УДК 517.956.35

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОДНОРОДНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Бозиев О.Л.
Институт информатики и проблем регионального управления
Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик

Поступила в редакцию 04.02.2017, после переработки 31.03.2017.

Предлагается метод решения смешанной задачи с однородными начальными условиями для нагруженного гиперболического уравнения, содержащего интеграл натуральной степени модуля неизвестной функции. Приближенное решение ищется с помощью априорных оценок решения поставленной задачи. Получена формула, выражающая это решение через решение обыкновенного дифференциального уравнения, ассоциированного с исходным нагруженным уравнением.

Ключевые слова: нелинейные уравнения в частных производных, нагруженные уравнения в частных производных, априорные оценки, приближенные решения.

Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 49–58.

Введение

Нелинейное уравнение вида

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + b\,|u|^p\, u_t = 0, \tag{1}$$

с положительными параметрами a и b, натуральным p и начально-краевыми условиями различного вида в прямоугольной области исследовалось в [1] и многих других работах в качестве модели некоторых нестационарных процессов. Его модификация

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + b u_t \int_{\Omega} |u|^p\, dx = 0 \tag{2}$$

является нагруженным уравнением и может рассматриваться как аппроксимирующее по отношению к (1).

Уравнения вида (2) и его обобщения рассмотрены, например, в [2, 3]. В этих и других работах доказаны теоремы существования и единственности обобщенных решений соответствующих краевых задач.

Переход от (1) к (2) приводит к «ослаблению» нелинейности исходного уравнения без значительного искажения сути моделируемого процесса. В то же время это позволяет находить приближенное решения уравнения (1) путем нахождения точного или приближенного решения начально-краевой задачи для нагруженного уравнения (2), которое затем принимается за приближенное решение исходного нелинейного уравнения.

С применением такого подхода в [4,5] получены формулы общих членов последовательностей приближенных решений начально-краевых задач для некоторых нагруженных уравнений, аппроксимирующих исходные нелинейные уравнения.

В [6] предложен способ нахождения приближенного решения первой смешанной задачи с однородными граничными условиями для уравнения (2), использующий априорные оценки решения поставленной задачи.

В данной работе для уравнения (2) этим же способом ищется решение смешанной задачи с однородными начальными условиями.

1. Априорные оценки

В области $Q = \{(x,t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ при натуральном $p > 3$ рассмотрим уравнение (2). Требуется найти интегрируемую функцию $u(x,t) \in C^{2,2}(\bar{Q})$, удовлетворяющую уравнению (2) в области Q, а также условиям

$$u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{3}$$

$$u(0,t) = \psi_1(t), u(l,t) = \psi_2(t), 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$

с функциями $\psi_1(t), \psi_2(t) \in C^1(0,T)$.

Установим некоторые априорные оценки решения задачи (2)–(4), необходимые для нахождения ее приближенного решения.

Умножая (2) скалярно на u_t с помощью стандартных для подобных случаев преобразований получаем следующие неравенства, выполняющиеся для всех значений $t \in [0,T]$:

$$\int_\Omega \left(u_t^2 + a^2 u_x^2\right) dx \leqslant C_1, \quad \|u_t\|^2_{2,\Omega} \leqslant C_1, \quad \|u_x\|^2_{2,\Omega} \leqslant \frac{C_1}{a^2}. \tag{5}$$

Здесь и далее равенством

$$\|v\|^p_{p,\Omega} = \int_\Omega |v|^p \, dx$$

выражается норма функции $v(t)$ в пространстве $L_p(\Omega)$, $\Omega = [0,l]$.

Теорема 1. *Пусть функция $u \in L_{p-2}(\Omega)$ является решением задачи (2)–(4), а неубывающие функции $\psi_1(t), \psi_2(t) \in L_{p-1}[0,T]$. Тогда функция $\|u\|^p_{p,\Omega}$ ограничена константой, зависящей только от t.*

Доказательство. Умножим уравнение (2) скалярно на функцию u^{p-1}

$$(u_{tt}, u^{p-1}) - a^2(u_{xx}, u^{p-1}) + b\int_\Omega |u|^p \, dx (u_t, u^{p-1}) = 0. \tag{6}$$

Преобразуем по отдельности каждое слагаемое:

$$(u_{tt}, u^{p-1}) = \frac{1}{p}\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega u^p dx - (p-1)\int_\Omega u_t^2 u^{p-2} dx,$$
$$(u_{xx}, u^{p-1}) = u_x(l,t)\psi_2^{p-1}(t) - u_x(0,t)\psi_1^{p-1}(t) - (p-1)\int_\Omega u_x^2 u^{p-2} dx,$$
$$\int_\Omega |u|^p\,dx (u_t, u^{p-1}) = \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx \cdot \frac{d}{dt}\int_\Omega u^p dx.$$

Возвращаясь к (6) и умножая его на $\mathrm{sgn}^p u$, приходим к уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega |u|^p\,dx + \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^2 = p(p-1)\int_\Omega |u|^{p-2}\left(u_t^2 - a^2u_x^2\right)dx + F_1(t),$$
$$F_1(t) = pa^2\left(u_x(l,t)\psi_2^{p-1}(t) - u_x(0,t)\psi_1^{p-1}(t)\right)\mathrm{sgn}^p u,$$

после интегрирования которого по t с учетом однородности начальных условий получаем

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^p\,dx + \frac{b}{2}\left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^2 =$$
$$= p(p-1)\int_0^t\int_\Omega |u|^{p-2}\left(u_t^2 - a^2u_x^2\right)dxdt + \int_0^t F_1(t)dt. \quad (7)$$

К первому слагаемому в правой части (7) применим неравенство Гёльдера:

$$\int_0^t\int_\Omega |u|^{p-2}\,(u_t^2 - a^2u_x^2)dxdt \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_0^t\left|\int_\Omega |u|^{p-2}\,dx\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t\left|\int_\Omega \left|u_t^2 - a^2u_x^2\right|dx\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сомножители правой части полученного неравенства ограничены: первый в силу $u \in L_{p-2}(\Omega)$:

$$\left(\int_0^t\left|\int_\Omega |u|^{p-2}\,dx\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^t |C_2|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{t}C_2,$$

а второй — в силу первой из оценок (5):

$$\left(\int_0^t\left|\int_\Omega \left|u_t^2 - a^2u_x^2\right|dx\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^t\left|\int_\Omega \left|u_t^2 + a^2u_x^2\right|dx\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{t}C_1.$$

Следовательно,

$$\int_0^t\int_\Omega |u|^{p-2}\,(u_t^2 - a^2u_x^2)dxdt \leqslant C_1C_2t,$$

что позволяет перейти от уравнения (7) к неравенству

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^p\,dx + \frac{b}{2}\left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^2 \leqslant p(p-1)C_1C_2t + \int_0^t |F_1(t)|\,dt. \qquad (8)$$

Используя свойства функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, можно убедиться в том, что

$$\int_0^t |F_1(t)|\,dt \leqslant pa^2\left(\int_0^t |u_x(l,t)|\left|\psi_2^{p-1}(t)\right|dt + \int_0^t |u_x(0,t)|\left|\psi_1^{p-1}(t)\right|dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant pa^2\left(\int_0^T |\psi_2(t)|^{p-1}\,dt + \int_0^T |\psi_1(t)|^{p-1}\,dt\right)C_3,$$

где

$$C_3 = \max\left\{\max_{t\in[0,T]}|u_x(l,t)|\,,\ \max_{t\in[0,T]}|u_x(0,t)|\right\}.$$

С учетом этого проинтегрируем (8) и получим соотношение

$$\int_\Omega |u|^p\,dx + \frac{b}{2}\int_0^t\left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^2 dt \leqslant \int_\Omega |u(x,0)|^p\,dx + F(t), \qquad (9)$$

в котором первое слагаемое правой части равно нулю в силу первого условия (3), а

$$F(t) = \frac{1}{2}p(p-1)C_1C_2t^2 + pa^2\left(\int_0^T |\psi_2(t)|^{p-1}\,dt + \int_0^T |\psi_1(t)|^{p-1}\,dt\right)C_3t. \qquad (10)$$

Заметим, что $F(t) \leqslant F(T)$, в силу чего перейдем от (9) к неравенству

$$\|u\|_{2,\Omega}^p \leqslant \frac{b}{2}\int_0^t\left(\|u\|_{2,\Omega}^p\right)^2 dt + F(T).$$

Применяя к нему следствие из леммы Бихари [7], устанавливаем оценку

$$\|u\|_{p,\Omega}^p \leqslant K(t) \qquad (11)$$

с правой частью

$$K(t) = \frac{2F(T)}{2 - F(T)bt}, \qquad (12)$$

выполняющуюся для всех $t \in [0,T]$, $T < 2/(bF(T))$.

Таким образом, теорема доказана. □

2. Приближенное решение

Для нахождения приближенного решения задачи (2)–(4) перейдем от (2) к ассоциированному с ним обыкновенному дифференциальному уравнению посредством процедуры, описанной в [6]. Она заключается в интегрировании (2) по пространственной переменной, применении теоремы о среднем значении интеграла, повторном интегрировании по x и использования граничных условий (4) для определения произвольных функций, возникающих при интегрировании уравнения. В итоге приходим к соотношению

$$u(x,t) = \frac{x}{2a^2}\left(\frac{x}{l}-1\right)\left(\bar{u}'' + b\bar{u}'\,\|u\|^p_{p,\Omega}\right) + x\frac{\psi_2-\psi_1}{l} + \psi_1, \tag{13}$$

в котором

$$\bar{u}(t) = \int_\Omega u dx. \tag{14}$$

Применим преобразование (14) к функции (13) для того, чтобы перейти к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\bar{u}'' + b\,\|u\|^p_{p,\Omega}\,\bar{u}' + \frac{12a^2}{l^2}\bar{u} = \frac{6a^2}{l}(\psi_1+\psi_2). \tag{15}$$

Начальные условия, необходимые для его интегрирования, получаются из условий (3):

$$\bar{u}(0) = \int_\Omega u(x,0)dx = 0, \quad \bar{u}'(0) = \int_\Omega u_t(x,0)dx = 0. \tag{16}$$

Для решения полученной задачи выберем в (11) верхнюю границу неравенства, что позволяет сделать замену

$$\|u\|^p_{p,\Omega} = K(t), \tag{17}$$

приводящую (15) к линейному уравнению

$$\bar{u}'' + bK(t)\bar{u}' + \frac{12a^2}{l^2}\bar{u} = F_2(t) \tag{18}$$

с правой частью

$$F_2(t) = \frac{6a^2}{l}(\psi_1+\psi_2).$$

Как известно, единственное решение задачи (18), (16) существует при $t \in (0,T)$ для непрерывных функций $K(t)$ и $F_2(t)$. После его подстановки вместе с (17) в формулу (13) будет найдена функция

$$u(x,t) = \frac{3x}{l}\left(\frac{x}{l}-1\right)\left(\psi_1+\psi_2-\frac{2}{l}\bar{u}\right) + x\frac{\psi_2-\psi_1}{l} + \psi_1, \tag{19}$$

которую примем за приближенное решение как задачи (2)–(4), так и аппроксимируемой ею задачи (1), (3), (4).

3. Пример

Будем искать решение задачи (2)–(4), рассматривая (2) как аппроксимирующие уравнение для (1). Уравнение вида (1) моделирует, в частности, некоторые нестационарные гидродинамические процессы в трубах, при этом u — скорость течения жидкости, a — скорость звука в жидкости, для воды $a \approx 1450$ м/с, b зависит от физических характеристик трубы и в некоторых случаях может быть принята равной $1/3$.

Пусть $p = 3$. Положим $l = 1$ и выберем граничные условия (4) в виде $\psi_1(t) = \psi_2(t) = t$, тогда в (15) правая часть $F_2(t) = 12a^2 t$, а величина $F(T)$, задаваемая формулой (10), определяется как

$$F(T) = 3C_1C_2T^2 + 2a^2C_3T^4.$$

При этом функция (19) запишется как

$$u(x,t) = 6x\,(x-1)\,(t-\bar{u}) + t. \tag{20}$$

Перейдем к определению постоянных, входящих в эти выражения. В силу того, что $\Omega = [0,1]$, можно принять $C_1 = C_2 = 1$. Из (12) следует условие положительности функции $K(t)$: $bF(T)t < 2$, т.е.

$$t < \frac{2}{b\,(3T^2 + 2a^2C_3T^4)}.$$

Учитывая, что $t \leqslant T$, перейдем к неравенству

$$C_3 \geqslant \frac{2 - 3T^2bT}{2a^2bTT^4},$$

из которого в силу неотрицательности C_3 следует, что $T^3 \leqslant 2/(3b)$. Примем $T^3 = 1/(3b)$, тогда можно положить

$$C_3 = \frac{3\sqrt[3]{9b^2}}{2a^2}.$$

При выбранном выше значении b получаем $T = 1$. Находя последовательно C_3, $F(T)$, $K(t)$ и возвращаясь к (18), приходим к задаче

$$\bar{u}'' + \frac{2}{1-t}\bar{u}' + 12a^2\bar{u} = 12a^2 t,$$
$$\bar{u}(0) = 0, \quad \bar{u}'(0) = 0.$$

Ее приближенное решение с учетом только значимых слагаемых записывается в виде

$$\bar{u}(t) \approx t + (t-1)\left(0,696\cos(2900\sqrt{3}t) - \cos(2900\sqrt{3}(t-1)) - \sin(2900\sqrt{3}(t-1))\right).$$

Подстановка найденной функции в (20) дает приближенное решение задачи (2)–(4):

$$u(x,t) \approx 6x\,(x-1)\left[\cos\left(2900\sqrt{3}(t-1)\right) + \sin\left(2900\sqrt{3}(t-1)\right) - \right.$$
$$\left. - \,0,696(t-1)\cos\left(2900\sqrt{3}t\right)\right] + t. \tag{21}$$

Так как уравнение (2) является аппроксимирующим по отношению к уравнению (1) и его интегрирование проводится при тех же условиях (3), (4), что и для уравнения (1), то функцию (21) будем считать приближенным решением задачи (1), (3), (4).

Заключение

В работе предложен приближенно-аналитический метод нахождения решения задачи (2)–(4), состоящий, во-первых, в переходе от исходного нагруженного уравнения (2) к ассоциированному с ним обыкновенному дифференциальному уравнению (15), а во-вторых, в линеаризации (15) с помощью априорной оценки решения исходной задачи вида (11). Полученное приближенное решение выражается аналитически функцией (21). Данный метод применим к нагруженным дифференциальным уравнениям в частных производных, содержащим интеграл по пространственной переменной от p-й степени неизвестной функции при некоторых допущениях относительно p. Основную сложность в реализации метода представляют процедуры установления априорной оценки (11) и подбора констант, входящих в это и другие необходимые неравенства.

Список литературы

[1] Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М: Едиториал УРСС, 2010. 586 с.

[2] Medeiros L.A. On the weak solutions of nonlinear partial differential equations // Anais da Academia Brasileira de Ciencias. 1981. Vol. 53, № 1. Pp. 13–15.

[3] Lourêdo A.T., Ferreira de Araújo M.A., Miranda M. M. On a nonlinear wave equation with boundary damping // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2014. Vol. 37, № 9. Pp. 1278–1302.

[4] Бозиев О.Л. Решение начально-краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения с помощью двойной редукции к нагруженным уравнениям // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. 2014. № 4(60). С. 7–12.

[5] Бозиев О.Л. Применение нагруженных уравнений к приближенному решению дифференциальных уравнений в частных производных со степенной нелинейностью // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2015. № 1. С. 127–136.

[6] Бозиев О.Л. Приближенное решение нагруженного гиперболического уравнения с однородными краевыми условиями // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2016. Т. 8, № 2. С. 14–18.

[7] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.

Библиографическая ссылка

Бозиев О.Л. Приближенное решение нагруженного гиперболического уравнения с однородными начальными условиями // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 49–58.

Сведения об авторах

1. **Бозиев Олег Людинович**
старший научный сотрудник отдела Автоматизации и информатизации региональных систем управления Института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН.

Россия, 360000, г. Нальчик, ул. И. Арманд, 37А. E-mail: boziev@yandex.ru.

AN APPROXIMATE SOLUTION OF LOADED HYPERBOLIC EQUATION WITH HOMOGENIOS INITIAL CONDITIONS

Boziev Oleg Ludinovich
Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of KBSC,
Russian Academy of Sciences
Russia, 360000, Nalchik, I. Armand str., 37A.
E-mail: boziev@yandex.ru

Received 04.02.2017, revised 31.03.2017.

The article offers a method for solving a mixed problem with homogeneous initial conditions for a loaded hyperbolic equation with integral natural degree module of unknown function. An approximate solution is sought by means of a priori estimates of the solution of the problem. We obtained a formula expressing the solution through the solution of the ordinary differential equation associated with the source loaded equation.

Keywords: nonlinear partial differential equations, loaded partial differential equations, a priori estimates, approximate solutions.

Bibliographic citation

Boziev O.L. An approximate solution of loaded hyperbolic equation with homogenios initial conditions. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2017, no. 2, pp. 49–58. (in Russian)

References

[1] Lions J.L. *Nekotorye Metody Reshenia Nelineinyh Kraevyh Zadach.* [Some Methods for Solving of Nonlinear Boundary Value Problems]. Moscow, Editorial URSS Publ., 2010. 586 p. (in Russian)

[2] Medeiros L.A. On the weak solutions of nonlinear partial differential equations. *Anais da Academia Brasileira de Ciencias*, 1981, vol. 53(1), pp. 13–15.

[3] Lourêdo A.T., Ferreira de Araújo M.A., Miranda M.M. On a nonlinear wave equation with boundary damping. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2014, vol. 37(9), pp. 1278–1302.

[4] Boziev O.L. Solving an initial-boundary value problem for the nonlinear hyperbolic equation using a double reduction to the loaded equations. *Izvestiya Kabardino-Balkarskogo Nauchnogo Tsentra RAN*, 2014, no. 4, pp. 7–13. (in Russian)

[5] Boziev O.L. Application of loaded equations to approximate solutions of partial differential equations with the power nonlinearity. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics], 2015, no. 1, pp. 127–136. (in Russian)

[6] Boziev O.L. An approximate solution of loaded hyperbolic equation with homogenios boundary conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematics. Mechanics. Phisics*, 2016, vol. 8(2), pp. 14–18. (in Russian)

[7] Demidovich B.P. *Lektsii po Matematicheskoy Teorii Ustoichivosti* [Lectures on Mathematical Theory of Stability]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 472 pp. (in Russian)