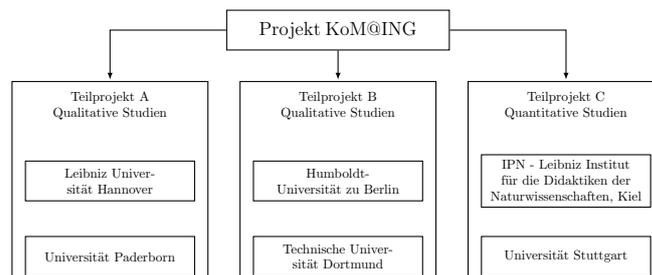


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung des Projektes KoM@ING

<sup>1</sup>Die beiden anderen Projekte sind KOM-ING (<http://www.kom-ing.de>) und MoKoMasch (<http://www.mokomasch.tu-darmstadt.de/mokomasch/ziele/index.de.jsp>).

Die qualitativen Teilprojekte fokussierten jeweils vorwiegend einzelne Studiengänge und untersuchten dort ausgewählte Kompetenzen und Kompetenzfacetten. Die vorliegende Arbeit stellt die erweiterten Ergebnisse des Teilprojekts B am Standort Berlin dar, dessen Thema die Untersuchung mathematischer Kompetenzen mit dem Schwerpunkt auf Problemlösen von Ingenieurstudierenden ist. In Teilprojekt C wurden dagegen quantitative Verfahren zur Erfassung der mathematischen und physikalisch-technischen Kompetenzen sowohl für den ingenieurwissenschaftlichen Studiengang Maschinenbau als auch für den Studiengang Bauwesen entwickelt (siehe Tabelle 5.1).

Tabelle 5.1: Überblick über die Teilprojekte des Projektes KoM@ING

Standort	Untersuchte Studiengänge	Studienphase	Untersuchungsfokus
Paderborn	Elektrotechnik	2. Semester	Analyse und Modellierung mathematischer Problemlöseanforderungen
Hannover	Elektrotechnik	Fortgeschrittene Bachelor- und Masterphase	Analysen zu Strukturunterschieden mathematischer Praxen
Berlin	Maschinenbau	1. und 2. Semester	Modellierung von Problemlösekompetenzen
Dortmund	Maschinenbau	7. Semester	Verwendung von Mathematik im Kontext des Laborlernens
Kiel	Maschinenbau	1. und 2. Semester	Kompetenzmodellierung Höhere Mathematik
Stuttgart	Maschinenbau (Bauingenieurwesen)	1., 2. und 3. Semester	Kompetenzmodellierung Technische Mechanik, Werkstofftechnik und Konstruktionstechnik

### 5.2.1 Qualitative Teilprojekte

Die einzelnen qualitativen Teilprojekte<sup>2</sup> untersuchten jeweils eigene Fragestellungen, orientierten sich dabei aber an den folgenden drei übergeordneten leitenden Gruppen von Forschungsfragen (Heiner, Wilkesmann, Biehler et al., 2016):

- (1) Welche theoretischen Ansätze aus der Mathematikdidaktik sind geeignet, um die in ingenieurwissenschaftlichen Lehrveranstaltungen zu bearbeitenden mathematikhaltigen Aufgaben hinsichtlich der erwarteten Kompetenzen und der realen Problemlöseprozesse zu konzeptualisieren? Wie müssen diese Ansätze ggf. weiterentwickelt werden?
- (2) Welche mathematikbezogenen kognitiven Ressourcen (deklarativ, prozedural, metakognitiv) sind notwendig, um die gestellten Aufgaben erfolgreich lösen zu können? In welcher Beziehung stehen diese zu den in der höheren Mathematik vermittelten Kompetenzen? Wie abhängig sind die Aufgaben und erwarteten Kompetenzen von den institutionellen Rahmungen?
- (3) Welche Kompetenzabstufungen lassen sich bei den Bearbeitungsprozessen identifizieren? Was sind typische Fehler und Hürden? (S. 4)

Für die Beantwortung der jeweiligen Forschungsfragen wurde ein breites Repertoire qualitativer Forschungsmethoden genutzt: Curriculare Analysen, Experteninterviews, Interviews mit Studierenden, Videoanalysen von Gruppen- und Partnerarbeiten sowie Aufgabenanalysen. Einige zentrale Ergebnisse werden hier zusammenfassend berichtet.<sup>3</sup>

Die Forscherinnen konnten unter anderem zeigen, dass das Arbeiten an Aufgaben aus der Elektrotechnik über einen modifizierten Modellierungskreislauf beschrieben werden kann (Biehler et al., 2016). Dieser beinhaltet die Phase *Mathematisierung*, in der statt einer Konstruktion eines ‚Realmodells‘ bzw.

<sup>2</sup>In diesem Abschnitt wird nicht auf die Untersuchungen bzw. die Ergebnisse des Teilprojektes B – Standort Berlin eingegangen, da die vorliegende Arbeit im Methoden- bzw. Ergebnisteil alle Informationen liefert.

<sup>3</sup>Für eine detaillierte Darstellung siehe Heiner, Wilkesmann, Biehler et al. (2016), Heiner, Wilkesmann und Radtke (2016) sowie Biehler, Schaper und Kortemeyer (2016).

dem Zeichnen einer Skizze eine konventionalisierte Skizze verwendet wird. Die zweite Phase *Mathematisch-elektrotechnisches Arbeiten*, in der die Studierenden nicht in die „Welt der Mathematik“ eintreten, „sondern mit Größen und verwenden Ressourcen wie Gleichungsmanagement, welches nicht ausschließlich auf reiner Mathematik beruht“ (Biehler et al., 2016, S. 27), arbeiten und die Phase *Validierung*, wobei nicht das Modell, „sondern der verwendete mathematische Ansatz validiert wird“ (S. 28). Zusätzlich zeigten die Analysen, dass die Studierenden Idealisierungen und Vereinfachungen physikalischer Systeme aus den Lehrveranstaltungen (Vorlesungen, Übungen etc.) in Aufgabenbearbeitungen übernehmen, ohne sich bewusst zu sein, dass es sich um solche handelt (Biehler et al., 2016). Es wurde deutlich, dass Inhalte aus verschiedenen ingenieurwissenschaftlichen Lehrveranstaltungen von den Studierenden nicht verknüpft werden, sodass Mathematik und Ingenieurmathematik für sie parallel existieren (Heiner, Wilkesmann & Radtke, 2016).

## 5.2.2 Quantitative Teilprojekte

Die beiden quantitativen Teilprojekte bearbeiteten sowohl die Konzeptualisierung domänenspezifischer bzw. generischer Kompetenzstrukturen und Kompetenzentwicklungsmodelle als auch die Entwicklung und Erprobung von Messinstrumenten zur Erfassung dieser Kompetenzen (Heiner, Wilkesmann, Biehler et al., 2016). Die übergeordneten Forschungsziele sind zum einen die Entwicklung und Validierung von Instrumenten „zur Erfassung der Fachkompetenz im Grundstudium Maschinenbau (Höhere Mathematik, Technische Mechanik, Werkstoffkunde und Konstruktionslehre)“ (Heiner, Wilkesmann, Biehler et al., 2016, S. 32). Zum anderen werden „Erklärungsmodelle für die Entwicklung der Fachkompetenz“ (Heiner, Wilkesmann, Biehler et al., 2016, S. 32) generiert.<sup>4</sup> Während Heinze und Neumann (2016) die Mathematik in den Ingenieurwissenschaften fokussieren, entwickelten Nickolaus, Behrendt, Dammann und Stefanica (2016) Kompetenztests zu den übrigen Domänen (vgl. Tabelle 5.2). Dabei wird angenommen, dass die Mathematik die Grundlage der weiterführenden physikalisch-technischen bzw. ingenieurwissenschaftlichen Fächer wie Konstruktionslehre oder Werkstoffkunde darstellt (Behrendt et al., 2015). Wie

---

<sup>4</sup>Eine ausführlichere Darstellung der Testinstrumente und Aufgaben erfolgt in den Abschnitten 7.5 und 7.7.

bereits in Abschnitt 2.6 beschrieben, konnte für das schulische Vorwissen zur Höheren Mathematik (Erhebung mathematischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums) ein eindimensionales Modell skaliert werden. Für den Ausgangstest (Fachkompetenz Mathematik) ist aufgrund kleiner Stichprobengröße die Dimensionalität der Kompetenzstruktur nicht eindeutig überprüfbar, wobei ein eindimensionales Modell auch in dieser Situation eher einem zwei- bzw. vierdimensionalen Modell vorzuziehen ist (Heinze & Neumann, 2016). Dies bedeutet, dass sowohl der Eingangstest als auch der Ausgangstest „hinsichtlich der [drei bzw.] vier mathematischen Inhaltsbereiche eher ein einheitliches Konstrukt“ (Heinze & Neumann, 2016, S. 10) erfassen.

Für den Eingangstest Technische Mechanik (Erhebung physikalisch-technischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums) wird ein dreidimensionales Modell mit den Dimensionen Statik, Dynamik und Basisideen durch die Daten gestützt (Behrendt et al., 2015; Heiner, Wilkesmann, Biehler et al., 2016). In den Tests für das fortgeschrittene Studium erweist sich für die Fachkompetenz Technische Mechanik (Statik und Elastostatik) ein „inhaltsspezifisches 2-dimensionales Modell [...] als am besten auf die Daten passend“ (Dammann et al., 2016, S. 363), wobei Statik und Elastostatik die beiden Dimensionen bilden (Heiner, Wilkesmann, Biehler et al., 2016). Für den Fachtest Dynamik kann ein eindimensionales Modell die Daten am besten repräsentieren (Dammann et al., 2016). Als weiteres Ergebnis ist in den jeweiligen Dimensionen der beiden Tests „eine Differenzierung in Kompetenzen mit mathematischen und solchen ohne mathematische Inhalte“ (Heiner, Wilkesmann, Biehler et al., 2016, S. 32) feststellbar.

### 5.3 Zusammenfassung

Nach der Vorstellung der theoretischen Grundlagen zur Kompetenzmodellierung, zu Mathematik und Physik im Ingenieurstudium und zum Problemlösen in den vorangegangenen Kapiteln beschreibt dieses Kapitel den konkreten Kontext, in welchem die vorliegende Arbeit entstanden ist. Es wird deutlich, dass die geringe Anzahl an Vorarbeiten in der empirischen Hochschulforschung weitere Studien im tertiären Bereich erforderlich macht, um anschließend an die umfassenden Untersuchungen im primären und sekundären Bildungsbereich

Tabelle 5.2: Überblick über die im Projekt KoM@ING entwickelten Testinstrumente

Domäne	Zeitpunkt der Testung	Instrument
Mathematik	1. Semester	Erhebung mathematischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums
	2. Semester	Fachkompetenz Mathematik
Technische Mechanik	1. Semester	Erhebung physikalisch-technischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums
	2. Semester	Fachkompetenz Technische Mechanik (Statik und Elastostatik)
	3. Semester	Fachkompetenz Technische Mechanik (Dynamik)
Werkstoffkunde	2. Semester	Fachkompetenz Werkstoffkunde
Konstruktionslehre	2. Semester	Fachkompetenz Konstruktionslehre

auch diesen Bildungsbereich hinsichtlich seiner Anforderungen und Besonderheiten besser zu verstehen. Die Vorstellung sowohl des Projektes KoM@ING als auch der Studien der fünf Teilprojekte sowie ihrer Ergebnisse dient als weitere Basis für methodische und organisatorische Entscheidungen der vorliegenden Untersuchung. Insbesondere die Testentwicklung und Ergebnisse der quantitativen Teilprojekte<sup>5</sup> sind für die vorliegende Arbeit von Bedeutung, da die dort entwickelten Testinstrumente in die Untersuchungen dieser Arbeit einfließen.

<sup>5</sup>Diese werden in den Abschnitten 7.5 und 7.7 detaillierter beschrieben.

# Kapitel 6

## Synthese und Forschungsfragen

In den Kapiteln zuvor wurden die theoretischen Grundlagen zu den drei Bereichen Kompetenzmodellierung und -messung, Verwendung von Mathematik und Physik in den Ingenieurwissenschaften und (mathematisches) Problemlösen thematisiert. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels (6.1) werden die Kernaussagen der Kapitel 2, 3 und 4 in einer Synthese zusammengeführt, die den zentralen Forschungsgegenstand dieser Arbeit motiviert. Die sich anschließenden Forschungsfragen konkretisieren die unterschiedlichen Aspekte, die für die Erreichung des Forschungsanliegens, einen umfassenden Einblick in relevante mathematische Kompetenzen von Ingenieurstudierenden zu erhalten, von Bedeutung sind.

### **6.1 Relevante mathematische Kompetenzen von Ingenieurstudierenden als Forschungsgegenstand**

In Kapitel 2 wurde gezeigt, dass der derzeitige Forschungsstand zum Thema Kompetenzmodellierung und -messung im Ingenieurstudium wesentliche Fragestellungen nur unzureichend beantwortet. Ein möglicher Grund dafür liegt auch in der, im Vergleich zur schulischen Ausbildung, hohen Komplexität universitärer Lehre, welche die Konstruktion von Kompetenzmodellen erschwert. Die im Projekt KoM@ING entwickelten Kompetenztests (vgl. Abschnitt 5.2.2) sind ein erster Ansatz, um Kompetenzen von Ingenieurstudierenden zu messen

und stellen einen wichtigen Schritt zur Klärung von Zusammenhängen zwischen den verschiedenen Domänen im Ingenieurstudium dar. Mit diesen Tests ist jedoch in der Regel nur eine dispositionelle Perspektive auf Kompetenzen möglich, während die Testaufgaben selbst zugleich weitere relevante Kompetenzfacetten adressieren. Um den Einsatz dieser Kompetenzfacetten durch die Studierenden zu analysieren, ist eine Untersuchung der Prozesse beim Bearbeiten dieser Aufgaben notwendig. Für eine Fokussierung bei den relevanten mathematischen Kompetenzen bietet sich das Problemlösen als theoretische Rahmung an, da es sowohl im schulischen Kontext als auch in der universitären Ausbildung zu den wichtigen Kompetenzen zählt, die Schülerinnen und Schüler bzw. Studierende erlernen sollen (vgl. Abschnitte 2.4.1 und 3.2). Mit dieser Rahmung werden zudem die *situationsspezifischen Fähigkeiten* aufgegriffen, die als Verbindung zwischen *Dispositionen* und späterer *Performanz* beim Problemlösen dienen. Erst durch eine solche Detailanalyse von Bearbeitungen zeigt sich, welche Prozesse Studierende durchlaufen, an welchen Stellen Schwierigkeiten auftreten und welche Merkmale von Aufgaben die Schwierigkeit dieser beeinflussen.

Um das Forschungsziel zu erreichen, relevante mathematische Kompetenzen von Ingenieurstudierenden zu analysieren und dabei sowohl Wissensbestände als auch die Anwendung von Wissen zu berücksichtigen, bedarf es eines Modells, das ermöglicht, die verschiedenen wichtigen Aspekte zu integrieren. Hier zeigt sich das Modell von Blömeke et al. (2015) als geeignet, denn es lässt die Unterscheidung der Kompetenzfacetten *knowledge of action* und *knowledge in action* zu, indem das Zusammenspiel zwischen *Dispositionen* und *Performanz* durch die *situationsspezifischen Fähigkeiten Wahrnehmen, Interpretieren* und *Entscheidungen treffen* moderiert wird und so die spezifischen Prozesse vom individuellen Wissen hin zu beobachtbarem Verhalten nachgezeichnet werden können. So berücksichtigt das Modell mit den *Dispositionen* das domänenspezifische Wissen aus der jeweiligen Domäne: Mathematisches Wissen, physikalisches Wissen und die Vorstellungen zum Kraftkonzept. Die *situationsspezifischen Fähigkeiten* werden exemplarisch mit Theorierahmungen des Problemlösens erfasst und damit eine wichtige Facette der allgemeinen mathematischen Kompetenzen detailliert untersucht. Dafür sind Videostudien besser geeignet sind als Paper-Pencil-Tests (vgl. Abschnitt 2.3), da sie erlauben, die

Bearbeitungen als Prozess zu analysieren. In Abbildung 6.1 ist das Modell auf den hier vorliegenden Gegenstand adaptiert dargestellt.

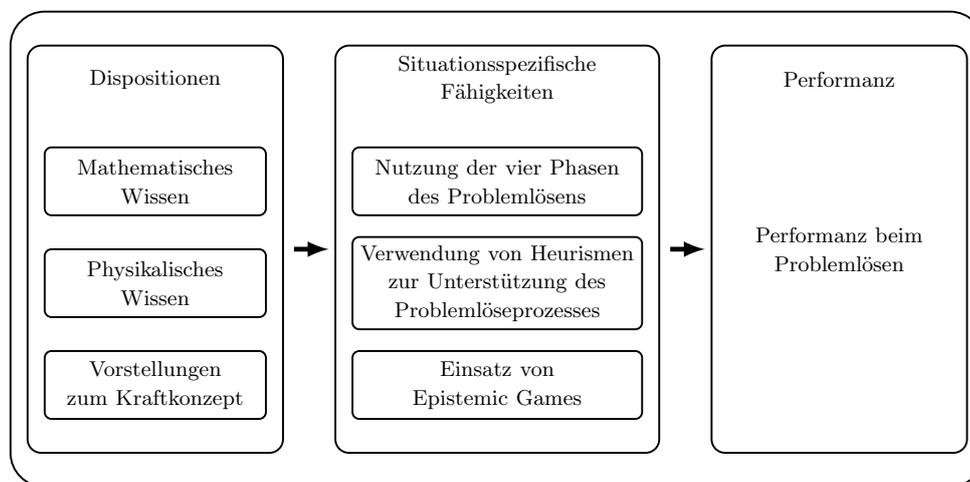


Abbildung 6.1: Modell zur Erfassung mathematischer Kompetenzen bei Ingenieurstudierenden, adaptiert nach Blömeke et al. (2015, S. 7).

In dem Modell werden zur Erfassung der *situationsspezifischen Fähigkeiten* die verschiedenen Aspekte zum Problemlösen zusammengefasst, die folgend kurz präsentiert werden: Bei der Untersuchung von Problemlösen in der mathematikdidaktischen Forschung (vgl. Kapitel 4) existieren Ansätze, welche die äußere Struktur (Phasen im Problemlöseprozess), und solche, die die innere Struktur (Heuristiken) fokussieren. Die Betrachtung der verschiedenen Modelle der äußeren Struktur zeigt, dass über die prinzipiellen Handlungen in einem Problemlöseprozess Einigkeit bei den Forscherinnen herrscht. Die verschiedenen Modelle unterscheiden sich hauptsächlich in zwei Charakteristika: Es kann zwischen eher linearen und eher zyklischen Beschreibungen des Prozesses differenziert werden. Dabei existieren auch Mischformen, wie zum Beispiel bei Schoenfeld (1985), welcher in einem vorrangig linearen Prozess einen möglichen Zyklus zwischen den ersten drei Phasen erlaubt, oder bei Rott (2014), der prinzipiell einen komplexen zyklischen Prozess vorsieht, jedoch auch lineare Vorgehensweisen zulässt. Zudem variiert die Anzahl möglicher Phasen bei den verschiedenen Modellen zwischen drei (Mason et al., 2010) und fünf Phasen (Schoenfeld, 1985; Rott, 2014). Bei den Modellen der inneren Struktur

zeigt sich, dass die meisten Autorinnen ähnliche Heurismen beschreiben, diese aber unterschiedlich klassifizieren. Während Tietze et al. (2000) mit *lokalen* und *globalen Heuristiken* den Beitrag im Problemlöseprozess als Charakterisierung heranziehen, dient bei Bruder und Collet (2011) die Reichweite des Heurismus der Einordnung in *Heuristische Hilfsmittel*, *Heuristische Strategien* und *Heuristische Prinzipien*. Außerdem variieren die Anforderungen, die an Methoden gestellt werden, damit diese als Heurismen angesehen werden. Während einige Autorinnen nur von Heurismen sprechen, wenn diese in bestimmten Prozessen angewendet werden, verfolgen Chinnappan und Lawson (1996) ein breites Verständnis und sehen beispielsweise auch das *Equation-handling* über das Mathematisieren hinaus als Heurismus an. Rott (2015) weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass verschiedene Konzeptualisierungen von Heurismen auch zu verschiedenen Ergebnissen in Studien führen können.

In der physikdidaktischen Forschung hat sich das Modell der *Epistemic Games* (Tuminaro & Redish, 2007) als nützlich erwiesen, um Bearbeitungen von mathematikhaltigen Physikaufgaben hinsichtlich des Problemlösens zu analysieren. Diese *Epistemic Games* lassen sich bezüglich des Niveaus der Verwendung mathematischer Verfahren in drei Kategorien unterteilen:

- Epistemic Games, die sowohl einen mathematischen Lösungsprozess und als auch ein konzeptionelles Verständnis des Problems und des Verfahrens erfordern,
- Epistemic Games, die einen mathematischen Lösungsprozess ohne zwingendes konzeptionelles Verständnis erfordern und
- Epistemic Games, die ohne das Lösen von mathematischen bzw. physikalischen Gleichungen auskommen.

Diese Unterscheidung ermöglicht die folgende Differenzierung: Zum einen kann nach der Fähigkeit der Studierenden, mathematische Verfahren aufgabengerecht zum Lösen der Probleme einzusetzen, unterschieden werden, und zum anderen können Aufgaben nach der Notwendigkeit, mathematische Heurismen einsetzen zu müssen, klassifiziert werden.

Auch im Ingenieurstudium hat die Fähigkeit, mathematische und physikalische Probleme lösen zu können, eine hohe Bedeutung. Dies zeigt sich in der

Forschung zum Problemlösen in der Ingenieurausbildung, in der viele Modelle und Forschungsansätze Ähnlichkeiten zu solchen aus der mathematik- und physikdidaktischen Forschung aufweisen bzw. diese explizit als Grundlage nennen. So wurden viele Ansätze und Modelle erarbeitet, wie Ingenieurstudierende (mathematische) Probleme lösen können, jedoch beschäftigten sich erst wenige Arbeiten mit der Frage, wie das tatsächliche Problemlösen von Ingenieurstudierenden als Kompetenz beschrieben werden kann.

## 6.2 Forschungsfragen

Da Kompetenzen erlernbar sind und sich somit über die Zeit entwickeln, umfasst die Studie mehrere Erhebungszeitpunkte, an denen die gleichen Studierenden beobachtet werden, und berücksichtigt sowohl solche Fragestellungen, welche sich auf einen einzelnen Zeitpunkt beziehen (Querschnitt) als auch solche, welche sich auf mehrere Zeitpunkte beziehen (Längsschnitt).

### 6.2.1 Forschungsfragen in Bezug auf Dispositionen

Der erste Aspekt zur Beschreibung von Kompetenz sind *Dispositionen*. Diese beschreiben das Wissen zu mathematischen und physikalischen Verfahren und Konzepten. Aus diesem Grund liefern die Kompetenztests zur Schulmathematik und Schulphysik, zur Höheren Mathematik und Technischen Mechanik sowie ein Wissenstest zu Vorstellungen zum Kraftkonzept die Daten für die Forschungsfragen im Bereich der *Dispositionen*.<sup>1</sup> Die übergeordnete Frage für diesen Bereich lautet:

**F 1:** Über welche mathematischen und physikalisch-technischen *Dispositionen* verfügen Ingenieurstudierende im ersten Studienjahr und wie hängen diese zusammen?

Um diese Frage zu beantworten, ist es sowohl erforderlich, die Kompetenzen zu Beginn als auch zum Ende des ersten Studienjahres zu untersuchen. Deswegen

<sup>1</sup>Eine detaillierte Beschreibung der methodischen Vorgehensweisen und Entscheidungen zu allen Forschungsfragen folgt in den Kapiteln 7 und 8.

schließen sich an diese übergeordnete Fragestellung die folgenden Fragen für eine detailliertere Untersuchung an:

F 1.1 Über welche mathematischen und physikalisch-technischen *Dispositionen* verfügen Ingenieurstudierende im ersten Studienjahr?

F 1.2 Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den *Dispositionen* Schulmathematik, Schulphysik und Vorstellungen zum Kraftkonzept zu Beginn des Studiums?

F 1.3 Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den *Dispositionen* Höhere Mathematik, Technische Mechanik und Vorstellungen zum Kraftkonzept zum Ende des ersten Studienjahres?

Mathematik wird als Grundlage physikalisch-technischer und ingenieurwissenschaftlicher Themen verstanden (vgl. Nickolaus et al., 2013; Musekamp et al., 2014; Behrendt et al., 2015). Aus diesem Grund sollten sich kausale Zusammenhänge zwischen der Schulmathematik sowie der Höheren Mathematik als Prädiktoren und der Schulphysik sowie der Technischen Mechanik als Kriteriumsvariablen zeigen. Zudem stellen die Vorstellungen zum physikalischen Kraftkonzept eine Basis für die Bearbeitung von Physik- bzw. Mechanikaufgaben dar. Diese Vorstellungen sollten ebenso als Prädiktor einen Beitrag zur Erklärung der Variablen Schulphysik und Technische Mechanik liefern.

### **6.2.2 Forschungsfragen in Bezug auf situationsspezifische Fähigkeiten**

In einer zweiten Perspektive auf Kompetenz stehen die Fähigkeiten wie Wahrnehmen, Interpretieren und Entscheidungen treffen im Fokus, die durch die spezifische Situation beeinflusst werden. Diese Fähigkeiten bei der Anwendung von Wissen lassen sich durch die Verwendung von geeigneten Heuristiken, die Nutzung von Problemlösephasen und den Einsatz adäquater *Epistemic Games* zur Unterstützung des Problemlöseprozesses zeigen. Die übergeordnete Frage für diesen Komplex lautet:

**F 2:** Welche *situationsspezifischen Fähigkeiten* nutzen Ingenieurstudierende bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben und mathematikhaltigen Physikaufgaben im ersten Studienjahr im Hinblick auf das mathematische Problemlösen?

Im vorliegenden Kontext zeigen sich die *situationsspezifischen Fähigkeiten* in der Anwendung von Heurismen und spezifischen Handlungen der Studierenden, welche einzelne Phasen des Problemlöseprozesses charakterisieren. Zur Beantwortung der Frage ist es notwendig, sowohl die Verwendung der Heurismen und das Vorkommen spezifischer Phasen und EGs im Lösungsprozess zu untersuchen. Somit ergeben sich die folgenden spezifizierten Fragen:

F 2.1 Welche Heurismen werden bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben im ersten Studienjahr genutzt?

F 2.2 In welcher Weise lässt sich der Ablauf der Problemlösephasen bei den Bearbeitungen der Mathematikaufgaben charakterisieren?

F 2.3 Inwiefern werden *Epistemic Games* von den Studierenden bei der Bearbeitung von Physikaufgaben im ersten Studienjahr eingesetzt?

Es werden nur solche Heurismen analysiert, die in der Theorie beschrieben wurden, da diese einen gewissen Konsens darstellen, welche Inhalte in der schulischen und universitären Mathematikausbildung gelehrt werden sollen. Als grundlegende *Heuristische Hilfsmittel*, die auch in den Beschreibungen zum Problemlösen bei Ingenieuren genannt werden, werden *Abbildungen* und *Gleichungen* gegenüber den *Tabellen* häufiger von Studierenden verwendet. Zudem wird bei schwierigen Aufgaben, die einen stärkeren Problemcharakter haben, die Kombination von Hilfsmitteln als eigener Heurismus von Bedeutung für den Erfolg sein (vgl. Schwarz, 2006; Tietze et al., 2000; Zimmermann, 2003). *Heuristische Strategien* und *Heuristische Prinzipien* müssen – stärker als die Hilfsmittel – durch die Aufgaben gefordert werden. Da die verwendeten Aufgaben nicht explizit für die Erfassung von Problemlösen entwickelt wurden, ist davon auszugehen, dass Strategien und Prinzipien nur bei wenigen und hauptsächlich bei schwierigen Aufgaben zu beobachten sind.

Lineare Problemlöseprozesse sind charakteristisch für Expertinnen, so ist beispielsweise das lineare Phasenmodell von Schoenfeld (1980) aus Untersuchungen mit Expertinnen hervorgegangen. Den Studierenden sind die Typen von Aufgaben, die sie bearbeiten, aus der Schule bzw. aus den Veranstaltungen zur Höheren Mathematik bzw. Technischen Mechanik zum größten Teil bekannt. Sie haben somit zumindest gegenüber den einfacheren Aufgaben einen gewissen Expertinnenstatus. Aus diesem Grund dürfte der lineare Problemlöseprozess sehr häufig beobachtbar sein. Bei schwierigen Aufgaben ist davon auszugehen, dass leistungsstarke Studierende diese mit mehr Monitoring in Form von Rückschau-Phasen begegnen, wohingegen leistungsschwächere Studierende womöglich ihr Verhalten nicht ändern (vgl. Litzinger et al., 2010). Gleichzeitig ist davon auszugehen, dass die Rückschau-Phase eher als Ergebniskontrolle statt als Reflexionsgelegenheit genutzt wird, wie bereits von Yimer und Ellerton (2010), Rott (2014) und Fan und Zhu (2007) beobachtet wurde. Bei der Anwendung von EGs werden leistungsschwächere Studierende vermutlich das Verhalten von Novizen zeigen und nicht in der Lage sein, Problemsituationen adäquat für eine quantitative Darstellung förderlichen Weise abzubilden (vgl. Reinhold et al., 1999). Zudem werden sie wahrscheinlich häufiger auf Alltagserfahrungen in Form des EG *Physical Mechanism Game* zurückgreifen, um Aufgaben zu lösen (vgl. Maloney, 2011). Die beiden Umstände, dass nicht alle eingesetzten Aufgaben mathematische Berechnungen erfordern und zudem aufgrund des Multiple-Choice Formats mögliche Antworten vorgegeben sind, dürfte den Einsatz des *Physical Mechanism Game* zusätzlich erhöhen. Die beiden EGs *Mapping Meaning to Mathematics* und *Mapping Mathematics to Meaning*, in denen ein konzeptionelles Verständnis der mathematischen Verfahren gezeigt wird, werden voraussichtlich aufgrund der notwendigen Voraussetzungen nur von wenigen Gruppen bzw. Studierenden eingesetzt. Das EG *Recursive Plug an Chug* dürfte eine größere Verbreitung innerhalb der Gruppen bzw. Studierenden haben, da es nur mechanische Fähigkeiten voraussetzt.

### 6.2.3 Forschungsfragen in Bezug auf Zusammenhänge

Ein wesentlicher Bestandteil des Modells von Blömeke et al. (2015) sind die Zusammenhänge zwischen den *Dispositionen* und den *situationsspezifischen Fähigkeiten*. Die diesbezüglich übergeordnete Forschungsfrage lautet:

**F 3:** Welche Zusammenhänge bestehen zwischen *Dispositionen* und *situationsspezifischen Fähigkeiten* von Ingenieurstudierenden im ersten Studienjahr beim Bearbeiten von Mathematikaufgaben und (mathemathikhaltigen) Physikaufgaben?

Für die Bearbeitung der Mathematikaufgaben benötigen die Studierenden andere Grundlagen als bei der Bearbeitung von Physikaufgaben. Aus diesem Grund werden die Zusammenhänge für die Bearbeitung von Mathematik- und Physikaufgaben getrennt untersucht. So ergeben sich die folgenden untergeordneten Fragestellungen:

F 3.1 Inwiefern unterscheiden sich Studierende, die hinsichtlich ihres Einsatzes von Heurismen bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben in verschiedene Gruppen eingeordnet werden können, in ihren *Dispositionen*?

F 3.2 Inwiefern unterscheiden sich Studierende, die hinsichtlich ihres Einsatzes von *Epistemic Games* bei der Bearbeitung von Physikaufgaben in verschiedene Gruppen eingeordnet werden können, in ihren *Dispositionen*?

Wie in den theoretischen Vorannahmen zu den *situationsspezifischen Fähigkeiten* bereits thematisiert, werden sich Studierende, die sich hinsichtlich des Einsatzes von Heurismen bzw. EGs in Gruppen einordnen lassen, auch hinsichtlich ihrer *Dispositionen* unterscheiden. Leistungsstarke Studierende werden sich durch Kombinationen von Heurismen und Monitoringphasen von leistungsschwachen Studierenden unterscheiden. Zudem werden leistungsstarke Studierende eher in der Lage sein, EGs zu nutzen, die ein konzeptuelles Verständnis mathematischer Verfahren erfordern als leistungsschwache Studierende.

In den folgenden beiden Kapiteln werden die methodischen Entscheidungen, die Instrumente und Verfahren für die Datenerhebung und -auswertung dargestellt, die zur Beantwortung der hier genannten Forschungsfragen erforderlich sind.



# Kapitel 7

## Studie zur Untersuchung relevanter mathematischer Kompetenzen

In diesem Kapitel wird das methodische Vorgehen der Studie vorgestellt, mit dem die Forschungsfragen beantwortet werden. Dazu wird zuerst der grundlegende Forschungsansatz der *Mixed Methods* im Kontext der Arbeit vorgestellt und diskutiert (Abschnitt 7.1). Das Design der Studie, welches sich aus dem *Mixed Methods* Ansatz ergibt, wird im folgenden Abschnitt vorgestellt (Abschnitt 7.2). Anschließend wird die Stichprobe der Studie detailliert beschrieben (Abschnitt 7.3). Zudem wird die Mathematik- und Physikausbildung an der Ruhr-Universität Bochum vorgestellt, welche den äußeren Rahmen der Studie darstellt (Abschnitt 7.4). Es folgt die Darstellung der eingesetzten Testinstrumente zur Erfassung der *Dispositionen*, die entweder im Projekt entstanden oder bereits etabliert sind (Abschnitt 7.5). Für die Erhebung der Prozesse bei der Bearbeitung wurden Methoden der Videographie und des *Lauten Denkens* eingesetzt. Die diesbezüglichen Entscheidungen werden erläutert (Abschnitt 7.6). Abschließend werden die Aufgaben präsentiert, die in den Gruppen- bzw. Einzelarbeiten eingesetzt wurden, um die Bearbeitungsprozesse der Studierenden zu untersuchen (siehe Abschnitt 7.7).

## 7.1 Mixed-Methods im Rahmen der Studie

Der Mixed-Methods-Ansatz entstand aus einer Bewegung weg von einem Dualismus von quantitativen Methoden versus qualitativen Methoden hin zu einer Kombination beider Methoden (Kuckartz, 2014). Dass es sich dabei nicht um den *einen* Ansatz, sondern um eine Zusammenfassung vieler verwandter Methoden handelt, zeigt sich in der Vielzahl von Bezeichnungen für dieses Konzept: *Integrative Research*, *Multimethod Research*, *Multiple Methods*, *Triangulated Studies* oder *Mixed Research* (Johnson, Onwuegbuzie & Turner, 2007). Genauso existiert keine einheitliche Definition (Schreier & Odağ, 2010), vielmehr geben Johnson et al. (2007) 19 unterschiedliche Definitionen des Mixed-Methods-Ansatzes an. Diese fokussieren methodische Aspekte wie die Fragen, welche Komponenten, in welchen Phasen des Forschungsprozesses, als auch warum und in welche Richtung Ansätze kombiniert werden (Johnson et al., 2007). In dieser Arbeit ist die Definition von Kuckartz (2014) für das Vorgehen leitend:

Unter Mixed-Methods wird die Kombination und Integration von qualitativen und quantitativen Methoden im Rahmen des gleichen Forschungsprojekts verstanden. Es handelt sich also um eine Forschung, in der die Forschenden im Rahmen von ein- oder mehrphasig angelegten Designs sowohl qualitative als auch quantitative Daten sammeln. Die Integration beider Methodenstränge, d. h. von Daten, Ergebnissen und Schlussfolgerungen, erfolgt [...] in der Schlussphase des Forschungsprojektes. (S. 33)

Dabei wird der *Complementarity*-Ansatz (vgl. Greene, Caracelli & Graham, 1989) bzw. der *Additional Coverage*-Ansatz (Morgan, 2014) verfolgt, in dem qualitative und quantitative Methoden kombiniert werden, um die Ergebnisse, die mit der einen Methode erzielt wurden, durch die Ergebnisse der anderen Methode zu ergänzen. Dies erlaubt „yielding an enriched, elaborated understanding of the phenomenon“ (Greene et al., 1989, S. 258). Das Design entsteht nach Creswell, Plano Clark, Gutmann und Hanson (2003) aus den vier Kategorien *Implementation* (Reihenfolge der Datenerhebung), *Priority* (Priorisierung der qualitativen oder quantitativen Daten bzw. Gleichbehandlung), *Integration* (Zeitpunkt der Kombination beider Forschungsmethoden) und *Theoretical*

*Perspective* (Einfluss der Theorie auf das Design). Für die *Implementation* ergibt sich für die vorliegende Arbeit eine parallele Durchführung der qualitativen und quantitativen Erhebungen. Die *Priority* liegt bei den qualitativen Daten, die quantitativen Daten dienen im Sinne des *Complementarity*-Ansatzes dazu, die Ergebnisse der qualitativen Untersuchungen zu ergänzen. Die *Integration* der Daten erfolgt erst bei der Datenanalyse bzw. -auswertung. Die *Theoretical Perspective* bestimmt das Design der Studie maßgeblich. Nach Creswell et al. (2003) ergibt sich somit ein *Concurrent Transformative Design*. In der vorliegenden Arbeit wird der Ansatz wie folgt konkret aufgegriffen: Die theoretische Perspektive ist für das Design der Studie leitend. Das Erkenntnisinteresse liegt in einer umfassenden Untersuchung relevanter mathematischer Kompetenzen von Ingenieurstudierenden im ersten Studienjahr. *Dispositionen*, die über Papier- und Bleistift-Tests erhoben werden, ermöglichen dazu einen Überblick, jedoch sind die Prozesse von besonderer Bedeutung. Um diese zu verstehen, bedarf es einer theoretischen Rahmung mit deren Hilfe qualitative Analysen möglich sind. Diese stellen einen großen Teil der Untersuchung dar. Aus diesem Grund stehen die videographierten Gruppen- bzw. Einzelarbeiten der Ingenieurstudierenden im Mittelpunkt der Analysen. Diese Videoaufnahmen werden dazu genutzt, den Heurismeneinsatz bei der Lösung von Mathematik- und (mathemathikhaltigen) Physikaufgaben zu beobachten und zu analysieren.

## 7.2 Design der Studie zur Untersuchung relevanter mathematischer Kompetenzen

Dieser Abschnitt greift die zuvor behandelten Aspekte des Mixed-Methods-Ansatzes auf und führt sie in ein Studiendesign zusammen. Dabei handelt es sich um ein *Concurrent Transformative Design*, also um eine theoriegeleitete parallele Erhebung von qualitativen und quantitativen Daten, die in einer theoriegeleiteten Analyse zusammengeführt werden.

Von September 2013 bis Oktober 2014 fand zu drei Messzeitpunkten die Datenerhebung für die Studie statt (siehe Abbildung 7.1). Die Erhebung der quantitativen Daten, die der Ergänzung der qualitativen Daten dienen, wurde in

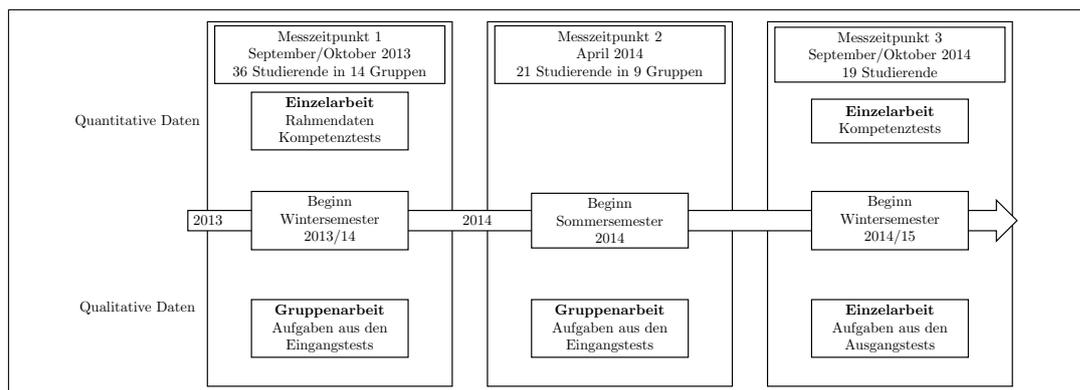


Abbildung 7.1: Design und zeitlicher Verlauf der Studie im Sinne des *Concurrent Transformative Designs*.

einem Prä-Post-Design am ersten und dritten Messzeitpunkt durchgeführt. Am ersten Messzeitpunkt wurden als Eingangstests sowohl die *Erhebung mathematischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums* (siehe Abschnitt 7.5.1) als auch die *Erhebung physikalisch-technischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums* (siehe Abschnitt 7.5.2) von den Studierenden bearbeitet. Zusätzlich wurden die Vorstellungen zur Newton'schen Mechanik mit Hilfe des *Force Concept Inventory* (siehe Abschnitt 7.5.5) erhoben. Am dritten Messzeitpunkt wurden als Ausgangstests von den Studierenden die Erhebungen zur *Fachkompetenz Mathematik* (siehe Abschnitt 7.5.3) und zur *Fachkompetenz Technische Mechanik – Statik und Elastostatik* (siehe Abschnitt 7.5.4) sowie der *Force Concept Inventory* bearbeitet.

Die Erhebung der qualitativen Daten, die den wesentlichen Teil der Studie ausmachen, fand zu allen drei Messzeitpunkten statt. Am ersten Messzeitpunkt bearbeiteten die Studierenden in Gruppen von zwei bis drei Personen<sup>1</sup> 16 Items aus der *Erhebung mathematischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums* und 13 Items aus der *Erhebung physikalisch-technischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums*, dabei wurden sie zum *Lauten Denken* angehalten (siehe Abschnitt 7.6.2); diese Gruppenarbeit wurde auf Video aufgezeichnet (siehe Abschnitt 7.6.1). Auf die gleiche Weise wurde zum zweiten Messzeitpunkt verfahren. Zu diesem nahmen jedoch von den ursprünglichen 14 Gruppen nur noch Studierende aus neun Gruppen an der Studie teil.

Am dritten Messzeitpunkt wurden die Gruppen aufgelöst. Dies geschah aus

<sup>1</sup>Die Einteilung der Gruppen wurde durch die Studierenden selbst vorgenommen.

zwei Überlegungen: zum einen sollte nach den Gruppenarbeiten auch die Einzelleistung der Studierenden bei der Bearbeitung von Mathematik- und Physikaufgaben erfasst werden, um eine detaillierte Perspektive auf die Leistung der einzelnen Gruppenmitglieder zu gewinnen, und zum anderen war in einer Gruppe nur noch eine Studentin vorhanden und so war für diese kein Gruppensetting<sup>2</sup> mehr gegeben, die Auflösung der Gruppen führte so zu vergleichbaren Settings für alle Probanden. Durch die Aufhebung der Gruppensituation fiel auch die damit verbundene Diskussions- und Gesprächsanregung weg. Aus diesem Grund bekamen alle Studierenden eine Übungsaufgabe zur Anregung des *Lauten Denkens*. Diese Aufgabe bestand darin, ein Sudoku zu lösen. Anschließend bearbeiteten die Studierenden alleine jeweils neun Items aus den Erhebungen zur *Fachkompetenz Mathematik* und zur *Fachkompetenz Technische Mechanik: Statik und Elastostatik*. Hierbei wurden sie ebenfalls auf Video aufgezeichnet und zum *Lauten Denken* angehalten.

### 7.3 Stichprobenbeschreibung

Die Ruhr-Universität Bochum gehörte mit etwa 41.500 Studierenden im Wintersemester 2013/14 zu den 20 am stärksten besuchten Hochschulen in Deutschland (Statistisches Bundesamt, 2014). An den ingenieurwissenschaftlichen Fakultäten<sup>3</sup> waren insgesamt etwa 5.100 Bachelor- und 2.000 Masterstudierende eingeschrieben.<sup>4</sup> In den für diese Studie relevanten Studiengängen Bauingenieurwesen, Umwelttechnik und Ressourcenmanagement, Maschinenbau und Elektrotechnik und Informationstechnik hatten ungefähr 1.100 Studierende ein

---

<sup>2</sup>Über die Gründe des hohen Drop-Out lässt sich an dieser Stelle nur spekulieren, da keine Untersuchungen in dieser Hinsicht durchgeführt wurden. Möglich wäre, dass die Studierenden das Ingenieurstudium abgebrochen haben, was aufgrund der allgemeinen hohen Abbruchquoten im Ingenieurstudium (vgl. Heublein et al., 2012) zumindest für einen Teil der Teilnehmerinnen zutreffen dürften. Zum anderen könnte auch das Interesse, an der Studie teilzunehmen nicht mehr vorhanden gewesen sein.

<sup>3</sup>Dazu gehören die Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwesen, die Fakultät für Maschinenbau und die Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik.

<sup>4</sup>[http://dwh.uv.ruhr-uni-bochum.de/fileadmin/docs/statistik//archiv/Jahr\\_2013-2014/Studierende\\_nach\\_Abschluss-WS2013-2014.pdf](http://dwh.uv.ruhr-uni-bochum.de/fileadmin/docs/statistik//archiv/Jahr_2013-2014/Studierende_nach_Abschluss-WS2013-2014.pdf)

Studium zum Zeitpunkt des Beginns der Studie aufgenommen.<sup>5</sup> Aus dieser Grundgesamtheit stammen die Teilnehmerinnen dieser Studie, die im Folgenden zuerst auf Individual- und anschließend auf Gruppenebene detaillierter beschrieben werden.

### Allgemeine Angaben

Bei den Teilnehmerinnen der Studie handelt es sich zum ersten Messzeitpunkt um  $N_1 = 36$  (angehende)<sup>6</sup> Studierende der Ingenieurwissenschaften. Aufgrund des allgemeinen Aufrufs im Vorkurs meldeten sich nicht nur Studierende des Studiengangs *Maschinenbau* für die Studie (siehe Tabelle 7.1).

Tabelle 7.1: Überblick über die Studiengänge der Teilnehmerinnen

Studiengang	männlich	weiblich	Summe
Bauingenieurwesen	1	0	1
Elektrotechnik und Informationstechnik	2	2	4
Maschinenbau	20	4	24
Umwelttechnik und Ressourcenmanagement	0	1	1
Keine Angaben	3	3	6
Summe	26	10	36

An der Studie nahmen 26 Männer und 10 Frauen teil. Diese waren im Durchschnitt  $M_{Alter} = 19,42$  ( $SD_{Alter} = 1,13$ ) Jahre alt. Das Statistisches Bundesamt (2014) nennt für die drei Studiengänge Maschinenbau/Verfahrenstechnik, Elektrotechnik und Bauingenieurwesen für das Wintersemester 2013/14 einen Frauenanteil von 15,5% (ca. 9.200 weibliche Studierende im ersten Fachsemester von ca. 59.400 insgesamt). Nimmt man nur die Studierenden dieser drei Studiengänge, so ergibt sich in der vorliegenden Studie ein Frauenanteil von 21% (6 von 29). Hinsichtlich dieser Variablen ist die Stichprobe also vergleichbar mit der Grundgesamtheit aller im Wintersemester 2013/14 neu eingeschrie-

<sup>5</sup>[http://dwh.uv.ruhr-uni-bochum.de/fileadmin/docs/statistik//archiv/Jahr\\_2013-2014/Studienanfaenger\\_1FS\\_Abschluss-WS2013\\_2014.pdf](http://dwh.uv.ruhr-uni-bochum.de/fileadmin/docs/statistik//archiv/Jahr_2013-2014/Studienanfaenger_1FS_Abschluss-WS2013_2014.pdf)

<sup>6</sup>32 Studierende wurden im September 2013 in der Veranstaltung „Mathematischer Vorkurs für künftige Studierende der Ingenieurwissenschaften“ angeworben. Vier weitere Studierende konnten bei einem erneuten Aufruf in der Veranstaltung „Mathematik I für Maschinenbauingenieure“ für die Studie gewonnen werden.

benen Studierenden.

### Schulische Voraussetzungen in den Fächern Mathematik und Physik

Zu den schulischen Voraussetzungen zählen neben dem erreichten Abschluss und den Noten auch der Umfang des Mathematik- und Physikunterrichts in der Oberstufe. Alle Teilnehmerinnen haben die allgemeine Hochschulreife als Voraussetzung für das Studium erlangt. Während bis auf einen Teilnehmer alle eine schriftliche Abiturprüfung in Mathematik hatten, haben nur zehn Teilnehmerinnen eine schriftliche Abiturprüfung in Physik (zwei Teilnehmer haben eine mündliche Abiturprüfung absolviert) abgelegt. Die Studierenden haben im Durchschnitt mit der Note „gut“ in Mathematik bzw. in Physik ihre Schullaufbahn beendet (vgl. Tabelle 7.2).<sup>7</sup>

Tabelle 7.2: Mathematik- und Physiknoten der Hochschulzugangsberechtigung der Teilnehmerinnen (in Klammern absolute Anzahl).

Notenbereich	Mathematik		Physik	
15 bis 13 Punkte	25%	(9)	22%	(8)
12 bis 11 Punkte	47%	(17)	22%	(8)
10 bis 9 Punkte	19%	(7)	8%	(3)
8 bis 7 Punkte	6%	(2)	8%	(3)
6 Punkte oder schlechter	0%	(0)	0%	(0)
keine Angaben	3%	(1)	39%	(14)

Alle Teilnehmerinnen haben mindestens drei Wochenstunden Mathematikunterricht pro Halbjahr in der Oberstufe erhalten (vgl. Tabelle 7.3). Dreiviertel der Studierenden hatten mehr als vier Stunden, also einen Leistungskurs.<sup>8</sup> Im Gegensatz dazu hatte nur etwas mehr als die Hälfte der Teilnehmerinnen min-

<sup>7</sup>Die Antwortmöglichkeiten für dieses Merkmal waren, wie auch für die übrigen zur Stichprobenbeschreibung, durch den Rahmendatenfragebogen vorgegeben, der vom quantitativen Teilprojekt zur Verfügung gestellt wurde. Mittelwerte konnten mit den Angaben nicht bestimmt werden.

<sup>8</sup>Dies trifft auf die Teilnehmerinnen zu, da alle in Nordrhein-Westfalen ihr Abitur absolviert haben und hier zum Zeitpunkt der Studie für Leistungskurse eine Wochenstundenzahl von 5 festgeschrieben war.

destens drei Stunden Physik pro Halbjahr in der Oberstufe, ungefähr die Hälfte davon besuchte einen Leistungskurs, und mehr als ein Viertel der Teilnehmerinnen hatte gar keinen Physikunterricht in der Oberstufe.

Tabelle 7.3: Umfang des Mathematik- und Physikunterrichts der Teilnehmerinnen in der Oberstufe (in Klammern absolute Anzahl).

Wochen- stundenanzahl	Mathematik		Physik	
mehr als 4	72%	(26)	25%	(9)
3 bis 4	28%	(10)	31%	(11)
1 bis 2	0%	(0)	17%	(6)
ich hatte keinen	0%	(0)	28%	(10)
keine Angaben	0%	(0)	0%	(0)

### Beschreibung der Gruppen

An die Bearbeitungen der Kompetenztests schloss sich die Bildung der Gruppen für die Gruppenarbeit an. Dafür wurden die Studierenden aufgefordert, selbstständig Gruppen mit zwei bis drei Mitgliedern zu bilden. Insgesamt gab es sechs 2er Gruppen und acht 3er Gruppen (siehe Tabelle 7.4).

Die Gruppen sind relativ ausgeglichen in Bezug auf die Schulnoten in Mathematik und Physik. In neun Gruppen ist jemand mit einer sehr guten Abschlussnote in Mathematik und in den restlichen befindet sich mindestens eine Studentin mit einer guten Mathematiknote. Bei den Physiknoten gibt es drei Gruppen, in denen keine Noten bekannt sind, da entweder kein Physikunterricht in der Oberstufe besucht wurde oder die Note nicht angegeben wurde, und fünf weitere wo dies teilweise der Fall ist.

Tabelle 7.4: Übersicht über Gruppen des ersten und zweiten Messzeitpunktes. Die Studierenden sind alphabetisch nach ihrem Personencode sortiert.

Gruppe	Studierende	Mathematiknoten (einzelne Studierende)	Physiknoten (einzelne Studierende)
1	S11/S23	3/1	-/-
2	S06/S07/S12	3/2/1	4/2/3
3	S13/S16	3/1	1/-
4	S17/S21/S27	2/2/2	4/-/-
5	S02/S08/S10	2/2/1	2/2/1
6	S01/S05/S33	1/2/2	1/3/1
7	S15/S34/S36	3/3/1	2/-/2
8	S09/S14/S26	2/1/2	-/-/1
9	S04/S22/S30	2/1/2	1/2/1
10	S19/S30	2/1	-/-
11	S18/S24/S25	3/4/2	-/-/2
12	S20/S28	2/2	-/-
13	S03/S32	2/3	1/3
14	S35/S29	4/2	4/2

## 7.4 Mathematik- und Physikausbildung für Ingenieure an der Ruhr-Universität Bochum

### 7.4.1 Mathematikausbildung der Ingenieurstudierenden

In diesem Abschnitt wird die Mathematikausbildung für Ingenieurstudierende in den Studiengängen Maschinenbau (MB), Elektrotechnik und Informationstechnik (ETIT), Bauingenieurwesen (BI) und Umwelttechnik und Ressourcenmanagement (UTRM)<sup>9</sup> an der Ruhr-Universität Bochum (RUB) beschrieben. Die Darstellung erfolgt vergleichend mit den in Abschnitten 3.2 und 3.4 beschriebenen Inhalten und Kompetenzen, die von SEFI gefordert werden.

<sup>9</sup>In den Studiengängen BI und UTRM werden dieselben Mathematikvorlesungen angeboten.

Die Mathematikausbildung ähnelt sich in den vier Studiengängen,<sup>10</sup> setzt jedoch teilweise andere Schwerpunkte. Aufgrund der Anlage der Untersuchung sind die Ausführungen auf die ersten beiden Semester beschränkt.

Die Mathematik-Module in den ersten beiden Semestern bestehen pro Woche aus zwei (MB und BI/UTRM) bzw. drei (ETIT) Mathematikvorlesungen und den dazugehörigen Übungen und Tutorien.<sup>11</sup> In den Veranstaltungen werden ähnliche<sup>12</sup> Inhalte behandelt (siehe Tabelle 7.5). Während die Mathematik-Module sowohl im Studiengang MB, BI als auch UTRM jeweils einen Umfang von 6 Semesterwochenstunden haben und einen Arbeitsaufwand von 270 Stunden (9 CP) einfordern, liegt der Umfang im Studiengang ETIT in beiden Semestern bei 8 Semesterwochenstunden, und es wird ein Arbeitsaufwand von 300 Stunden (10 CP) eingefordert.

Wie aus Tabelle 7.5 ersichtlich, decken die Inhalte der Vorlesungen einen großen Teil der Core Level des SEFI Frameworks (Alpers et al., 2013) ab. Während Inhalte, die in den Core Level 1 und 2 vorkommen, besonders im ersten Semester thematisiert werden, sind Inhalte, welche ausschließlich in Level 2 vorkommen, nur Thema des zweiten Semesters. Die Inhalte und ihre Verteilung auf die Mathematikvorlesungen der drei Studiengänge MB, BI und UTRM sind auf der Ebene der übergeordneten Themen identisch, der Studiengang ETIT unterscheidet sich etwas, da dort das Thema Gewöhnliche Differentialgleichungen bereits im ersten Semester thematisiert wird und zusätzlich im zweiten Semester die Themen Fourierreihen und Laplace- und Fouriertransformationen behandelt werden. Dies lässt sich durch die unterschiedlichen Bedarfe in den fortgeschrittenen Veranstaltungen erklären. Auffällig ist, dass das Thema Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, welches in allen Core Levels vorkommt, in den ersten beiden Semestern nicht zum Thema einer Mathematikveranstaltung gemacht wird.

---

<sup>10</sup>Die Vergleiche der Studiengänge beziehen sich auf die Modulbeschreibungen der Prüfungs- und Studienordnungen, welche für die Studierenden im Wintersemester 2013/14 bis Sommersemester 2014 galten. Diese wurden teilweise bereits durch neuere Ordnungen abgelöst und stellen daher nicht mehr den aktuellen Stand des jeweiligen Studiengangs dar.

<sup>11</sup>In den ersten beiden Semestern sind dies die Module „Mathematik 1“ (M1) und „Mathematik 2“ (M2) (MB und ETIT) bzw. „Höhere Mathematik A“ (HM1) und „Höhere Mathematik B“ (HM2) (BI und UTRM).

<sup>12</sup>Dies stellt nur einen groben Vergleich zwischen den behandelten Inhalten und den SEFI Core Levels dar, da lediglich die übergeordneten Themen verglichen wurden.

Tabelle 7.5: Inhalte der Mathematikvorlesungen der vier Ingenieurstudiengänge, Abgleich zum SEFI Core Level nach Alpers et al. (2013)

Inhalte	Core Level	MB		ETIT		BI und UTRM	
		M1	M2	M1	M2	HM1	HM2
Reelle Zahlen	0			✓			
Komplexe Zahlen	0, 1	✓		✓		✓	
Matrizen und Determinanten	1, 2	✓		✓		✓	
Vektorräume und Unterräume	1, 2	✓		✓		✓	
Eigenwerte und Eigenvektoren	2	✓		✓		✓	
Folgen und Reihen (Konvergenz)	1	✓		✓		✓	
Differentialrechnung einer Veränderlichen	0, 1	✓		✓		✓	
Integralrechnung einer Veränderlichen	0, 1	✓		✓		✓	
Potenzreihen	1		✓		✓		✓
Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher	2		✓		✓		✓
Integralrechnung mehrerer Veränderlicher	2		✓		✓		✓
Gewöhnliche Differentialgleichungen	2		✓	✓			✓
Fourierreihen	2				✓		
Laplace- und Fouriertransformationen	2				✓		

MB = Maschinenbau, ETIT = Elektrotechnik und Informationstechnik,

BI = Bauingenieurwesen, UTRM = Umwelttechnik und Ressourcenmanagement

M1/2 = Mathematik 1/2, HM1/2 = Höhere Mathematik 1/2

## 7.4.2 Physikausbildung der Ingenieurstudierenden

Die Physikausbildung für Ingenieurstudierende in den Studiengängen MB, ETIT, BI und UTRM an der RUB findet in unterschiedlichen Veranstaltungen statt (vgl. Tabelle 7.6).

Tabelle 7.6: Vorlesungen in den ingenieurwissenschaftlichen Studiengängen der Ruhr-Universität Bochum zu physikalischen Grundlagen

Studiengang	Semester 1	Semester 2
MB	Mechanik A	Mechanik B
ETIT	Physik	
BI	Mechanik A	Mechanik B
UTRM	Mechanik A	Mechanik B

Anmerkung: In den Studiengängen BI bzw. UTRM müssen die Studierenden im ersten Semester zusätzliche Veranstaltungen zur Physik (Bauphysik bzw. Physik) belegen. Diese sind aufgrund ihrer inhaltlichen Ausrichtung nicht Teil dieser Untersuchung und werden deswegen nicht weiter berücksichtigt.

Die Modulbeschreibungen der drei Studiengänge sind sowohl für Mechanik A als auch für Mechanik B identisch und decken nahezu alle<sup>13</sup> im Abschnitt 3.4 dargestellten Inhalte der Statik, Elastostatik<sup>14</sup> und Dynamik<sup>15</sup> ab. Tabelle 7.7 gibt einen Überblick über die Themen. Wohl aufgrund anderer Anforderungen im weiteren Studienverlauf unterscheiden sich die Inhalte der Physikvorlesung im Studiengang ETIT von den übrigen Studiengängen. Hier wird im Bereich der Mechanik die Kinematik, Rotationsbewegungen, Schwingungen und Wellen behandelt. Anschließend werden die Gebiete Optik und Atom- und Kernphysik thematisiert.

<sup>13</sup>Soweit dies aus den Modulbeschreibungen ersichtlich ist.

<sup>14</sup>Für die Statik und Elastostatik umfasst dies die Themenfelder Auflager eines Tragwerkes, Nullstab, Idealisierung von Fachwerken, Wertigkeit von Auflagern, Freikörperbild, statische Bestimmtheit und Schwerpunkt sowie die Berechnung, Prüfung, Bestimmung und Erstellung der damit zusammenhängenden Größen und Konzepte.

<sup>15</sup>Dies umfasst die Kinematik und Kinetik eines Massepunktes und eines starren Körpers.

Tabelle 7.7: Inhalte der Mechanikvorlesungen der drei Ingenieurstudiengänge MB, BI und UTRM

Inhalte	MB und BI/UTRM	
	Mechanik A	Mechanik B
Physikalische Grundlagen	✓	
Zentrale ebene und räumliche Kraftsysteme	✓	
Allgemeine ebene und räumliche Kraftsysteme	✓	
Allgemeines zur Kinematik	✓	
Metrische Größen von Körpern, Flächen, Linien	✓	
Gestützte Körper	✓	
Schnittgrößen	✓	
Systeme von Körpern	✓	
Arbeitsprinzipien	✓	
Stabilität und Gleichgewichtslagen	✓	
Grundlagen der Mechanik deformierbarer Körper	✓	
Materialgesetz		✓
Elementare Elastostatik der Stäbe		✓
Biegung mit Normal und Querkraft		✓
Kinetik des Massenmittelpunktes		✓
Bewegungswiderstände: Reibung		✓
Kinetik starrer Körper		✓
Ebene Bewegung starrer Körper		✓
Elementare Theorie des Stoßes		✓

## 7.5 Erhebungsinstrumente

Für die Erhebung der *Dispositionen* wurden hauptsächlich Instrumente eingesetzt, die im Teilprojekt C (siehe Abschnitt 5.2.2) für ein Prä-Post-Design zu Beginn des Studiums und zum Ende des ersten Studienjahres entwickelt wurden. Es handelt sich um vier Tests, von denen zwei mathematische und

zwei physikalisch-technische Kompetenzen bzw. die Fachkompetenz in Technischer Mechanik prüfen. Zusätzlich wurde zur Erfassung der Vorstellungen zum Kraftbegriff der Force Concept Inventory (Hestenes, Wells & Swackhamer, 1992) eingesetzt. Diese werden in den folgenden Abschnitten kurz vorgestellt.<sup>16</sup>

### 7.5.1 Erhebung mathematischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums

Die *Erhebung mathematischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums* wurde als Eingangstest für die Mathematikkompetenz der Studierenden eingesetzt und beinhaltet 35 Items, die eine „reliable und valide Messung von schulischem Vorwissen zur Höheren Mathematik“ (Heinze & Neumann, 2016, S. 7) darstellen. Die Testitems basieren auf einem Itempool von Hauck (2012). Der Test umfasst die Inhaltsbereiche *Grundlagen* (z. B. Auflösen von Gleichungen), *Analysis* (z. B. Bestimmung von Ableitungen) und *(Analytische) Geometrie* (z. B. Parameterdarstellung einer Ebene).

Nach der Pilotierung erwies sich ein dreidimensionales Modell mit den Inhaltsbereichen als Dimensionen als am besten auf die Daten passend. Aufgrund der Anlage des Tests als mögliche Kovariate für die weiteren Untersuchungen, wurde jedoch eine eindimensionale Modellierung vorgezogen (Heinze & Neumann, 2016). Für den Test ergibt sich eine EAP/PV-Reliabilität von 0,84, eine WLE-Reliabilität von 0,84 sowie eine Varianz der Personenfähigkeitsverteilung von 1,21 logits. Zudem zeigen sich mäßige Korrelationen<sup>17</sup> zur Abiturnote ( $r = -0,37$ ,  $p < 0,001$ ) und deutliche zur Mathematiknote ( $r = -0,50$ ,  $p < 0,001$ ), vgl. Heinze und Neumann (2016) sowie Neumann et al. (2015). Aus diesem Test wurden die mathematischen Items für die Gruppenarbeit zum

<sup>16</sup>Die beiden Erhebungen zu Beginn des Studiums konnten im Teilprojekt C mit großen Stichproben durchgeführt werden. Dadurch sind valide und reliable Angaben zu Personenfähigkeiten und Itemschwierigkeiten möglich. Bei den beiden Tests *Fachkompetenz Mathematik* und *Fachkompetenz Technische Mechanik - Statik und Elastostatik* berichten Nickolaus et al. (2016) und Heinze und Neumann (2016) von Schwierigkeiten beim Feldzugang. Aus diesem Grund können für diese beiden Tests nur weniger detaillierte Ergebnisse berichtet werden.

<sup>17</sup>Die negative Korrelation ergibt sich aus der Skalierung. Während bei den Personenfähigkeitsschätzern ein hoher Wert eine hohe Fähigkeitsstufe darstellt, steht eine niedrige Schulnote für eine bessere Leistung.

Messzeitpunkt 1 und 2 entnommen. Ein Beispielitem zur Berechnung des Abstandes einer Ebene zu einem Punkt ist in Abbildung 7.2 dargestellt.<sup>18</sup>

Gegeben ist die Ebene  $E : 6x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -12$  und der Punkt  $A(3/6/4)$ .

- a) Bestimmen Sie den Abstand  $d$  des Punktes von der Ebene!

$d =$

Abbildung 7.2: Beispielitem aus der Erhebung mathematischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums (Itemschwierigkeit:  $\sigma = 1,35$ ).

## 7.5.2 Erhebung physikalisch-technischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums

Die *Erhebung physikalisch-technischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums* wurde als Eingangstest für die Physikkompetenz der Studierenden genutzt und beinhaltet in der eingesetzten Version 28 Aufgaben (einige davon mit Teilaufgaben). Das Instrument basiert auf Analysen von Schulcurricula allgemeinbildender und technischer Gymnasien in Baden-Württemberg (Hindenach, 2012, zitiert nach Nickolaus et al., 2016). Die Aufgaben umfassen die Inhaltsbereiche *Statik*, *Dynamik* (mit den Untergebieten *Kinematik*, *Kinetik*, *Energie und Impuls* und *Schwingungen*) und *Grundvorstellungen der Technischen Mechanik*. Aufgrund geringer Reliabilitäten wurde eine eindimensionale Modellierung (EAP/PV-Reliabilität von 0,66 und WLE-Reliabilität von 0,58) einem dreidimensionalen Modell entlang der Inhaltsbereiche vorgezogen<sup>19</sup> und von Teilprojekt C für weitere Untersuchungen verwendet (Nickolaus et al., 2016).

Aus diesem Test wurden die physikalischen Items für die Gruppenarbeit zum

<sup>18</sup>Für die Schwierigkeit aller Items, die aus diesem Test verwendet wurden, galt:  $-3,71 < \sigma < 2,89$ . Je niedriger das  $\sigma$  desto leichter die Aufgabe.

<sup>19</sup>Gleichzeitig waren die Fit-Indizes des dreidimensionalen Modells denen des eindimensionalen überlegen:  $AIC_{3-dim} : 36766$ ,  $BIC_{3-dim} : 36915$ ;  $AIC_{1-dim} : 37001$ ,  $BIC_{1-dim} : 37112$ ;  $\chi^2(5) = 246$ ;  $p < ,001$  (Behrendt et al., 2015, S. 6).

Messzeitpunkt 1 und 2 entnommen. Ein Beispielitem zur Berechnung der resultierenden Kraft ist in Abbildung 7.3 dargestellt.<sup>20</sup>

Berechnen Sie die resultierende Kraft  $F_{res}$  aus den Kräften  $F_1$  und  $F_2$  in dem dargestellten Fall!  
Tragen Sie die Lösung in das dafür vorgesehene Feld ein!



Abbildung 7.3: Beispielitem aus der Erhebung physikalisch-technischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums (Itemschwierigkeit:  $\sigma = -1,56$ ).

### 7.5.3 Fachkompetenz Mathematik

Der Test zur *Fachkompetenz Mathematik* wurde in der Studie als Ausgangstest für die Mathematikkompetenz der Studierenden zu Beginn des 3. Fachsemesters eingesetzt und besteht aus 34 (Testheft A) bzw. 33 (Testheft B) Aufgaben, die sich am zugrunde liegenden Rahmenmodell (siehe Abbildung 7.4) orientieren und die vier Inhaltsgebiete abdecken.

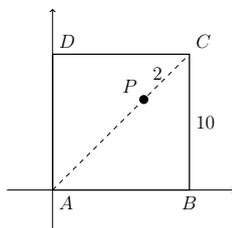
Inhaltsgebiete	Wissenskomponente		Prozesskomponente			
	deklaratives Wissen	prozedurales Wissen		Problemlösen		Argumentieren & Reflektieren
		technische Fertigkeiten	rechnerisches Modellieren	innermath. Problemlösen	begriffliches Modellieren	
1-dim. Analysis						
n-dim. Analysis, Differenzialgleichungen						
Lineare Algebra						
Analytische Geometrie						

Abbildung 7.4: Rahmenmodell für die Modellierung mathematischer Kompetenzen von Ingenieuren (Heinze & Neumann, 2016, S. 6).

<sup>20</sup>Für die Schwierigkeit aller Items, die aus diesem Test verwendet wurden, galt:  $-1,80 < \sigma < 2,76$ . Je niedriger das  $\sigma$  desto leichter die Aufgabe.

Die Datenanalyse aus der Pilotierung durch Teilprojekt C ergab, dass eine eindimensionale Modellierung (EAP/PV Reliabilität von 0,77), bei der die Annahme, dass es sich bei der mathematischen Kompetenz um ein einheitliches Konstrukt handelt, zugrunde liegt, aus ökonomischen Gründen zu favorisieren ist. Möglich ist jedoch auch eine zweidimensionale Modellierung (mit den Dimensionen Wissenskomponente und Prozesskomponente, EAP/PV Reliabilitäten von 0,76 und 0,73), hier konnten die statistischen Analysen kein eindeutiges Ergebnis liefern (Heinze & Neumann, 2016). Eine Verbindung des Tests *Fachkompetenz Mathematik* und der *Erhebung mathematischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums* mit Hilfe einer linearen Regression zeigte einen signifikanten Zusammenhang ( $\beta_{std} = 0,66$ ,  $p < 0,001$ ) und eine Aufklärung von „44% der Varianz in den Personenschätzern für die mathematischen Kompetenzen am Ende der Mathematikausbildung durch die Schätzer zu Beginn des Studiums“ (Heinze & Neumann, 2016, S. 12).

Aus diesem Test wurden die mathematischen Items für die Einzelarbeit zum Messzeitpunkt 3 entnommen. Ein Beispielitem zur Berechnung der Fläche eines Dreiecks ist in Abbildung 7.5 dargestellt.<sup>21</sup>



Sei durch  $A, B, C, D$  ein Quadrat in der Ebene gegeben (siehe Abbildung). Die Seitenlänge des Quadrats beträgt 10 cm. Sei  $P$  der Punkt der Diagonalen  $AC$  mit Länge von  $PC = 2$  cm.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $BCP$ !

Der Flächeninhalt beträgt  cm<sup>2</sup>.

Abbildung 7.5: Beispielitem aus dem Test Fachkompetenz Mathematik. Die Lösungshäufigkeit für dieses Item lag bei 0,27.

<sup>21</sup>Die Lösungshäufigkeit aller Items, die aus diesem Test verwendet wurden, lag zwischen 0,01 und 0,71.

## 7.5.4 Fachkompetenz Technische Mechanik: Statik und Elastostatik

Für die Entwicklung des Tests *Fachkompetenz Technische Mechanik - Statik und Elastostatik*, der zum dritten Messzeitpunkt zur Messung die Kompetenz in der Technischen Mechanik der Studierenden eingesetzt wurde, wurde ein ähnliches theoretisches Modell wie zur Entwicklung des Tests zur *Fachkompetenz Mathematik* (siehe Abbildung 7.6) genutzt. Der Test umfasst in der eingesetzten Form 30 Aufgaben. Als Formate „wurden sowohl geschlossene (Single-Choice, Multiple-Choice und komplexes Multiple-Choice) als auch halboffene (Zahlenwerte, Formeln, Vervollständigungs- und Zuordnungsaufgaben)“ (Nickolaus et al., 2016, S. 15) genutzt.

Inhalts- gebiete	Wissenskomponente		Prozesskomponente		
	deklaratives Wissen mechanisch und mathematisch	prozedurales Wissen Technologische Verfahren der Technischen Mechanik	In mechanische Kontexte eingebettete mathematische Prozeduren	Problemlösen Situationsadäquate mechanische Modellierung	Mathematische Modellierung mechanischer Probleme
Statik					
Elastostatik					
Kinematik					
Kinetik					

Abbildung 7.6: Theoretisches Kompetenzmodell Fachkompetenz Technische Mechanik (in Anlehnung an Nickolaus et al., 2016, S. 13).

Nach der Pilotierung des Tests durch das Teilprojekt C ergaben die Datenanalysen, dass sowohl ein- als auch mehrdimensionale Modelle die Kompetenzstruktur der Fachkompetenz im Bereich Statik und Elastostatik erklären können. Von Nickolaus et al. (2016) wird hervorgehoben, dass sich die „TM-Kompetenzfacetten nach dem Vorhandensein mathematischer Anforderung [...], die wir als Ausdruck einer begrenzten integrativen Verarbeitung mechanischen und mathematischen Wissens interpretieren“ (S. 21) ausdifferenzieren lassen, somit mathematische Anforderungen in den jeweiligen Aufgaben einen Einfluss auf die Schwierigkeit haben. Aus diesem Test wurden die Items der Technischen Mechanik für die Einzelarbeit zum Messzeitpunkt 3 entnom-

men. Ein Beispielitem zur Berechnung der Streckenlast ist in Abbildung 7.7 dargestellt.<sup>22</sup>

Ermitteln Sie die Funktion der in der folgenden Abb. 7 dargestellten Streckenlast. Tragen Sie Ihr Ergebnis in das Lösungsfeld ein.

Gegeben:  $q_1 = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ,  $q_2 = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ,  $L = 1,0\text{m}$

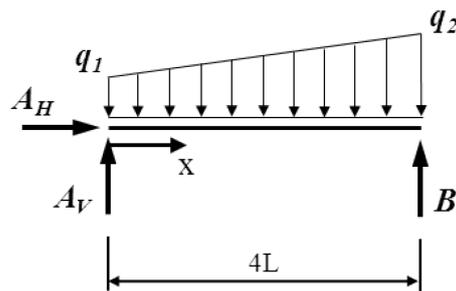


Abbildung 7

Abbildung 7.7: Beispielitem aus dem Test Fachkompetenz Technische Mechanik: Statik und Elastostatik (Itemschwierigkeit:  $\sigma = 0,49$ ).

### 7.5.5 Force Concept Inventory

In den ersten beiden Semestern des Ingenieurstudiums bildet die Newton'sche bzw. klassische Mechanik die Grundlage für nahezu alle in den Veranstaltungen zur Physik und Technischen Mechanik thematisierten Inhalte.<sup>23</sup> Ein wichtiges Konzept der Mechanik ist das *Kraftkonzept*. Da Vorstellungen zu physikalischen Begriffen das Lernen beeinflussen (Kircher et al., 2015), ist

<sup>22</sup>Für die Schwierigkeit aller Items, die aus diesem Test verwendet wurden, galt:  $-1,66 < \sigma < 1,85$ . Je niedriger das  $\sigma$  desto leichter die Aufgabe.

<sup>23</sup>Vergleiche zum Beispiel die Modulhandbücher der Studiengänge Maschinenbau ([www.mb.rub.de/studium-mb/pdfs/Modulhandbuch\\_MB\\_BSc\\_ab\\_WiSe\\_1617\\_Final.pdf](http://www.mb.rub.de/studium-mb/pdfs/Modulhandbuch_MB_BSc_ab_WiSe_1617_Final.pdf)) und Bauingenieurwesen ([www.fbi.ruhr-uni-bochum.de/fbi/mam/content/pruefungsamt/bsc\\_bi\\_modulhandbuch\\_ws1617\\_01102106.pdf](http://www.fbi.ruhr-uni-bochum.de/fbi/mam/content/pruefungsamt/bsc_bi_modulhandbuch_ws1617_01102106.pdf)).

es von Interesse, die Vorstellungen der Studierenden zur Newton'schen Mechanik und insbesondere zum Kraftkonzept zu erfassen. Zur Messung dieser Vorstellungen bei Schülerinnen und Studierenden hat sich der *Force Concept Inventory* (FCI; Hestenes et al., 1992) als ein häufig eingesetztes Instrument bewährt (Neumann, Fulmer & Liang, 2013; Savinainen & Scott, 2002). Er besteht aus 30 physikalischen Denkaufgaben,<sup>24</sup> für die „Schüler keine genauen Formelkenntnisse oder mathematischen Fähigkeiten im Lösen von Gleichungssystemen“ (Schecker & Gerdes, 1999, S. 75) benötigen. Für jede Aufgabe sind fünf Antwortmöglichkeiten vorgegeben (siehe Abbildung 7.8), von denen eine die korrekte physikalische Erklärung enthält und die anderen vier typische Schülerinnenvorstellungen aufgreifen (Schecker & Gerdes, 1999; Neumann et al., 2013).

A stone dropped from the roof of a single story building to the surface of the earth:

- (A) reaches a maximum speed quite soon after release and then falls at a constant speed thereafter.
- (B) speeds up as it falls because the gravitational attraction gets considerably stronger as the stone gets closer to the earth.
- (C) speeds up because of an almost constant force of gravity acting upon it.
- (D) falls because of the natural tendency of all objects to rest on the surface of the earth.
- (E) falls because of the combined effects of the force of gravity pushing it downward and the force of the air pushing it downward.

Abbildung 7.8: Beispielim aus dem Force Concept Inventory. Die Studierenden haben eine deutsche Version des Tests bearbeitet.

<sup>24</sup>In der ursprünglichen Version enthält der Test 29 Items. Jedoch wurde er aufgrund von Erfahrungen überarbeitet und auf 30 Items erweitert (siehe T. Wilhelm, 2005).

Der Test umfasst die folgenden Inhaltsbereiche: Kinematik, Erstes Newton'sche Axiom, Zweites Newton'sche Axiom, Drittes Newton'sche Axiom,<sup>25</sup> Superpositionsprinzip und Arten von Kräften (Hestenes et al., 1992, S. 141). Für die Interpretation der Ergebnisse geben Hestenes et al. zwei Schwellen an, bei 60% und bei 85% erreichter Punkte im *FCI*: „Our data suggest that there exists a kind of conceptual [entry] threshold near 60% on the Inventory. Below this threshold, a student's grasp of Newtonian concepts is insufficient for effective problem solving“ (Hestenes et al., 1992, S. 158) und „On the basis of such data we interpret an FCI score of 85% as the *Newtonian Mastery threshold*. We are confident in identifying students with scores above this threshold as *confirmed Newtonian thinkers*“ (Hestenes & Halloun, 1995, S. 505).

Kritik am *FCI* wird auf verschiedenen Ebenen geäußert. So werden zum Beispiel die Schwellenwerte als problematisch angesehen, da zum einen keine empirische Evidenz für die beiden Werte von 60% und 85% vorliegt (Dancy, 2000 zitiert nach Savinainen und Scott, 2002) und zum anderen weist das Erreichen der *Newtonian Mastery threshold* nicht zwangsläufig auf einen sicheren Umgang mit der Newton'schen Mechanik hin (Mahajan, 2005). In weiteren Untersuchungen wird darauf hingewiesen, dass die Struktur nicht haltbar sei (Huffmann & Heller, 1995; Gerdes & Schecker, 1999; Schecker & Gerdes, 1999). Huffmann und Heller (1995) folgern, dass eine Interpretation der Ergebnisse des *FCI* als das studentische Verständnis über das Kraftkonzept schwierig sei und halten fest: „It seems more likely that the inventory actually measures bits and pieces of students' knowledge that do not necessarily form a coherent force concept.“ (Huffmann & Heller, 1995, S. 141). Hestenes et al. (1992) selbst sehen für den *FCI* verschiedene Einsatzmöglichkeiten, fokussieren nach der Kritik jedoch die Möglichkeit, mit Hilfe des *FCI* die Effektivität von Inter-

---

<sup>25</sup>Das erste Newton'sche Axiom lautet: „Ein Körper bleibt in Ruhe oder bewegt sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit weiter, wenn *keine* resultierende äußere Kraft auf ihn wirkt“ (Tipler et al., 2015, S. 78). Das Zweite Newton'sche Axiom lautet: „Die Beschleunigung eines Körpers ist direkt proportional zu der auf ihn wirkenden Gesamtkraft, wobei die Proportionalitätskonstante der Kehrwert der Masse ist. Somit gilt:  $a = \frac{F}{m}$  mit  $F = \sum F_i$ “ (Tipler et al., 2015, S. 82). Das dritte Newton'sche Axiom lautet: „Wenn zwei Körper miteinander wechselwirken, ist die Kraft  $F_A^{(B)}$ , die der Körper *B* auf den Körper *A* ausübt, gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet der Kraft  $F_B^{(A)}$ , die der Körper *A* auf den Körper *B* ausübt. Somit gilt:  $F_A^{(B)} = F_B^{(A)}$ “ (Tipler et al., 2015, S. 93).

ventionen zu messen: „For the purpose of course and teaching evaluation, the entire FCI test should be used“ (Hestenes & Halloun, 1995, S. 505). Schecker und Gerdes (1999) stellen zusammenfassend für die Diskussion um die Einsatzmöglichkeiten des *FCI* fest:

Als Fazit der Debatte um den FCI kann man festhalten, daß die Inhaltsvalidität des Tests für das generelle Mechanikverständnis auf der Hand liegt, während der innere Aufbau aus Aufgabengruppen zu hinterfragen ist. Gleiches gilt für die wirkliche Diagnose alternativer Konzeptualisierungen der Mechanik. (S. 78)

Die Ergebnisse des *FCI* werden daher in der empirischen Studie als ein Indikator für das studentische Verständnis des Kraftkonzeptes genutzt. Die Erhebung in einem Prä-Post-Design ermöglicht die Identifikation von Veränderung im ersten Studienjahr.

## 7.6 Videographie und *Lautes Denken*

Die methodische Herausforderung der Studie lag darin, die Prozesse der Studierenden bei der Bearbeitung der Aufgaben beobachtbar zu machen. So waren nicht die Endprodukte von hauptsächlichem Interesse, also ob die Studierenden die Aufgaben lösen konnten oder nicht, sondern der Weg und die Mittel, die von ihnen genutzt wurden, um zu der jeweiligen Lösung zu gelangen. Zwei Merkmale von Problemlöseprozessen erschweren nach Hussy (1993) die Gewinnung von Erkenntnissen: Erstens ist dies die hohe Komplexität solcher Prozesse, die „sich zum einen aus der Anzahl und Verschiedenartigkeit der beteiligten Teilprozesse und zum anderen aus der Vielfalt möglicher Problemstellungen“ (S. 18) ergibt. Zweitens liegt das Problem darin, dass solche Prozesse nicht direkt beobachtbar sind, sondern nur (indirekt) „aus dem Verhalten der denkenden Individuen erschließbar“ (S. 19) sind. Eine Möglichkeit, diesen Problemen zu begegnen, ist die gleichzeitige Nutzung von Videographie und *Lautem Denken*. Während *Lautes Denken* „wie kaum eine andere Methode die Erhebung handlungsnaher Daten bei Denk-, Lern- und Problemlöseprozessen“ (Sandmann, 2014, S. 181) in Form gesprochener Sprache ermöglicht, erlauben Videoaufnahmen gegenüber anderen Methoden eine detailliertere Beobachtung, weil

sie „sowohl Hörbares als auch Sichtbares konservieren und das Zusammenspiel von Ereignissen auf beiden Wahrnehmungsebenen zu erfassen in der Lage sind“ (Dinkelaker & Herrle, 2009, S. 15). In den beiden folgenden Abschnitten wird der Einsatz von Videographie und *Lautem Denken* im Zusammenhang mit der vorliegenden Studie detailliert dargestellt und begründet.

### 7.6.1 Videographie

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist unter anderem die Anwendung von Wissen durch Ingenieurstudierende. Mit Hilfe von drei Quellen werden Daten dazu erhoben: schriftliche Produkte der Gruppen- und Einzelarbeiten, verbale Daten sowie Gesten und Handlungen der Studierenden, die über die schriftlichen und verbalen Daten hinausgehen (z. B. die Nutzung von Gegenständen zur Veranschaulichung geometrischer Zusammenhänge). Eine isolierte Untersuchung der Daten wäre mit Hilfe von Dokumentenanalysen, Auswertungen von Audioaufzeichnungen und Beobachtungsprotokollen möglich. Der Einsatz von Videoaufnahmen erlaubt eine kombinierte Erfassung von auditiven Daten und Daten zu Gesten und Handlungen (vgl. Sandmann, 2014) und ermöglicht es, die Parallelität dieser beiden Ebenen wiederzugeben, die mit einer Audioaufnahme und gleichzeitigem Beobachtungsprotokoll nicht möglich wäre (vgl. Herrle, Rauin & Engartner, 2015). Die Methode ist nach Corsten (2010) forschungslogisch unverzichtbar, da dies dann zutrifft, „wenn sich über sie Informationen methodisch kontrolliert erzeugen und wieder verwertbar machen lassen, die auf andere Weise gar nicht oder allenfalls deutlich unvollständiger und unzuverlässiger erhoben werden könnten“ (S. 8). Sandmann (2014) sieht die Verwendung von Videoaufnahmen bei Partner- oder Kleingruppenprozessen als „nahezu unerlässlich“ (S. 185) an. Als Form der wissenschaftlichen Beobachtung muss die Videoaufzeichnung den damit verbundenen Anforderungen entsprechen:

Unter einer wissenschaftlichen Beobachtung [...] versteht man die zielgerichtete, systematische und regelgeleitete Erfassung, Dokumentation und Interpretation von Merkmalen, Ereignissen oder Verhaltensweisen mit Hilfe menschlicher Sinnesorgane und/oder technischer Sensoren zum Zeitpunkt ihres Auftretens. (Bortz & Döring, 2016, S. 324)

Wie die Forderung nach einer zielgerichteten, systematischen und regelgeleiteten Erfassung und Dokumentation erfüllt wird, ist Thema dieses Abschnittes. Stigler, Gallimore und Hiebert (2000) benennen die folgenden Vorteile der Nutzung von Videoaufnahmen: Videoaufnahmen erlauben durch ihre umfangreiche Erfassung der Situation die Entdeckung von unerwarteten Phänomenen; Videoaufnahmen können von unterschiedlichen Forscherinnen unter unterschiedlichen Perspektiven analysiert werden und nicht nur für den Zweck, zu dem sie erstellt wurden.

Die Videoaufnahmen wurden in Seminar- und Büroräumen der mathematischen Fakultät durchgeführt. Eine Skizze der Anordnung der Videoaufnahme und ein Beispielbild der erzeugten Videos ist in Abbildung 7.9 dargestellt.<sup>26</sup> Die Forderung nach einer systematischen und regelgeleiteten Beobachtung wurde durch die Berücksichtigung von zwei Kriterien beachtet: Erstens sollen alle Gruppenmitglieder auf dem Video zu sehen sein (wobei die komplette Erfassung der Person nicht notwendig war), damit Handlungen und Aussagen aller Personen zuzuordnen sind, und zweitens sollen die Arbeitsblätter zu sehen sein, damit das Anfertigen von Produkten mit den jeweils dazugehörigen Aussagen der Studierenden verknüpft werden kann. Auf eine aktive Kameraführung konnte verzichtet werden, da sich die Studierenden während der Aufnahmen nicht bewegten und sich somit die entschiedenen Interaktionsräume nicht veränderten. Zusätzlich zur Videoaufzeichnung wurde der Ton mit einem Diktiergerät aufgezeichnet, um das leistungsschwache Mikrofon der Videokamera zu ersetzen.

Zum dritten Messzeitpunkt wurde ein leicht verändertes Setting gewählt, da nun Einzelarbeiten von Studierenden aufgezeichnet wurden. Neben den Vorteilen der Videographie gegenüber anderen Erhebungsmethoden ist auch diese Form der Datengewinnung nicht ohne Grenzen. So ist der Einsatz von Videokameras aus technischer Perspektive aufwändiger als eine Beobachtung durch Forscherinnen. Es muss den gesamten Aufnahmeprozess über kontrolliert werden, ob die Kamera funktioniert und aufnimmt.

Leider gab es zu allen drei Messzeitpunkten durch technischen Ausfall Gruppen bzw. einzelne Studierende, die nicht korrekt erfasst werden konnten. Beim

---

<sup>26</sup>Alle videographierten Daten wurden redundant gesichert und für die Analyse konvertiert, um sie für die Software *Videograph* (siehe Abschnitt 8.1.3) nutzbar zu machen.

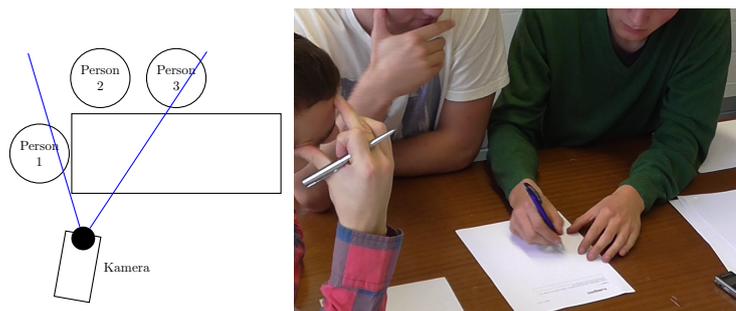


Abbildung 7.9: Beispielhafte Anordnung der Videoaufnahmen bei der Gruppenarbeit am ersten und zweiten Messzeitpunkt und erzeugtes Kamerabild.

ersten Messzeitpunkt fiel bei einer Gruppe die Kamera am Anfang aus, die Audiodaten alleine konnten nicht in ausreichender Qualität ausgewertet werden. Bei der gleichen Gruppe wurde am zweiten Messzeitpunkt nur ein Teil der Bearbeitung auf Video aufgenommen. Zum dritten Messzeitpunkt gab es bei zwei Studierenden, die hintereinander gefilmt wurden, einen Fehler bei der Datenübertragung, was dazu führte, dass diese Daten nicht mehr genutzt werden konnten. Es existieren zudem allgemeine, die Methode betreffende Probleme, die bei Videoaufnahmen berücksichtigt werden müssen. So kann bereits die Anwesenheit einer Kamera und das Wissen darum, dass gefilmt wird, eine Person dazu bringen, sich anders zu verhalten (Stigler et al., 2000; Dinkela-ker & Herrle, 2009). Hierfür war es von Vorteil, dass die Studierenden an den ersten beiden Messzeitpunkten in Gruppen vor der Kamera arbeiteten. Dies führte zu einer entspannten Atmosphäre.

Trotz der hohen Informationsdichte von Videoaufnahmen können nicht alle Prozesse sichtbar gemacht werden (Stigler et al., 2000; Hussy, 1993), besonders Denk-, Lern und Problemlöseprozesse laufen im Individuum ab und sind deshalb nicht direkt beobachtbar. An dieser Stelle kann die Methode des *Lauten Denkens* einen entscheidenden Beitrag leisten.

### 7.6.2 *Lautes Denken*

Die Methode des *Lauten Denkens* wird seit Anfang des 20. Jahrhunderts eingesetzt, um kognitive Prozesse bei Problemlöseprozessen zu untersuchen (vgl. Duncker, 1935; Fonteyn, Kuipers & Grobe, 1993). *Lautes Denken* bedeutet in erster Linie das Verbalisieren von Gedanken während einer Handlung (Konrad,

2010; Sandmann, 2014; Weidle & Wagner, 1982). Dabei kann zwischen den Formen *Introspektion* (simultane Verbalisierung) und *Retrospektion*<sup>27</sup> (zeitlich nach der Introspektion) unterschieden werden (Konrad, 2010; Weidle & Wagner, 1982; Ericsson & Simon, 1984). Bei Introspektion findet eine Verbalisierung des Kurzzeitgedächtnisses statt (Konrad, 2010), die Informationen über die kognitiven Prozesse bleiben dabei unverändert: „the information contained in attention and STM [Short-Term Memory], remains the same with the verbal report procedure as it would be without the reporting procedure, that is, when the cognitive processes proceed silently“ (Ericsson & Simon, 1987, S. 32). Dagegen enthalten Verbalisierungen bei der Retrospektion Informationen, die erst sprachlich enkodiert werden müssen, bzw. Erklärungen und Interpretationen von Gedankenprozessen (Konrad, 2010; Sandmann, 2014).

In der vorliegenden Arbeit wird die Methode der Introspektion genutzt, da so die konkreten Handlungen und Prozesse der Studierenden beobachtbar wurden. Zudem werden nur solche Informationen erhoben, die zum Zeitpunkt der Bearbeitung den Studierenden zur Verfügung standen. Eine retrospektiver Ansatz kann möglicherweise zusätzliche Inhalte und Erklärungen liefern, eine Trennung zwischen genutzten Informationen und nachträglich erinnerten ist dann aber nur schwer möglich (vgl. auch Ericsson & Simon, 1987). Ein Nachteil der Introspektion ist es, dass unbewusste kognitive Prozesse nur schwer oder gar nicht von den Studierenden verbalisiert werden können (vgl. Konrad, 2010; Ericsson & Simon, 1984, 1987), was wiederum die Validität der Daten verringern könnte (*Error of Omission* und *Error of Commission*<sup>28</sup>, vgl. Russo, Johnson und Stephens, 1989). Dies kann durch die Videoaufnahme zumindest teilweise ausgeglichen werden, da Handlungen, Gesten und Mimik erfasst werden, die Aufschluss über mögliche Fehler bei den verbalen Daten geben.

Die Studierenden wurden zu Beginn aufgefordert, alle Gedanken und Handlungen zu verbalisieren. Bei der Gruppenarbeit am ersten und zweiten Messzeitpunkt wurde keine vorherige Übung mit den Studierenden durchgeführt, wie es zum Beispiel von Ericsson und Simon (1987) empfohlen wird, da davon ausgegangen wurde, dass durch das Arbeiten in Gruppen das Sprechen

<sup>27</sup>Konrad (2010) unterscheidet hier zusätzlich zwischen *unmittelbarer* und *verzögerter Retrospektion*, wobei letztere auch Tage nach der eigentlichen Handlung stattfinden kann.

<sup>28</sup>*Omission*: Gedanken werden nicht berichtet; *Commission*: Gedanken, die nicht auftreten, werden berichtet.

besonders angeregt wird. Ein Nachteil dieses Settings ist, dass dadurch keine Individualprozesse beobachtbar sind, da sich die Studierenden bei der Bearbeitung gegenseitig beeinflussen. Zum dritten Messzeitpunkt lösten die Studierenden dagegen vor den eigentlichen Aufgaben ein einfaches Sudoku. Diese Form der Übung wurde ausgewählt, da zum einen für die Lösung ebenfalls Heuristiken genutzt werden mussten, und zum anderen mit einer leichten Aufgabe das Verbalisieren geübt werden konnte. Die Übung wurde nach 5 Minuten abgebrochen, auch wenn noch keine vollständige Lösung vorlag.

## 7.7 Auswahl der Aufgaben für die Gruppen- und Einzelarbeit

In diesem Abschnitt werden die Aufgaben, deren Bearbeitung durch die Gruppen bzw. einzelnen Studierenden videographiert wurden, exemplarisch dargestellt.<sup>29</sup> Die Aufgaben wurden erstellt, um die relevanten Kompetenzen von Studierenden zu Beginn bzw. zum Ende des ersten Studienjahres zu testen. Die Aufgaben stammen aus den Erhebungen zu Beginn des Studiums (Messzeitpunkt 1 und 2) sowie aus den Erhebungen zur Fachkompetenz Mathematik und Technische Mechanik (Messzeitpunkt 3). Sie sind mit solchen Aufgaben zu vergleichen, die am Ende eines Kapitels in einem Lehrbuch bzw. in (Kompetenz-)Tests zu finden sind. Mögliche Auswirkungen, zum Beispiel auf die Nutzung von Heuristiken, werden in Kapitel 10 ausführlicher thematisiert. Außerdem findet hier keine (stoffdidaktische) Analyse der bzw. inhaltliche Auseinandersetzung mit den Aufgaben statt, dies wird bereits an anderer Stelle unternommen (Gerding, 2014; Behrendt et al., 2015; Dammann et al., 2016; Neumann et al., 2015; Heinze & Neumann, 2016; Nickolaus et al., 2013, 2016).

### 7.7.1 Aufgaben der Gruppenarbeit zur Schulmathematik und -physik

Für die Gruppenarbeiten wurden die sechs leichtesten und sechs schwersten sowie aus der *Erhebung mathematischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums* (siehe Abschnitt 7.5.1) vier mittelschwere Items und aus der *Erhe-*

<sup>29</sup>Alle eingesetzten Aufgaben finden sich in Anhang A.

bung physikalisch-technischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums (siehe Abschnitt 7.5.2) ein mittelschweres Item ausgewählt. Die Aufnahme der mittelschweren Items ergab sich aus der Situation, dass bei Items, die Teil einer größeren Aufgabe waren, die gesamte Aufgabe für die Videographie ausgewählt wurden. Aus diesem Grund ergab sich eine Gesamtanzahl von 16 mathematischen und 13 physikalisch-technischen Items, die in der Gruppenarbeit am ersten und zweiten Messzeitpunkt von allen Studierenden bearbeitet wurden. Bei den mathematischen Aufgaben stammen sechs Items aus dem Bereich *Grundlagen*, sechs aus dem Bereich *Analysis* und vier aus dem Bereich *Analytische Geometrie* (siehe Tabelle 7.8). Bei den *Grundlagen*-Items müssen die Studierenden mit Funktionsgraphen, (Un-)Gleichungen sowie Darstellungsformen von Zahlen arbeiten. Diese Items sind leicht bzw. mittelschwer. Die Aufgaben der *Analysis* thematisieren Ableitungen reeller Funktionen, wichtige Begriffe und Exponentialfunktionen. Die Schwierigkeit der *Analysis*-Items ist breit gefächert. Ein schwieriges Item ist in Abbildung 7.10 dargestellt. Für eine Lösung sind verschiedene Vorgehensweisen denkbar. Beispielsweise können die Studierenden das Verhalten der Funktion für  $x > 5$  untersuchen und zeigen, dass die Funktion in diesem Bereich monoton fallend ist.

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = 2 \cdot e^{-0.5 \cdot x} \cdot (x^2 - 5).$$

Die Funktion hat ein lokales Maximum im Punkt  $P(5/f(5))$ .

Zeigen Sie, dass die Funktion für  $x > 5$  keinen größeren Funktionswert besitzt als im Punkt  $P$ .

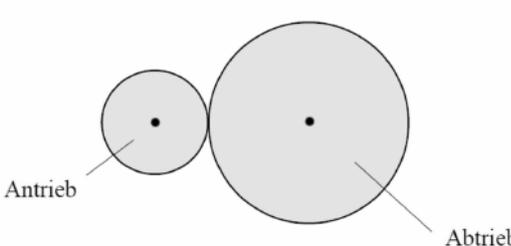
Abbildung 7.10: Ein schweres Item ( $\sigma = 2,64$ ) des Inhaltsbereichs *Analysis* aus der Erhebung *Erhebung mathematischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums*, das bei der Gruppenarbeit (HM13, siehe Tabelle 7.8) eingesetzt wurde.

Für die Aufgaben zur *Analytischen Geometrie* benötigen die Studierenden schließlich Kenntnisse zur Bestimmung der Länge von Vektoren, des Winkels zwischen Vektoren, des Abstandes zwischen Ebenen und Punkten und zu Ortsvektoren. Die Items zur *Analytischen Geometrie* sind eher schwer, nur eines befindet sich im mittelschweren Bereich.

Bei den Physikaufgaben stammen fünf Items aus dem Bereich *Grundvorstel-*

lungen, drei aus dem Bereich *Statik* und fünf aus dem Bereich *Dynamik* (siehe Tabelle 7.9). Die Items zu *Grundvorstellungen* benötigen keine quantitativen Lösungen, sondern lassen sich durch qualitative Schlussfolgerungen lösen. Ihre Schwierigkeit variiert von leicht bis schwer, zu ihnen gehört das leichteste aber auch das zweitschwierigste Item. Ein Beispielitem ist in Abbildung 7.11 dargestellt. Für seine Lösung reicht die qualitative Analyse, dass sich das linke Rad aufgrund des geringeren Umfangs häufiger dreht als das rechte Rad, da an dieser Stelle nach der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und nicht nach der Bahngeschwindigkeit  $v$  eines Punktes auf den Rädern gefragt wird.

Ein Rad treibt, wie in der Skizze dargestellt, ein zweites Rad so an, dass sich die Berührungsflächen nicht gegeneinander bewegen. Der Durchmesser des Antriebsrades ist kleiner als der des Abtriebsrades.



Welches Rad dreht sich schneller?  
Kreuzen Sie die richtige Antwort an!

Antrieb       Abtrieb       Beide Räder drehen gleich schnell

Abbildung 7.11: Item des Inhaltsbereichs *Grundvorstellungen* ( $\sigma = -0,85$ ) aus der Erhebung *Erhebung physikalisch-technischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums*, das bei der Gruppenarbeit (TM3, siehe Tabelle 7.9) eingesetzt wurde.

Die *Statik*-Items sind sehr unterschiedlich. Sowohl qualitative als auch quantitative Lösungswege müssen von den Studierenden gewählt werden, zudem variiert die Schwierigkeit von leicht bis schwer. Für die Lösung von vier der fünf *Dynamik*-Items muss ein quantitativer Prozess von den Studierenden durchlaufen werden. In diesem Bereich befindet sich auch das schwierigste Item. Ein Beispielitem ist in Abbildung 7.12 abgebildet. Bei der Bearbeitung dieses Items ist, falls nicht direkt eine Formel bekannt ist, ein mehrschrittiger quantitativer

Ein Astronaut wirft auf einem Himmelskörper einen Stein 10m nach oben. Nach einer Zeit von  $t = 7,03\text{s}$  landet der Stein wieder auf der Oberfläche des Himmelskörpers. Berechnen Sie die Fallbeschleunigung  $g_H$  auf dem Himmelskörper!

Kreuzen Sie die richtige Lösung an!

$g_H = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$g_H = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$g_H = 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$g_H = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$g_H = 5,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Abbildung 7.12: Item des Inhaltsbereichs *Dynamik* ( $\sigma = 1,51$ ) aus der Erhebung *Erhebung physikalisch-technischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums*, das bei der Gruppenarbeit (TM10, siehe Tabelle 7.9) eingesetzt wurde.

Prozess notwendig, möglicherweise unterstützt durch eine *Abbildung*, um zur Lösung  $g_H = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  zu gelangen.

Tabelle 7.8: Übersicht über die Mathematikaufgaben, die in der Gruppenarbeit am ersten und zweiten Messzeitpunkt eingesetzt wurden. Die Aufgaben sind nach Inhaltsbereich und Schwierigkeit sortiert.

Aufgabe	Name	Inhaltsbereich	Schwierigkeit	Aufgabenformat
HM7	Gleichung	Grundlagen	-3,71	halboffen (Lösung der Gleichung)
HM1	Zahlenstrahl	Grundlagen	-3,39	halboffen (Zuordnen von Zahlenwerten)
HM2	Rennwagen_a	Grundlagen	-2,69	halboffen (Ablesen im Graphen)
HM4	Rennwagen_c	Grundlagen	-2,00	halboffen (Berechnung Fläche unter Graphen)
HM3	Rennwagen_b	Grundlagen	0,66	halboffen (Ablesen im Graphen)
HM8	Ungleichung	Grundlagen	0,76	Single Choice (Lösung der Ungleichung)
HM5	1. Ableitung	Analysis	-2,82	halboffen (Bestimmung 1. Ableitung einer reellen Funktion)
HM6	2. Ableitung	Analysis	-2,66	halboffen (Bestimmung 2. Ableitung einer reellen Funktion)
HM12	Punktsymmetrie	Analysis	0,83	halboffen (Nennung der Definition eines punktsymmetrischen Graphens)
HM16	Exponential-funktion_2	Analysis	1,36	Single Choice (Bestimmung der ersten Ableitung einer Exponentialfunktion)
HM9	Differential-quotient	Analysis	2,13	halboffen (Ausfüllen von Lücken in der Definition)
HM13	Exponential-funktion_1	Analysis	2,64	offen (Bestimmung des Funktionsverlaufs einer Exponentialfunktion)
HM11	Skiort_Länge	Analytische Geometrie	0,22	halboffen (Bestimmung der Länge eines Vektors)
HM14	Punkt-Ebene	Analytische Geometrie	1,35	halboffen (Bestimmung des Abstands Punkt-Ebene)
HM10	Skiort_Winkel	Analytische Geometrie	1,49	halboffen (Bestimmung des Winkels zwischen zwei Vektoren)
HM15	Spiegelpunkt	Analytische Geometrie	2,89	halboffen (Bestimmung des Ortsvektors eines Spiegelpunktes)

Tabelle 7.9: Übersicht über die Physikaufgaben, die in der Gruppenarbeit am ersten und zweiten Messzeitpunkt eingesetzt wurden. Die Aufgaben sind nach Inhaltsbereich und Schwierigkeit sortiert.

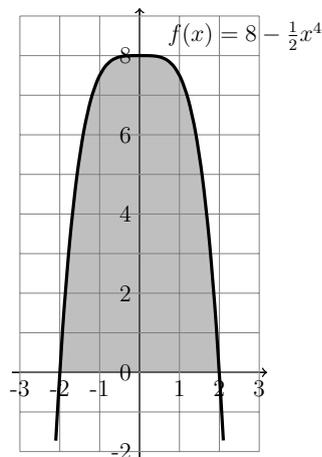
Aufgabe	Name	Inhaltsbereich	Schwierigkeit	Aufgabenformat
TM5	Biegelinie	Grundvorstellungen	-1,80	Single Choice (Bestimmung des Verhaltens einer Waage)
TM3	Antrieb	Grundvorstellungen	-0,85	Single Choice (Begründung von Drehgeschwindigkeiten)
TM6	Waage	Grundvorstellungen	0,15	Single Choice (Bestimmung des Verhaltens einer Waage)
TM12	Trajektorie	Grundvorstellungen	1,85	halboffen (Einzeichnen einer Trajektorie)
TM13	Verformung	Grundvorstellungen	2,10	Single Choice (Bestimmung möglicher Ausgangslagen einer Verformung)
TM1	Resultierende Kraft	Statik	-1,56	halboffen (Berechnung der resultierenden Kraft)
TM7	Zug- und Druckbelastung	Statik	-0,88	Single Choice (Bestimmung der Art der Belastung)
TM8	Kraft im Stab	Statik	1,89	halboffen (Bestimmung der Gleichungen für Kräfte in Stäben)
TM4	Reibung	Dynamik	-0,93	Single Choice (Bestimmung der Art der Reibung)
TM2	Kinetische Energie und Impuls	Dynamik	-0,86	halboffen (Angabe der Faktoren in der jeweiligen Formel)
TM11	Beschleunigung (Crashtest)	Dynamik	1,32	Single Choice (Berechnung der Beschleunigung)
TM10	Fallbeschleunigung (Astronaut)	Dynamik	1,51	Single Choice (Berechnung der Fallbeschleunigung)
TM9	Fallbeschleunigung (Rolle)	Dynamik	2,76	halboffen (Bestimmung einer Gleichung für die Fallbeschleunigung)

## 7.7.2 Aufgaben der Einzelarbeit zur Höheren Mathematik und Technischen Mechanik

Für die Einzelarbeit zum dritten Messzeitpunkt wurden Aufgaben aus den Erhebungen *Fachkompetenz Mathematik* (siehe Abschnitt 7.5.3) und *Fachkompetenz Technische Mechanik - Statik und Elastostatik* (siehe Abschnitt 7.5.4) entnommen. Aus jedem Test sollten neun Aufgaben ausgewählt werden, die von allen Studierenden bearbeitet werden: die drei leichtesten, die drei schwersten und drei Aufgaben aus dem mittleren Schwierigkeitsbereich. Wenn Aufgaben einen ähnlichen Schwierigkeitsparameter wie die erste Auswahl hatten und potentiell besser für die Beobachtung von Bearbeitungsprozessen geeignet waren, wurden diese Aufgaben gewählt.

In Abbildung 7.13 ist die schwierigste Mathematikaufgabe für die Einzelarbeit dargestellt. In dieser müssen die Studierenden den Schwerpunkt einer achsensymmetrischen Fläche berechnen.

Betrachten Sie die folgende, durch die  $x$ -Achse sowie die Funktion  $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^4$  berandete graue Fläche  $\mathcal{F}$ .



Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Fläche  $\mathcal{F}$ !

*Hinweis:* Sie dürfen den Flächeninhalt von  $\frac{128}{5}$  als bekannt voraussetzen!

$$(x_S, y_S) = \boxed{\phantom{0,0}}$$

Abbildung 7.13: Ein schweres Item (Lösungshäufigkeit liegt bei 0,01) des Inhaltsbereichs *Analysis* aus der Erhebung *Fachkompetenz Mathematik*, das bei der Einzelarbeit (HM9) eingesetzt wurde.

Besonders bei den Mathematikaufgaben (siehe Tabelle 7.10) müssen die Schwierigkeitsparameter vorsichtig interpretiert werden, da teilweise nur 70 Bearbeitungen zum Zeitpunkt der Auswahl vorhanden waren und zudem hohe Missingraten bei einigen Aufgaben vorhanden waren. Außerdem sind sieben von neun Aufgaben aus dem Bereich der ein- bzw. mehrdimensionalen Analysis, was eine Überbetonung dieses Bereichs bedeutet.

Die Aufgaben zur Technischen Mechanik sind aus den unterschiedlichsten Inhaltsbereichen. Nur vier Aufgaben benötigen Berechnungen (TM2, TM5, TM6, TM7), während sich die übrigen über qualitative Analysen lösen lassen. In Abbildung 7.14 ist eine mittlere Aufgabe aus dem Inhaltsbereich *Schnittgrößen* dargestellt.

Ermitteln Sie die Funktion der in der folgenden Abb. 7 dargestellten Streckenlast. Tragen Sie Ihr Ergebnis in das Lösungsfeld ein.

Gegeben:  $q_1 = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ,  $q_2 = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ,  $L = 1,0\text{m}$

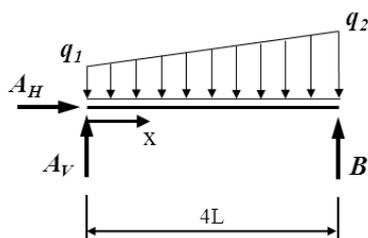


Abbildung 7

Lösung:

$q(x) =$

0  1

Abbildung 7.14: Ein mittelschweres Item ( $\sigma = 0,49$ ) des Inhaltsbereichs *Schnittgrößen* aus der Erhebung *Fachkompetenz Technische Mechanik: Statik und Elastostatik*, das bei der Einzelarbeit (TM6) eingesetzt wurde.

Tabelle 7.10: Übersicht über die Mathematikaufgaben, die in der Einzelarbeit am dritten Messzeitpunkt eingesetzt wurden. Die Aufgaben sind nach Inhaltsbereich und Schwierigkeit sortiert.

Aufgabe	Name	Inhaltsbereich	Schwierigkeit	Aufgabenformat
HM4	Dreieck	Analytische	0,27	halboffen (Berechnung Fläche eines Dreiecks mit unbekannter Seitenlänge)
		Geometrie		
HM6	Vektoren	Analytische	0,27	Complex Multiple Choice (Aussagen über eine Menge von Vektoren prüfen)
		Geometrie		
HM1	Potenzfunktion	Analysis	0,71	Single Choice (Bestimmung der Funktionsvorschrift)
HM2	Komplexe Zahlen	Analysis	0,55	halboffen (Zuordnung Kartesische Koordinaten zu Polarkoordinaten)
HM3	Ableitung	Analysis	0,61	Single Choice (Ableitung einer gebrochen rationalen Funktion)
HM5	Exponentialfunktion	Analysis	0,29	Single Choice (Bestimmung der Funktionsgleichung)
HM7	Reihen	Analysis	0,04	halboffen (n-ten Summanden einer Reihe bestimmen)
HM8	Kurven	Analysis	0,03	Complex Multiple Choice (Reguläre Kurven identifizieren)
HM9	Flächenschwerpunkt	Analysis	0,01	halboffen (Berechnung des Schwerpunktes einer Fläche)

Bei der Angabe zur Schwierigkeit handelt es sich nicht, wie in den übrigen Tabellen um den Schwierigkeitsschätzer aus der IRT-Scalierung, sondern um die Lösungshäufigkeit bei der Pilotierung. Aufgrund der geringen Stichprobengröße und der teilweisen großen Anzahl an Missings konnte nicht für jede Aufgabe ein Schätzer bestimmt werden. Aus diesem Grund werden für alle Aufgaben nur die Lösungshäufigkeiten berichtet.

Tabelle 7.11: Übersicht über die Aufgaben aus der Technischen Mechanik, die in der Einzelarbeit am dritten Messzeitpunkt eingesetzt wurden. Die Aufgaben sind nach Schwierigkeit sortiert.

Aufgabe	Name	Inhaltsbereich	Schwierigkeit	Aufgabenformat
TM1	Freikörperbild	Freikörperbild	-1,66	Complex Multiple Choice (Aussagen zu Freikörperbildern prüfen)
TM3	Kraft und Moment	Freikörperbild	-1,42	Complex Multiple Choice (Aussagen über Kräfte und Momente prüfen)
TM2	Tragwerk 1	Auflager	-1,61	halboffen (Bestimmung der Auflagerkräfte)
TM4	Spannung-Dehnung	Stoffgesetz	0,43	Complex Multiple Choice (Zuordnung von Punkten im Spannungs-Dehnungsdiagramm)
TM5	Fachwerk	Fachwerk	0,44	Single Choice (Bestimmung einer Kraft im Stab)
TM6	Streckenlast	Schnittgrößen	0,49	halboffen (Bestimmung einer Streckenlast)
TM7	Flächenträgheitsmoment	Flächenträgheitsmoment	1,64	halboffen (Bestimmung des Flächenträgheitsmoments eines Dreiecks)
TM8	Nulllinie	Spannungen	1,71	Single Choice (Aussagen über die Nulllinie eines Balkens prüfen)
TM9	Tragwerk 2	Statische Bestimmtheit	1,85	Single Choice (Auswahl von Bestandteilen eines Tragwerks)

# Kapitel 8

## Datenanalyse

In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise bei der Analyse der Daten dargestellt. Zur Beantwortung der Forschungsfragen sind sowohl qualitative Daten (*situationsspezifische Fähigkeiten*) als auch quantitative Daten (*Dispositionen*) notwendig. Bei den quantitativen Daten handelt es sich um Ergebnisse aus den Tests vom ersten und dritten Messzeitpunkt, die qualitativen Daten wurden aus den videographierten Gruppen- und Einzelarbeiten der Studierenden gewonnen. Im Sinne des *Concurrent Transformative Designs* werden die Datenformen in der Analyse und Interpretation der Ergebnisse miteinander verknüpft.

Dem Schwerpunkt der Studie folgend, wird zuerst die Analyse der qualitativen Daten mit Hilfe inhaltsanalytischer Methoden (siehe Abschnitt 8.1.1) dargestellt. Für die Auswertung der Daten wird ein deduktiv hergeleitetes Kategoriensystem zur inneren und äußeren Struktur des Problemlösens, vorgestellt (siehe Abschnitt 8.1.2). Anschließend wird die Kodierung der Videodaten mit ihren Besonderheiten gegenüber der üblichen textbasierten Inhaltsanalyse kurz dargestellt (siehe Abschnitt 8.1.3).

Im zweiten Teil des Kapitels werden die quantitativen Auswertungsmethoden vorgestellt (siehe Abschnitt 8.2). Hierbei ist insbesondere die Pfadanalyse als regressionsanalytische Methode (siehe Abschnitt 8.2.2) von Bedeutung. Zudem werden die damit verbundenen Moderations- und Mediationsanalysen (siehe Abschnitt 8.2.3) und die Problematik fehlender Werte in der Auswertung quantitativer Daten (siehe Abschnitt 8.2.4) erörtert.

## 8.1 Qualitative Methoden

Wie bereits im Kapitel 7 beschrieben, bilden Videoaufnahmen den Großteil der in dieser Studie erhobenen Daten. Bei diesen handelt es sich um nicht-numerische Symbolisierungen (wie z. B. auch Verbalisierungen oder grafische Abbildungen), die interpretiert werden müssen (Bortz & Döring, 2006). Hieraus ergibt sich, dass für die Analyse dieser Daten interpretative Verfahren erforderlich sind wie zum Beispiel Hermeneutik, Phänomenologie, Ethnologie oder Grounded Theory (vgl. Mayring, 2010). Eine weitere Methode, „die systematisch, intersubjektiv überprüfbar, gleichzeitig aber der Komplexität, der Bedeutungsfülle, der ‚Interpretationsbedürftigkeit‘ sprachlichen Materials angemessen“ (Mayring, 2010, S. 10) ist, ist die qualitative Inhaltsanalyse, deren Techniken in der vorliegenden Arbeit als Grundlage für die Analyse der Videodaten genutzt wurden. Sie stellt eine sehr verbreitete Methode innerhalb der qualitativen Forschung dar (Hsieh & Shannon, 2005; Vaismoradi, Turunen & Bondas, 2013).

### 8.1.1 Inhaltsanalytische Methoden

Es ist es wichtig zu verstehen, dass es nicht die eine inhaltsanalytische Methode gibt (Schreier, 2014). Vielmehr existiert eine große Anzahl von Verfahren, die jeweils mit unterschiedlichen Ziel- und Schwerpunktsetzungen genutzt werden können (Mayring, 2010; Schreier, 2014). Mayring (2010) fasst die folgenden Charakteristika einer sozialwissenschaftlichen Inhaltsanalyse zusammen: sie untersucht fixierte Kommunikation, geht dabei systematisch, regelgeleitet und theoriegeleitet vor und verfolgt das Ziel, „Rückschlüsse auf bestimmte Aspekte der Kommunikation zu ziehen“ (S. 13). Diese Charakteristika werden in der vorliegenden Arbeit wie folgt aufgegriffen:

**Fixierte Kommunikation:** Es werden Videoaufnahmen von Gruppen- bzw. Einzelarbeiten analysiert. In diesen diskutieren die Studierenden über die Aufgaben und ihre Vorgehensweisen. Es findet also eine Kommunikation statt, die über die Videoaufnahme fixiert ist. Bei den Einzelarbeiten erfolgt die Kommunikation über das *Laute Denken*.

**Theoriegeleitete Analyse:** Das eingesetzte Kategoriensystem basiert zum

überwiegenden Teil auf theoretischen und empirischen Arbeiten und Literatur mit Praxisbezug zu Problemlösephasen, Heurismen und Epistemic Games (Polya, 1957; Schoenfeld, 1980; Tietze et al., 2000; Schwarz, 2006; Bruder & Collet, 2011; Tuminaro, 2004) und ist damit vollständig aus der Theorie abgeleitet.

**Systematische und regelgeleitete Analyse:** Die Videoaufnahmen werden mit Hilfe einer Software und eines Kategoriensystems analysiert. In diesem ist durch Definitionen und Beispiele genau festgelegt, bei welchen Situationen bzw. Handlungen bestimmte Kategorien kodiert werden sollen. Es ermöglicht „das Nachvollziehen der Analyse für andere, die Inter-subjektivität des Vorgehens“ (Mayring, 2010, S. 49).

Für die qualitative Inhaltsanalyse ist die Bildung von Kategorien bzw. eines Kategoriensystems zentral, das sowohl deduktiv bzw. a-priori (theoriegeleitet), induktiv (am Material) als auch in einer Kombination beider Ansätze entwickelt werden kann (Mayring, 2010; Kuckartz, 2016; Schreier, 2014). Die Entwicklung des Systems, die Definition der einzelnen Kategorien und der Einsatz des Kategoriensystems werden im folgenden Abschnitt detailliert beschrieben.

### 8.1.2 Kategoriensystem zur Analyse der Bearbeitungsprozesse

Das zentrale Anliegen der Arbeit ist die Analyse von Bearbeitungsprozessen von Ingenieurstudierenden im Hinblick auf die Verwendung von Heurismen und das Durchlaufen von Problemlösephasen bzw. die Nutzung von *Epistemic Games*. Aus diesem Grund muss das zu entwickelnde Kategoriensystem derart gestaltet sein, dass mit ihm mathematische und physikalische Problemlöseprozesse analysiert werden können. Dabei wurde aufgrund der breiten Forschungsbasis zum Thema Problemlösen festgelegt, ein a-priori Kategoriensystem zu entwickeln, welches im Prozess der Analyse angepasst wurde. Die Entwicklung verlief über mehrere Schritte, die im Folgenden näher dargestellt werden. Anschließend wird das zur Analyse genutzte Kategoriensystem detailliert vorgestellt.

### 8.1.2.1 Entwicklung des Kategoriensystems

Auf Basis der Arbeiten von Bruder und Collet (2011), Polya (1957) sowie Tuminaro (2004) wurde zunächst ein hierarchisches Kategoriensystem mit 67 Kategorien entwickelt (Simon, 2014; siehe Anhang B), welches sich eng an den theoretischen Vorlagen orientierte. So beinhaltete beispielsweise die Kategorie *Heuristische Hilfsmittel* eine Unterkategorie zum Ursprung des jeweils verwendeten Hilfsmittels oder die *Heuristische Strategie Systematisches Probieren* sah eine Unterscheidung von vier Varianten vor. Auf Grundlage einer Pilotierung mit Hilfe von vier Transkripten von Gruppenarbeiten<sup>1</sup> wurde in einem ersten Schritt die Anzahl der Kategorien auf 38 reduziert (siehe Anhang B). Die Bestimmung der Interrater-Reliabilität zeigte für das entstandene Kategoriensystem eine gute Übereinstimmung:  $\kappa = 0,90$  (Simon, 2014, S. 84).

Die Pilotierung des Kategoriensystems führte außerdem zu der Erkenntnis, dass eine Kodierung auch die Qualität der Anwendung der Heurismen erfassen muss, damit zwischen der eigenen Leistung der Studierenden und den Vorgaben durch die jeweilige Aufgabe unterschieden werden kann. So entstand eine Ausdifferenzierung jedes Heurismus in zwei Stufen: Stufe 1 wird kodiert, wenn die Studierenden für den Einsatz eines *Heuristischen Hilfsmittels* direkt die Aufgabeninhalte nutzen (z. B. eine gegebene *Abbildung*) oder beim Einsatz von *Heuristischen Strategien* auf weniger anspruchsvolle Tätigkeiten zurückgreifen (z. B. *Vorwärtsarbeiten* in Form des Abarbeitens einer mehrschrittigen Rechenaufgabe). Stufe 2 dient der Beschreibung von anspruchsvolleren Handlungen (z. B. dem Erstellen eigener *Abbildungen* oder dem planvollen *Vorwärtsarbeiten* in mehrschrittigen Prozessen mit Teilzielen).<sup>2</sup>

Durch den Entwicklungsprozess des Kategoriensystems konnte erreicht werden, dass die Kategorien die wichtige Anforderungen, „disjunkt, erschöpfend und präzise“ (Diekmann, 2007, S. 589) bzw. logisch voneinander unabhängig (J. Rost, 2004) zu sein, erfüllen. Das bedeutet, „dass die Zuordnung einer Itemantwort [bzw. eines Videoausschnittes] zu einer Kategorie des einen Aspektes nicht zur Folge haben darf, dass bestimmte Kategorien eines anderen

<sup>1</sup>Zwei Gruppen stammen vom ersten Messzeitpunkt der vorliegenden Studie und zwei Gruppen stammen aus einer Vorstudie mit einer anderen Auswahl an Aufgaben.

<sup>2</sup>Diese Einteilung in anspruchsvoll und weniger anspruchsvoll passt für die in der vorliegenden Studie verwendeten Aufgaben.

Signierungsaspektes auftreten müssen oder nicht auftreten können“ (J. Rost, 2004, S. 79). Das endgültige Kategoriensystem wird in den nächsten Abschnitten vorgestellt. Dabei werden, Kuckartz (2016) folgend, neben den Bezeichnungen und inhaltlichen Beschreibungen der Kategorien auch Beispiele aus dem Material, d. h. Bearbeitungen der Aufgaben zur Illustration, vorgestellt.

### 8.1.2.2 Die innere Struktur der Problemlöseprozesse

Das Kategoriensystem für die innere Struktur von Problemlöseprozessen dient der Analyse der Mathematikaufgaben. Bei den Physikaufgaben wird die innere Struktur nicht kodiert, da durch die *Epistemic Games* bereits in den meisten Fällen der Einsatz bestimmter Heuristiken mit angezeigt wird (siehe Abschnitt 8.1.2.4). Das System basiert auf der Klassifikation von Heuristiken nach Bruder und Collet (2011), enthält aber nur diejenigen Bestandteile, welche im Verlauf der Analyse zum Einsatz kamen. Einen Überblick über das finale Kategoriensystem der inneren Struktur der Problemlöseprozesse ist in Abbildung 8.1 gegeben.

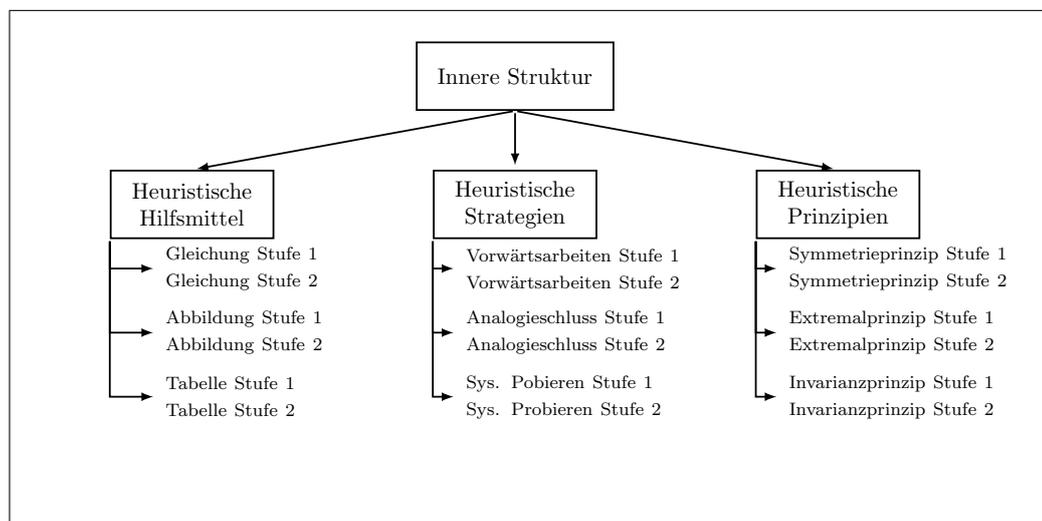


Abbildung 8.1: Kategoriensystem der inneren Struktur zur Analyse der Videoaufnahmen hinsichtlich der Problemlöseprozesse der Studierenden bei der Bearbeitung der Aufgaben.

Für die Kategorie *Heuristische Hilfsmittel* wurden schlussendlich die drei Hilfsmittel *Abbildung*, *Gleichung* und *Tabelle* übernommen (siehe Tabelle 8.1). Beim Hilfsmittel *Abbildung* wurde Stufe 1 kodiert, wenn eine *Abbildung*, die

durch die Aufgabenstellung vorgegeben war, genutzt wurde, um einen Lösungsplan zu entwickeln oder eine Lösung nachzuvollziehen bzw. abzulesen. Stufe 2 erfasst, dass die Studierenden selbst eine *Abbildung* anfertigten, um die Situation zu visualisieren oder diese als Ausgangspunkt für die Formulierung einer *Gleichung* nutzten. Die Stufe wurde sowohl bei *Abbildungen* verwendet als auch in Situationen, wenn die Studierenden durch Gesten oder mit Hilfe weiterer Gegenstände (wie z. B. einem Stift) Zusammenhänge veranschaulichten. Beispielsweise nutzten einige Gruppen ein Blatt Papier und einen Stift, um die Spiegelung eines Punktes an einer Ebene zu demonstrieren.

Eine *Gleichung* wurde der Stufe 1 zugewiesen, wenn diese, ähnlich wie eine *Abbildung*, durch die Aufgabenstellung vorgegeben war und die Studierenden diese algorithmisch bei der Lösung nutzten. Ebenfalls als Stufe 1 wurde die Verwendung von erkennbar auswendig gelernten Formeln und *Gleichungen* gewertet. So nutzten beispielsweise viele Gruppen für Berechnung einer Ableitung die bekannte Produktregel zur Bildung einer Ableitung<sup>3</sup>. Stufe 2 wurde kodiert, wenn die Studierenden selbstständig *Gleichungen* aufstellten, um die gegebene Situation zu mathematisieren. Dies wurde von vielen Studierenden zum Beispiel genutzt, um den Lotfußpunkt für den Abstand zwischen Punkt und Ebene zu bestimmen.<sup>4</sup> Beim Heurismus *Tabelle* unterscheiden die Stufen ob die Studierenden entweder eine vorgegebene *Tabelle* nutzten oder diese selbstständig aufstellten. Tabelle 8.1 gibt einen Überblick zu den Kodierungen der *Heuristischen Hilfsmittel*.

Das Kategoriensystem für die *Heuristischen Strategien* enthält die drei Kategorien *Vorwärtsarbeiten*, *Systematisches Probieren* und *Analogieschluss* (siehe Tabelle 8.2). Die Kategorie *Vorwärtsarbeiten* erfasst, dass bei den Bearbeitungen der Studierenden erkennbar ist, dass ein Plan berücksichtigt wird. *Vorwärtsarbeiten* wird auf Stufe 1 kodiert, wenn die Studierenden eine längere Rechen- bzw. Kalkülaufgabe abarbeiten. Ein Beispiel hierfür sind eine umfangreiche Berechnung von Ableitung und Extremstellen. Stufe 2 erfordert einen mehrstufigen Prozess, in dem verschiedene Zwischenziele erreicht werden müssen, um zur Lösung zu gelangen. Einige Gruppen bestimmten den Abstand

<sup>3</sup>Aufgabe HM13 am ersten und zweiten Messzeitpunkt.

<sup>4</sup>Aufgabe HM14 am ersten und zweiten Messzeitpunkt.

Tabelle 8.1: Kategoriensystem der inneren Struktur – *Heuristische Hilfsmittel*

Kategorie	Stufe	Beschreibung
Abbildung	1	Studierende greifen auf eine gegebene grafische Darstellung zurück.
	2	Studierende erstellen und nutzen eine grafische Darstellung (auch in Gedanken).
Gleichung	1	Studierende nutzen eine auswendig gelernte Formel, einen Algorithmus oder eine gegebene Gleichung.
	2	Studierende stellen selbstständig eine Gleichung auf und nutzen diese.
Tabelle	1	Studierende nutzen eine vorgegebene Tabelle.
	2	Studierende erstellen selbstständig aus den Daten eine Tabelle.

eines Punktes zur Ebene über das Lotfuß-Verfahren.<sup>5</sup> Dies erforderte verschiedene Schritte, die planmäßig durchgeführt werden mussten.

Beim *Systematischen Probieren* geben die Stufen den Grad des systematischen Vorgehens wieder, mit dem die Studierenden Werte ausprobierten. Während auf Stufe 1 Werte vereinzelt und wenig systematisch auf ihren Einfluss hin getestet werden (z. B. beim Ausprobieren eines Wertes, um die Richtigkeit einer Lösung zu überprüfen), wird auf Stufe 2 das *Systematische Probieren* zielgerichtet genutzt, um eine Lösungsidee oder eine Vorgehensweise zu ermitteln. So versuchten einige Gruppen beim ersten und zweiten Messzeitpunkt das Verhalten einer Funktion zu untersuchen, indem sie systematisch  $x$ -Werte unterhalb und oberhalb der Maximalstelle einsetzten.

Die Kategorie *Analogieschluss* fasst Handlungen zusammen, in denen Studierende Zusammenhänge zu früheren Aufgaben herstellen, um das vorliegende Problem zu lösen. Bei Stufe 1 erinnern die Studierenden einzelne Schritte aus vorherigen Aufgaben, die beim vorliegenden Problem weiterhelfen können. Stufe 2 wurde dagegen kodiert, wenn Analogien zu Aufgaben hergestellt wurden und ein komplexes Vorgehen übertragen wurde.

<sup>5</sup>Aufgabe HM13 am ersten und zweiten Messzeitpunkt.

Tabelle 8.2: Kategoriensystem der inneren Struktur – *Heuristische Strategien*

Kategorie	Stufe	Beschreibung
Vorwärts- arbeiten	1	Studierende führen eine längere Berechnung planvoll durch.
	2	Studierende arbeiten nach einem Lösungsplan in mehreren Teilschritten mit Zwischenergebnissen.
Systematisches Probieren	1	Studierende versuchen durch Einsetzen einzelner Werte zu einer Lösung zu gelangen.
	2	Studierende setzen systematisch Werte ein, um eine Lösung zu erhalten oder zu bestätigen.
Analogieschluss	1	Studierende nutzen einzelne Informationen aus anderen Aufgaben, um zu einer Lösung zu gelangen.
	2	Studierende nutzen komplexe Beziehungen aus anderen Aufgaben, um einen Lösungsweg zu erarbeiten.

Das Kategoriensystem zu den *Heuristischen Prinzipien* beinhaltet die drei Kategorien *Invarianzprinzip*, *Extremalprinzip* und *Symmetrieprinzip* (siehe Tabelle 8.3). Wenn das jeweilige Prinzip durch eine Studierende als Ansatz (implizit) vorgeschlagen aber nicht weiter verfolgt wird (siehe Tabelle 8.3), wird dieser Stelle im Prozess die Stufe 1 zugewiesen.

Beim *Invarianzprinzip* wurde die Stufe 2 kodiert, wenn die Studierenden mindestens eine Invariante konstruieren, die sie mit anderen Objekten in Bezug setzen, um Prozesse besser verstehen zu können. Einige Studierende nutzen das Prinzip um den  $n$ -ten Summanden einer Reihe zu bestimmen, bei der die ersten Summanden bereits angegeben sind.<sup>6</sup>

Wenn die Studierenden bei der Bearbeitung der Aufgabe größte oder kleinste Elemente untersuchten, wurde das *Extremalprinzip* auf Stufe 2 kodiert. Beispielsweise wurde dieses Prinzip von den Studierenden angewendet, um das Verhalten der Exponentialfunktion für den Fall  $x \rightarrow \infty$  zu analysieren.<sup>7</sup>

Für die Kategorie *Symmetrieprinzip* wird die Stufe 2 verwendet, wenn die

<sup>6</sup>Aufgabe HM7 am dritten Messzeitpunkt

<sup>7</sup>Aufgabe HM13 am ersten und zweiten Messzeitpunkt

Studierenden Symmetrien in Aufgaben suchen und nutzen, um Lösungsideen und Vorgehensweisen zu entwickeln. Dieses Prinzip nutzten die Studierenden beispielsweise, um den Schwerpunkt einer achsensymmetrischen Fläche zu bestimmen.<sup>8</sup>

Tabelle 8.3: Kategoriensystem der inneren Struktur – *Heuristische Prinzipien*

Kategorie	Stufe	Beschreibung
Invarianzprinzip	1	Studierende deuten die Suche nach und Verwendung von Invarianten an, verfolgen diesen Ansatz aber nicht weiter.
	2	Studierende konstruieren eine Invariante/mehrere Invarianten, z. B. zur Inbezugsetzung von Objekten oder Situationen.
Extremalprinzip	1	Studierende deuten die Suche und Verwendung von ausgezeichneten Elementen an, verfolgen diesen Ansatz aber nicht weiter.
	2	Studierende betrachten oder suchen ein größtes/kleinstes/am Rand liegendes Element.
Symmetriepinzip	1	Studierende deuten die Suche nach und Verwendung von Symmetrien an, verfolgen diesen Ansatz aber nicht weiter.
	2	Studierende suchen und verwenden Symmetrien zwischen den durch die Problemstellung gegebenen Objekten.

Das folgende Transkript zeigt sowohl die Kodierung der Hilfsmittel *Abbildung* und *Gleichung* als auch die der Strategie *Vorwärtsarbeiten* bei der Aufgabe HM14 vom zweiten Messzeitpunkt (siehe Abbildung 8.2).

Nachdem die Studierenden die Aufgabenstellung vorgelesen haben, macht Student *S33* einen Vorschlag für die Vorgehensweise.

S33: Das ist zweimal  $\overline{AF}$ , oder? Wenn er an der Ebene gespiegelt wird, ist ja doppelt so lang wie dieser Abstand (zeigt die Situation mit seinen Händen).

<sup>8</sup>Aufgabe HM9 am dritten Messzeitpunkt



verwendet, wenn die Studierenden nichts sagen, aber durch ihre Handlungen eindeutig ist, dass sie sich noch in der Phase des Verstehens befinden und noch keine Überlegungen zur Vorgehensweise stattfinden.

Die Kategorie *Ausdenken eines Plans* wird genutzt, wenn die Studierenden miteinander ein mögliches Vorgehen planen, sich dabei zum Beispiel über mögliche Methoden und Verfahren und deren Erfolgswahrscheinlichkeit austauschen. Diese Phase wird auch dann zugewiesen, wenn zwischen den Phasen *Verstehen des Problems* und *Durchführen des Plans* die Studierenden nicht verbalisieren, jedoch durch ihre Handlungen erkennen lassen, dass sie ihr Vorgehen planen, indem sie zum Beispiel eine Zeichnung oder eine *Gleichung anfertigen*. Das *Durchführen des Plans* wird für die Zeit kodiert, in der die Studierenden mit der konkreten Lösung der Aufgabe beschäftigt sind. Mit dieser Kategorie werden auch Diskussionen um die Richtigkeit einzelner Schritte erfasst.

Die Kategorie *Rückschau* wird zugewiesen, wenn die Studierenden nach einer (vorläufigen) Lösung über deren Korrektheit oder über die einzelnen Schritte diskutieren. Im Unterschied zur Kategorie *Durchführen des Plans* muss die Diskussion, wenn sie mit der Kategorie *Rückschau* kodiert wird, den gesamten Bearbeitungsprozess bzw. das Endergebnis betreffen und nicht nur einzelne Schritte der Bearbeitung isoliert betrachten. Tabelle 8.4 gibt einen Überblick zu den Kodierungen der *Phasen*.

Polya ordnet die Phasen in ein lineares Modell. Bei der Kodierung wurde die Kategorien unabhängig voneinander und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge kodiert. So war es möglich, dass die Kategorie *Verstehen des Problems* sowohl zeitlich vor als auch nach der Kategorie *Ausdenken eines Plans* eingeordnet wurde. Einen Überblick zu den Kategorien von Phasenverläufen gibt Tabelle 9.12 in Abschnitt 9.2.2.

Für die Analyse von mathematischen Problemlöseprozessen existieren bereits einige Kategoriensysteme (vgl. z. B. Rott, 2013), trotzdem wurde ein neues Kategoriensystem erstellt. Der wichtigste Grund war, dass es sich bei den Aufgaben, die in der Studie eingesetzt wurden, nicht um klassische Problemlöseaufgaben handelt. Bereits existierende Kategoriensysteme sind aber gerade dazu erstellt worden Prozesse zu analysieren, die bei solchen klassischen Problemen auftreten. Sie umfassen mehr Strategien und differenzieren diese zudem stärker aus (vgl. Simon, 2014). Für diese Studie ist dagegen ein auf wenige

Tabelle 8.4: Kategoriensystem der äußeren Struktur – Mathematik

Kategorie	Beschreibung
Verstehen des Problems	Studierende erschließen das Problem durch geeignete Fragen, Visualisierungen, Überlegungen bzgl. der Lösbarkeit etc.
Ausdenken eines Plans	Studierende untersuchen bekannte Strategien auf ihre Nutzbarkeit und entwickeln einen Lösungsplan.
Durchführen des Plans	Studierende führen den Lösungsplan aus und kontrollieren ihre Lösungsschritte auf Richtigkeit.
Rückschau	Studierende reflektieren die Problemlösung, um sich der Korrektheit ihres Vorgehens zu versichern.

gängige Strategien gekürztes System besser geeignet. Der in Abschnitt 8.1.2.1 beschriebene Entwicklungsprozess hat eben diese Situation verdeutlicht.

#### 8.1.2.4 Die äußere Struktur der physikalischen Problemlöseprozesse

Das Kategoriensystem zu den *Epistemic Games* (EG) nach Tuminaro (2004) enthält die fünf Games *Mapping Meaning to Mathematics*, *Mapping Mathematics to Meaning*, *Pictorial Analysis*, *Physical Mechanism Game* und *Recursive Plug and Chug* (siehe Tabelle 8.5). Die einzelnen Schritte der jeweiligen Games sollen hier nicht noch einmal detailliert vorgestellt werden. Zur Beschreibung werden die Formulierungen aus Tuminaro (2004) genutzt (eine detaillierte Darstellung, die auch für die Kodierung verwendet wurde, findet sich in Abschnitt 4.2.2). An dieser Stelle werden einige Kriterien angeführt, um die Frage, welches EG in der Bearbeitung zu erkennen ist, zu beantworten.

Wie bereits in Abschnitt 4.2.2 dargelegt, beschreiben die EGs die Art und Weise, wie Studierende Mathematik nutzen, um zu ihren Lösungen zu gelangen: mathematisch (quantitativ) orientierte Lösungen (*Mapping Meaning to Mathematics*, *Mapping Mathematics to Meaning*), qualitativ orientierte Lösungen (*Physical Mechanism Game*, *Pictorial Analysis*) und rechnerische Lösungen ohne konzeptuelles Verständnis (*Recursive Plug and Chug*, *Transliteration to*

*Mathematics*). Diese drei Kategorien dienen einer ersten Einordnung der jeweiligen Aufgabenbearbeitung. Die Unterkategorien der EG beschreiben konkrete Handlungen, aus diesem Grund werden sie nur den Situationen zugewiesen, in denen die Studierenden nach diesen Beschreibungen handelten. So gibt es Bearbeitungen von Physikaufgaben, die keinem EG zugeordnet werden.<sup>9</sup> Die Ergebnisse zu den EG und zu den Phasen von Polya unterscheiden sich daher insofern, dass jeder Mathematikaufgabe genau ein Typ des Phasenverlaufs zugeordnet werden kann, den Bearbeitungen von Physikaufgaben dagegen kein oder ein EG oder mehrere EGs zugewiesen werden kann. Der Entscheidungsbaum für die Auswahl der zu kodierenden Games ist in Abbildung 8.3 dargestellt. Die einzelnen Schritte werden nun detailliert beschrieben.

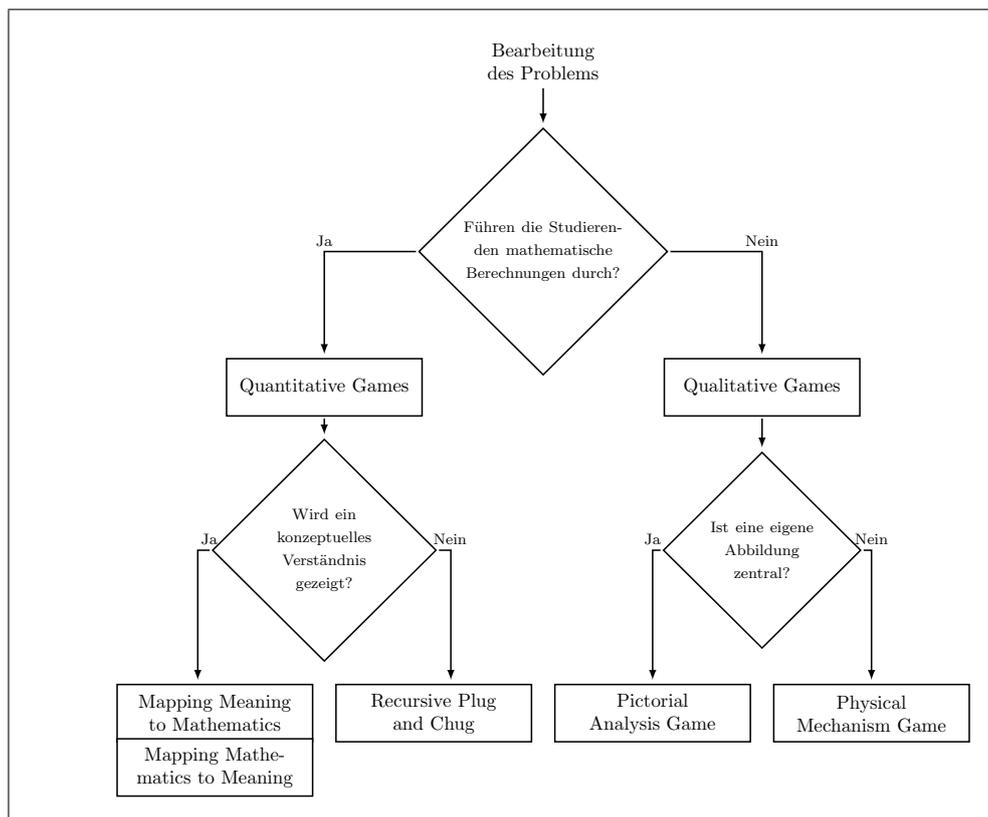


Abbildung 8.3: Entscheidungsbaum für die Kodierung der *Epistemic Games*.

<sup>9</sup>An dieser Stelle könnte das Kriterium, dass die Kategorien erschöpfend sind, verletzt sein, jedoch handelt es sich in diesen Fällen nicht um Problemlöseprozesse im Sinn der Arbeit (siehe Abschnitt 4.1.2).

Wenn keine Berechnungen durchgeführt werden, sind nur die Kategorien *Physical Mechanism Game* und das *Pictorial Analysis Game* möglich. *Pictorial Analysis Game* wurde dann kodiert, wenn die Studierenden sich für die Lösung des (Teil-)Problems auf eine selbst erstellte *Abbildung* fokussierten. Mit Hilfe dieser *Abbildung* muss ein Teilziel des Problems bearbeitet und abgeschlossen werden. Wird die *Abbildung* parallel als unterstützendes Element für ein anderes EG genutzt, wird dieses der Aufgabe zugewiesen. Die Kodierung eines *Pictorial Analysis Games* soll an einem Beispiel verdeutlicht werden: Die Studierenden illustrieren die Situation, dass ein Astronaut einen Stein in die Luft wirft und dieser danach wieder auf den Boden fällt, mit einer Zeichnung einer Parabel. Anhand dieser Zeichnung erklären sie sich gegenseitig die physikalische Situation und gelangen so zu einem möglichen Lösungsweg, den sie anschließend mathematisch durchführen. In diesem Fall wird die Kategorie *Pictorial Analysis Game* kodiert, da im ersten Schritt die *Abbildung* im Zentrum der Argumentation stand und dazu genutzt wurde, das Teilziel, einen möglichen Lösungsweg zu identifizieren, zu erreichen.

Ein Beispiel, in dem die Kategorie *Pictorial Analysis Game* nicht verwendet wird, ist das folgende: Die Studierenden berechnen die Fallbeschleunigung bei einer Rolle. Während der Berechnung verweisen sie auf die vorgegebene *Abbildung*, um mögliche Unterschiede zwischen zwei Massen zu begründen. Hier wird die Kategorie *Pictorial Analysis Game* nicht kodiert, da die *Abbildung* nur als unterstützendes Element während eines anderen Games genutzt wird. Finden Berechnungen bei der Bearbeitung statt, muss für die Kodierung entschieden werden, ob auf ein konzeptuelles Verständnis zurückgegriffen wird. Hierfür können zum einen die einzelnen Schritte der mathematischen Games genutzt werden, um zu analysieren, ob diese in der Bearbeitung vorkommen, zum anderen helfen auch die Aussagen der Studierenden dabei, zu ermitteln, ob sie konzeptuelles Verständnis besitzen. Dies zeigt sich zum Beispiel darin, wenn die in der *Gleichung* formulierten Zusammenhänge in der Beschreibung der physikalischen Situation nachvollzogen werden.

Ob es sich bei einer Berechnung mit konzeptuellem Verständnis um die Kategorie *Mapping Meaning to Mathematics* oder *Mapping Mathematics to Meaning* handelt, hängt von der *Entry* und *Ending condition* ab. Beginnen die Studierenden mit einer physikalischen *Gleichung* und argumentieren von dieser

ausgehend, wird die Kategorie *Mapping Mathematics to Meaning* kodiert. Argumentieren die Studierenden ausgehend von der physikalischen Situation und übersetzen diese in mathematische Ausdrücke, wird die Kategorie *Mapping Meaning to Mathematics* zugewiesen. Mit diesem Vorgehen lassen sich disjunkt und erschöpfend die Bearbeitungen der Probleme aus der Physik bzw. Technischen Mechanik kodieren.

Das folgende Transkript zeigt die Kodierung des EG *Mapping Meaning to Mathematics* bei der Aufgabe TM6 vom dritten Messzeitpunkt (siehe Abbildung 8.4).

Ermitteln Sie die Funktion der in der folgenden Abb. 7 dargestellten Streckenlast. Tragen Sie Ihr Ergebnis in das Lösungsfeld ein.

Gegeben:  $q_1 = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ,  $q_2 = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ,  $L = 1,0\text{m}$

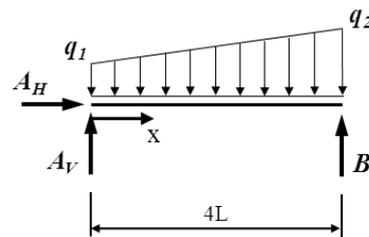


Abbildung 7

Lösung:

$q(x) =$

0  1

Abbildung 8.4: Item TM6 vom dritten Messzeitpunkt als Beispielitem für die Kodierung des EG *Mapping Meaning to Mathematics*.

Der Student *S01* führt bei der Bearbeitung mathematische Berechnungen durch und zeigt dabei ein konzeptuelles Verständnis. Da er mit einer physikalischen Situation startet und diese in einen mathematischen Ausdruck umwandelt, könnte das EG *Mapping Meaning to Mathematics* vorliegen. Zur genaueren Analyse werden nun die einzelnen *Moves* des Games im Transkript kodiert (siehe Tabelle 8.5):

Zuerst beschreibt der Student *S01* die physikalische Situation:

S01: Es ist  $q(x)$  zu lösen. [...]  $q(x)$  ist [...] bestimmt, es ist eine Trapezlast. Sie ist offensichtlich linear, das heißt es gibt einen Anfangswert und einen

Endwert und eine Anfangsgröße und dann steigt die linear an.

Die beiden folgenden *Moves*, in denen er die Größen aus der physikalischen Situation in mathematische Einheiten übersetzt und die mathematischen Einheiten der physikalischen Beschreibung folgend in Zusammenhang setzt, geschehen in einem Schritt:

S01: Das heißt  $q(x)$  lässt sich bestimmen durch eine Geradengleichung, also mit  $m$  mal  $x$  plus einem gewissen  $c$ -Wert (schreibt  $q(x) = m \cdot x + c$  auf). Der  $c$ -Wert ist 1, denn für  $x = 0$  tritt immer noch die Linienlast  $q_1$  auf (schreibt  $c = q_1$  (Da  $q(x = 0) = q_1$ )). Das war offensichtlich. Zu betrachten ist dann noch die Steigung  $m$ . Die Steigung lässt sich durch ein Steigungsdreieck berechnen Delta  $y$  zu Delta  $x$  (schreibt  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ). Man stellt sich das Ganze in einem x-y-Koordinatensystem vor. Die Differenz von  $y$  ist  $q_2$  minus  $q_1$  geteilt durch die Länge [...] für  $q_1$  ist 0 zuzuordnen und für  $q_2$   $4l$ , also  $4l - 0$  (schreibt  $= \frac{q_2 - q_1}{4l - 0}$ ).

Anschließend manipuliert der Student die mathematische Gleichung:

S01: Daraus folgt dann, dass  $m$  [...]  $q_2$  minus  $q_1$  geteilt durch  $4l$  ist (schreibt  $= \frac{q_2 - q_1}{4l}$ ). Eingesetzt mit Zahlenwerten ist die Differenz aus  $q_2$  und  $q_1$  2.  $l$  hat die Länge 1, also kommt da raus am Ende  $\frac{1}{2}$ .

Der Student fügt physikalische Einheiten hinzu und erhält am Ende die Gleichung  $q(x) = \frac{1}{2} \frac{kN}{m^2} \cdot x + 2 \frac{kN}{m}$ . Anschließend wertet er die Bearbeitung aus:

S01: Setzt man nochmal kurz  $4l$  ein und man erhält dann, dass  $2 + 2$ , das sind 4 [...] das sind 4 Kilonewton, wie gefordert.

Die Entwicklung eines Kategoriensystems für die Analyse der Bearbeitung der Physikaufgaben auf Basis der EGs wurde aus zwei Gründen vorgenommen. Zum einen ermöglichen die EGs den Charakter der Bearbeitung in mathematisch und nicht mathematisch zu unterteilen, dies wird durch die Phasen von Polya nicht erfasst. Dies war gerade im Hinblick auf die Analyse der Verbindung zwischen Mathematik und Physik förderlich. Zum anderen zeigte sich bei einer ersten Kodierung der Daten mit Hilfe der Kategorien zu den Phasen nach Polya (1957), dass sich die Prozesse bei der Bearbeitung von Physikaufgaben nicht so gut abbilden ließen. Die einzelnen Handlungen waren häufig nicht eindeutig einer einzelnen Phase zuzuordnen. Zudem war die Bearbeitung der Aufgaben teilweise sehr unterschiedlich gestaltet, was sich jedoch durch die verschiedenen EGs abbilden ließ.

Tabelle 8.5: Kategoriensystem der äußeren Struktur – Physik

Kategorie	Stufe	Beschreibung (Studierende ...)
Mapping Meaning to Mathematics	0	entwickeln eine Beschreibung zur physikalische Situation.
	1	übersetzen die Größen aus der physikalischen Situation in mathematische Einheiten.
	2	setzen die mathematische Einheiten der physikalischen Beschreibung folgend in Zusammenhang.
	3	manipulieren die mathematischen Gleichungen und Symbole.
	4	werten die Bearbeitung aus.
Mapping Mathematics to Meaning	0	identifizieren die „Zielkonzepte“.
	1	finden eine Gleichung, die das Ziel zu anderen Konzepten in Verbindung setzt.
	2	formulieren eine physikalische Beschreibung, in der sie die Verbindung zwischen den Konzepten nutzen.
	3	werten die Beschreibung aus.
Pictorial Analysis	0	bestimmen das Zielkonzept.
	1	wählen eine externe Repräsentationsform.
	2	formulieren eine physikalische Beschreibung und nehmen dabei Bezug auf die Objekte in der Repräsentation.
	3	füllen die „Slots“ in der Repräsentation aus.
Physical Mechanism Game	0	entwickeln eine Beschreibung über die physikalische Situation.
	1	werten die Beschreibung aus.
Recursive Plug and Chug	0	identifizieren die Zielgröße.
	1	finden eine Gleichung, welche die Zielgröße mit anderen Größen in Verbindung setzt.
	2	bestimmen, welche anderen Größen bekannt sind.
	3	berechnen die Zielgröße.
	4	wählen ein Teilziel und starten von vorne.

### 8.1.3 Auswertung der Videodaten

Nach der Darstellung der Kategoriensysteme wird an dieser Stelle auf einige Besonderheiten bei der Auswertung der Videodaten eingegangen. Die beschriebenen Methoden der Qualitativen Inhaltsanalyse lassen sich neben der Textanalyse auch für die Analyse von Videodaten anwenden (Mayring, Gläser-Zikuda & Ziegelbauer, 2005). Viele Autorinnen sehen im Zusammenhang mit *Laut Denken*-Studien nach der Datenaufnahme die Verschriftlichung der Verbalisierungen vor (z. B. Fonteyn et al., 1993; Konrad, 2010; Sandmann, 2014). Entsprechend wurde für die ersten Videoaufnahmen verfahren. Es zeigte sich aber, dass aufgrund des Gruppensettings die Transkriptionen sehr viel Zeit in Anspruch nahmen und bei den Kodierern eine Tendenz zu sehr kleinschrittigen Inhaltsanalysen zu beobachten war. Zudem gehen beim Prozess der Transkription unweigerlich Informationen verloren, da bestimmte Aspekte ausgeblendet werden (müssen). Für die vorliegende Arbeit ist das kleinschrittige Vorgehen nicht notwendig. Aus diesen Gründen wurde auf ein Verfahren gewählt, bei dem direkt am Video kodiert wurde. Dazu wurde die Software *Der Videograph* (Rimmele, 2013) eingesetzt.<sup>10</sup>

Der Wechsel von Transkriptionen hin zur direkten Analyse am Video erforderte die Entscheidung nach der Art der Segmentierung,<sup>11</sup> dabei kann zwischen einer zeit-basierten und einer event-basierten Segmentierung unterschieden werden (Mayring et al., 2005). Bortz und Döring (2016) sprechen von einer Zeit- bzw. Ereignisstichprobe, wobei letztere geeignet ist, wenn „Einzelereignisse, einzelne Objekte oder kurze Verhaltenssequenzen“ (S. 327) von Interesse sind. Für die Studie wird, Bortz und Döring (2016) folgend, eine event-basierte Segmentierung verwendet, da das Vorkommen und die Dauer von Heurismen sowie der Wechsel zwischen Phasen erhoben werden soll, d. h. Einzelereignisse sowie kurze Verhaltenssequenzen. Bei der zeit-basierten Segmentierung werden vorab definierte Zeitintervalle, zum Beispiel alle 5 Sekunden, kodiert. Für jedes Zeitintervall ist dann eine Kodierung vorgesehen (z. B. die Ausprägung eines

<sup>10</sup>Auf eine detaillierte Darstellung der technischen Möglichkeiten der Software wird hier verzichtet. Seidel, Prenzel, Duit und Lehrke (2003) berichten ausführlich zu den Möglichkeiten der Software.

<sup>11</sup>Vergleichbar mit der Wahl der Analyseeinheit bei der Qualitativen Inhaltsanalyse an Texten (Mayring et al., 2005).

bestimmten Verhaltens). Dieses Vorgehen ist für die vorliegende Analyse nicht zielführend, da es zum einen Zeitabschnitte gibt, in denen die Studierenden nicht aktiv sind, und zum anderen Zeitabschnitte, in denen mehrere Wechsel zwischen Problemlösephasen vorkommen. Bei einer einzelnen Kodierung für ein 5 Sekunden-Intervall würden in diesem Fall viele Informationen verloren gehen.<sup>12</sup>

Auf Grundlage dieser Entscheidung wurde wie folgt verfahren: Die Kategorien zur inneren Struktur wurden auf zwei Weisen verwendet: *Heuristische Hilfsmittel* wurden ab der ersten Erwähnung für die Dauer ihres Einsatzes bzw. der Diskussion über sie kodiert, hier reichte bereits eine sehr kurze Nutzung aus, beispielsweise wenn die Studierenden eine zusätzliche Information ihrer *Abbildung* hinzufügten. *Heuristische Strategien* und *Heuristische Prinzipien* mussten durch die Studierenden eine zeitlang eingesetzt werden (ca. 10 Sekunden), um gewertet zu werden, und wurden dann für die Dauer ihrer Nutzung kodiert. Die Kategorien zum Phasenmodell von Polya wurden lückenlos zugewiesen, d. h. wenn während einer Phase Pausen oder Handlungen ohne Bezug zur Aufgabenbearbeitung auftraten, wurde die Phase weiter kodiert. Dies geschah zum einen aus ökonomischen Gründen, da sonst bei der späteren Auswertung viele Einzelkodierungen zu einer Gesamtkodierung zusammengefügt werden müssten und zum anderen aus der inhaltlichen Überlegung, dass die Studierenden sich auch bei Pausen in der jeweiligen Phase befinden und die Pausen eventuell der Erholung, Ablenkung oder dem Nachdenken dienen, um daraufhin weiter konzentriert arbeiten zu können. Die Kategorien der *Epistemic Games* werden für den Zeitraum kodiert, in denen die Studierenden entweder im Sinne des jeweiligen Schrittes argumentieren (z. B. die physikalische Situation beschreiben) oder Handlungen durchführen, die zum Game gehören (z. B. Berechnung einer physikalischen *Gleichung*).

---

<sup>12</sup>Diese und die Diskussion zuvor um die Transkription von Videoaufnahmen findet sich auch bei Rott (2013), der zu ähnlichen Schlüssen kommt und ebenfalls bei Teilen seiner Analysen auf eine Transkription verzichtet und eine event-basierte Kodierung nutzt.

### 8.1.4 Bestimmung der Intercoder-Übereinstimmung

Die Erhebung und Auswertung von Daten in der empirischen Forschung muss bestimmten Gütekriterien genügen. In der quantitativen Forschung sind dies die drei Hauptgütekriterien *Objektivität*, *Validität* und *Reliabilität* mit ihren jeweiligen Unterkriterien (vgl. z. B. Bortz & Döring, 2016; Flick, 2009). Während über diese Konsens herrscht, existiert im Hinblick auf Gütekriterien für die qualitative Forschung eine breite Diskussion (Kuckartz, 2016). Hier zeigen sich drei Ansätze für die Formulierung: (1) Übertragung der Gütekriterien quantitativer Forschung auf die qualitative Forschung, (2) Entwicklung eigener Gütekriterien und (3) Ablehnung einheitlicher Kriterienkataloge (Bortz & Döring, 2016). Eine Übertragung der Gütekriterien aus der quantitativen Forschung auf die Inhaltsanalyse, als einer wichtigen qualitativen Forschungsmethode, wird häufig kritisiert (Mayring, 2010). Zumeist werden eigene Kriterien erarbeitet, was dazu führt, dass „mehr als einhundert verschiedene Kriterienkataloge“ (Bortz & Döring, 2016, S. 107) formuliert wurden. Auch für die qualitative Inhaltsanalyse existieren solche Kriterien, von denen sich die *Intercoder-Reliabilität* auf den wichtigen Prozess des Kodierens bezieht, der „in der qualitativen Inhaltsanalyse von zentraler Bedeutung ist“ (Kuckartz, 2016, S. 205). Daher wird dieses Kriterium für das zuvor beschriebene Kategoriensystem untersucht. Mayring (2010) weist darauf hin, dass mit der *Intercoder-Reliabilität* „die Unabhängigkeit der Ergebnisse von der untersuchenden Person“ (S. 117), also die Objektivität gemessen wird und die Reliabilität eigentlich über die *Intracoder-Reliabilität*, also dem nochmaligen Kodieren des Materials durch die gleiche Person, ohne das Wissen um die vorherige Kodierung, bestimmt wird. Um eine Verwechslung der Begriffe zu vermeiden, spricht Kuckartz (2016) von *Intercoder-Übereinstimmung*. Für die Bestimmung ist es notwendig, das Material vor dem Kodieren in Kodiereinheiten einzuteilen. Für jede Kodiereinheit wird anschließend überprüft, ob die Kodierer mit ihrer jeweiligen Kodierung übereinstimmen. Dabei können beispielsweise bei zwei Kodierern und einer Kategorie vier unterscheidbare Fälle auftreten: (1) Beide Kodierer kodieren die Kategorie, (2) Kodierer 1 kodiert die Kategorie, Kodierer 2 nicht, (3) Kodierer 1 kodiert die Kategorie nicht, Kodierer 2 kodiert die Kategorie und (4) beide Kodierer kodieren die Kategorie nicht. Aus den Kodierungen lässt sich anschließend eine prozentuale Übereinstimmung berechnen. Für die vorliegen-

den Daten lässt sich die Übereinstimmung nicht auf diese Weise bestimmen, da aufgrund der Wahl einer event-basierten Kodierung, es nicht möglich ist, vorab eine Segmentierung in Kodiereinheiten festzulegen. Kuckartz (2016) weist darauf hin, dass „aufgrund des Fehlens von festgelegten Codiereinheiten das in der quantitativen Inhaltsanalyse übliche Verfahren der Übereinstimmungsberechnung nicht einfach übertragen“ (S. 212) werden kann. Er empfiehlt das folgende Vorgehen: Zuerst wird die Kodierung von Kodierer 1 ausgewählt. Jede Kodierung wird als eine Kodiereinheit bzw. Segment betrachtet. Anschließend wird für jede dieser Einheiten die Übereinstimmung mit Kodierer 2 bestimmt. Eine Übereinstimmung besteht, „wenn Codierer 2 unter der Berücksichtigung eines bestimmten Toleranzbereichs diesem Segment denselben Code zugewiesen hat“ (Kuckartz, 2016, S. 215). Dieser Prozess wird für alle Kodiereinheiten von Kodierer 1 durchgeführt und anschließend in gleicher Weise für die Kodierungen von Kodierer 2. Als Toleranzbereich schlägt Kuckartz (2016) vor, dass eine Übereinstimmung vorliegt, wenn sich zwei Segmente zu 90% überlappen. Rott (2013) arbeitet in seiner Studie zum Problemlösen mit einer vergleichbaren Kodierung und verwendet einen maximalen Abstand zwischen Kodegrenzen von 5 Sekunden. Innerhalb dieser Grenzen wird die Kodierung als übereinstimmend gewertet. Hier wird eine Kombination beider Verfahren gewählt. Das folgende Beispiel illustriert die Vorgehensweise für zwei Aufgaben (siehe Tabelle 8.6):

Tabelle 8.6: Beispiel für die Kodierung der Phasen

Kodierer 1		Kodierer 2		Übereinstimmung
Grenzen	Phase	Grenzen	Phase	Kodierer 1 / Kodierer 2
00:00:15 -	Verstehen des	00:00:14 -	Verstehen des	ja/ja
00:00:18	Problems	00:00:16	Problems	
00:00:18 -	Durchführen des	00:00:16 -	Durchführen des	ja/ja
00:00:55	Plans	00:00:53	Plans	
00:00:55 -	Verstehen des	00:00:54 -	Verstehen des	ja/ja
00:01:03	Problems	00:01:02	Problems	
00:01:03 -	Ausdenken eines	00:01:02 -	Ausdenken eines	nein/ja
00:01:12	Plans	00:01:06	Plans	
00:01:12 -	Durchführen des	00:01:06 -	Durchführen des	ja/nein
00:01:16	Plans	00:01:15	Plans	

Bei der ersten Aufgabe stimmen die Kodierungen in beiden Durchläufen überein; die Grenzen der Kodierungen sind nicht weiter als 5 Sekunden voneinander entfernt. Bei der zweiten Aufgabe stimmt die Kodierung der ersten Phase überein. Bei der zweiten Phase stimmt die Kodierung ausgehend von Kodierer 1 nicht mit der Kodierung von Kodierer 2 überein, da die hintere Grenze einmal bei 00:01:12 und einmal bei 00:01:06 liegt, also weiter als 5 Sekunden voneinander getrennt. Ausgehend von Kodierer 2 stimmt die Kodierung der zweiten Phase mit der Kodierung von Kodierer 1 überein, da die Kodierung von Kodierer 2 vollständig von der Kodierung von Kodierer 1 überlappt wird. Bei der dritten Phase schließlich überlappt die Kodierung von Kodierer 2 die von Kodierer 1, aus diesem Grund gibt es dort eine Übereinstimmung. In Tabelle 8.7 ist die entsprechende Übereinstimmung dargestellt.

Tabelle 8.7: Übereinstimmungen bei der Kodierung der Heurismen im Beispiel

		Kodierer 2		
		kodiert	nicht kodiert	gesamt
Kodierer 1	kodiert	8	1	9
	nicht kodiert	1	0	1
	gesamt	9	1	10

Insgesamt gibt es in acht von zehn Fällen eine Übereinstimmung zwischen den beiden Kodierern, die Intercoder-Übereinstimmung liegt somit bei 80%.

Für die *Intercoder-Übereinstimmung* wurden zwei Gruppenarbeiten (sowohl alle Mathematik- als auch alle Physikaufgaben) des ersten Messzeitpunktes von zwei unabhängigen Kodierern kodiert. Nachdem beide Kodierer die Videos einmal kodiert haben, wurden die Ergebnisse verglichen und besprochen bis eine Einigung erzielt wurde. Anschließend wurden beide Videos ein weiteres Mal unabhängig voneinander kodiert. Im Folgenden werden für die drei Oberkategorien *Heurismen*, *Problemlösephasen* und *Epistemic Games* das Vorgehen und die erzielten Übereinstimmungen berichtet.

## Bestimmung der Intercoder-Übereinstimmung für die Kodierung der Heurismen

Bei der Kodierung der Heurismen zeigt sich, dass beide Kodierungen beim Vorkommen von Heurismen vollständig übereinstimmen, das bedeutet, dass bei den gleichen Aufgaben die gleichen Heurismen auf der gleichen Komplexitätsstufe kodiert wurden. Die Kodierungen unterscheiden sich hinsichtlich der genauen Grenzen der Kodierungen. Bei einigen Anwendungen wurden von den Kodierern Pausen kodiert, die der jeweils andere Kodierer nicht gesehen hat. Dies ist für die Beschreibung der Dauer der Anwendung von Heurismen jedoch bedeutend. Somit ergeben sich für die Kodierung der Heurismen die folgenden Übereinstimmungen (siehe Tabelle 8.8):

Tabelle 8.8: Übereinstimmungen bei der Kodierung der Heurismen

		Kodierer 2		
		kodiert	nicht kodiert	gesamt
Kodierer 1	kodiert	84	8	92
	nicht kodiert	11	0	11
	gesamt	95	8	103

Die prozentuale Übereinstimmung beträgt  $p = \frac{84}{103} \approx 0,82$ . Die Übereinstimmung bei der Kodierung der Heurismen ist in Ordnung.<sup>13</sup> Die meisten Unterschiede ergaben sich durch unterschiedlich gesetzte Grenzen bei der Kodierung der Heurismen. Das Auftreten von Pausen wurde in nahezu allen Fällen identisch kodiert. Die 0 in der Tabelle ergibt sich aus der oben beschriebenen Vorgehensweise. Wenn Kodierer 1 eine bestimmte Stelle nicht kodiert, wird im ersten Schritt nicht überprüft, ob die Kodierung von Kodierer 2 an dieser Stelle eine Übereinstimmung aufweist oder nicht. Wenn Kodierer 2 diese Stelle auch nicht kodiert, wird in Schritt 2 nicht überprüft, ob Kodierer 1 diese Stelle kodiert hat oder nicht. Somit gibt es bei der Auswertung keine Zählung von Stellen, die von beiden Kodierern nicht kodiert wurden.

<sup>13</sup>Kuckartz (2016) gibt selbst keine Grenzwerte für dieses Verfahren an. Aus diesem Grund richte ich mich nach den Werten, die Seidel, Prenzel und Kobarg (2005) ihrer Videostudie genutzt haben. Sie sprechen ab  $\kappa > 0,70$  von einer akzeptablen Übereinstimmung.

### Bestimmung der Intercoder-Übereinstimmung für die Kodierung der Problemlösephasen

Der obigen Beschreibung folgend wurden für beide Videos die Kodierungen der Phasen als Segmente verwendet. Für die Kodierung der Phasen ergibt sich die folgende Übereinstimmung nach Segmenten (siehe Tabelle 8.9):

Tabelle 8.9: Übereinstimmungen bei der Kodierung der Problemlösephasen

		Kodierer 2		
		kodiert	nicht kodiert	gesamt
Kodierer 1	kodiert	150	39	189
	nicht kodiert	27	0	27
	gesamt	177	39	216

Die prozentuale Übereinstimmung beträgt  $p = \frac{150}{216} \approx 0,69$ . Die Übereinstimmung zwischen den Kodierern liegt knapp unter dem Grenzwert von 0,70. Die Übereinstimmung ist aber auf Grund der Schwierigkeit, genaue Grenzen von Phasen zu bestimmen, noch akzeptabel.

### Bestimmung der Intercoder-Übereinstimmung für die Kodierung der Epistemic Games

Bei der Kodierung der *Epistemic Games* wird die *Intercoder-Übereinstimmung* nicht wie zuvor über die Grenzen bestimmt, sondern alleine über das Vorkommen in den Aufgaben. Der Grund liegt darin, dass die einzelnen Phasen der EGs teilweise sehr kurz waren und eine Dauer von wenigen Sekunden hatten. Deswegen konnte weder die Variante mit den Grenzen noch die mit der Überlappung angewendet werden. Das bedeutet, dass mit den Aufgaben die Kodiereinheiten vorab bestimmt werden konnten. Aus diesem Grund wurde hier Cohens  $\kappa$  als Maß für die Übereinstimmung gewählt. Dieses berücksichtigt, gegenüber der prozentualen Übereinstimmung, dass auch zufällig ein bestimmter Anteil an Übereinstimmung bei der Kodierung durch zwei Kodierer auftreten kann (Kuckartz, 2016). Cohens  $\kappa$  berechnet sich wie folgt:

$$\kappa = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e}$$

Hierbei ist  $p_o$  die beobachtete Übereinstimmung und  $p_e$  die Übereinstimmung, die beim Raten erwartet wird und es gilt:

$$p_o = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_{ii} \quad \text{und} \quad p_e = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^k x_{-i} x_{i-}$$

( $x_{-i}$  ist die Summe der i-ten Spalte und  $x_{i-}$  ist die Summe der i-ten Zeile). Für die beiden kodierten Videos ergibt sich die folgenden Übereinstimmungen bei der Kodierung der EGs (siehe Tabelle 8.10):

Tabelle 8.10: Übereinstimmungen bei der Kodierung der *Epistemic Games*  
Kodierer 2

		Kat. 1	Kat. 2	Kat. 3	Kat. 4	Kat. 5	Kat. 6	gesamt
Kodierer 1	Kat. 1	4						4
	Kat. 2		3					3
	Kat. 3	1		3				4
	Kat. 4				5			5
	Kat. 5					9	1	10
	Kat. 6	1			1	2	7	11
	gesamt	6	3	3	6	11	8	37

Kat. 1= Mapping Meaning to Mathematics, Kat. 2= Mapping Mathematics to Meaning, Kat. 3=Recursive Plug and Chug, Kat. 4 =Pictorial Analysis, Kat. 5=Physical Mechanism Game, Kat. 6= kein EG.

Aus der Tabelle ergibt sich für die Übereinstimmung:

$$\kappa = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} \approx \frac{0,84 - 0,20}{1 - 0,20} \approx 0,80$$

Die Übereinstimmung bei der Kodierung der EGs liegt deutlich über der Grenze von  $\kappa = 0,70$  und ist zufriedenstellend. Besonders fällt auf, dass der Hauptunterschied bei der Kodierung darin liegt, dass ein Kodierer bei einer Bearbeitung ein EG erkennt, wo der andere Kodierer keins erkennt. Dies ist insbesondere beim EG *Physical Mechanism Game* der Fall. Dies kann daran liegen, dass die Argumentation mit physikalischen Argumenten nicht immer als solche erkannt wird. Abschließend lässt sich sagen, dass alle drei Oberkategorien eine mindestens gute Übereinstimmung zwischen den beiden Kodierern aufweisen.

## 8.2 Quantitative Methoden

Nach der Beschreibung der Auswertung der qualitativen Daten wird nun die Auswertung der quantitativen Daten vorgestellt. Die *Dispositionen* (siehe Kapitel 6) werden vollständig durch quantitative Daten beschrieben und dienen der ergänzenden Erklärung der *situationsspezifischen Fähigkeiten*. Für die statistische Auswertung musste mit verschiedenen Verfahren die geringe Stichprobengröße zu allen drei Messzeitpunkten berücksichtigt werden. Zum einen bedingt dies die Nutzung nicht-parametrischer Verfahren und zum anderen werden dadurch die Höhe der Effekte und mögliche Signifikanzen beeinflusst. Die Forschungsfragen F1.2 und F1.3 (siehe Abschnitt 6.2.1) untersuchen die Zusammenhänge zwischen den *Dispositionen Inhaltswissen Mathematik*, *Inhaltswissen Physik* und *Vorstellungen zum Kraftkonzept* zu Beginn und zum Ende des ersten Studienjahres. Zusammenhänge werden in der vorliegenden Arbeit auf zwei verschiedene Weisen untersucht: Korrelationen, also ungerichtete Zusammenhänge, werden mit Hilfe bivariater Korrelationen bestimmt. Kausalitäten müssen immer inhaltlich begründet sein.

### 8.2.1 Bestimmung von Zusammenhängen zwischen Aspekten fachspezifischer Dispositionen

Zuerst werden die ungerichteten Zusammenhänge dargestellt. Von Interesse ist unter anderem, ob eine höhere Personenfähigkeit im Mathematiktest mit einer höheren Personenfähigkeit im Physiktest einhergeht, oder wie beide mit dem Ergebnis im *Force Concept Inventory* zusammenhängen. Der einfachste Weg zu untersuchen, ob zwei Variablen zusammenhängen, ist es zu analysieren, ob sie kovariieren (Field, Miles & Field, 2012). Die Kovarianz ist ein nicht-standardisiertes Maß für einen linearen Zusammenhang zwischen zwei Variablen (Bortz & Schuster, 2010). Sie berechnet sich wie folgt:

$$s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

Eine positive bzw. negative Kovarianz ergibt sich, wenn ein höherer Wert für  $x$  mit einem höheren bzw. niedrigeren Wert für  $y$  kovariiert. Die Kovarianz weist jedoch das Problem auf, dass sie abhängig von der Messskala der Variablen ist

(Field et al., 2012). Die Standardisierung der Kovarianz beseitigt dieses Problem und führt zur Korrelation. Die sogenannte Produkt-Moment-Korrelation ergibt sich aus der durch die beiden Standardabweichungen geteilten Kovarianz (Bortz & Schuster, 2010):

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)s_x s_y}$$

Mit Hilfe von Korrelationen lassen sich keine Kausalitäten zeigen (Field et al., 2012; Bortz & Schuster, 2010). Bei der Berechnung von Korrelationen zwischen zwei Variablen müssen verschiedene Annahmen überprüft bzw. Voraussetzungen erfüllt werden. Dies führt zu verschiedenen Korrelationskoeffizienten (Pearsons  $r$ , Spearmans  $r$ , Kendalls  $\tau$ ). Für die vorliegenden Daten wurde auf das nicht-parametrische Korrelationsmaß Kendalls  $\tau$  zurückgegriffen, da für die gemessenen Variablen keine Normalverteilung vorliegt, der Stichprobenumfang klein ist und gleiche Werte für verschiedene Studierende aufgetreten sind (vgl. Field et al., 2012). Für das so zu verwendende bindungskorrigierte Kendalls  $\tau$  gilt (Bortz, Lienert, Barskova, Leitner & Oesterreich, 2008, S. 297):

$$\tau = \frac{S}{\sqrt{[N \cdot (N-1)/2 - t] \cdot [N \cdot (N-1)/2 - W]}}$$

mit  $T = \sum_{i=1}^m t_i \cdot (t_i - 1)/2$  und  $W = \sum_{j=1}^v w_j \cdot (w_j - 1)/2$

Es gilt zudem, dass  $S = P - I$  ist, wobei  $P$  die Anzahl der Proversionen (zwei Rangwerte folgen in aufsteigender Ordnung) und  $I$  die Anzahl der Inversionen (zwei Rangwerte folgen in absteigender Ordnung) sind.  $m$  ist die Anzahl der Rangbindungen (gleiche Werte auf einer Variablen) in der ersten Variablen,  $v$  ist die Anzahl der Rangbindungen in der zweiten Variablen und  $t_i$  sowie  $w_j$  die jeweiligen Längen der Rangbindungen.<sup>14</sup>

### 8.2.2 Bestimmung von kausalen Zusammenhängen zwischen fachspezifischen Dispositionen

Für die Analyse von kausalen Zusammenhängen existiert eine Vielzahl von regressionsanalytischen Verfahren: (Multiple) Regressionen (MR), Pfadanalysen (PA) oder Strukturgleichungsmodelle (SGM). Während für MR einige Voraussetzungen erfüllt sein müssen, sind für PA weniger starke notwendig. In diesen

<sup>14</sup>Eine ausführliche Beschreibung findet sich bei Bortz et al. (2008).

wird zwischen allen Variablen ein linearer Zusammenhang angenommen (Bortz & Schuster, 2010), wodurch sie dazu geeignet sind, zuvor aufgestellte Kausalhypothesen, die in einem Pfaddiagramm dargestellt werden, zu überprüfen. Sie eignen sich jedoch nur zur Falsifizierung von Modellen und nicht zum Nachweis von Kausalitäten (Bortz & Schuster, 2010). PA haben gegenüber MR den Vorteil, dass mit ihnen gleichzeitig gerichtete und ungerichtete Zusammenhänge zwischen mehreren Variablen modelliert und dabei auch mehrere abhängige Variablen (endogene Variablen) im Modell berücksichtigt werden können. PA haben gegenüber MR noch einen weiteren Vorteil: mit ihnen können in einem Modell direkte und indirekte Zusammenhänge, wie zum Beispiel Mediationeffekte, modelliert werden.<sup>15</sup> Diese werden im folgenden Abschnitt kurz vorgestellt werden.

### 8.2.3 Moderator- und Mediatoreffekte

Bei der Untersuchung von Kausalzusammenhängen sind Moderator- und Mediatorvariablen von Bedeutung. Diese beeinflussen bzw. vermitteln Zusammenhänge zwischen unabhängigen und abhängigen Variablen. Eine Moderatorvariable beeinflusst die Richtung, die Stärke oder beide Größen eines Zusammenhangs zwischen einer unabhängigen und einer abhängigen Variablen (Baron & Kenny, 1986) und nicht direkt die Ausprägung der abhängigen Variablen (Urban & Mayerl, 2008). Moderatormodelle können auf unterschiedliche Weisen in einem Diagramm dargestellt werden (siehe Abbildung 8.5).

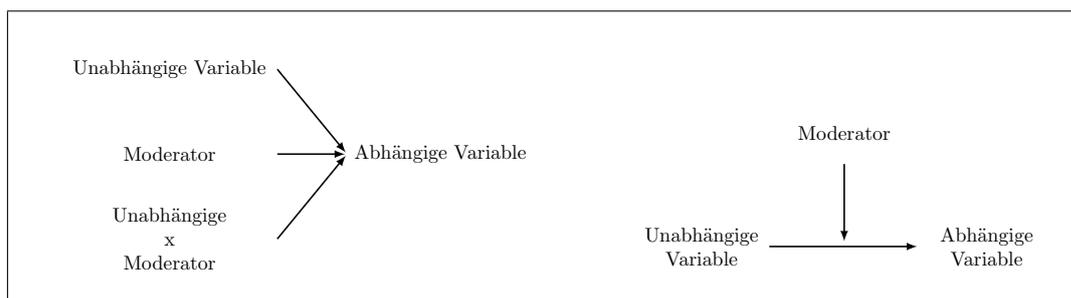


Abbildung 8.5: Zwei Darstellungen von Moderatormodellen (vgl. Baron & Kenny 1986, S. 1174 und Urban & Mayerl, 2008, S. 294; Übersetzung durch Autor).

<sup>15</sup>In der vorliegenden Arbeit wurden PA mit dem R-Paket *lavaan* (Rosseel, 2012) durchgeführt.

Eine Mediatorvariable interveniert bzw. unterbricht einen kausalen Effekt der unabhängigen Variablen auf die abhängige Variable (Urban & Mayerl, 2008). Baron und Kenny (1986) beschreiben die Funktion einer Mediatorvariablen im Gegensatz zu einer Moderatorvariablen wie folgt:

In general, a given variable may be said to function as a mediator to the extent that it accounts for the relation between the predictor and the criterion. Mediators explain how external physical events take on internal psychological significance. Whereas moderator variables specify when certain effects will hold, mediators speak how or why such effects occur. (S. 1176)

Es kann „zwischen einem *partiellen Mediatoreffekt* und einem *totalen Mediatoreffekt*“ (Urban & Mayerl, 2008, S. 303) unterschieden werden.

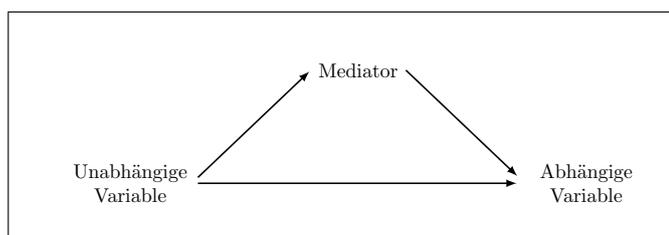


Abbildung 8.6: Beispieldiagramm für ein Mediatormodell (vgl. Baron & Kenny, 1986, S. 1176; Übersetzung durch Autor).

In der vorliegenden Arbeit werden bei der Analyse der kausalen Zusammenhänge zwischen dem mathematischen und dem physikalischen Inhaltswissen, den Vorstellungen zum Kraftbegriff sowie dem Vorwissen (in Form der Abitur- bzw. Klausurnoten) auch mögliche Mediator- bzw. Moderatoreffekte untersucht.

#### 8.2.4 Umgang mit fehlenden Werten

Rubin (1976) gibt drei verschiedene Typen von fehlenden Werten an: *Missing Completely at Random (MCAR)*, *Missing at Random (MAR)* und *Missing Not at Random (MNAR)*.<sup>16</sup> *MCAR* liegt beispielsweise vor, wenn Daten bei

<sup>16</sup>Eine detaillierte Beschreibung der drei Typen findet sich bei Lüdtke, Robitzsch, Trautwein und Köller (2007) oder Wirtz (2004).

der Eingabe verloren gehen, jedoch nicht, wenn fehlende Motivation zur Verweigerung von Antworten führt (Wirtz, 2004). *MAR* tritt auf, wenn „das Fehlen eines Wertes bei einer bestimmten Variablen zwar mit der Ausprägung auf anderen beobachteten Variablen zusammenhängt, aber nicht von der Ausprägung auf der Variablen selbst beeinflusst wird“ (Lüdtke et al., 2007, S. 105). Der dritte Typ ist *MNAR*, hier hängt das Fehlen der Werte „nicht nur von beobachteten, sondern zusätzlich von den unbeobachteten Variablenwerten selbst“ (Spieß, 2010, S. 119) ab. Ein Beispiel lautet: Fehlende Angaben zur Abiturnote sind dann *MNAR*, wenn die Beobachtungswahrscheinlichkeit der Abiturnote nicht nur vom Geschlecht, sondern zusätzlich von der Note selbst abhängt. In der vorliegenden Arbeit sind die fehlenden Werte vom Typ *MAR*, da das Fehlen in den Variablen der Personenfähigkeiten in Mathematik und Technischer Mechanik sowie dem Score des *FCI* zum dritten Messzeitpunkt nicht von den erhobenen Variablen selbst abhängt, sondern vermutlich von Faktoren wie beispielsweise Motivation oder Studienerfolg bzw. -abbruch. Ein Beleg dafür könnte sein, dass 15 Studierende bereits zum zweiten Termin fehlten, an dem kein Test vorgesehen war.

Mit fehlenden Werten kann auf unterschiedliche Weise verfahren werden. Lüdtke et al. (2007) sprechen von drei Verfahren: Klassische, *Imputationsbasierte* und *Modellbasierte Verfahren*. Die fehlenden Werte werden bei den durchgeführten Pfadanalysen über sogenannte modellbasierte Verfahren berücksichtigt. Ein spezielles Verfahren ist die *Full Information Maximum Likelihood (FIML)*-Methode, bei ihr „werden keine fehlenden Werte imputiert oder geschätzt, vielmehr wird eine Schätzung der Populationsparameter und ihrer Standardfehler auf der Basis der beobachteten Daten unter Annahme *MAR* vorgenommen“ (Lüdtke et al., 2007, S. 112). Diese Schätzung erfolgt so, dass der Parameter gewählt wird, welcher die Likelihoodfunktion maximiert, bei „dessen Verteilung die beobachteten Daten am plausibelsten sind“ (Cho & Leonhart, 2013, S. 275). Das bedeutet, dass die fehlenden Werte bestehen bleiben. Die Umsetzung lässt sich im R-Paket *lavaan* (Rosseel, 2012) durch den folgenden Befehl einfach realisieren:

```
sem(model, data = daten, missing = "fiml", estimator = "MLR")
```

Die robuste ML-Schätzung (MLR) mit Hilfe der Yuan-Bentler Korrektur führt bei der vorliegenden Situation, also bei fehlenden Werten und nicht normalver-

teilten Daten, zu akzeptablen Parameterschätzern und Standardfehlern (Enders, 2001).

Standardmäßig gibt es zwei Methoden, fehlende Werte bei Korrelationen zu berücksichtigen: Fallweiser oder paarweiser Ausschluss. Bei ersterem wird eine Person komplett aus allen Berechnungen entfernt, wenn bei einer Variablen ein fehlender Wert auftritt, bei letzterem werden alle verfügbaren Werte genutzt (Lüdtke et al., 2007; Wirtz, 2004). Beide Verfahren haben jedoch gravierende Nachteile: So kann der fallweise Ausschluss zu stark reduzierten Stichprobengrößen führen und der paarweise Ausschluss bei verschiedenen Korrelationen zu unterschiedlichen Stichprobengrößen, so dass unter Umständen verschiedene Gruppen untersucht werden (Lüdtke et al., 2007). In der vorliegenden Arbeit wird der paarweise Ausschluss verwendet. Um einen möglichen Bias durch verschiedene Stichprobengrößen erkennen zu können, wird für jede Korrelation die zugehörige Stichprobengröße angegeben.



# Kapitel 9

## Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die empirischen Ergebnisse zu den in Kapitel 6 dargestellten Forschungsfragen präsentiert. Die Ergebnisdarstellung folgt der logischen Struktur des Modells (siehe Abbildung 6.1). Eine Interpretation und Deutung der Ergebnisse erfolgt in Kapitel 10. So werden zuerst die Ergebnisse zu den Forschungsfragen mit Bezug auf *Dispositionen* dargestellt (9.1). Daran anschließend werden die Ergebnisse zu den Forschungsfragen bezüglich der *situationsspezifischen Fähigkeiten* (9.2) vorgestellt. Im letzten Abschnitt (9.3) werden die Ergebnisse der zwei vorherigen Abschnitte in Zusammenhang gesetzt

### 9.1 Dispositionen

*Dispositionen* bilden eine Grundlage für das Lösen mathematischer und physikalischer Probleme. Im Kontext des ersten Jahres im ingenieurwissenschaftlichen Studium sind insbesondere sowohl das Wissen zur Schulmathematik und Höheren Mathematik sowie zur Schulphysik und Technischen Mechanik als auch die *Vorstellungen zum Kraftkonzept* entscheidend. Die leitende Forschungsfrage lautet:

**F 1:** Über welche mathematischen und physikalisch-technischen *Dispositionen* verfügen Ingenieurstudierende im ersten Studienjahr und wie hängen diese zusammen?

Zur Beantwortung ist es von Bedeutung, dieses Wissen und die Überzeugungen und die Zusammenhänge zwischen ihnen zum ersten und dritten Messzeitpunkt zu untersuchen. So wird im folgenden Teil zuerst ein Überblick über die Personenfähigkeitsschätzer der Studierenden (vgl. 9.1.1) gegeben. Bei der Analyse der Strukturen der *Dispositionen* sind anschließend sowohl korrelative als auch kausale Zusammenhänge von Interesse (vgl. 8.2.1 und 8.2.2).

In alle Berechnungen fließen die Abiturnote bzw. die Noten aus den Mathematik- und Mechanikklausuren des ersten Studienjahres<sup>1</sup> als Variable des Vorwissens mit ein, da sich Schulnoten als valide Kriterien schulischer Leistung bewährt haben (vgl. Greiff & Fischer, 2013).

### 9.1.1 Mathematische und physikalische Kompetenzen der Studierenden

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse dargestellt, die eine Beantwortung der folgenden Forschungsfrage ermöglichen.

**F 1.1:** Über welche mathematischen und physikalisch-technischen *Dispositionen* verfügen Ingenieurstudierende im ersten Studienjahr?

Für die Untersuchung der *Dispositionen* wurden diese zu Beginn des Studiums und am Ende des ersten Studienjahres erfasst. Mit den Modellen unserer Projektpartnerinnen aus Kiel und Stuttgart war es möglich, jeder Teilnehmerin einen Schätzer für die Personenfähigkeit in Schulmathematik (Ma) bzw. Höherer Mathematik (HM) sowie in Schulphysik (Ph) bzw. Technischer Mechanik (TM) zuzuordnen. Eine Übersicht zu allen Schätzern findet sich in Tabelle 9.1. Die Personenfähigkeitsschätzer ergeben sich aus der IRT-Skalierung der eingesetzten Tests und liegen über alle vier Tests hinweg in einem Intervall von -3,52 bis 3,02; hierbei stellen hohe Werte ein hohes Wissen dar.

---

<sup>1</sup>Bei der Mathematiknote handelt es sich um das arithmetische Mittel der Mathematik Klausuren aus dem ersten und zweiten Semester. Für Mechanik wurde die Note aus der Veranstaltung Mechanik A bzw. Technische Mechanik 1 verwendet.

Tabelle 9.1: Personenfähigkeitsschätzer der Teilnehmerinnen zum ersten Messzeitpunkt in Schulmathematik (Ma) und -physik (Ph) und zum dritten Messzeitpunkt in Höherer Mathematik (HM) und Technischer Mechanik (TM) sowie Punktzahlen im FCI zu beiden Messzeitpunkten.

Studierende	MZP 1			MZP 3		
	Ma	Ph	FCI 1	HM	TM	FCI 3
S01	2,62	0,82	23	2,44	1,39	29
S02	0,41	-0,71	9	k.A.	k.A.	k.A.
S03	-0,28	-0,71	10	k.A.	k.A.	k.A.
S04	1,18	-0,18	14	1,01	0,20	23
S05	1,39	-0,18	16	-0,73	-0,45	20
S06	0,17	-1,00	9	-0,94	-0,12	12
S07	0,46	-1,32	9	2,05	0,84	17
S08	0,03	-1,32	13	-0,35	-0,34	10
S09	-0,48	-1,00	6	0,21	0,63	8
S10	3,02	0,82	23	2,22	0,54	29
S11	-0,66	-1,32	5	-0,38	-1,30	6
S12	-0,56	-1,00	8	-0,03	0,09	12
S13	0,49	-1,69	14	k.A.	k.A.	k.A.
S14	0,01	0,07	16	k.A.	k.A.	k.A.
S15	0,08	-1,32	7	k.A.	k.A.	k.A.
S16	0,82	-1,69	19	k.A.	k.A.	k.A.
S17	0,27	-0,18	15	k.A.	k.A.	k.A.
S18	-1,77	-1,00	10	k.A.	k.A.	k.A.
S19	-1,74	-3,48	4	-0,99	-1,51	6
S20	-1,24	-1,69	4	0,08	-2,45	7
S21	-3,52	-2,14	7	k.A.	k.A.	k.A.
S22	1,18	0,07	13	k.A.	k.A.	k.A.
S23	-2,18	-2,77	5	k.A.	k.A.	k.A.
S24	-1,36	-0,71	7	k.A.	k.A.	k.A.
S25	0,54	-1,00	13	k.A.	k.A.	k.A.
S26	-0,08	0,32	19	k.A.	k.A.	k.A.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Fortsetzung von der vorherigen Seite

Studierende	MZP 1			MZP 3		
	Ma	Ph	FCI 1	HM	TM	FCI 3
S27	-1,45	-1,69	2	k.A.	k.A.	k.A.
S28	-0,71	-1,32	7	-0,58	-1,52	6
S29	0,22	-0,18	10	-0,59	-0,74	12
S30	0,30	-0,18	17	0,53	0,56	17
S31	-1,05	-2,77	6	-0,81	-0,82	9
S32	0,79	-1,00	8	k.A.	k.A.	k.A.
S33	1,40	0,32	18	1,36	1,14	24
S34	-1,98	-1,32	4	-0,68	-0,72	8
S35	-1,19	-0,18	19	k.A.	k.A.	k.A.
S36	0,38	0,07	10	0,25	-0,50	14

In der Tabelle 9.1 zeigt sich, dass sich die Studierenden in den sechs Bereichen teilweise deutlich unterscheiden. Bei den Personenfähigkeitsschätzern für Schulmathematik ist der Abstand zwischen der schlechtesten Studentin *S21* mit einem Wert von  $\Theta = -3,52$  und der besten (*S10*) mit einem Wert von  $\Theta = 3,02$  besonders groß. Am dritten Messzeitpunkt sind die Abstände kleiner als zuvor und bei den Schätzern für Höhere Mathematik am geringsten ( $\Theta = -0,99$  und  $\Theta = 2,44$ ). Bei den Vorstellungen zum Kraftkonzept zeigen zwei Studierende bereits zu Beginn des Studiums hohe Werte und verbessern sich im Laufe des ersten Studienjahres (*S01* und *S10*). Andere Studierende (z. B. *S19* und *S20*) verbleiben dagegen auf einem sehr niedrigen Niveau. Insgesamt korrelieren die Ergebnisse des ersten Messzeitpunkts mit denen zum dritten Messzeitpunkt sowohl für Mathematik ( $\tau = 0,54$ ,  $p = 0,001$ ), für Physik ( $\tau = 0,50$ ,  $p = 0,004$ ) und insbesondere für die Vorstellungen zum Kraftkonzept ( $\tau = 0,76$ ,  $p < 0,001$ ).

### 9.1.2 Zusammenhänge zu Beginn des Studiums

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse dargestellt, die eine Beantwortung der folgenden Forschungsfrage ermöglichen

**F 1.2:** Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den *Dispositionen* Schulmathematik, Schulphysik und Vorstellungen zum Kraftkonzept zu Beginn des Studiums?

Der Bericht der Ergebnisse folgt der methodischen Vorgehensweise, bei der zuerst auf korrelative und anschließend auf kausale Zusammenhänge fokussiert wird. Zu Beginn des Studiums ergaben sich im Durchschnitt die folgenden Werte für die 36 Studierenden:

Schulmathematik (Ma)	$M_{Ma} = -0,13$ ( $SD_{Ma} = 1,33$ )
Schulphysik (Ph)	$M_{Ph} = -0,90$ ( $SD_{Ph} = 0,98$ )
Vorstellungen zum Kraftkonzept am ersten Messzeitpunkt ( $FCI_1$ )	$M_{FCI_1} = 11,08$ ( $SD_{FCI_1} = 5,63$ )

Die negativen Durchschnittswerte für die Personenfähigkeitsschätzer in Schulmathematik und Schulphysik zeigen, dass die beiden Tests für die Studierenden eher etwas zu schwer waren, wobei die Nähe zur 0 auf eine Passgenauigkeit zwischen Studierenden und Testanforderungen hinweist. Beim *FCI* haben die Studierenden im Durchschnitt nur ungefähr ein Drittel der möglichen Punkte (30) erreicht.

Als Grundlage der weiteren Berechnungen werden in einem ersten Schritt die drei *Dispositionen* und die Abiturnote (AbiN)<sup>2</sup> auf Normalverteilung hin überprüft. Dieser Test kann zum einen über grafische Vergleiche zwischen den Histogrammen der jeweiligen Verteilungen mit den dazugehörigen Normalverteilungen erfolgen oder mit Hilfe des Shapiro-Wilk-Tests. Im Fall des statistischen Verfahrens lautet die Nullhypothese:  $H_0$ : Für die *Dispositionen* (bzw. die Abiturnoten) liegt eine Normalverteilung vor. Die Alternativhypothese lautet:  $H_1$ : Für die *Dispositionen* (bzw. die Abiturnoten) liegt keine Normalverteilung vor. Die Ergebnisse des Shapiro-Wilk-Tests sind in Tabelle 9.2 dargestellt.

<sup>2</sup>Die Abiturnote wurde wie folgt kodiert : Note 1,0 - 1,5  $\rightarrow$  1; 1,6 - 2,2  $\rightarrow$  2; usw.

Tabelle 9.2: Ergebnisse des Shapiro-Wilk-Tests auf Normalverteilung der drei *Dispositionen* und der Abiturnote zu Beginn des ersten Semesters.

Disposition	Teststatistik $W$	Signifikanz $p$
Ma	0,977	0,64
Ph	0,961	0,21
$FCI_1$	0,948	0,08
AbiN	0,843	<0,01

Die Verteilungen der drei *Dispositionen* unterscheiden sich nicht signifikant von einer Normalverteilung. Die Nullhypothese wird nicht abgelehnt. Die Verteilung der Abiturnote hingegen ist signifikant nicht normalverteilt. Die Nullhypothese muss für diese Variable verworfen werden. Aus diesem Grund wird für die Berechnung der Korrelationen Kendalls  $\tau$  verwendet (siehe Tabelle 9.3).

Tabelle 9.3: Korrelationsmatrix mit Korrelationskoeffizienten Kendalls  $\tau$  und zugehörige Signifikanz zwischen den drei *Dispositionen* und der Abiturnote zu Beginn des ersten Semesters.

	Ma	Ph	$FCI_1$	AbiN
Ma	1			
Ph	0,44**	1		
$FCI_1$	0,52**	0,63**	1	
AbiN	-0,42**	-0,30*	-0,27*	1

\*\*  $p < 0,01$ , \*  $p < 0,05$

Die Korrelationen wurden mit paarweisem Ausschluss fehlender Werte berechnet. Für jede Korrelation wurden alle 36 Fälle eingeschlossen.

Alle *Dispositionen* korrelieren signifikant positiv miteinander (bzw. negativ mit der Abiturnote). Dies beschreibt explizit keine Kausalität.

Ausgehend von den Vorannahmen im Projekt KoM@ING (siehe Abschnitt 5.2.2) und der Korrelation zwischen den Vorstellungen zum Kraftkonzept und dem Wissen zur Schulphysik wird zur Beschreibung der Zusammenhänge zwischen den *Dispositionen* und der Abiturnote für die regressionsanalytische Untersuchung angenommen, dass das Wissen zur Schulmathematik, die Vorstellungen zum Kraftkonzept und die Abiturnote Prädiktoren des Wissens zur Schulphy-

sik darstellen. Für dieses Modell ergeben sich die folgenden Ergebnisse<sup>3</sup> (vgl. Abbildung 9.1):

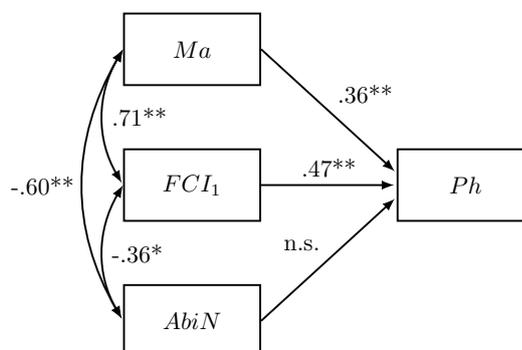


Abbildung 9.1: Pfadmodell zum Messzeitpunkt 1 mit den Prädiktorvariablen Mathematisches Inhaltswissen ( $Ma$ ), Vorstellungen zum Kraftkonzept ( $FCI_1$ ) und Abiturnote ( $AbiN$ ) und der Kriteriumsvariablen Physikalisches Inhaltswissen ( $Ph$ ).

Es zeigen sich signifikante kausale Zusammenhänge zwischen den Prädiktoren Mathematisches Inhaltswissen und Vorstellungen zum Kraftkonzept und dem Kriterium Physikalisches Inhaltswissen. Zudem zeigen sich signifikante Kovarianzen zwischen allen Prädiktorvariablen. Diese können somit nicht als unabhängig betrachtet werden. Stattdessen gibt es Anteile, die diese jeweils miteinander teilen, welche jedoch nicht in diesem Pfadmodell dargestellt werden.

Aufgrund der hohen Korrelationen (vgl. Tabelle 9.3) zwischen den Prädiktorvariablen werden im Folgenden zwei mögliche Mediatormodelle mit den Mediatorvariablen Abiturnote und Vorstellungen zum Kraftkonzept überprüft (vgl. Abschnitt 8.2.3). Im ersten Modell wird die Abiturnote auf ihre eventuelle Rolle als Mediator für die Prädiktorvariablen Wissen zur Schulmathematik und Vorstellungen zum Kraftkonzept hin getestet.

Der Pfad zwischen Abiturnote und dem Wissen zur Schulphysik ist nicht signi-

<sup>3</sup>Bei den Berechnungen der Pfadanalysen wurde als Fehlerschätzer der Full Information Maximum Likelihood verwendet (vgl. Abschnitt 8.2.4). Für die Schätzung der Koeffizienten wurde das Maximum Likelihood Robust-Verfahren bzw. die Yuan-Bentler Korrektur (vgl. Abschnitt 8.2.2) genutzt.

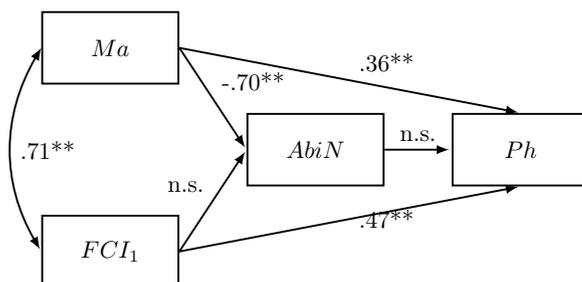


Abbildung 9.2: Erstes Mediatormodell zum Messzeitpunkt 1 mit den Prädiktorvariablen Wissen zur Schulmathematik ( $Ma$ ) und Vorstellungen zum Kraftkonzept am ersten Messzeitpunkt ( $FCI_1$ ), der Mediatorvariablen Abiturnote ( $AbiN$ ) und der Kriteriumsvariablen Wissen zur Schulphysik ( $Ph$ ).

fikant. Die Note stellt somit keine Mediatorvariable zwischen den Prädiktoren Wissen zur Schulmathematik und Vorstellungen zum Kraftkonzept und dem Kriterium Wissen zur Schulphysik dar. Aus diesem Grund wird im zweiten Mediatormodell die Variable Abiturnote ( $AbiN$ ) entfernt. Stattdessen wird dort die Vorstellung zum Kraftkonzept als Mediatorvariable zwischen dem Wissen zur Schulmathematik und zur Schulphysik eingesetzt (siehe Abbildung 9.3).

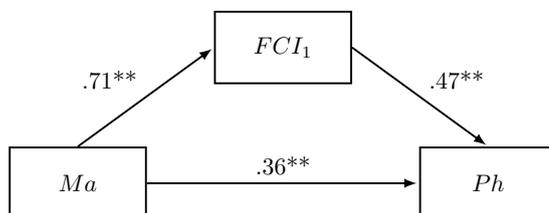


Abbildung 9.3: Zweites Mediatormodell zum Messzeitpunkt 1 mit der Prädiktorvariablen Wissen zur Schulmathematik ( $Ma$ ), der Mediatorvariablen Vorstellungen zum Kraftkonzept am ersten Messzeitpunkt ( $FCI_1$ ) und der Kriteriumsvariablen Wissen zur Schulphysik ( $Ph$ ).

Es zeigt sich eine signifikante partielle Mediation, da sowohl der direkte Vorhersagewert als auch der mediiierende Effekt bedeutsam sind. Die Vorstellungen zum Kraftkonzept vermitteln somit einen Teil des Effektes des Wissens zur Schulmathematik auf das Wissen zur Schulphysik.

Für die weiteren Untersuchungen wird das zweite Modell genutzt, da es gegenüber dem anderen Mediatormodell mit weniger Variablen auskommt, die alle signifikante Zusammenhänge aufweisen.

### 9.1.3 Zusammenhänge am Ende des ersten Studienjahres

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse dargestellt, die eine Beantwortung der folgenden Forschungsfrage ermöglichen

**F 1.3:** Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den *Dispositionen* Höhere Mathematik, Technische Mechanik und Vorstellungen zum Kraftkonzept zum Ende des ersten Studienjahres?

Bei der Untersuchung der Zusammenhänge am Ende des ersten Studienjahres (MZP 3) wird in gleicher Weise vorgegangen wie bei der Ergebnisdarstellung für den Beginn des Studiums. Zum Ende des ersten Studienjahres ergaben sich im Durchschnitt die folgenden Werte für die 19 Studierenden:

Höhere Mathematik (HM)	$M_{HM} = 0,21$ ( $SD_{HM} = 1,08$ )
Technische Mechanik (TM)	$M_{TM} = -0,28$ ( $SD_{Ph} = 0,98$ )
Vorstellungen zum Kraftkonzept am dritten Messzeitpunkt ( $FCI_3$ )	$M_{FCI_3} = 14,16$ ( $SD_{FCI_3} = 7,64$ )

Die beiden Durchschnittswerte für die Personenfähigkeitsschätzer zeigen, dass der Test zur Höheren Mathematik eher etwas zu leicht und bei der Technischen Mechanik eher etwas zu schwer für die Studierenden war. Die Nähe der beiden Mittelwerte zur 0 weist zugleich auf eine gute Passung zwischen Studierenden und Testanforderungen hin. Beim *FCI* haben die Studierenden im Durchschnitt nur fast die Hälfte der möglichen Punkte (30) erreicht. Gegenüber dem ersten Messzeitpunkt erreichten sie durchschnittlich 3,08 Punkte mehr.

In einem ersten Schritt wurden die drei *Dispositionen* und die Noten in den Veranstaltungen zur Mathematik (HMN) und Technischen Mechanik (TMN), welche als valide Kriterien für das im Studium erworbene Wissen gelten, auf Normalverteilung überprüft. Dieser Test wurde sowohl grafisch als auch mit

Hilfe des Shapiro-Wilk-Tests (vgl. 8.2.1) durchgeführt. Die Null- bzw. die Alternativhypothese werden festgelegt wie zuvor. Die Ergebnisse des Shapiro-Wilk-Tests sind in Tabelle 9.4 dargestellt.

Tabelle 9.4: Ergebnisse des Shapiro-Wilk-Tests auf Normalverteilung der drei *Dispositionen* und den Noten aus den Mathe- (HMN) und Mechanikklausuren (TMN) zum Ende des ersten Studienjahres.

Disposition	Teststatistik $W$	Signifikanz $p$
HM	0,874	0,02
TM	0,979	0,96
$FCI_3$	0,885	0,03
HMN	0,946	0,33
TMN	0,939	0,30

Die Verteilungen zur HM und zu den Vorstellungen zum Kraftkonzept unterscheiden sich signifikant von einer Normalverteilung. Die Nullhypothese muss verworfen werden. Aus diesem Grund wird für die Berechnung der Korrelationen Kendalls  $\tau$  verwendet (siehe Tabelle 9.5).

In der Korrelationsmatrix zeigen sich folgende Zusammenhänge: Alle *Dispositionen* (d.h. HM, TM und  $FCI_3$ ) korrelieren signifikant positiv miteinander (bzw. negativ mit der Abiturnote). Dies beschreibt explizit keine Kausalität. Zudem zeigt sich, dass je niedriger die Noten in der Mathematik (HMN) und der Mechanik (TMN) sind und je besser das jeweilige Bestehen der Klausur,

Tabelle 9.5: Korrelationsmatrix mit Korrelationskoeffizienten Kendalls  $\tau$  und zugehörige Signifikanz zwischen den drei *Dispositionen* und den Noten der Mathematik- und Mechanikklausuren zum Ende des ersten Studienjahres.

	HM	TM	$FCI_3$	HMN	TMN
HM	1				
TM	0,51**	1			
$FCI_3$	0,53**	0,62**	1		
HMN	-0,44*	-0,49**	-0,60**	1	
TMN	-0,45*	-0,53**	-0,25	0,26	1

\*\*  $p < 0,01$ , \*  $p < 0,05$

desto höher sind auch die vorhandene *Dispositionen*. Eine Ausnahme bildet die Variable Note Mechanik (TMN). Zwischen dieser und der Vorstellung zum Kraftkonzept und der Mathematiknote (TMN) existieren keine signifikanten Korrelationen.

Ausgehend von den Vorannahmen im Projekt KoM@ING (siehe Abschnitt 5.2.2) und den Zusammenhängen zwischen den Vorstellungen zum Kraftkonzept und den Leistungen in Physiktests (siehe Abschnitt 7.5.5) wird zur Beschreibung der Zusammenhänge zwischen den *Dispositionen* und den Noten aus dem ersten Studienjahr für die regressionsanalytische Untersuchung angenommen, dass die Höhere Mathematik, die Vorstellungen zum Kraftkonzept am dritten Messzeitpunkt und die Mathematik- und Mechaniknoten Prädiktoren der Technischen Mechanik darstellen (vgl. Abbildung 9.4).

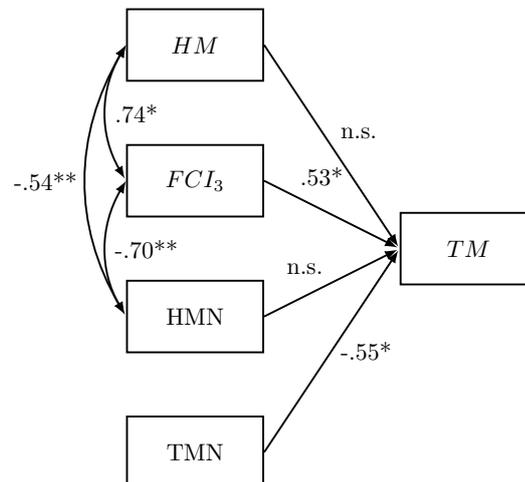


Abbildung 9.4: Pfadmodell zum Messzeitpunkt 3 mit den Prädiktorvariablen Höhere Mathematik ( $HM$ ), Vorstellungen zum Kraftkonzept am dritten Messzeitpunkt ( $FCI_3$ ), Mathematiknote ( $HMN$ ) und Mechaniknote ( $TMN$ ) und der Kriteriumsvariablen Technische Mechanik ( $TM$ ).

Die beiden mathematischen Prädiktoren (Höhere Mathematik und Mathematiknote) liefern keine signifikanten Vorhersagewerte für die Technische Mechanik, dagegen sind die Effekte der physikalischen Prädiktoren (Vorstellungen zum Kraftkonzept am dritten Messzeitpunkt und Mechaniknote) signifikant. Zudem existieren bedeutsame Zusammenhänge zwischen den Vorstellungen zum

Kraftkonzept am dritten Messzeitpunkt und den beiden mathematischen Prädiktoren.

Aufgrund der hohen Korrelationen zwischen den Prädiktorvariablen werden im Folgenden zwei mögliche Mediatormodelle mit den Mediatorvariablen Mathematiknote und Mechaniknote überprüft. Im ersten Modell wird die Mechaniknote, welche das erlernte Wissen aus den Veranstaltungen zur Mechanik repräsentiert, auf ihre eventuelle Rolle als Mediator für die Prädiktorvariablen Höhere Mathematik und die Kriteriumsvariable Technische Mechanik hin getestet.<sup>4</sup> Die Vorstellungen zum Kraftkonzept am dritten Messzeitpunkt wirken direkt auf die Kriteriumsvariable Technische Mechanik.

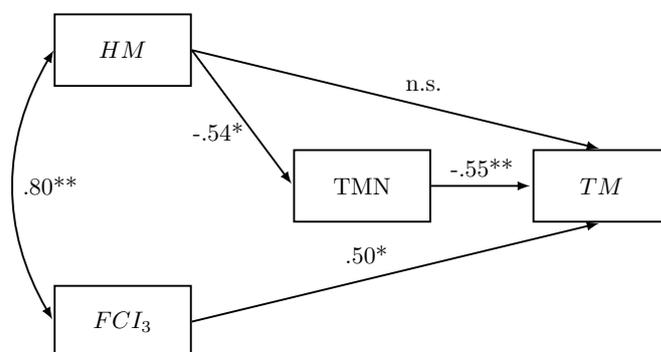


Abbildung 9.5: Mediatormodell zum Messzeitpunkt 3 mit den Prädiktorvariablen Höhere Mathematik ( $HM$ ) und Vorstellungen zum Kraftkonzept am dritten Messzeitpunkt ( $FCI_3$ ), der Mediatorvariablen Mechaniknote ( $TMN$ ) und der Kriteriumsvariablen Technische Mechanik ( $TM$ ).

Es zeigt sich, dass der Effekt der Höheren Mathematik vollständig durch die Mechaniknote mediiert wird. Es existiert kein signifikanter Effekt von der Höheren Mathematik zur Technischen Mechanik, sondern lediglich ein indirekter über die Mechaniknote ( $TMN$ ). Der direkte Effekt der Vorstellungen zum Kraftkonzept ist nun etwas geringer als im vorherigen Modell (vgl. Abbildung 9.4), jedoch weiterhin signifikant. Zudem zeigt sich auch hier der bedeutsame Zusammenhang zwischen der Höheren Mathematik und den Vorstellungen zum Kraftkonzept am dritten Messzeitpunkt.

<sup>4</sup>Aufgrund der nicht signifikanten Korrelation zwischen den Vorstellungen zum Kraftkonzept und der Mechaniknote wird zwischen diesen Variablen kein Mediatoreffekt modelliert.

In einem zweiten Mediatormodell wird aufgrund der hohen Korrelationen und dem damit verbundenen hohen Zusammenhang auch die Mathematiknote in das Modell aufgenommen. In diesem Modell stellen die Mechaniknote und die Vorstellungen zum Kraftkonzept am dritten Messzeitpunkt Mediatorvariable zwischen der Höheren Mathematik und der Technischen Mechanik dar. Die Vorstellungen zum Kraftkonzept am dritten Messzeitpunkt werden ebenfalls als Mediator zwischen Mathematiknote und der Technischen Mechanik modelliert. Hierfür ergibt sich das folgende Mediatormodell (vgl. Abbildung 9.6).

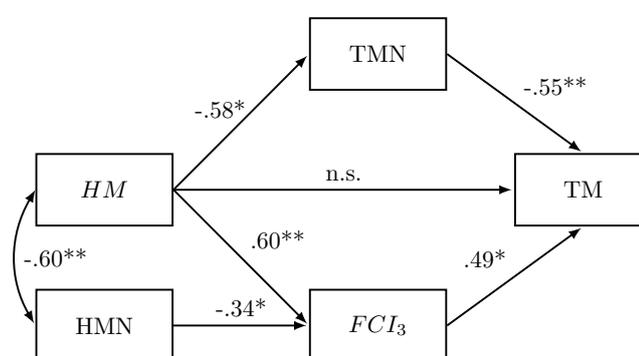


Abbildung 9.6: Mediatormodell zum Messzeitpunkt 3 mit den Prädiktorvariablen Höhere Mathematik ( $HM$ ) und Mathematiknote ( $HMN$ ), den beiden Mediatorvariablen Vorstellungen zum Kraftkonzept ( $FCI_3$ ) und Mechaniknote ( $TMN$ ) und der Kriteriumsvariablen Technische Mechanik ( $TM$ ).

Es zeigt sich, dass der Effekt der Höheren Mathematik auf die Technische Mechanik vollständig über die beiden Variablen Mechaniknote und Vorstellungen zum Kraftkonzept mediiert wird. Zudem ist auch der direkte Effekt der Mathematiknote auf die Technische Mechanik nicht signifikant. Dieser Effekt wird durch die Vorstellungen zum Kraftkonzept am dritten Messzeitpunkt vollständig mediiert.

Für die weiteren Untersuchungen wird das zweiten Modell genutzt, da es gegenüber dem ersten Mediatormodell mehr signifikante Pfade enthält, die zusätzliche Erklärungen bieten.

## 9.2 Situationspezifische Fähigkeiten

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse im Zusammenhang mit den *situationspezifischen Fähigkeiten* dargestellt. Die leitende Frage lautet:

**F 2:** Welche *situationspezifischen Fähigkeiten* nutzen Ingenieurstudierende bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben und mathemathikhaltigen Physikaufgaben im ersten Studienjahr im Hinblick auf das mathematische Problemlösen?

Zur Erfassung der *situationspezifischen Fähigkeiten* wurden die Gruppen- bzw. Einzelarbeiten videographiert und anschließend mit Hilfe der Software „Videograph“ analysiert (siehe Abschnitte 7.6 und 8.1.2). So ist es zum einen möglich, Auftreten und Dauer von Problemlösephasen und des Einsatzes von Heurismen sowie die zeitliche Abfolge bzw. Parallelität von Handlungen zu ermitteln, zum anderen sind Aussagen über die Komplexität und den Nutzen des Einsatzes möglich, die über eine Analyse der schriftlichen Produkte bei der Aufgabenbearbeitung hinausgehen. Das Kapitel ist wie folgt aufgebaut: Zuerst wird der Einsatz von Heurismen zu den drei Messzeitpunkten dargestellt, anschließend wird das Durchlaufen der Problemlösephasen thematisiert und abschließend wird die Nutzung von EGs zu allen drei Messzeitpunkten präsentiert (siehe Abbildung 9.7).

Kapitel 9.2.1 Heurismen	MZP1	MZP2	MZP3
Kapitel 9.2.2 Problemlösephasen	MZP1	MZP2	MZP3
Kapitel 9.2.3 Epistemic Games	MZP1	MZP2	MZP3

Abbildung 9.7: Advanced Organizer für die Ergebnispräsentation der situationspezifischen Fähigkeiten

### 9.2.1 Innere Struktur: Einsatz von Heurismen zu den drei Erhebungszeitpunkten

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse zur Verwendung von Heurismen beim Problemlösen an den drei Messzeitpunkten durch die Studierenden berichtet. Diese ermöglichen eine Antwort auf die folgende Forschungsfrage:

**F 2.1:** Welche Heurismen werden bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben im ersten Studienjahr genutzt?

Die Darstellung des Einsatzes der Heurismen erfolgt aufbauend auf der Stufenkodierung (vgl. Abschnitt 8.1.2) und wird mit Hilfe der Merkmale *Anzahl*, *Komplexität*, *Dauer* und *Erfolg* charakterisiert. Die Operationalisierung dieser und ein erklärendes Beispiel (siehe Abbildung 9.8) werden nachstehend erläutert.

**Anzahl:** Hierfür wird untersucht, wie viele unterscheidbare Heurismen bei der Bearbeitung einer Aufgabe von den Studierenden genutzt werden. Dabei werden Typen von Heurismen unterschieden (z. B. *Abbildung* und *Gleichung* oder *Analogieschluss* und *Systematisches Probieren*), und mehrere Heurismen der gleichen Stufe und des gleichen Typs in einer Aufgabebearbeitung zusammengeführt.

Beispiel Aufgabe A: Stellt sich der Sachverhalt wie in Beispielaufgabe A dar (siehe Abbildung 9.8), werden die beiden *Gleichungen* als eine Anwendung einer *Gleichung* gewertet, da beide auf der gleichen Stufe kodiert wurden. Die beiden *Abbildungen* werden als zwei Anwendungen des Hilfsmittels *Abbildung* gewertet, da verschiedene Stufen in einer Aufgabebearbeitung kodiert wurden.

**Komplexität:** Während durch das Merkmal *Anzahl* die Kardinalität des Einsatzes von Heurismen bei einer Aufgabe erfasst wird, beschreibt die *Komplexität* die Qualität dieses Einsatzes. Für diese Variable wird das Ergebnis des Merkmals *Anzahl* mit der Stufe der Heurismen gewichtet.

Beispiel Aufgabe B (siehe Abbildung 9.8): Aus der Auswertung des Merkmals *Anzahl* ergibt sich für Aufgabe 2 der Wert 3. Da die *Abbildung* und

eine *Gleichung* auf Stufe 2 kodiert wurden sowie eine *Gleichung* auf Stufe 1, ergibt sich für die Aufgabe die *Komplexität* 5 ( $2+2+1$ ).

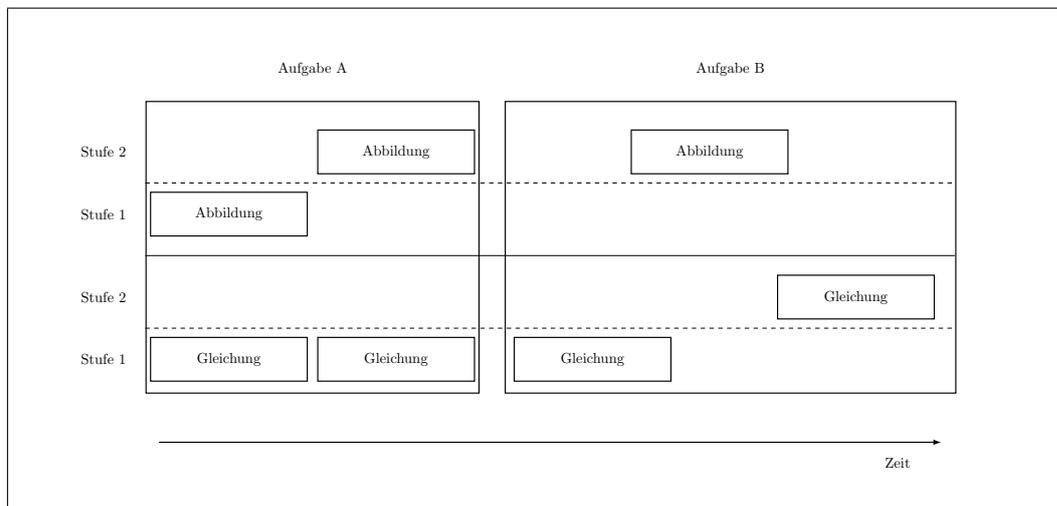


Abbildung 9.8: Beispiel zur Analyse des Einsatzes von Heurismen mit zeitlichem Verlauf.

**Dauer:** Für dieses Merkmal wird die gesamte Nutzungsdauer von Heurismen während der Bearbeitung berechnet und in Relation zur Bearbeitungszeit gesetzt. So ist auch ein Vergleich zwischen langsam und schnell arbeitenden Gruppen möglich. Beispiele: Gruppe C nutzt 45 Sekunden lang eine vorgegebene *Abbildung*. Insgesamt dauert die Bearbeitung der Aufgabe 60 Sekunden, dann wird die Dauer des Heurismus mit 0,75 bewertet. Gruppe D nutzt 5 Minuten und 30 Sekunden eine selbst aufgestellte *Gleichung*. Insgesamt dauert die Bearbeitung der Aufgabe 10 Minuten, dann wird die Dauer des Heurismus mit 0,55 bewertet. Dieses Merkmal lässt somit einen Schluss darüber zu, welcher Anteil der Bearbeitungszeit mit dem Einsatz mathematischer Verfahren verbracht wird.

**Erfolg:** Es wird untersucht, ob der Einsatz der Heurismen zu einer erfolgreichen Lösung des Problems führt. Dabei werden die Aufgaben entweder als richtig oder falsch gewertet, bei einigen Aufgaben sind auch Teilpunkte möglich. Es wird nicht berücksichtigt, welcher Heurismus zur Lösung führt. Der gesamte Prozess, alle nicht erfolgreichen Ansätze eingeschlossen,

sen, wird dahingehend gewertet, ob er zu einem korrekten Ergebnis führt oder nicht.

Die qualitativen Daten wurden für alle drei Messzeitpunkte getrennt ausgewertet. Für jeden Messzeitpunkt ist die Ergebnisdarstellung in drei Teile gegliedert: Zunächst wird der Einsatz der *Heuristischen Hilfsmittel* im Hinblick auf die vier Merkmale gemeinsam untersucht. Daran anschließend wird der Einsatz der zentralen Strategie *Vorwärtsarbeiten* detailliert beschrieben. Dies geschieht aus zwei Gründen, zum einen ist *Vorwärtsarbeiten* die am häufigsten verwendete Strategie und hier lassen sich Unterschiede zwischen den Gruppen sichtbar machen und zum anderen beschreibt *Vorwärtsarbeiten* in der hier vorgenommenen Kodierung auf Stufe 2, dass die Studierenden explizit einen Plan zur Lösung des Problems aufstellen und diesen verfolgen. Abschließend wird der Einsatz der übrigen Strategien und Prinzipien zusammenfassend dargestellt und im Hinblick auf die vier Merkmale untersucht. In jedem Teil (*Heuristische Hilfsmittel*, *Vorwärtsarbeiten* und weitere Strategien/Prinzipien) werden jeweils zwei Transkripte analysiert, eins einer erfolgreichen und eins einer nicht erfolgreichen Bearbeitung einer Aufgabe.<sup>5</sup> Diese Aufgabenbearbeitungen stehen stellvertretend für die weiteren erfolgreichen und nicht erfolgreichen Bearbeitungen und verdeutlichen exemplarisch, an welchen Stellen die nicht erfolgreichen Gruppen bzw. Studierenden scheitern.

### Messzeitpunkt 1: Heuristische Hilfsmittel

Kapitel 9.2.1 Heurismen	MZP1	MZP2	MZP3
Kapitel 9.2.2 Problemlösephasen	MZP1	MZP2	MZP3
Kapitel 9.2.3 Epistemic Games	MZP1	MZP2	MZP3

<sup>5</sup>Die Einteilung in leichte, mittelschwere und schwere Aufgaben in diesem und im nächsten Abschnitt ergibt sich aus den Itemschwierigkeiten der quantitativen Teilprojekte (siehe Tabellen 7.8 bis 7.11).

Der Forschungsfrage folgend werden die *Heuristischen Hilfsmittel* hinsichtlich der Häufigkeit und Dauer ihrer Nutzung sowie der jeweiligen Komplexität untersucht. Zum ersten Messzeitpunkt nutzten die Studierenden lediglich *Gleichungen* und *Abbildungen, Tabellen* setzten sie nicht ein. Tabelle 9.6 gibt einen Überblick zu diesen drei Merkmalen.

Tabelle 9.6: Nutzung von *Heuristischen Hilfsmitteln* am ersten Messzeitpunkt.

Gruppe	Anzahl Heurismen (Gleichung/Abbildung)	Dauer Heurismen (relativ) Median (MAD)	Komplexität Heurismen Median (MAD)
1	13 (5/8)	0,77 (0,30)	1 (0)
2	18 (10/8)	0,64 (0,15)	1 (0)
3	15 (7/8)	0,72 (0,13)	1 (0)
4	10 (5/5)	0,73 (0,30)	1 (0)
5	14 (7/7)	0,49 (0,13)	1 (0)
6	15 (7/8)	0,72 (0,28)	1 (0)
8	13 (8/5)	0,85 (0,16)	1 (0)
9	14 (8/6)	0,57 (0,30)	1 (0)
10	10 (3/7)	0,63 (0,22)	1 (0)
11	12 (5/7)	0,39 (0,13)	1,5 (0,74)
12	12 (5/7)	0,44 (0,24)	1 (0)
13	10 (4/6)	0,52 (0,27)	1 (0)
14	10 (4/6)	0,43 (0,24)	1 (0)
Median	13 (5/7)	0,63 (0,16)	1(0)
Min-Max	10-18 (3-10/5-8)	0,39-0,85	1-1,5

Der Median wurde als Maß für die zentrale Tendenz gewählt, da die relative Dauer der Heurismen eine linksschiefe Verteilung mit extremen Ausreißern nach oben bildet. Für die Komplexität der Heurismen wurde ebenfalls der Median gewählt, da es sich um eine ordinalskalierte Variable handelt (D. H. Rost, 2007).

MAD=Median Absolut Deviation, ein Maß für die Variabilität des Medians (Bortz & Schuster, 2010).

Zu erkennen ist, dass sich die Gruppen sowohl in der Anzahl der genutzten *Heuristischen Hilfsmittel* als auch in der relativen Dauer ihrer Nutzung unterscheiden. Während die Gruppen *4, 10, 13* und *14* bei 16 Aufgabenbearbeitungen nur zehn *Heuristische Hilfsmittel* nutzten, konnte bei Gruppe *2* 18-mal der Einsatz beobachtet werden. Zudem zeigt sich, dass acht Gruppen häufi-

ger eine *Abbildung* als eine *Gleichung* verwendeten. In diesem Zusammenhang fällt Gruppe 8 auf, die im Gegensatz dazu häufiger *Gleichungen* nutzte. Bei der relativen Einsatzdauer der Heurismen reicht die Spannweite von 39% der Bearbeitungszeit bei Gruppe 11, welche somit weniger als die Hälfte der Zeit *Heuristische Hilfsmittel* einsetzte, bis hin zu Gruppe 8, die 85% der Bearbeitungszeit darauf zurückgriff. Bei der Komplexität zeigt sich, dass alle Gruppen überwiegend Stufe 1 Heurismen, also vorgegebene *Abbildungen* und auswendig gelernte bzw. vorgegebene Formeln einsetzten.

Nach diesem allgemeinen Überblick zur Nutzung von *Heuristischen Hilfsmitteln* zum ersten Messzeitpunkt werden für ein tieferes Verständnis die Merkmale detaillierter auf Aufgaben- und Gruppenebene dargestellt. Die Häufigkeit der Nutzung der beiden *Heuristischen Hilfsmittel* *Abbildung* und *Gleichung* bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben ist in Abbildung 9.9 dargestellt. Die Häufigkeit wurde dabei wie zuvor beschrieben operationalisiert.

Die Darstellung zeigt, dass bei den ersten vier Aufgaben bei nahezu allen Gruppen die Nutzung eines Heurismus, nämlich *Abbildung*, beobachtet werden konnte. Des Weiteren fällt auf, dass die Studierenden in Aufgabe HM10 und den folgenden Aufgaben mehr Heurismen einsetzten als zuvor. Besonders für die Lösung von HM10, HM13, HM14 und HM15 nutzten die Studierenden mehr Heurismen, die gegenüber den leichten Aufgaben auch kombiniert wurden, um zu einer Lösung zu gelangen. Zudem benötigten die Gruppen hier komplexere Heurismen als bei den leichten Aufgaben. Die relative Bearbeitungsdauer variiert zwischen allen Aufgaben und Gruppen.

Bei den leichten Aufgaben (HM1, HM2, HM4, HM5, HM6 und HM7) hat der Einsatz von Heurismen keinen Einfluss auf die erfolgreiche Bearbeitung, Gruppen, die bei diesen Aufgaben keine Heurismen einsetzten, sind nicht weniger oder mehr erfolgreich als solche, die Heurismen einsetzten. Es zeigt sich besonders bei Aufgabe HM10, dass Gruppen, die einen kombinierten Einsatz von zwei unterschiedlichen Heurismen zeigten, die Aufgabe häufig richtig lösten. Sechs von sieben erfolgreichen Gruppen zeigten diesen kombinierten Einsatz, dabei nutzten die Studierenden zuerst eine *Abbildung*, um sich die Situation zu veranschaulichen und anschließend mit Hilfe einer *Gleichung* – zumeist eine auswendig gelernte trigonometrische Beziehung – den Winkel zu bestimmen.

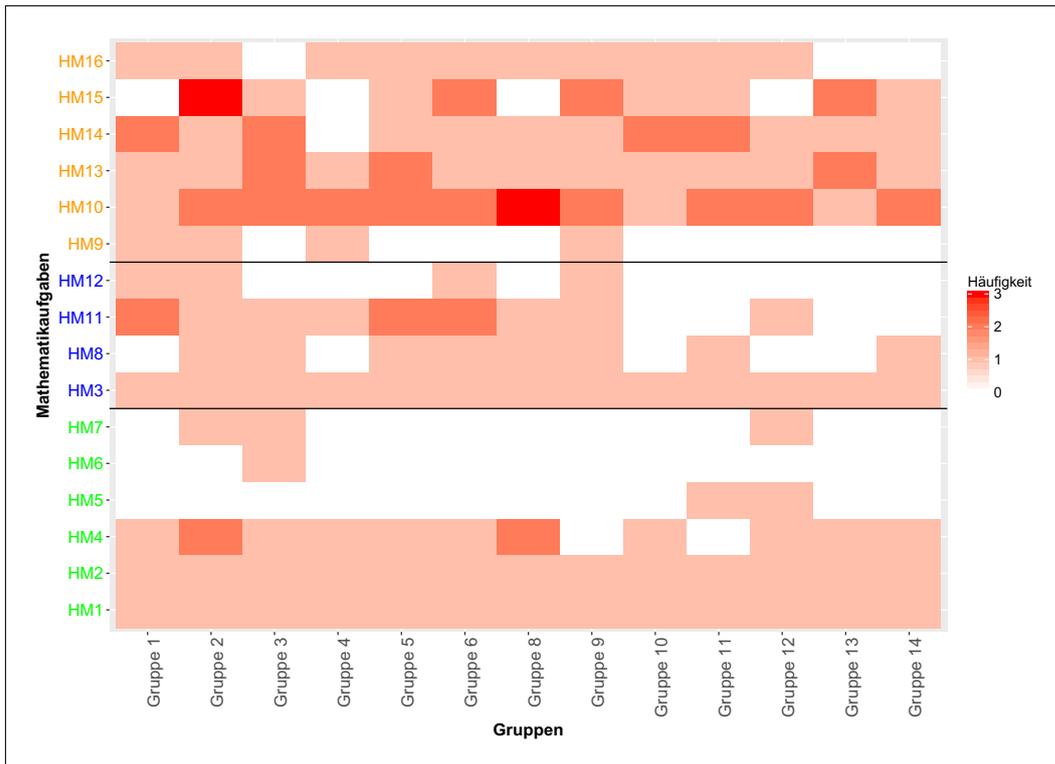


Abbildung 9.9: Heatmap zur Anzahl der *Heuristischen Hilfsmittel* am ersten Messzeitpunkt. Je dunkler das Rot, desto mehr Heuristen wurden von der jeweiligen Gruppe eingesetzt. Die Aufgaben sind nach Schwierigkeit sortiert (leicht=grün, mittel=blau, schwer=orange).

In den drei nicht erfolgreichen Gruppen versuchten die Studierenden ebenfalls eine selbst erstellte *Abbildung* mit einer *Gleichung* zu kombinieren, scheiterten aber an der richtigen Interpretation der Situation, was dazu führte, dass falsche Seitenlängen in die *Gleichung* eingesetzt wurden. Um diesen Unterschied zu illustrieren werden zwei Bearbeitungen, eine erfolgreiche und eine nicht erfolgreiche, mit Hilfe von Transkripten<sup>6</sup> einander gegenübergestellt und analysiert. In Aufgabe HM10 (siehe Abbildung 9.10), muss der Winkel eines Vektors zur  $x$ - $y$ -Ebene im  $\mathbb{R}^3$  berechnet werden. In der zweiten Teilaufgabe ist dann die Länge des Vektors zu bestimmen.

<sup>6</sup>Die Regeln für die Erstellung der Transkripte von Kuckartz (2016), die für diese Arbeit adaptiert wurden, befinden sich in Anhang C.

Es soll zu einem Skiort eine neue Zufahrt durch einen Tunnel gebaut werden.  
 In der Planungsskizze wird die Einfahrt im Tal in den Ursprung  $O(0/0/0)$  gelegt. Dabei bestimmen die ersten beiden Koordinaten die Bodenebene und die dritte Koordinate die Höhe.  
 Der Tunnel verläuft geradlinig und endet im Punkt  $P(10/\sqrt{200}/10)$ .

a) Wie groß ist der Steigungswinkel  $\alpha$  des geplanten Tunnels?

$\alpha =$ 

	°
--	---

b) Welche Länge  $l$  hat der geplante Tunnel?  
 (1 Längeneinheit entspricht 100 m.)

$l =$ 

	m
--	---

Abbildung 9.10: Aufgaben HM10 und HM11 aus der Gruppenarbeit am ersten Messzeitpunkt.

Die beiden Bearbeitungen zeigen exemplarisch für die anderen Gruppen, aber auch für die weiteren schweren Aufgaben, wie unterschiedlich erfolgreiche und nicht erfolgreiche Gruppen Heuristiken nutzten, um die Situation wahrzunehmen, sie zu interpretieren und anschließend Entscheidungen zu treffen.

Die Studierenden aus Gruppe 2 berechnen zuerst die zweite Teilaufgabe, in der die Länge des Tunnels bestimmt werden muss. Anschließend wechseln sie zur ersten Teilaufgabe. Nachdem sie die Aufgabe noch einmal gelesen haben, versuchen die Studierenden, die wahrgenommene Situation zu interpretieren:<sup>7</sup>

S06: Das heißt, wir haben einmal die Anfahrt und das ist das Ende des Tunnels, also so ungefähr (zeichnet eine *Abbildung* zur Veranschaulichung der Situation; siehe Abbildung 9.11). Ja, dann ist das  $\alpha$ , das ist das Ende.

S12: Ja.

S06: Okay (vervollständigt das Dreieck in der Zeichnung). [5]<sup>8</sup>

<sup>7</sup>Im Folgenden werden die Studierenden in den Transkripten der Gruppenarbeiten mit den zugehörigen Nummer benannt, die in Tabelle 9.1 stehen.

<sup>8</sup>Zahlen in eckigen Klammern bedeuten, dass eine Pause mit der entsprechenden Dauer auftritt. Bei Pausen unter vier Sekunden wird die Dauer durch Punkte dargestellt.

S12: Gab es da nicht so eine Formel mit Sinus oder Kosinus? [.] Oder vertue ich mich da?

S07: Also der Steigungswinkel ist vom Ursprung.

S12: Ja, hier (zeigt auf die *Abbildung*).

S07: Bis *E*.

S12: Ja, das ist der Punkt, also *P* ist das. Dann müsste das hier der Winkel sein (fährt mit dem Finger den Bogen bei der Winkelbezeichnung entlang).

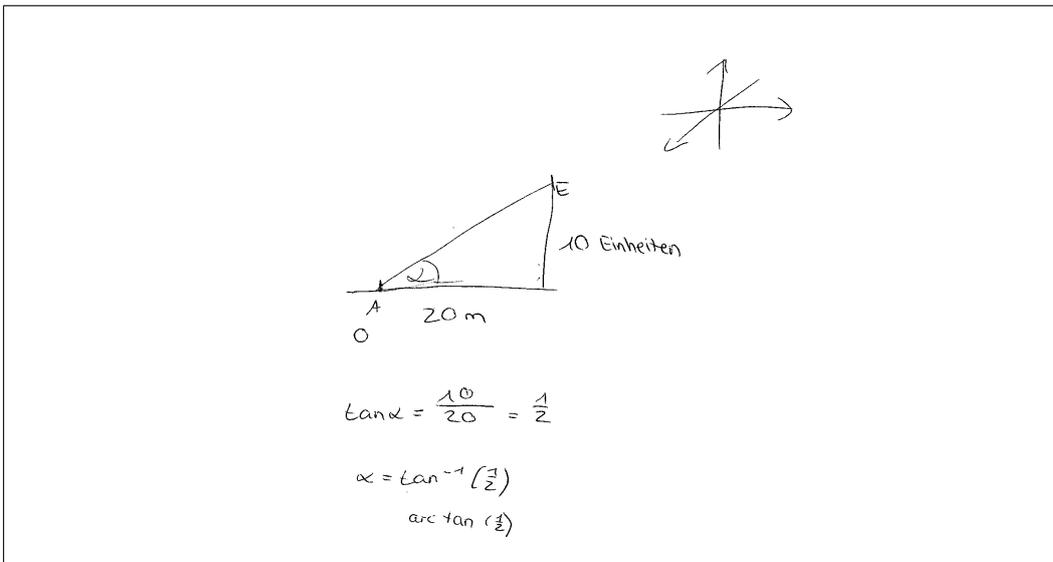


Abbildung 9.11: Eine nicht erfolgreich genutzte Abbildung für die Bearbeitung von Aufgabe HM10 durch Gruppe 2 am ersten Messzeitpunkt.

S06: Das heißt, wir könnten eigentlich, wenn wir die Koordinaten, das ist ja  $x_3$  (zeichnet das dreidimensionale Koordinatensystem). Dass wir dann sagen, wir können uns erst einmal nicht in diese Richtung (zeigt in die  $x_1$ -Richtung), sondern wirklich nur in die Höhe, also ist ja die hier (zeigt auf die kurze Kathete in dem rechtwinkligen Dreieck).

S12: 10 wäre das doch dann.

S06: Also die 10 Meter oder die 10 Einheiten?

S12: Ja.

S06: Und in eine Richtung und dann? [.]

S12: Und hier ist der Punkt 0 (zeigt auf den Punkt 0 im rechtwinkligen Dreieck).

S07: Wir haben das (zeigt auf die lange Kathete im rechtwinkligen Dreieck).

S06: Ja.

S12: Stimmt, 20 Meter. Im Endeffekt [...] müssten das auch 10 Meter sein.

Die Studierenden entscheiden sich, den Winkel mit Hilfe der Tangens-Beziehung ( $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ ) zu berechnen. Sie setzen die bekannten Werte ein und erhalten nach Umformungen  $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ . Bei diesem Ausdruck bleiben sie stehen, da sie ihn nicht weiter ausrechnen können.

Die verwendete *Abbildung* reduzierte das Problem auf eine zweidimensionale Situation, wodurch eine Vereinfachung stattfand. Jedoch war die Gruppe anschließend nicht in der Lage, mit Hilfe der *Abbildung* die Situation richtig zu interpretieren. Aus diesem Grund traf sie die falsche Entscheidung, die Länge des Tunnels als Ankathete des Steigungswinkels  $\alpha$  zu verwenden.

Wie eine förderliche Kombination der beiden Heuristiken mit zeitgleich korrekter Wahrnehmung und Interpretation abläuft, zeigt die Bearbeitung der Aufgabe durch die Gruppe 5. Nachdem die Studierenden die Aufgabenstellung gelesen haben, startet ein Student mit einem Vorschlag.

S10: Ich habe da den Pythagoras irgendwie benutzt, um die Seiten auszurechnen.

S02: Ich glaube, ich muss das erst einmal kurz nachrechnen.

S10: Also, wir haben ja einen Punkt im Tal, oder?

S08: Ja, der ist Punkt  $O$ .

S10: Genau,  $(0, 0, 0)$  haben wir und dann geht irgendwo schräg nach oben zum Punkt  $10, \sqrt{200}, 10$  eine Gerade. Dann müssen wir ja Dreiecke bilden können irgendwie, eins ist hier und eins hier (zeichnet zwei Dreiecke ein. Eins in der  $x$ - $y$ -Ebene und ein zweites im Raum, siehe Abbildung 9.12).

S08: Ist ja dreidimensional.

S10: Richtig. Und wenn wir, wir müssen erst das eine Dreieck und dann das andere, dann haben wir hier die Diagonale (zeigt auf die gemeinsame Seite der beiden Dreiecke) und die Höhe, und dann könnten wir doch den Winkel ausrechnen mit Sinus oder Kosinus [...], wenn wir das Dreieck haben, das da drin steckt.

Anschließend erläutert der Student den beiden anderen noch einmal genau sein geplantes Vorgehen, dabei interpretieren die Studenten gemeinsam die Problemsituation und diskutieren einen möglichen Ansatz mit Hilfe der *Abbildung*.

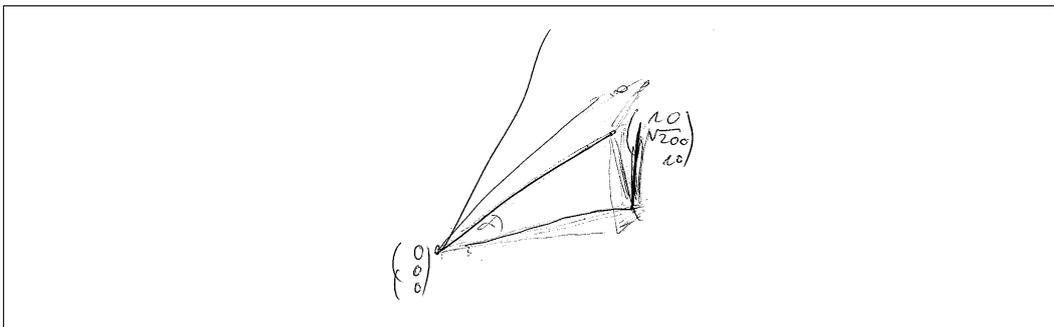


Abbildung 9.12: Eine erfolgreich genutzte Abbildung für die Bearbeitung von Aufgabe HM10 von Gruppe 5 am ersten Messzeitpunkt.

Sie entscheiden, den Winkel mit Hilfe des Tangens zu berechnen. Nachdem sie die beiden Katheten bestimmt haben, wechseln die Studenten in die zweite Teilaufgabe und berechnen die Länge des Tunnels. Anschließend nehmen sie die vorherige Aufgabe wieder auf.

S10: Der Steigungswinkel, da müssen wir die? [.]

S08: Da nehmen wir einfach den Tangens.

S02: Die Länge ist jetzt die auf dem Boden?

S08: Nein, die hier muss es sein (zeigt auf die Seite im Dreieck, die den Punkt  $O$  mit dem Punkt  $P$  verbindet). Das ist ja länger, wenn du, hier du fährst ja den Berg hoch mit dem Auto, das ist ja länger als die Strecke am Boden.

S10: Der Tangens ist ja  $G$  durch  $A$ . Also Gegenkathete ist das Ding (zeigt auf die senkrechte Seite im Dreieck), das ist 10 durch Wurzel 300, oder? Wurzel 300 oder Wurzel 400? Wurzel 300, das ist ja die Strecke.

S08: Ja, richtig. Wurzel 300 ist die Hypotenuse.

S10: Wir können ja auch den Sinus benutzen.

Die Studierenden entscheiden sich für den Sinus und erhalten  $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ . Sie sind sich sicher, dass dann  $\alpha = 30^\circ$  gilt und notieren das als Lösung.

Die Studierenden aus Gruppe 5 übersetzten die mathematische Situation mit Hilfe einer situationsgetreuen *Abbildung* und konnten diese zielgerichtet interpretieren. So erkannten sie, dass sie die Ankathete zum Winkel  $\alpha$  erst durch eine weitere Anwendung des Satzes des Pythagoras ermitteln mussten. Die Frage von Student *S02*, wo sich die zuvor errechnete Länge in der Zeichnung

befindet, zeigt, dass auch hier eine Unsicherheit vorlag. Nachdem die Studierenden die Situation im Folgenden gemeinsam richtig interpretieren konnten, trafen sie auf dieser Grundlage die Entscheidung, die Sinus-Beziehung für die Berechnung des Winkels zu nutzen.

Diese beiden Bearbeitungen verdeutlichen, wie unterschiedlich Heurismen eingesetzt werden konnten und wie diese dann die Aufgabenbearbeitung unterstützten. Während Gruppe 2 eine vereinfachte *Abbildung* der Situation erstellte, in der die Dimensionalität der Situation nicht enthalten war, bemühten sich die Studenten aus Gruppe 5 um eine detaillierte *Abbildung*, die neben den Koordinaten der bekannten Punkte auch die Dimensionalität explizit berücksichtigte. Beide Herangehensweisen waren für die Bearbeitung der Aufgabe sinnvoll, die Nutzung einer detaillierteren *Abbildung* hätte Gruppe 2 in die Lage versetzen können, den Fehler, nämlich die Länge des Tunnels als Ankathete zu nutzen, zu erkennen und zu vermeiden.

Die Aufgabenbearbeitungen zeigen zudem die oben erwähnte Situation, dass bei den schwierigen Aufgaben Heurismen mit höherer Komplexität notwendig sind, um die Aufgaben zu bearbeiten. So mussten die Studierenden beider Gruppen zuerst eine situationsgetreue *Abbildung* der mathematischen Situation anfertigen (Stufe 2-Heurismus), um die Aufgabe weiter bearbeiten zu können. Anschließend konnten sie mit einer bekannten Tangens- bzw. Sinus-Beziehung (Stufe 1-Heurismus) die fehlende Größe bestimmen. Es war also eine Kombination verschiedener Heurismen auf verschiedenen Stufen notwendig.

### **Messzeitpunkt 1: Vorwärtsarbeiten**

Nach der Darstellung der Beobachtungen zu den *Heuristischen Hilfsmitteln* folgt nun der Einsatz der Heuristischen Strategie *Vorwärtsarbeiten*. Die Nutzung dieser Strategie zeigt sich in einem planvollen Vorgehen der jeweiligen Gruppe und ist entweder als längeres Abarbeiten einer Kalkül- bzw. Rechenaufgabe oder als ein Durchlaufen längerer Bearbeitungsprozesse mit Teilschritten zu beobachten.

Es ist zu erkennen, dass der Einsatz des *Vorwärtsarbeitens* zwischen den Aufgaben und Gruppen variiert (vgl. Abbildung 9.13). Während einige Gruppen bereits bei leichten und mittelschweren Aufgaben ein planvolles Vorgehen zeigten, welches aber immer auf Stufe 1 stattfand, war dies bei anderen Gruppen

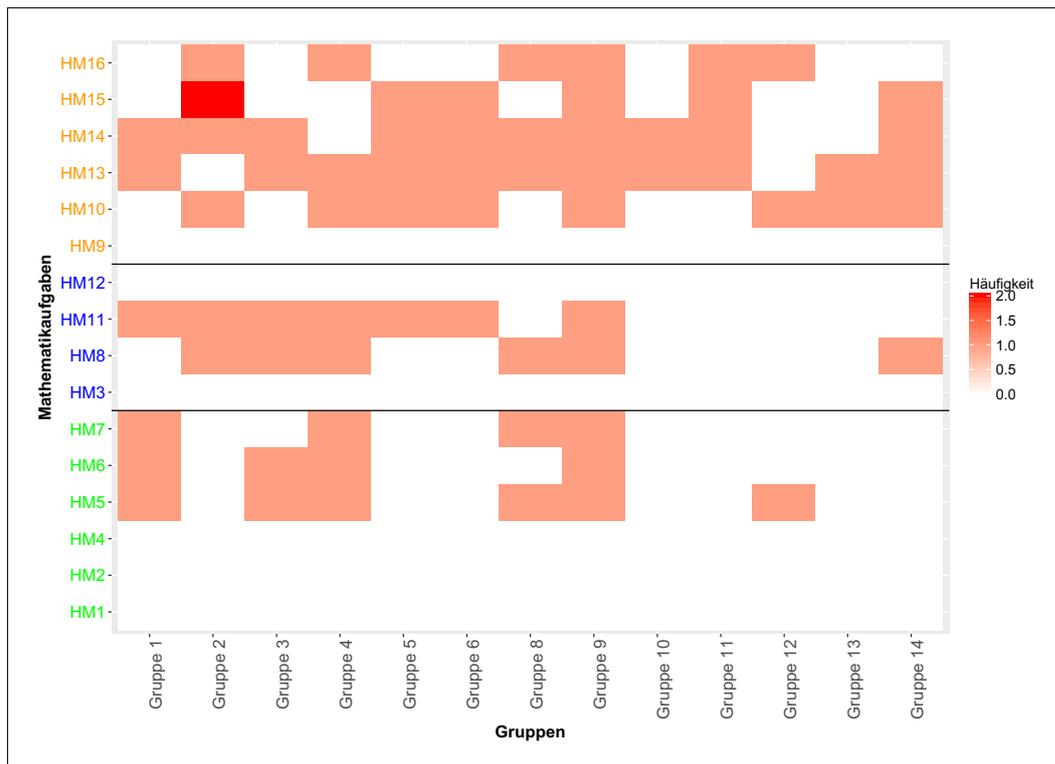


Abbildung 9.13: Heatmap zur Anzahl des *Vorwärtsarbeitens* am ersten Messzeitpunkt. Je dunkler das Rot, desto häufiger wurde von der jeweiligen Gruppe *Vorwärtsarbeiten* eingesetzt. Die Aufgaben sind nach Schwierigkeit sortiert (leicht=grün, mittel=blau, schwer=orange).

erst bei den schweren Aufgaben zu beobachten. Nur bei den schweren Aufgaben HM10, HM13, HM14 und HM15 sowie bei der mittelschweren Aufgabe HM11 konnte das komplexere *Vorwärtsarbeiten* auf Stufe 2 beobachtet werden. Die unterschiedliche Nutzungsdauer der Strategie zeigt, dass einige Gruppen sehr schnell zu einem Plan fanden (relative Nutzungsdauer nahe 1), den sie bis zum Ende durchführten, während andere Gruppen viel Zeit für das Finden eines Plans benötigten bzw. bereits Zyklen in der Bearbeitung durchliefen, bevor sie in der Lage waren, einen endgültigen Plan für eine (vermeintliche) Lösung zu entwickeln. Zudem zeigt sich bei den vier schweren Aufgaben, dass ohne ein planvolles Vorgehen nur in einer von 18 Bearbeitungen eine richtige Lösung erreicht wurde. Sobald die Gruppen bei den schweren Aufgaben zumindest eine planvolle Berechnung (Stufe 1) durchführten, erzielten sie in 20 von

34 Bearbeitungen eine (teilweise) richtige Lösung. Scheiterten die Studierenden trotz planvollen Vorgehens, so waren fehlende mathematische Fertigkeiten bzw. fehlendes mathematisches Wissen sowie falsche Interpretationen von Zwischenergebnissen der Grund. Um die unterschiedlichen Fehler<sup>9</sup> zu illustrieren, werden im Folgenden, statt einer erfolgreichen und einer nicht-erfolgreichen Bearbeitung, zwei nicht-erfolgreiche Bearbeitungen präsentiert. Zwei Bearbeitungen der Aufgabe HM14 (siehe Abbildung 9.14), in welcher der Abstand eines Punktes zu einer Ebene bestimmt werden musste, zeigen exemplarisch diese beiden Schwierigkeiten.

<p>Gegeben ist die Ebene <math>E : 6x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -12</math> und der Punkt <math>A(3/6/4)</math>.</p> <p>a) Bestimmen Sie den Abstand <math>d</math> des Punktes von der Ebene!</p> <p style="margin-left: 40px;"><math>d =</math> <input style="width: 400px; height: 20px; border: 1px solid black;" type="text"/></p>	
--	--

Abbildung 9.14: Aufgabe HM14 aus der Gruppenarbeit am ersten Messzeitpunkt.

Gruppe 10 startet mit dem Lesen der Aufgabe. Ein Student schlägt einen Ansatz vor.

S31: Das geht doch mit dem Lotfußpunkt-Verfahren.

S19: Lotfußpunkt-Verfahren?

S31: Naja, da ist die Ebene und da ist der Punkt und dann müssen wir eine Gerade bilden von hier bis hier (zeichnet die Situation auf, siehe Abbildung 9.15).

S19: Ja.

S31: Dann von der Geraden den Schnittpunkt erst einmal und dann das und das (zeigt auf den Schnittpunkt und den Punkt  $A$  in der *Abbildung*) mit der  $[\cdot]$  abziehen davon.

---

<sup>9</sup>Bei dieser Bearbeitung, wie auch bei weiteren, finden sich bestimmte Fehler-Typen, die bei vielen Gruppen bzw. Studierenden beobachtet werden konnten. Auf diese wird erst in der Diskussion näher eingegangen, da dies nicht Fokus der vorliegenden Arbeit ist.

$$6 \cdot (6s+3) + 6 \cdot (6s+6) - 3 \cdot (-3s+4)$$

$$36s+18 + 36s+36 + 9s - 12 =$$

$$81s - 12 - 18 - 36 =$$

$$81s = \cancel{30} - 81$$

$$s = \frac{-42}{81} = \frac{30}{81}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$6 \cdot \left(-\frac{42}{81}\right) + 6 \cdot \left(-\frac{42}{81}\right) - 3 \cdot \left(-\frac{42}{81}\right)$$

Abbildung 9.15: Nicht erfolgreich genutzte Abbildung und Gleichung für die Bearbeitung von Aufgabe HM14 von Gruppe 10 am ersten Messzeitpunkt.

Anschließend stellen die Studenten die Geradengleichung aus dem Ortsvektor zum Punkt  $A$  und dem Normalenvektor als Richtungsvektor auf. Die Geradengleichung setzen sie dann in die Ebenengleichung ein. Am Ende der Berechnung erhalten die Studenten  $s = -\frac{42}{81}$ . Dieses Zwischenergebnis missinterpretieren die Studenten als den gesuchten Schnittpunkt und versuchen diesen in die Ebenengleichung einzusetzen (richtig wäre, diesen Parameterwert in die Geradengleichung einzusetzen). Nachdem die Studenten einen Rechenfehler bemerken, korrigieren sie ihre Rechnung, schaffen es aber anschließend nicht, den Abstand korrekt zu berechnen.

Die beiden Studenten visualisierten die Situation mit einer *Abbildung*, mit deren Hilfe sie die Problemsituation richtig interpretieren und so einen Plan für die Lösung aufstellen konnten. Anschließend waren sie in der Lage, die Situation in eine mathematische *Gleichung* zu überführen. Durch einen Rechenfehler, den die beiden Studenten nicht beheben konnten, gelangten sie zu einem falschen Zwischenergebnis. An dieser Stelle waren sie nicht in der Lage, die *Gleichung* richtig zu interpretieren und trafen deswegen die falsche Entscheidung, ihr Ergebnis für  $s$  in die Ebenengleichung einzusetzen.

Als Beispiel für fehlendes mathematisches Wissen als Grund für die nicht er-

folgreiche Bearbeitung einer Aufgabe ist die Bearbeitung der Aufgabe HM14 durch die Gruppe 14 anzusehen. Die Gruppe liest zuerst die Aufgabenstellung.

S29: Hat man da nicht etwas mit dem Normalenvektor gemacht?

S35: Mhm.

S29: Mit dem  $(6, 6, -3)$ ? [...] Den dann minus den Punkt genommen [6] und da dann Pythagoras?

S35: Das kann gut sein. [.] Ich habe das Thema gehasst.

S29: Wir machen das mal einfach so. (Der Student beginnt mit der Berechnung, siehe Abbildung 9.16).

Gegeben ist die Ebene  $E : 6x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -12$  und der Punkt  $A(3/6/4)$ .

a) Bestimmen Sie den Abstand  $d$  des Punktes von der Ebene!

$$d = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} = \sqrt{3^2 + (-7)^2} = \sqrt{58}$$

Abbildung 9.16: Eine nicht erfolgreich genutzte Gleichung für die Bearbeitung von Aufgabe HM14 durch Gruppe 14 am ersten Messzeitpunkt.

Zwar konnte ein *Vorwärtsarbeiten* in Form einer längeren Rechenaufgabe bei der Bearbeitung beobachtet werden, jedoch zeigte sich, dass die Studenten kaum über das mathematische Wissen verfügten, das sie für diese Aufgabe benötigten. Zudem haben die Studenten auch keine *Abbildung* genutzt, um die Wahrnehmung und Interpretation der Situation zu unterstützen. So zeigt sich, dass ein planvolles Vorgehen in Form einer längeren Berechnung bei der Bearbeitung schwerer Aufgaben allein nicht ausreichend ist, um zu einer Lösung zu gelangen.

### Messzeitpunkt 1: Sonstige Heuristische Strategien und Prinzipien

Insgesamt konnten am ersten Messzeitpunkt nur wenige weitere *Heuristische Strategien* und *Prinzipien* beobachtet werden (siehe Tabelle 9.7). Auffällig ist, dass Gruppe 8 bei fünf Aufgabenbearbeitungen die Strategie *Analogieschluss* nutzte, dabei nahm sie jeweils Bezug zur vorangegangenen Testbearbeitung und versuchte, Ansätze durch Rückbezüge zu entwickeln.

Tabelle 9.7: Überblick zur Nutzung von weiteren *Heuristischen Strategien* und *Heuristischen Prinzipien* am ersten Messzeitpunkt.

Aufgabe	Systematisches Probieren	Analogie- schluss	Extremal- prinzip	Symmetrie- prinzip
HM1	0	1	0	0
HM3	0	1	0	0
HM4	0	1	0	0
HM8	4	0	0	0
HM10	0	1	0	0
HM12	0	2	0	0
HM13	5	2	6	0
HM14	0	2	0	0
HM15	1	0	0	2
HM16	1	0	0	0
Summe	11	10	6	2

Einige Aufgaben forderten von den Studierenden verstärkt den Einsatz weiterer *Heuristischer Strategien* und *Heuristischer Prinzipien*. Besonders fällt dies bei Aufgabe HM13 (siehe Abbildung 9.17) auf, bei der *Systematisches Probieren* und das *Extremalprinzip* am häufigsten beobachtet werden konnten. Während bei den übrigen Aufgaben nur ein Typ einer weiteren Strategie oder eines weiteren Prinzips von den Studierenden eingesetzt wurde, wurden hier beide Heurismen ähnlich oft eingesetzt. Die Verwendung der beiden Heurismen erfolgte aus zwei unterschiedlichen Ansätzen heraus, welche die Studierenden für die Lösung wählten. Dies wird durch die beiden folgenden Transkripte verdeutlicht.

Eine Studentin aus Gruppe 2 schlägt kurz nach dem Lesen der Aufgabe ein mögliches Vorgehen vor.

S12: Wir sollten vielleicht erst einmal  $f$  von 5 bilden und  $f'$  auch, also beides.

[.]

S06: Ja, okay.  $f$  von 5? Dann setzen wir einfach überall 5 ein.

S12: Genau.

Die Studierenden berechnen anschließend  $f(5)$  (siehe Abbildung 9.16).

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = 2 \cdot e^{-0,5x} \cdot (x^2 - 5).$$

Die Funktion hat ein lokales Maximum im Punkt  $P(5/f(5))$ .

Zeigen Sie, dass die Funktion für  $x > 5$  keinen größeren Funktionswert besitzt als im Punkt  $P$ .

Abbildung 9.17: Aufgabe HM13 aus der Gruppenarbeit am ersten Messzeitpunkt.

S12: Dann haben wir unseren Punkt. [8]

S07: Gibt es einen größeren Funktionswert? [...]

S12: Dann müssen wir für  $x$  eine größere Zahl einsetzen, 6 zum Beispiel,  $f$  von 6 dann.

Die Studierenden berechnen  $f(6)$ .

S06: Ist das jetzt kein größerer Funktionswert? [.]

S12: Nein, weil der Exponent kleiner wird.

S06: Ja, gut. [4] Das heißt, das ist schon mal bewiesen.

S07: Ist das so? [..]

S12: Ja, wenn der Exponent kleiner wird, dann kann die Funktion doch nicht größer werden, oder? [..] Was soll man da sonst machen? Steht ja nur „Zeigen Sie, dass kein größerer Funktionswert existiert“. Wir könnten noch einen zweiten nehmen, 7 oder so.

Die Studierenden berechnen  $f(7)$ . Anschließend diskutieren sie darüber, ob es noch einen größeren Funktionswert geben kann. Mit dem Verlauf der Funktion  $e^x$  argumentieren Sie, dass alle nach  $f(5)$  folgenden Funktionswerte kleiner sein müssen, da der Exponent der Funktion schneller kleiner wird als der Faktor vor dem  $e$  anwächst. Wahrnehmung und Interpretation der Problemsituation durch die Gruppe beschränken sich lokal auf den Hochpunkt und dessen Umgebung. Eine globale Analyse des Problems findet nicht statt.

Im zweiten Ansatz, der insgesamt von sechs Gruppen gewählt wurde, wird das *Extremalprinzip* genutzt, um das Verhalten der Funktion zu untersuchen. Bei der Bearbeitung der Aufgabe durch Gruppe 9 wurde dieser Ansatz schon früh vorgeschlagen, kurz nachdem die Studierenden die Aufgabenstellung gelesen haben.

$$\begin{aligned}
 f(5) &= 2 \cdot e^{-0,5 \cdot 5} \cdot (5^2 - 5) \\
 &= 2 \cdot e^{-2,5} \cdot (20) \\
 &= \underline{40 \cdot e^{-2,5}} \\
 f(6) &= 2 \cdot e^{-0,5 \cdot 6} \cdot (6^2 - 5) \\
 &= 2 \cdot e^{-3} \cdot (31) \\
 &= \underline{62 \cdot e^{-3}} \\
 f(7) &= 2 \cdot e^{-0,5 \cdot 7} \cdot (7^2 - 5) \\
 &= 2 \cdot e^{-3,5} \cdot (42) \\
 &= \underline{84 \cdot e^{-3,5}}
 \end{aligned}$$

Abbildung 9.18: Von Gruppe 2 am ersten Messzeitpunkt genutzte Gleichungen für die Bearbeitung von Aufgabe HM13.

S22: Ich glaube, da müssen wir den Grenzwert bilden, oder?

S04: Ja.

Nach einer kurzen Diskussion, ob die Funktion einen weiteren Hochpunkt hat, beginnen die Studierenden damit, den Grenzwert zu bestimmen (siehe Abbildung 9.19).

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-0,5x} \cdot (x^2 - 5) &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-0,5x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 5) \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-0,5x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{1}{e^{0,5x}} = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - 5 &= \infty \\
 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-0,5x} \cdot (x^2 - 5) &= 0
 \end{aligned}$$

Abbildung 9.19: Von Gruppe 9 am ersten Messzeitpunkt genutzte Gleichungen für die Bearbeitung von Aufgabe HM13.

Nachdem die Studierenden die erste Zeile geschrieben haben, diskutieren sie, wie der Grenzwert aussehen könnte. Sie entscheiden sich dafür, die beiden

Grenzwerte einzeln zu betrachten.

S22: 0 mal Unendlich zu schreiben sieht komisch aus, deswegen würde ich das mit einer geschweiften Klammer darunter machen.

S30: Ich würde jetzt einfach splitten. Dass du erst den hier (zeigt auf den Ausdruck  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2e^{-0,5x}$ ), dann mit diesem Pfeil gegen 0.

Nachdem die Studierenden die einzelnen Grenzwerte berechnet und daraus den resultierenden Grenzwert bestimmt haben, entscheiden sie sich, ihr Vorgehen schriftlich detailliert zu beschreiben. Gleichzeitig greifen sie auf, dass die Funktion nur ein Maximum haben kann.

Die beiden Vorgehensweisen zeigen, wie unterschiedlich eine Situation durch Studierende wahrgenommen wurde. Während Gruppe 2 sich auf eine lokale Betrachtung des Problems beschränkte und das Verhalten der Funktion in der Nähe des Hochpunktes untersuchte, nahm Gruppe 9 eine globalere Sichtweise ein und konnte das Problem in seiner Gesamtheit untersuchen. Die folgenden Interpretationen beruhten auf den beiden unterschiedlichen Sichtweisen und ermöglichten es den Gruppen, unterschiedliche Entscheidungen zu treffen.

### **Messzeitpunkt 1: Zusammenfassung**

Zusammenfassend zeigen sich bei der Bearbeitung der Aufgaben durch die Studierenden die folgenden Beobachtungen: Schwere Aufgaben erforderten von den Studierenden häufiger den kombinierten Einsatz von Heurismen. Gruppen, die sich hier auf den Einsatz eines einzigen Heurismus beschränkten, waren seltener erfolgreich. Planvolles und strukturiertes Vorgehen war besonders bei den schweren Aufgaben zu beobachten und dort auch wichtig für eine erfolgreiche Lösung. Sowohl bei den *Hilfsmitteln* als auch beim *Vorwärtsarbeiten* konnte ein komplexer Einsatz in solchen Situationen beobachtet werden, in denen die Studierenden mehr Unterstützung bei der Wahrnehmung der Problemsituation, der Interpretation von Informationen oder Teilergebnissen sowie beim Treffen von Entscheidungen, wie sie vorgehen müssen, benötigten. Weitere *Heuristische Strategien* und *Prinzipien* konnten nur selten beobachtet werden. Während die beiden Strategien *Systematisches Probieren* und *Analogieschluss* bei wenigen unterschiedlichen Aufgabenbearbeitungen von den Studierenden genutzt wurden, waren die Nutzung des *Symmetrieprinzips* und des *Extremalprinzips* jeweils auf eine Aufgabe beschränkt.

## Messzeitpunkt 2: Heuristische Hilfsmittel

Kapitel 9.2.1 Heurismen	MZP1	MZP2	MZP3
Kapitel 9.2.2 Problemlösephasen	MZP1	MZP2	MZP3
Kapitel 9.2.3 Epistemic Games	MZP1	MZP2	MZP3

Am zweiten Messzeitpunkt nahmen noch acht Gruppen an der Studie teil. Die Aufnahmen der Gruppe 7 sind nur teilweise vorhanden, aus diesem Grund wird diese Gruppe bei der Ergebnisdarstellung nicht berücksichtigt. In Tabelle 9.8 sind die zusammenfassenden Statistiken zu diesem Messzeitpunkt dargestellt. Auch zu diesem Messzeitpunkt haben die Studierenden das *Heuristische Hilfsmittel Tabelle* nicht eingesetzt.

Zum zweiten Messzeitpunkt variiert die Anzahl der eingesetzten *Heuristischen Hilfsmittel* zwischen den Gruppen. Während bei den Gruppen 12 und 14 jeweils 19 Heurismen beobachtet werden konnten, sind dies bei den Gruppen 1 und 5 nur jeweils 10 Heurismen. Auffällig ist zudem, dass nur die Gruppen 1 und 2 seltener *Gleichungen* nutzten als *Abbildungen*, alle anderen Gruppen setzten häufiger *Gleichungen* als *Abbildungen* ein. Gruppe 10 nutzte fast doppelt so oft eine *Gleichung* als eine *Abbildung* zur Unterstützung und Gruppe 12 mehr als doppelt so oft. Zudem zeigt sich, dass alle Gruppen im Durchschnitt mindestens die Hälfte der Zeit mit Heurismen arbeiteten. Besonders die Gruppen 10 und 9, mit 80% bzw. 85%, nutzten einen hohen Anteil ihrer Bearbeitungszeit, um Heurismen einzusetzen. Wie bereits zum ersten Messzeitpunkt verwendeten die meisten Gruppen überwiegend Heurismen auf Stufe 1, lediglich Gruppe 2 setzte durchschnittlich Heurismen der Stufe 2 ein.

Nach diesem allgemeinen Überblick zur Nutzung von *Heuristischen Hilfsmitteln* am zweiten Messzeitpunkt werden für ein tieferes Verständnis die Bearbeitungen detaillierter auf Aufgaben- und Gruppenebene dargestellt. Die Häufigkeit der Nutzung der beiden *Heuristischen Hilfsmittel* *Abbildung* und *Gleichung* bei der Bearbeitungen von Mathematikaufgaben am zweiten Messzeitpunkt ist in Abbildung 9.20 dargestellt.

Tabelle 9.8: Überblick zur Nutzung von *Heuristischen Hilfsmitteln* am zweiten Messzeitpunkt.

Gruppe	Anzahl Heurismen (Gleichung/Abbildung)	Dauer Heurismen (relativ)	Komplexität Heurismen
		Median (MAD)	Median (MAD)
1	10 (4/6)	0,61 (0,19)	1 (0)
2	16 (7/9)	0,70 (0,24)	2 (1,48)
5	10 (6/4)	0,50 (0,24)	1 (0)
6	11 (6/5)	0,71 (0,29)	1 (0)
9	15 (9/6)	0,85 (0,13)	1 (0)
10	19 (12/7)	0,80 (0,45)	1 (0)
12	17 (12/5)	0,71 (0,21)	1 (0)
14	19 (11/8)	0,66 (0,35)	1 (0)
Median	15,5 (8/6)	0,61 (0,10)	1(0)
Min-Max	10-19 (4-12/4-9)	0,50-0,85	1-2

Der Median wurde als Maß für die zentrale Tendenz gewählt, da die relative Dauer der Heurismen eine linksschiefe Verteilung mit extremen Ausreißern nach oben bildet. Für die Komplexität der Heurismen wurde ebenfalls der Median gewählt, da es sich um eine ordinalskalierte Variable handelt (D. H. Rost, 2007).

MAD=Median Absolut Deviation, ein Maß für die Variabilität des Medians (Bortz & Schuster, 2010).

Die Heatmap zeigt, dass bei den ersten vier Aufgaben von nahezu allen Gruppen mindestens ein *Heuristisches Hilfsmittel* bei der Lösung eingesetzt wurde. Dabei handelte es sich, wie zuvor beim ersten Messzeitpunkt, um *Abbildungen*. Der weitere Heurismus bei der Bearbeitung Aufgabe HM4 durch die Gruppen 2 und 10 war eine *Gleichung*. In diesen Fällen stellten die Gruppen explizit eine *Gleichung* auf und berechneten diese, um die zurückgelegte Strecke zu bestimmen. Wie beim ersten Messzeitpunkt zeigt sich auch hier, dass ab Aufgabe HM10, mehr und komplexere Heurismen durch die Studierenden eingesetzt wurden als bei den Aufgaben zuvor. Dies ist insbesondere bei den Aufga-

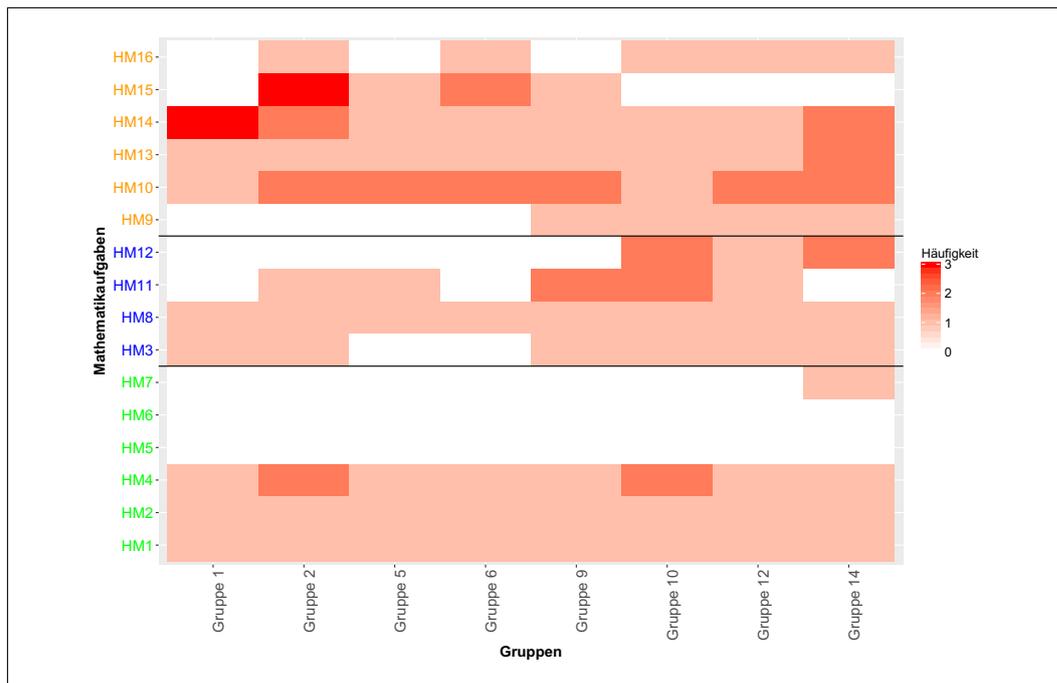


Abbildung 9.20: Heatmap zur Anzahl von *Heuristischen Hilfsmitteln* am zweiten Messzeitpunkt. Je dunkler das Rot, desto mehr Heurismen wurden in der jeweiligen Gruppe eingesetzt. Die Aufgaben sind nach Schwierigkeit sortiert (leicht=grün, mittel=blau, schwer=orange).

ben HM10, HM11, HM13 und HM14 auffällig.<sup>10</sup> Bei diesen Aufgaben konnten zudem Heurismen der Stufe 2 beobachtet werden, während bei den übrigen Aufgaben hauptsächlich Heurismen der Stufe 1, also vorgegebene *Abbildungen* und vorgegebene oder auswendig gelernte *Gleichungen* von den Studierenden genutzt wurden.

Bei Aufgabe HM14 (siehe Abbildung 9.14) fällt auf, dass die Gruppen, die mehr Heurismen als eine *Gleichung* nutzten, in zwei von drei Fällen nicht erfolgreich waren. Dagegen waren die Gruppen, die nur einen Heurismus, eine selbst aufgestellte *Gleichung*, nutzten, erfolgreich. Diese Gruppen konnten die Situation ohne weitere Unterstützung verstehen und waren anschließend in der Lage, die Situation zu interpretieren und Entscheidungen für eine *Gleichung*

<sup>10</sup>Bei Gruppe 1 bzw. Gruppe 2 wurden bei den Aufgaben *HM14* bzw. *HM15* drei Heurismen gezählt, da jeweils ein Heurismus in verschiedener Komplexität eingesetzt wurde (siehe Abbildung 9.8).

zur Berechnung des Abstandes zu treffen. Die beiden nächsten Transkripte stellen die Bearbeitung der nicht erfolgreichen Gruppe 1 mit mehreren eingesetzten Heuristiken der Bearbeitung der erfolgreichen Gruppe 9, die nur eine *Gleichung* nutzte, gegenüber.

Die Studentinnen der Gruppe 1 lesen zuerst die Aufgabenstellung. Eine Studentin trägt alle Informationen zusammen.

S11: Wenn wir die Ebene haben (schreibt:  $E : 6x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -12$ ) und einen Punkt 3, 6 und 4. [...]

S23: Der Normalenvektor ist (6, 6, 3).

S11: Genau, warte, warte (zeichnet eine *Abbildung* der Ebene mit einer senkrechten Gerade). Das ist ja so und der Normalenvektor ist

S23: (6, 6, 3).

S11: (6, 6, 3)

S23: Genau, jetzt die (zeigt auf den Punkt  $P$  und den Normalenvektor) kreuzen.

S11: Kreuzen? [...] (unv.) Ja, wenn du meinst und dann Betrag davon oder wie?

Anschließend besprechen die beiden Studentinnen die Idee kurz und Studentin *S11* macht einen neuen Vorschlag.

S11: Ich hätte die Gerade aufgestellt und die in die Ebene eingetragen. Dann hätte ich einen Punkt in der Ebene (zeigt auf die *Abbildung*), dann hätte ich den Punkt minus den Punkt gerechnet. Dann hätte ich einen Vektor und dann hätte ich die Norm davon berechnet. Ich weiß das gar nicht mit dem Kreuzen. Wir gehen auf die sichere Weise.

Nach einer kurzen Diskussion berechnen die beiden Studentinnen den Abstand auf die vorgeschlagene Weise. Aufgrund eines Fehlers beim Normalenvektor, die Studentinnen haben statt  $-3$  nur  $3$  verwendet, kommen sie zu einem Ergebnis, das ihnen nicht richtig erscheint, daher versuchen sie über den Betrag des Vektorproduktes den Abstand zu berechnen, was jedoch nicht gelingt.

Das zweite Transkript zeigt eine erfolgreiche Bearbeitung der Aufgabe. Nachdem die Studenten der Gruppe 9 die Aufgabenstellung gelesen haben, überlegen sie, wie sie vorgehen können.

S04: Einsetzen? Nein, kann man nicht.

S30: Der Normalenvektor ist ja das, was

S04: Kann man ja die Hesse'sche Normalform [.] machen.

S30: Nicht mit mir.

S04: Nicht?

Student *S04* beginnt mit dem Aufstellen der *Gleichung* (siehe Abbildung 9.21).

S04: (6, 6, -3) ist der Normalenvektor

S30: Minus der Punkt aus der Ebene.

S04: Nein, da musst du den mit

S30: Minus der gegebene Punkt. Doch, du hast das Minus den gegebenen Punkt in Klammern.

S04: Nein, Normalvektor mal dem und dann Aufpunkt minus den Nullpunkt. [.] Der Aufpunkt der Ebene wäre zum Beispiel (1, 1, 0).

S30: Ähm.

S04: Ja, (-1, -1, 0). Minus  $x_1, x_2, x_3$ .

S30: Ja, den hast du doch gegeben.

S04: Ja, ich mach das erst mal so und den noch normieren.

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} * \left( \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = d$$

$$\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1-3 \\ -1-6 \\ 0-4 \end{pmatrix} = d$$

$$\frac{1}{9} \cdot ((6 \cdot (-4)) + 6 \cdot (-7) + (-3 \cdot -4)) = d$$

Abbildung 9.21: Erfolgreich genutzte Gleichungen von Gruppe 9 für die Bearbeitung von Aufgabe HM14 am zweiten Messzeitpunkt.

Nach dieser Diskussion sind die beiden Studenten in der Lage, die weiteren Berechnungen schrittweise durchzuführen und gelangen zu der Lösung  $d = -6$ . Die beiden Transkripte zeigen den unterschiedlichen Grad der Wahrnehmungsleistung der Gruppen. Während Gruppe 1 eine *Abbildung* benötigte, um ihre Wahrnehmung und darauf aufbauend ihre Interpretationen zu unterstützen, waren die beiden Studenten aus Gruppe 9 in der Lage, die Situation ohne Un-

terstützung zu erfassen und auf Grundlage ihrer Interpretation zu der Entscheidung, welches Verfahren sie einsetzen müssen, zu gelangen. Obwohl Gruppe 1 mit Hilfe der *Abbildung* in der Lage war, die Situation richtig wahrzunehmen und zu interpretieren, verhinderte ein Fehler beim Übertragen der Informationen aus der Aufgabenbeschreibung eine korrekte Lösung.

### **Messzeitpunkt 2: Vorwärtsarbeiten**

Nun wird der Einsatz der Heuristischen Strategie *Vorwärtsarbeiten* am zweiten Messzeitpunkt vorgestellt. Bei den Bearbeitungen zeigte sich, dass besonders ab Aufgabe HM10 die Gruppen häufiger *Vorwärtsarbeiten* nutzten als bei den Aufgaben zuvor (siehe Abbildung 9.22). Erst ab dieser Aufgabe setzten die Gruppen zudem die Strategie auf Stufe 2 ein, verfolgten also einen Plan mit mehreren Teilschritten (12 von 26 Strategienutzungen). Auffällig ist zudem, dass, wenn die Gruppen die Strategie nutzten, sowohl auf Stufe 1 als auch auf Stufe 2, sie in den überwiegenden Fällen erfolgreich waren: bei 22 Bearbeitungen erreichten sie das korrekte Ergebnis, zwei Lösungen waren teilweise korrekt, und nur zwei Bearbeitungen führten nicht zu einer Lösung (bei den Aufgaben HM10, HM11, HM13, HM14, HM15, HM16). Gleichzeitig waren die Gruppen, die kein planvolles Vorgehen zeigten, weniger erfolgreich: bei fünf Bearbeitungen erreichten die Gruppen ein korrektes Ergebnis,<sup>11</sup> eine Gruppe erreichte bei Aufgabe HM13 ein teilweise korrektes Ergebnis, und in 16 Fällen führte die Bearbeitung zu einem nicht korrekten Ergebnis.

Welche Unterschiede sich zwischen der erfolgreichen Nutzung der Strategie und der nicht erfolgreichen Nutzung zeigten, illustrieren exemplarisch für die weiteren Bearbeitungen die beiden folgenden Transkripte zur Bearbeitung der Aufgabe HM15, in der die Länge eines Tunnels berechnet werden soll (Aufgabenteil b) in Abbildung 9.23).

Die Studenten aus Gruppe 6 haben die vorherige Teilaufgabe über das Verfahren mit der Hesse'schen Normalform bearbeitet. Nachdem sie die Aufgabenstellung zu HM15 gelesen haben, diskutieren sie ein mögliches Vorgehen.

S33: Da muss man jetzt erst einmal die Geradengleichung mit  $A$  als Ortsvektor mit dem Normalenvektor gucken

<sup>11</sup>Vier dieser korrekten Ergebnisse werden bei Aufgaben HM16 erreicht.

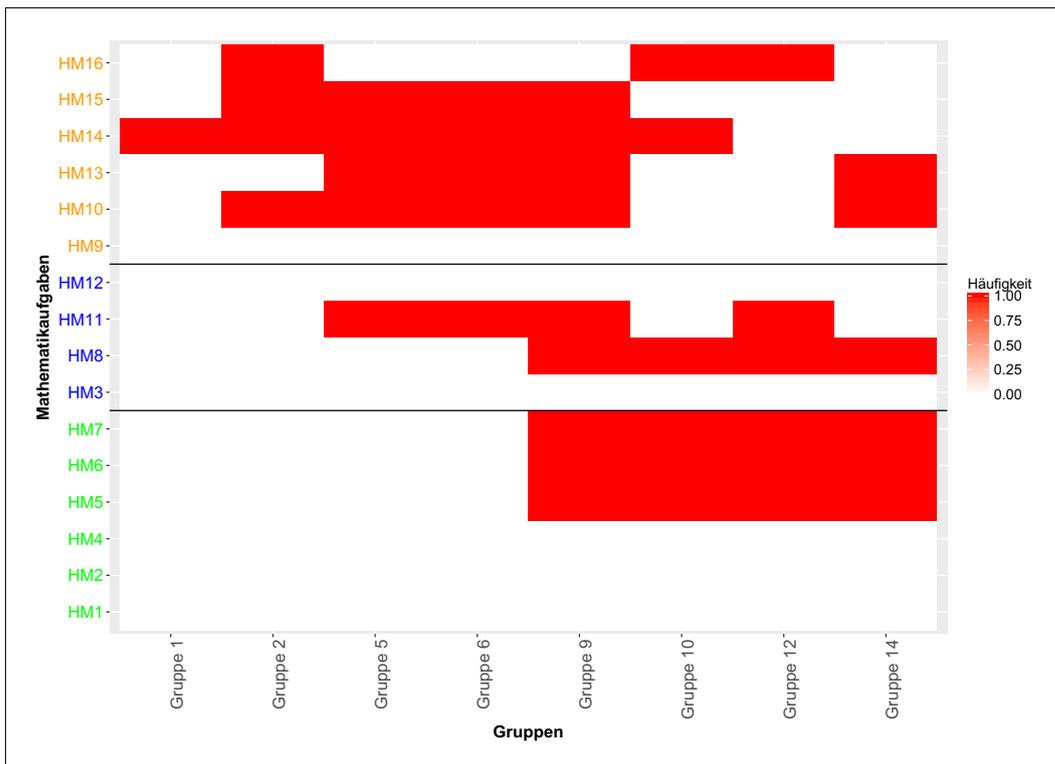


Abbildung 9.22: Heatmap zur Anzahl der Heuristischen Strategie *Vorwärtsarbeiten* am zweiten Messzeitpunkt. Es existieren nur zwei Abstufungen. Rote Felder zeigen den Einsatz des *Vorwärtsarbeitens* durch die Gruppe bei der jeweiligen Aufgabe, weiße eine Nicht-Nutzung. Die Aufgaben sind nach Schwierigkeit sortiert (leicht=grün, mittel=blau, schwer=orange).

S01: Ich habe eine Idee. Wie wäre es einfach, wenn man, wir nehmen jetzt den Punkt  $A$  (fertigt eine *Abbildung* zur Situation an; siehe Abbildung 9.24). Der ist irgendwo im Raum, dann haben wir hier das Ebenenkonstrukt. Wir wollen jetzt den gespiegelten Punkt  $A'$  haben. Dann wissen wir ja, dass  $\vec{n}$  senkrecht auf der Ebene steht und dass  $\vec{n}_0$ , also mit der Länge skaliert, multipliziert mit dem Abstand  $d$  gibt dann  $A$  plus den Lotfußpunkt.

S05: Ja.

S01: Das heißt, wenn wir jetzt von  $A$  ausgehen und dann minus zwei mal den Abstand von  $\vec{n}_0$ , also den zweimal rückwärts gehen, kommen wir bei  $A'$  raus, oder?

Gegeben ist die Ebene  $E : 6x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -12$  und der Punkt  $A(3/6/4)$ .

a) Bestimmen Sie den Abstand  $d$  des Punktes von der Ebene!

$d =$

b) Bestimmen Sie den Ortsvektor zum Spiegelpunkt  $A'$ , der durch die Spiegelung von  $A$  an der Ebene entsteht!

$\vec{OA'}$  =

Abbildung 9.23: Aufgabe HM15 mit vorheriger Teilaufgabe HM14 aus der Gruppenarbeit am zweiten Messzeitpunkt.

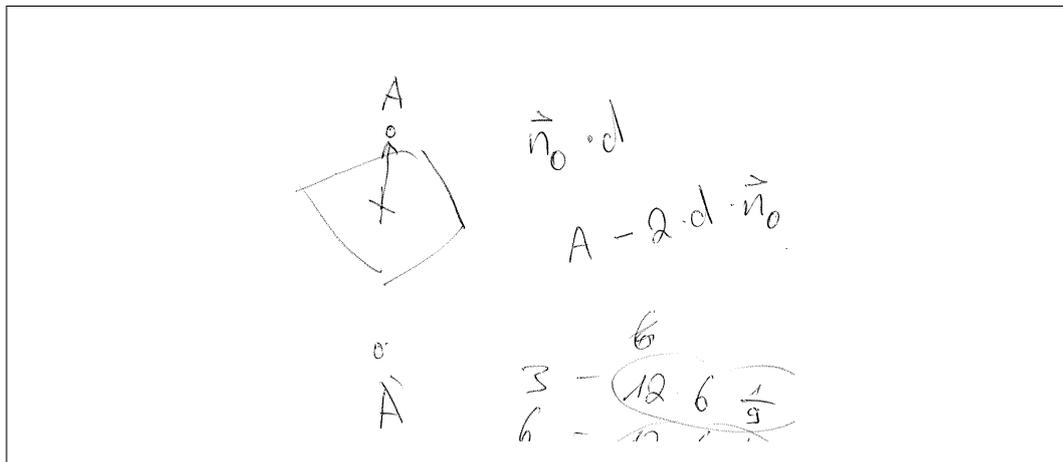


Abbildung 9.24: Erfolgreich genutzte Abbildung und Gleichungen für die Bearbeitung von Aufgabe HM15 durch Gruppe 6 am zweiten Messzeitpunkt.

Die Studenten beraten, ob sie dieses Verfahren weiterverfolgen, oder ein anderes, aber vergleichbares. Sie erkennen, dass beide Verfahren sehr ähnlich sind und verfolgen beide parallel. Während sie die zwei Berechnungen durchführen, überprüfen sie gegenseitig die Zwischenschritte und das weitere Vorgehen. Ein Student macht dann den Vorschlag zusammenzuarbeiten.

S33: Wir sollten zusammen rechnen Leute. Dann kann man [...] gucken, ob der andere irgendwelche Fehler macht oder nicht. Da hast du jetzt überall

Drittel drin (zeigt auf die Rechnung von Student *S05*).

S05: Ja.

S33: Dann musst du es eigentlich nur mal 4 nehmen und die Drittel vergessen.

S05: Wenn du meinst.

S01: Ja, ich glaube, du hast die selben Zahlen wie ich.

S33: Ja, so funktioniert es auch (Student *S05* hat den Rat nicht aufgegriffen).

S05: So, (3, 6, 4) minus 24 durch 3?

S01: 8

S05: (8, 4, -4)

S01: Die selben Zahlen habe ich auch.

Im letzten Schritt berechnen die Studenten den Spiegelpunkt  $A'$ .

Die Gruppe nutzte eine *Abbildung*, um die Wahrnehmung und Interpretation der Situation zu unterstützen, und konnte so Entscheidungen treffen, um zu einem geeigneten Verfahren zur Berechnung des Spiegelpunktes zu gelangen. Die explizite Planung zu Beginn des Prozesses wurde durch die Studierenden auch während der Berechnungen berücksichtigt und bei den beiden parallelen Bearbeitungen gegenseitig überprüft.

Gruppe 5 hat die vorherige Teilaufgabe mit Hilfe des Lotfußpunkt-Verfahrens korrekt bearbeitet. Nachdem ein Student die Aufgabenstellung laut vorgelesen hat, macht dieser auch einen Vorschlag für das Vorgehen.

S10: Das kann man ja hoffentlich ganz schnell machen. [...] Dann machen wir anstatt  $t$  (Parameter in der Geradengleichung in der Aufgabenbearbeitung zuvor),  $t$  war ja  $-\frac{2}{3}$ , setzen wir jetzt  $\frac{2}{3}$  ein, das müsste der Punkt auf der anderen Seite sein.

S08: Ja.

S10: Dann haben wir raus, müssen das hier dazu rechnen (zeigt auf den Differenzvektor zwischen Punkt  $A$  und dem Lotfußpunkt aus der Teilaufgabe zuvor).

In der anschließenden Berechnung erhält der Student den Punkt  $(4, 4, 2)$  als Lösung. Die beiden anderen Studenten stimmen zu.

Bei der Bearbeitung dieser Aufgaben durch Gruppe 5 zeigte sich das *Vorwärtsarbeiten*, jedoch nur auf Stufe 1, also durch eine längere Berechnung. Die Studenten nutzten zuvor nicht die Möglichkeit, ihre Wahrnehmung der Situation durch den Einsatz weiterer Heuristiken zu unterstützen, und interpretierten

so falsch, dass sie den vorher berechneten Differenzvektor statt wie zuvor abziehen nun addieren mussten.

### Messzeitpunkt 2: Sonstige Heuristische Strategien und Prinzipien

Insgesamt konnten am zweiten Messzeitpunkt nur wenige weitere *Heuristische Strategien* und *Prinzipien* beobachtet werden (siehe Tabelle 9.9), nur bei sieben Aufgaben setzten die Studierenden diese ein. Besonders bei den Aufgaben HM13 und HM16 nutzten die Studierenden Strategien und Prinzipien. Während bei den meisten Aufgaben nur ein Typ von Strategie bzw. Prinzip beobachtbar war, wurden bei Aufgabe HM13 die drei Strategien bzw. Prinzipien *Systematisches Probieren*, *Analogieschluss* sowie *Extremalprinzip* durch die Studierenden eingesetzt. Wie bereits beim ersten Messzeitpunkt, spiegelt sich in der Verwendung der Strategie bzw. des Prinzips bei dieser Aufgabe die unterschiedliche Herangehensweise wider. Die Gruppen setzten entweder die Strategie ein oder nutzten das Prinzip.

Tabelle 9.9: Überblick zur Nutzung von weiteren *Heuristischen Strategien* und *Heuristischen Prinzipien* am zweiten Messzeitpunkt.

Aufgabe	Systematisches Probieren	Analogie- schluss	Extremal- prinzip	Symmetrie- prinzip
HM2	0	1	0	0
HM8	1	0	0	0
HM10	0	2	0	0
HM13	2	2	4	0
HM14	0	1	0	0
HM15	0	0	0	1
HM16	4	0	0	0

Die beiden folgenden Transkripte illustrieren exemplarisch für die übrigen Gruppen, die vergleichbar vorgehen, die unterschiedlichen Herangehensweisen an die Aufgabe HM13 (siehe Abbildung 9.17). Beide sind von den selben Gruppen wie beim Messzeitpunkt 1. Die Gruppen nutzten wieder die gleiche Strategie bzw. das gleiche Prinzip wie zuvor.

Nachdem Gruppe 2 in einem ersten Versuch keine Lösung gefunden hat, neh-

men sich die Studierenden die Aufgabe noch einmal vor.

S06: Wir können das ja mal einsetzen. Einmal für 5 und einmal für 6 oder 7, oder 10 oder was wir einfacher rechnen können und das versuchen aufzulösen. Dann sehen wir ja, ob das größer sein kann oder kleiner.

S12: Sollen wir das einmal ausrechnen? Okay. [.]  $f$  von 5 ist [..]

S06: Ich mache das mal für 10. 10 ist ein schöner Wert.

Beide Studentinnen berechnen parallel die Funktionswerte. Nachdem beide fertig sind, vergleichen sie ihre Ergebnisse.

Handwritten work on grid paper:

$$f(5) = 2 \cdot e^{-0,5 \cdot 5} \cdot (5^2 - 5)$$

$$= 2 \cdot e^{-2,5} \cdot 20$$

$$= 40 \cdot e^{-2,5}$$

$$f(10) = 2 \cdot e^{-0,5 \cdot 10} \cdot (10^2 - 5)$$

$$= 2 \cdot e^{-5} \cdot 95$$

$$= 190 \cdot e^{-5}$$

$$f(10) < f(5)$$

$\frac{(x^2 - 5)}{e^{-0,5x}} \rightarrow$  Nenner steigt schneller als Zähler, deshalb wird Funktion bei größerem  $x$  kleiner

Abbildung 9.25: Von Gruppe 2 am zweiten Messzeitpunkt genutzte Gleichungen für die Bearbeitung von Aufgabe HM13.

S12: Was hast du raus? [.] 95? Ja, 95 mal 2 dann noch, das sind dann 180,  $190e^{-5}$ .

S06: Und dadurch, dass wir das minus nehmen (zeigt auf  $e^{-5}$  siehe Abbildung 9.25), müsste der Wert (zeigt auf  $190 \cdot e^{-5}$ ) später kleiner sein, viel kleiner, oder?

S12: Ja.

S07: Weil das minus ist?

S06: Ja, oder? [..] Und damit haben wir das bewiesen. [6]

S12: Durch das Minus ist  $e$  umgedreht (zeichnet einen Graphen, der  $\frac{1}{e^x}$  dar-

stellen soll). Das heißt, der Wert wird immer kleiner.

S06: Ja und da wir hier (zeigt auf 190) eine sehr viel größere Zahl vor haben, wird der Wert hier auf jeden Fall kleiner.

Anschließend diskutieren die Studierenden das Problem, welcher Teil des Funktionsterms dominiert, wenn  $x \rightarrow \infty$  gilt. Als Ergebnis der Diskussion ergänzen sie den Ausdruck  $\frac{(x^2-5)}{e^{0,5x}}$  und begründen, dass der Nenner schneller als der Zähler wächst und deswegen die Funktion immer kleiner wird.

Im zweiten Ansatz, den vier Gruppen verfolgten, nutzte die Gruppe 9 das *Extremalprinzip*, um das Verhalten der Funktion zu untersuchen. Nachdem die Studenten die Aufgabenstellung gelesen haben, schlägt ein Student direkt vor, den Grenzwert zu betrachten.

S04: Limes. [..]

S30: Ja. Limes für  $x \rightarrow 5$ , oder?

S04: Unendlich.

S30:  $x$  gegen Unendlich?

S04: Es gilt ja ab 5. Wenn es da ein lokales Maximum hat. [4]

S30: Ja, [...] der Limes von  $f(x)$  dann, oder?

S04: Ja.

S30: der Limes für  $x \rightarrow \infty$  (schreibt die *Gleichung* auf, siehe Abbildung 9.26)

The image shows handwritten mathematical work on a grid background. It consists of three lines of equations and text:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot e^{-0,5x} \cdot (x^2 - 5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot e^{-0,5x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 5)$$

Below these equations, the student has written:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad \text{kein globales Maximum}$$

Abbildung 9.26: Von Gruppe 9 am zweiten Messzeitpunkt genutzte Gleichungen für die Bearbeitung von Aufgabe HM13.

Die beiden Studenten entscheiden anschließend, dass sie die einzelnen Grenzwerte betrachten können.

S30: Also wenn das gegen Unendlich läuft (zeigt auf  $x$ ), läuft das hier gegen Unendlich (zeigt auf  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 5)$ ) und  $e^{-0,5x}$ ?

S04: Minus läuft gegen 0.

S30: Der läuft gegen 0, also läuft das Ganze gegen 0.

S04: Ja.

Nach einer kurzen Diskussion, ob eventuell die Regel nach l'Hospital angewendet werden müsste, entscheiden die beiden Studenten, dass sie nun noch zeigen müssen, dass kein weiteres lokales Maximum existiert und berechnen die Extremstellen. Nach der anschließenden Berechnung erhalten sie die beiden Nullstellen  $x = -1$  und  $x = 5$  für die erste Ableitung und folgern daraus, dass ab 5 kein weiteres lokales Maximum existiert.

Die beiden Gruppen nahmen die Situation unterschiedlich wahr. Während Gruppe 2 eine lokale Sichtweise favorisierte und diese über das *Systematische Probieren* versuchte aufzulösen, begann Gruppe 9 direkt mit einer globalen Sichtweise, indem die beiden Studenten sich auf das *Extremalprinzip* stützten und den Grenzwert betrachteten. Wie alle übrigen Gruppen, die dieses Prinzip nutzten, zeigte auch Gruppe 9 mit Hilfe der ersten Ableitung, dass kein weiteres Maximum existiert.

## Messzeitpunkt 2: Zusammenfassung

Für den zweiten Messzeitpunkt zeigt sich, dass die Studierenden stärker auf Mathematisierungen von Problemsituationen zurückgriffen. So nutzten sie häufiger *Gleichungen*, um Lösungen zu erzielen. *Abbildungen* waren auch weiterhin wichtig, ihre Funktion wechselte aber oft von einer Illustration der Situation hin zur Vorbereitung einer *Gleichung*. Dabei zeigte sich ein differenziertes Bild. So war bei einigen Aufgaben zwar der kombinierte Einsatz von Heurismen hilfreich (z. B. HM10, HM15), bei anderen war jedoch der Einsatz mehrerer Heurismen auch ein Hinweis auf ein fehlendes Verständnis der Aufgabe (z. B. HM12, HM14). Ein planvolles und strukturiertes Vorgehen war dagegen besonders bei den schweren Aufgaben ein Indikator für eine erfolgreiche Bearbeitung durch die Studierenden. Nur in wenigen Aufgaben ohne ein solches Vorgehen konnten die Gruppen die Probleme erfolgreich lösen. Während die *Heuristischen Hilfsmittel* und das *Vorwärtsarbeiten* das Problemlösen der Studierenden in vielen verschiedenen Aufgaben unterstützten, waren die weiteren Strategien und Prinzipien nur bei einzelnen Aufgaben in speziellen Situationen beobachtbar.

### Messzeitpunkt 3: Heuristische Hilfsmittel

Kapitel 9.2.1 Heurismen	MZP1	MZP2	<b>MZP3</b>
Kapitel 9.2.2 Problemlösephasen	MZP1	MZP2	MZP3
Kapitel 9.2.3 Epistemic Games	MZP1	MZP2	MZP3

Zum dritten Messzeitpunkt wurden die Gruppen aufgelöst (siehe Abschnitt 7.2) und die Einzelarbeit der Studierenden videographiert. Leider sind die Aufnahmen von zwei Studierenden nicht oder nur teilweise vorhanden, aus diesem Grund werden diese beiden Einzelbearbeitungen der Aufgaben bei der Ergebnisdarstellung nicht berücksichtigt. In Tabelle 9.10 sind die zusammenfassenden Statistiken zur Häufigkeit des Einsatzes, der Dauer des Einsatzes und der Komplexität der *Heuristischen Hilfsmittel* für diesem Messzeitpunkt dargestellt.

Es ist zu erkennen, dass sich die Studierenden bei der Nutzung von *Heuristischen Hilfsmitteln* in der Häufigkeit und Komplexität teilweise deutlich voneinander unterscheiden: Auf der einen Seite konnten bei Studentin 20 und Student 31 bei der Bearbeitung der neun Aufgaben nur jeweils fünfmal die Nutzung von *Heuristischen Hilfsmitteln* beobachtet werden, auf der anderen Seite war bei den Studenten 10 und 01 mit 14 bzw. 13 eingesetzten *Heuristischen Hilfsmitteln* eine intensive Nutzung beobachtbar. Das Hilfsmittel *Tabelle* wurde nur von Student 01 bei Aufgabe HM1 eingesetzt. Bei der Komplexität, den Stufen der Heurismen, zeigten die Studierenden durchschnittlich höhere Stufen als bei den beiden Messzeitpunkten zuvor. So verblieben nur Studentin 20 und 28 im Mittel auf Stufe 1. Die meisten Studierenden erreichten mindestens die Komplexitätsstufe 2 bei den bearbeiteten Aufgaben. Gemeinsam ist allen Studierenden, dass sie eher mehr *Gleichungen* als *Abbildungen* einsetzten, um die Aufgaben zu lösen, nur bei drei Studierenden konnte die gleiche Anzahl von *Abbildungen* und *Gleichungen* beobachtet werden. Die durchschnittliche Anwendungsdauer von *Heuristischen Hilfsmitteln* liegt bei fast allen Studieren-

Tabelle 9.10: Überblick zur Nutzung von *Heuristischen Hilfsmitteln* am dritten Messzeitpunkt.

Person	Anzahl Heurismen (Gleichung/ Abbildung/Tabelle)	Dauer Heurismen (relativ) Median (MAD)	Komplexität Heurismen Median (MAD)
S01	13 (6/6/1)	0,96 (0,13)	3 (1,48)
S04	10 (6/4/0)	1,06 (0,23)	2,5 (1,48)
S05	6 (3/3/0)	0,92 (0,38)	1,5 (0,74)
S06	8 (6/2/0)	0,54 (0,18)	2 (0)
S08	7 (4/3/0)	0,74 (0,22)	2 (0)
S09	7 (5/2/0)	0,81 (0,18)	2 (1,48)
S10	14 (8/6/0)	1,09 (0,60)	3 (0,74)
S11	8 (5/3/0)	0,93 (0,30)	2 (1,48)
S12	8 (6/2/0)	0,82 (0,13)	1,5 (0,74)
S19	11 (5/6/0)	0,88 (0,22)	2 (1,48)
S20	5 (4/1/0)	0,73 (0,31)	1 (0)
S28	6 (3/3/0)	0,70 (0,21)	1 (0)
S29	7 (4/3/0)	0,78 (0,16)	2 (1,48)
S30	11 (6/5/0)	0,82 (0,25)	2 (1,48)
S31	5 (4/1/0)	0,70 (0,45)	2 (0,74)
S33	9 (5/4/0)	0,76 (0,22)	2,5 (0,74)
S36	10 (7/3/0)	0,73 (0,32)	1,5 (0,74)
Median	8 (5/3/0)	0,81 (0,12)	2(0,74)
Min-Max	5-14 (3-8/1-6/0-1)	0,54-1,09	1-3

den bei mindestens 70% der Bearbeitungszeit, lediglich Studentin *06* nutzte *Gleichungen* und *Abbildungen* nur in etwa der Hälfte der Bearbeitungszeit. Zur Vertiefung dieses allgemeinen Überblicks zur Nutzung von *Heuristischen Hilfsmitteln* werden diese detailliert auf Aufgabenebene vorgestellt. Diese Darstellung als Heatmap findet sich in Abbildung 9.27.

Während bei einigen Aufgaben (HM1, HM5, HM6) keine oder nur eine geringe Nutzung von *Heuristischen Hilfsmitteln* beobachtet werden konnte, verwendeten die Studierenden in den übrigen Aufgaben oft Heurismen zur Unterstützung ihres Problemlöseprozesses. Besonders bei der Bearbeitung der Aufgaben

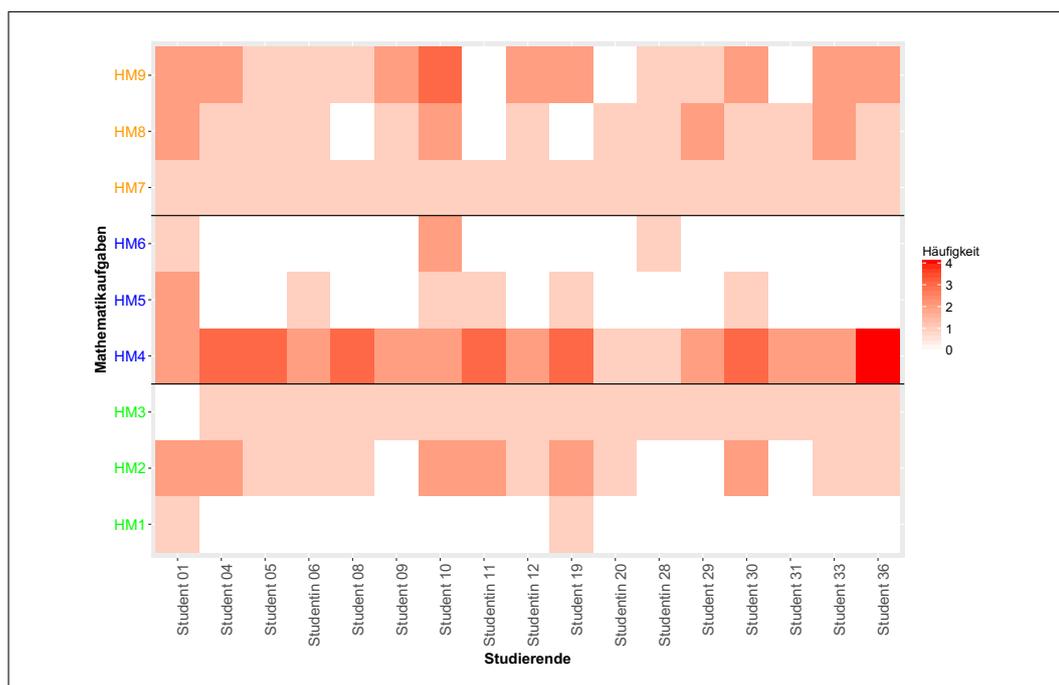


Abbildung 9.27: Heatmap zur Anzahl von *Heuristischen Hilfsmitteln* am dritten Messzeitpunkt. Je dunkler das Rot, desto mehr Heurismen wurden von der jeweiligen Studentin eingesetzt. Die Aufgaben sind nach Schwierigkeit sortiert (leicht=grün, mittel=blau, schwer=orange).

HM4 aber auch bei HM8 und HM9 konnte ein vermehrter Einsatz von *Heuristischen Hilfsmitteln* beobachtet werden. Bei diesen Aufgaben führten nur solche Ansätze zum Erfolg, in denen die Studierenden einen kombinierten Einsatz von mindestens zwei *Heuristischen Hilfsmitteln* zeigten (Aufgabe HM4: Student 10, 01 und 08, Aufgabe HM8: Student 01, Aufgabe HM9: Student 33 und 01). Besonders bei Aufgabe HM4 nutzten viele Studierende zwar ebenfalls mehr als ein *Heuristisches Hilfsmittel*, waren jedoch nicht erfolgreich bei der Bearbeitung. Die folgenden beiden Transkripte zeigen exemplarisch die Unterschiede in den Vorgehensweisen von erfolgreichen und nicht erfolgreichen Studierenden, die auf ähnliche Weise Heurismen einsetzten.

In der Aufgabe HM4 mussten die Studierenden den Flächeninhalt des Dreiecks *BCP* bestimmen, das Teil eines Quadrates war (siehe Abbildung 9.28).

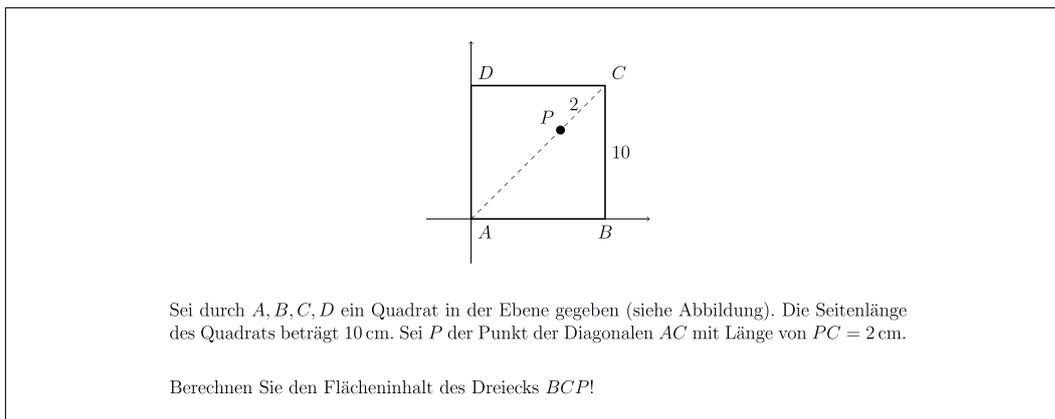


Abbildung 9.28: Aufgabe HM4 aus der Einzelarbeit am dritten Messzeitpunkt.

Nachdem Student 08 in einem ersten Versuch für die Aufgabe keine Lösungs-idee entwickeln konnte, versucht er es mit einem neuen Ansatz.

S08: Der Flächeninhalt des Dreiecks  $BCP$ , den sollte man hier bestimmen und man hatte schon die Seitenlängen gegeben. [...] Von dem Quadrat war die Seitenlänge 10 und die Länge der Strecke  $PC$  war 2. [...] So und [...] jetzt konnte man über.

Der Student überlegt längere Zeit ohne zu sprechen, wie er vorgehen kann, dabei fügt er der vorgegebenen *Abbildung* weitere Strecken hinzu und zeichnet mit dem Stift verschiedene Teilflächen im Quadrat nach. Schließlich findet er einen Ansatz, den er weiter verfolgen will.

S08: Da der Punkt auf der Diagonalen liegt, kann man [...] das gegebene Quadrat nehmen, ich zeichne jetzt die Diagonale ein (zeichnet ein Quadrat mit Diagonalen, siehe Abbildung 9.29), hat den Punkt  $P$ . Da weiß man dann, dass die Strecke [...]  $a$  gleich der Strecke  $b$  sein muss und die habe ich jetzt hier in meine Zeichnung eingezeichnet und die Strecke  $PC$  war 2 und das kann man dann über den Satz des Pythagoras aufstellen.

S08: Das  $a^2 + b^2 =$  die Diagonale, also  $2^2$  also 4 (schreibt jedoch  $4^2$ ). Da jetzt aber  $a^2 = b^2$  war, kann man das gleichsetzen.

Der Student löst die *Gleichung* nach  $a$  auf und bemerkt dann seinen Fehler ( $4^2$  statt  $2^2$ ) in der ersten Zeile und korrigiert diesen.

S08: Wenn man dann jetzt betrachtet, man nimmt das Dreieck  $BPC$ , zieht aber senkrecht durch den Punkt  $P$  eine Gerade, bekommt man ein Recht-

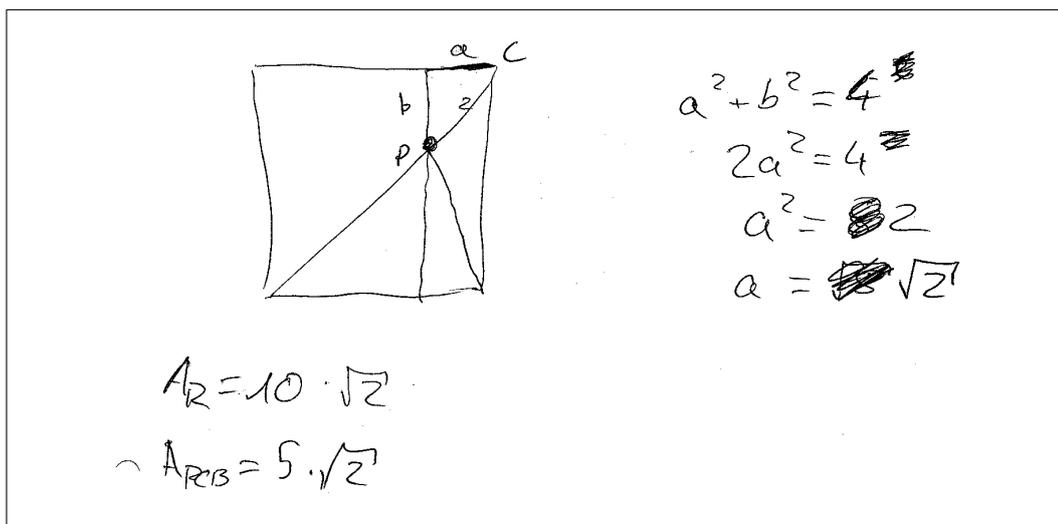


Abbildung 9.29: Abbildung aus einer erfolgreichen Einzelarbeit des Studenten 08 von Aufgabe HM4 am dritten Messzeitpunkt.

eck und in diesem Rechteck kommt das Dreieck  $BPC$  zweimal vor (zeichnet das Rechteck und das Dreieck  $BPC$  in die eigene *Abbildung* ein). Einmal komplett und einmal aufgeteilt und dann berechnet man den Inhalt dieses Rechtecks und dividiert durch zwei und dann hat man den Flächeninhalt des Dreiecks.

Der Student berechnet anschließend die Flächeninhalte des Rechtecks und des Dreiecks und gelangt zum Ergebnis, dass der Flächeninhalt des Dreiecks  $5\sqrt{2}$  beträgt.

Nachdem Studentin 11 die Aufgabenstellung gelesen hat, beginnt sie die Problemsituation nachzuvollziehen.

S11: Ich zeichne erst einmal das Dreieck ein.  $BPC$  ist das hier (zeichnet das Dreieck in der vorgegebenen *Abbildung* nach) und diese Länge (zeigt auf die Seite  $PC$ ) ist 2. Okay, [...] die Seitenlänge des Quadrats ist 10 cm, okay. Also dann haben wir erst einmal ein Dreieck (zeichnet das Dreieck auf, siehe Abbildung 9.30). Hier ist 2, hier ist 10.

S11: Dann teile ich das Dreieck erst einmal durch die Höhe hier (zeichnet eine Senkrechte von Punkt  $P$  auf die Seite  $BC$ ). Und [12] da war so eine Regel [...] Also könnte eigentlich mit dem Satz des Pythagoras arbeiten, aber ich habe zwei unbekannte Seiten, weil diese Seite wäre  $10 - q$ , das wäre

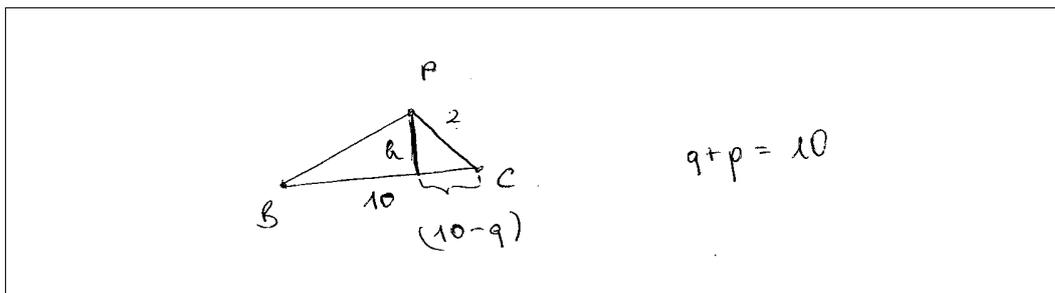


Abbildung 9.30: Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Einzelarbeit der Studentin 11 von Aufgabe HM4 am dritten Messzeitpunkt

dann 2 und das wäre die Höhe (beschriftet die Seiten). [...] Dann gab es einen Kathetensatz, glaube ich. Irgendwie  $q + p = 10$  muss gelten.

Die Studentin findet keinen Ansatz und bricht daraufhin die Aufgabenbearbeitung ab.

Zwei wesentliche Unterschiede lassen sich zwischen den erfolgreichen und den nicht erfolgreichen Studierenden an diesem Beispiel verdeutlichen. Zunächst ist eine unterschiedliche Wahrnehmung der Problemsituation zu erkennen. Der erfolgreiche Student betrachtete das Dreieck immer im Kontext des Quadrats. Die Studentin dagegen beschränkte sich in ihrer Wahrnehmung alleine auf das Dreieck, dadurch war sie nicht in der Lage, die Situation richtig zu interpretieren, da ihr wichtige Informationen, wie zum Beispiel die Rolle der Diagonalen als eine Seite des Dreiecks, nicht zur Verfügung standen. Dies führte zum zweiten Unterschied, der bei vielen weiteren nicht erfolgreichen Studierenden erkennbar war. So waren diese nicht in der Lage, mit Hilfe der *Heuristischen Hilfsmittel* die Probleme so zu strukturieren, dass die zahlreichen Informationen übersichtlich dargestellt werden konnten. Die Beobachtung der Wirkung anderer Einflussfaktoren auf den Erfolg wird in der Diskussion (siehe Kapitel 10) wieder aufgenommen.

### Messzeitpunkt 3: Vorwärtsarbeiten

Nach der Darstellung der *Heuristischen Hilfsmittel* wird in diesem Abschnitt der Einsatz der Heuristischen Strategie *Vorwärtsarbeiten* am dritten Messzeitpunkt vorgestellt. Die Nutzung dieser Strategie zeigt sich in einem planvol-

len Vorgehen der Studierenden, bei dem entweder eine längere Rechen- bzw. Kalkülaufgabe bearbeitet wird oder ein längerer Bearbeitungsprozess mit Teilschritten durchlaufen wird.

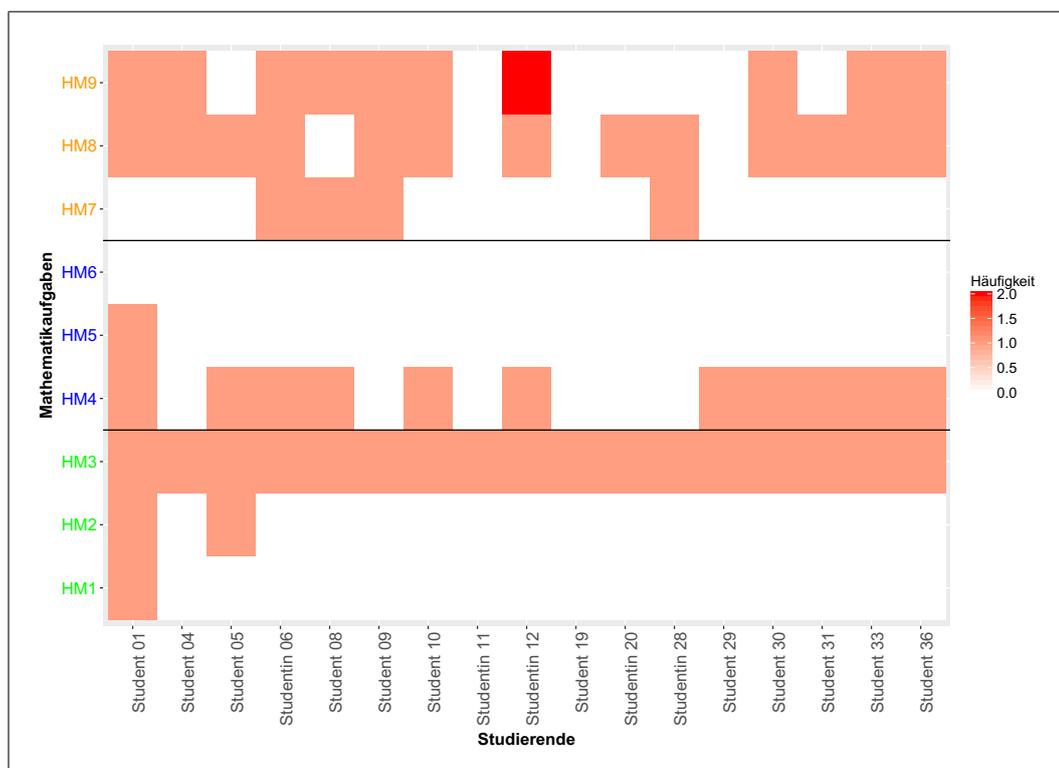


Abbildung 9.31: Heatmap zur Anzahl der Heuristischen Strategie *Vorwärtsarbeiten* am dritten Messzeitpunkt. Je dunkler das Rot, desto häufiger wurde von der jeweiligen Studentin *Vorwärtsarbeiten* eingesetzt. Die Aufgaben sind nach Schwierigkeit sortiert (leicht=grün, mittel=blau, schwer=orange).

Bei einigen Aufgaben nutzten alle bzw. eine Mehrheit der Studierenden *Vorwärtsarbeiten*, um zu einer Lösung zu gelangen. Bei der Aufgabe *HM3*, in der die Ableitung der Funktion  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  bestimmt werden musste, führten alle Studierenden eine längere Berechnung durch, die ein *Vorwärtsarbeiten* der Stufe 1 darstellte. Während nur jeweils eine leichte (*HM3*) und eine mittelschwere (*HM4*) Aufgabe von den Studierenden ein strukturiertes Vorgehen erforderte, nutzten mehr Studierende bei allen schweren Aufgaben und besonders bei den beiden schwersten das *Vorwärtsarbeiten*,

um zu einer Lösung zu gelangen. Komplexeres Vorgehen der Stufe 2 war nur bei den beiden Aufgaben *HM4* und *HM9* beobachtbar. Bei diesen Aufgaben waren nur die Studierenden erfolgreich, die ein Vorgehen auf Stufe 2 zeigten. Bei Aufgabe *HM4* waren drei von zehn Studierende erfolgreich, die ein komplexes *Vorwärtsarbeiten* nutzten und bei der Aufgabe *HM9* zwei von acht. Die nicht erfolgreichen, die eine komplexere Vorgehensweise nutzten, waren dabei näher an der richtigen Lösung als die Studierenden, die lediglich auf Stufe 1 das *Vorwärtsarbeiten* zeigten.

Die beiden folgenden Transkripte einer erfolgreichen und einer nicht erfolgreichen Bearbeitung der Aufgabe *HM9* (siehe Abbildung 9.32) zeigen exemplarisch die unterschiedlichen Vorgehensweisen und die Unterschiede, die zum Erfolg bzw. Misserfolg führten.

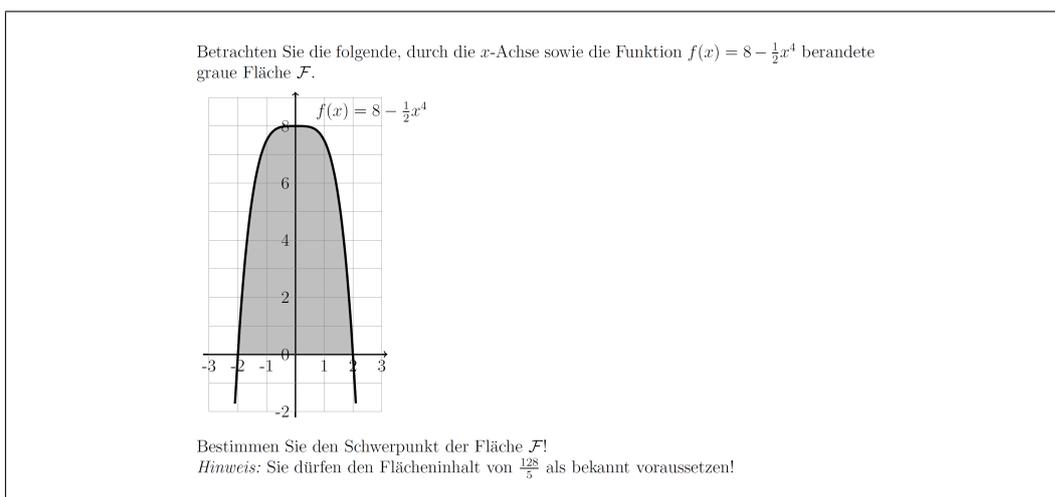


Abbildung 9.32: Aufgabe *HM9* aus der Einzelarbeit am dritten Messzeitpunkt.

Nachdem der Student die Aufgabenstellung gelesen hat, beginnt er mit der Analyse der Aufgabe.

S33: Also der Schwerpunkt in  $x$ -Richtung ist 0, da die Funktion symmetrisch ist (schreibt „(0,“ in das Antwortfeld, siehe Abbildung 9.33), [...] achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse. [17] Für den Schwerpunkt gilt die Formel Integral über  $y$ , Integral  $y$  über die Fläche, also  $da$ , Flächeninkrement, durch die Fläche (schreibt  $y_s = \frac{\int y da}{\int da}$ ). Die Fläche darf als  $\frac{128}{5}$  ange-

nommen werden. [...] Das Flächeninkrement  $da$  kann man aufteilen zu  $dx dy$ . (32) Die  $y$ -Position wird über die Funktion bestimmt. [9] Ich bin mir gerade nicht so sicher, aber ich probiere es einfach mal. Das heißt Integral über  $f(x)$ , also in den Grenzen von  $x -2$  bis  $2 dx$  und dann hat man noch die Grenzen  $0$  und  $8$  für  $y$  (schreibt  $\int_0^8 \int_{-2}^2 f(x) dx dy$ ), geteilt durch den Flächeninhalt, der ja  $\frac{128}{5}$  ist und in dem Integral (zeigt auf das innere Integral) muss auch wieder der Flächeninhalt herauskommen.

Der Student berechnet die beiden Integrale und bemerkt, dass er einen Fehler gemacht haben muss. So erhält er als  $y$ -Koordinate des Schwerpunkts den Wert  $8$  und argumentiert, dass der Schwerpunkt nicht am oberen Ende der Fläche sein kann, sondern sich innerhalb der Fläche befinden muss.

Handwritten work showing the calculation of the center of mass  $(x_s, y_s)$ . The  $y$ -coordinate is found to be  $\frac{32}{9}$ .

$$(x_s, y_s) = \left(0, \frac{32}{9}\right)$$

$$y_s = \frac{\int y da}{\int da} \quad da = dx dy$$

$$\frac{\int_0^8 \int_{-2}^2 f(x) dx dy}{\frac{128}{5}} = \frac{\frac{128}{5}}{\frac{128}{5}} \cdot \int_0^8 1 dy$$

$$y_s = \frac{\int_{-2}^2 \int_0^{f(x)} y dy dx}{\frac{128}{5}} = \frac{\int_{-2}^2 \frac{1}{2} \cdot \left(8 - \frac{1}{2}x^4\right)^2 dx}{\frac{128}{5}}$$

Abbildung 9.33: Abbildung aus einer erfolgreichen Einzelarbeit des Studenten 33 von Aufgabe HM9 am dritten Messzeitpunkt

Nach längerem Überlegen startet der Student einen neuen Ansatz, in dem er die Funktion  $f(x)$  als eine Integralgrenze nutzt.

S33: Ich fange nochmal von vorne an (schreibt  $y_s = \frac{\int_{-2}^2 \int_0^{f(x)} y dy dx}{\frac{128}{5}}$ , siehe Abbildung 9.33). Also hier nochmal ganz einfach die Grenzen hingeschrieben. In  $x$ -Richtung ist das  $-2$  bis  $2$ , von  $y$  ist  $0$  und die Funktion, die das begrenzt und unten der Flächeninhalt  $\frac{128}{5}$ . Und zwar integriert einmal ist

das dann, [...] das bleibt unverändert (schreibt  $\int_{-2}^2$ ) und dann hat man hier  $\frac{1}{2}y^2$ , also  $\frac{1}{2}$  mal die Funktion zum Quadrat (schreibt  $\int_{-2}^2 \frac{1}{2} \cdot (8 - \frac{1}{2}x^4) dx$ ) und das nach  $x$  integriert und durch den Flächeninhalt geteilt.

Anschließend berechnet der Student das Integral und gelangt zur korrekten Lösung  $y_s = \frac{32}{9}$ . Dieses Ergebnis überprüft der Student abschließend an der *Abbildung* auf Plausibilität.

Das folgende Transkript zeigt exemplarisch eine nicht erfolgreiche Bearbeitung der Aufgabe durch eine Studentin. Diese beginnt, nachdem sie die Aufgabenstellung gelesen hat, mit einem ersten Ansatz.

S12: Da wir hier eine symmetrische Fläche haben, kann ich hier erst einmal die Achsen festlegen  $x_s$  und  $y_s$ , wobei das  $x_s$  bei 0 sein muss (trägt „(0,“ in das Ergebnisfeld ein). [...] Und  $y_s$  muss ich den Schwerpunkt jetzt noch berechnen. [15] Für den Schwerpunkt gilt ja  $y_s$  ist gleich Integral über  $A$   $x da$  (schreibt  $y_s = \int_A x da$  auf, siehe Abbildung 9.34), beziehungsweise ist das  $y$  (ändert das  $x$  in ein  $y$ ). Durch das Integral  $da$  (ergänzt die *Gleichung* zu einem Bruch mit  $\int da$  im Nenner). Da ich meine Fläche schon habe, [7] hier kann ich integrieren von 0 bis 8 (notiert  $\int_0^8$ ). [36] Beziehungsweise ich kann es mir eigentlich auch viel einfacher machen und sagen  $y_s$  gleich die Summe aller Flächeninhalte  $A_i$  mal  $y_i$  durch die Flächeninhalte  $A_i$  (schreibt  $y_s = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$  auf).  $A$  ist die Fläche  $\frac{128}{5}$ , wobei  $y_{si}$  ist das ja (korrigiert das  $y_i$  im Zähler des Bruches). Mal dem [...] Schwerpunkt, der wäre, wenn ich einfach nur von den Koordinaten ausgehe, wäre 0 bis 8, wäre das bei 4 [...] durch die Fläche  $\frac{128}{5}$  (schreibt  $\frac{\frac{128}{5} \cdot 4}{\frac{128}{5}}$ ). [...] Nein, das kann nicht stimmen da ist ein Fehler, [...] weil hier unten meine Fläche breiter ist als oben, darum kann das nicht genau 4 sein, irgendwo habe ich jetzt einen Fehler in der Formel gemacht.

Nachdem die Studentin versucht hat, den Fehler in der Formel zu finden, beginnt sie mit einem neuen Ansatz.

S12: Wenn ich jetzt meine Funktion integriere, vielleicht komme ich dann auf die Formel. [...] Integral 8 (schreibt  $\int_A 8 - \frac{1}{2}x^4 da$ ). Ich habe jetzt meine Flächenbegrenzung, dann kann ich  $\int_A$  Doppelintegral machen nach  $dx, dy$  (schreibt  $\int \int 8 - \frac{1}{2}x^4 dxdy$ ). Dann die  $x$ -Koordinaten nach innen, das

$$(x_s, y_s) = (0, 1)$$

$$y_s = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{128,4}{\frac{128}{5}}$$

$$\int_A 8 - \frac{1}{2}x^4 da$$

$$\int_0^8 \int_{-2}^2 8 - \frac{1}{2}x^4 dx dy = \int_0^8 8x - \frac{1}{10}x^5 \Big|_{-2}^2 dy$$

$$\frac{25,6 \cdot 8}{2048}$$

Abbildung 9.34: Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Einzelarbeit der Studentin 12 von Aufgabe HM9 am dritten Messzeitpunkt

wären  $-2$  und  $2$  und von  $0$  bis  $8$ . Das ist dann gleich Integral von  $0$  bis  $8$   $8x - \frac{1}{10}x^5$  von  $-2$  bis  $2$   $dy$ . Jetzt die Ränder einsetzen.

Anschließend berechnet die Studentin das Integral, erhält jedoch am Ende das Ergebnis  $204,8$ . Sie stellt fest, dass sie nicht das richtige Ergebnis errechnet hat und damit nicht weitermachen kann. Eine anschließende Fehlersuche führt zu keinem Ergebnis, so dass sie abbricht.

Die beiden Transkripte zeigen, dass sowohl die nicht erfolgreiche Studentin als auch der erfolgreiche Student vergleichbar bei der Bearbeitung der Aufgabe vorgegangen sind. Gleichzeitig werden die Unterschiede deutlich. Der nicht erfolgreichen Studentin fehlte zu Beginn das gesicherte Wissen, wie sie mit bekannten Formeln Aufgaben lösen kann, sie versuchte dann, auf grundlegende Erkenntnisse zurückzugreifen, hier über die Summendarstellung des Schwerpunktes, jedoch war dieses Vorgehen in den Aufgaben, auch bei anderen Studierenden, häufig nicht zielführend. Wie bei einigen anderen nicht erfolgreichen Studierenden fehlte der Studentin die Einsicht, die Funktion  $f(x)$  als Grenze des Integrals nach  $dy$  einzusetzen, dagegen leitete sich der erfolgreiche Student genau dies nach einem erfolglosen Ansatz her. Die Beobachtung der Wirkung anderer Einflussfaktoren auf den Erfolg wird in der Diskussion (siehe Kapitel 10) wieder aufgenommen.

### Messzeitpunkt 3: Sonstige Heuristische Strategien und Prinzipien

Zum dritten Messzeitpunkt konnten im Vergleich zu den ersten beiden mehr *Heuristische Strategien* und *Prinzipien* beobachtet werden (siehe Tabelle 9.11). Es zeigt sich, dass die Studierenden bei den jeweiligen Aufgaben sehr ähnlich vorgegangen sind. So nutzten fast alle Studierenden bei Aufgabe *HM1* die Strategie *Systematisches Probieren*, bei Aufgabe *HM7* setzten alle Studierenden bis auf einen die Strategie *Systematisches Probieren* und das *Invarianzprinzip* ein.

Tabelle 9.11: Überblick zur Nutzung von weiteren *Heuristischen Strategien* und *Heuristischen Prinzipien* am dritten Messzeitpunkt.

Aufgabe	HS 1	HS 2	HS 3	HP 1	HP 2	HP 3
HM1	14	2	0	0	0	0
HM2	0	0	0	0	2	0
HM4	0	0	7	0	0	0
HM5	11	1	0	13	0	0
HM6	0	2	0	0	0	0
HM7	16	1	0	0	0	16
HM9	0	0	0	0	14	0

HS 1: Systematisches Probieren, HS 2: Analogieschluss, HS 3: Zerlegen und Ergänzen,

HP 1: Extremalprinzip, HP 2: Symmetriepinzip, HP 3: Invarianzprinzip.

Obwohl beim prinzipiellen Vorgehen bei den jeweiligen Aufgaben die Studierenden sehr ähnlich vorgegangen sind, waren einige erfolgreich, während die Mehrheit nicht zur richtigen Lösung gelangte. Die folgenden beiden Transkripte zeigen exemplarisch für die Aufgabe *HM7*, wie zwei Studierende mit der gleichen Strategie und dem gleichen Heuristischen Prinzip versuchten, eine Aufgabe zu lösen, wobei ein Student zu einer richtigen Lösung gelangte und der zweite nicht.

In der Aufgabe (siehe Abbildung 9.28) mussten die Studierenden den  $n$ -ten Summanden einer Reihe bestimmen.

Während die zweite Teilaufgabe von vielen Studierenden richtig gelöst wurde, konnten nur drei Studierende auch die erste Teilaufgabe erfolgreich lösen. Das erste Transkript zeigt, wie ein Student das *Systematische Probieren* und das

Geben Sie für die folgenden Reihen jeweils den  $n$ -ten Summanden mit  $n \geq 1$  an (siehe Beispiel)!

**Beispiel:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad s_n = \frac{1}{n}$$

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{6}{16} + \frac{24}{25} - \frac{120}{36} \dots \quad a_n = \boxed{\phantom{000}}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{27} + \frac{16}{81} + \frac{25}{243} + \dots \quad b_n = \boxed{\phantom{000}}$$

Abbildung 9.35: Aufgabe HM7 aus der Einzelarbeit am dritten Messzeitpunkt.

*Invarianzprinzip* nutzte, um beide Teilaufgaben korrekt zu lösen.

Nachdem der Student die Aufgabenstellung gelesen hat und mit Hilfe des Beispiels für sich geklärt hat, was von ihm verlangt wird, beginnt er mit der ersten Teilaufgabe.

S10: Jetzt haben wir bei a) auch wieder so einen Bruch, der fängt negativ an und jeder zweite ist positiv. Also der erste ist negativ, der zweite ist positiv, wie kriegen wir das hin? Wir müssen irgendetwas mit  $-1$  machen und das dann entweder hoch  $n$  nehmen [.] oder hoch  $n + 1$  oder sowas (schreibt  $(-1)^n$ , siehe Abbildung 9.36). Damit das erste negativ ist, [.] wir fangen ja bei 1 an, dann passt das glaube ich so. Also wenn wir  $n$  jetzt einsetzen, dann wäre es  $-1$ , bei  $n = 2$  wäre es dann 1 und so weiter. Wir müssen es irgendwie so anfangen, dass wir mit  $(-1)^n$  anfangen, denn das ist der Vorfaktor, damit die, damit das Vorzeichen stimmt.

Nach diesem ersten Schritt, versucht der Student die Darstellung des Bruchs zu bestimmen.

S10: Nach welchem verläuft denn [.] der Teil oberhalb vom Bruchstrich? Der fängt mit 1 an, dann 2, dann 6, dann 24. Wenn man jetzt 1, 2, 6 sieht und einen geschulten Blick hat, dann sieht man direkt, dass das [.] was

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{6}{16} + \frac{24}{25} - \frac{120}{36} \dots$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{27} + \frac{16}{81} + \frac{25}{243} + \dots$$

$a_n = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^2}$

$b_n = \frac{n^2}{3^n}$

$n!$   
 $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$   
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$(n+1)^2$   
 $2^2$   
 $3^2$   
 $4^2$

$n^2$

$(-1)^n$      $-1$      $1$

1	3	$3^1 = 3^n$
2	9	$3^2$
3	27	$3^3$

Abbildung 9.36: Abbildung aus einer erfolgreichen Einzelarbeit des Studenten 10 von Aufgabe HM7 am dritten Messzeitpunkt

mit der [...] Fakultät zu tun hat. Das ist  $n$  Ausrufezeichen. Und das ist sowas für zum Beispiel für  $n = 3$  wäre das 1 mal 2 mal 3 gleich 6. Für  $n = 4$  sind 1 mal 2 3 4 gleich 24 (schreibt die Berechnungen auf). Das heißt, für den oberen Teil gilt  $n$  Fakultät.

Nachdem der Student den Zähler bestimmt hat, wendet er sich dem Nenner des Bruches zu.

S10: Jetzt gucken wir uns noch den unteren Teil an. Fängt mit 4 an, dann 9, dann 16, dann 25, das sieht ein bisschen nach einer quadratischen, nach einem quadratischen Zusammenhang aus. Beginnt mit 4, dann 9. 4 ist ja sowas wie zwei zum Quadrat, 9 ist sowas wie drei zum Quadrat, 16 ist vier zum Quadrat (schreibt  $2^2$ ,  $3^2$  und  $4^2$  untereinander auf). So, für  $n = 1$  soll hier 2 stehen (kreist die 2 ein) und für  $n = 2$  soll hier 3 stehen (kreist die 3 ein). Also ist  $n + 1$  zum Quadrat jeweils (schreibt  $(n + 1)^2$  auf). Also steht unten  $n + 1$  zum Quadrat. Und damit haben wir auch schon die Lösung.

Im folgenden Transkript wird eine nicht erfolgreiche Bearbeitung der ersten Teilaufgabe dargestellt, die exemplarisch das Vorgehen mehrerer nicht erfolgreicher Studierender verdeutlicht.

Nachdem die Studentin 12 die Aufgabenstellung gelesen und mit Hilfe des Beispiels für sich geklärt hat, was von ihr verlangt wird, beginnt sie mit der ersten Teilaufgabe.

S12: Im Nenner haben wir hier immer  $n + 1$  ins Quadrat (schreibt  $(n + 1)^2$  in das Antwortfeld, siehe Abbildung 9.37). Wir haben immer abwechselnd das Vorzeichen, mal Minus, Plus, Minus, Plus, Minus und so weiter. Also  $-1$  hoch  $n$  (schreibt  $(-1)^n$  in das Antwortfeld), damit sich das Vorzeichen immer wechselt. [...] Und [12] Wie kommen wir auf die Zahlen im Zähler?

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{6}{16} + \frac{24}{25} - \frac{120}{36} \dots$$

$$a_n = \frac{(-1)^n (n-1) \cdot n}{(n+1)^2}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{27} + \frac{16}{81} + \frac{25}{243} + \dots$$

$$b_n = \frac{n^2}{3^n}$$

Abbildung 9.37: Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Einzelarbeit der Studentin 12 von Aufgabe HM7 am dritten Messzeitpunkt

Die Studentin überlegt eine Weile, wie sie weiter vorgehen kann, und wechselt dann zur zweiten Teilaufgabe. Nachdem sie diese erfolgreich gelöst hat, nimmt sie sich noch einmal die erste Teilaufgabe vor.

S12: So dann gucken wir nochmal bei der Aufgabe davor. Was fehlt da noch? [19] Versuchen wir es mal. Das wäre hier mal 2 (zeichnet einen Pfeil vom ersten Summanden zum zweiten Summanden und beschriftete diesen mit  $\cdot 3$  und verbindet die übrigen Summanden entsprechend), hier mal 3, 6, 12, 18, 24 (zählt mit den Fingern die 6er Reihe nach), mal 4, passt auch. [...] 120? [...] Das ist mal 5. Okay also. [7] Das heißt schon mal  $n$  (schreibt  $\cdot n$  in den Zähler) und das ist dann  $n - 1$  mal  $n$ , weil zum Beispiel  $n - 1$ , das wäre hier 2 (zeigt auf den zweiten Summanden) mal  $n$  (zeigt auf die  $\cdot 3$ ), passt (schreibt  $(n - 1)$  in den Zähler des Bruches). Okay.

Diese beiden Transkripte zeigen exemplarisch die unterschiedlichen Herangehensweisen von erfolgreichen und nicht erfolgreichen Studierenden bei der

Anwendung von *Heuristischen Strategien* und *Heuristischen Prinzipien*. Viele Studierende, welche die erste Teilaufgabe nicht erfolgreich lösten, waren nicht in der Lage die gesamte Situation wahrzunehmen, sie verblieben auf einer lokalen Perspektive. So gingen beide Studierenden prinzipiell vergleichbar vor. Um die Situation wahrzunehmen, probierten sie aus, was sich von einem zum nächsten Summanden änderte, während die Studentin jedoch nur die Veränderung vom einen zum nächsten Summanden erfasste und so auf den Ausdruck  $n \cdot (n - 1)$  gelangte, erkannte der Student, indem er alle Summanden interpretierte, dass es sich um die Fakultät handeln musste.

### Messzeitpunkt 3: Zusammenfassung

Am dritten Messzeitpunkt zeigt sich eine Fortführung des zweiten insofern, dass ein strukturiertes und planvolles Vorgehen wichtig für ein erfolgreiches Lösen der Aufgaben war. Zum dritten Messzeitpunkt wurde dies sowohl durch das *Vorwärtsarbeiten* als auch durch die *Heuristischen Hilfsmittel* deutlich. Diese mussten nun zusätzlich eine strukturierende Funktion übernehmen. Viele Studierende waren nicht in der Lage, mit Hilfe von Heuristiken die Probleme derart zu organisieren, dass die zahlreiche Informationen sie nicht überforderten. Deutlich wurde dies beispielsweise bei den Transkripten zu Aufgabe *HM4*. Die nicht erfolgreiche Studentin war nur in der Lage, in ihrer *Abbildung* mit dem Dreieck einen Teil des Problems zu fokussieren und erfasste nicht die vollständige Situation. Dadurch fehlten ihr Informationen zur Lösung des Problems. Eine weitere Beobachtung an diesem Messzeitpunkt ist, dass die Studierenden, im Gegensatz zu den beiden Messzeitpunkten zuvor, bei der Bearbeitung der Aufgaben häufig die gleichen Verfahren einsetzten, um die Aufgaben zu lösen; es ist eine Vereinheitlichung zu erkennen. Ein möglicher Grund dafür, nämlich die veränderte Sozialform (von einer Gruppen- hin zu einer Einzelarbeit), wird in Abschnitt 10.2 näher diskutiert.

### 9.2.2 Äußere Struktur: Ablauf der Problemlösephasen bei der Bearbeitung mathematischer Aufgaben

In diesem Abschnitt werden für jeden Messzeitpunkt die Ergebnisse zur äußeren Struktur der Problemlöseprozesse bei der Bearbeitung der Mathematikauf-

gaben präsentiert. Dies ermöglicht eine Antwort auf die folgende Forschungsfrage:

**F 2.2:** In welcher Weise lässt sich der Ablauf der Problemlösephasen bei den Bearbeitungen der Mathematikaufgaben charakterisieren?

Ausgehend vom Modell nach Polya (siehe Abschnitt 4.1.4) konnte das beobachtete Vorgehen der Studierenden in fünf Kategorien unterteilt werden (siehe Tabelle 9.12): (1) *Linear/Zyklisch mit Rückschau*, (2) *Linear ohne Rückschau*, (3) *Zyklisch ohne Rückschau*, (4) *Schneller Prozess* und (5) *Abbruch*.

Während lineare Prozesse in der Kategorie *Linear/Zyklisch mit Rückschau* nur in einer Form auftreten können, ist die Anzahl möglicher Schleifen beim zyklischen Verlauf grundsätzlich nicht begrenzt. In einigen Prozessen konnten bis zu drei Zyklen beobachtet werden. Auf vergleichbare Weise verhält es sich bei den Kategorien *Linear ohne Rückschau* und *Zyklisch ohne Rückschau*.

Die Zusammenfassung der Phasenverläufe in (1) *Linear/Zyklisch mit Rückschau* und die gleichzeitige Trennung von (2) *Linear ohne Rückschau* und (3) *Zyklisch ohne Rückschau* wurde aus zwei Gründen gewählt. Die Zusammenfassung der linearen oder zyklischen Phasenverläufe, die eine *Rückschau*-Phase enthielten, wurde vorgenommen, da sich diese Bearbeitungen deutlich von den übrigen unterschieden. Gleichzeitig ähnelten sich beide Abläufe bis zur *Rückschau*-Phase, in der entweder ein Fehler gefunden und in eine vorherige Phase gewechselt wurde oder kein Fehler gefunden und die Aufgabe abgeschlossen wurde. Die linearen und zyklischen Phasenverläufe ohne *Rückschau*-Phase unterscheiden sich hingegen deutlich und zwar in der Form, dass bei den zyklischen Verläufen derartige Schwierigkeiten im Prozess auftraten, dass die Studierenden ohne Reflexion in eine andere Phase wechselten. In den linearen Phasenverläufen ohne *Rückschau* traten solche Schwierigkeiten nicht auf.

Lösungen, die in einem *Schnellen Prozess* gefunden wurden, zeichneten sich dadurch aus, dass hierfür die Verstehens- bzw. Planungsphase aufgrund der Verständlichkeit des Problems wegfiel. Diese Prozesse sind im Allgemeinen keine Problemlöseprozesse im Sinne dieser Arbeit wie sie in Abschnitt 4.1.2 definiert wurden. *Abbruch*-Prozesse sind solche, bei denen keine Phase beobachtet werden konnte, in der ein Plan durchgeführt wurde. Diese endeten in

der Verstehens- bzw. Planungsphase und führten zu keiner Lösung.

Tabelle 9.12: Kategorien der Phasenverläufe beim Lösen mathematischer Probleme durch die Studierenden.

Kategorie	Beispiele
Linear/ Zyklisch mit Rückschau	a) Verstehen des Problems - Ausdenken eines Plans - Durchführen des Plans - Rückschau b) Verstehen des Problems - Ausdenken eines Plans - Durchführen des Plans - Rückschau - Durchführen des Plans
Linear ohne Rückschau	a) Verstehen des Problems - Ausdenken eines Plans - Durchführen des Plans
Zyklisch ohne Rückschau	a) Verstehen des Problems - Ausdenken eines Plans - Durchführen des Plans - Ausdenken des Plans - Durchführen des Plans b) Verstehen des Problems - Ausdenken eines Plans - Verstehen des Problems - Ausdenken des Plans - Durchführen des Plans
Schneller Prozess	a) Verstehen des Problems - Durchführen des Plans b) Ausdenken eines Plans - Durchführen des Plans
Abbruch	a) Verstehen des Problems - Ausdenken eines Plans b) Verstehen des Problems

### Messzeitpunkt 1

Die Auswertung der Phasenverläufe wird für jeden Messzeitpunkt zum einen anhand der Gruppen und zum anderen anhand der Aufgaben dargestellt. Dies ermöglicht eine Analyse der Ergebnisse in beiden Dimensionen. So können Aussagen zu den Gruppen getroffen werden und zusätzlich Aufgaben identifiziert werden, die bestimmte Vorgehensweisen erfordern. Ergebnisse zu Gruppe 7 liegen nicht vor, da die Aufnahmen nicht vollständig auswertbar waren.

Kapitel 9.2.1 Heuristiken	MZP1	MZP2	MZP3
<b>Kapitel 9.2.2</b> <b>Problemlösephasen</b>	<b>MZP1</b>	MZP2	MZP3
Kapitel 9.2.3 Epistemic Games	MZP1	MZP2	MZP3

Welche Phasenverläufe bei den einzelnen Gruppen beobachtet werden konnten, ist in Tabelle 9.13 dargestellt. Bei den Bearbeitungen zeigte sich, dass nahezu alle Gruppen am häufigsten einen linearen Bearbeitungsprozess ohne die *Rückschau*-Phase nutzten, um die Aufgaben zu lösen. In 52% aller Aufgabenbearbeitungen konnte ein solch lineares Vorgehen beobachtet werden. Besonders die Gruppen 8, 9 und 14 nutzten bei mindestens 75% der Aufgaben einen linearen Ansatz. Nach den linearen Prozessen waren die schnellen Prozesse die zweithäufigste Form der Aufgabenbearbeitung. Die Gruppen 11 und 13 nutzten diese Form am häufigsten, um die Aufgaben zu bearbeiten. Insgesamt wurde mehr als jede vierte Aufgabe (26%) mit Hilfe eines solchen Nicht-Problemlöseprozesses bearbeitet. Prozesse mit *Rückschau*-Phase waren nur in 13% der Fälle beobachtbar. Die Gruppen 8, 12 und 14 nutzten bei keiner Aufgabe die Möglichkeit, ihren Prozess zu reflektieren.

Während der lineare Bearbeitungsprozess die häufigste Form war, waren die Studierenden bei Aufgaben, die an sie eine leichte Anforderung stellten und in denen sie einen schnellen Prozess nutzen konnten, am erfolgreichsten. In diesen Fällen konnten die Studierenden 85% der Punkte erreichen, wohingegen sie bei den linearen Prozessen nur 64% der Punkte erreichten. Nutzten die Studierenden die Möglichkeit zu reflektieren, erreichten sie durchschnittlich 59% der Punkte. Bei zyklischen Prozessen ohne eine *Rückschau*-Phase erzielten sie nur 25% der Punkte. Auffällig ist, dass die drei erfolgreichsten Gruppen (Gruppe 6 mit 15,5 Punkten, Gruppe 5 und 9 mit jeweils 14,5 Punkten) nur Prozesse zeigten, in denen sowohl Planungs- als auch Durchführungsphasen vorhanden waren, zyklische Prozesse ohne *Rückschau*-Phase und Abbrüche waren bei ihnen nicht beobachtbar, dagegen war bei allen anderen Gruppen mindestens einer dieser beiden Bearbeitungsverläufe zu beobachten.

Welche Phasenverläufe sich bei den einzelnen Aufgaben ergaben, ist in Tabelle 9.14 dargestellt. Bei 12 der 16 Aufgaben war der lineare Bearbeitungsprozess die von den Studierenden bevorzugte Vorgehensweise, um zu einer Lösung zu gelangen. Dies umfasste sowohl leichte, mittelschwere als auch schwere Aufgaben. Auffällig ist bei dieser Art der Bearbeitung der unterschiedliche Erfolg. Bei den leichten Aufgaben wurden mit diesem Vorgehen 90% der möglichen Punkte erreicht, bei den mittelschweren 52% und bei den schweren Aufgaben 49%. Ähnliches konnte bei Aufgaben, die mit einem schnellen Prozess gelöst wurden, beobachtet werden. Zwei Aufgaben (*HM1* und *HM6*), welche zu den leichten Aufgaben gehörten, wurden am häufigsten mit Hilfe eines solchen Nicht-Problemlöseprozesses bearbeitet. Bei leichten Aufgaben insgesamt konnten durch schnelle Prozesse 97% der möglichen Punkte erreicht werden, bei den mittelschweren 63% und bei den schweren Aufgaben 50%.<sup>12</sup> Prozesse, in denen die Studierenden zyklisch ohne eine *Rückschau*-Phase vorgingen, und Abbrüche waren die seltensten Formen der Bearbeitung (5% bzw. 4%), diese kamen fast ausschließlich bei schweren Aufgaben vor (Ausnahmen sind die Aufgaben *HM8* mit einer zyklischen Bearbeitung und einem Abbruch und die Aufgabe *HM11* mit einer zyklischen Bearbeitung).

Vergleicht man die Aufgaben gruppiert nach Schwierigkeit (siehe auch Abschnitt 7.7), so fällt auf, dass die Studierenden besonders bei schweren Aufgaben ihren Bearbeitungsprozess reflektierten. Die meisten Prozesse mit einer *Rückschau* konnten bei den schweren Aufgaben beobachtet werden (70% der Prozesse mit *Rückschau*), nur bei einer leichten Aufgabe konnte ein solcher Prozess beobachtet werden. Gleichzeitig kamen 70% der schnellen Nicht-Problemlöse-Prozesse bei leichten Aufgaben vor. Zyklische Prozesse ohne eine *Rückschau*-Phase waren fast ausschließlich bei schweren Aufgaben zu beobachten. Lineare Bearbeitungsprozesse waren sowohl bei den leichten als auch bei den schweren Aufgaben gleich oft zu beobachten (39 Prozesse).

---

<sup>12</sup>Am Messzeitpunkt 1 konnte nur bei vier Bearbeitungen schwerer Aufgaben ein schneller Prozess beobachtet werden. In zwei Fällen waren diese erfolgreich.

Tabelle 9.13: Typen und Häufigkeit des Auftretens von Problemlösephasen bei der Gruppenarbeit zum ersten MZP (in Klammern die erreichte Punktzahl), nach Gruppen sortiert.

Gruppe	Linear/Zyklisch mit		Linear ohne		Zyklisch ohne		Schneller Prozess	Abbruch	Summe
	Rückschau		Rückschau		Rückschau				
1	1 (0)		11 (6)		1 (0)		3 (2)	0 (0)	16 (8)
2	4 (2)		7 (3)		1 (1)		4 (3,5)	0 (0)	16 (9,5)
3	3 (1)		6 (5)		0 (0)		5 (3,5)	2 (0)	16 (9,5)
4	3 (1,5)		6 (4)		1 (0)		4 (4)	2 (0)	16 (9,5)
5	3 (3)		10 (9,5)		0 (0)		3 (2)	0 (0)	16 (14,5)
6	4 (4)		8 (7,5)		0 (0)		4 (4)	0 (0)	16 (15,5)
8	0 (0)		12 (6)		0 (0)		4 (4)	0 (0)	16 (10)
9	2 (1)		12 (11,5)		0 (0)		2 (2)	0 (0)	16 (14,5)
10	1 (0)		10 (4)		1 (0)		1 (1)	3 (0)	16 (5)
11	3 (1)		5 (1,5)		0 (0)		7 (6)	1 (0)	16 (8,5)
12	0 (0)		6 (3)		3 (0,5)		5 (5)	1 (0)	15 (8,5)
13	3 (2,5)		1 (0)		2 (1)		10 (8)	0 (0)	16 (11,5)
14	0 (0)		13 (8)		1 (0)		2 (1,5)	0 (0)	16 (9,5)

Tabelle 9.14: Typen und Häufigkeit des Auftretens von Problemlösephasen bei der Gruppenarbeit zum ersten MZP (in Klammern die erreichte Punktzahl), nach Aufgaben sortiert.

Aufgabe (Schwierigkeit)	Linear/Zyklisch mit Rückschau	Linear ohne Rückschau	Zyklisch ohne Rückschau	Schneller Prozess	Abbruch	Summe
HM1 (-3,39)	0 (0)	5 (5)	0 (0)	8 (8)	0 (0)	13 (13)
HM2 (-2,69)	0 (0)	8 (5)	0 (0)	5 (5)	0 (0)	13 (10)
HM3 (0,66)	1 (1)	7 (1)	1 (0)	4 (2)	0 (0)	13 (4)
HM4 (-2,00)	1 (1)	9 (8)	0 (0)	3 (3)	0 (0)	13 (12)
HM5 (-2,82)	0 (0)	8 (8)	0 (0)	5 (5)	0 (0)	13 (13)
HM6 (-2,66)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	13 (12)	0 (0)	13 (12)
HM7 (-3,71)	0 (0)	9 (9)	0 (0)	4 (4)	0 (0)	13 (13)
HM8 (0,76)	1 (0)	10 (7)	1 (1)	0 (0)	1 (0)	13 (8)
HM9 (2,13)	0 (0)	8 (3)	1 (0)	2 (1)	2 (0)	13 (4)
HM10 (1,49)	4 (3)	8 (4)	1 (0)	0 (0)	0 (0)	13 (7)
HM11 (0,22)	1 (0,5)	5 (3)	1 (0,5)	6 (4,5)	0 (0)	13 (8,5)
HM12 (0,83)	4 (3)	7 (4)	0 (0)	2 (1)	0 (0)	13 (8)
HM13(2,64)	6 (2,5)	5 (3)	2 (0)	0 (0)	0 (0)	13 (5,5)
HM14 (1,35)	5 (2)	6 (2)	0 (0)	0 (0)	2 (0)	13 (4)
HM15 (2,89)	2 (1)	5 (2)	1 (0)	1 (0)	3 (0)	12 (3)
HM16 (1,36)	2 (2)	7 (5)	2 (1)	1 (1)	1 (0)	13 (9)

## Messzeitpunkt 2

Kapitel 9.2.1 Heuristiken	MZP1	MZP2	MZP3
<b>Kapitel 9.2.2</b> <b>Problemlösephasen</b>	MZP1	<b>MZP2</b>	MZP3
Kapitel 9.2.3 Epistemic Games	MZP1	MZP2	MZP3

Auf die gleiche Weise wie für den ersten Messzeitpunkt wurden für den zweiten Messzeitpunkt für die Mathematikaufgaben das Auftreten und die Reihenfolge der Problemlösephasen nach Polya ermittelt (siehe Tabelle 9.15). Zu diesem Zeitpunkt haben noch neun Gruppen an der Studie teilgenommen (vgl. Abschnitt 7.2), jedoch waren auch zu diesem Messzeitpunkt die Daten von Gruppe 7 nur unvollständig, daher wurden sie nicht berücksichtigt. Die häufigste Form der Bearbeitung war der lineare Prozess ohne eine *Rückschau*-Phase (52% aller Aufgabenbearbeitungen). Lediglich Gruppe 6 nutzte häufiger einen schnellen Prozess als einen linearen. Auffällig waren zudem die Gruppen 9 und 12, bei denen in zehn bzw. elf und somit in über 60% ihrer Bearbeitungen lineare Prozesse beobachtet werden konnten. Mehr als jede fünfte Aufgabe wurde in einem schnellen Prozess (21%) von den Studierenden bearbeitet, und ein linearer oder zyklischer Prozess mit *Rückschau*-Phase konnte in 18% der Bearbeitungen beobachtet werden. Hier hob sich Gruppe 6 hervor, die sowohl die meisten Bearbeitungen mit einer *Rückschau*-Phase als auch die meisten schnellen Prozesse nutzte, um die Mathematikaufgaben zu lösen, während Gruppe 12 bei keiner Bearbeitung ihren Prozess reflektierte und auch nur bei einer Aufgabe in der Lage war, diese in einem schnellen Prozess zu bearbeiten. Eine zyklische Bearbeitung ohne *Rückschau*-Phase wurde nur in 4% der Aufgabenbearbeitungen von den Studierenden gewählt.

Am erfolgreichsten waren die Gruppen, wenn sie eine Aufgabe durch einen schnellen Prozess lösen konnten, 85% solcher Bearbeitungen waren erfolgreich. Ähnlich erfolgreich waren die Gruppen, wenn sie ihren Lösungsprozess reflektierten. Bei 21 Aufgabenbearbeitungen, in denen eine Reflexion beobachtbar war, erreichten die Studierenden 17 Punkte von 21 möglichen. Lediglich Grup-

pe 1 war bei den Bearbeitungen, in denen die Studierenden ihren Prozess reflektierten, nie erfolgreich. Mit Hilfe von linearen Prozessen waren die Studierenden nur in 77% der Bearbeitungen erfolgreich. Auffällig war, dass bei den beiden erfolgreichsten Gruppen (Gruppe 9 mit 16 Punkten und Gruppe 6 mit 15,5 Punkten) keine zyklischen Prozesse ohne *Rückschau* beobachtet werden konnten. Die zyklischen Prozesse ohne *Rückschau* führten bei den anderen Gruppen am seltensten zum Erfolg. Nur 30% der möglichen Punkte erreichten die Gruppen bei ihren Aufgabenbearbeitungen, wenn sie einen solchen Prozess verfolgten.

Welche Phasenverläufe bei den einzelnen Aufgaben beobachtet werden konnten, ist in Tabelle 9.16 dargestellt. Bei zehn von 16 Aufgaben wählten die meisten Studierendengruppen einen linearen Bearbeitungsprozess, um zur Lösung zu gelangen. Dies umfasste sowohl leichte, als auch mittelschwere und schwere Aufgaben. Auffällig war bei dieser Art der Bearbeitung, wie auch schon beim ersten Messzeitpunkt, der unterschiedliche Erfolg. Bei den leichten Aufgaben wurden mit diesem Vorgehen nahezu 97% der möglichen Punkte erreicht, bei den mittelschweren 53% und bei den schweren Aufgaben 68%. Mit Hilfe der zweithäufigsten Form der Bearbeitung, dem schnellen Prozess, konnten die Studierenden bei den schweren Aufgaben keine richtig lösen. Bei den leichten Aufgaben konnten die Studierenden dagegen 94% der möglichen Punkte erreichen und bei den mittelschweren 78%.

Auffällig war zudem, dass die Studierenden besonders bei schweren Aufgaben ihren Bearbeitungsprozess reflektierten (bei 15 Bearbeitungen, 71% alle Prozesse mit *Rückschau*). Bei den mittelschweren und leichten Aufgaben war dies seltener der Fall (mittelschwer: 4, leicht: 2). Während dieses Vorgehen bei den leichten Aufgaben immer erfolgreich war, wurden bei den schweren Aufgaben 80% und bei den mittelschweren nur 75% der möglichen Punkte erreicht. Bei den schweren Aufgaben war dieser Prozess am erfolgreichsten, mit linearen und zyklischen Prozessen ohne *Rückschau* erreichten die Studierenden hingegen nur 68% bzw. 38% der möglichen Punkte in den Aufgaben. Abbrüche konnten nur bei schweren Aufgaben beobachtet werden, bei mittelschweren und leichten Aufgaben bearbeiteten alle Gruppen die Aufgaben bis zu einem Endergebnis. Ebenso waren zyklische Prozesse ohne *Rückschau* bis auf eine Ausnahme lediglich bei den schweren Aufgaben zu beobachten.

Tabelle 9.15: Typen und Häufigkeit des Auftretens von Problemlösephasen bei der Gruppenarbeit zum zweiten MZP (in Klammern die erreichte Punktzahl), nach Gruppen sortiert.

Gruppe	Linear/Zyklisch mit		Linear ohne		Zyklisch ohne		Schneller Prozess	Abbruch	Summe
	Rückschau	Rückschau	Rückschau	Rückschau	Rückschau	Rückschau			
1	2 (0)		7 (3)		1 (0)		3 (2)	2 (0)	15 (5)
2	2 (2)		7 (7)		3 (1,5)		4 (4)	0 (0)	16 (14,5)
5	3 (3)		8 (6)		0 (0)		5 (4)	0 (0)	16 (13)
6	5 (4,5)		5 (5)		0 (0)		6 (6)	0 (0)	16 (15,5)
9	3 (3)		10 (10)		0 (0)		3 (3)	0 (0)	16 (16)
10	3 (2)		9 (5)		0 (0)		2 (1)	2 (0)	16 (8)
12	0 (0)		11 (7)		1 (0)		1 (1)	3 (0)	16 (8)
14	3 (2,5)		8 (7)		0 (0)		3 (2)	2 (0)	16 (11,5)

Tabelle 9.16: Typen und Häufigkeit des Auftretens von Problemlösephasen bei der Gruppenarbeit zum zweiten MZP (in Klammern die durchschnittlich erreichte Punktzahl), nach Aufgaben sortiert.

Aufgabe (Schwierigkeit)	Linear/Zyklisch mit Rückschau	Linear ohne Rückschau	Zyklisch ohne Rückschau	Schneller Prozess	Abbruch	Summe
HM1 (-3,39)	0 (0)	5 (5)	0 (0)	3 (3)	0 (0)	8 (8)
HM2 (-2,69)	0 (0)	6 (5)	0 (0)	2 (1)	0 (0)	8 (6)
HM3 (0,66)	0 (0)	4 (1)	0 (0)	4 (2)	0 (0)	8 (3)
HM4 (-2,00)	2 (2)	5 (5)	0 (0)	1 (1)	0 (0)	8 (8)
HM5 (-2,82)	0 (0)	8 (8)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	8 (8)
HM6 (-2,66)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	8 (8)	0 (0)	8 (8)
HM7 (-3,71)	0 (0)	5 (5)	0 (0)	3 (3)	0 (0)	8 (8)
HM8 (0,76)	2 (1)	6 (5)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	8 (6)
HM9 (2,13)	0 (0)	6 (3)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	8 (3)
HM10 (1,49)	2 (2)	3 (3)	0 (0)	0 (0)	3 (0)	8 (5)
HM11 (0,22)	1 (1)	3 (2)	1 (0)	2 (2)	0 (0)	7 (5)
HM12 (0,83)	1 (1)	4 (1)	0 (0)	3 (3)	0 (0)	8 (5)
HM13 (2,64)	6 (3)	1 (0)	1 (0,5)	0 (0)	0 (0)	8 (3,5)
HM14 (1,35)	3 (3)	2 (2)	1 (0)	0 (0)	2 (0)	8 (5)
HM15 (2,89)	3 (3)	1 (0)	0 (0)	0 (0)	4 (0)	8 (3)
HM16 (1,36)	1 (1)	6 (5)	1 (1)	0 (0)	0 (0)	8 (7)

### Messzeitpunkt 3

Kapitel 9.2.1 Heuristiken	MZP1	MZP2	MZP3
<b>Kapitel 9.2.2 Problemlösephasen</b>	MZP1	MZP2	<b>MZP3</b>
Kapitel 9.2.3 Epistemic Games	MZP1	MZP2	MZP3

Zum dritten Messzeitpunkt wurden die Gruppen aufgelöst und die Studierenden bei der Einzelarbeit an den Mathematik- und Physikaufgaben beobachtet (siehe Abschnitt 7.2).

Die Phasenverläufe, wie sie bei den einzelnen Studierenden beobachtet werden konnten, sind in Tabelle 9.17 dargestellt. Die Daten von zwei Studierenden waren leider unvollständig. Aus diesem Grund wurden sie für die weiteren Auswertungen nicht berücksichtigt. Es zeigte sich, dass lineare Lösungsprozesse ohne eine abschließende Reflexion bei nahezu allen Studierenden die häufigste Form der Bearbeitung von Mathematikaufgaben am dritten Messzeitpunkt waren. In 71% aller beobachteten Bearbeitungen wählten die Studierenden ein solches Vorgehen. Besonders die Studierenden 29, mit ausschließlich linearen Prozessen ohne *Rückschau*, sowie 04, 30 und 19 mit jeweils acht linearen Prozessen ohne Reflexion fielen hier auf. Lediglich Student 01 nutzte am häufigsten schnelle Prozesse, um die Aufgaben zu bearbeiten. Nach den linearen waren die zyklischen Prozesse ohne *Rückschau* mit 17 (11%) Anwendungen die zweithäufigste Art und Weise, wie die Studierenden die Bearbeitungen gestalteten. Einige Studierende zeigten eine reflektierte Bearbeitung, jedoch meistens nur bei einer Aufgabe, höchstens bei zwei Aufgaben. Insgesamt wurde dieser Prozess bei elf Bearbeitungen beobachtet. Schnelle Nicht-Problemlöse-Prozesse konnten neunmal bei drei Studierenden beobachtet werden, unter denen Student 01 mit sechs Anwendungen besonders auffiel.

Während lineare Prozesse ohne *Rückschau* die häufigste Form der Bearbeitung darstellten, waren die Studierenden bei den Aufgaben, in denen sie einen schnellen Prozess durchliefen, am erfolgreichsten. In acht von neun Aufgaben gelang ihnen eine Lösung des Problems (89% der möglichen Punkte). Nutzten

die Studierenden einen linearen Prozess ohne *Rückschau*, erreichten sie hingegen nur etwas über die Hälfte der möglichen Punkte (55,5 von 109 möglichen Punkten). Reflektierten die Studierenden ihr Vorgehen, waren sie in 5 von 11 Aufgabenbearbeitungen erfolgreich. Bei zyklischen Prozessen ohne *Rückschau* waren die Studierenden am wenigsten erfolgreich, hier erreichten sie nur knapp 18% der möglichen Punkte (3,5 von 17). Auffällig war, dass bei den beiden erfolgreichsten Studierenden (Student *33* mit sieben Punkten und Student *01* mit 8,5 Punkten) weder zyklische Prozesse ohne *Rückschau* noch Abbrüche beobachtet werden konnten, die übrigen Studierenden nutzten mindestens einen der beiden Prozesse bei der Bearbeitung der Aufgaben. Eine Ausnahme bildeten hier die Studenten *04* und *29*, die beide ebenfalls keine solchen Prozesse nutzten. Student *04* war ebenfalls relativ erfolgreich mit fünf Punkten, und Student *29* nutzte ausschließlich lineare Prozesse ohne *Rückschau*.

Welche Phasenverläufe bei den einzelnen Aufgaben beobachtet werden konnten, ist in Tabelle 9.18 dargestellt. Bei allen Aufgaben nutzten die meisten Studierenden lineare Prozesse ohne *Rückschau*.<sup>13</sup> Bei den Aufgaben *HM1* und *HM6* nutzten die Studierenden fast ausschließlich diesen Phasenverlauf, um die jeweilige Aufgabe zu bearbeiten. Während die Studierenden jedoch bei den leichten Aufgaben mit solchen Prozessen 85% der möglichen Punkte erreichten, sind dies bei den mittelschweren Aufgaben nur 37% und bei den schweren knapp 21%. Auffällig waren die Aufgaben *HM3* und *HM9*, bei denen ein relativ hoher Anteil der Studierenden ihr Vorgehen reflektierte. Bei der Aufgabe *HM9* waren diese Prozesse die einzigen, die erfolgreich abgeschlossen wurden, jedoch waren die Studierenden nur bei zwei von sechs Bearbeitungen erfolgreich. Bei der Aufgabe *HM3* waren die Studierenden dagegen bei drei von vier Bearbeitungen erfolgreich, wenn sie ihren Prozess reflektierten. Zyklische Prozesse ohne *Rückschau* konnten, bis auf eine Ausnahme, nur bei den mittelschweren und schweren Aufgaben und hier hauptsächlich bei *HM4* und *HM7* beobachtet werden. Diese waren zudem selten erfolgreich. Wenn ein solcher Prozess von den Studierenden durchlaufen wurde, waren sie gegenüber den anderen Prozessen am wenigsten erfolgreich: Nur 19% der möglichen Punkte wurden erreicht, wenn sie diese Form der Bearbeitung durchliefen.

---

<sup>13</sup>Bei Aufgabe *HM9* nutzten jeweils sechs Studierende einen linearen oder zyklischen Prozess mit *Rückschau* oder einen linearen Prozess ohne *Rückschau*.

Vergleicht man die Aufgaben nach Schwierigkeit gruppiert, so zeigten sich Unterschiede sowohl in der Häufigkeit der Prozesse als auch im Erfolg. Die meisten Prozesse mit einer *Rückschau* konnten bei einer schweren Aufgabe (*HM9*) beobachtet werden. Lineare Prozesse ohne *Rückschau* waren bei den leichten und mittelschweren Aufgaben ähnlich häufig (41 Prozesse bzw. 39 Prozesse), bei den schweren Aufgaben etwas seltener mit 29 Prozessen. Jedoch waren die Studierenden, die einen solchen Prozess durchliefen, bei den leichten Aufgaben viel erfolgreicher, als bei den mittelschweren und schweren Aufgaben. Während die Studierenden bei den leichten Aufgaben ungefähr 85% der möglichen Punkte erreichten, waren dies bei den mittelschweren nur 37% und bei den schweren nur knapp 21%. Ähnliches zeigte sich auch bei den zyklischen Prozessen ohne *Rückschau*, die am häufigsten bei den schweren Aufgaben zu beobachten waren, jedoch wurden dort von den Studierenden nur 1,5 von möglichen zehn Punkten erreicht. Die einzige Nutzung dieses Typs bei den leichten Aufgaben war erfolgreich.

Tabelle 9.17: Typen und Häufigkeit des Auftretens von Problemlösephasen bei der Einzelarbeit zum dritten MZP (in Klammern die durchschnittlich erreichte Punktzahl). Nach Studierenden sortiert.

Studierend	Linear		Zyklisch		Schneller	Abbruch	Summe
	erreichte Punktzahl	ohne Rückschau	erreichte Punktzahl	ohne Rückschau			
S01	1 (1)	2 (2)	0 (0)	0 (0)	6 (5,5)	0 (0)	9 (8,5)
S04	1 (1)	8 (4)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	9 (5)
S05	2 (1)	3 (1,5)	3 (1)	3 (1)	1 (0,5)	0 (0)	9 (4)
S06	1 (0)	5 (1,5)	1 (0,5)	1 (0,5)	2 (2)	0 (0)	9 (4)
S08	0 (0)	6 (3)	2 (1,5)	2 (1,5)	0 (0)	1 (0)	9 (4,5)
S09	1 (0)	7 (3)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (0)	9 (3)
S10	1 (0)	7 (6,5)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	0 (0)	9 (6,5)
S11	0 (0)	6 (3,5)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	2 (0)	9 (3,5)
S12	1 (0)	7 (4)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	0 (0)	9 (4)
S19	0 (0)	8 (1,5)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	0 (0)	9 (1,5)
S20	1 (0)	6 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	2 (0)	9 (1)
S28	0 (0)	7 (2,5)	2 (0)	2 (0)	0 (0)	0 (0)	9 (2,5)
S29	0 (0)	9 (3,5)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	9 (3,5)
S30	0 (0)	8 (4,5)	1 (0,5)	1 (0,5)	0 (0)	0 (0)	9 (5)
S31	0 (0)	7 (4)	1 (0)	1 (0)	0 (0)	1 (0)	9 (4)
S33	2 (2)	7 (5)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	9 (7)
S36	0 (0)	6 (4,5)	3 (0)	3 (0)	0 (0)	0 (0)	9 (4,5)

Tabelle 9.18: Typen und Häufigkeit des Auftretens von Problemlösephasen bei der Gruppenarbeit zum dritten MZP (in Klammern die durchschnittlich erreichte Punktzahl). Nach Aufgaben sortiert.

Aufgabe (Schwierigkeit)	Linear/Zyklisch mit		Linear ohne		Zyklisch ohne		Schneller Prozess	Abbruch	Summe
	Rückschau	Rückschau	Rückschau	Rückschau	Rückschau	Rückschau			
HM1 (0,708)	0 (0)	16 (14)	0 (0)	0 (0)	1 (1)	0 (0)	0 (0)	17 (15)	
HM2 (0,545)	0 (0)	14 (12)	1 (1)	1 (1)	1 (1)	1 (0)	1 (0)	17 (14)	
HM3 (0,607)	4 (3)	11 (9)	0 (0)	0 (0)	2 (2)	0 (0)	0 (0)	17 (14)	
HM4 (0,274)	0 (0)	9 (2)	5 (1)	1 (1)	1 (1)	2 (0)	2 (0)	17 (4)	
HM5 (0,290)	1 (0)	14 (7)	1 (0)	1 (0)	1 (1)	0 (0)	0 (0)	17 (8)	
HM6 (0,269)	0 (0)	16 (5,5)	0 (0)	0 (0)	1 (0,5)	0 (0)	0 (0)	17 (6)	
HM7 (0,041)	0 (0)	11 (5)	4 (1,5)	2 (1,5)	2 (1,5)	0 (0)	0 (0)	17 (8)	
HM8 (0,028)	0 (0)	12 (1)	3 (0)	0 (0)	0 (0)	2 (0)	2 (0)	17 (1)	
HM9 (0,014)	6 (2)	6 (0)	3 (0)	0 (0)	0 (0)	2 (0)	2 (0)	17 (2)	

### 9.2.3 Äußere Struktur: Ablauf der Problemlösephasen bei der Bearbeitung physikalischer Aufgaben

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse zur äußeren Struktur bei der Bearbeitung von Physikaufgaben präsentiert. Dies ermöglicht eine Antwort auf die folgende Forschungsfrage:

**F 2.3:** Inwiefern werden *Epistemic Games* von den Studierenden bei der Bearbeitung von Physikaufgaben im ersten Studienjahr eingesetzt?

Zur Beschreibung der äußeren Struktur bei der Bearbeitung der Aufgaben aus der Physik und Technischen Mechanik wurde das Modell der *Epistemic Games* (EG) genutzt (siehe Abschnitt 4.2.2 und 8.1.2.4). Die EGs, welche bei den Studierenden beobachtet werden konnten, sind in Tabelle 9.19 dargestellt. Diese lassen sich zum einen in quantitative und qualitative EGs unterteilen (siehe Abschnitt 4.2.2), zum anderen nach dem Anteil mathematischer Fähigkeiten, welche die Studierenden für die Nutzung des jeweiligen EG benötigen.

Tabelle 9.19: Übersicht über beobachtete *Epistemic Games*. Zusätzlich wird die Klassifizierung in quantitative und qualitative Games und nach dem Anteil von enthaltener Mathematik dargestellt.

Epistemic Game	Klassifizierung	Mathematik
Mapping Meaning to Mathematics	quantitativ	hoch
Mapping Mathematics to Meaning	quantitativ	hoch
Recursive Plug and Chug	quantitativ	mittel
Pictorial Analysis	qualitativ	niedrig
Physical Mechanism Game	qualitativ	niedrig

Das Game *Transliteration to Mathematics* wurde von den Studierenden nicht genutzt. Im Folgenden werden für die Messzeitpunkte jeweils die Vorgehensweisen sowohl beim Einsatz von quantitativen als auch von qualitativen EG vorgestellt.

## Messzeitpunkt 1

Kapitel 9.2.1 Heuristiken	MZP1	MZP2	MZP3
Kapitel 9.2.2 Problemlösephasen	MZP1	MZP2	MZP3
<b>Kapitel 9.2.3</b> <b>Epistemic Games</b>	<b>MZP1</b>	MZP2	MZP3

Der Einsatz der EGs zum ersten Messzeitpunkt ist in Abbildung 9.38 dargestellt. Die Bearbeitungen von Gruppe 7 wurden nicht ausgewertet, da die Aufnahmen unvollständig waren.

Bei einem Großteil der Bearbeitungen der Physikaufgaben durch die Studierenden zeigten sich EGs, lediglich in 25% der Prozesse konnte kein Einsatz beobachtet werden. Am häufigsten wurde dabei das *Physical Mechanism Game* genutzt, um zu einer Lösung zu gelangen (56% aller EGs). Besonders viele Gruppen durchliefen dieses Game bei den Aufgaben *TM3* bis *TM7* und *TM12* sowie *TM13*. Alle diese Aufgaben erforderten keine Berechnungen von den Studierenden. In Abbildung 9.38 ist besonders der rote Bereich bei den Aufgaben *TM8* bis *TM11* auffällig. Bei diesen Aufgaben benötigten die Studierenden häufig quantitative EGs, um zu einer Lösung zu gelangen, so war nur bei diesen Aufgaben der Anteil quantitativer Games über 50%. Gleichzeitig gab es Gruppen, die bei diesen Aufgaben neben den quantitativen auch qualitative EGs einsetzten. Hierbei nutzten Sie die Möglichkeit, aus den vorhandenen Lösungsalternativen argumentativ eine Lösung zu ermitteln. Insgesamt wurden diese vier Aufgaben nur von wenigen Gruppen vollständig gelöst. Die erfolgreichen Gruppen nutzten hierbei mindestens das quantitative Game *Recursive Plug and Chug*. Gruppen, die mit qualitativen Games versuchten, die Aufgaben zu lösen, waren nie erfolgreich. Jedoch waren auch Gruppen, welche die Nutzung der quantitativen Games *Mapping Meaning to Mathematics* und *Mapping Mathematics to Meaning* zeigten, nicht immer erfolgreich. Die beiden folgenden Transkripte stellen exemplarisch an der Aufgabe *TM9* (siehe Abbildung 9.39) dar, wie sich erfolgreiche und nicht erfolgreiche Gruppen bei der Nutzung quantitativer Games unterschieden.

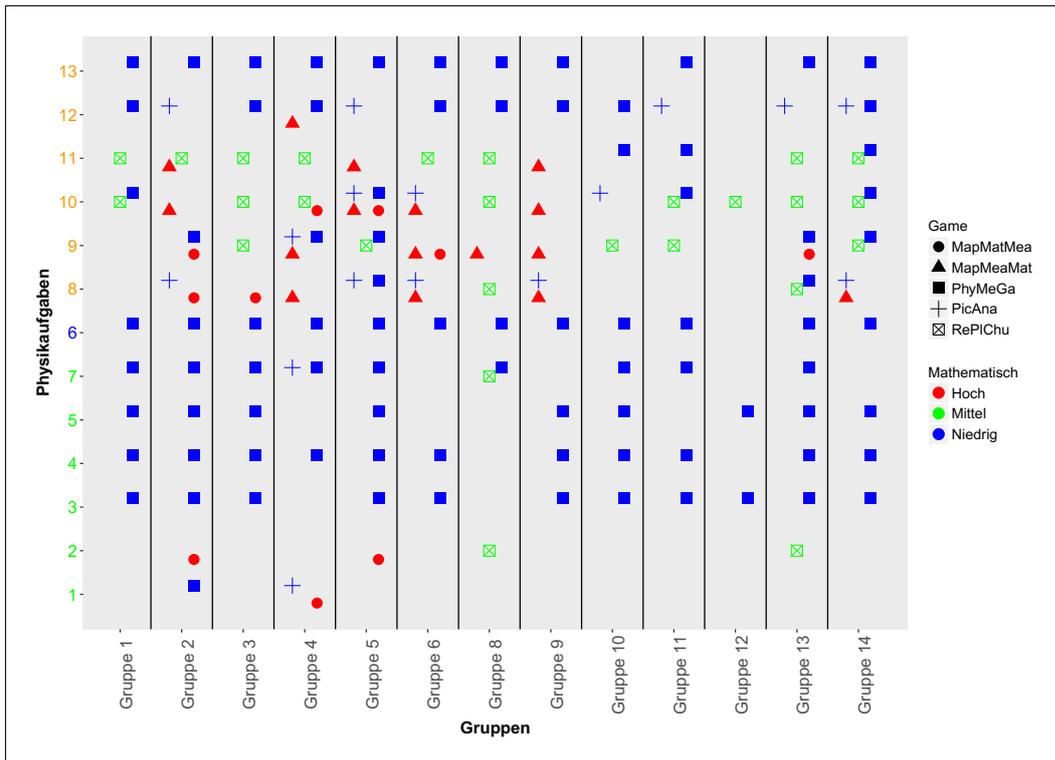


Abbildung 9.38: Beobachtete *Epistemic Games* zum ersten Messzeitpunkt. Das Merkmal *Mathematisch* gibt an, ob in dem jeweiligen Game mathematische Verfahren genutzt werden (mittel), ob dabei ein konzeptuelles Verständnis gezeigt wird (hoch) oder ob keine mathematischen Methoden verwendet werden (niedrig). Dieses Merkmal ist verbunden mit den jeweiligen EGs. Die Aufgaben sind nach Schwierigkeit sortiert (leicht=grün, mittel=blau, schwer=orange).

Gruppe 9 beginnt, nachdem die Studierenden die Aufgabe gelesen haben, einen Plan zu entwickeln, und übersetzt die Größen aus der physikalischen Situation in mathematische Einheiten.

S22: Hierbei müssen wir dann drei Sachen beachten. [...] Einmal gilt für jedes die Gewichtskraft.

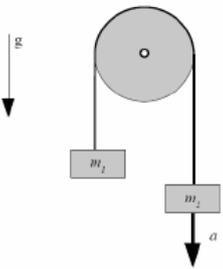
S30: Ja.

S22: Also haben wir einmal  $F_{G1} = m_1 \cdot g$ ,  $F_{G2} = m_2 \cdot g$  (schreibt die Formeln auf, siehe Abbildung 9.40).

S30: Wobei das (zeigt auf  $F_{G2}$ ) größer als das (zeigt auf  $F_{G1}$ ).

S22: Und wir haben die Formel [...]  $F = m_1 + m_2$  (schreibt  $F = (m_1 + m_2)$ )

Mit dem in der Skizze dargestellten Gerät kann die Fallbeschleunigung gemessen werden. Die Massen  $m_1$  und  $m_2$  sind durch ein Seil, das über einer Rolle liegt, miteinander verbunden. Hierbei ist  $m_2$  größer als  $m_1$ . Die Reibung wird vernachlässigt.



Leiten Sie mit Hilfe der Formel  $F = (m_1 + m_2) \cdot a$  die Beschleunigung  $a$  für den Körper mit der Masse  $m_2$  her!  
Tragen Sie die Lösung in das dafür vorgesehene Feld ein!

$a =$

Abbildung 9.39: Aufgabe TM9 aus der Gruppenarbeit am ersten Messzeitpunkt.

auf).

S30: Mal  $g$ , also mal  $a$

S22: Mal  $a$  (schreibt  $\cdot a$  hinter die vorherige *Gleichung*). Es ist wichtig, dass das  $a$  ist und nicht  $g$ , weil  $a$  ist die Beschleunigung und  $g$  ist nur

S04: Dann kannst du schreiben  $m_1$  größer  $m_2$ . [..]

S22: Habe ich schon.

S04: Ach so. [6]

S30: Beschleunigung auf den Körper.

Nachdem die Studierenden die physikalische Situation in mathematische Einheiten übersetzt haben, setzen sie die Einheiten der physikalischen Situation folgend in Zusammenhang und formen anschließend die *Gleichung* um.

S22: Und damit  $Fa$  gilt muss meiner, glaube du

S30: Reicht es nicht einfach, wenn man

S22:  $F_{G2} - F_{G1}$  ist  $F$ .

S30: Ja.

$$F_{g1} = m_1 \cdot g < F_{g2} = m_2 \cdot g \quad F = (m_1 + m_2) \cdot a$$

$$F = F_{g2} - F_{g1}$$

$$(m_1 + m_2) \cdot a = m_2 \cdot g - m_1 \cdot g$$

$$a = \frac{(m_1 - m_2) \cdot g}{m_1 + m_2}$$

$s = 10\text{m}$   
 $t = 7,0\text{s}$   
 $v = \frac{s}{t}$      $a = g$   
 $g$

Abbildung 9.40: Abbildung aus einer erfolgreichen Gruppenarbeit der Gruppe 9 von Aufgabe TM9 am ersten Messzeitpunkt.

S22: Oder? [...] Damit beschleunigt wird, ist das die Differenz der beiden, also  $F = F_{G2}$ , also die größere minus die kleinere, weil es ja in diese Richtung (fährt mit dem Stift in der vorgegebenen *Abbildung* von oben nach unten) beschleunigt wird. [...] Also haben wir  $m_1 + m_2$  mal  $a$  gleich  $m_1$  mal  $g$  mal  $m$ , minus  $m_2$  mal  $g$  (schreibt  $(m_1 + m_2) \cdot a = m_1 \cdot g - m_2 \cdot g$ ).

Diese *Gleichung* formen die Studierenden um und erhalten die folgende Lösung:  $a = \frac{(m_1 - m_2) \cdot g}{m_1 + m_2}$ . Am Ende vertauschen sie  $m_1$  und  $m_2$ , damit sie eine positive Beschleunigung erhalten.

Dieses Ergebnis entspricht den Erwartungen und wurde als richtig gewertet. Durch die Umformung hin zu einer positiven Beschleunigung wurde sogar bewusst die Richtung der Beschleunigung korrekt beachtet.

Im folgenden Transkript wird eine nicht erfolgreiche Bearbeitung der Aufgabe dargestellt, die exemplarisch für viele Gruppen steht, die vergleichbar vorgegangen sind. Nachdem Gruppe 5 die Aufgabenstellung gelesen und die Beschleunigung  $a$  als Zielgröße identifiziert hat, macht ein Student einen Vorschlag für eine *Gleichung*.

S02: Ich habe das so gemacht. [...]

S08: Brauchst du ein großes Blatt, oder?

S02: Ist kein Problem. [...]  $F$  ist dann  $am_1$  plus  $am_2$  (schreibt  $F = am_1 + am_2$ , siehe Abbildung 9.41) [...] und wir wollen, dass die Beschleunigung von dem Körper mit der Masse  $m_2$ , also das hier wollen wir (kreist  $a$  im

Ausdruck  $am_2$  ein). [.] Das auf die andere Seite.  $am_2$  gleich. Ich habe die Vorzeichen jetzt direkt gewechselt, okay?

S08: Ja. [.]

S02:  $am_1$  und durch  $m_2$ . [6]

S08: Ja, dann schreib das da rein.

$$F = am_1 + am_2$$

$$am_2 = F - am_1$$

$$a = \frac{F - am_1}{m_2}$$

Abbildung 9.41: Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Gruppenarbeit der Gruppe 5 von Aufgabe TM9 am ersten Messzeitpunkt.

Anschließend erklärt Student *S02* sein Vorgehen noch einmal und die Studierenden diskutieren die korrekte Beschreibung der physikalischen Situation.

S02: Die Formel ausgeklammert und umgestellt nach  $a$ .

S10: Aber das ist doch totaler Blödsinn, dann hast du doch hier (zeigt auf  $am_1$  im Zähler) immer noch ein  $a$  drin stehen. [.]

S02: Das ist die Beschleunigung der Masse  $m_1$ .

S10: Aber die willst du ausrechnen, die kann doch nicht in der Formel drin stehen.

S02: Nein, du machst die Beschleunigung  $a$  für den Körper mit der Masse  $m_2$ .

S10: Aber die Beschleunigung ist doch für beide Körper gleich.

S02: Nein.

Die Studierenden diskutieren weiter über die Frage, ob die Beschleunigung der beiden Körper die selbe ist und wovon diese abhängt. Am Ende bleiben sie bei der Lösung  $a = \frac{F - am_1}{m_2}$ .

Dieses Ergebnis entspricht nicht den Erwartungen und wurde nicht als richtig gewertet. Hier wurde nicht beachtet, dass  $a$  die Beschleunigung der resultierenden Kraft  $F$  ist, die sich aus den beiden Teilkräften  $F_1$  und  $F_2$  zusammensetzt (siehe Transkript der erfolgreichen Gruppe).

Die beiden Transkripte zeigen exemplarisch die Unterschiede zwischen den Gruppen, welche die Aufgabe quantitativ lösten und dabei ein konzeptuelles Verständnis des Problems zeigten und den Gruppen, welche die Aufgabe bearbeiteten und dabei kein konzeptuelles Verständnis zeigten. Während Gruppe 9 die physikalische Situation beachtete, dass auf beide Massen entgegengesetzte Kräfte wirken und in ihrer Herleitung der Formel dies berücksichtigte, verblieb Gruppe 5 auf der rechnerischen Ebene ohne ein konzeptuelles Verständnis zu zeigen. Zwar diskutierten die Studierenden auch hier über physikalische Aspekte, diese flossen jedoch nicht in das Aufstellen und Auflösen der *Gleichung* mit ein, es wurde lediglich die vorgegebene Formel umgestellt.

Wie bei den quantitativen Bearbeitungen zeigten sich auch bei der Nutzung der qualitativen EGs systematische Unterschiede zwischen den erfolgreichen und nicht erfolgreichen Gruppen. Die beiden folgenden Transkripte der Aufgabe *TM6* zeigen dies exemplarisch.

In dieser Aufgabe mussten die Studierenden entscheiden, in welche Richtung eine Waage kippt (siehe Abbildung 9.42), zuvor haben sie bereits vier ähnliche Aufgaben bearbeitet.

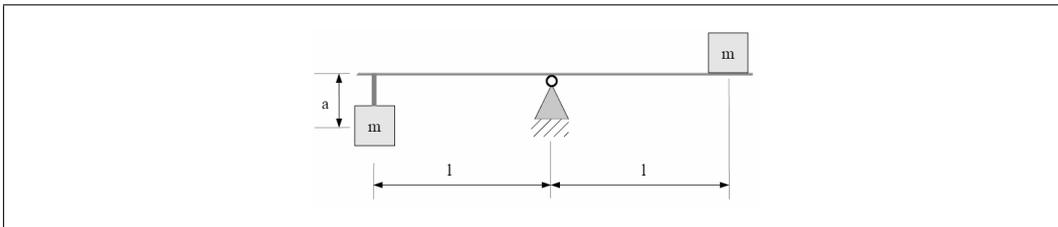


Abbildung 9.42: Fünfter Teil der Aufgabe *TM6* aus der Gruppenarbeit am ersten Messzeitpunkt.

Gruppe 4 hat die vier Teilaufgaben zuvor richtig bearbeitet und fängt nun mit der letzten Teilaufgabe an.

S27: Und das? [..]

S17: Das bleibt auch waagrecht. [...]

S21: Sicher? [..] Das wird doch runter gezogen (zeigt auf die linke Masse).

S27: Ich würde sagen nach links. Da ist ja auch die Zugkraft nach unten.

S17: Das ist ja... [.]

S21: Auch wenn es gleich schwer ist. [4]

S17: (zeigt auf die Aufgabe und möchte zu sprechen beginnen, bricht dann aber ab.)

S21: Ist schwer mit uns.

S17: Das sind alles Momente hier, die daran ziehen. [...] Das bedeutet, du hast einmal hier ein Moment (zeichnet die Situation neu auf, siehe Abbildung 9.43) und das ist immer Länge mal Kraft.

S21: Ja.

S17: Beziehungsweise Masse mal 9,81.

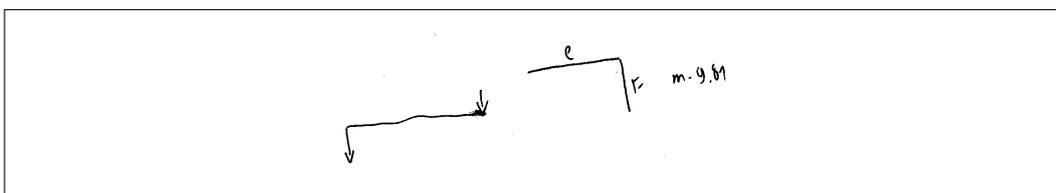


Abbildung 9.43: Abbildung aus einer erfolgreichen Gruppenarbeit der Gruppe 4 von Aufgabe TM6 am ersten Messzeitpunkt.

Nach der Illustration der Situation, erklärt der Student *S17* den beiden anderen Studierenden die physikalische Situation, dabei nutzt er die selbst erstellte *Abbildung*.

S17: Das heißt das  $a$  spielt hier überhaupt keine Rolle. Du hast nur die Länge (zeigt auf den linken Arm der Waage) mal die Kraft nach unten. [...]

S21: Also, [5] ich weiß nicht.

S17: Du könntest die Kraft ja verschieben. [...] Die zeigt ja jetzt, wenn wir das hier haben (zeichnet die linke Skizze, siehe Abbildung 9.43), zeigt die nach da (zeichnet den linken Kraftpfeil) und die nach da (zeichnet den rechten Kraftpfeil).

S21: Ja.

S17: Und du kannst die Kraft einfach nach oben verschieben. [...]

S21: Da ändert sich nichts?

S17: Da ändert sich nichts. [...]

Die Studierenden einigen sich auf die korrekte Antwort, dass die Waage waagrecht verbleibt.

Das folgende Transkript der Bearbeitung der Aufgabe durch die Gruppe 11 zeigt exemplarisch, wie nicht erfolgreiche Gruppen qualitative EGs durchlau-

fen. Nachdem die Gruppe die vier Teilaufgaben zuvor richtig bearbeitet hat, beginnt sie mit der letzten.

S18: Und hier wusste ich nicht (zeigt auf die *Abbildung*). [...] Weil, da war ich mir nicht sicher.

S25: Ich würde da sagen: nach links. Ich habe da links angekreuzt.

S18: Ich habe da auch, wollte da auch links ankreuzen, aber ich habe mir gedacht, ich habe nur links und in der Mitte (zeigt auf die Antworten der vorherigen Teilaufgaben).

S24: Ich habe, glaube ich, waagrecht angekreuzt. Das liegt aber daran, dass du

S18: Ich meine, das zieht ja nach unten.

S24: Also ich würde sagen, das bleibt gleich. Das zieht zwar nach unten, aber ich denke mal das ist das gleiche Gewicht und wenn es das gleiche Gewicht ist, warum sollte sich da irgendetwas verändern?

S25: Weil, wenn du das nach unten hängst, verlagerst du doch im Prinzip den Schwerpunkt. Würde ich sagen.

S18: Ja, würde ich auch sagen. Du hast ja jetzt hier den Schwerpunkt (zeigt auf die linke Masse) [...] und hier (zeigt auf die vorherigen Teilaufgaben) hattest du ihn vorher auf der gleichen Höhe.

S24: Ja, okay. Von mir aus. [.]

S18: Links oder waagrecht?

Die Studierenden einigen sich darauf, für diese Aufgabe anzukreuzen, dass sich die Waage auf der linken Seite nach unten bewegt, also für eine nicht korrekte Antwort.

Die beiden Transkripte zeigen die unterschiedliche Qualität der Vorgehensweisen. Die Entwicklung einer Beschreibung der physikalischen Situation (Schritt 1 im *Physical Mechanism Game*) geschieht bei Gruppe 4 über die Argumentation mit dem physikalischen Begriff des *Moments*, die darüber zur korrekten Lösung gelangte. Die Studierenden in Gruppe 11 argumentierten über eine falsche Vorstellung des Einflusses des Schwerpunktes auf die Bewegung der Waage. Die Studierenden betrachteten die Aufgabe isoliert und erkannten nicht, dass die Argumentation mit dem Schwerpunkt auch bei den vorherigen Teilaufgaben mit mehreren Massestücken angewendet werden müsste, wenn dies die korrekte physikalische Beschreibung gewesen wäre.

## Messzeitpunkt 2

Kapitel 9.2.1 Heuristiken	MZP1	MZP2	MZP3
Kapitel 9.2.2 Problemlösephasen	MZP1	MZP2	MZP3
<b>Kapitel 9.2.3</b> <b>Epistemic Games</b>	MZP1	<b>MZP2</b>	MZP3

Der Einsatz der EGs zum zweiten Messzeitpunkt ist in Abbildung 9.44 dargestellt. Die Bearbeitungen von Gruppe 7 wurden nicht ausgewertet, da die Aufnahmen unvollständig waren.

Bei den meisten Bearbeitungen konnten EGs beobachtet werden, lediglich bei 23 Bearbeitungsprozessen (22% aller Aufgabenbearbeitungen) nutzten die Studierenden kein EG. Insgesamt waren die qualitativen EGs *Physical Mechanism Game* und *Pictorial Analysis Game* häufiger zu beobachten (60 Verwendungen) als die quantitativen EGs (35 Verwendungen). Das *Physical Mechanism Game* war das dominierende bei der Aufgabenbearbeitung am zweiten Messzeitpunkt, bei 45 Aufgaben (47% aller EGs) wurde dies von den Studierenden verwendet, insbesondere bei den Aufgaben *TM3* bis *TM6* und *TM12* sowie *TM13*. Es folgt das EG *Recursive Plug and Chug* mit 22 Anwendungen, welches hauptsächlich bei den Aufgaben *TM2*, *TM10* und *TM11* zum Einsatz kam. Das zweite qualitative Game, das *Pictorial Analysis Game*, wurde von den Studierenden bei 15 Aufgabenbearbeitungen genutzt und damit häufiger als die beiden quantitativen EGs, bei denen Studierende ein konzeptuelles Verständnis zeigten, zusammen (*Mapping Meaning to Mathematics*: 10, *Mapping Mathematics to Meaning*: 3). Auffällig war, dass diese beiden quantitativen Games nur bei der Bearbeitung der Aufgaben *TM8* bis *TM10* beobachtet werden konnten und hier überwiegend von vier Gruppen. Bei den beiden Gruppen 12 und 14 konnte bei keiner Aufgabe der Einsatz eines dieser beiden quantitativen EGs beobachtet werden. Diese beiden Gruppen nutzten dagegen am häufigsten das EG *Recursive Plug and Chug*, auch bei den Aufgaben, bei denen die

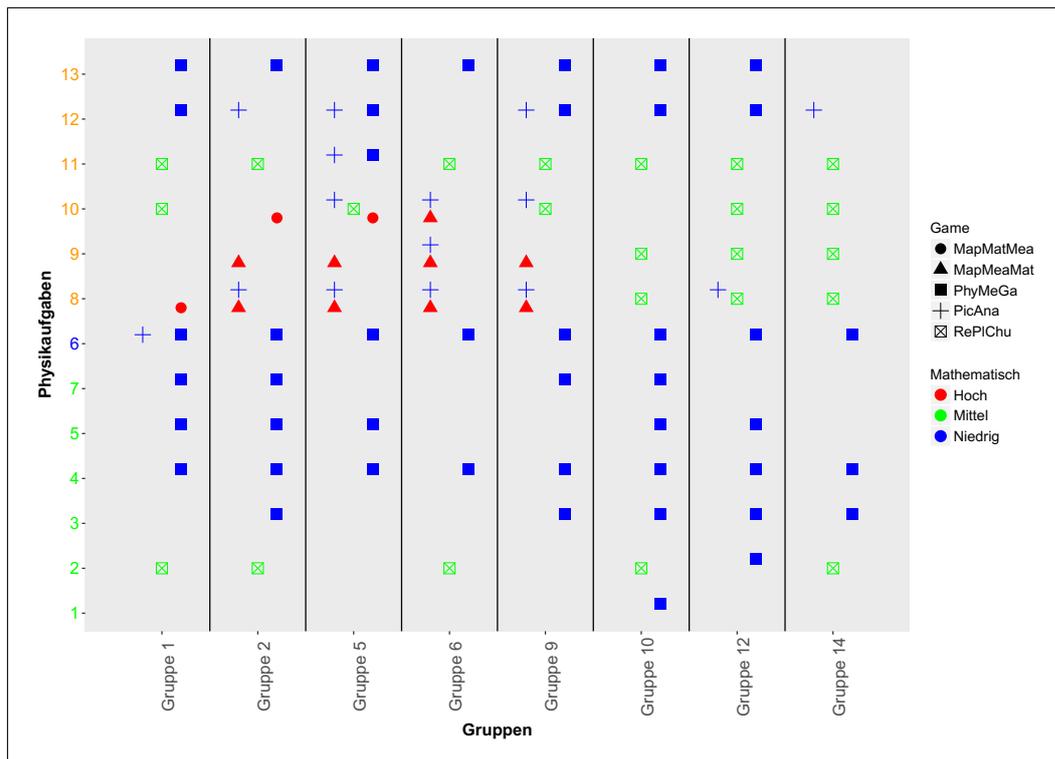


Abbildung 9.44: Beobachtete *Epistemic Games* zum zweiten Messzeitpunkt. Das Merkmal *Mathematisch* gibt an, ob in dem jeweiligen Game mathematische Verfahren genutzt werden (mittel), ob dabei ein konzeptuelles Verständnis gezeigt wird (hoch) oder ob keine mathematischen Methoden verwendet werden (niedrig). Dieses Merkmal ist verbunden mit den jeweiligen EGs. Die Aufgaben sind nach Schwierigkeit sortiert (leicht=grün, mittel=blau, schwer=orange).

übrigen Gruppen fast alle auf quantitative EGs zurückgriffen, bei denen sie ein konzeptuelles Verständnis zeigten.

Bei den leichten bis mittelschweren Aufgaben *TM1* bis *TM7* waren die Gruppen, die bei der Bearbeitung einer Aufgabe ein EG zeigten, nicht so erfolgreich wie die, die ohne erkennbares EG die Aufgabe lösten. Gruppen, die bei diesen Aufgaben keine Lösung erzielten, hatten zuvor das *Physical Mechanism Game* durchlaufen. Gruppen, die kein EG bei einer Aufgabenbearbeitung zeigten, hatten mindestens Teilergebnisse richtig. Bei den schweren Aufgaben *TM8* bis *TM11* waren nur solche Gruppen erfolgreich, die ein quantitatives EG nutzten. Bei den Aufgaben *TM8* bis *TM10* waren die Studierenden zudem in acht

von zehn Bearbeitungen erfolgreich, wenn sie die quantitativen EGs *Mapping Meaning to Mathematics* oder *Mapping Mathematics to Meaning* einsetzen. Wenn die Studierenden bei diesen Aufgaben nur das *Recursive Plug and Chug* nutzten, waren sie nur selten erfolgreich (zwei von neun Bearbeitungen).

Der Einsatz eines einzigen EG für eine Aufgabe reichte jedoch nicht immer aus. So zeigte sich bei Aufgabe *TM8*, dass die Gruppen, die neben dem EG *Mapping Meaning to Mathematics* auch das *Pictorial Analysis Game* nutzten, gegenüber den Gruppen, die nur ein EG oder das *Recursive Plug and Chug* Game nutzten, erfolgreicher sind. Die folgenden beiden Transkripte von Bearbeitungen der Aufgabe *TM8* (siehe Abbildung 9.45) zeigen exemplarisch die unterschiedlichen Herangehensweisen bei erfolgreichen und nicht erfolgreichen Anwendungen von quantitativen EGs.

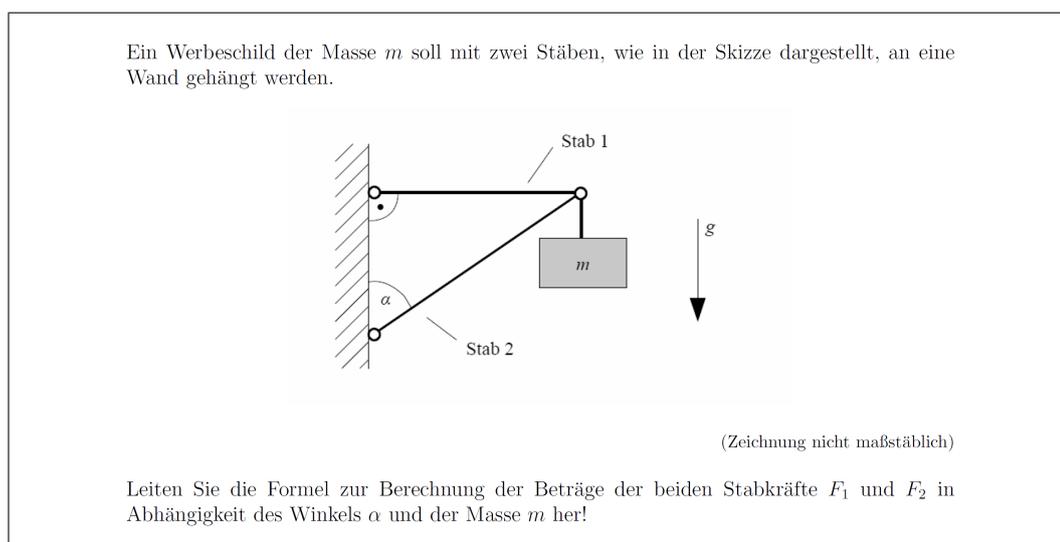


Abbildung 9.45: Aufgabe *TM8* aus der Gruppenarbeit am zweiten Messzeitpunkt.

Nachdem die Gruppe *6* die vorherige Teilaufgabe richtig bearbeitet hat, beginnt sie mit der Aufgabe, indem ein Student eine Skizze der physikalischen Situation anfertigt.

S01: Dann machen wir das mal schön ordentlich (Student beginnt eine *Abbildung* zu zeichnen, siehe Abbildung 9.46). [...]

S05: Betrag der Kraft in Stab 1. [..]

S01: Wir haben hier noch die Stabkraft 1 und da unten hin die Stabkraft 2 und wir haben einen Winkel  $\alpha$  (Student vervollständigt Abbildung). [4]

S05: Ich habe kein Papier mehr. Ich gucke mal bei dir mit.

S33: Ich habe hier noch, oder so. Wollen wir einfach zusammen überlegen?

S05: Ja. [..]

S33: Willst du malen? Du sitzt ja in der Mitte, oder?

S01: Das ist doch einfach ein Freischnitt wie in Mechanik.

S05: Ja genau.

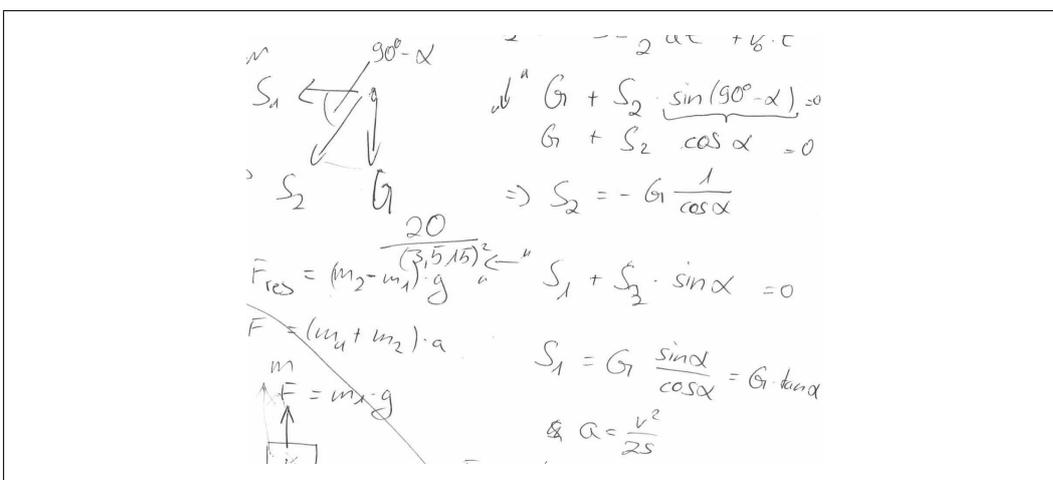


Abbildung 9.46: Abbildung aus einer erfolgreichen Gruppenarbeit der Gruppe 6 von Aufgabe TM8 am zweiten Messzeitpunkt.

Nach einer kurzen Abstimmung, wie weiter verfahren werden soll, fahren die Studierenden mit der Bearbeitung der Aufgabe fort.

S01: So, alle Kräfte, die nach unten wirken, das ist einmal  $G$  plus  $S_2$  mal (schreibt „↓“  $G + S_2$ ). [..]

S05: Also das ist Gegenkathete, das ist Sinus von 90 Grad minus  $\alpha$  [...] mal  $S_2$ . [..] Also steht da ja schon.

S01: Ja (vervollständigt die Gleichung „↓“  $G + S_2 \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = 0$ ).

S33: Ist Sinus  $90^\circ$  minus  $\alpha$  nicht Kosinus  $\alpha$ ? [..]

S01: Ja stimmt, das können wir ja machen. [7] Ist dann gleich 0 (schreibt  $G + S_2 \cos(\alpha) = 0$ ). [..] Daraus folgt, dass  $S_2$  ist dann gleich minus  $G$  durch Kosinus  $\alpha$  (schreibt  $\Rightarrow S_2 = -G \frac{1}{\cos(\alpha)}$ ).

Auf vergleichbare Weise bestimmen die Studierenden anschließend die Stabkraft in Stab 1.

Die Bearbeitung der gleichen Aufgabe durch Gruppe 12 zeigt exemplarisch den Unterschied zwischen quantitativen EG mit konzeptuellem Verständnis und einem ohne ein solches Verständnis.

Die Gruppe beginnt die Aufgabenbearbeitung mit der Frage, welche Winkelbeziehungen bei der gegebenen Situation von Bedeutung sind.

S20: Oh, das ist dann Sinus oder Kosinus, ja Sinus. [...] Da würde ich ein Kräfte-Dreieck machen, aber [..]

S28: Das kann ich nicht. [.]

S20: Kann ich auch nicht, mal gucken. [..]  $F_G$  ist dann, [11] wo ist hier überhaupt  $F_1$  und  $F_2$ ? (Studentin liest erneut die Aufgabenstellung) [...] Der beiden Stabkräfte. [.] Ist dann eine Kraft so (fährt mit dem Stift den waagerechten Stab in der *Abbildung* ab) und die andere so einfach, oder? (fährt den anderen Stab mit dem Stift ab) [..]

S28: Keine Ahnung.

b) Betrag der Kraft im Stab 1:  
 $F_1 =$

c) Betrag der Kraft im Stab 2:  
 $F_2 =$

Handwritten notes and diagram:  
 $\cos(\alpha) = \frac{a}{H}$   
 $\cos(\alpha) = \frac{9.81}{F_2}$   
 g a b a  
 H H K G  
 $\delta_i \cos \alpha$

Abbildung 9.47: Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Bearbeitung der Gruppe 12 von Aufgabe TM8 am zweiten Messzeitpunkt.

S20: Die eine Kraft drückt ja, dann wird die Stange so praktisch irgendwie (veranschaulicht die Krafteinwirkung mit der Hand, die sie zu sich hin bewegt) [.] mit Kraft auseinandergesetzt, aber [..] ich würde das einfach so machen. Na gut, hier kann ich dann, das ist  $F_G$  auch, [4] würde ich so sagen (zeichnet die Situation auf, siehe Abbildung 9.47).  $F_1$  ist dann

von Stab 1,  $F_2$  von dem anderen (beschriftet die beiden Stäbe in der eigenen *Abbildung*). [4]  $\alpha$  ist da, da ist  $90^\circ$  (zeichnet beide Winkel in die *Abbildung* ein und notiert den Wert 9,81 neben der *Abbildung*). [17] Weißt du die Formel?

S28: Nein.

S20: Also das ist ja die Hypotenuse (fährt Stab 2 in der *Abbildung* mit dem Stift ab). [..]

S28: Doch, warte. Darf ich mal? [12] Warte mal, wie war das nochmal? [12] (schreibt ein Merkschema für trigonometrische Funktionen auf) Sinus, Kosinus, Tangens. Da hast du Gegenkathete, Hypotenuse, Ankathete, Hypotenuse und Gegenkathete dann. Das war das [5] (unv.). [...] Ist eines der wenigen Dinge, die ich kenne davon.

S20: (liest die Aufgabenstellung) Mir fällt ein, wir haben ja  $F_G$  gegeben und diesen Winkel (zeigt auf  $\alpha$  in der *Abbildung*) und daraus irgendwie, da müssen wir wahrscheinlich erst  $F_1$  herauskriegen durch  $90^\circ$ -Winkel und  $F_G$  halt. [.] Nur was jetzt hier Ankathete und Gegenkathete ist. Ist das Ankathete? (zeigt auf die Ankathete des Winkels  $\alpha$ ) [..] Weißt Du das zufällig? [.] Und das Gegenkathete? (zeigt auf die Gegenkathete von  $\alpha$ ) Das kann ich mir auch nicht merken. [6]

S28: Der Winkel liegt hier (zeigt auf  $\alpha$ ). Hypotenuse, Gegenkathete, Ankathete (zeigt der Reihe nach auf die drei Seiten des Dreiecks).

S20: (beschriftet die drei Seiten) [.] Gut, dann (zeigt mit dem Stift auf die einzelnen Elemente der *Abbildung*) würde ich zum Beispiel Gegenkathete, Hypotenuse, nein. [..] Ankathete, Hypotenuse würde ich dann Kosinus  $\alpha$  ist gleich, [4] ach nein, das war der Kosinus. Kosinus  $\alpha$  ist gleich Ankathete durch Hypotenuse (schreibt  $\cos(\alpha) = \frac{a}{H}$ ). Kosinus  $\alpha$  ist gleich, Ankathete haben wir eine Kraft von 9,81 irgendwas durch Hypotenuse ist  $F_2$  (schreibt  $\cos(\alpha) = \frac{9,81}{F_2}$ ), aber das bringt uns auch nicht weiter, da fehlt einer. Ach nein, Moment mal. [..] Ich weiß nur nicht, ob man da die  $90^\circ$  reinbringen kann.

S28: Keine Ahnung.

Die beiden Studentinnen brechen an dieser Stelle die Bearbeitung der Aufgabe ab und machen mit der nächsten Aufgabe weiter.

Die beiden Transkripte zeigen die unterschiedliche Herangehensweise bei Grup-

pen, die ein konzeptuelles Verständnis bei Aufgaben zeigten und eines der beiden EGs *Mapping Meaning to Mathematics* oder *Mapping Mathematics to Meaning* nutzten und bei Gruppen die sich des EG *Recursive Plug and Chug* bedienten. Während sich die Ersten auf Konzepte der Mechanik bezogen (in diesem Fall *Stäbe* und *Stabkräfte*) und davon ausgehend die notwendigen Berechnungen auf die jeweilige Situation angepasst durchführten, bezogen sich Zweite nicht auf physikalischen Konzepte und versuchten mit grundlegenden *Gleichungen* zu einer Lösung zu gelangen. Dies war häufig, aufgrund der notwendigen speziellen Formeln und *Gleichungen*, nicht erfolgreich.

Bei den Aufgaben, bei denen vorwiegend qualitative EGs genutzt wurden, konnten auch viele Bearbeitungen beobachtet werden, bei denen kein EG durchlaufen wurde (z. B. direktes Nennen einer Lösung). Im Folgenden wird nur auf solche Bearbeitungen Bezug genommen, bei denen ein EG eingesetzt wurde. So zeigte sich bei Aufgabe *TM12* exemplarisch, wie unterschiedlich genau die Studierenden bei der Anwendung der qualitativen EGs vorgegangen sind. In dieser Aufgabe (siehe Abbildung 9.48) mussten die Studierenden die Trajektorie eines Steins in einem rollenden Fahrradreifen ermitteln.

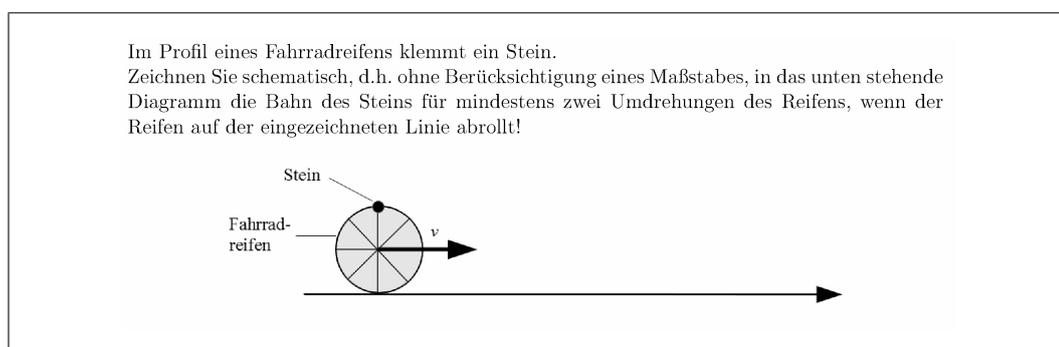


Abbildung 9.48: Aufgabe TM12 aus der Gruppenarbeit am zweiten Messzeitpunkt.

Nachdem Gruppe 2 die Aufgabenstellung gelesen hat, macht Studentin 1 einen Vorschlag.

S06: So, oder? (zeichnet mit dem Finger eine Wellenlinie in die *Abbildung* der Aufgabe) [..]

S12: Zwei Umdrehungen (zeichnet eine Wellenlinie auf, siehe obere Wellenlinie

links in Abbildung 9.49). So, oder? [4]

S06: Reicht das nicht bis dahin? (zeigt auf das dritte Maximum). [...]

S07: Nein, so geht das nicht. Hier so (zeichnet den ersten Bogen der Wellenlinie rechts in der *Abbildung*) und dann wird es wieder so (zeichnet den zweiten Bogen der Wellenlinie rechts in der *Abbildung*).

S06: Ah ja. [5]

S12: So? (wiederholt die Zeichnung von Student 3) [..]

S07: Von hier rollt es nach hier (fährt den ersten Bogen mit dem Finger ab), das dreht sich, das bleibt und dann wieder nach oben. [..]

S06: Das kann gut sein. [4]

S07: Also das hier macht es nicht (zeigt auf die obere Wellenlinie).

S06: Ja, das kann echt gut sein. [...]

S12: Stimmt, ja.

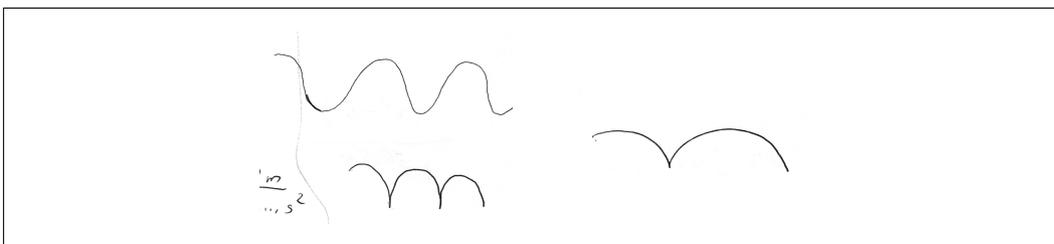


Abbildung 9.49: Abbildung aus einer erfolgreichen Gruppenarbeit der Gruppe 2 von Aufgabe TM12 am zweiten Messzeitpunkt.

Nachdem die Studierenden in Gruppe 5 die Aufgabe wiedererkannt haben, äußert sich Student S08.

S08: Das habe ich schon beim letzten Mal nicht verstanden, ehrlich gesagt. [...]

S10: Ich glaube das ist so eine Form (zeichnet die obere Spirallinie, siehe Abbildung 9.50).

S08: Ich meine, das hatten wir auch so.

S10: Oder noch ein bisschen krasser, sogar so irgendwie (zeichnet die untere Spirallinie). [.] Weiß ich nicht so genau. [.]

S08: Ja, willst du was dahin malen? Sowas?

S02: Wie kommt ihr jetzt da drauf?

S10: Mach irgendetwas dazwischen, das passt schon.

S08: Du musst einfach überlegen, wie der Stein ungefähr rollt. [...] Wenn der jetzt da runter fällt da vorne (zeigt auf die *Abbildung* in der Aufgabenstellung).

S02: Ist der fest?

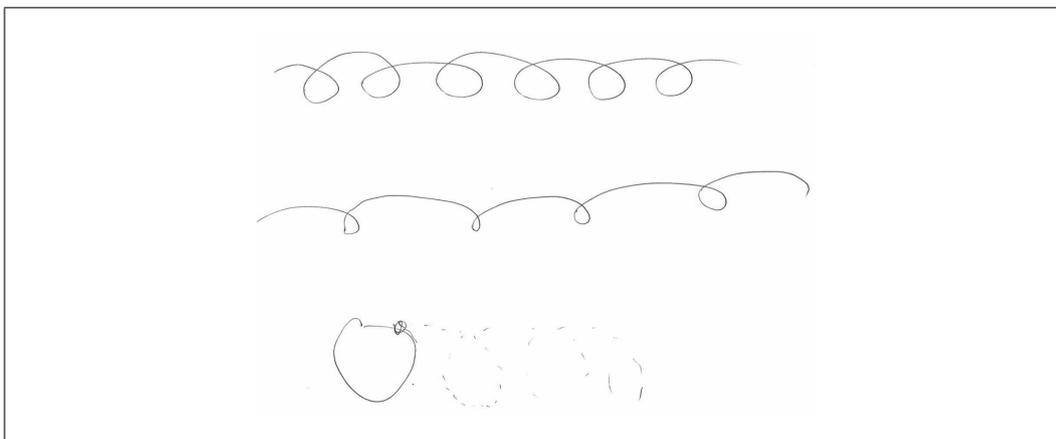


Abbildung 9.50: Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Gruppenarbeit der Gruppe 5 von Aufgabe TM12 am zweiten Messzeitpunkt.

Nach der Frage von Student *S02* versuchen Student *S08* und *S10*, die Situation zu erklären.

S10: Ja, der ist am Rand festgemacht. [...]

S08: Wenn du jetzt hier das Rad hast und der Stein da sitzt, dann ist der ja fest (zeichnet Rad mit Stein auf), [...] das Rad rollt, [...] dann kommt er wieder hoch (zeichnet eine gestrichelte Spirallinie vom Stein ausgehend).

S10: Dabei bewegt sich das Rad aber nach vorne, das ist das komische dabei.

S02: Ah ja.

S08: Deswegen musst du einfach eine Spirale nach vorne gedreht malen.

Anschließend fertigen die drei Studierenden zusammen die *Abbildung* für die Lösung an.

Die beiden Transkripte zeigen exemplarisch die Unterschiede zwischen erfolgreichen und nicht erfolgreichen Bearbeitungen unter Nutzung qualitativer EGs. Während die erfolgreiche Gruppe 2 in der Lage war, verschiedene Möglichkeiten zu generieren und darüber zielführend zu diskutieren, nutzten die Studierenden der nicht erfolgreichen Gruppe 5 die erstbeste Idee und verfolgten diese weiter, ohne sie ausreichend zu reflektieren und auf Plausibilität hin zu über-

prüfen. Sie sahen nicht, dass bei gleichbleibender horizontaler Geschwindigkeitsrichtung des Rades, der Stein sich immer in gleicher horizontaler Richtung bewegen muss. Es scheint, dass sie eher die Form des Rades als Orientierung für die Bewegung des Steines nutzten.

### Messzeitpunkt 3

Kapitel 9.2.1 Heurismen	MZP1	MZP2	MZP3
Kapitel 9.2.2 Problemlösephasen	MZP1	MZP2	MZP3
<b>Kapitel 9.2.3 Epistemic Games</b>	MZP1	MZP2	<b>MZP3</b>

Am dritten Messzeitpunkt zeigten die Studierenden bei vielen Aufgabenbearbeitungen (56%) keinen Einsatz von EGs,<sup>14</sup> besonders bei den beiden leichten Aufgaben *TM1* und *TM3* sowie bei der mittelschweren Aufgabe *TM4* und bei der schweren Aufgabe *TM8*.

Die eingesetzten EGs waren häufiger als bei den beiden Messzeitpunkten zuvor quantitativer Natur. So war *Recursive Plug and Chug* das am häufigsten eingesetzte Game (49% aller beobachteten EGs). In mehr als der Hälfte der Aufgaben nutzten die Studierenden eher quantitative als qualitative Games. Das zweithäufigste EG war das *Pictorial Analysis* Game. Sein Einsatz beschränkte sich jedoch hauptsächlich auf zwei Aufgaben (*TM5* und *TM7*) sowie auf Student 10, welcher dieses EG achtmal nutzte. Das *Physical Mechanism Game*, das bei den beiden Messzeitpunkten zuvor bei vielen Aufgabenbearbeitungen eingesetzt wurde, konnte am dritten Messzeitpunkt nur bei vier Bearbeitungen beobachtet werden.

Wenn die Studierenden die EGs *Mapping Meaning to Mathematics* und *Re-*

<sup>14</sup>Einen wesentlichen Anteil daran haben die Studierenden *S20*, *S28* und *S19*, welche keine Veranstaltungen zur Technischen Mechanik hatten, da sie im Studiengang ETIT eingeschrieben waren. 25 Aufgaben konnten diese Studierenden nicht richtig bearbeiten. Dies entspricht nahezu einem Drittel der Bearbeitungen ohne EG bei 81 solcher Bearbeitungen insgesamt.

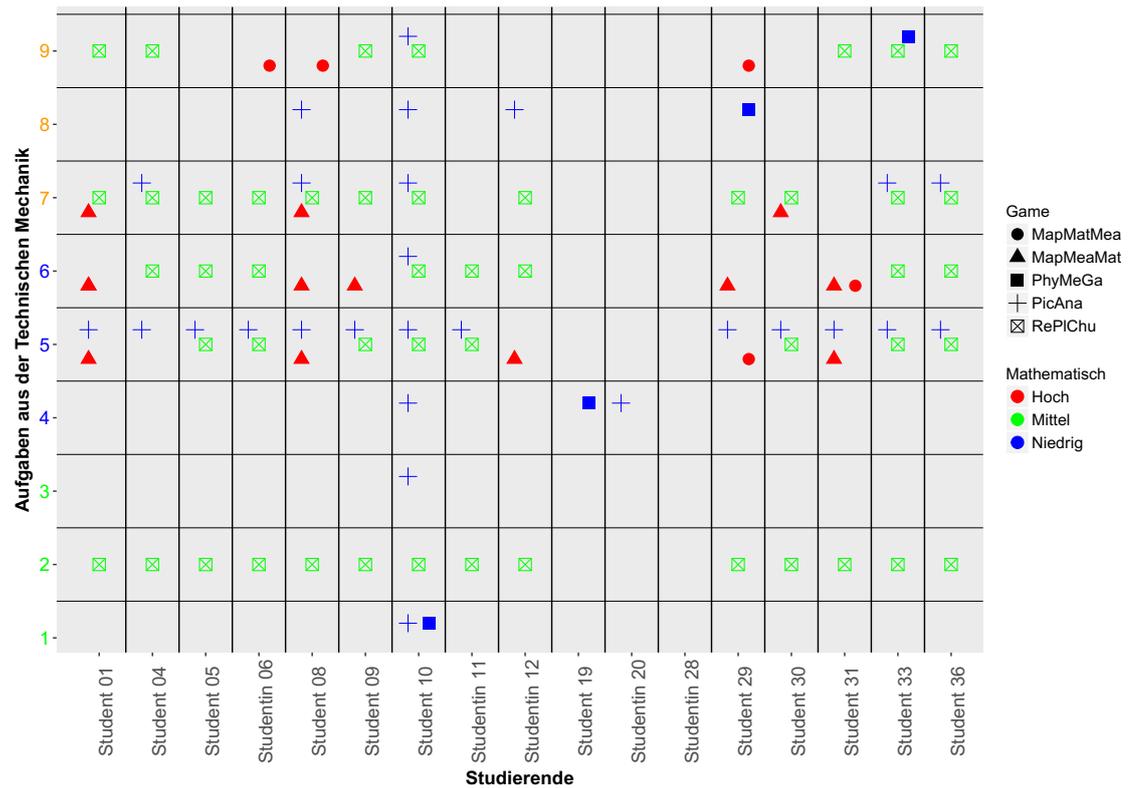


Abbildung 9.51: Beobachtete *Epistemic Games* zum dritten Messzeitpunkt. Das Merkmal *Mathematisch* gibt an, ob in dem jeweiligen Game mathematische Verfahren genutzt werden (mittel), ob dabei ein konzeptuelles Verständnis gezeigt wird (hoch) oder ob keine mathematischen Methoden verwendet werden (niedrig). Dieses Merkmal ist verbunden mit den jeweiligen EGs. Die Aufgaben sind nach Schwierigkeit sortiert (leicht=grün, mittel=blau, schwer=orange).

*cursive Plug and Chug* nutzten, waren sie in den meisten Fällen erfolgreich (70% bzw. 72% der möglichen Punkte). Einen vergleichbaren Erfolg hatten die Studierenden beim Einsatz des EG *Pictorial Analysis*, bei diesen Aufgabenbearbeitungen erreichten sie 73% der möglichen Punkte. Mit den beiden verbleibenden EGs waren sie weniger erfolgreich (*Mapping Mathematics to Meaning*: 33%, *Physical Mechanism Game*: 37%). Jedoch zeigten sich auch bei den EGs, mit denen die Studierenden viele Punkte erreichen konnten, wiederum andere Studierende, die nicht erfolgreich waren. Die folgenden Transkripte zeigen exemplarisch, wie sich erfolgreiche und nicht erfolgreiche Studierende beim Einsatz quantitativer und qualitativer EGs unterscheiden.

Die Bearbeitungen von Aufgabe *TM7* (siehe Abbildung 9.52) zeigen exemplarisch die Vorgehensweise bei der Nutzung des EG *Recursive Plug and Chug*.

Bestimmen Sie das Flächenträgheitsmoment  $I_z$  der in Abb. 10 dargestellten Fläche bzgl. des  $y$ - $z$ -Koordinatensystems.  
Wählen Sie die richtige Lösung aus und kreuzen Sie an.

Gegeben:  $I_z = \int y^2 dA$

Abbildung 10

Abbildung 9.52: Aufgabe *TM7* aus der Einzelarbeit am dritten Messzeitpunkt.

Student *09* beginnt, nachdem er die Aufgabenstellung gelesen und die Zielgröße bestimmt hat, mit der Bearbeitung, indem er eine *Gleichung* findet, welche die Zielgröße mit anderen Größen in Verbindung setzt.

S09: Das muss man, glaube ich, einfach [...] nach der Formel integrieren. [4] Es ist aber so, [4] dass  $I_z$   $y^2$  Integral nach  $dA$ . [...] Ja. (schreibt  $I_z = \int y^2 dA$ , siehe Abbildung 9.53) Das ist gleich  $y^2$ , der Flächeninhalt ist  $\frac{1}{2}$  mal  $x$ , mal  $y$  mal  $x$ -Wert (zeigt auf die beiden Katheten im Dreieck). Das ist ja  $dx$ ,  $dy$  [...] und die Grenzen sind, [6] das ist minus 2, oder? (zeigt auf den  $z$ -Achsenabschnitt bei  $-2$ ) Ja. Minus 2 und 2 [...] für  $y$  [...] und für  $x$  die selben (schreibt  $\int_{-2}^2 \int_{-2}^2 y^2 \frac{1}{2} dx dy$ ). Das muss dann integrieren.

Nachdem der Student die *Gleichung* aufgestellt hat, beginnt er, das Integral zu berechnen. Als er in der zweiten Zeile den Ausdruck  $[\frac{2}{3}y^3]_{-2}^2$  erhält, merkt er, dass er einen Fehler gemacht haben muss, da das Ergebnis 0 ist.

S09: Ja, wenn ich da die Grenzen einsetze, kommt Null raus. Also wieder irgendetwas beim Integral falsch gemacht. [23] Nein, Quatsch. [...] Ich vergesse immer das eine Minus. [...] Also zwei Drittel, 2 hoch 3 [...] minus minus zwei Drittel 2 hoch 3 (schreibt  $\frac{2}{3}2^3 - (-\frac{2}{3}2^3)$ ). Das ist dann [...]

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int y^2 dA = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 y^2 \frac{1}{2} dx dy \\
 &= \int_{-2}^2 \underbrace{\left\{ \frac{1}{2} y^2 x \right\}}_{-2}^2 dy = \int_{-2}^2 2 y^2 dy = \left\{ \frac{2}{3} y^3 \right\}_{-2}^2 \\
 &= \frac{2}{3} 2^3 - \left( -\frac{2}{3} 2^3 \right) = \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

Abbildung 9.53: Abbildung aus einer erfolgreichen Einzelarbeit des Studenten 09 von Aufgabe TM7 am dritten Messzeitpunkt.

$2^3$  sind 8 mal 16, das müssten  $\frac{32}{3}$ . [...] Hey, das kommt sogar vor, also ist das richtig.

Das Transkript zur Bearbeitung der Aufgabe durch Studentin S12 zeigt im Vergleich zum vorherigen, einen typischen Fehler nicht erfolgreicher Studierender beim Einsatz des EG *Recursive Plug and Chug*, nämlich einfache Spezialfälle zu nutzen ohne diese anschließend auf die gegebene Situation zu verallgemeinern.

Nachdem die Studentin die Aufgabenstellung gelesen hat, nutzt sie nicht das vorgegebene Integral, sondern eine andere Formel, die sie auswendig gelernt hat.

S12: Okay, ich habe jetzt hier ein Integral, aber ich weiß auch, dass für das Flächenträgheitsmoment vom Dreieck gilt [...]  $I$  ist gleich [...]  $b$  mal  $h$  hoch 3 durch 36 (schreibt  $I = \frac{bh^3}{36}$  auf). [...] Das heißt meine Breite ist 2, 4 [...] durch 4, (unverständlich) ist auch 4. Ist gleich 4 mal 4 hoch 3, 36 (schreibt  $\frac{4 \cdot 4^3}{36}$  auf).

Die Studentin berechnet anschließend den Bruch und erhält am Ende  $\frac{64}{9}$ . Da dieses Ergebnis nicht bei den vorgegebenen Antwortalternativen vorkommt, überlegt sie, wo sie einen Fehler gemacht hat.

S12: Okay, das gibt es nicht. Also habe ich einen Fehler gemacht. [15] Okay 64 habe ich hier (zeigt auf eine der vorgegebenen Lösungsmöglichkeiten), mal gucken, ob ich bei der 9 einen Fehler gemacht habe (zeigt auf ihr Ergebnis  $\frac{64}{9}$ ). [5] Nein 9 mal 4 sind 36 (überprüft die *Abbildung*). [40] Ach,

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{bh^3}{32} = \frac{4 \cdot 4^3}{32} \\
 &= \frac{48}{32} \\
 &= \frac{4^3}{3} = \frac{64}{3}
 \end{aligned}$$
  

$$\begin{array}{r}
 4 \cdot 4 = 16 \\
 \hline
 16 \cdot 4 \\
 \hline
 64
 \end{array}$$

Abbildung 9.54: Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Einzelarbeit der Studentin 12 von Aufgabe TM7 am dritten Messzeitpunkt.

das ist ein rechtwinkliges Dreieck, dann ist das hier durch 12 (korrigiert den Nenner im ersten Bruch von 36 auf 12), dann passt das mit den beiden Seiten. Sonst hätte ich die Seite (zeigt auf die Hypotenuse des Dreiecks) verwenden müssen.

Anschließend korrigiert die Studentin ihre Berechnungen und gelangt zum Ergebnis  $\frac{64}{3}$ , welches sie bei den Antwortmöglichkeiten findet und auswählt.

Die beiden Transkripte zeigen die Unterschiede zwischen den erfolgreichen und nicht erfolgreichen Studierenden. Letztere scheitern in der zweiten Phase des *Recursive Plug and Chug Games*, in der sie eine *Gleichung* formulieren müssen, welche die Zielgröße mit anderen Größen in Verbindung setzt, und nutzen häufig zur Lösung einfachere Spezialfälle und waren nicht in der Lage die allgemeineren Verfahren anzuwenden. Dabei beachteten sie nicht die gegebenen Situationen in ihrer Gesamtheit und gelangten aus diesem Grund zu den falschen Ergebnissen. In diesem Fall beachtete die Studentin nicht, dass für ihre Formel der Koordinatenursprung im Flächenschwerpunkt liegen muss, dies war in der gegebenen Situation jedoch nicht der Fall.

Neben dem zuvor berichteten Unterschied war eine Hauptursache für den unterschiedlichen Erfolg der Studierenden, die zu diesem Messzeitpunkt häufiger als bei den beiden zuvor auf die gleichen Verfahren und Methoden setzten, dass nicht erfolgreiche Studierende kleine Fehler machten, wie beispielsweise ein falsch gesetztes Minuszeichen oder eine vergessene Klammer.

Die beiden folgenden Transkripte zeigen exemplarisch, wie zwei Studierende

in Einzelarbeit mit dem *Recursive Plug and Chug* Game die Aufgabe *TM2* bearbeiteten, in der drei Auflagerkräfte bestimmt werden mussten (siehe Abbildung 9.55)

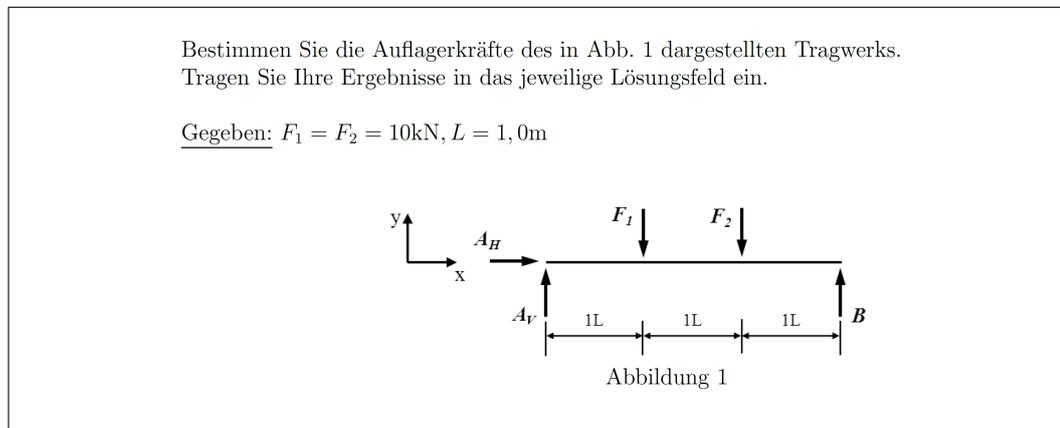


Abbildung 9.55: Aufgabe TM2 aus der Einzelarbeit am dritten Messzeitpunkt.

Student *S01* erfasst zuerst die gegebene Situation, indem er zuerst die Zielgrößen identifiziert und anschließend drei *Gleichungen* aufstellt, welche die Zielgröße mit den anderen Variablen der Problemstellung in Verbindung setzt.

S01: Wir haben also ein statisch bestimmtes System, wir haben zwei bekannte Kräfte, [...] es gibt eine bekannte Länge. Es können drei Gleichungen generiert werden. Horizontales, vertikales und das Momentengleichgewicht. Und wir haben drei Unbekannte, das heißt das Gleichungssystem lässt sich lösen. [...] Nun, alle Kräfte in horizontaler Richtung, das ist  $A_H$ , das ist die alleinige Kraft, also muss  $A_H$  0 sein (schreibt „→“  $A_H = 0$ , siehe Abbildung 9.56). Damit ist  $A_H$  bestimmt. [...] Ja. [...] Nun das vertikale Gleichgewicht, [...] also nach oben gerichtet. Da sind in positiver Richtung anzutragen  $A_V$  plus  $B$  minus  $F_1$  minus  $F_2$  gleich 0 (schreibt „↑“  $A_V + B - F_1 - F_2 = 0$ ). [...] Ja, [...]  $F_1$  und  $F_2$  lassen sich zusammenfassen zu minus 20 kN.

S01: Nun, um das Ganze zu lösen, fehlt noch das Momentengleichgewicht. Hier wird das Momentengleichgewicht um, ja spielt keine Rolle wo man es nimmt, aber wir nehmen es um Punkt  $A$ . In diesem Fall sind  $A_V$  und  $A_H$  fallen weg, weil kein Hebelarm existiert, es wird als positiv angesehen

$$\begin{aligned}
 & \overset{A_2}{\rightarrow} \underbrace{A_H = 0} \\
 & \overset{\uparrow}{\circlearrowleft} A_V + B - \underbrace{F_1 - F_2}_{-2F_1} = 0 \\
 & \overset{\circlearrowleft}{\circlearrowright} -F_1 \cdot l - 2F_2 \cdot l + 3B \cdot l = 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad B = F_1 \\
 & \qquad \qquad \qquad A_V + F_1 - 2F_1 = 0
 \end{aligned}$$

Abbildung 9.56: Abbildung aus einer erfolgreichen Einzelarbeit des Studenten 01 von Aufgabe TM2 am dritten Messzeitpunkt.

hen, was gegen den Uhrzeigersinn dreht. [...] Und da haben wir einmal im Uhrzeigersinn die Kraft  $F_1$  also negativ. Minus  $F_1$  multipliziert mit dem Hebelarm von einem  $l$ ,  $F_2$  hat den doppelten Hebelarm, geht die selbe Richtung, also minus zwei  $F_2$  mal  $l$ . Zuletzt noch  $B$ ,  $B$  greift an in positiver Richtung, im positiven Drehsinn mit dem Hebelarm 3 also  $3Bl$  ist gleich 0, statische Bestimmtheit (schreibt „ $\hat{A}$ “  $-F_1 \cdot l - 2F_2l + 3Bl = 0$ ). Daraus lässt sich kürzen.  $l$  fällt überall heraus (streicht  $l$  aus der vorherigen Gleichung raus).  $F_1$  und  $F_2$ , also ist  $3B$  gleich  $F_1$  plus zwei  $F_2$ ,  $F_1$  und  $F_2$  sind gleich groß, daraus folgt, dass  $B$  gleich  $F_1$  ist. [...] Wenn  $B$   $F_1$  ist, das sind 10 kN, einzutragen in die Liste. Nun im nächsten Schritt. Dieses wird in die Lösung der vertikalen Gleichung eingesetzt, daraus folgt dann, dass [...]  $A_V$  plus  $F_1$  minus zwei  $F_1$  ist gleich 0 (schreibt  $A_V + F_1 - 2F_2 = 0$ ) und daraus folgt, dass  $A_V$  auch  $F_1$  ist, [5] das sind 10 kN.

Zum Abschluss prüft der Student sein Ergebnis auf Plausibilität, indem er die Symmetrie der physikalischen Situation erwähnt.

Das folgende Transkript zeigt exemplarisch, welche Art von Fehlern Studierende häufig bei der Anwendung des EG *Recursive Plug and Chug* machten. Student *S30* beginnt, nachdem er die Aufgabenstellung gelesen hat, ebenfalls mit der Aufstellung der drei Gleichungen.

S30: Also Auswertung nach rechts ist  $A_H$  in die Richtung, [...] ist nur  $A_H$  in die Richtung, ist gleich 0 (schreibt „ $\rightarrow$ “  $A_H = 0$ , siehe Abbildung 9.57), also ist  $A_H$  schon mal 0 (schreibt 0 in das Antwortfeld). [5] In vertikaler Richtung ist  $A_V$  [...] plus  $B$  minus  $F_1$  plus  $F_2$  (schreibt „ $\uparrow$ “  $A_V + B - F_1 + F_2$ ). Da ich das nicht lösen kann, mache ich noch ein Moment und dreh um den Punkt A, [...] mit  $F_1$  und  $F_2$  drehen beide im Uhrzeigersinn, also negativ [4] und  $B$  dreht gegen, also positiv (schreibt „ $\widehat{A}$ “  $-F_1l + F_2 \cdot 2l + 3Bl$ ). Dann stellen wir das um,  $l$  kürzt sich schon mal überall raus, ist gleich 0 (schreibt hinter den zweiten und dritten Term jeweils ein  $= 0$ ). So, dann haben wir drei  $B$  ist gleich  $F_1$  minus  $F_2$  mal 2 (schreibt  $3B = F_1 - F_2 \cdot 2$ ). [4] Das heißt  $B$  ist ein Drittel  $F_1$  minus zwei Drittel  $F_2$  (schreibt  $B = \frac{1}{3}F_1 - \frac{2}{3}F_2$ ).

$$\begin{aligned} \rightarrow \quad A_H &= 0 \\ \uparrow \quad A_V + B - F_1 + F_2 &= 0 & A_V = F_1 - F_2 - B \\ & & A_V = 10 - 10 - \frac{10}{3} \text{ kN} \\ \widehat{A} \quad -F_1 l + F_2 \cdot 2l + 3B l &= 0 \\ 3B &= F_1 - F_2 \cdot 2 \\ B &= \frac{1}{3}F_1 - \frac{2}{3}F_2 \\ B &= \frac{10}{3} \text{ kN} - \frac{20}{3} \text{ kN} = -\frac{10}{3} \text{ kN} \end{aligned}$$

Abbildung 9.57: Abbildung aus einer nicht erfolgreichen Einzelarbeit des Studenten 30 von Aufgabe TM2 am dritten Messzeitpunkt.

Der Student berechnet von dieser *Gleichung* ausgehend für alle Auflagerkräfte die Beträge, für  $B$  erhält er  $-\frac{10}{3} \text{ kN}$ , und für  $A_V$  erhält er  $\frac{10}{3} \text{ kN}$ .

Die beiden Transkripte zeigen, dass die Studierenden zwar die ersten beiden Schritte beim *Recursive Plug and Chug* vergleichbar durchliefen und das gleiche Verfahren mit den drei *Gleichungen* nutzten, jedoch Student S10 am Ende zur Sicherheit noch eine Plausibilitätsprüfung durchführte, ob das Ergebnis mit der physikalischen Situation übereinstimmt. Student S30 machte diese Prüfung nicht, sonst hätte er vielleicht sein falsches Ergebnis bemerkt. Der einzige Fehler in seiner Bearbeitung lag darin, dass er in der zweiten Zeile entweder eine Klammer um  $F_1 + F_2$  vergessen hat (dies würde auf einen formellen Fehler hindeuten) oder statt des Minuszeichens ein Pluszeichen (dies

würde darauf hindeuten, dass ein konzeptueller Fehler beim Studenten vorlag) aufgeschrieben hat.

### 9.3 Zusammenhänge zwischen Dispositionen und situationsspezifischen Fähigkeiten

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse berichtet, auf deren Grundlage eine Beantwortung der folgenden Forschungsfrage gegeben werden kann:

**F 3:** Welche Zusammenhänge bestehen zwischen *Dispositionen* und *situationsspezifischen Fähigkeiten* von Ingenieurstudierenden im ersten Studienjahr beim Bearbeiten von Mathematikaufgaben und (mathemathikhaltigen) Physikaufgaben?

Dieser Abschnitt führt die beiden vorherigen zusammen: In Abschnitt 9.1 wurden die dispositionelle Perspektive auf die Kompetenzen eingenommen und mit Hilfe quantitativer Methoden die Ausprägungen und Zusammenhänge der *Dispositionen* dargestellt. In Abschnitt 9.2 wurden eine situative Perspektive gewählt und die Ergebnisse präsentiert, die sich aus den qualitativen Analysen der Bearbeitungsprozesse ergaben. In diesem Abschnitt werden nun beide Perspektiven miteinander in Zusammenhang gesetzt, um eine vollständigere Sichtweise auf die relevanten mathematischen Kompetenzen zu erhalten.

Die Darstellung der Zusammenhänge erfolgt für den Beginn des Studiums und für das Ende des ersten Studienjahres, den Forschungsfragen F 3.1 und F 3.2 folgend, getrennt nach Mathematik- und Physikaufgaben. Zum zweiten Messzeitpunkt wurden keine *Dispositionen* erhoben. Aus diesem Grund können die *situationsspezifischen Fähigkeiten* zu diesem Messzeitpunkt keinen zu dem Zeitpunkt aktuellen Werten zugeordnet werden, weshalb der mittlere Messzeitpunkt in diesem Zusammenhang nicht weiter berücksichtigt wird.

### 9.3.1 Zusammenhänge bei Mathematikaufgaben

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse zur Beantwortung der folgenden Forschungsfrage mit Bezug zur Bearbeitung der Mathematikaufgaben dargestellt:

**F 3.1:** Inwiefern unterscheiden sich Studierende, die hinsichtlich ihres Einsatzes von Heurismen bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben in verschiedene Gruppen eingeordnet werden können, in ihren *Dispositionen*?

Die Gruppen setzten am ersten Messzeitpunkt unterschiedlich häufig Heurismen ein, um die Mathematikaufgaben zu lösen. Hier zeigte sich jedoch, dass Gruppen, die eine vergleichbare Anzahl von Heurismen einsetzten, nicht auch vergleichbar erfolgreich bei der Bearbeitung waren. So nutzten beispielsweise Gruppe 13 und Gruppe 10 jeweils zehn *Heuristische Hilfsmittel*. Während Gruppe 13 72% der möglichen Punkte erreichte, erzielten die Studierenden der Gruppe 10 nur 31%. Bei vielen Aufgaben waren die Studierenden zudem auch ohne Heurismen erfolgreich. Ziel dieses Abschnittes ist es darzustellen, ob Gruppen, die Heurismen in Aufgabenbearbeitungen einsetzten und sich beim erfolgreichen Lösen dieser Aufgaben unterschieden, sich auch in den *Dispositionen* unterschieden. Im Folgenden werden dafür qualitativ Cluster von Gruppen gebildet, die sich nach dem erfolgreichen Lösen von Aufgaben beim Einsatz von Heurismen unterscheiden. Dabei werden nur die Aufgaben analysiert, bei deren Bearbeitung die Gruppen auch Heurismen einsetzen. Die Cluster wurden dabei wie folgt gebildet: (1) Für alle Gruppen wurde ermittelt, wie erfolgreich sie bei der Bearbeitung der Aufgaben waren, wenn sie *Heuristische Hilfsmittel* und *Heuristische Strategien* bei leichten, mittelschweren und schweren Aufgaben einsetzten: erfolgreich, teilweise erfolgreich und nicht erfolgreich sowie nicht eingesetzt. (2) Ausgehend von den leichten Aufgaben wurden die Gruppen, die vergleichbar erfolgreich waren, zu einem Cluster verbunden. (3) Dieser Vergleich wurde auch für die beiden anderen Schwierigkeitsgrade durchgeführt. (4) Die Cluster für alle Schwierigkeitsgrade wurden so kombiniert, dass drei

bis vier Cluster mit mindestens zwei Gruppen als Ergebnis herauskamen.<sup>15</sup> Die so entstandenen Cluster unterscheiden nicht zwischen Gruppen, die alle Aufgaben korrekt lösen und Gruppen, die nur wenige Aufgaben korrekt lösen, sondern zwischen Gruppen, die Heurismen einsetzen, mit denen sie Aufgaben korrekt lösen, und Gruppen, die Heurismen nicht so einsetzen können, dass sie damit die Aufgaben korrekt lösen, dabei wurden alle Aufgaben berücksichtigt. In Abbildung 9.58 sind der Einsatz und Erfolg der Gruppen bei der Verwendung der beiden *Heuristischen Hilfsmittel Gleichung* und *Abbildung* sowie der *Heuristischen Strategien Analogieschluss*, *Systematisches Probieren* und *Vorwärtsarbeiten* zum ersten Messzeitpunkt dargestellt. Einige Aufgaben bestehen aus mehreren Teilen, sodass die Studierenden dort auch anteilig Punkte erreichen konnten.

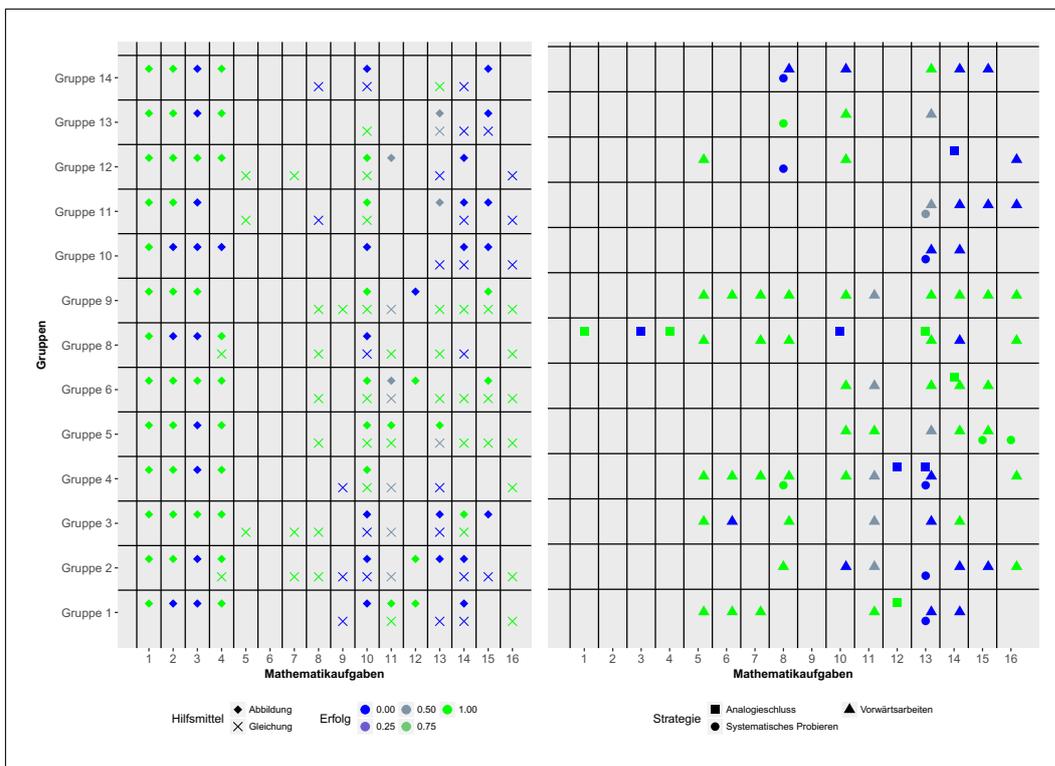


Abbildung 9.58: Darstellung des Erfolgs bei der Anwendung von *Heuristischen Hilfsmitteln* und *Heuristischen Strategien* am ersten Messzeitpunkt.

<sup>15</sup>Diese Bildung der Cluster wurde auch am dritten Messzeitpunkt durchgeführt. Für die EGs wurde vergleichbar verfahren.

Vergleicht man den Einsatz und Erfolg bei den Gruppen, so ergeben sich vier Cluster, die sich voneinander unterscheiden lassen. Eine Zusammenfassung der Cluster ist in Tabelle 9.20 dargestellt.

Tabelle 9.20: Cluster von Gruppen anhand der Nutzung von Heurismen am ersten Messzeitpunkt.

Cluster		A	B	C	D
Gruppen		1, 2, 8	3, 11, 12, 13	4, 5, 6, 9	10, 14
schwere Aufgaben	HH	-/o	o/o	+/+	-/-
	HS	-	o	+	-
mittlere Aufgaben	HH	o/+	o/o	o/+	-/-
	HS	+	+	+	-
leichte Aufgaben	HH	o/+	+/+	+/- -	o/ - -
	HS	+	o	+	- -

HH: Heuristische Hilfsmittel: Der erste Wert gibt den Erfolg mit *Abbildungen* an, der zweite mit *Gleichungen*.

HS: Heuristische Strategie: Wert gibt Erfolg mit der Strategie *Vorwärtsarbeiten* an.

+: Mehr als die Hälfte der Gruppen sind erfolgreich; o: Erfolgreiche und nicht erfolgreiche Gruppen sind gleich häufig vertreten oder nur Gruppen, die nicht alle Aufgaben korrekt gelöst haben; -: Mehr als die Hälfte der Gruppen sind nicht erfolgreich; - -: Keine der Gruppen nutzt ein Hilfsmittel/eine Strategie.

Die Gruppen 1, 2 und 8, die das Cluster A: *Lineare erfolgreiche Gleichungsverwenderinnen* bilden, waren in leichten und mittelschweren Aufgaben, in denen sie *Gleichungen* nutzten, erfolgreich. Benötigten sie in schweren Aufgaben dieses Hilfsmittel, erhielten sie höchstens 50% der möglichen Punkte. Bei der Nutzung von *Abbildungen* waren diese Gruppen weniger erfolgreich. Bei schweren Aufgaben lösten sie mit Hilfe dieses Heurismus keine Aufgabe, bei den mittelschweren nur maximal die Hälfte der Aufgaben und bei den leichten lösen zwei Gruppen nur eine bzw. zwei von drei Aufgaben korrekt. Lineare Prozesse waren bei den Gruppen dieses Clusters im Durchschnitt die häufigste Form der Bearbeitung. Die Möglichkeit, den Prozess zu reflektieren, nutzte nur Gruppe 2 erfolgreich. Die Gruppen in diesem Cluster sind die einzigen, die keine Aufgabe abgebrochen haben.

Cluster B: *Schnelle reflektierte Gleichungsverwenderinnen* besteht aus den vier

Gruppen 3, 11, 12 und 13, welche schwere Aufgaben, in denen sie *Gleichungen* einsetzten, höchstens in 50% der Fälle erfolgreich lösten. Neben Cluster A sind in diesem Cluster die einzigen Gruppen, die auch bei leichten Aufgaben *Gleichungen* einsetzten, und dabei in allen Fällen erfolgreich waren. Bei den mittelschweren Aufgaben setzten sie *Gleichungen* mit unterschiedlichem Erfolg ein. Beim Einsatz von *Abbildungen* waren die Gruppen neben Cluster C die einzigen, die zumindest teilweise dieses Hilfsmittel bei den schweren Aufgaben erfolgreich einsetzten. Bei den leichten Aufgaben waren sie mit *Abbildungen* in allen Fällen erfolgreich, bei den mittelschweren gilt dies nur für die Hälfte der Gruppen des Clusters. Die Gruppen dieses Clusters nutzten im Vergleich zu den anderen Clustern am häufigsten einen *schnellen Prozess*, um die Aufgaben zu bearbeiten. Zudem nutzten drei der vier Gruppen bei jeweils drei Aufgaben die Möglichkeit, ihren Prozess zu reflektieren, nach den Gruppen aus Cluster C war dies die häufigste Nutzung der *Rückschau*-Phase durch die Studierenden. Lineare Prozesse ohne *Rückschau* nutzten die Gruppen dieses Clusters im Vergleich zu den anderen Clustern am seltensten.

Cluster C: *Erfolgreiche reflektierte Heuristikenverwenderinnen* beinhaltet Gruppen (4, 5, 6, 9), die im Vergleich zu den anderen Clustern erfolgreich *Gleichungen* nutzten, um mittelschwere und schwere Aufgaben zu lösen, lediglich die Gruppe 4 konnte mit Hilfe von *Gleichungen* nur zwei von vier schweren Aufgaben korrekt lösen. Bei den leichten Aufgaben benötigten die Gruppen dieses *Heuristische Hilfsmittel* nie. Auch beim Einsatz von *Abbildungen* waren diese Gruppen bei den leichten und schweren Aufgaben erfolgreicher als die anderen Cluster. Bei den mittelschweren Aufgaben unterschieden sie sich nicht von den anderen. Die Gruppen dieses Clusters nutzten die *Rückschau*-Phase am häufigsten von allen Clustern. Im Vergleich zu Cluster B waren sie damit bei mehr als drei von vier Aufgaben erfolgreich. Die Gruppen aus diesem Cluster waren bei allen Prozesstypen jeweils am erfolgreichsten. Eine Ausnahme bildeten die *Zyklischen Prozesse ohne Rückschau*, diese nutzte eine Gruppe bei einer Aufgabe nicht erfolgreich.

Der letzte Cluster D: *Erfolglose lineare Gleichungsverwenderinnen* besteht aus den beiden Gruppen 10 und 14, welche beim Einsatz von *Gleichungen* bei keinem Schwierigkeitsbereich (leichte, mittelschwere oder schwere Aufgaben) erfolgreich waren bzw. keine *Gleichungen* nutzten. Lediglich bei einer schweren

Aufgabe war die Gruppe 14 erfolgreich. Auch bei der Verwendung von *Abbildungen* waren diese beiden Gruppen wenig erfolgreich. Bei den mittelschweren und schweren Aufgaben lösten sie mit Hilfe dieses Hilfsmittels keine Aufgabe korrekt, lediglich bei den leichten Aufgaben war Gruppe 14 immer erfolgreich, wenn sie *Abbildungen* nutzte, Gruppe 10 nur in einer von drei Aufgaben. Die beiden Gruppen aus diesem Cluster nutzten am häufigsten lineare Prozesse, um die Aufgaben zu bearbeiten, sie waren damit aber nur in zwölf von 23 Aufgabenbearbeitungen erfolgreich. Während nur eine Gruppe ihren Prozess reflektierte, wobei diese Bearbeitung nicht erfolgreich war, war in diesem Cluster auch die Gruppe mit den meisten Abbrüchen. So hat eine Gruppe drei Aufgabenbearbeitungen ohne eine Lösung beendet.

Die Nutzung der beiden Strategien *Analogieschluss* und *Systematisches Probieren* tritt in allen Clustern zu selten und unsystematisch auf, sodass sich hier keine Unterschiede zwischen den Clustern zeigten, aus diesem Grund wurden nur die Ergebnisse zum *Vorwärtsarbeiten* mit einbezogen.

Immer wenn die Gruppen aus Cluster A bei den leichten und mittelschweren Aufgaben *Vorwärtsarbeiten* einsetzten, waren sie erfolgreich. Bei den schweren Aufgaben waren sie nur teilweise (Gruppe 2 und 8) bzw. gar nicht (Gruppe 1) erfolgreich.

Die Gruppen aus Cluster B waren wenig erfolgreich beim Einsatz des *Vorwärtsarbeitens*. Bei den schweren Aufgaben lösten sie höchstens die Hälfte der Aufgaben, in denen sie diese Strategie nutzten; lediglich Gruppe 13 war erfolgreich. Bei den leichten und mittelschweren Aufgaben nutzten nur die Gruppen 3 und 12 das *Vorwärtsarbeiten* und waren damit (teilweise) erfolgreich.

Sobald die Gruppen in Cluster C in Aufgaben auf die Strategie *Vorwärtsarbeiten* zurückgriffen, waren sie erfolgreich. Eine Ausnahme bildete Gruppe 4, die bei einer schweren Aufgabe mit dieser Strategie nicht erfolgreich war.

Cluster D zeigte ein genau gegenteiliges Bild zu Cluster C. Immer wenn eine der beiden Gruppen *Vorwärtsarbeiten* nutzte, war sie nicht erfolgreich. Eine Ausnahme bildete Gruppe 14 bei den schweren Aufgaben, von denen sie eine erfolgreich löste.

Die vier Cluster werden nun hinsichtlich ihrer *Dispositionen* miteinander verglichen. In Tabelle 9.21 sind die *Dispositionen* der Gruppen nach Clustern geordnet dargestellt.

Tabelle 9.21: *Dispositionen* der Cluster am ersten Messzeitpunkt.

Cluster	Gruppe	Schulmathematik			Schulphysik			$FCI_1$		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3
A	1	-0,66	-2,18		-1,32	-2,77		5	5	
	2	0,17	0,46	-0,56	-1,00	-1,32	-1,00	9	9	8
	8	-0,48	0,01	-0,08	-1,00	0,07	0,32	6	16	19
B	3	0,49	0,82		-1,69	-1,69		14	19	
	11	-1,77	-1,36	0,54	-1,00	-0,71	-1,00	10	7	13
	12	-1,24	-0,71		-1,69	-1,32		4	7	
C	13	-0,28	0,79		-0,71	-1,00		10	8	
	4	0,27	-3,52	-1,45	-0,18	-2,14	-1,69	15	7	2
	5	0,41	0,03	3,02	-0,71	-1,32	0,82	9	13	23
D	6	2,62	1,39	1,40	0,82	-0,18	0,32	23	16	18
	9	1,18	1,18	0,30	-0,18	0,07	-0,18	14	13	17
	10	-1,74	-1,05		-3,48	-2,77		4	6	
D	14	-1,19	0,22		-0,18	-0,18		19	10	

In den Spalten 1-3 der drei *Dispositionen* *Schulmathematik*, *Schulphysik* und *Force Concept Inventory* ( $FCI$ ) sind die Personenfähigkeitsschätzer bzw. die erreichten Punkte der jeweiligen Gruppenmitglieder dargestellt. Einige Gruppe bestehen aus zwei, einige aus drei Studierenden.

Die Gruppen in Cluster *A: Lineare erfolgreiche Gleichungsverwenderinnen* gehören bei der *Disposition* Schulmathematik zum mittleren bis schlechten Bereich. In der Schulphysik decken die drei Gruppen den gesamten Bereich zwischen gut bis schlecht ab. Gruppe 8 ist hier die zweitbeste, die Gruppe 1 die zweitschlechteste. Bei den Werten zum *FCI* zeigt sich das gleiche Bild: Gruppe 8 gehört zu den guten Gruppen, Gruppe 1 zu den schlechten.

Die Gruppen in Cluster *B: Schnelle reflektierte Gleichungsverwenderinnen* sind hinsichtlich der *Dispositionen* heterogen. Während die Gruppen 3 und 13 gut in der Schulmathematik abschneiden, gehören hier die Gruppen 11 und 12 zu den schlechten. Bei der Schulphysik sind alle vier Gruppen eher schlecht, wohingegen dies bei den Werten für den *FCI* nur für die Gruppe 12 zutrifft, die anderen befinden sich hier im mittleren bis guten Bereich.

In Cluster *C: Erfolgreiche reflektierte Heurismenverwenderinnen*, hierzu gehören die Gruppen 4, 5, 6 und 9, befinden sich die guten Studierenden hinsichtlich der Personenfähigkeitsschätzer für Schulmathematik und Schulphysik. Lediglich Gruppe 4 gehört bei allen *Dispositionen* zu den schlechten Gruppen, die übrigen drei Gruppen befinden sich für die Werte aus dem *FCI* im mittleren bis guten Bereich. Dieses Cluster ist insgesamt sowohl bei den *Dispositionen* als auch bei den *situationsspezifischen Fähigkeiten* am besten.

Die Gruppen in Cluster *D: Erfolglose lineare Gleichungsverwenderinnen*, die bei der Anwendung der Heurismen nicht erfolgreich waren, sind eine schlechte und eine mittlere Gruppe hinsichtlich der drei *Dispositionen*. In Gruppe 10 finden sich die beiden Studierenden mit den niedrigsten Personenschätzern in Schulphysik und mit sehr niedrigen in Schulmathematik. Auffällig hier sind die hohen Werte für den  $FCI_1$  bei Gruppe 14.

Diese Beobachtungen werden in Abschnitt 10.1.3 im Hinblick auf die theoretischen Vorannahmen diskutiert.

Am dritten Messzeitpunkt arbeiteten die Studierenden nicht mehr in Gruppen, sondern alleine an neun Aufgaben zur Höheren Mathematik. Hierbei zeigten sich insbesondere bei der Bearbeitung von Aufgaben mit mittlerer und hoher Schwierigkeit Unterschiede zwischen den Studierenden (siehe Abbildung 9.59).

Ausgehend von der Darstellung in Abbildung 9.59 ergaben sich vier Cluster, die sich insbesondere durch die Anwendung der *Heuristischen Hilfsmittel* her-

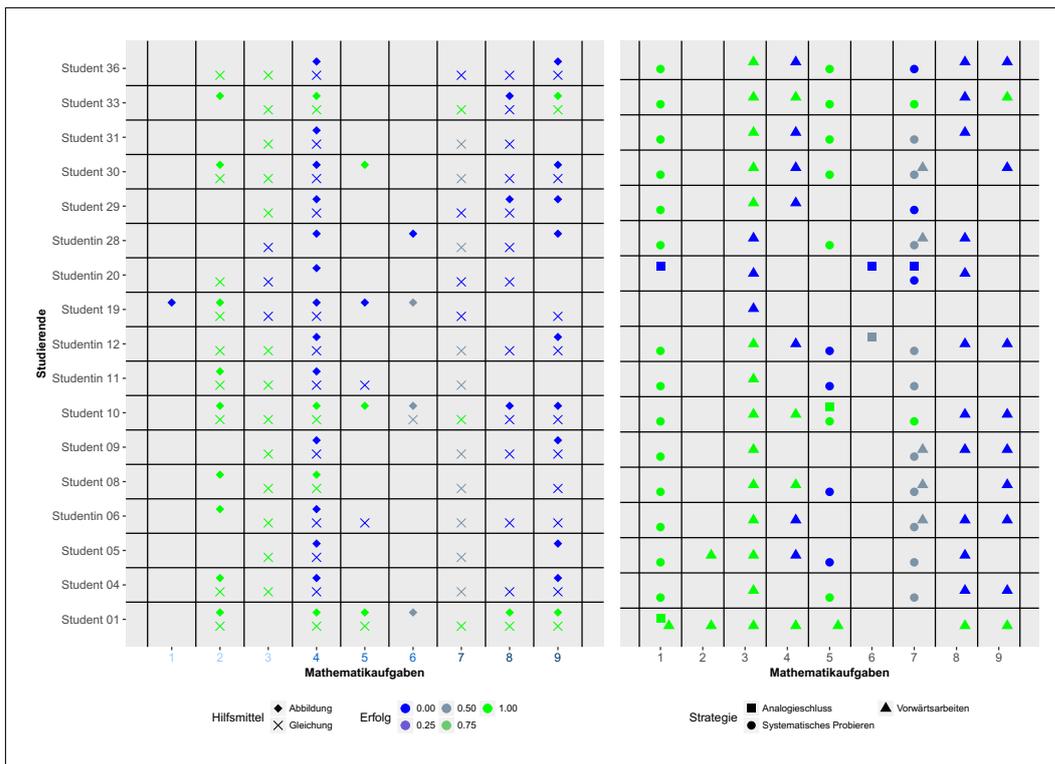


Abbildung 9.59: Darstellung des Erfolgs bei der Anwendung von *Heuristischen Hilfsmitteln* und *Heuristischen Strategien* am dritten Messzeitpunkt.

ausbildeten. Eine Zusammenfassung der Cluster ist in Tabelle 9.22 dargestellt.

Die Studierenden *S01*, *S08*, *S10* und *S33*, die das Cluster *E: Reflektierte erfolgreiche Heurismennutzerinnen* bilden, setzten bei den leichten und bei den mittelschweren Aufgaben sowohl *Gleichungen* als auch *Abbildungen* ein und waren damit bei den meisten Bearbeitungen erfolgreich. Die beiden Studierenden *S10* und *S01* erreichten bei Aufgabe *HM6* jedoch nur einen Teil der Punkte. Bei den schweren Aufgaben war der Erfolg bei den vier Studierenden unterschiedlich: Während die Studierenden mit dem Einsatz von *Gleichungen* mindestens ein Viertel der möglichen Punkte erreichten, waren sie bei Aufgaben, in denen sie *Abbildungen* nutzten, weniger erfolgreich (ein Student erfolgreich, ein Student teilweise erfolgreich, ein Student nicht erfolgreich, ein Student setzte keine *Abbildung* ein). Beim *Vorwärtsarbeiten* zeigte sich ein ähnliches Bild, während die Studierenden bei leichten und mittelschweren Aufgaben, für die sie diese

Tabelle 9.22: Cluster von Studierenden anhand der Nutzung von Heurismen am dritten Messzeitpunkt.

Cluster	E	F	G	H
Studierende	S01, S08, S10, S33	S06, S11, S31	S04, S05, S09, S12, S29, S30, S36	S19, S20, S28
schwere Aufgaben	HH HS	o/o o	o/- o	-/- -
mittlere Aufgaben	HH HS	o/o +	-/- o	-/- --
leichte Aufgaben	HH HS	+/+ +	+/+ +	+/+ o/o

HH: Heuristische Hilfsmittel: Der erste Wert gibt den Erfolg mit *Abbildungen* an, der zweite mit *Gleichungen*.

HS: Heuristische Strategie: Wert gibt Erfolg mit der Strategie *Vorwärtsarbeiten* an.

+: Mehr als die Hälfte der Studierenden sind erfolgreich; o: Erfolgreiche und nicht erfolgreiche Studierende sind gleich häufig vertreten oder nur Studierende, die nicht alle Aufgaben korrekt gelöst haben; -: Mehr als die Hälfte der Studierenden ist nicht erfolgreich; - -: Keiner der Studierenden nutzt ein Hilfsmittel/eine Strategie.

Strategie nutzten, immer erfolgreich waren, war nur Student *S01* dies auch bei den schweren Aufgaben. Die Studierenden *S33* und *S08* waren nur teilweise erfolgreich, und Student *S10* war beim Einsatz des *Vorwärtsarbeitens* nicht erfolgreich. Die beiden Strategien *Analogieschluss* und *Systematisches Probieren* führten bei den Studierenden, wenn sie diese einsetzten, in den meisten Bearbeitungen zum Erfolg. Lediglich Student *S08* war beim *Systematischen Probieren* bei mittelschweren und schweren Aufgaben nicht bzw. nur teilweise erfolgreich. Die Studierenden aus diesem Cluster nutzten im Vergleich zu den anderen Clustern durchschnittlich am häufigsten die Möglichkeit, ihren Prozess zu reflektieren. Dabei waren sie in drei von vier Bearbeitungen auch erfolgreich. Auch bei den linearen und zyklischen Prozessen ohne *Rückschau*-Phasen waren die Studierenden aus diesem Cluster erfolgreicher als die drei anderen, wobei sie diese seltener einsetzten.

In Cluster *F*: *Lineare wenig erfolgreiche Gleichungsverwenderinnen* (Studentin

*S06*, Studentin *S11*, Student *S31*) sind die Studierenden zusammengefasst, die lediglich bei den leichten Aufgaben die beiden Hilfsmittel *Gleichungen* und *Abbildungen* erfolgreich nutzen konnten. Bei den mittelschweren Aufgaben waren sie bei allen Bearbeitungen nicht erfolgreich und bei den schweren Aufgaben nutzten sie lediglich *Gleichungen*, erreichten damit jedoch höchstens die Hälfte der möglichen Punkte. Auffällig war, dass alle Studierenden bei den schweren Aufgaben keine *Abbildungen* nutzten. *Heuristische Strategien* konnten die Studierenden fast ausschließlich bei den leichten Aufgaben komplett erfolgreich einsetzen. Lediglich Student *S31* setzte das *Systematische Probieren* bei Aufgabe *HM5* erfolgreich ein. Bei den schweren Aufgaben erreichten die Studierenden lediglich mit dem *Systematischen Probieren* bei den Bearbeitungen die Hälfte der Punkte, *Analogieschluss* setzten sie bei keiner Bearbeitung ein, und nur Studentin *S06* konnte mit Hilfe des *Vorwärtsarbeitens* bei Aufgabe *HM7* Teilpunkte erreichen. Lineare Prozesse ohne *Rückschau* waren die am häufigsten von den Studierenden dieses Clusters genutzten Prozesse. Dabei bearbeiteten die Studierenden jedoch nur die Hälfte der Aufgaben korrekt. Nur eine Studentin aus diesem Cluster nutzte die Möglichkeit, ihren Prozess zu reflektieren, war dabei jedoch nicht erfolgreich. Zusätzlich bearbeitete sie zwei Aufgaben erfolgreich in *schnellen Prozessen*.

Die Studierenden *S04*, *S05*, *S09*, *S12*, *S29*, *S30* und *S36*, die das Cluster *G: Zyklische wenig erfolgreiche Heurismennutzerinnen* bilden, ähnelten in ihrer Vorgehensweise den Studierenden aus Cluster *B*. Sie unterschieden sich bei den *Heuristischen Hilfsmitteln* insbesondere dadurch, dass sie bei den schweren Aufgaben *Abbildungen* nutzten, jedoch bei keiner Bearbeitung erfolgreich. Auch bei der Nutzung von *Gleichungen* bei den schweren Aufgaben erreichten die Studierenden nur höchstens die Hälfte der möglichen Punkte, zwei Studierende waren nicht erfolgreich, vier Studierende erreichten nur ein Sechstel der Punkte und nur ein Student erreichte die Hälfte der Punkte. Bei der Nutzung der Strategie *Vorwärtsarbeiten* zeigte sich ein ähnliches Bild, lediglich bei den leichten Aufgaben waren die Studierenden komplett erfolgreich, während bei den mittelschweren und schweren Aufgaben nur zwei Studierende Teilpunkte erreichten. *Analogieschluss* wurde nur von einem Studenten nur bei einer Aufgabe teilweise erfolgreich eingesetzt, *Systematisches Probieren* wurde dagegen von fast allen Studierenden in allen Schwierigkeitsbereichen eingesetzt. Bei den

leichten Aufgaben waren die Studierenden mit dieser Strategie erfolgreich, bei den mittelschweren hauptsächlich auch, bei den schweren erreichten sie jedoch höchstens die Hälfte der möglichen Punkte. Insgesamt nutzten vier Studierende dieses Clusters einen zyklischen Prozess ohne *Rückschau*-Phase, um Aufgaben zu bearbeiten. Bei den beiden Studenten *S05* und *S36* konnte dies dreimal beobachtet werden und damit am häufigsten von allen Studierenden, jedoch waren sie nur bei einer Bearbeitung erfolgreich. Nach den Studierenden aus Cluster *A* nutzten die Studierenden dieses Clusters am häufigsten die Möglichkeit, ihren Prozess zu reflektieren, dabei waren sie jedoch in weniger als der Hälfte der Bearbeitungen erfolgreich. Auffällig ist zudem, dass nur Student *S09* eine Aufgabe abgebrochen hat, im Durchschnitt hat dieses Cluster damit die wenigsten Abbrüche.

In Cluster *H: Lineare nicht erfolgreiche Heurismennutzerinnen*, das aus den Studierenden *S19*, *S20* und *S28* besteht, wurden von den Studierenden weder mit Hilfe von *Heuristischen Hilfsmitteln* noch mit Hilfe von *Heuristischen Strategien* in einem Schwierigkeitsbereich alle Aufgaben, in denen ein Heurismus eingesetzt wurde, erfolgreich bearbeitet. Nur Studentin *S28* konnte die leichten und mittelschweren Aufgaben, in denen sie *Systematisches Probieren* einsetzte, erfolgreich lösen. Die Studierenden in dieser Gruppe waren bei allen Prozess-Typen die am wenigsten erfolgreichen, *schnelle Prozesse* wurden in diesem Cluster gar nicht genutzt, um Aufgaben zu bearbeiten. Zugleich konnten nur bei einer Studentin zwei Abbrüche beobachtet werden.

Wie sich diese Einteilung in den *Dispositionen* widerspiegelt, ist in Abbildung 9.60 dargestellt.

Vergleicht man die Cluster, die sich aus dem erfolgreichen bzw. nicht erfolgreichen Einsatz von Heurismen ergeben, mit den Schätzern für die *Dispositionen*, so erwiesen sich die Cluster *E* und *H* als gut voneinander trennbar. Während sich in Cluster *E* die Studierenden mit den höchsten Schätzern in allen drei Variablen befinden, sind in Cluster *H* diejenigen mit den niedrigsten Schätzern in *Technischer Mechanik* und mit Schätzern für *Höhere Mathematik* im unteren Drittel zu finden. Bei den Werten für den  $FCI_3$  hatten die Studierenden in Cluster *H* die niedrigsten Werte, lediglich Studentin *S11* aus Cluster *F* hatte einen ebenso geringen Wert. Die gegenüber den anderen Clustern größere Heterogenität bei der Nutzung von Heurismen in Cluster *G* zeigte sich

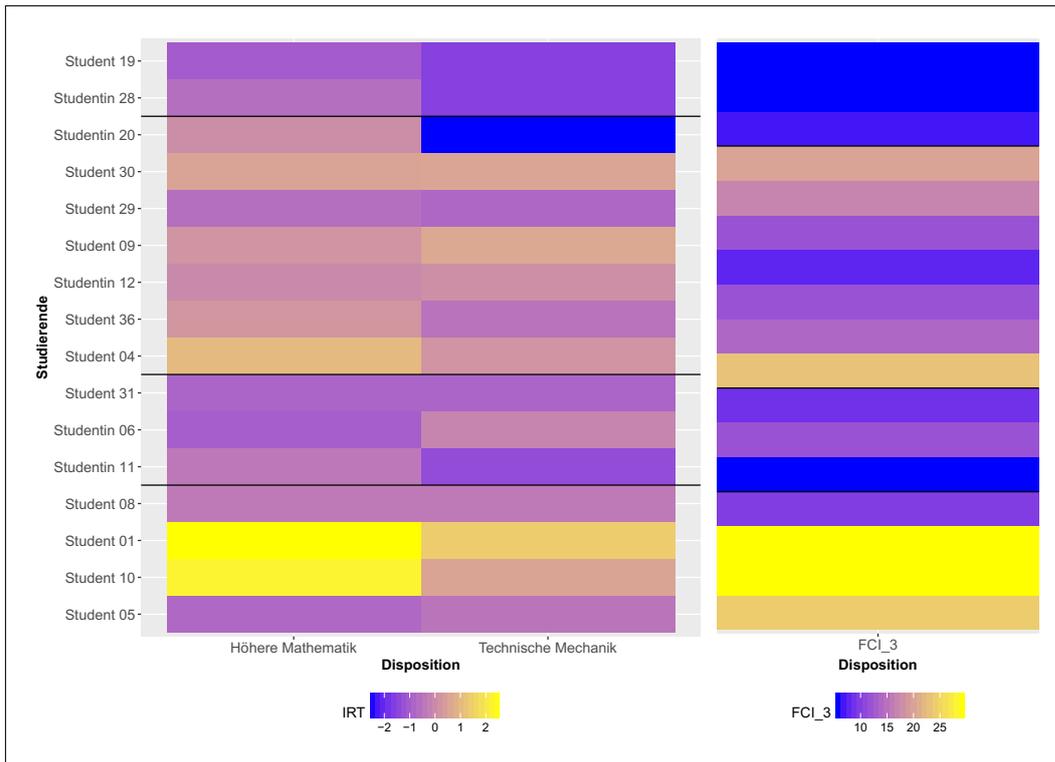


Abbildung 9.60: Vergleich zwischen den Clustern bei der Anwendung von Heuristiken und *Dispositionen* am dritten Messzeitpunkt.

auch bei den *Dispositionen*. Mit Student *S04* war jemand mit hohen Schätzern für *Höhere Mathematik* und *Technische Mechanik* in diesem Cluster und gleichzeitig war mit Student *S29* jemand mit niedrigen Schätzern in dem selben Cluster. Die Studierenden in Cluster *F*, die vergleichbar erfolgreich wie die Studierenden in Cluster *G* waren, wiesen alle niedrige Schätzer für *Höhere Mathematik* und *Technische Mechanik* auf, die tendenziell niedriger waren als in Cluster *F*. Diese Beobachtungen werden in Abschnitt 10.1.3 im Hinblick auf die theoretischen Vorannahmen diskutiert.

### 9.3.2 Zusammenhänge bei Physikaufgaben

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse zur Beantwortung der folgende Forschungsfrage mit Bezug zur Bearbeitung der Physikaufgaben dargestellt.

**F 3.2:** Inwiefern unterscheiden sich Studierende, die hinsichtlich ihres Einsatzes von *Epistemic Games* bei der Bearbeitung von Physikaufgaben in verschiedene Gruppen einordnet werden können, in ihren *Dispositionen*?

Die Gruppen setzten am ersten Messzeitpunkt unterschiedlich häufig EGs ein, um die Physikaufgaben zu lösen. Hier zeigte sich jedoch, dass Gruppen, die eine vergleichbare Anzahl von EG einsetzten, nicht auch vergleichbar erfolgreich bei der Bearbeitung waren. So nutzten beispielsweise Gruppe 3 und Gruppe 6 elf bzw. zwölf EGs, und während Gruppe 3 54% der möglichen Punkte erreichte, erzielten die Studierenden der Gruppe 6 94%. Bei vielen Aufgaben waren die Studierenden zudem auch ohne den Einsatz von EGs erfolgreich. Um unter diesen Umständen Zusammenhänge zwischen dem Einsatz von EGs und *Dispositionen* aufzudecken, wird im Folgenden für alle Gruppen der Einsatz von EGs hinsichtlich des Erreichens einer korrekten Lösung ausgewertet. In Abbildung 9.61 sind die EGs nach Erfolg und Aufgabe sortiert dargestellt.

Diese Abbildung ermöglicht eine Unterscheidung zwischen Gruppen, die mit Hilfe von EGs eine Aufgabe erfolgreich lösten, und Gruppen, die nicht in der Lage waren, EGs so einzusetzen, dass sie die Aufgabe erfolgreich lösten. Diese Unterteilung wurde hauptsächlich an der Bearbeitung der schweren Aufgaben vorgenommen, da bei den leichten und der mittelschweren nur wenige Unterschiede zwischen den Gruppen beobachtbar waren. Aus den 13 Gruppen lassen sich drei Cluster bilden. Das folgende Beispiel illustriert dieses Vorgehen: Für Gruppe 6 sind bis auf eine Ausnahme nur grüne Symbole für EGs bei den Aufgaben abgebildet. Bei den Aufgaben *TM8* bis *TM12*, für deren Lösung mathematische Berechnungen notwendig sind, hat diese Gruppe zudem hauptsächlich solche EGs eingesetzt, bei denen ein konzeptuelles Verständnis von den Studierenden gezeigt wird. Da ausgehend von den schweren Aufgaben die Cluster gebildet werden, passt diese Gruppe in den Cluster  $\alpha$ : *Erfolgreiche Mathematikverstherinnen*.

Die Gruppen 5, 6 und 8, die das Cluster  $\alpha$ : *Erfolgreiche Mathematikverstherinnen* bilden, waren als einzige in der Lage, bei den schweren Aufgaben die beiden quantitativen EGs *Mapping Meaning to Mathematics* und *Mapping Mathematics to Meaning* erfolgreich einzusetzen. Bei Nutzung des EG *Recur-*

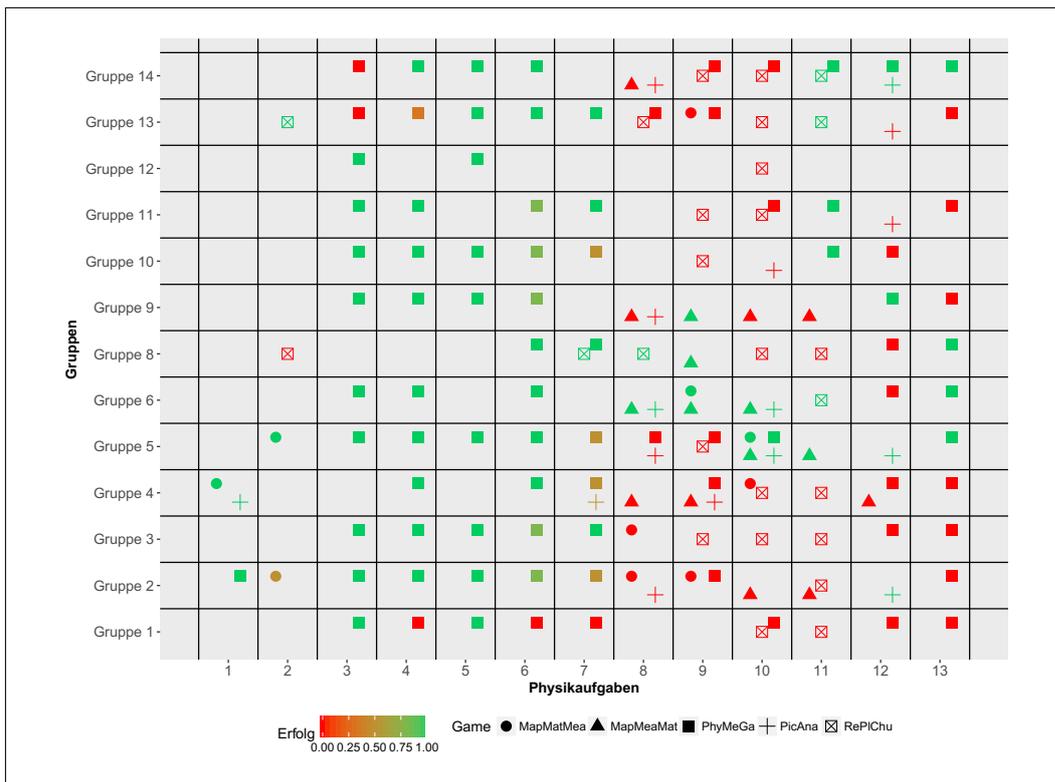


Abbildung 9.61: Darstellung des Erfolgs bei der Anwendung von *Epistemic Games* am ersten Messzeitpunkt. Der Erfolg in einer Aufgabe wird durch den Anteil der erreichten Punkte operationalisiert. Einige Aufgaben bestehen aus Teilaufgaben, die Teilpunkte für die ganze Aufgabe bringen.

sive *Plug and Chug*, in dem die Studierenden eher algorithmisch arbeiteten und kein konzeptuelles Verständnis zeigten, waren sie weniger erfolgreich. Die beiden qualitativen EGs *Pictorial Analysis* und *Physical Mechanism Game* wurden von den Gruppen in mindestens der Hälfte der Fälle erfolgreich eingesetzt.

Die Gruppen 2, 3, 4, 9, 13 und 14 bilden das Cluster  $\beta$ : *Wenig erfolgreiche Mathematikbenutzerinnen*. Diese Gruppen setzten zwar ebenfalls die beiden quantitativen Games *Mapping Meaning to Mathematics* und *Mapping Mathematics to Meaning* ein, jedoch konnten sie mit deren Hilfe die schweren Aufgaben nicht erfolgreich bearbeiten. Eine Ausnahme bildete Gruppe 9, die jedoch auch nur eine von vier Aufgaben auf diese Weise erfolgreich lösen konnte. Auch das EG *Recursive Plug and Chug* konnte in diesem Cluster nur von

zwei Gruppen in einer von drei Aufgaben erfolgreich eingesetzt werden. Ebenso bei den beiden qualitativen Games waren die Gruppen überwiegend nicht erfolgreich. Beim *Physical Mechanism Game* erreichte nur eine Gruppe in drei von fünf Aufgaben einen erfolgreichen Einsatz, während die übrigen Gruppen mit diesem Game bei keiner Aufgabe zum Erfolg gelangten.

Im Cluster  $\gamma$ : *Nicht erfolgreiche Alltagsphysikerinnen* sind die Gruppen enthalten, die weder bei den schweren noch bei den übrigen Aufgaben die beiden EGs *Mapping Meaning to Mathematics* und *Mapping Mathematics to Meaning* einsetzten. Auch die Nutzung der Games *Recursive Plug and Chug* und *Pictorial Analysis* war bei den Studierenden in diesem Cluster nicht erfolgreich. Lediglich das *Physical Mechanism Game* führte bei zwei Gruppen dazu, dass sie eine von zwei bzw. eine von drei schweren Aufgaben erfolgreich bearbeiten konnten, jedoch nur durch Erraten<sup>16</sup> der richtigen Lösung. In diesem Cluster sind die Gruppen 1, 10, 11 und 12. Wie sich diese Einteilung in den *Dispositionen* widerspiegelt, ist in Abbildung 9.62 dargestellt.

Die Einteilung in Cluster anhand des erfolgreichen Einsatzes von EGs zeigte sich auch in den *Dispositionen* der Gruppen. Die Gruppen in Cluster  $\alpha$ , die als einzige ein konzeptuelles Verständnis bei der quantitativen Bearbeitung der Physikaufgaben zeigten, haben in den drei *Dispositionen* im Vergleich zu den übrigen Gruppen hohe Werte. Auffällig sind die Werte für Schulphysik bei Gruppe 5 und für Schulmathematik bei Gruppe 8, die niedriger sind als bei den Gruppen aus Cluster  $\beta$ . Bei Cluster  $\gamma$  zeigte sich, dass die zugehörigen Gruppen über alle drei *Dispositionen* die niedrigsten Werten aller Gruppen hatten. In diesem Cluster gab es nur negative mittlere Personenfähigkeitsschätzer für die Gruppen, und drei von vier Gruppen erreichten im Durchschnitt weniger als sechs Punkte im *FCI*. Cluster  $\beta$  war in allen drei *Dispositionen* sehr heterogen, besonders die Gruppen 3 und 9 fielen mit hohen Werten auf der Skala für Schulmathematik und *FCI* auf.

Am dritten Messzeitpunkt zeigten sich besonders bei der Bearbeitung von Aufgaben mit mittlerer Schwierigkeit Unterschiede zwischen den Studierenden (siehe Abbildung 9.63). Aus diesem Grund wurden die Cluster ausgehend von diesen Bearbeitungen gebildet. Insgesamt zeigten sich hier vier Cluster, die sich insbesondere durch die Anwendung der quantitativen EGs herausbildeten.

<sup>16</sup>Dies war möglich, da es sich bei diesen Aufgaben um Multiple Choice Aufgaben handelte.

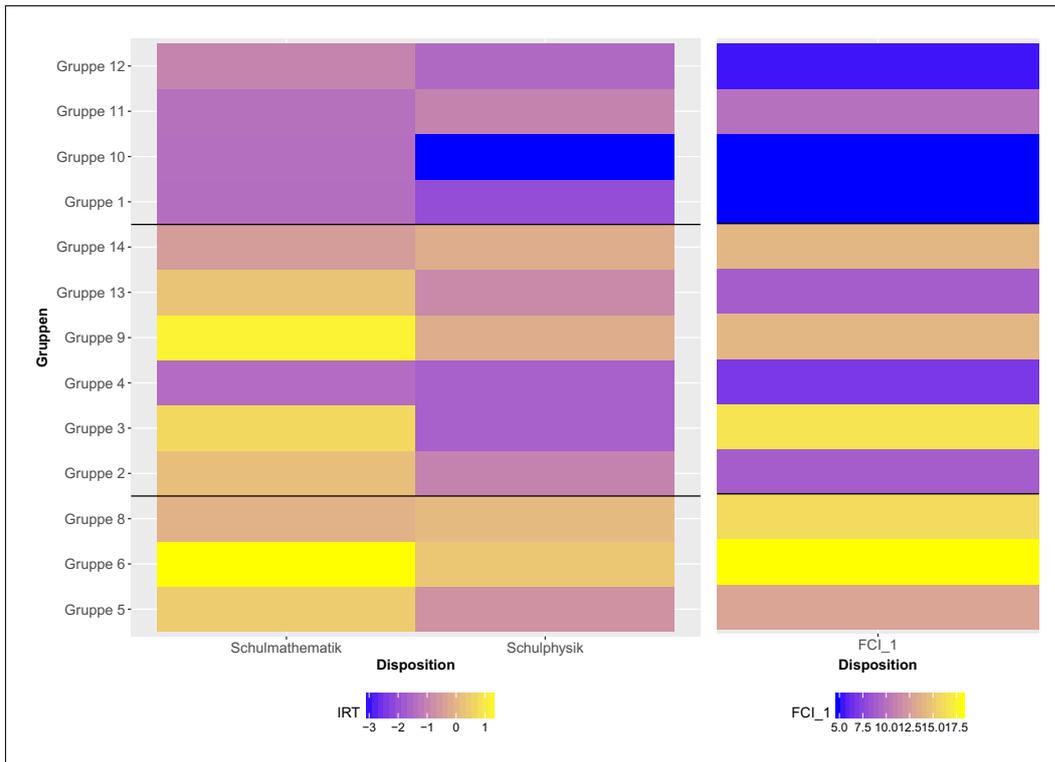


Abbildung 9.62: Heatmap zu *Dispositionen* am ersten Messzeitpunkt, nach Clustern sortiert. Für die *Dispositionen* Schulmathematik und Schulphysik sind die Personenfähigkeitsschätzer aus den Tests angegeben, für den  $FCI_1$  der Score aus dem *Force Concept Inventory*. Die Schätzer für die Gruppen ergeben sich als Median der einzelnen Personenschätzer.

In Cluster  $\delta$ : *Erfolgreiche Mathematikverstherinnen* sind die Studierenden, die zumindest teilweise erfolgreich die beiden Games *Mapping Meaning to Mathematics* und *Mapping Mathematics to Meaning* einsetzten, um die Aufgaben erfolgreich zu bearbeiten. Diese Studierenden setzten, bis auf eine Ausnahme, kein *Recursive Plug and Chug* bei den mittelschweren Aufgaben ein. Bei den schweren Aufgaben waren die Studierenden, sofern sie quantitative Games einsetzten, nicht mehr so erfolgreich wie zuvor bei den mittelschweren Aufgaben. Hier waren nur noch drei Studierende (teilweise) erfolgreich. Der Einsatz des *Pictorial Analysis* Games führte bei allen Studierenden dieses Clusters bei den mittelschweren Aufgaben zum Erfolg, bei den schweren Aufgaben nutzte nur

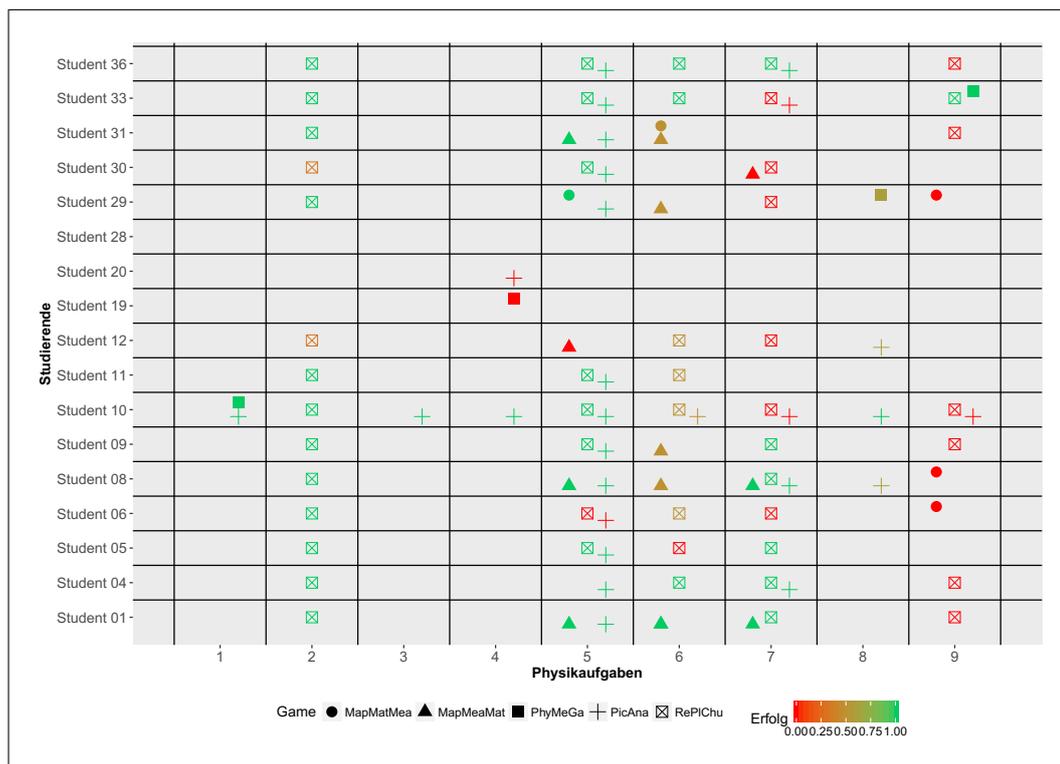


Abbildung 9.63: Darstellung des Erfolgs bei der Anwendung von *Epistemic Games* am dritten Messzeitpunkt. Der Erfolg in einer Aufgabe wird durch den Anteil der erreichten Punkte operationalisiert. Einige Aufgaben bestehen aus Teilaufgaben, die Teilpunkte für die ganze Aufgabe bringen.

noch ein Student dieses EG bei zwei Aufgaben, von denen er eine korrekt löste. Zu diesem Cluster gehören die Studierenden *S01*, *S08*, *S09*, *S29* und *S31*. Die Studierenden *S04*, *S30*, *S33* und *S36*, die Cluster  $\varepsilon$ : *Erfolgreiche Mathematikbenutzer* bilden, setzten nur die beiden Games *Recursive Plug and Chug* und *Pictorial Analysis* bei der Bearbeitung der leichten und mittelschweren Aufgaben ein. Bei allen Bearbeitungen bis auf eine waren sie damit erfolgreich. Auch bei den schweren Aufgaben setzten die Studierenden aus diesem Cluster nur bei zwei Bearbeitungen einmal das Game *Mapping Meaning to Mathematics* und einmal das *Physical Mechanism Game* nicht erfolgreich bzw. erfolgreich ein. Ansonsten blieben sie auch bei den schweren Aufgaben bei den beiden EGs wie zuvor.

Die Studierenden in Cluster  $\zeta$ : *Weniger erfolgreiche Mathematikbenutzerinnen*

(*S05, S06, S10, S11* und *S12*) ähnelten in ihrem Vorgehen den Studierenden aus Cluster  $\varepsilon$ , waren jedoch weniger erfolgreich. Auch sie nutzten in allen Schwierigkeitsbereichen fast ausschließlich die beiden EGs *Recursive Plug and Chug* und *Pictorial Analysis*. Bei den leichten Aufgaben waren sie immer erfolgreich, bei den mittelschweren erreichten sie mit *Recursive Plug and Chug* zwischen ein von vier und drei von vier Punkten. Bei den schweren Aufgaben waren die Studierenden hingegen mit diesem Vorgehen selten erfolgreich. Nur Student *05* war beim Einsatz von *Recursive Plug and Chug* in einer schweren Aufgabe erfolgreich.

Cluster  $\eta$ : *Nicht erfolgreiche Alltagsphysikerinnen* umfasst drei Studierende (*S19, S20* und *S28*), die jeweils höchstens ein EG nutzten und bei dem Einsatz zudem nicht erfolgreich waren. Studentin *19* und Student *S20* nutzten bei der mittelschweren Aufgabe *TM4* das qualitative Game *Pictorial Analysis* bzw. das *Physical Mechanism Game*. Auffällig war zudem, dass außer diesen beiden Studierenden nur ein weiterer Student bei dieser Aufgabe ein EG nutzte, im Fall von Student *S10* jedoch erfolgreich das *Pictorial Analysis* Game. Wie sich diese Einteilung in den *Dispositionen* widerspiegelt ist in Abbildung 9.64 zu sehen.

Auch in den *Dispositionen* zeigt sich die Einteilung in die Cluster. Die Studierenden in Cluster  $\delta$ : *Erfolgreiche Mathematikverstherinnen*, die teilweise ein erfolgreiches konzeptuelles Verständnis bei der quantitativen Bearbeitung der schweren Aufgaben zeigten, haben im Vergleich zu den Clustern  $\zeta$  und  $\eta$  hohe Werte in den beiden *Dispositionen* Höhere Mathematik und Technische Mechanik. Gegenüber den Studierenden in Cluster  $\eta$  haben die Studierenden aus Cluster  $\delta$  auch hohe Werte im *FCI*. Auffällig ist, dass alle Studierenden aus Cluster  $\varepsilon$ : *Erfolgreiche Mathematiknutzerinnen* höhere Werte in drei *Dispositionen* haben als die Mehrheit der Studierenden in Cluster  $\delta$ . In Cluster  $\zeta$  fällt besonders Student *S10* auf, der in allen *Dispositionen* hohe Werte erreicht. Cluster  $\eta$ : *Nicht erfolgreiche Alltagsphysiker* umfasst die Studierenden mit den niedrigsten Werten in den *Dispositionen*, besonders bei der Technischen Mechanik und dem *FCI*.

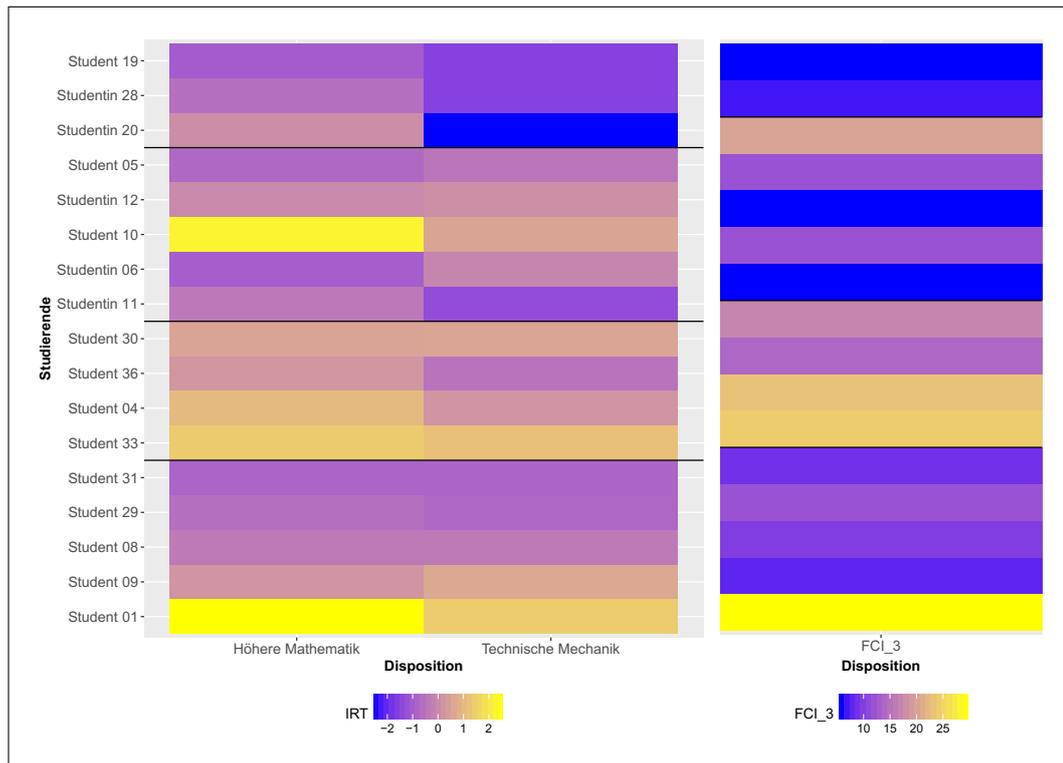


Abbildung 9.64: Heatmap zu *Dispositionen* am dritten Messzeitpunkt, nach Clustern sortiert. Für die *Dispositionen* Höhere Mathematik und Technische Mechanik sind die Personenfähigkeitsschätzer aus den Tests angegeben, für den  $FCI_3$  der Score aus dem *Force Concept Inventory*.



# Kapitel 10

## Fazit

In diesem Kapitel werden die erzielten Ergebnisse zusammengefasst und hinsichtlich der Forschungsfragen diskutiert (Abschnitt 10.1) sowie die eingesetzten Methoden reflektiert (Abschnitt 10.2). Abschließend werden Implikationen und Konsequenzen für die Ingenieurausbildung abgeleitet und mögliche weiterführende Forschungsfragen formuliert (Abschnitt 10.3).

### 10.1 Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, relevante mathematische Kompetenzen von Ingenieurstudierenden zu analysieren und dabei sowohl Wissensbestände als auch die Anwendung von Wissen zu berücksichtigen. Ausgehend vom Kompetenzmodell nach Blömeke et al. (2015) wurden 36 Ingenieurstudierende hinsichtlich der beiden Facetten *Dispositionen* und *situationsspezifische Fähigkeiten* und der Zusammenhänge zwischen ihnen untersucht. Im Folgenden werden die Ergebnisse zu diesen drei Aspekten zusammenfassend dargestellt und diskutiert.

#### 10.1.1 Dispositionen

In der Anlage der vorliegenden Studie dienen die *Dispositionen* der Studierenden als ein wichtiger Aspekt zur Beschreibung relevanter mathematischer Kompetenzen. Sie stellen, im Sinne des *Concurrent Transformative Designs*,

ergänzende Beschreibungen der qualitativen Daten zu den *situationsspezifischen Fähigkeiten* bereit. So werden in den Tests zur Schulmathematik und Schulphysik, zur Höheren Mathematik und zur Technischen Mechanik sowie zu den Vorstellungen zum Kraftkonzept die Grundlagen für die Anwendung der *situationsspezifischen Fähigkeiten* erfasst. Die leitende Frage lautete:

**F 1** Über welche mathematischen und physikalisch-technischen *Dispositionen* verfügen Ingenieurstudierende im ersten Studienjahr und wie hängen diese zusammen?

Für die Erhebung der *Dispositionen* standen Tests zum ersten und dritten Messzeitpunkt zur Verfügung, mit denen zum einen die Personenfähigkeiten der Studierenden in den Bereichen Mathematik und Physik und zum anderen die Vorstellungen zum Kraftkonzept erfasst werden konnten. Die Ergebnisse und Diskussionen sind vor dem Hintergrund der relativ kleinen Stichprobe zu sehen, die keine generalisierbaren Aussagen zulässt, erlauben aber eine Beantwortung der folgenden Forschungsfragen:

F 1.1 Über welche mathematischen und physikalisch-technischen *Dispositionen* verfügen Ingenieurstudierende im ersten Studienjahr?

F 1.2 Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den *Dispositionen* Schulmathematik, Schulphysik und Vorstellungen zum Kraftkonzept zu Beginn des Studiums?

F 1.3 Welche Zusammenhänge bestehen zwischen den *Dispositionen* Höhere Mathematik, Technische Mechanik und Vorstellungen zum Kraftkonzept zum Ende des ersten Studienjahres?

Die Studierenden unterscheiden sich hinsichtlich ihrer *Dispositionen* teilweise deutlich. Während einige Studierende sehr hohe Personenfähigkeitsschätzer aufweisen und damit ein hohes Wissen in den Bereichen zeigen, verfügen andere Studierende nur über sehr geringes Wissen. Für die beiden physikalischen *Dispositionen* Schulphysik und Technische Mechanik sind die Schätzer jeweils niedriger als für die Schätzer der mathematischen *Dispositionen*. Zum ersten

Messzeitpunkt erreichen nur sechs von 36 Studierenden den von Hestenes et al. (1992) beschriebenen Schwellenwert von 60% der Punkte, ab der die Vorstellungen zum Kraftkonzept ausreichend für Problemlösen sind. Zum dritten Messzeitpunkt erreichen fünf von 19 Studierenden diesen Wert. Die sogenannte *Newtonian Mastery threshold* (Hestenes & Halloun, 1995) erreichen nur zwei Studierende am dritten Messzeitpunkt und sind somit nach Hestenes und Halloun „confirmed Newtonian thinkers“ (S. 505). Es zeigt sich zudem, dass Studierende, die mit höheren *Dispositionen* in das Studium starten auch zum Ende des ersten Studienjahres höhere *Dispositionen* haben.

Für den ersten Messzeitpunkt waren die Zusammenhänge zwischen den Bereichen Schulmathematik, Schulphysik und Vorstellungen zum Kraftkonzept sowie der Abiturnote von Interesse. Es zeigen sich zwischen allen vier Variablen hohe signifikante Korrelationen, die darauf hindeuten, dass entweder die eine Variable die anderen kausal beeinflusst, zwei Variablen sich gegenseitig beeinflussen oder durch eine dritte beeinflusst werden (Field et al., 2012). Basierend auf den theoretischen Vorannahmen wurde Schulphysik als Kriteriumsvariable gesetzt. In den betrachteten Pfad- bzw. Mediatormodellen bestätigte sich diese Festsetzung und es zeigte sich, dass sich die Ergebnisse in Schulphysik über diejenigen in Schulmathematik und über Vorstellungen zum Kraftkonzept erklären lassen. Inhaltlich lässt sich die Richtung des kausalen Zusammenhangs insofern deuten, als dass die Schulmathematik wichtige Methoden und Verfahren für die Schulphysik bereitstellt (vgl. Abschnitt 3.3) und somit eine hohe *Disposition* in der Schulmathematik eine hohe *Disposition* in der Schulphysik fördert. Während die Schulmathematik als vielfältiges Hilfsmittel für die Schulphysik dient (z. B. Kommunikations- und Werkzeugfunktion), stellen die Vorstellungen zum Kraftkonzept eine inhaltliche Basis für die Schulphysik dar. Auffällig ist bei dieser Modellierung der hohe korrelative Zusammenhang zwischen Schulmathematik und den Vorstellungen zum Kraftkonzept und der mediiierende Effekt, den die Vorstellungen bei der Wirkung von Schulmathematik auf Schulphysik haben. So ist der *FCI* zur Erhebung der Vorstellungen zum Kraftkonzept so ausgelegt, dass weder genaue Formelkenntnisse noch mathematische Berechnungen notwendig sind. Hier müssen andere Konstrukte, wie beispielsweise das Interesse an mathematischen und physikalischen Inhalten bei Schülerinnen und Schülern eine Rolle spielen.

Für den dritten Messzeitpunkt zeigen sich Zusammenhänge, die denen des ersten Messzeitpunkts ähneln. Während die Vorstellungen zum Kraftkonzept weiterhin einen Prädiktor für die Testergebnisse in der Technischen Mechanik darstellen, haben die mathematischen Variablen (Personenfähigkeitsschätzer Höhere Mathematik und Note in Mathematikvorlesung) jedoch keinen signifikanten Einfluss auf das Wissen zur Technische Mechanik. Diese Wirkungen werden vollständig durch die Vorstellungen zum Kraftkonzept und durch die Mechaniknote mediiert. Die theoretische Vorannahme kann für diesen Messzeitpunkt so nur teilweise und nur für die Vorstellungen zum Kraftkonzept bestätigt werden. Eine vorsichtige Interpretation der Ergebnisse könnte sein, dass das Wissen zur Höheren Mathematik zwar weiterhin eine Basis für das Wissen zur Technischen Mechanik darstellt, in dieser jedoch spezialisierte mathematische Kompetenzen benötigt werden und die Kenntnis dieser wiederum die Bearbeitung der Testaufgaben zur Technischen Mechanik beeinflusst. Wie bereits zum ersten Messzeitpunkt existiert auch zum dritten Messzeitpunkt ein signifikanter Zusammenhang zwischen den mathematischen Variablen und den Vorstellungen zum Kraftkonzept.

Eine Schlussfolgerung für die Universitätsausbildung könnte sein, dass die Inhalte der Mathematikveranstaltungen in die Veranstaltungen zur Technischen Mechanik integriert werden bzw. beide aufeinander abgestimmt sein sollten, damit die Veranstaltungen zur Höheren Mathematik zu besseren Leistungen in Veranstaltungen zur Technischen Mechanik beitragen können. Eine von allen beteiligten Fakultäten gemeinsam verantwortete Eingangsphase könnte dafür eine Basis bilden und eine Verzahnung der beiden Bereiche fördern.

### 10.1.2 Situationspezifische Fähigkeiten

Als Operationalisierung der *situationspezifischen Fähigkeiten* wurde die Nutzung von Heurismen, das Durchlaufen von Problemlösephasen und der Einsatz von EGs bei der Aufgabenbearbeitung untersucht. Dabei war die folgende Forschungsfrage leitend:

**F 2:** Welche *situationspezifischen Fähigkeiten* nutzen Ingenieurstudierende bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben und mathematikhaltigen Physikaufgaben im ersten Studienjahr im Hinblick auf das mathematische Problemlösen?

Dieser Frage folgend wurde der Einsatz von Heurismen bei der Bearbeitung der Mathematikaufgaben nach der inneren und äußeren Struktur differenziert untersucht. Für die innere Struktur wurde auf die Klassifizierung von Bruder und Collet (2011) in *Heuristische Hilfsmittel*, *Heuristische Strategien* und *Heuristische Prinzipien* zurückgegriffen. Das Phasenmodell von Polya (1957) mit den vier Phasen *Verstehen des Problems*, *Ausdenken eines Plans*, *Ausführen des Plans* und *Rückschau* diente der Analyse der äußeren Struktur. Für die Bearbeitung der Physikaufgaben standen die *Epistemic Games Mapping Meaning to Mathematics*, *Mapping Mathematics to Meaning*, *Recursive Plug and Chug*, *Pictorial Analysis* und *Physical Mechanism Game* (Tuminaro, 2004) als Analyseraster zur Verfügung. Mit Hilfe eines daraus entwickelten Kategoriensystems wurden die folgenden drei Forschungsfragen untersucht:

F 2.1 Welche Heurismen werden bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben im ersten Studienjahr genutzt?

F 2.2 In welcher Weise lässt sich der Ablauf der Problemlösephasen bei den Bearbeitungen der Mathematikaufgaben charakterisieren?

F 2.3 Inwiefern werden *Epistemic Games* von den Studierenden bei der Bearbeitung von Physikaufgaben im ersten Studienjahr eingesetzt?

Wenn man die Ergebnisse, aber auch das Design der Studie betrachtet, können die drei Messzeitpunkte in zwei Phasen eingeteilt werden. Phase 1: *Die (elaborierte) Schulphase* umfasst die ersten beiden Messzeitpunkte, die durch

mathematische Kompetenzen aus der Schule bzw. deren Weiterentwicklung im ersten Semester geprägt waren. An den ersten beiden Messzeitpunkten bearbeiteten die Studierenden in Gruppen Aufgaben aus der Schulmathematik und der Schulphysik. Zu Beginn des Studiums geschah dies ausschließlich mit Methoden, welche die Studierenden in der Schule gelernt hatten. Am zweiten Messzeitpunkt bearbeiteten die Studierenden die gleichen Aufgaben mit (elaborierten) Methoden, die sie im ersten Semester erworben hatten. Das erste Semester behandelt jedoch nur wenige neue Inhalte, sondern vertieft hauptsächlich Themen, die auch zu den Lehrplänen der Sekundarstufe gehören, auf Hochschulniveau (siehe Abschnitt 7.4). Für die Mathematik ist dies beispielsweise die Differentialrechnung einer Veränderlichen, die sowohl in der Sekundarstufe 2 als auch im ersten Semester thematisiert wird, und in den Aufgaben vorkam, die für die Studie genutzt wurden. Bei den Physikaufgaben war eine ähnliche Situation gegeben, so sind Kraftsysteme in den Lehrplänen der Sekundarstufe 2 und den Modulbeschreibungen des ersten Semesters enthalten, und auch Thema in den Aufgaben für die Videographie. Durch die Verwendung der selben Aufgaben zum zweiten Messzeitpunkt zeigten sich Entwicklungen bei der Bearbeitung durch die Studierenden, die auf das Studium zurückgeführt werden konnten.

*Phase 2: Die Hochschulphase* umfasst den dritten Messzeitpunkt und fokussiert nahezu ausschließlich Inhalte und Methoden, die im Ingenieurstudium behandelt werden. Zu diesem Messzeitpunkt arbeiteten die Studierenden alleine an Aufgaben aus der Höheren Mathematik und der Technischen Mechanik, die Themen der ersten beiden Semester abdeckten. So bearbeiteten die Studierenden eine Aufgabe zum Thema Integralrechnung mehrerer Veränderlicher, das erst im zweiten Semester des Studiums behandelt wird, und nicht im Lehrplan der Sekundarstufe vorkommt. Bei den Aufgaben zur Technischen Mechanik mussten die Studierenden beispielsweise eine Streckenlast bestimmen. Die Methoden dazu hatten sie erst im Studium gelernt.

Diese Aspekte werden in der folgenden Diskussion berücksichtigt und bei der Darlegung möglicher Zusammenhänge und Entwicklungen zwischen den beiden Phasen beachtet.

## Diskussion des Einsatzes von Heurismen

Die Forschungsfrage 2.1 wird entlang der Struktur der Ergebnisdarstellung zuerst allgemein und dann für die drei Kategorien *Heuristische Hilfsmittel*, *Vorwärtsarbeiten* und weitere *Heuristische Strategien* und *Heuristische Prinzipien* beantwortet. Über alle drei Messzeitpunkte zeigten die Studierenden bei der Bearbeitung der Mathematikaufgaben nur wenige unterschiedliche Heurismen. Bei den *Heuristischen Hilfsmitteln* sind dies hauptsächlich *Abbildungen* und *Gleichungen*, und bei den *Heuristischen Strategien* ist es das *Vorwärtsarbeiten*. Die übrigen Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien wurden nur bei einzelnen Aufgaben eingesetzt. Dies bestätigt die theoretischen Vorannahmen, dass nur wenige Heurismen von den Studierenden bei typischen Mathematikaufgaben genutzt werden. Hierfür kann es zwei Gründe geben: Erstens sind die eingesetzten Aufgaben nicht mit dem Ziel entwickelt worden, dass möglichst viele (unterschiedliche) oder bestimmte Heurismen durch die Studierenden eingesetzt werden müssen. Dammann (2016) beschreibt, dass sich das Konstruktionsprinzip der Aufgaben zur Technischen Mechanik „primär an den Aufgaben, die Studierende in Klausuren bearbeiten müssen“ (S. 121) orientiert.<sup>1</sup> Beispielsweise war nur bei wenigen Aufgaben der Einsatz einer *Tabelle* sinnvoll bzw. möglich. Zweitens ist es denkbar, dass die Studierenden zu den ersten beiden Messzeitpunkten nicht über die entsprechenden Heurismen verfügten, was auf eine unterschiedliche Schulausbildung zurückgeführt werden kann. So nutzten nur sechs Gruppen am ersten und drei am zweiten Messzeitpunkt das *Extremalprinzip* bei der Bearbeitung von Aufgaben. Die individuelle Schulausbildung der Studierenden als möglicher Grund für die unterschiedliche Herangehensweise der Studierenden wird durch den Umstand unterstützt, dass zum dritten Messzeitpunkt, nachdem die Studierenden ein Jahr die selben Studieninhalte gelernt haben, sie sich insbesondere beim Einsatz von Strategien und Prinzipien ähnelten. Dies zeigt sich beispielsweise bei den Aufgaben HM5 (*Extremalprinzip*), HM7 (*Invarianzprinzip*) oder HM9 (*Symmetrieprinzip*). Während zu den beiden ersten Messzeitpunkten höchstens die Hälfte der Gruppen eine vergleichbare Strategie nutzte, um eine Aufgabe zu bearbeiten, waren es am dritten Messzeitpunkt bei den zuvor benannten Aufgaben bis auf wenige Ausnahmen nahezu alle Studierenden. Hier zeigt sich, dass die beiden

---

<sup>1</sup>Ausführlicher wird die Thematik der Aufgaben in Abschnitt 10.2 behandelt.

oben erwähnten Phasen unterschieden werden können. Die erste Phase ist geprägt durch das Schulwissen, das im ersten Semester um elaborierte Methoden erweitert wird und erst in der zweiten Phase wurden elaborierte Methoden umfassend eingesetzt.

Die beiden *Heuristischen Hilfsmittel Abbildungen* und *Gleichungen* werden von allen Studierenden zu jedem Messzeitpunkt genutzt, um die Wahrnehmung und Interpretation der Problemsituation sowie das Treffen von Entscheidungen zu unterstützen, jedoch lassen sich sowohl über die Messzeitpunkte hinweg als auch innerhalb der einzelnen Messzeitpunkte Unterschiede bei der Anwendung und den verfolgten Zielen beobachten. Beim Einsatz von *Abbildungen* zeigt sich, dass Studierende, die diese basierend auf allen notwendigen Informationen erstellen, erfolgreicher sind als Studierende, die zu stark simplifizieren (siehe beispielsweise die Bearbeitungen von Aufgabe HM10 zum ersten Messzeitpunkt) oder nicht die gesamte Situation wahrnehmen und interpretieren (siehe die Bearbeitung von Aufgabe HM4 zum dritten Messzeitpunkt als Beispiel). So wird deutlich, dass häufig nur bei einem Einsatz im Sinne von Bruder und Collet (2011) eine *Abbildung* ihre Funktion als Heurismus erfüllen kann. Über die drei Messzeitpunkte hinweg verschiebt sich das Ziel des Einsatzes von *Abbildungen*. Während am ersten Messzeitpunkt die Illustration der Problemsituation, also die Unterstützung der Wahrnehmung, im Vordergrund steht, gewinnt die Funktion, die Mathematisierung vorzubereiten (Interpretation und Entscheidungen treffen) an den beiden anderen Messzeitpunkten an Bedeutung: Zudem ist der Wechsel zwischen den Repräsentationen, welcher von Schwarz (2006), Tietze et al. (2000) und Zimmermann (2003) selbst als Heurismus angesehen wird, zielgerichteter als zuvor, indem bestimmte Aspekte in den *Abbildungen* betont wurden, die später für die *Gleichungen* von Bedeutung waren (siehe zum Beispiel die Bearbeitung von Aufgabe HM4 am dritten Messzeitpunkt durch Student *S08*).

Die Mathematisierung der Prozesse zeigt sich besonders beim Einsatz von *Gleichungen*. Dieser nimmt anteilmäßig vom ersten zum zweiten Messzeitpunkt zu. Am zweiten Messzeitpunkt ist zudem auffällig, dass die Gruppen, die ihren *Dispositionen* nach zu den schlechteren gehören, auffällig häufig *Gleichungen* einsetzten. Besonders fallen hier die drei Gruppen *10*, *12* und *14* auf, die am ersten Messzeitpunkt am seltensten *Gleichungen* nutzten und am zweiten

Messzeitpunkt die meisten. Erklärbar ist dies dadurch, dass die Anwendung von *Gleichungen* generell mehr Fachwissen benötigt als die Anwendung von *Abbildungen* oder *Tabellen* (Bruder & Collet, 2011) und die Studierenden jenes erst beim zweiten Messzeitpunkt erfolgversprechend einsetzen konnten, da sie erst zu diesem Zeitpunkt in der Lage waren, die Situation zu interpretieren und auf dieser Entscheidungen zu treffen. Zugleich verfügen schwächere Lernende noch über weniger Routinen als stärkere, die am zweiten Messzeitpunkt dieses Hilfsmittel nicht mehr in dem Umfang benötigten wie noch zuvor beim ersten Messzeitpunkt. Am dritten Messzeitpunkt zeigte sich eine zusätzliche Funktion von *Gleichungen*, nämlich die Unterstützung der Strukturierung von Informationen. Hier konnte beobachtet werden, dass Studierende, die *Gleichungen* mit dieser Funktion einsetzten, erfolgreicher waren als die Studierenden, die alleine die Mathematisierungsfunktion im Blick hatten.

*Tabellen* wurden nur von einem Studenten am dritten Messzeitpunkt bei einer Aufgabe eingesetzt. Dieses Hilfsmittel war für die Bearbeitung der meisten Aufgaben nicht notwendig.

Das *Vorwärtsarbeiten* war die am häufigsten eingesetzte Strategie; sie beschreibt das planvolle Vorgehen bei der Bearbeitung einer Aufgabe, und war bei den Studierenden zu allen Messzeitpunkten, besonders bei den schweren Aufgaben zu beobachten. Hier war sie ein Indikator für ein erfolgreiches Lösen der Aufgaben, da die Entscheidungen planvoll auf Grundlage der Wahrnehmung und Interpretation der Problemsituation getroffen wurden. An diesen Aufgaben scheiterten die Studierenden dann, wenn ihnen das mathematische Wissen fehlte, nicht an der eigentlichen Anwendung der Strategie. Zudem benötigten die Studierenden nur bei diesen Aufgaben *Vorwärtsarbeiten* in der Form, dass sie einen Plan mit Teilzielen verfolgten, also als Stufe 2-Heurismus. Dieses Vorgehen spiegelt die von Schwarz (2006) beschriebene Verbindung des *Vorwärtsarbeitens* zur Mittel-Ziel-Analyse wider, wie sie auch Anderson (2001) benennt. Besonders bei den schweren Aufgaben, für deren Bearbeitung die Studierenden Teilziele formulierten und abarbeiteten, zeigte sich dieser Zusammenhang. Beim Einsatz des *Vorwärtsarbeitens* auf Stufe 2 nutzten die erfolgreichen Studierenden zudem Kontrollaktivitäten, wie sie Woods (2000) und Litzinger et al. (2010) in ihren Modellen als Monitoring beschreiben.

## Diskussion des Durchlaufens der Problemlösephasen

Zur Beantwortung der Forschungsfrage 2.2 wurden die Bearbeitungen der Mathematikaufgaben im Hinblick auf das Vorkommen der Phasen im Problemlöseprozess nach Polya (1957) analysiert. Dabei zeigten sich fünf unterscheidbare Typen: *Linear/Zyklisch mit Rückschau*, *Linear ohne Rückschau*, *Zyklisch ohne Rückschau*, *Schneller Prozess* und *Abbruch*. Bei den meisten Bearbeitungen konnten nicht alle Phasen beobachtet werden. Besonders die *Rückschau*-Phase wurde nur von wenigen Gruppen durchlaufen und dies zum überwiegenden Teil lediglich bei den schweren Aufgaben. Dabei beschränkten sich die Studierenden nur auf einen Teil der möglichen Aktivitäten: Sie überprüften die Korrektheit der Ergebnisse. Dies entspricht der theoretischen Vorannahme und bestätigt die Beobachtungen von Fan und Zhu (2007), Yimer und Ellerton (2010) und Rott (2013). Eine Reflexion des Prozesses, mit den enthaltenen Interpretationen und Entscheidungen, sowie eine Nutzbarmachung für zukünftige Probleme, wie es Autorinnen von Problemlösemodellen fordern (Polya, 1957; Mason et al., 2010; J. W. Wilson et al., 1993), fand bei keiner Bearbeitung statt. In über der Hälfte der Aufgaben zum ersten und zweiten Messzeitpunkt gingen die Studierenden, wie vorab erwartet, linear vor und beendeten nach dem Erhalt einer Lösung die Bearbeitung. Die Studierenden haben sich nicht detailliert mit den Aufgaben auseinandergesetzt. So fand ein „Abarbeiten“ der Aufgaben statt und die Studierenden haben vielmehr Ergebnisse produziert. Besonders bei den schweren Aufgaben, bei denen Teilergebnisse weiter verwendet werden mussten, führte diese Vorgehensweise häufig nicht zum richtigen Ergebnis. Bei solchen Aufgaben zeigten sich die vorab angenommenen häufigeren Monitoringhandlungen der leistungsstarken Studierenden, wie von Litzinger et al. (2010) bereits beobachtet.

Zyklische Prozesse ohne *Rückschau* beschreiben ein ungeplantes Vorgehen, bei dem die Studierenden zwischen verschiedenen Phasen hin und her wechseln, ohne einen Plan zu verfolgen oder die vorherige Phase zu reflektieren, wodurch sie in der folgenden Phase planvoller vorgehen könnten. Diese Prozesse waren in nahezu allen Fällen nicht erfolgreich. Statt eines solchen Vorgehens sollte ein Wechsel, besonders aus der Durchführungsphase in eine vorherige, immer mit einer Monitoringhandlung verbunden sein. Neben diesen drei Typen von Problemlöseprozessen (*Linear/Zyklisch mit Rückschau*, *Linear oh-*

ne *Rückschau* und Zyklisch ohne *Rückschau*) konnten auch zwei Typen von Nicht-Problemlöseprozessen beobachtet werden: Schnelle Prozesse bei denen eine Verstehens- oder Planungsphase und die Reflexionsphase fehlten und Abbrüche, bei denen die Studierenden nicht bis zur Phase des *Durchführens eines Plans* gelangten.

Das Durchlaufen der Phasen spiegelte teilweise auch den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben wider. Während die *Rückschau*-Phase hauptsächlich bei schweren Aufgaben vorkam und damit den Problemcharakter der Aufgaben unterstrich, kamen die schnellen Prozesse, die im Sinne der Arbeit keinen Problemlöseprozess darstellen, besonders bei den leichten Aufgaben vor, die zusammen mit der selteneren Anwendung von Heuristiken eher als Nicht-Problemaufgaben klassifiziert werden können.

### **Diskussion des Einsatzes von Epistemic Games**

Bei der Bearbeitung der Physikaufgaben, die für die Forschungsfrage 2.3 untersucht wurden, zeigte sich an allen Messzeitpunkten, dass sowohl bei quantitativen als auch bei qualitativen Games die umfassende Wahrnehmung und Interpretation der physikalischen Situation und die daraus folgende Auswahl des angemessenen EG wichtig für die erfolgreiche Bearbeitung der Aufgaben war. Das Fachwissen hatte bei diesen Aufgaben, wie in Modellen zum wissenszentrierten Problemlösen beschrieben (Reinhold et al., 1999; Frieger & Lind, 2003; Brandenburger et al., 2014; Larkin & Reif, 1979), einen hohen Stellenwert und Einfluss auf die erfolgreiche Bearbeitung. Deutlich wird dies auch an den Problemschemata, die eine Verbindung von deklarativen Problemrepräsentationen und Prozeduren darstellen (Reinhold et al., 1999), und die bei einigen erfolgreichen Bearbeitungen von den Studierenden eingesetzt wurden. Die Anwendung eines solchen Problemschemas zeigt sich bei der Bearbeitung von Aufgabe TM8 durch Gruppe 9 am zweiten Messzeitpunkt. Hier konnten die Studierenden die Situation schnell interpretieren und alle notwendigen Entscheidungen treffen. Die Bearbeitung der gleichen Aufgabe durch Gruppe 12 zeigt exemplarisch eine Bearbeitung, wenn kein Problemschema vorhanden ist. Die Studierenden verfügten hier nur über isoliertes Wissen, das sie nicht erfolgreich verknüpfen konnten. Diese Vorgehensweise, die eine Unterscheidung

zwischen Expertinnen und Novizen ermöglicht (Reinhold et al., 1999), wird als Indikator für eine erfolgreiche und nicht erfolgreiche Bearbeitung genutzt. Wie bei den quantitativen EGs war auch bei der Verwendung von qualitativen EGs die korrekte Nutzung von physikalischen Konzepten und Begriffen bei der Lösung entscheidend.

Ein weiterer Aspekt, der besonders bei Physikaufgaben beobachtet werden konnte, die Berechnungen erforderten, war, dass erfolgreiche Studierende häufiger in der Lage waren, Repräsentationen von physikalischen Situationen über eine qualitative Natur hinaus zu einer mathematischen Repräsentation zu überführen, die die Situation adäquat wiedergab. Dieses Vorgehen ähnelt demjenigen, das Expertinnen auszeichnet (Reinhold et al., 1999). Gleichzeitig lieferten diese Repräsentationen Zusammenhänge zwischen physikalischen Prinzipien und Konzepten (Maloney, 2011). Zudem bestätigt sich bei diesen Aufgaben die theoretische Vorannahme, dass leistungsschwächere Studierende häufig nicht in der Lage waren, die Problemsituationen adäquat in einer für eine quantitative Darstellung förderlichen Weise abzubilden und stattdessen auf Alltagserfahrungen in Form des *Physical Mechanism Games* zurückgriffen. Hierbei nutzten sie oftmals die vorgegebenen Antworten als Argumentationsgrundlage. Am dritten Messzeitpunkt fällt die häufige Nutzung des EG *Recursive Plug and Chug* auf. Die Studierenden sind bei der Anwendung in der Lage, die Aufgabe mit Hilfe von zusammengestellten Routinen zu lösen. Ein konzeptuelles Verständnis müssen sie nur selten zeigen, dabei wenden sie zudem überwiegend die gleichen Verfahren an. Hier bestätigt sich die theoretische Vorannahme zum EG *Recursive Plug and Chug*, dass dieses auch aufgrund seiner rein mechanischen Anwendungsweise häufiger genutzt wird als die beiden EGs, die ein konzeptuelles Verständnis erfordern.

Die Phase 2: *Die Hochschulphase* unterscheidet sich deutlich von den beiden Messzeitpunkten der Phase 1: *Die (elaborierte) Schulphase*. Die Studierenden haben in den beiden Semestern zuvor dieselben Veranstaltungen zur Mathematik und Technischen Mechanik besucht und nutzen deshalb die selben Verfahren. Zu den beiden Messzeitpunkten in der Phase 1 zuvor zeigte sich noch die unterschiedliche Schulausbildung in den teilweise sehr unterschiedlichen Herangehensweisen. Über das Jahr hinweg fand eine zunehmende Angleichung der Studierenden bei ihrem Einsatz von Methoden statt. Dies führte zu vergleich-

baren Problemschemata bei allen Studierenden, stärker ausgeprägt als noch beim zweiten Messzeitpunkt.

### 10.1.3 Zusammenhänge zwischen Dispositionen und situationsspezifischen Fähigkeiten

Für die Untersuchung der Zusammenhänge zwischen *Dispositionen* und *situationsspezifischen Fähigkeiten* war die folgende Forschungsfrage leitend:

**F 3:** Welche Zusammenhänge bestehen zwischen *Dispositionen* und *situationsspezifischen Fähigkeiten* von Ingenieurstudierenden im ersten Studienjahr beim Bearbeiten von Mathematikaufgaben und (mathemathikhaltigen) Physikaufgaben?

Diese Frage wurde für die Bearbeitung der Mathematik- und der Physikaufgaben getrennt ausgewertet. Dafür wurden die beiden folgenden Fragen untersucht:

F 3.1 Inwiefern unterscheiden sich Studierende, die hinsichtlich ihres Einsatzes von Heurismen bei der Bearbeitung von Mathematikaufgaben in verschiedene Gruppen eingeordnet werden können, in ihren *Dispositionen*?

F 3.2 Inwiefern unterscheiden sich Studierende, die hinsichtlich ihres Einsatzes von *Epistemic Games* bei der Bearbeitung von Physikaufgaben in verschiedene Gruppen eingeordnet werden können, in ihren *Dispositionen*?

Für die Zusammenhänge zwischen der Anwendung von Heurismen und den *Dispositionen* lassen sich einige Erkenntnisse zusammentragen. Es zeigen sich zum ersten Messzeitpunkt zwischen den beiden Clustern, die zum einen die erfolgreichen (*C: Erfolgreiche reflektierte Heurismenverwenderinnen*) und zum anderen die nicht erfolgreichen (*D: Erfolglose lineare Gleichungsverwenderinnen*) Studierenden beinhalten, auch Unterschiede in den *Dispositionen*. Die erfolgreichen Gruppen bestanden zum großen Teil aus Studierenden, die hohe Personenfähigkeitsschätzer in den beiden Tests zur Schulmathematik und Schulphysik hatten. Die Gruppen, die nicht erfolgreich beim Einsatz von Heurismen waren, bestanden zum großen Teil aus Studierenden die in beiden Tests

nur geringe Personenfähigkeitsschätzer erreichten. Für diese beiden Cluster zeigen sich also deutliche Zusammenhänge zwischen den *Dispositionen* (sowohl Schulmathematik und Schulphysik als auch Vorstellungen zum Kraftkonzept) auf der einen Seite und der Verwendung von Heurismen auf der anderen Seite. Hier bestätigen sich somit die theoretischen Vorannahmen. Für die beiden anderen Cluster (*A: Lineare erfolgreiche Gleichungsverwenderinnen*, *B: Schnelle reflektierte Gleichungsverwenderinnen*), die sich bei der Verwendung von Heurismen zwischen den beiden vorherigen einordnen lassen, zeigen sich solche Zusammenhänge nicht. Hier variieren die Personenfähigkeitsschätzer der Gruppenmitglieder; teilweise liegen sie auf dem Niveau der erfolgreichen Gruppen und teilweise auf dem Niveau der nicht erfolgreichen Gruppen. Ein Grund könnte in der Gruppenarbeit am ersten Messzeitpunkt liegen. In dieser Sozialform können leistungsstärkere Gruppenmitglieder fehlende Kompetenzen von leistungsschwächeren Studierenden ausgleichen und so als Gruppe mehr Kompetenzen zeigen. Ein weiterer Grund könnte darin liegen, dass die Tests zur Erhebung der *Dispositionen* hauptsächlich das Fachwissen erfassen. Sie decken damit nur einen notwendigen, aber keinen hinreichenden Teil der Kompetenzen ab, welche die Studierenden benötigen, um bei der Anwendung von Heurismen erfolgreich zu sein. So fehlt es einigen Studierenden, die sich in den Clustern *A: Lineare erfolgreiche Gleichungsverwenderinnen* und *B: Schnelle reflektierte Gleichungsverwenderinnen* befinden an den notwendigen Strategien, während das Fachwissen vorhanden ist, und anderen Studierenden fehlt das notwendige Fachwissen bei gleichzeitigem Wissen um die Strategien.

Auch am dritten Messzeitpunkt zeigten sich für die Studierenden, die Heurismen erfolgreich bzw. nicht erfolgreich einsetzten, vergleichbare Zusammenhänge wie zum ersten Messzeitpunkt. So hatten die Erfolgreichen besonders hohe Personenfähigkeitsschätzer für Höhere Mathematik und Technische Mechanik sowie hohe Werte bei den Vorstellungen zum Kraftkonzept, und die Nicht-Erfolgreichen besonders niedrige Schätzer und Werte in diesen drei Bereichen. In den beiden Clustern, die sich zwischen den beiden Extremen befinden, zeigt sich wie bereits zum ersten Messzeitpunkt eine große Heterogenität bei den *Dispositionen*. Ein Grund könnte sein, dass die *Dispositionen* in den Tests auch über Aufgaben erfasst werden, die Faktenwissen testen. Studierende, die bei solchen Aufgaben gut abschneiden und damit über höhere *Dispositionen*

verfügen, müssen nicht erfolgreich sein, wenn sie Heurismen nutzen. Die Vorannahmen lassen sich am dritten Messzeitpunkt somit zumindest für die besonders erfolgreichen und nicht-erfolgreichen Studierenden bestätigen.

Zur Beantwortung der Forschungsfrage 3.2 wurde der Einsatz von EGs bei der Bearbeitung von Aufgaben aus der Schulphysik und der Technischen Mechanik untersucht. Hierbei ließen sich zum ersten und dritten Messzeitpunkt Cluster bilden, die hinsichtlich der Fähigkeit der Studierenden, mathematische Verfahren mit und ohne konzeptuelles Verständnis erfolgreich und nicht erfolgreich zu nutzen oder nicht zu nutzen, differenzieren können. Diese Cluster finden sich teilweise in den *Dispositionen* der Studierenden wieder.

Am ersten Messzeitpunkt ergaben sich die drei Cluster  $\alpha$ : *Erfolgreiche Mathematikverstherinnen*,  $\beta$ : *Wenig erfolgreiche Mathematiknutzerinnen* und  $\gamma$ : *Nicht erfolgreiche Alltagsphysikerinnen*. Während sich Cluster  $\alpha$  und  $\gamma$  sowohl in ihren *Dispositionen* als auch in der Verwendung von EG unterscheiden, bildet Cluster  $\beta$  eine Art Übergangsbereich zwischen diesen beiden Clustern. Hinsichtlich der *Dispositionen* befinden sich in diesem Cluster Gruppen, die auch in Cluster  $\alpha$  oder  $\gamma$  verortet werden könnten. In der Anwendung der EGs unterscheiden sich die Gruppen aus Cluster  $\beta$  jedoch von den beiden anderen. Sie setzen zwar mathematische/quantitative Games ein, um die Aufgaben zu bearbeiten, wodurch sie sich von den Gruppen aus Cluster  $\gamma$  unterscheiden, sie sind bei der Anwendung aber nur selten erfolgreich, was sie wiederum von den Gruppen aus Cluster  $\alpha$  unterscheidet.

Am dritten Messzeitpunkt zeigen sich ähnliche Cluster wie zum ersten Messzeitpunkt. Neben den drei Clustern  $\delta$ : *Erfolgreiche Mathematikverstherinnen*,  $\zeta$ : *Wenig erfolgreiche Mathematiknutzerinnen* und  $\eta$ : *Nicht erfolgreiche Alltagsphysikerinnen* ist Cluster  $\varepsilon$ : *Erfolgreiche Mathematikbenutzerinnen* hinzugekommen, in dem sich die Studierenden befinden, die besonders das quantitative Game *Recursive Plug and Chug* erfolgreich nutzen konnten. Hier zeigt sich eine ähnliche Abstufung in der Fähigkeit der Studierenden, Mathematik zur Bearbeitung der Aufgaben zu nutzen, wie am ersten Messzeitpunkt. In Cluster  $\delta$ : *Erfolgreiche Mathematikverstherinnen* befinden sich die Studierenden, welche die mathematischen Konzepte, die für die Bearbeitung der Aufgaben aus der Technischen Mechanik notwendig sind, konzeptuell verstanden haben. In den beiden Clustern  $\varepsilon$  und  $\zeta$  befinden sich die Studierenden, welche die mathe-

matischen Verfahren anwenden können, um die Aufgaben aus der Technischen Mechanik zu bearbeiten, mit unterschiedlichem Erfolg. Und schließlich sind in Cluster  $\eta$  die Studierenden, die nicht in der Lage sind, mathematische Verfahren zur Bearbeitung der Aufgaben zu nutzen. Während sich Cluster  $\delta$  und  $\eta$  in den *Dispositionen* unterscheiden, variieren die Schätzer bzw. Scores der Studierenden aus den Clustern  $\varepsilon$  und  $\zeta$  zwischen hohen und niedrigen Werten. Auffällig ist dabei, dass die Studierenden aus Cluster  $\varepsilon$ , die erfolgreich Mathematik nutzen können, im Durchschnitt höhere Schätzer in Höherer Mathematik haben als die Studierenden aus Cluster  $\zeta$ , was die erfolgreichere Nutzung von Mathematik erklären könnte. Für beide Messzeitpunkte bestätigt sich zudem die theoretische Vorannahme, dass die leistungstärkeren Studierenden häufiger solche EGs einsetzen, die ein konzeptuelles Verständnis erfordern.

Insgesamt zeigen die Antworten auf die Forschungsfragen, dass das formulierte Kompetenzmodell ein möglicher Ansatz ist, relevante mathematische Kompetenzen von Ingenieurstudierenden mit Hilfe der theoretischen Rahmung des Problemlösens zu beschreiben. Die Einteilung in *Dispositionen* und *situations-spezifische Fähigkeiten* ermöglicht den fokussierten Blick auf wichtige Aspekte. Während sich die *Dispositionen* und ihre Zusammenhänge über standardisierte Tests und quantitative Verfahren erheben lassen, sind für die Erfassung der *situations-spezifischen Fähigkeiten* qualitative Methoden erforderlich. Mit Hilfe der Operationalisierung über die Anwendung von Heuristiken, die Nutzung der vier Phasen des Problemlösens und den Einsatz von EGs kann auch dieser Aspekt analysiert werden. Durch das Kompetenzmodell wird zudem die Bedeutung der Erhebung beider Facetten, *Dispositionen* und *situations-spezifische Fähigkeiten*, deutlich. So zeigen sich Zusammenhänge, die bei einer isolierten Betrachtung der beiden Facetten nicht erkennbar wären. Gleichzeitig zeigt sich dadurch die Komplexität der Erhebung von Kompetenzen in einem Gebiet wie dem Ingenieurstudium, welches das Wissen und die Fertigkeiten aus mehreren Disziplinen erfordert.

Abschließend werden einige Ergebnisse noch einmal betont: Die meisten Studierenden sind in der Lage, bis auf Flüchtigkeitsfehler, *Abbildungen* und *Gleichungen* zu erstellen bzw. zu verwenden, jedoch ist die Fähigkeit, beide Hilfsmittel zu kombinieren, die für ingenieurwissenschaftliche Aufgaben im ersten Studienjahr wichtig ist, bei vielen nicht weit genug ausgebildet. Das kombinier-

te Arbeiten mit beiden Repräsentationsformen und ein beidseitiger Wechsel zwischen ihnen wurde nur von den erfolgreichen Studierenden beherrscht. Das Erlernen der Kombination von Repräsentationsformen ist also sowohl für die Schule als auch für die Hochschule wichtig. Es zeigte sich, dass ein Weiterarbeiten nach auftretenden Schwierigkeiten ohne eine Monitoringphase (Phasentyp: *Zyklisch ohne Rückschau*) nur sehr selten erfolgreich war. Die Beherrschung einer solchen Phase kann entscheidend für die korrekte Bearbeitung einer Aufgabe sein. Bei den Physikaufgaben ist auffällig, dass die Studierenden oft daran scheitern, dass sie nicht in der Lage sind ein adäquates EG auszuwählen. Eine Analyse der *Epistemic Form* und der *Entry conditions* sind hier entscheidend und sollte als grundlegende Handlung bei der Bearbeitung von Physikaufgaben erlernt werden.

## 10.2 Reflexion der Methoden

In diesem Abschnitt werden die Methoden und Entscheidungen der Studie reflektiert und ihre möglichen Auswirkungen auf die Ergebnisse und Implikationen diskutiert. Die Reflexion fokussiert die drei Bereiche: Design, Stichprobe und Erhebungsinstrumente.

Die Studie nutzt den Mixed-Methods-Ansatz des *Concurrent Transformative Designs*, um die unterschiedlichen Aspekte des Modells zu erfassen: *Dispositionen* mit Hilfe von Tests und *situationsspezifische Fähigkeiten* über videographierte Aufgabenbearbeitungen. Zudem sollte die Entwicklung relevanter mathematischer Kompetenzen über das erste Studienjahr verfolgt werden, weswegen drei Messzeitpunkte gewählt wurden. Diese beiden Entscheidungen haben sich als förderlich für das Ziel der Untersuchung herausgestellt. Zum einen konnten mit Hilfe des Mixed-Methods-Ansatzes die Vorteile sowohl von quantitativen und qualitativen Erhebungen als auch der Integration beider genutzt werden, um ein umfassendes Bild zu relevanten mathematischen Kompetenzen der Studierenden zu erhalten. Zum anderen war es durch die längsschnittliche Anlage der Studie möglich, Veränderungen der Kompetenzen der Studierenden, die sich durch ein Jahr Studium herausgebildet hatten, zu erfassen. Begrenzt wurde die Ergebnisfindung auf der Ebene des Designs dadurch, dass zum dritten Messzeitpunkt keine Gruppen, sondern einzelne Studierende

bei der Bearbeitung der Aufgaben beobachtet wurden. Der Grund hierfür lag darin, dass einige Studierende zum dritten Messzeitpunkt nicht mehr an der Studie teilnahmen, wodurch bei zwei Gruppen nur noch jeweils eine Studentin bzw. ein Student anwesend war. Aus diesem Grund wurden alle Gruppen aufgelöst, um zumindest einen querschnittlichen Vergleich zwischen den Studierenden zu ermöglichen. Dies hatte zur Folge, dass die Messzeitpunkte nicht alle miteinander verglichen werden konnten, sondern nur die ersten beiden. Jedoch zeigen die Ergebnisse, dass auch ohne diese direkte Vergleichbarkeit Unterschiede zwischen den ersten beiden Messzeitpunkten und der dritten Datenerhebung erkennbar sind.

Der dritte Messzeitpunkt unterscheidet sich auch durch die gewählten Aufgaben von den beiden vorherigen. Während zum Messzeitpunkt 1 und 2 Aufgaben zur Schulmathematik und zur Schulphysik von den Studierenden bearbeitet wurden, wurden zum dritten Messzeitpunkt Aufgaben aus der Höheren Mathematik und der Technischen Mechanik gelöst. Aufgaben aus der Schulmathematik und der Schulphysik wurden zum dritten Messzeitpunkt nicht eingesetzt, da die Studierenden zu diesem Zeitpunkt bereits ein Jahr lang im Studium ihre Kompetenzen ausgebaut hatten und Aufgaben aus der Schule daher nicht mehr den dazugehörigen Kompetenzstand erfassen konnten. Dies erschwerte zusätzlich einen Vergleich zwischen allen drei Messzeitpunkten.

Darüber hinaus sprechen die Aufgaben nicht nur Faktenwissen zu vielen wichtigen Inhalten der Schulmathematik und -physik sowie der Höheren Mathematik und Technischen Mechanik an, sondern auch Problemlöseprozesse, die mit der theoretischen Rahmung erfasst werden konnten. So konnten relevante mathematische Kompetenzen zu verschiedensten Inhalten beobachtet und berücksichtigt werden.

Die Erhebungsinstrumente für die *Dispositionen* ermöglichten eine Einordnung der Studierenden nach deren Wissen zur Schulmathematik und -physik sowie in Höherer Mathematik und Technischer Mechanik. Vergleiche zwischen den beiden Messzeitpunkten auf der Ebene der Personenfähigkeitsschätzer sind für die vorliegende Stichprobe nicht möglich, da eine Verlinkung zwischen den Tests zum ersten und dritten Messzeitpunkt nicht vorgenommen werden konnte. Zudem wurde ein solcher Vergleich der *Dispositionen* mit Hilfe statistischer Methoden durch einen hohen Anteil von fehlenden Werten zum dritten Mess-

zeitpunkt erschwert, da nur noch die Hälfte der Studierenden an der Studie teilnahm.

Durch den Mixed-Methods-Ansatz und die Fokussierung auf die qualitativen Daten war eine große Stichprobe nicht umsetzbar. Die Stichprobengröße von 36 Studierenden und 14 Gruppen am ersten Messzeitpunkt erschien für die Zielsetzung der empirischen Studie als ausreichend groß. Wie für qualitative Studien üblich war die Generierung von generalisierbaren Aussagen über Ingenieurstudierende an der Ruhr-Universität Bochum oder gar in Deutschland nicht das Ziel der Arbeit. Am dritten Messzeitpunkt konnten sogar nur die Daten von 17 Studierenden ausgewertet werden, was einem Stichprobenschwund von über 50% entspricht. Die Studie ermöglicht jedoch Hinweise, in welche Richtungen weitere Untersuchungen laufen könnten. Diese werden nun im folgenden abschließenden Abschnitt thematisiert.

### 10.3 Implikationen für die Ingenieurausbildung und weitere Forschungsansätze

Die vorgestellten Ergebnisse können als Ausgangspunkt für Veränderungen in der Ingenieurausbildung und für weiterführende und vertiefende Forschungsansätze dienen.

Die Bedeutung von mathematischen Kompetenzen für Ingenieurstudierende wurde durch die Dissertation gezeigt. Somit folgt auch die Notwendigkeit, diese als Gegenstand in die Ausbildung mit aufzunehmen. Die *Dispositionen* und *situationsspezifischen Fähigkeiten* verdeutlichen, über welche Kompetenzen Ingenieurstudierende verfügen, aber auch, welche Hindernisse dem erfolgreichen Bearbeiten entgegenstehen. Auf der Basis der drei theoretischen Aspekte, Heuristiken, Phasenmodell und *Epistemic Games*, ergeben sich drei „Fehler-Typen“: Studierende, die dem Fehler-Typ 1: *Mangelnde Problemlösestrategien* zugeordnet werden können, sind zwar auf mathematischer Ebene in der Lage, innerhalb der drei Phasen *Verstehen des Problems*, *Ausdenken eines Plans* und *Durchführen des Plans* zu arbeiten, ihnen fehlen jedoch häufig die Problemlösestrategien, um den Schritt vom *Verstehen des Problems* zum *Ausdenken eines Plans* zu entwickeln, oder um komplexe Aufgaben zu bearbeiten, die elaborierte Prinzipien wie beispielsweise das *Analogieprinzip* erfordern. Studie-

rende vom Fehler-Typ 2: *Fehlende Reflexionskompetenz*, der zumeist bei der Gruppenarbeit der ersten beiden Messzeitpunkte auftrat, verfügen zwar über die notwendigen Strategien, um Aufgaben zu bearbeiten, scheitern aber häufig daran, einen adäquaten Plan für die Bearbeitung einer Aufgabe zu entwickeln. Außerdem fehlt es ihnen an der notwendigen Reflexionskompetenz, um ihre Bearbeitungen auf Fehler hin zu überprüfen, oder für zukünftige Aufgaben Schemata zu erzeugen. Die Studierenden, die Fehler des Typs 3: *Mangelnde Kenntnis mathematischer Verfahren* zeigen, verfügen über Problemlösestrategien und Reflexionskompetenz, sind aber nicht in der Lage, die notwendigen mathematischen Verfahren umzusetzen. Aufbauend auf den Ergebnissen und den Analysemethoden der vorliegenden Arbeit ist die Konzeption von Diagnoseinstrumenten denkbar, auf deren Basis für alle drei Fehler-Typen bestimmte Fördermaßnahmen ergriffen werden können, um den Erfolg beim Lösen von Probleme zu erhöhen: Fehler-Typ 1 benötigt ein Training in Problemlösestrategien; Fehler-Typ 2 kann Defizite durch ein Training in metakognitiven Kompetenzen und zu Problemlöseprozessen aufarbeiten und Fehler-Typ 3 benötigt ein verstärktes Training in mathematischen Routinen.

Neben den praktischen Implikationen für die Ingenieurausbildung ergeben sich aus der vorliegenden Arbeit auch Ansätze für weiterführende Forschung. So war die *Performanz* von Ingenieurstudierenden nicht Gegenstand der Arbeit. Dieser wichtige Aspekt und seine Zusammenhänge zu den *Dispositionen* und *situationsspezifischen Fähigkeiten* ist für eine ganzheitliche Betrachtung von relevanten mathematischen Kompetenzen aber notwendig. Hier müssten Ansätze entwickelt werden, die *Performanz* in der Form untersuchen zu können, sodass ein essentieller Beitrag zur Modellierung der Kompetenz geleistet werden kann. Besonders die situative Erfassung stellt hier eine methodische und konzeptionelle Herausforderung dar. Ein weiterer möglicher Untersuchungsaspekt sind die Einflüsse von Metakognition auf die Bearbeitung. Zwar konnten mit Hilfe der Heurismen, Problemlösephasen und EGs viele Prozesse bei den Studierenden beschrieben und erklärt werden, es zeigte sich jedoch auch, dass metakognitive Fähigkeiten einen wichtigen Beitrag für den Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgaben lieferten. Diese wurden in der vorliegenden Arbeit nicht ausdrücklich berücksichtigt, könnten aber mit dem vorhandenen Material ebenfalls untersucht werden. Hier bieten sich weitere Analysen an.

Zusätzlich zu diesem nicht untersuchten Aspekt ergeben sich auch für die *Dispositionen* und *situationsspezifische Fähigkeiten* weitere Fragen, deren Beantwortung von Interesse für ein tiefergehendes Verständnis von relevanten mathematischen Kompetenzen von Ingenieurstudierenden ist. Bei den *Dispositionen* fiel der Zusammenhang zwischen mathematischen Fähigkeiten und den Vorstellungen zum Kraftkonzept auf. Hier wäre es von Interesse zu verstehen, wie diese Zusammenhänge im Hinblick auf Ingenieurstudierende beschrieben werden können, und welche Aspekte jeweils auf die *Disposition* Schulphysik und Technische Mechanik wirken. Bei den *situationsspezifischen Fähigkeiten* können Forschungsfragen hinsichtlich des Einsatzes von Heuristiken zu bestimmten Zeitpunkten der Problembearbeitung bzw. in bestimmten Phasen tiefere Einblicke in den Prozess ermöglichen. Die EGs ließen eine Unterscheidung zwischen der Nutzung von Mathematik mit konzeptuellem Verständnis und der algorithmischen Nutzung von Mathematik zu. Hier wäre von Interesse, wie das von den Studierenden gezeigte Verhalten mit deren vorhandenen Fähigkeiten zusammenhängt. So könnte es sein, dass Studierende, die das EG *Recursive Plug and Chug* zeigten, ein konzeptuelles Verständnis der Situation hatten, aber keine Notwendigkeit in einer komplexen Bearbeitung sahen und stattdessen auf ein auswendig gelerntes Verfahren zurückgriffen. Bei der gemeinsamen Betrachtung der *situationsspezifischen Fähigkeiten* und den *Dispositionen* haben sich für die erfolgreichen und die nicht erfolgreichen Gruppen deutliche Zusammenhänge gezeigt, jedoch fehlen für den mittleren Bereich, in dem sich sowohl gute als auch schlechte Studierende befinden, noch detaillierte Analysen der Gründe für erfolgreiches oder weniger erfolgreiches Anwenden von Problemlösestrategien.

Alles in allem hat die vorliegende Arbeit gezeigt, dass die Untersuchung von Kompetenzen von Ingenieurstudierenden ein komplexes Untersuchungsfeld darstellt. Die Verbindung von mathematischer und physikalischer Perspektive hat sich für das Forschungsvorhaben als fruchtbar erwiesen und könnte sowohl für weitere Untersuchungen als auch für Interventionsmaßnahmen sinnstiftend sein.



# Anhang A

## Aufgaben der Gruppen- und Einzelarbeit

In diesem Anhang befinden sich alle Mathematik- und Physikaufgaben, die zu den drei Messzeitpunkten eingesetzt wurden.

### A.1 Mathematikaufgaben

Die Mathematikaufgaben stammen aus der *Erhebung mathematischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums* und dem Test zur *Fachkompetenz Mathematik* (Neumann et al., 2015; Heinze & Neumann, 2016).

#### A.1.1 Aufgaben der Gruppenarbeit zur Schulmathematik

##### HM1 - Zahlenstrahl

Vervollständigen Sie den folgenden Zahlenstrahl mit Zahlen aus der Menge  $M$ !

$$M = \left\{ \pi; -1,5; \sqrt{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; -3; 2 \right\}$$

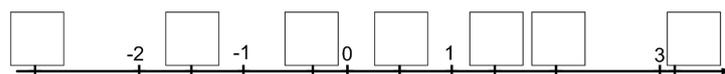


Abbildung A.1: Aufgabe HM1 zu Messzeitpunkt 1 und 2





## HM8 - Ungleichung

b) Betrachten Sie die folgende Ungleichung:

$$5 + \frac{1}{4} \cdot x \leq 6 + \frac{1}{3} \cdot x$$

Kreuzen Sie die Lösungsmenge dieser Ungleichung an!

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -12\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -12\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 12\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 12\}$

Abbildung A.5: Aufgabe HM8 zu Messzeitpunkt 1 und 2

## HM9 - Differentialquotient

Die Steigung einer differenzierbaren Funktion  $f$  an einer Stelle  $x_0$  wird durch den Differentialquotienten beschrieben.

Vervollständigen Sie die folgende Darstellung des Differentialquotienten!

$$f'(x_0) = \lim_{\boxed{\phantom{x}}} \frac{f(\boxed{\phantom{x}}) - f(\boxed{\phantom{x}})}{\boxed{\phantom{x}}}$$

Abbildung A.6: Aufgabe HM9 zu Messzeitpunkt 1 und 2

## HM10 und HM11 - Skiort

Es soll zu einem Skiort eine neue Zufahrt durch einen Tunnel gebaut werden.

In der Planungsskizze wird die Einfahrt im Tal in den Ursprung  $O(0/0/0)$  gelegt. Dabei bestimmen die ersten beiden Koordinaten die Bodenebene und die dritte Koordinate die Höhe.

Der Tunnel verläuft geradlinig und endet im Punkt  $P(10/\sqrt{200}/10)$ .

- a) Wie groß ist der Steigungswinkel  $\alpha$  des geplanten Tunnels?

$$\alpha = \text{[ ]} \text{ } ^{\circ}$$

- b) Welche Länge  $l$  hat der geplante Tunnel?  
(1 Längeneinheit entspricht 100 m.)

$$l = \text{[ ]} \text{ m}$$

Abbildung A.7: Aufgaben HM10 und HM11 zu Messzeitpunkt 1 und 2

## HM12 - Punktsymmetrie

Welche Eigenschaft muss für eine Funktion  $f$  gelten, damit der Graph von  $f$  punktsymmetrisch zum Ursprung ist?

Abbildung A.8: Aufgabe HM12 zu Messzeitpunkt 1 und 2

**HM13 - Exponentialfunktion 1**

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = 2 \cdot e^{-0,5x} \cdot (x^2 - 5).$$

Die Funktion hat ein lokales Maximum im Punkt  $P(5/f(5))$ .

Zeigen Sie, dass die Funktion für  $x > 5$  keinen größeren Funktionswert besitzt als im Punkt  $P$ .

---

Abbildung A.9: Aufgabe HM13 zu Messzeitpunkt 1 und 2

**HM14 und HM15 - Punkt-Ebene und Spiegelpunkt**

Gegeben ist die Ebene  $E: 6x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -12$  und der Punkt  $A(3/6/4)$ .

- a) Bestimmen Sie den Abstand  $d$  des Punktes von der Ebene!

$$d =$$

- b) Bestimmen Sie den Ortsvektor zum Spiegelpunkt  $A'$ , der durch die Spiegelung von  $A$  an der Ebene entsteht!

$$\vec{OA'} =$$

Abbildung A.10: Aufgaben HM14 und HM15 zu Messzeitpunkt 1 und 2

## HM16 - Exponentialfunktion 2

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = e^{3x^2} \cdot \sin(2x^2 + 1).$$

Welche der folgenden Funktionen ist die Ableitung der Funktion  $f$  ?  
Kreuzen Sie diese an!

- $f'(x) = e^{6x} \cdot (6 \cdot \sin(2x^2 + 1) + 4 \cdot \cos(2x^2 + 1))$
- $f'(x) = x \cdot e^{2x^2} \cdot (4 \cdot \sin(2x^2 + 1) + 4 \cdot \cos(2x^2 + 1))$
- $f'(x) = 6x \cdot e^{3x^2} \cdot \cos(2x^2 + 1) \cdot 4x$
- $f'(x) = x \cdot e^{3x^2} \cdot (6 \cdot \sin(2x^2 + 1) + 4 \cdot \cos(2x^2 + 1))$

Abbildung A.11: Aufgabe HM16 zu Messzeitpunkt 1 und 2

## A.1.2 Aufgaben der Einzelarbeit zur Höheren Mathematik

### HM1 - Potenzfunktion

*Escherichia coli* ist ein Bakterium, welches im menschlichen Darm auftritt.

Unter optimalen Bedingungen teilt sich jedes Bakterium alle 20 Minuten in zwei identische Tochter-Bakterien.

Diese Entwicklung wird in folgender Tabelle dargestellt:

Minuten $x$	0	20	40	60	80
Bakterienzahl $f(x)$	1	2	4	8	16

Welche der folgenden Funktionsgleichungen beschreibt diesen funktionalen Zusammenhang?  
Kreuzen Sie die richtige Antwort an! (Nur eine Lösung ist die richtige.)

- $f(x) = (2)^x$
- $f(x) = \left(\frac{1}{20}\right)^x$
- $f(x) = (20)^x$
- $f(x) = (2)^{\frac{1}{20} \cdot x}$
- $f(x) = (2)^{20 \cdot x}$

Abbildung A.12: Aufgabe HM1 zu Messzeitpunkt 3

## HM2 - Komplexe Zahlen

Gegeben sind drei komplexe Zahlen  $z_1, z_2, z_3$  durch ihre kartesische Koordinatendarstellung. Ordnen Sie jeder der drei Zahlen ihre zugehörige Darstellung in Polarkoordinaten zu, indem Sie die zur gleichen Zahl gehörenden Darstellungen durch eine Linie verbinden.

$z_1 = 1 + j$	$\sqrt{2} \cdot e^{45^\circ j}$
$z_2 = 1,5 + 1,5j$	$\sqrt{2} \cdot e^{225^\circ j}$
$z_3 = -1 - j$	$\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{45^\circ j}$
$z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot e^{135^\circ j}$

Abbildung A.13: Aufgabe HM2 zu Messzeitpunkt 3

## HM3 - Ableitung

Gegeben ist folgende Funktion:

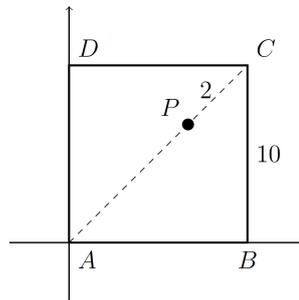
$$f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bestimmen Sie die 1. Ableitung  $f'(x)$  von  $f$  im Punkt  $x$  und kreuzen Sie die richtige Lösung an! (Nur eine Lösung ist die richtige.)

- $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$
- $f'(x) = \frac{x}{(1-x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}}$
- $f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f'(x) = -\frac{1}{2(1-x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}}$
- $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

Abbildung A.14: Aufgabe HM3 zu Messzeitpunkt 3

### HM4 - Dreieck



Sei durch  $A, B, C, D$  ein Quadrat in der Ebene gegeben (siehe Abbildung). Die Seitenlänge des Quadrats beträgt 10 cm. Sei  $P$  der Punkt der Diagonalen  $AC$  mit Länge von  $PC = 2$  cm.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $BCP$ !

Abbildung A.15: Aufgabe HM4 zu Messzeitpunkt 3

### HM5 - Exponentialfunktion

Ein frisch gebackener Kuchen wird mit einer Temperatur von  $180^\circ\text{C}$  aus dem Ofen geholt. Nun soll er eine Zeit lang draußen an der Luft abkühlen, diese hat eine Temperatur von  $10^\circ\text{C}$ .

Die Änderung der Temperatur des Kuchens ist proportional zur Temperaturdifferenz von Kuchen und Luft. Wie sieht die Funktion aus, die den (zeitlichen) Temperaturverlauf des Kuchens angibt?

Kreuzen Sie die richtige Lösung an! (Nur eine Lösung ist die richtige.)

- $T(t) = 170e^{-kt} + 10$
- $T(t) = 170e^{-kt}$
- $T(t) = 180e^{-kt+10}$
- $T(t) = 180e^{-kt} + 10$

Abbildung A.16: Aufgabe HM5 zu Messzeitpunkt 3

## HM6 - Vektoren

Seien  $x_1, x_2, x_3$  Vektoren ungleich dem Nullvektor im  $\mathbb{R}^3$ . Sei  $M$  die Menge aller Linearkombinationen von  $x_1, x_2, x_3$ .

Aus welchen der aufgelisteten Bedingungen folgt, dass  $M = \mathbb{R}^3$  gilt?

Kreuzen Sie in jeder Zeile die richtige Antwort an!

	Trifft zu	Trifft nicht zu
$x_1, x_2, x_3$ sind orthogonal zueinander.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x_1, x_2, x_3$ sind linear abhängig.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
In $M$ lassen sich drei linear unabhängige Vektoren finden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sei $y \in M$ . Dann existieren $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ mit $y = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$M$ enthält unendlich viele Vektoren.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sei $y \in \mathbb{R}^3$ . Dann existieren $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ mit $y = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Abbildung A.17: Aufgabe HM6 zu Messzeitpunkt 3

## HM7 - Reihen

Geben Sie für die folgenden Reihen jeweils den  $n$ -ten Summanden mit  $n \geq 1$  an (siehe Beispiel)!

**Beispiel:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \quad s_n = \frac{1}{n}$$

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{6}{16} + \frac{24}{25} - \frac{120}{36} \dots \quad a_n = \boxed{\phantom{000}}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{27} + \frac{16}{81} + \frac{25}{243} + \dots \quad b_n = \boxed{\phantom{000}}$$

Abbildung A.18: Aufgabe HM7 zu Messzeitpunkt 3

## HM8 - Kurven

b) Betrachten Sie die folgende Ungleichung:

$$5 + \frac{1}{4} \cdot x \leq 6 + \frac{1}{3} \cdot x$$

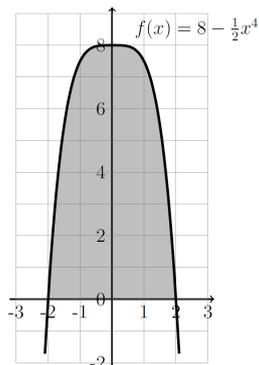
Kreuzen Sie die Lösungsmenge dieser Ungleichung an!

- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -12\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -12\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 12\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 12\}$

Abbildung A.19: Aufgabe HM8 zu Messzeitpunkt 3

## HM9 - Flächenschwerpunkt

Betrachten Sie die folgende, durch die  $x$ -Achse sowie die Funktion  $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^4$  berandete graue Fläche  $\mathcal{F}$ .



Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Fläche  $\mathcal{F}$ !

*Hinweis:* Sie dürfen den Flächeninhalt von  $\frac{128}{5}$  als bekannt voraussetzen!

Abbildung A.20: Aufgabe HM9 zu Messzeitpunkt 3

## A.2 Physikaufgaben

Die Physikaufgaben stammen aus der *Erhebung physikalisch-technischer Kompetenzen zu Beginn des Studiums* und dem Test zur *Fachkompetenz Technische Mechanik - Statik und Elastostatik* (Behrendt et al., 2015; Dammann et al., 2016; Nickolaus et al., 2016).

### A.2.1 Aufgaben der Gruppenarbeit zur Schulphysik

#### TM1 - Resultierende Kraft

Berechnen Sie die resultierende Kraft  $F_{res}$  aus den Kräften  $F_1$  und  $F_2$  in dem dargestellten Fall!  
Tragen Sie die Lösung in das dafür vorgesehene Feld ein!



Abbildung A.21: Aufgabe TM1 zu Messzeitpunkt 1 und 2

#### TM2 - Kinetische Energie und Impuls

Ein Auto fährt mit der Geschwindigkeit  $v$  auf einer Straße.

- a) Um welchen Faktor ändert sich seine kinetische Energie, wenn es seine Geschwindigkeit verdoppelt?  
Tragen Sie die Lösung in das dafür vorgesehene Feld ein!

Faktor:

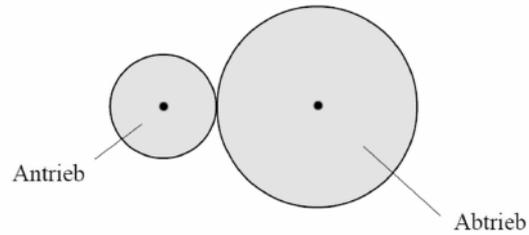
- b) Um welchen Faktor ändert sich sein Impuls, wenn es seine Geschwindigkeit verdoppelt?  
Tragen Sie die Lösung in das dafür vorgesehene Feld ein!

Faktor:

Abbildung A.22: Aufgabe TM2 zu Messzeitpunkt 1 und 2

**TM3 - Antrieb**

Ein Rad treibt, wie in der Skizze dargestellt, ein zweites Rad so an, dass sich die Berührungsfleichen nicht gegeneinander bewegen. Der Durchmesser des Antriebsrades ist kleiner als der des Abtriebsrades.



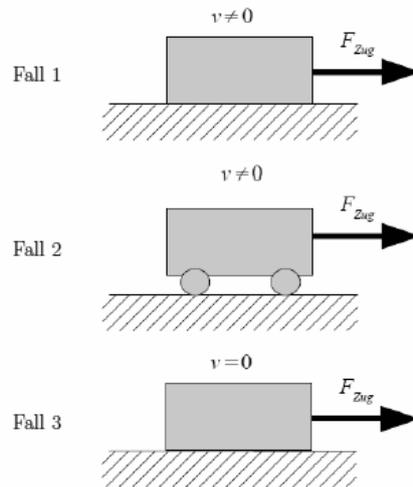
Welches Rad dreht sich schneller?  
Kreuzen Sie die richtige Antwort an!

- Antrieb       Abtrieb       Beide Räder drehen gleich schnell

Abbildung A.23: Aufgabe TM3 zu Messzeitpunkt 1 und 2

## TM4 - Reibung

Gegeben sind die drei nachfolgend skizzierten Fälle, bei denen mit einer Kraft  $F_{Zug}$  an einem Körper, der auf einer rauhen Unterlage liegt, gezogen wird.



Ordnen Sie den Fällen die in der Tabelle genannten Reibungsarten zu, in dem Sie diese in der entsprechenden Zeile ankreuzen!

Beachten Sie die Geschwindigkeitsangaben bei den Fällen!

Fall	Haftreibung	Gleitreibung	Rollreibung	Seilreibung
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Abbildung A.24: Aufgabe TM4 zu Messzeitpunkt 1 und 2

## TM5 - Biegelinie

Ein Stab, der fest mit der Wand verbunden ist, wird, wie in der Skizze dargestellt, mit einer Kraft  $F$  belastet.



In welcher Form verbiegt sich der Stab (durchgezogene Linie)?  
Kreuzen Sie die richtige Biegelinie an!

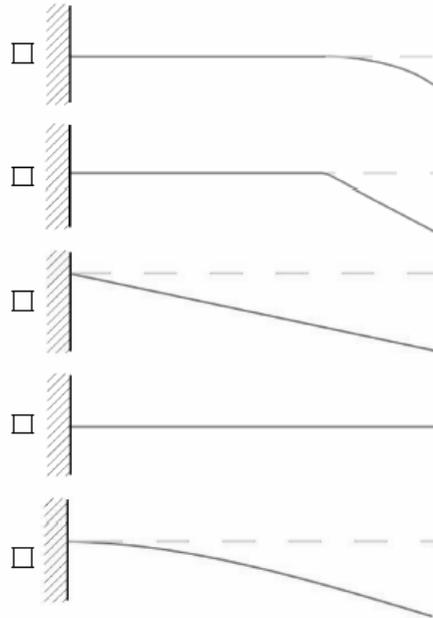


Abbildung A.25: Aufgabe TM5 zu Messzeitpunkt 1 und 2

## TM6 - Waage

Eine Waage wird, wie in den folgenden Skizzen dargestellt, verschieden belastet. Die Einzelmassen sind jeweils gleich schwer. Geben Sie jeweils an, ob die Waage auf der linken Seite nach unten kippt (Spalte „links“), waagrecht bleibt (Spalte „waagrecht“) oder auf der rechten Seite nach unten kippt (Spalte „rechts“)! Kreuzen Sie in jeder Zeile die richtige Antwort an!

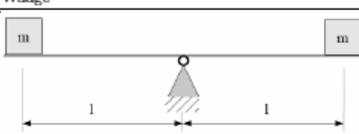
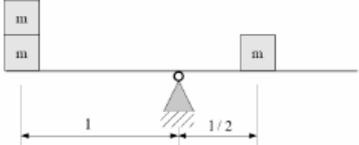
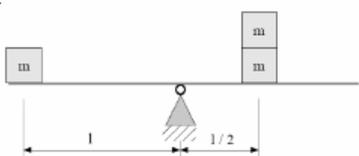
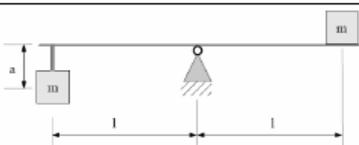
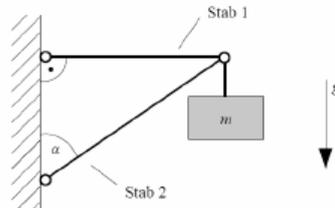
Waage	links	waagrecht	rechts
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Abbildung A.26: Aufgabe TM6 zu Messzeitpunkt 1 und 2

## TM7 und TM8 - Zug- und Druckbelastung und Kraft im Stab

Ein Werbeschild der Masse  $m$  soll mit zwei Stäben, wie in der Skizze dargestellt, an eine Wand gehängt werden.



(Zeichnung nicht maßstäblich)

Leiten Sie die Formel zur Berechnung der Beträge der beiden Stabkräfte  $F_1$  und  $F_2$  in Abhängigkeit des Winkels  $\alpha$  und der Masse  $m$  her!

Tragen Sie die Lösungen in die dafür vorgesehenen Felder ein!

- a) Werden die Stäbe auf Zug oder auf Druck belastet?  
Kreuzen Sie in jeder Zeile die richtige Aussage an!

Stab	Zugbelastung	Druckbelastung	weder noch
1	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- b) Betrag der Kraft im Stab 1:

$$F_1 = \boxed{\phantom{000000}}$$

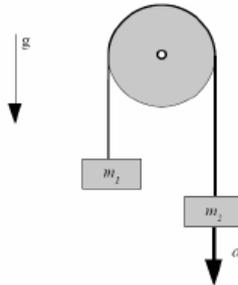
- c) Betrag der Kraft im Stab 2:

$$F_2 = \boxed{\phantom{000000}}$$

Abbildung A.27: Aufgabe TM7 und TM8 zu Messzeitpunkt 1 und 2

### TM9 - Fallbeschleunigung (Rolle)

Mit dem in der Skizze dargestellten Gerät kann die Fallbeschleunigung gemessen werden. Die Massen  $m_1$  und  $m_2$  sind durch ein Seil, das über einer Rolle liegt, miteinander verbunden. Hierbei ist  $m_2$  größer als  $m_1$ . Die Reibung wird vernachlässigt.



Leiten Sie mit Hilfe der Formel  $F = (m_1 + m_2) \cdot a$  die Beschleunigung  $a$  für den Körper mit der Masse  $m_2$  her!

Tragen Sie die Lösung in das dafür vorgesehene Feld ein!

$$a = \boxed{\phantom{000000}}$$

Abbildung A.28: Aufgabe TM9 zu Messzeitpunkt 1 und 2

### TM10 - Fallbeschleunigung (Astronaut)

Ein Astronaut wirft auf einem Himmelskörper einen Stein 10m nach oben. Nach einer Zeit von  $t = 7,03\text{s}$  landet der Stein wieder auf der Oberfläche des Himmelskörpers. Berechnen Sie die Fallbeschleunigung  $g_H$  auf dem Himmelskörper!

Kreuzen Sie die richtige Lösung an!

- $g_H = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $g_H = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $g_H = 2,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $g_H = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $g_H = 5,7 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Abbildung A.29: Aufgabe TM10 zu Messzeitpunkt 1 und 2

### TM11- Beschleunigung (Crashtest)

Bei einem Crashtest fährt ein Auto mit einer Geschwindigkeit von  $v = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  an eine Wand, die nicht nachgibt. Hierbei schiebt sich die Motorhaube des Autos um  $s = 50 \text{cm}$  zusammen. Welche Beschleunigung  $a$  tritt bei diesem Crash auf, wenn diese als konstant betrachtet wird?

Kreuzen Sie die richtige Lösung an!

- $a = -50 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $a = -13,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $a = -100 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $a = -200 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
- $a = -25,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Abbildung A.30: Aufgabe TM11 zu Messzeitpunkt 1 und 2

### TM12 - Trajektorie

Im Profil eines Fahrradreifens klemmt ein Stein.

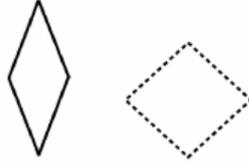
Zeichnen Sie schematisch, d.h. ohne Berücksichtigung eines Maßstabes, in das unten stehende Diagramm die Bahn des Steins für mindestens zwei Umdrehungen des Reifens, wenn der Reifen auf der eingezeichneten Linie abrollt!



Abbildung A.31: Aufgabe TM12 zu Messzeitpunkt 1 und 2

## TM13 - Verformung

In der Skizze ist die Verformung (durchgezogene Linie) eines Stabsystems durch Belastung mit einer Kraft  $F$  und seine ursprüngliche Form (gestrichelte Linie) dargestellt.



Beachten Sie hierbei, dass die vier Stäbe drehbar miteinander verbunden sind und die folgende Bedeutung der Symbole gilt:



Der Stab ist so mit der Wand bzw. dem Boden verbunden, dass er zwar nicht verschoben werden kann, aber drehbar ist.



Der Stab ist so mit der Wand bzw. dem Boden verbunden, dass er nicht in horizontaler, aber in vertikaler Richtung verschoben werden kann und drehbar ist.



Der Stab ist so mit der Wand bzw. dem Boden verbunden, dass er nicht in vertikaler, aber in horizontaler Richtung verschoben werden kann und drehbar ist.

Aus welchen der folgenden Lagerungsfälle kann diese Verformung resultieren?

Kreuzen Sie alle richtigen Lösungen an!

Beachten Sie, dass mehrere Lösungen richtig sein können!

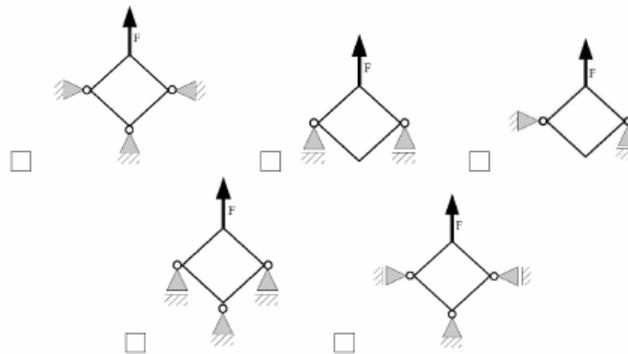


Abbildung A.32: Aufgabe TM13 zu Messzeitpunkt 1 und 2

## A.2.2 Aufgaben der Einzelarbeit zur Technischen Mechanik

### TM1 - Freikörperbild

Gegeben sind Aussagen zum Freikörperbild.

Entscheiden Sie für jede Aussage ob sie zutrifft oder nicht zutrifft und kreuzen Sie an.

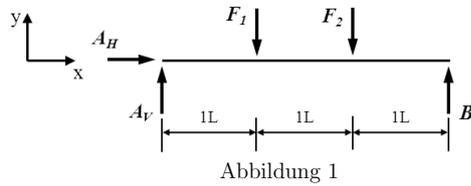
Aussage	trifft zu	trifft nicht zu
Durch gedachte Schnitte werden die Kräfte an Lagern und Gelenken freigelegt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Schnitte dürfen <u>ausschließlich</u> an Lagern und Gelenken durchgeführt werden.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ein Freikörperbild wird <u>nur</u> bei statischer Bestimmtheit des Systems erstellt.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Beim Freikörperbild werden <u>nur</u> die unbekanntes Kräfte eingezeichnet.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Ein statisches System im Gleichgewicht ist auch nach dem Freischneiden im Gleichgewicht.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Abbildung A.33: Aufgabe TM1 zu Messzeitpunkt 3

### TM2 - Tragwerk 1

Bestimmen Sie die Auflagerkräfte des in Abb. 1 dargestellten Tragwerks. Tragen Sie Ihre Ergebnisse in das jeweilige Lösungsfeld ein.

Gegeben:  $F_1 = F_2 = 10\text{kN}$ ,  $L = 1,0\text{m}$



Lösung:

$A_V =$   kN

$A_H =$   kN

$B =$   kN

Abbildung A.34: Aufgabe TM2 zu Messzeitpunkt 3

### TM3 - Kraft und Moment

Kreuzen Sie an, welche der Kraft- oder Momentenreaktionen am dargestellten Auflager auftreten oder nicht auftreten können.

Gegeben:  $\uparrow$  : vertikale Kraft,  $\rightarrow$  : horizontale Kraft,  $\curvearrowright$  : Moment



	tritt auf	tritt nicht auf
$\uparrow$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\rightarrow$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\curvearrowright$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Abbildung A.35: Aufgabe TM3 zu Messzeitpunkt 3

## TM4 - Spannung-Dehnung

Gegeben ist das Spannungs-Dehnungsdiagramm in Abb. 13.  
Ordnen Sie jeder Ziffer im Diagramm die richtige Bezeichnung zu und kreuzen Sie an.

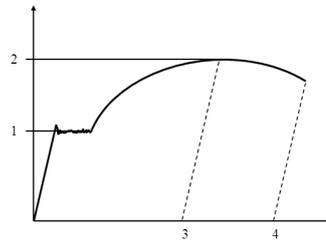


Abbildung 13

Bezeichnungen:

	1	2	3	4
Zugfestigkeit	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Bruchdehnung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Streckgrenze	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Gleichmaßdehnung	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Abbildung A.36: Aufgabe TM4 zu Messzeitpunkt 3

## TM5 - Fachwerk

Dargestellt ist ein statisch bestimmtes Fachwerk (Abb. 17).  
Bestimmen Sie die Größe und Richtung der Kraft  $S_3$  im Stab 3.  
Wählen Sie die richtige Lösung aus und kreuzen Sie an.

Gegeben:  $F_1 = 10\text{kN}$ ,  $F_2 = 20\text{kN}$ ,  $A_V = 30\text{kN}$ ,  $A_H = 20\text{kN}$   
 $B_V = 20\text{kN}$ ,  $B_H = 0\text{kN}$ ,  $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

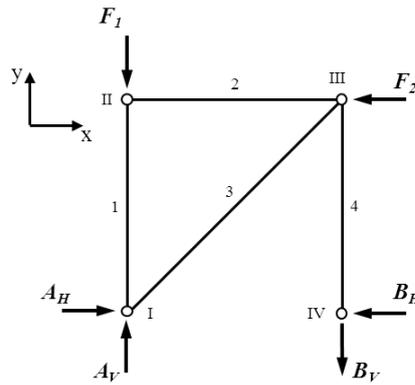


Abbildung 17

Lösung:

- $S_3 = -10\text{kN}$
- $S_3 = 28,3\text{kN}$
- $S_3 = 20\text{kN}$
- $S_3 = 10\text{kN}$
- $S_3 = -20\text{kN}$
- $S_3 = -28,3\text{kN}$

Abbildung A.37: Aufgabe TM5 zu Messzeitpunkt 3

## TM6 - Streckenlast

Ermitteln Sie die Funktion der in der folgenden Abb. 7 dargestellten Streckenlast. Tragen Sie Ihr Ergebnis in das Lösungsfeld ein.

Gegeben:  $q_1 = 2 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ,  $q_2 = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ ,  $L = 1,0\text{m}$

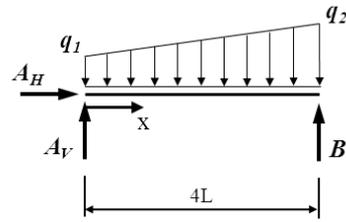


Abbildung 7

Lösung:

$q(x) =$



Abbildung A.38: Aufgabe TM6 zu Messzeitpunkt 3

## TM7 - Flächenträgheitsmoment

Bestimmen Sie das Flächenträgheitsmoment  $I_z$  der in Abb. 10 dargestellten Fläche bzgl. des  $y$ - $z$ -Koordinatensystems.

Wählen Sie die richtige Lösung aus und kreuzen Sie an.

Gegeben:  $I_z = \int y^2 dA$

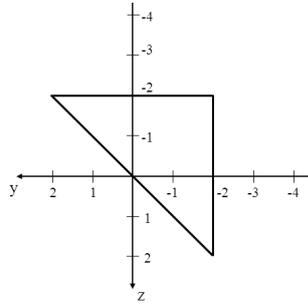


Abbildung 10

Antwortalternativen:

- $I_z = \frac{32}{3} \text{cm}^4$
- $I_z = \frac{96}{3} \text{cm}^4$
- $I_z = \frac{64}{3} \text{cm}^4$
- $I_z = \frac{128}{3} \text{cm}^4$
- $I_z = \frac{24}{3} \text{cm}^4$

Abbildung A.39: Aufgabe TM7 zu Messzeitpunkt 3

## TM8 - Nulllinie

Welche Bedeutung hat die Nulllinie für einen belasteten Balken?  
Entscheiden Sie für jede Aussage ob Sie zutrifft oder nicht zutrifft und kreuzen Sie an.

Entlang der Nulllinie eines Balkenlängsschnitts ist die...

- ... Schubspannung  $\tau = 0$
- ... Normalspannung  $\sigma = 0$
- ... Normalspannung  $\sigma$  maximal
- ... Längenänderung  $\Delta l = 0$
- ... Querkraft  $Q = 0$

Abbildung A.40: Aufgabe TM8 zu Messzeitpunkt 3

## TM9 - Tragwerk 2

Dargestellt ist ein unvollständiges Tragwerk (Abb. 6). An den Stellen A und B soll das Tragwerk vervollständigt werden.

Wählen Sie die Lösung aus, durch deren Bestandteile das Tragwerk statisch bestimmt wird.

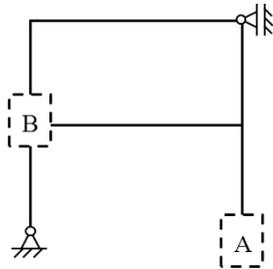


Abbildung 6

Lösung:

	<input type="checkbox"/>					
A						
B						

Abbildung A.41: Aufgabe TM9 zu Messzeitpunkt 3

# Anhang B

## Kategoriensystem

Dieser Anhang enthält die erste Version sowie die erste Überarbeitung der Kategoriensysteme zu den Heuristiken und Problemlösephasen (vgl. Simon, 2014).

Tabelle B.1: Erste Version des Kategoriensystems zur Verwendung von Heuristischen Hilfsmitteln.

Heuristische Hilfsmittel	
Kategorie	Code
Art der Heuristischen Hilfsmittel	Die Lernenden verwenden Gleichungen.
	Die Lernenden verwenden informative Figuren.
	Die Lernenden verwenden Lösungsgraphen.
	Die Lernenden verwenden Wissensspeicher.
	Die Lernenden verwenden Tabellen.
Ursprung der verwendeten Hilfsmittel	Die Lernenden verwenden heuristische Hilfsmittel, die durch die konkrete Aufgabenstellung vorgegeben wurden (z. B. gegebene Gleichungen, Tabellen oder informative Figuren).
	Die Lernenden verwenden heuristische Hilfsmittel, die bereits zu einem früheren Zeitpunkt angelegt wurden (z. B. Lösungsgraphen analoger Probleme, Wissensspeicher mit allgemeiner Gültigkeit etc.).

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Fortsetzung von der vorherigen Seite

Heuristische Hilfsmittel	
Kategorie	Code
	Die Lernenden verwenden heuristische Hilfsmittel, die sie für die konkrete Aufgabenstellung selbstständig entwickeln (z. B. selbstständig aufgestellte Gleichungen, selbst erstellte Tabellen oder informative Figuren).
Verwendungszweck	Die Lernenden verwenden heuristische Hilfsmittel, um sich ein Verständnis des Problems aufzubauen und/oder ein Problem inhaltlich zu strukturieren (z. B. durch Gegenüberstellung von Gesuchtem und Gegebenem). Die Lernenden verwenden heuristische Hilfsmittel, um ein Problem zu visualisieren (z. B. Beziehungen zwischen Größen an Graphen sichtbar machen). Die Lernenden verwenden heuristische Hilfsmittel, um gegebene Informationen zu reduzieren (z. B. durch Gleichungen).

Tabelle B.2: Erste Version des Kategoriensystems zur Verwendung von Heuristischen Strategien.

Heuristische Strategien	
Kategorie	Code
Analogieschluss	Die Lernenden untersuchen das Problem auf Analogie zu mindestens einer anderen, bereits gelösten Aufgabe. Die Lernenden nutzen Ähnlichkeiten zwischen dem Problem und mindestens einer bereits gelösten Aufgabe, um sich bei der Lösungsfindung auf bereits bekannte Vorgehensweisen zu stützen.
Rückführung von Unbekanntem auf Bekanntes	Die Lernenden strukturieren Informationen um, sondern sie aus oder erweitern sie so, dass Analogieschlüsse (ggf. zu Teilen des Problems) möglich sind.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Fortsetzung von der vorherigen Seite

Heuristische Strategien	
Kategorie	Code
	Die Lernenden beschränken ein Problem durch Fallunterscheidung/Zerlegung in Teilprobleme oder Beschränkung auf Sonderfälle auf bereits bekannte/lösbare Aspekte des Problems.
(Systematisches) Probieren	Die Lernenden bearbeiten ein Problem durch unsystematisches Probieren (d. h. in diffusem, nicht zielgerichtetem Vorgehen und/oder unter Verwendung überflüssiger/nebensächlicher Informationen und/oder Arbeitsschritte). Die Lernenden bearbeiten ein Problem durch systematisches Probieren nach eigenständig entwickelten Kriterien (z. B. nach Einteilung eines Problems in Teilschritte, Anfangs- und Endzustand, verschiedene Fälle). Die Lernenden bearbeiten ein Problem durch systematisches Probieren, indem sie an konkreten selbstgewählten Fallbeispielen arbeiten, um vom Speziellen auf das Allgemeine zu schließen. Die Lernenden bearbeiten ein Problem durch systematisches Probieren, bis die Systematik zu einem Schema/Algorithmus führt.
Vorwärts- /Rückwärts- arbeiten	Die Lernenden arbeiten vorwärts ausgehend von gegebenen Größen oder Teilergebnissen und finden eine oder mehrere neue, aus ihnen berechenbare Größen. Die Lernenden arbeiten schrittweise vorwärts ihren Lösungsplan ab. Die Lernenden arbeiten rückwärts ausgehend von der gesuchten Größe zu den gegebenen Größen bzw. von der Behauptung zu den Voraussetzungen.

Tabelle B.3: Erste Version des Kategoriensystems zur Verwendung von Heuristischen Prinzipien.

Heuristische Prinzipien	
Kategorie	Code
Zerlegungsprinzip / Ergänzungs- prinzip / Prinzip der	Die Lernenden zerlegen ein Problem durch Unterteilung in Sinneinheiten in Teilprobleme. Die Lernenden untersuchen ein Problem in zerlegten Kontexten im Rahmen von Sonderfällen.
Fallunterscheidung	Die Lernenden untersuchen ein Problem in zerlegten Kontexten im Rahmen einer vollständigen Fallunterscheidung (zur Gewinnung einer vollständiger Lösung zu einem Problem). Die Lernenden zerlegen einen Problemaspekt in lösbar/besser zu verarbeitende Teilaspekte (z. B. eine Fläche in Flächenstücke). Die Lernenden erweitern ein Problem/einen Problemaspekt zu einem lösbar/besser zu verarbeitenden übergeordneten Problem, das einen Rückschluss auf das ursprüngliche Problem ermöglicht.
Symmetrieprinzip	Die Lernenden suchen/identifizieren Symmetrien (Identitäten, Musteranalogien) zwischen den Elementen der durch die Problemstellung gegebenen Informationsmenge. Die Lernenden verwenden Symmetrien (Identitäten, Musteranalogien) zwischen den Elementen der durch die Problemstellung gegebenen Informationsmenge.
Invarianzprinzip	Die Lernenden suchen/identifizieren Invarianten in Aspekten des Problems (Zerlegung in Teilaspekte vorausgesetzt). Die Lernenden konstruieren eine/mehrere Invariante(n), z. B. zur Inbezugsetzung von Objekten oder Situationen.
Extremalprinzip	Die Lernenden betrachten/suchen ein größtes/kleinstes/sonst wie am Rand liegendes Element (z. B. für eine Fallunterscheidung).

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Fortsetzung von der vorherigen Seite

Heuristische Prinzipien	
Kategorie	Code
	Die Lernenden optimieren einen Teilaspekt eines Problems in Hinsicht auf eine Eigenschaft der Lösung (z. B. methodisch: kürzester Lösungsweg, inhaltlich: geringster Materialaufwand, maximaler Gewinn etc.).
Transformationsprinzip	Die Lernenden überführen gegebene Teilaspekte eines Problems in eine Modellebene (innermathematisches Modellieren).
	Die Lernenden reorganisieren gegebene Teilaspekte eines Problems innerhalb einer neuen Repräsentation.
	Die Lernenden erarbeiten am Modell die Lösung des Problems/mindestens eines Teilaspekts (z. B. figurierte Beweise, algebraische Aussagen).

Tabelle B.4: Erste Version des Kategoriensystems zum Durchlaufen von Problemlösephasen nach Polya.

Problemlösephasen	
Kategorie	Code
Vollständigkeit	Schritt 1: Verstehen der Aufgabe. Die Lernenden erschließen das Problem durch das Stellen geeigneter Fragen, Visualisierungen, Überlegungen bzgl. der Lösbarkeit etc.
	Schritt 2: Ausdenken eines Plans. Die Lernenden untersuchen bekannte Strategien auf ihre Nutzbarkeit und entwickeln einen Lösungsplan.
	Schritt 3: Ausführen des Plans. Die Lernenden führen den Lösungsplan aus und kontrollieren ihre Lösungsschritte auf Richtigkeit.
	Schritt 4: Rückschau. Die Lernenden reflektieren die Problemlösung, um die verwendete Methode für kommende analoge Probleme nutzbar zu machen.

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Fortsetzung von der vorherigen Seite

---

Problemlösephasen	
Kategorie	Code
Typische Abweichungen	Die Lernenden erschließen das Problem durch Ausführung einer intuitiven/unreflektierten Idee (d. h. die Schritte 1 und 2 werden zunächst übersprungen).

---

Es folgt das Kategoriensystem, das aus der ersten Überarbeitung entstanden ist.

Tabelle B.5: Erste Überarbeitung des Kategoriensystems zur Verwendung von Heuristischen Hilfsmitteln.

---

Heuristische Hilfsmittel	
Kategorie	Code
Art der Heuristischen Hilfsmittel	Die Lernenden verwenden Gleichungen. Die Lernenden verwenden informative Figuren. Die Lernenden verwenden Wissensspeicher.
Ursprung der verwendeten Hilfsmittel	Die Lernenden verwenden heuristische Hilfsmittel, die durch die konkrete Aufgabenstellung vorgegeben wurden (z. B. gegebene Gleichungen, Tabellen oder informative Figuren). Die Lernenden verwenden heuristische Hilfsmittel, die bereits zu einem früheren Zeitpunkt angelegt wurden (z. B. Lösungsgraphen analoger Probleme, Wissensspeicher mit allgemeiner Gültigkeit etc.). Die Lernenden verwenden heuristische Hilfsmittel, die sie für die konkrete Aufgabenstellung selbstständig entwickeln (z. B. selbstständig aufgestellte Gleichungen, selbst erstellte Tabellen oder informative Figuren).

---

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Fortsetzung von der vorherigen Seite

Heuristische Hilfsmittel	
Kategorie	Code
Verwendungszweck	Die Lernenden verwenden heuristische Hilfsmittel, um sich ein Verständnis des Problems aufzubauen und/oder ein Problem inhaltlich zu strukturieren (z. B. durch Gegenüberstellung von Gesuchtem und Gegebenem).
	Die Lernenden verwenden heuristische Hilfsmittel, um ein Problem zu visualisieren (z. B. Beziehungen zwischen Größen an Graphen sichtbar machen).
	Die Lernenden verwenden heuristische Hilfsmittel, um gegebene Informationen zu reduzieren (z. B. durch Gleichungen).

Tabelle B.6: Erste Überarbeitung des Kategoriensystems zur Verwendung von Heuristischen Strategien.

Heuristische Strategien	
Kategorie	Code
Analogieschluss	Die Lernenden untersuchen das Problem auf Analogie zu mindestens einer anderen, bereits gelösten Aufgabe. Die Lernenden nutzen Ähnlichkeiten zwischen dem Problem und mindestens einer bereits gelösten Aufgabe, um sich bei der Lösungsfindung auf bereits bekannte Vorgehensweisen zu stützen.
(Systematisches) Probieren	Die Lernenden bearbeiten ein Problem durch systematisches Probieren nach eigenständig entwickelten Kriterien (z. B. nach Einteilung eines Problems in Teilschritte, Anfangs- und Endzustand, verschiedene Fälle).

Fortsetzung auf der nächsten Seite

Fortsetzung von der vorherigen Seite

Heuristische Strategien	
Kategorie	Code
Vorwärts- /Rückwärts- arbeiten	Die Lernenden arbeiten vorwärts ausgehend von gegebenen Größen oder Teilergebnissen und finden eine oder mehrere neue, aus ihnen berechenbare Größen. Die Lernenden arbeiten rückwärts ausgehend von der gesuchten Größe zu den gegebenen Größen bzw. von der Behauptung zu den Voraussetzungen.

Tabelle B.7: Erste Überarbeitung des Kategoriensystems zur Verwendung von Heuristischen Prinzipien.

Heuristische Prinzipien	
Kategorie	Code
Zerlegungs- prinzip	Die Lernenden zerlegen einen Problemaspekt in lösbar/besser zu verarbeitende Teilaspekte (z. B. eine Fläche in Flächenstücke).
Symmetrie- prinzip	Die Lernenden suchen/identifizieren Symmetrien (Identitäten, Musteranalogien) zwischen den Elementen der durch die Problemstellung gegebenen Informationsmenge.
Optimierungs- prinzip	Die Lernenden optimieren einen Teilaspekt bei der Berechnung der Lösung (z. B. Brüche kürzen, ausklammern etc.).

Tabelle B.8: Erste Überarbeitung des Kategoriensystems zum Durchlaufen von Problemlösephasen nach Polya.

Problemlösephasen	
Kategorie	Code
Fortsetzung auf der nächsten Seite	

Fortsetzung von der vorherigen Seite

Problemlösephasen	
Kategorie	Code
Vollständigkeit	<p>Schritt 1: Verstehen der Aufgabe. Die Lernenden erschließen das Problem durch das Stellen geeigneter Fragen, Visualisierungen, Überlegungen bzgl. der Lösbarkeit etc.</p> <p>Schritt 2: Ausdenken eines Plans. Die Lernenden untersuchen bekannte Strategien auf ihre Nutzbarkeit und entwickeln einen Lösungsplan.</p> <p>Schritt 3: Ausführen des Plans. Die Lernenden führen den Lösungsplan aus und kontrollieren ihre Lösungsschritte auf Richtigkeit.</p> <p>Schritt 4: Rückschau. Die Lernenden reflektieren die Problemlösung, um die verwendete Methode für kommende analoge Probleme nutzbar zu machen.</p>



# Anhang C

## Transkriptionsregeln

Dieser Anhang enthält die Regeln, die für die Transkription der Gruppen- und Einzelarbeit in Abschnitt 9.2 genutzt wurden. Diese Regeln orientieren sich an denen, die Kuckartz (2016, S.166–167) für eine computergestützte Auswertung empfiehlt. Dabei wurden nicht alle Regeln übernommen, einige leicht abgewandelt und eine Regel für den Kontext der Bearbeitung von Mathematik- und Physikaufgaben hinzugefügt. Die folgenden Regeln sind das Ergebnis dieser Anpassungen:

1. Es wird wörtlich transkribiert, also nicht lautsprachlich oder zusammenfassend. Vorhandene Dialekte werden nicht transkribiert, sondern möglichst genau in Hochdeutsch übersetzt.
2. Sprache und Interpunktion werden leicht geglättet, d. h. an das Schriftdeutsch angenähert. Zum Beispiel wird aus „Er hatte noch so’n Buch genannt“ → „Er hate noch so ein Buch genannt“. Die Satzform, bestimmte und unbestimmte Artikel etc. werden auch dann beibehalten, wenn sie Fehler enthalten.
3. Deutliche, längere Pausen werden durch in Klammern gesetzte Auslassungspunkte [...] markiert. Entsprechend der Länge der Pause in Sekunden werden ein, zwei oder drei Punkte gesetzt, bei längeren Pausen wird eine Zahl entsprechend der Dauer in Sekunden angegeben.
4. Zustimmende bzw. bestätigende Lautäußerungen von anderen Personen (mhm, aha etc.) werden nicht mit transkribiert, sofern sie den Redefluss der gerade sprechenden Person nicht unterbrechen.

5. Absätze der sprechenden Personen werden durch ein eindeutiges Kürzel gekennzeichnet, das sich aus der Einordnung der Studierenden nach den Dispositionen ergibt. Student *S01* in den Dispositionen wird auch in jedem Transkript, in dem er etwas sagt, als *S01* bezeichnet.
6. Jeder Sprechbeitrag wird als eigener Absatz transkribiert.
7. Nonverbale Aktivitäten und Äußerungen der Personen werden in Klammern notiert, z. B. (zeichnet eine *Abbildung* zur Veranschaulichung).
8. Unverständliche Wörter werden durch (unv.) kenntlich gemacht.
9. Alle Angaben, die Rückschluss auf eine Person erlauben, werden anonymisiert.
10. Gesprochene mathematische Ausdrücke und Symbole werden als solche transkribiert, wenn dadurch der Lesefluss erleichtert wird (z. B. „ $x$  geht gegen unendlich“  $\rightarrow x \rightarrow \infty$ ).

# Literaturverzeichnis

- Adams, R. & Wu, M. (Hrsg.). (2002). *PISA 2000 Technical Report. Programme for International Student Assessment (PISA)*. Organisation for Economic Co-operation and Development.
- Alpers, B. (2016). Das SEFI Maths Working Group „Curriculum Framework Document“ und seine Realisierung in einem Mathematik-Curriculum für einen praxisorientierten Maschinenbaustudiengang. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 645–659). Wiesbaden: Springer Fachmedien. doi: 10.1007/978-3-658-10261-6\_40
- Alpers, B., Demlova, M., Fant, C.-H., Gustafsson, T. & Lawson, D. (Hrsg.). (2013). *A framework for mathematics curricula in engineering education: A report of mathematics working group*. Brussels: SEFI.
- Anderson, J. R. (2001). *Kognitive Psychologie*. Heidelberg, Berlin: Spektrum, Akademischer Verlag.
- Artigue, M., Batanero, C. & Kent, K. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 1011–1049). Charlotte, NC: Information Age Pub.
- Bajracharya, R. R. & Thompson, J. R. (2016). Analytical derivation: An epistemic game for solving mathematically based physics problems. *Physical Review Physics Education Research*, 12 (1), 0101241–01012421. doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.12.010124
- Baron, R. M. & Kenny, D. A. (1986). The Moderator–Mediator Variable Distinction in Social Psychological Research: Conceptual, Strategic, and Statistical Considerations. *Journal of Personality and Social Psychology*, 51 (6), 1173–1182.

- Barry, M. & Steele, N. (1992). *A Core Curriculum in Mathematics for the European Engineer*. Zugriff am 16.08.2016 auf <http://sefi.htw-aalen.de/Curriculum/CoreCurriculum1992.pdf>
- Baumert, J., Artelt, C., Klieme, E. & Stanat, P. (2001). PISA. Programme for International Student Assessment: Zielsetzung, theoretische Konzeption und Entwicklung von Meßverfahren. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in der Schule* (S. 285–310). Weinheim: Beltz.
- Baumert, J., Bos, W., Brockmann, J., Gruehn, S., Klieme, E., Köller, O., ... Watermann, R. (2000). *TIMSS/III: Der Abschlussbericht. Zusammenfassung ausgewählter Ergebnisse der Dritten Internationalen Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie zur mathematischen und naturwissenschaftlichen Bildung am Ende der Schullaufbahn*. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.
- Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9 (4), 469–520.
- Baumert, J., Lehmann, R., Lehrke, M., Schmitz, B., Clausen, M., Hosenfeld, I., ... Neubrand, J. (1997). *TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich: Deskriptive Befunde*. Opladen: Leske + Budrich.
- Beaton, A. E. & Allen, N. L. (1992). Interpreting Scales Through Scale Anchoring. *Journal of Educational Statistics*, 17 (2), 191–204.
- Beck, B. & Klieme, E. (2003). DESI – Eine Längsschnittstudie zur Untersuchung des Sprachunterrichts in deutschen Schule. *Empirische Pädagogik*, 17 (3), 380–395.
- Behrendt, S. (2011). *Curriculare Schwerpunktsetzungen und Anforderungsniveaus in ausgewählten ingenieurwissenschaftlichen Lehrangeboten. Eine vergleichende Analyse unter Einbeziehung von Universitäten und Fachhochschulen* (Masterarbeit). Universität Stuttgart, Stuttgart.
- Behrendt, S., Dammann, E., Stefanica, F., Markert, B. & Nickolaus, R. (2015). Physical-technical prior competencies of engineering students. *Empirical Research in Vocational Education and Training*, 7 (1). doi: 10.1186/s40461-015-0013-9
- Biehler, R., Kortemeyer, J. & Schaper, N. (2015). Conceptualizing and studying students' processes of solving typical problems in introductory en-

- gineering courses requiring mathematical competences. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 2060–2066). Prag: CERME.
- Biehler, R., Schaper, N. & Kortemeyer, J. (2016). *Schlussbericht des Paderborner Teilprojekts zu KoM@ING – Kompetenzmodellierungen und Kompetenzentwicklung, integrierte IRT-basierte und qualitative Studien bezogen auf Mathematik und ihre Verwendung im ingenieurwissenschaftlichen Studium: Mathematische Kompetenzen in Grundlagenfächern zur Elektrotechnik*. Paderborn.
- Bingolbali, E. & Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 68 (1), 19–35.
- Blömeke, S. (2016). Der Übergang von der Schule in die Hochschule: Empirische Erkenntnisse zu mathematikbezogenen Studiengängen. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 3–13). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. doi: 10.1007/978-3-658-10261-6\_1
- Blömeke, S. et al. (Hrsg.). (2011). *Kompetenzen von Lehramtsstudierenden in gering strukturierten Domänen: Erste Ergebnisse aus TEDS-LT*. Münster and München [u.a.]: Waxmann.
- Blömeke, S., Gustafsson, J.-E. & Shavelson, R. J. (2015). Beyond Dichotomies. *Zeitschrift für Psychologie*, 223 (1), 3–13. doi: 10.1027/2151-2604/a000194
- Blömeke, S., König, J., Busse, A., Suhl, U., Benthien, J., Döhrmann, M. & Kaiser, G. (2014). Von der Lehrerausbildung in den Beruf – Fachbezogenes Wissen als Voraussetzung für Wahrnehmung, Interpretation und Handeln im Unterricht. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 17 (3), 509–542. doi: 10.1007/s11618-014-0564-8
- Blömeke, S. & Zlatkin-Troitschanskaia, O. (2013). *Kompetenzmodellierung und Kompetenzerfassung im Hochschulsektor: Ziele, theoretischer Rahmen, Design und Herausforderungen des BMBF Forschungsprogramms KoKoHs (KoKoHs Working Papers, 1)*. Berlin & Mainz: Humboldt-Universität & Johannes Gutenberg-Universität.

- Blum, W. (2006). Einführung. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret* (S. 14–32). Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (Hrsg.). (2006). *Bildungsstandards Mathematik: konkret: Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; mit CD-ROM* (1. Aufl.). Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Blum, W. & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Hrsg.), *Mathematical modelling (ICTMA 12)* (S. 222–231). Chichester: Horwood.
- Bortz, J. & Döring, N. (2006). *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Bortz, J. & Döring, N. (2016). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Bortz, J., Lienert, G. A., Barskova, T., Leitner, K. & Oesterreich, R. (2008). *Kurzgefasste Statistik für die klinische Forschung*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Bortz, J. & Schuster, C. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Bos, W., Lankes, E.-M., Prenzel, M., Schwippert, K., Valtin, R. & Walther, G. (Hrsg.). (2003). *Erste Ergebnisse aus IGLU: Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann.
- Brandenburger, M., Mikelskis-Seifert, S. & Labudde, P. (2014). Problemlösen in der Mechanik: eine Untersuchung mit Studierenden. *PhyDid B-Didaktik der Physik-Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung*. Zugriff am 17.10.2016 auf <http://phydid.physik.fu-berlin.de/index.php/phydid-b/article/view/511>
- Brockmann-Behnsen, D., Gawlick, T. & Elschenbroich, J. (2014). Heuristiken- und Argumentationstraining im Unterricht, explizit oder implizit? In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 249–252). Münster: WTM.
- Bruder, R. & Collet, C. (2011). *Problemlösen lernen im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

- Brunner, M., Kunter, M., Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., Dubberke, T., ... Neubrand, M. (2006). Welche Zusammenhänge bestehen zwischen dem fachspezifischen Professionswissen von Mathematiklehrkräften und ihrer Ausbildung sowie beruflichen Fortbildung? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9 (4), 521–544. doi: 10.1007/s11618-006-0166-1
- Cardella, M. E. (2008). Which mathematics should we teach engineering students? An empirically grounded case for a broad notion of mathematical thinking. *Teaching Mathematics and its Applications*, 27 (3), 150–159. doi: 10.1093/teamat/hrn008
- Charles, R. & Lester, F. (1982). *Teaching problem solving – What, why, and how*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications.
- Chinnappan, M. & Lawson, M. J. (1996). The effects of training in the use of executive strategies in geometry problem solving. *Learning and Instruction*, 6 (1), 1–17.
- Cho, A. & Leonhart, R. (2013). Lösungsansätze für das Problem fehlender Werte: Mechanismen erkennen und adäquat behandeln. *Die Rehabilitation*, 52 (4), 273–279.
- Clark, M. & Lovric, M. (2009). Understanding secondary-tertiary transition in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40 (6), 755–776.
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2007). Early Childhood Mathematics Learning. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (S. 461–555). Charlotte, NC: Information Age Pub.
- Collins, A. & Ferguson, W. (1993). Epistemic Forms and Epistemic Games: Structures and Strategies to Guide Inquiry. *Educational Psychologist*, 28 (1), 25–42.
- Corsten, M. (2010). Videographie praktizieren – Ansprüche und Folgen. Ein methodisch-theoretischer Streifzug durch die Beiträge des Bandes. In M. Corsten, M. Krug & C. Moritz (Hrsg.), *Videographie praktizieren. Herangehensweisen, Möglichkeiten und Grenzen* (S. 7–22). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Creswell, J. W., Plano Clark, V. L., Gutmann, M. & Hanson, W. (2003). Advanced mixed methods research designs. In A. Tashakkori & C. Teddlie

- (Hrsg.), *Handbook of mixed methods in social & behavioral research* (S. 209–240). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Dammann, E. (2016). *Entwicklung eines Testinstruments zur Messung fachlicher Kompetenzen in der Technischen Mechanik bei Studierenden ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge* (Dissertation). Universität Stuttgart, Stuttgart.
- Dammann, E., Behrendt, S., Ștefanica, F. & Nickolaus, R. (2016). Kompetenzniveaus in der ingenieurwissenschaftlichen akademischen Grundbildung – Analysen im Fach Technische Mechanik. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 19 (2), 351–374. doi: 10.1007/s11618-016-0675-5
- Dancy, M. (2000). *Investigating animations for assessment with an animated version of the Force Concept Inventory* (Dissertation). North Carolina State University, Raleigh.
- Depaepe, F., Verschaffel, L. & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: A systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education*, 34, 12–25. doi: 10.1016/j.tate.2013.03.001
- Deutsche Physikalische Gesellschaft (Hrsg.). (2016). *Physik in der Schule: Zusammenfassung*. Bad Honnef. Zugriff am 24.08.2016 auf <https://www.dpg-physik.de/veroeffentlichung/broschueren/studien/schulstudie-2016/schulstudie-zusammenfassung.pdf>
- Dewey, J. (1991). *How we think*. New York: Prometheus Books.
- Dewey, J. (2002). *Wie wir denken*. Zürich: Verlag Pestalozzianum.
- Dinkelaker, J. & Herrle, M. (2009). *Erziehungswissenschaftliche Videographie. Eine Einführung*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Dirac, P. A. M. (1939). The Relation between Mathematics and Physics. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 59, 122–129.
- diSessa, A. A. (1993). Toward an Epistemology of Physics. *Cognition and Instruction*, 10 (2/3), 105–225.
- Docktor, J. & Heller, K. (2009). Robust Assessment Instrument for Student Problem Solving. In *Proceedings of 82nd NARST Annual International Conference*.
- Dörner, D. (1976). *Problemlösen als Informationsverarbeitung* (1. Aufl.). Stuttgart: Kohlhammer.

- Duncker, K. (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens*. Berlin: Springer.
- Ehmke, T., Duchhardt, C., Geiser, H., Grüßing, M., Heinze, A. & Marsch, F. (2009). Kompetenzentwicklung über die Lebensspanne: Erhebung von mathematischen Kompetenzen im Nationalen Bildungspanel. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium* (S. 313–328). Münster: Waxmann.
- Enders, C. K. (2001). The Impact of Nonnormality on Full Information Maximum-Likelihood Estimation for Structural Equation Models With Missing Data. *Psychological Methods*, 6 (4), 352–370.
- Ericsson, K. A. & Simon, H. A. (1984). *Protocol Analysis. Verbal Reports as Data*. Cambridge London: The MIT Press.
- Ericsson, K. A. & Simon, H. A. (1987). Verbal Reports on Thinking. In C. Faerch & G. Kasper (Hrsg.), *Introspection in Second Language Research* (S. 24–53). Clevedon: Multilingual Matters.
- Fan, L. & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics*, 66 (1), 61–75.
- Faust, G., Kratzmann, J. & Wehner, F. (2012). Schuleintritt als Risiko für Schulanfänger? *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, 26 (3), 197–212. doi: 10.1024/1010-0652/a000069
- Fernandez, M. L., Hadaway, N. & Wilson, J. W. (1994). Problem Solving: Managing It All. *The Mathematics Teacher*, 87 (3), 195–199.
- Field, A., Miles, J. & Field, Z. (2012). *Discovering Statistics using R*. London: Sage.
- Fischer, A., Heinze, A. & Wagner, D. (2009). Mathematiklernen in der Schule – Mathematiklernen in der Hochschule: Die Schwierigkeiten von Lernenden beim Übergang ins Studium. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium* (S. 245–264). Münster: Waxmann.
- Fischer, A. & Wagner, D. (2009). Mathematiklernen in der Sekundarstufe II und im Studium: Zusammenfassung und Forschungsdesiderata. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium* (S. 265–268). Münster: Waxmann.

- Fischer, R. (2006). *Materialisierung und Organisation: Zur kulturellen Bedeutung der Mathematik*. München: Profil Verlag.
- Fleischer, J., Koeppen, K., Kenk, M., Klieme, E. & Leutner, D. (2013). Kompetenzmodellierung: Struktur, Konzepte und Forschungszugänge des DFG-Schwerpunktprogramms. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 16 (S1), 5–22. doi: 10.1007/s11618-013-0379-z
- Flick, U. (2009). *Sozialforschung. Methoden und Anwendungen. Ein Überblick für die BA-Studiengänge*. Reinbeck bei Hamburg: Rowohlt Verlag.
- Fonteyn, M. E., Kuipers, B. & Grobe, S. J. (1993). A Description of Think Aloud Method and Protocol Analysis. *Qualitative Health Research*, 3 (4), 430–441.
- Frank, M. & Roeckerath, C. (2016). Habe ich das Zeug zum MINT-Studium? Die CAMMP week als Orientierungshilfe für Schülerinnen und Schüler. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 181–195). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. doi: 10.1007/978-3-658-10261-6\_12
- Freudenthal, H. (1979). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett.
- Frey, A. (2006). Strukturierung und Methoden zur Erfassung von Kompetenz. *Bildung und Erziehung*, 59 (2). doi: 10.7788/bue.2006.59.2.125
- Frey, A. & Hartig, J. (2013). Wann sollten computerbasierte Verfahren zur Messung von Kompetenzen anstelle von papier- und bleistift-basierten Verfahren eingesetzt werden? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 16 (1), 53–57. doi: 10.1007/s11618-013-0385-1
- Friege, G. & Lind, G. (2003). Allgemeine und fachspezifische Problemlösekompetenz. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 9, 63–74.
- Gerdes, J. & Schecker, H. (1999). Der Force Concept Inventory. Ein diagnostischer Test zu Schülervorstellungen in der Mechanik. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 52 (5), 283–288.
- Gerding, N. (2014). *Mathematische Kompetenzen zu Beginn des ingenieurwissenschaftlichen Studiums: Eine qualitative Analyse von Aufgabenbearbeitungen aus der Höheren Mathematik* (Masterarbeit). Ruhr-Universität Bochum.

- Goldhammer, F. & Hartig, J. (2008). Interpretation von Testresultaten und Testeichung. In H. Moosbrugger & A. Kelava (Hrsg.), *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion* (S. 166–192). Heidelberg: Springer.
- Gray, G. L., Constanzo, F. & Plesha, M. E. (2005). Problem Solving in Statics and Dynamics: A Proposal for a Structured Approach. In *Proceedings of the 2005 American Society for Engineering Education Annual Conference & Exposition* (S. 10.1016.1–10.1016.13). Portland, OR. Zugriff am 26.08.2016 auf <https://peer.asee.org/problem-solving-in-statics-and-dynamics-a-proposal-for-a-structured-approach.pdf>
- Greene, J. C., Caracelli, V. J. & Graham, W. F. (1989). Toward a Conceptual Framework for Mixed-Method Evaluation Designs. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 11 (3), 255–274.
- Greiff, S. & Fischer, A. (2013). Der Nutzen einer komplexen Problemlösekompetenz: Theoretische Überlegungen und empirische Befunde. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, 27 (1–2), 27–39.
- Griese, B. (2016). *Learning Strategies in Engineering Mathematics: Conceptualisation, Development, and Evaluation of MP2-Mathe/Plus* (Dissertation). Ruhr-Universität Bochum, Bochum.
- Grieser, D. (2013). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. doi: 10.1007/978-3-8348-2460-8
- Gruber, H. & Ziegler, A. (Hrsg.). (1996). *Expertiseforschung. Theoretische und methodische Grundlagen*. Opladen: Westdeutscher Verlag.
- Grünwald, N., Kossow, A., Sauerbier, G. & Klymchuk, S. (2004). Der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik: Erfahrungen aus Internationaler und Deutscher Sicht. *Global Journal of Engineering Education*, 8 (3), 283–293.
- Grüßing, M. (2009). Mathematische Kompetenzentwicklung zwischen Elementar- und Primarbereich: Zusammenfassung und Forschungsdesiderate. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium* (S. 53–58). Münster: Waxmann.
- Hadamard, J. (1954). *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field* (Unveränderte und ungekürzte Neuauflage der 1. Aufl.). New York: Dover Publications.

- Halmos, P. R. (1980). The Heart of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 87 (7), 519–524.
- Hammann, M., Phan, T. H. & Bayrhuber, H. (2008). Experimentieren als Problemlösen: Lässt sich das SDDS-Modell nutzen, um unterschiedliche Dimensionen beim Experimentieren zu messen? In M. Prenzel, I. Gogolin & H.-H. Krüger (Hrsg.), *Kompetenzdiagnostik* (S. 33–49). VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Hartig, J. (2007). Skalierung und Definition von Kompetenzniveaus. In B. Beck & E. Klieme (Hrsg.), *Sprachliche Kompetenzen* (S. 83–99). Weinheim [u.a.]: Beltz.
- Hartig, J. (2008). Psychometric Models for the Assessment of Competencies. In J. Hartig, E. Klieme & D. Leutner (Hrsg.), *Assessment of competencies in educational contexts* (S. 69–90). Cambridge and Göttingen: Hogrefe.
- Hartig, J. & Höhler, J. (2010). Modellierung von Kompetenzen mit mehrdimensionalen IRT-Modellen. Projekt MIRT. *Zeitschrift für Pädagogik*, 56 (Beiheft), 189–198.
- Hartig, J. & Klieme, E. (2006). Kompetenz und Kompetenzdiagnostik. In K. Schweizer (Hrsg.), *Leistung und Leistungsdiagnostik* (S. 127–143). Heidelberg: Springer Medizin Verl.
- Hasemann, K. (2001). Early numeracy. Results of an empirical study with 5 to 7 year old children. In H. G. Weigand, A. Peter-Koop, N. Neill, K. Reiss, G. Törner & B. Wollring (Hrsg.), *Developments in Mathematics Education in German-Speaking Countries. Selected Papers from the Annual Conference on Didactics of Mathematics, Munich, 1998* (S. 31–40). Hildesheim: Franzbecker.
- Hauck, C. (2012). *Vergleich der mathematischen Kompetenzen von Gymnasiasten an allgemein bildenden und technischen Gymnasien in Baden-Württemberg* (Masterarbeit). Universität Stuttgart, Stuttgart.
- Hefendehl-Hebeker, L. (2016). Mathematische Wissensbildung in Schule und Hochschule. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 15–30). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. doi: 10.1007/978-3-658-10261-6\_2
- Heimes, B., Leiser, A., Kneip, F. & Pulham, S. (2016). Mathe-MAX – Ein

- Projekt an der htw saar. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 243–259). Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden. doi: 10.1007/978-3-658-10261-6\_16
- Heiner, M., Biehler, R., Heinze, A., Hochmuth, R., Nickolaus, R., Petermann, M., ... Tekkaya, A. E. (2013). Kompetenzmodellierung und Kompetenzerfassung. IRT-basierte und qualitative Studien bezogen auf Mathematik und ihre Verwendung im ingenieurwissenschaftlichen Studium – KoM@ING. In A. E. Tekkaya et al. (Hrsg.), *TeachING-LearnING.EU discussions. Innovationen für die Zukunft der Lehre in den Ingenieurwissenschaften* (S. 99–116). RWTH Aachen University, Ruhr-Universität Bochum, Technische Universität Dortmund.
- Heiner, M., Wilkesmann, U., Biehler, R., Schaper, N., Kortemeyer, J., Hochmuth, R., ... Neumann, I. (2016). *KoM@ING: Kompetenzmodellierung und Kompetenzentwicklung, integrierte IRT-basierte und qualitative Studien bezogen auf Mathematik und ihre Verwendung im ingenieurwissenschaftlichen Studium: Verbund und Projektkoordination*. Dortmund.
- Heiner, M., Wilkesmann, U. & Radtke, M. (2016). *KoM@ING: Modeling and Developing Competences – Integrated IRT-Based and Qualitative Studies with a Focus on Mathematics and its Usage in Engineering Education: Teilprojekt B*. Dortmund.
- Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien: Springer-Verlag.
- Heinze, A. (2007). Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext. *Journal für Mathematikdidaktik*, 28 (1), 3–30.
- Heinze, A. & Grüßing, M. (2009). Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium: Zusammenfassung und Ausblick. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium* (S. 329–335). Münster: Waxmann.
- Heinze, A. & Neumann, I. (2016). *Schlussbericht für ein Forschungsvorhaben im Förderprogramm des Bundesministeriums für Bildung und Forschung. Förderlinie "Kompetenzmodelle und Kompetenzerfassung Ko-KoHS": Verbundvorhaben KoM@ING – Kompetenzmodellierung und Kompetenzentwicklung, integrierte IRT-basierte und qualitative Studien*

- bezogen auf Mathematik und ihre Verwendung im ingenieurwissenschaftlichen Studium Teilprojekt C/Kiel: Domäne Höhere Mathematik. Kiel.
- Hellmich, F. (2007). Bedingungen anschlussfähiger Bildungsprozesse von Kindern beim Übergang vom Kindergarten in die Grundschule. *Bildungsforschung*, 4 (1). Zugriff am 19.08.2016 auf <http://bildungsforschung.org/index.php/bildungsforschung/article/view/59>
- Helmke, A. & Hosenfeld, I. (2003). Vergleichsarbeiten (VERA): Eine Standortbestimmung zur Sicherung schulischer Kompetenzen - Teil 1: Grundlagen, Ziele, Realisierung. *Schulverwaltung, Ausgabe Nordrhein-Westfalen*, 4, 107–110.
- Helmke, A. & Hosenfeld, I. (2004). Vergleichsarbeiten - Standards - Kompetenzstufen: Begriffliche Klärung und Perspektive. In M. Wosnitza, A. Frey & R. S. Jäger (Hrsg.), *Lernprozess, Lernumgebung und Lerndiagnostik* (Bd. 16, S. 56–75). Landau: Verlag Empirische Pädagogik.
- Helmke, T., Helmke, A., Schrader, F.-W., Wagner, W., Nold, G. & Schröder, K. (2008). Die Videostudie des Englischunterrichts. In DESI-Konsortium (Hrsg.), *Unterricht und Kompetenzerwerb in Deutsch und Englisch. Ergebnisse der DESI-Studie* (S. 345–363). Weinheim u.a.: Beltz.
- Hembree, R. (1992). Experiments and Relational Studies in Problem Solving: A Meta-Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23, 242–273.
- Henderson, K. B. & Pinory, R. E. (1953). Problem-Solving in Mathematics. In H. F. Fehr (Hrsg.), *The Learning of Mathematics: Its Theory and Practice. National Council of Teachers of Mathematics* (S. 228–270). Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.
- Henn, H.-W. & Kaiser, G. (2001). Mathematik – ein polarisierendes Schulfach. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 4 (3), 359–380.
- Herold, R. (2015). Problemlösen lernen mit Strategieschlüsseln – Eine Pilotstudie. In F. Caluori, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 380–383). Münster: WTM.
- Herrle, M., Rauin, U. & Engartner, T. (2015). Einleitung. Videos als Ressourcen zur Generierung von Wissen über Unterrichtsrealität(en). In U. Rauin, M. Herrle & T. Engartner (Hrsg.), *Videoanalysen in der Unterrichtsforschung. Methodische Vorgehensweisen und Anwendungsbeispiele*

- (S. 8–28). Weinheim Basel: Beltz Juventa.
- Hestenes, D. & Halloun, I. (1995). Interpreting the Force Concept Inventory. A response to Huffman and Heller. *The Physics Teacher*, 33 (8), 502–506.
- Hestenes, D., Wells, M. & Swackhamer, G. (1992). Force Concept Inventory. *The Physics Teacher*, 30 (3), 141–158.
- Heublein, U., Ebert, J., Hutzsch, C., Isleib, S., König, R., Richter, J. & Woisch, A. (2017). *Zwischen Studierenerwartungen und Studienwirklichkeit. Ursachen des Studienabbruchs, beruflicher Verbleib der Studienabbrecherinnen und Studienabbrecher und Entwicklung der Studienabbruchquote an deutschen Hochschulen* (Bde. 2017,1). Hannover: Deutsches Zentrum für Hochschul- und Wissenschaftsforschung.
- Heublein, U., Hutzsch, C., Schreiber, J., Sommer, D. & Besuch, G. (2010). *Ursachen des Studienabbruchs in Bachelor- und in herkömmlichen Studiengängen: Ergebnisse einer bundesweiten Befragung von Exmatrikulierten des Studienjahres 2007/08* (Bde. 2010,2). Hannover: HIS Hochschul-Informationssystem.
- Heublein, U., Richter, J., Schmelzer, R. & Sommer, D. (2012). *Die Entwicklung der Schwund- und Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen: Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2010*. Hannover: HIS Hochschul-Informationssystem.
- Heublein, U., Schmelzer, R., Sommer, D. & Wank, J. (2008). *Die Entwicklung der Schwund und Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen: Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2006*. Hannover: HIS Hochschul-Informationssystem.
- Hilgert, J. (2016). Schwierigkeiten beim Übergang von Schule zu Hochschule im zeitlichen Vergleich – Ein Blick auf Defizite beim Erwerb von Schlüsselkompetenzen. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 695–709). Wiesbaden: Springer Fachmedien. doi: 10.1007/978-3-658-10261-6\_43
- Hindenach, M. (2012). *Entwicklung eines Eingangstests für physikalisch-technische Kompetenzen zu Beginn des Maschinenbau-Studiums, mit den Bereichen Statik und Dynamik auf Basis von curricularen Analysen in den Schulformen Allgemeinbildendes und Technisches Gymnasium* (Mas-

- terarbeit). Universität Stuttgart, Stuttgart.
- Hinsley, D. A., Hayes, J. R. & Simon, H. A. (1977). From words to equations: Meaning and representation in algebra word problems. In P. A. Carpenter & M. A. Just (Hrsg.), *Cognitive processes in comprehension* (S. 89–106). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Hsieh, H.-F. & Shannon, S. E. (2005). Three Approaches to Qualitative Content Analysis. *Qualitative Health Research*, 15 (9), 1277–1288.
- Huffmann, D. & Heller, P. (1995). What does the force concept inventory actually measure? *The Physics Teacher*, 33, 138–143.
- Hussy, W. (1993). *Denken und Problemlösen*. Stuttgart: Kohlhammer.
- Johnson, R. B., Onwuegbuzie, A. J. & Turner, L. A. (2007). Toward a Definition of Mixed Methods Research. *Journal of Mixed Methods Research*, 1 (2), 112–133.
- Jonassen, D., Strobel, J. & Lee, C. B. (2006). Everyday Problem Solving in Engineering: Lessons for Engineering Education. *Journal of Engineering Education*, 95 (2), 139–151.
- Kircher, E., Girwidz, R. & Häußler, P. (2015). *Physikdidaktik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-41745-0
- Klauer, K. (1987). Kriteriumsorientiertes Testen: Der Schluss auf den Itempool. *Zeitschrift für Differentielle und Diagnostische Psychologie*, 8 (2), 141–147.
- Klieme, E. (Hrsg.). (2003). *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards: Eine Expertise*. Bonn: BMBF. Zugriff am 18.08.2016 auf [http://www.bmbf.de/pub/zur\\_entwicklung\\_nationaler\\_bildungsstandards.pdf](http://www.bmbf.de/pub/zur_entwicklung_nationaler_bildungsstandards.pdf)
- Klieme, E. (2004). Was sind Kompetenzen und wie lassen sie sich messen? *Pädagogik*, 56 (6), 10–13.
- Klieme, E., Funke, J., Leutner, D., Reimann, P. & Wirth, J. (2001). Problemlösen als fächerübergreifende Kompetenz. Konzeption und erste Resultate aus einer Schulleistungsstudie. *Zeitschrift für Pädagogik*, 47 (2), 179–200.
- Klieme, E., Hartig, J. & Rauch, D. (2008). The Concept of Competence in Educational Contexts. In J. Hartig, E. Klieme & D. Leutner (Hrsg.), *Assessment of competencies in educational contexts* (S. 3–22). Cambridge and Göttingen: Hogrefe.

- Klieme, E. & Leutner, D. (2006). Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Bilanzierung von Bildungsprozessen. Beschreibung eines neu eingerichteten Schwerpunktprogramms der DFG. *Zeitschrift für Pädagogik*, 56 (6), 876–903.
- Kluczniok, K. & Roßbach, H.-G. (2008). Übergang Kindergarten – Primarschule. In T. Coelen & H.-U. Otto (Hrsg.), *Grundbegriffe Ganztagsbildung* (S. 321–330). Wiesbaden: VS Verl. für Sozialwiss.
- Koepfen, K., Hartig, J., Klieme, E. & Leutner, D. (2008). Current Issues in Competence Modeling and Assessment. *Zeitschrift für Psychologie / Journal of Psychology*, 216 (2), 61–73. doi: 10.1027/0044-3409.216.2.61
- Köller, O. (2010). Bildungsstandards. In R. Tippelt & B. Schmidt (Hrsg.), *Handbuch Bildungsforschung* (S. 529–548). Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften.
- Köller, O., Baumert, J. & Bos, W. (2001). TIMSS – Third International Mathematics and Science Study: Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in der Schule* (S. 269–284). Weinheim: Beltz.
- Konrad, K. (2010). Lautes Denken. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 476–490). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Kortemeyer, J. & Biehler, R. (2017). *The interface between mathematics and engineering – problem solving processes for an exercise on oscillating circuits using ordinary differential equations*. Zugriff am 29.01.2017 auf [https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10\\_0427.pdf](https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0427.pdf)
- Krajewski, K., Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (2009). Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen bis zum Beginn der Grundschulzeit. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium* (S. 17–34). Münster: Waxmann.
- Krajewski, K. & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, 53 (4), 246–262.
- Krey, O. (2012). *Zur Rolle der Mathematik in der Physik: Wissenschaftstheo-*

- retische Aspekte und Vorstellungen Physiklernender* (Bd. 130). Berlin: Logos.
- Kuckartz, U. (2014). *Mixed Methods. Methodologie, Forschungsdesigns und Analyseverfahren*. Wiesbaden: Springer VS.
- Kuckartz, U. (2016). *Qualitative Inhaltsanalyse. Methoden, Praxis, Computerunterstützung* (3. überarbeitete Aufl.). Weinheim und Basel: Beltz Juventa.
- Kultusministerkonferenz. (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss: Beschluss vom 4.12.2003*. Luchterhand.
- Kultusministerkonferenz. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich: Beschluss vom 15.10.2004*. Luchterhand.
- Kultusministerkonferenz. (2005a). *Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz: Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung*. Luchterhand.
- Kultusministerkonferenz. (2005b). *Bildungsstandards im Fach Physik für den Mittleren Schulabschluss: Beschluss vom 16.12.2004*. Luchterhand.
- Kultusministerkonferenz. (2006). *Gesamtstrategie der Kultusministerkonferenz zum Bildungsmonitoring*. München: Link.
- Kultusministerkonferenz. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)*. Köln: Link.
- Kunter, M. & Klusmann, U. (2010). Kompetenzmessung bei Lehrkräften – Methodische Herausforderungen. *Unterrichtswissenschaft*, 38 (1), 68–86.
- Land Berlin. (2004). *Schulgesetz für das Land Berlin (Schulgesetz - SchulG) vom 26. Januar 2004: SchulG*.
- Land Brandenburg. (2002). *Gesetz über die Schulen im Land Brandenburg (Brandenburgisches Schulgesetz - BbgSchulG): BbgSchulG*.
- Larkin, J. H. (1977). *Problem solving in physics. Technical report*. (Bericht). Berkeley: Group in Science and Mathematics Education, University of California.
- Larkin, J. H. & Reif, F. (1979). Understanding and Teaching Problem-Solving in Physics. *European Journal of Science Education*, 1 (2), 191–203.
- Lee, K. S. (1982). Fourth Graders' Heuristic Problem-Solving Behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13 (2), 110–123.

- Lehmann, M., Roesken-Winter, B. & Schueler, S. (2015). Use of mathematics in engineering contexts: An empirical study on problem solving competencies. In K. Krainer & N. Vondrová (Hrsg.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 2173–2179). Prag: CERME.
- Lenzen, D., Krüger, H.-H. & Wulf, C. (2008). Editorial. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 11 (4), 513–515. doi: 10.1007/s11618-008-0049-8
- Leuders, T. (2003). Problemlösen. In T. Leuders (Hrsg.), *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.
- Litzinger, T. A., Van Meter, P., Firetto, C. M., Passmore, L. J., Masters, C. B., Turns, S. R., ... Zappe, S. E. (2010). A cognitive study of problem solving in statics. *Journal of Engineering Education*, 99 (4), 337–353.
- Lüdtke, O., Robitzsch, A., Trautwein, U. & Köller, O. (2007). Umgang mit fehlenden Werten in der psychologischen Forschung. Probleme und Lösungen. *Psychologische Rundschau*, 58 (2), 103–117.
- Maaß, K. (2006). Mathematik zwischen Schülervorstellungen und Bildungszielen – erste Ergebnisse einer empirischen Untersuchung. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006* (S. 23–25). Berlin und Hildesheim: Franzbecker.
- Maaz, K., Hausen, C., McElvany, N. & Baumert, J. (2006). Stichwort: Übergänge im Bildungssystem: Theoretische Konzepte und ihre Anwendung in der empirischen Forschung beim Übergang in die Sekundarstufe. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9 (3), 299–327.
- Mahajan, S. (2005). *Observations on teaching first-year physics*. Zugriff am 14.01.2017 auf <https://arxiv.org/pdf/physics/0512158v1.pdf>
- Maloney, D. P. (2011). An Overview of Physics Education Research on Problem Solving. In C. Henderson & K. A. Harper (Hrsg.), *Getting Started in PER* (1. Aufl., Bd. 2). College Park, MD.
- Manogue, C. A., Browne, K., Dray, T. & Edwards, B. (2006). Why is Ampère's law so hard? A look at middle-division physics. *American Journal of Physics*, 74 (4), 344–350. doi: 10.1119/1.2181179
- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically*. Dorchester: Pearson Education Limited.

- Masters, G. N. (1982). A rasch model for partial credit scoring. *Psychometrika*, 47 (2), 149–174. doi: 10.1007/BF02296272
- Mayer, J. & Wellnitz, N. (2014). Die Entwicklung von Kompetenzstrukturmodellen. In D. Krüger, I. Parchmann & H. Schecker (Hrsg.), *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung* (S. 19–29). Berlin und Heidelberg: Springer Spektrum.
- Mayring, P. (2010). *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (11. aktualisierte und überarbeitete Aufl.). Weinheim und Basel: Beltz.
- Mayring, P., Gläser-Zikuda, M. & Ziegelbauer, S. (2005). Auswertung von Videoaufnahmen mit Hilfe der Qualitativen Inhaltsanalyse - ein Beispiel aus der Unterrichtsforschung. *Medienpädagogik*, 9, 1–17.
- McCracken, W. M. & Newstetter, W. C. (2001). Text to diagram to symbol: Representational transformations in problem-solving. In *Frontiers in education conference, 2001. 31st annual* (Bd. 2).
- McGee, C., Ward, R., Gibbons, J. & Harlow, A. (2003). *Transition to secondary school: A literature review*. Hamilton [N.Z.]: University of Waikato.
- Meredith, D. C. & Marrongelle, K. A. (2008). How students use mathematical resources in an electrostatics context. *American Journal of Physics*, 76 (6), 570–578. doi: 10.1119/1.2839558
- Mikelskis-Seifert, S., Thiele, M. & Wüscher, T. (2005). Modellieren – Schlüsselfähigkeit für physikalische Forschungs- und Lernprozesse. *PhyDid A-Didaktik der Physik-Beiträge zur DPG-Frühjahrstagung*, 1 (4), 30–46.
- Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. (2013a). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium, Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen Mathematik* (1. Aufl., Bd. Nr. 4720). Düsseldorf.
- Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. (2013b). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium, Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen Physik* (1. Aufl., Bd. Nr. 4721). Düsseldorf.
- Morgan, D. L. (2014). *Integrating qualitative and quantitative methods: A pragmatic approach*. Los Angeles: Sage.
- Musekamp, F. & Pearce, J. (2015). Assessing engineering competencies: The conditions for educational improvement. *Studies in Higher Education*,

40 (3), 505–524. doi: 10.1080/03075079.2015.1004238

- Musekamp, F., Spöttl, G. & Mehrafza, M. (2015). Modellierung und Messung von Kompetenzen der Technischen Mechanik in der Ausbildung von Maschinenbauingenieuren (KOM-ING) - Forschungsdesign. In F. Musekamp, G. Spöttl & G. Spöttl (Hrsg.), *Kompetenz im Studium und in der Arbeitswelt. Competence in Higher Education and the Working Environment* (S. 65–91). Frankfurt am Main: Peter Lang GmbH Internationaler Verlag der Wissenschaften.
- Musekamp, F., Spöttl, G., Mehrafza, M., Heine, J.-H. & Heene, M. (2014). Modeling of Competences for Students of Engineering Mechanics. *International Journal of Engineering Pedagogy (iJEP)*, 4 (1), 4. doi: 10.3991/ijep.v4i1.2917
- Mustoe, L. R. & Lawson, D. (2002). *Mathematics for the european engineer: A curriculum for the twenty-first century*. Brüssel: SEFI HQ.
- Neuhaus, K. (2002). *Die Rolle des Kreativitätsproblems in der Mathematikdidaktik*. Berlin: Verlag Dr. Köster.
- Neumann, I., Fulmer, G. W. & Liang, L. L. (2013). Analyzing the FCI based on a Force and Motion Learning Progression. *Science Education Review Letters*, 2013, 8–14.
- Neumann, I., Rösken-Winter, B., Lehmann, M., Duchhardt, C., Heinze, A. & Nickolaus, R. (2015). Measuring Mathematical Competences of Engineering Students at the Beginning of Their Studies. *Peabody Journal of Education*, 90 (4), 465–476. doi: 10.1080/0161956X.2015.1068054
- Nickolaus, R., Behrendt, S., Dammann, E. & Stefanica, F. (2016). *Schlussbericht für ein Forschungsvorhaben im Förderprogramm des Bundesministeriums für Bildung und Forschung. Förderlinie "KoKoHS – Kompetenzmodelle und Kompetenzerfassung KoKoHS": Verbundvorhaben KoM@ING – Kompetenzmodellierung und Kompetenzentwicklung, integrierte IRT-basierte und qualitative Studien bezogen auf Mathematik und ihre Verwendung im ingenieurwissenschaftlichen Studium Teilprojekt C: IRT-basierte Modellierung zentraler Felder ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge. Standort Stuttgart*. Stuttgart.
- Nickolaus, R., Behrendt, S., Dammann, E., Stefanica, F. & Heinze, A. (2013). Theoretische Modellierung ausgewählter ingenieurwissenschaftli-

- cher Kompetenzen. *Zeitschrift für Empirische Pädagogik* (Beiheft), 152–178.
- Nickolaus, R. & Seeber, S. (2013). Berufliche Kompetenzen: Modellierungen und diagnostische Verfahren. In A. Frey, U. Lissmann & B. Schwarz (Hrsg.), *Handbuch Berufspädagogische Diagnostik* (S. 166–195). Weinheim [u.a.]: Beltz.
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Hrsg.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (S. 115–124).
- Niss, M. & Højgaard, T. (Hrsg.). (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: Roskilde University.
- Nolting, W. (2003). *Klassische Mechanik: Grundkurs theoretische Physik*. Berlin [u.a.]: Springer.
- OECD. (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: Autor.
- OECD (Hrsg.). (2005). *PISA 2003: Technical Report*. Paris: OECD.
- Peter, C. & Winklmaier, C. (2002). Zugang zum Invarianzprinzip über Tabellen. *Mathematik lehren* (115), 10–13.
- Philipp, K. (2013). *Experimentelles Denken. Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Poincaré, H. (2003). *Wissenschaft und Methode* (Unveränderte Neuauflage der 1. Aufl.). Berlin: Xenomos Verlag.
- Polya, G. (1957). *How To Solve It* (2. Aufl.). Garden City, New York: Doubleday & Company, Inc.
- Polya, G. (1964). Die Heuristik. Versuch einer vernünftigen Zielsetzung. *Der Mathematikunterricht*, 10 (1), 5–15.
- Polya, G. (2010). *Schule des Denkens* (Sonderausgabe der 4. Aufl.). Tübingen: Narr Francke Attempto Verlag.
- Prenzel, M. (Hrsg.). (2005). *PISA 2003: Der zweite Vergleich der Länder in Deutschland - was wissen und können Jugendliche?* Münster and München [u.a.]: Waxmann.
- Prenzel, M. (Hrsg.). (2007). *PISA 2006: Die Ergebnisse der dritten interna-*

- tionalen Vergleichsstudie*. Münster and München [u.a.]: Waxmann.
- Prenzel, M., Sälzer, C., Klieme, E. & Köller, O. (Hrsg.). (2013). *Pisa 2012: Fortschritte und Herausforderungen in Deutschland*. Münster and München and Berlin [u.a.]: Waxmann.
- Rach, S. (2014). *Individuelle Lernprozesse im Mathematikstudium: Charakteristika mathematischer Lehr-Lern-Prozesse in der Studieneingangsphase und individuelle Bedingungsfaktoren für erfolgreiche Lernprozesse im ersten Semester* (Dissertation). Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Kiel.
- Redish, E. F. (2004). A theoretical framework for physics education research: Modeling student thinking. In *Proceedings of the enrico fermi summer school course, clvi*. Italian Physical Society.
- Redish, E. F. (2005). *Problem solving and the use of math in physics courses*. Zugriff am 23.08.2016 auf <https://arxiv.org/abs/physics/0608268>
- Reichersdorfer, E., Ufer, S., Lindmeier, A. & Reiss, K. (2014). Der Übergang von der Schule zur Universität: Theoretische Fundierung und praktische Umsetzung einer Unterstützungsmaßnahme am Beginn des Mathematikstudiums. In I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P. R. Fischer, R. Hochmuth & Koepf, Wolfram, Schreiber, Stephan, Wassong, Thomas (Hrsg.), *Mathematische Vor- und Brückenkurse* (S. 37–53). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Reinhold, P., Lind, G. & Friege, G. (1999). Wissenszentriertes Problemlösen in Physik. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 5 (1), 41–62.
- Reiss, K. (2004). Bildungsstandards und die Rolle der Fachdidaktik am Beispiel der Mathematik. *Zeitschrift für Pädagogik*, 50 (5), 635–649.
- Reiss, K. (2009). Mathematische Kompetenzen zwischen Grundschule und Sekundarstufe: Zusammenfassung und Forschungsdesiderate. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium* (S. 117–122). Münster: Waxmann.
- Reiss, K. & Törner, G. (2007). Problem solving in the mathematics classroom: the German perspective. *ZDM*, 39 (5-6), 431–441.
- Renkl, A. (2012). Modellierung von Kompetenzen oder von interindividuellen Kompetenzunterschieden. *Psychologische Rundschau*, 63 (1), 50–53. doi: 10.1026/0033-3042/a000110

- Rimmele, R. (2013). *Videograph – Multimedia-Player zur Kodierung von Videos*. Kiel: IPN – Leibnitz Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften. Zugriff am 28.01.2017 auf <http://archiv.ipn.uni-kiel.de/projekte/videograph/htmStart.htm>
- Robitzsch, A. (2013). Wie robust sind Struktur- und Niveaumodelle? Wie zeitlich stabil und über Situationen hinweg konstant sind Kompetenzen? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 16 (1), 41–45. doi: 10.1007/s11618-013-0383-3
- Roppelt, A. (2009). Mathematische Grundkompetenzen von Studierenden. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium* (S. 235–244). Münster: Waxmann.
- Rosseel, Y. (2012). lavaan: An R Package for Structural Equation Modeling. *Journal of Statistical Software*, 48 (2), 1–36. Zugriff auf <http://www.jstatsoft.org/v48/i02/>
- Rost, D. H. (2007). *Interpretation und Bewertung pädagogisch-psychologischer Studien*. Weinheim und Basel: Beltz Verlag.
- Rost, J. (2004). *Lehrbuch Testtheorie - Testkonstruktion*. Bern: Verlag Hans Huber.
- Rott, B. (2013). *Mathematisches Problemlösen. Ergebnisse einer empirischen Studie*. Münster: WTM.
- Rott, B. (2014). Mathematische Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern – Entwicklung eines deskriptiven Phasenmodells. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 35 (2), 251–282.
- Rott, B. (2015). Rethinking Heuristics – Characterizations and Vignettes. *LUMAT Online Journal*, 3 (1), 123–136.
- Rott, B., Kuzle, A. & Čadež, T. H. (2016). Problem Solving: A Short Introduction. In A. Kuzle, B. Rott & T. H. Čadež (Hrsg.), *Problem Solving in the Mathematics Classroom. Perspectives and Practices from Different Countries* (S. 11–17). Münster: WTM-Verlag.
- Rubin, D. B. (1976). Inference and missing data. *Biometrika*, 63 (3), 581–592.
- Russo, J. E., Johnson, E. J. & Stephens, D. L. (1989). The validity of verbal reports. *Memory & Cognition*, 17 (6), 759–769.
- Sandmann, A. (2014). Lautes Denken – die Analyse von Denk-, Lern- und Problemlöseprozessen. In D. Krüger, I. Parchmann & H. Schecker (Hrsg.),

- Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung* (S. 179–188). Berlin Heidelberg: Springer.
- Savinainen, A. & Scott, P. (2002). The Force Concept Inventory: a tool for monitoring student learning. *Physics Education*, 37 (1), 45–52.
- Schecker, H., Fischer, H. E. & Wiesner, H. (2004). Physikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. In H.-E. Tenorth (Hrsg.), *Biologie, Chemie, Physik, Geschichte, Politik* (S. 148–234). Weinheim [u.a.]: Beltz.
- Schecker, H. & Gerdes, J. (1999). Messung und Konzeptualisierungsfähigkeit in der Mechanik – Zur Aussagekraft des Force Concept Inventory. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 5 (1), 75–89.
- Schecker, H. & Parchmann, I. (2006). Modellierung naturwissenschaftlicher Kompetenz. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, 12, 45–66.
- Scherr, R. E. & Hammer, D. (2009). Student Behavior and Epistemological Framing: Examples from Collaborative Active-Learning Activities in Physics. *Cognition and Instruction*, 27 (2), 147–174.
- Schmutzer, E. (2005). *Grundlagen der Theoretischen Physik*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag.
- Schoenfeld, A. H. (1980). Teaching Problem-Solving Skills. *The American Mathematical Monthly*, 87 (10), 794–805.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sensemaking in mathematics. In D. Grouws (Hrsg.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (S. 334–370). New York: MacMillan.
- Schoenfeld, A. H. (2007). Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics. *ZDM*, 39 (5-6), 537–551.
- Schoenfeld, A. H. (2011). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. New York: Routledge.
- Schreier, M. (2014). Varianten qualitativer Inhaltsanalyse: Ein Wegweiser im Dickicht der Begrifflichkeiten. *Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research*, 15 (1), 570–578. Zugriff am 14.02.2017 auf <http://www.qualitative-research.net/index.php/>

[fqs/article/view/2043/3636](https://www.fqs.org/article/view/2043/3636)

- Schreier, M. & Odağ, Ö. (2010). Mixed Methods. In G. Mey & K. Mruck (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschung in der Psychologie* (S. 263–277). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Schuler, S., Engler, J., Pelzer, M. & Wittmann, G. (2013). Anschlussfähige mathematische Bildung – Kontinuitäten und Diskontinuitäten im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule. In G. Greefrath, F. Käpnick & M. Stein (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2013* (S. 914–917). Münster: WTM.
- Schuler, S., Pelzer, M., Wittkowski, A. & Wittmann, G. (2015). Zwischen Interessen des Kindes und Schulvorbereitung. *Frühe Bildung*, 4 (4), 196–202. doi: 10.1026/2191-9186/a000205
- Schwarz, W. (2006). *Heuristische Strategien des Problemlösens. Eine fachmethodische Systematik für die Mathematik*. Münster: WTM Verlag.
- Schwarzer, R. & Jerusalem, M. (2002). Das Konzept der Selbstwirksamkeit. *Zeitschrift für Pädagogik*, 44 (Beiheft), 28–53.
- Seidel, T., Prenzel, M., Duit, R. & Lehrke, M. (Hrsg.). (2003). *Technischer Bericht zur Videostudie „Lehr-Lern-Prozesse im Physikunterricht“*. Kiel: IPN.
- Seidel, T., Prenzel, M. & Kobarg, M. (Hrsg.). (2005). *How to run a video study. Technical report of the IPN Video Study*. Münster: Waxmann.
- Seidel, T., Prenzel, M., Rimmel, R., Dalehefte, I. M. & Herweg, C. (2006). Blicke auf den Physikunterricht. Ergebnisse der IPN Videostudie. *Zeitschrift für Pädagogik*, 52 (6), 799–821.
- Seitz, K. (2003). Der schiefe Turm von PISA – nur die Spitze eines Eisbergs? Der PISA-Schock und der weltweite Umbau der Bildungssysteme. *Zeitschrift für internationale Bildungsforschung und Entwicklungspädagogik*, 26 (1), 2–8.
- Sewerin, H. (1979). *Mathematische Schülerwettbewerbe: Beschreibungen, Analysen, Aufgaben, Trainingsmethoden; mit Ergebnissen einer Umfrage zum Bundeswettbewerb Mathematik*. München: Manz.
- Sherin, B. L. (1996). *The Symbolic Basis of Physical Intuition: A Study of Two Symbol Systems in Physics Instruction* (Dissertation). University of California, Berkeley.

- Sherin, B. L. (2001). How Students Understand Physics Equations. *Cognition and Instruction*, 19 (4), 479–541.
- Simon, A. (2014). *Entwicklung eines Kategoriensystems zur Erfassung mathematischer Kompetenzen in ingenieurwissenschaftlichen Kontexten: Qualitative Inhaltsanalyse von Videodaten im Rahmen der Pilotierungsphase des Projekts KoM@ING* (Masterarbeit). Ruhr-Universität, Bochum.
- Söhling, A.-C. (2014). Problemlösen? Wildes Probieren und Irrwege als Basis des Erfolgs. In J. Roth & J. Ames (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1143–1146). Münster: WTM.
- Spieß, M. (2010). Der Umgang mit fehlenden Werten. In C. Wolf & H. Best (Hrsg.), *Handbuch der sozialwissenschaftlichen Datenanalyse* (S. 117–142). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Stanic, G. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. Charles & E. Silver (Hrsg.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (S. 1–22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Statistisches Bundesamt. (2014). *Bildung und Kultur. Studierende an Hochschulen. Wintersemester 2013/14*. Wiesbaden. Zugriff am 06.12.2016 auf <https://www.destatis.de/DE/Publikationen/Thematisch/BildungForschungKultur/Hochschulen/StudierendeHochschulenEndg2110410147004.pdf>
- Stigler, J. W., Gallimore, R. & Hiebert, J. (2000). Using Video Surveys to Compare Classroom and Teaching Across Cultures: Examples and Lessons From the TIMSS Video Studies. *Educational Psychologist*, 35 (2), 87–100.
- Stigler, J. W. & Hiebert, J. (1997). Understanding and Improving Classroom Mathematics Instruction: An Overview of the TIMSS Video Study. *The Phi Delta Kappan*, 79 (1), 14–21.
- Tall, D. (2004). Building Theories: The Three Worlds of Mathematics. *For Learning of Mathematics*, 24 (1), 29–32.
- Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20 (2), 5–24.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and Concept definition in Mathe-

- mathematics with particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151–169.
- Tannen, D. (1993). What's in a frame? Surface evidence for underlying expectations. In D. Tannen (Hrsg.), *Framing in discourse* (S. 14–56). New York, NY: Oxford University Press.
- Taraban, R., Craig, C. & Anderson, E. E. (2011). Using Paper-and-Pencil Solutions to Assess Problem Solving Skill. *Journal of Engineering Education*, 100 (3), 498–519.
- Tietze, U.-P., Klika, M. & Wolpers, H. (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Fachdidaktische Grundfragen - Didaktik der Analysis* (2. Aufl.). Braunschweig: Vieweg.
- Tipler, P. A., Mosca, G. & Wagner, J. (2015). *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Törner, G., Schoenfeld, A. H. & Reiss, K. (2007). Problem solving around the world: summing up the state of art. *ZDM*, 39 (5-6), 393.
- Tuminaro, J. (2004). *A cognitive framework for analyzing and describing introductory students' use and understanding of mathematics in physics* (Dissertation). University of Maryland.
- Tuminaro, J. & Redish, E. F. (2007). Elements of a cognitive model of physics problem solving: Epistemic games. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research*, 3 (2), 1–22.
- Ufer, S. (2009). Der Übergang von der Primarstufe in die Sekundarstufe. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium* (S. 87–103). Münster: Waxmann.
- Uhden, O. (2012). *Mathematisches Denken im Physikunterricht. Theorieentwicklung und Problemanalyse*. Berlin: Logos Verlag.
- Urban, D. & Mayerl, J. (2008). *Regressionsanalyse: Theorie, Technik und Anwendung*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.
- Vaismoradi, M., Turunen, H. & Bondas, T. (2013). Content analysis and thematic analysis: Implications for conducting a qualitative descriptive study. *Nursing and Health Sciences*, 15 (3), 398–405.
- VERA-Projektgruppe am Zentrum für Empirische Pädagogische Forschung. (2014). *VERA im Blick: Vertiefende Informationen zu den Vergleichsarbeiten, zur Vorbereitung, zum fairen Ver-*

- gleich, zur Diagnosegenauigkeit und zur pädagogischen Nutzung. Universität Koblenz-Landau. Zugriff am 27.08.2016 auf [http://vera-web.uni-landau.de/verapub/fileadmin/downloads/VERA3\\_oeffentlich/VERA3\\_inhaltliche\\_Handreichung.pdf](http://vera-web.uni-landau.de/verapub/fileadmin/downloads/VERA3_oeffentlich/VERA3_inhaltliche_Handreichung.pdf)
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14 (3), 293–305.
- Vollrath, H. J. (1992). Zur Rolle des Begriffs im Problemlöseprozeß des Beweizens. *Mathematische Semesterberichte*, 39 (2), 127–136.
- Walther, G., Selter, C. & Neubrand, J. (2012). Die Bildungsstandards Mathematik. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen & Granzer, Dietlinde, Köller, Olaf (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 16–41). Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Walther, G., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Granzer, Dietlinde, Köller, Olaf (Hrsg.). (2012). *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Weidle, R. & Wagner, A. C. (1982). Die Methode des Lauten Denkens. In G. L. Huber & H. Mandl (Hrsg.), *Verbale Daten. Eine Einführung in die Grundlagen und Methoden der Erhebung und Auswertung* (S. 81–103). Weinheim Basel: Beltz.
- Weinert, F. E. (1999). *Konzepte der Kompetenz*. Paris: OECD.
- Weinert, F. E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in der Schule – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in der Schule* (S. 17–31). Weinheim: Beltz.
- Weinert, S. (2007). Kompetenzentwicklung und Kompetenzstruktur im Vorschulalter. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 10 (Sonderheft 8), 89–106.
- Welzer, H. (1993). *Transitionen: Zur Sozialpsychologie biographischer Wandlungsprozesse*. Tübingen: Edition diskord.
- Wigner, E. P. (1960). The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13 (1), 1–14.
- Wilhelm, O. & Nickolaus, R. (2013). Was grenzt das Kompetenzkonzept von etablierten Kategorien wie Fähigkeit, Fertigkeit oder Intelli-

- genz ab? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 16 (1), 23–26. doi: 10.1007/s11618-013-0380-6
- Wilhelm, T. (2005). *Konzeption und Evaluation eines Kinematik-Dynamik-Lehrgangs zur Veränderung von Schülervorstellungen mit Hilfe dynamisch ikonischer Repräsentationen und graphischer Modellbildung* (Unveröffentlichte Dissertation). Bayerische Julius-Maximilians-Universität Würzburg, Würzburg.
- Wilson, J. W., Fernandez, M. L. & Hadaway, N. (1993). Mathematical Problem Solving. In P. S. Wilson (Hrsg.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics*. New York: MacMillan.
- Wilson, M. (2003). On Choosing a Model for Measuring. *Methods of Psychological Research Online*, 8 (3), 1–22.
- Wilson, M. (2005). *Constructing measures: An item response modeling approach*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates and Taylor & Francis.
- Winter, H. (1995). Mathematik und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 61, 37–46.
- Winter, M., Rathmann, A., Trümpler, D. & Falkenhagen, T. (2012). *Entwicklungen im deutschen Schulsystem. Analysen zu Studienangebot Studienplatzvergabe Studienwerbung und Studienkapazität*. Halle-Wittenberg: Institut für Hochschulforschung.
- Wirtz, M. (2004). Über das Problem fehlender Werte: Wie der Einfluss fehlender Informationen auf Analyseergebnisse entdeckt und reduziert werden kann. *Rehabilitation*, 43 (2), 109–155.
- Woods, D. R. (2000). An Evidence-Based Strategy for Problem Solving. *Journal of Engineering Education*, 89 (3), 443–459.
- Woods, D. R., Hrymak, A. N., Marshall, R. R., Wood, P. E., Crowe, C. M., Hoffman, T. W., ... Bouchard, C. K. (1997). Developing Problem Solving Skills: The McMaster Problem Solving Program. *Journal of Engineering Education*, 86 (2), 75–91.
- Yimer, A. & Ellerton, N. F. (2010). A five-phase model for mathematical problem solving: Identifying synergies in pre-service-teachers' metacognitive and cognitive actions. *ZDM*, 42 (2), 245–261.
- Zimmermann, B. (2003). Darstellungswechsel als eine wichtige Methode zur

Lösung von Problemen. *Der Mathematikunterricht*, 49 (6), 6–15.

Zlatkin-Troitschanskaia, O. & Kuhn, C. (2010). *Messung akademisch vermittelter Fertigkeiten und Kenntnisse von Studierenden bzw. Hochschulabsolventen: Analyse zum Forschungsstand*. Mainz: Johannes Gutenberg-Universität Mainz.

Zlatkin-Troitschanskaia, O., Pant, H. A., Kuhn, C., Toepper, M. & Lautenbach, C. (2016). *Messung akademisch vermittelter Fertigkeiten und Kenntnisse von Studierenden und Hochschulabsolventen. Ein Überblick zum nationalen und internationalen Forschungsstand*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

## **Erklärung**

Hiermit erkläre ich, die Dissertation selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfen und Hilfsmittel angefertigt zu haben. Ich habe mich nicht anderwärts um einen Doktorgrad in dem Promotionsfach beworben und besitze keinen entsprechenden Doktorgrad.

Berlin, 21. November 2017

Unterschrift (Malte Lehmann)