

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**  
**FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL**  
**DEPARTAMENTO DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA**  
**SECCIÓN DE MATEMÁTICA**



**TRABAJO DE GRADO:**

"TRANSFORMACIONES CONFORMES Y ALGUNAS DE SUS APLICACIONES"

**PRESENTADO POR:**

CANALES BENÍTEZ, ELMER ALEXANDER  
TORRES VELÁSQUEZ, KEVIN ARMANDO  
VÁSQUEZ JIMÉNEZ, EDWIN WILFREDO

**PARA OPTAR AL GRADO DE:**  
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

**DOCENTE DIRECTOR:**

LICDA. SONIA DEL CARMEN MARTÍNEZ DE LÓPEZ

**CIUDAD UNIVERSITARIA ORIENTAL, FEBRERO DE 2017**

**SAN MIGUEL**

**EL SALVADOR**

**CENTROAMÉRICA**

**UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR**

**AUTORIDADES**

MSc. ROGER ARMANDO ARIAS

**RECTOR**

DR. MANUEL DE JESÚS JOYA

**VICE-RECTOR ACADÉMICO**

ING. CARLOS ARMANDO VILLALTA

**VICE-RECTOR ADMINISTRATIVO**

DRA. ANA LETICIA ZAVALA DE AMAYA

**SECRETARIA GENERAL**

LICDA. NORA BEATRIZ MELÉNDEZ

**FISCAL GENERAL**

**FACULTAD MULTIDISCIPLINARIA ORIENTAL**

**AUTORIDADES**

ING. JOAQUÍN ORLANDO MACHUCA

**DECANO**

LIC. CARLOS ALEXANDER DÍAZ

**VICE-DECANO**

LIC. JORGE ALBERTO ORTEZ HERNÁNDEZ

**SECRETARIO**

## **Agradecimientos**

- A Dios Todopoderoso por darnos salud, confianza y la sabiduría para poder vencer las adversidades surgidas en nuestra carrera.
- A nuestros familiares, amigos por sus consejos en el transcurso de la carrera para alcanzar este triunfo.
- A nuestra asesora Licda. Sonia del Carmen Martínez de López por haber participado en este proceso y colaborando con su experiencia y dedicación para culminar con éxito nuestro trabajo de tesis.
- A el Lic. Tobías Humberto Martínez Lovo por sus sugerencias sobre nuestro trabajo de investigación.
- A todos los maestros que participaron en nuestra formación académica en todo el desarrollo de nuestra carrera y en nuestro trabajo de investigación.

**Elmer Alexander Canales Benítez**

**Kevin Armando Torres Velásquez**

**Edwin Wilfredo Vásquez Jiménez**

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>ix</b>
<b>Planteamiento del Problema</b>	<b>xi</b>
<b>Justificación</b>	<b>xii</b>
<b>Objetivos</b>	<b>xiii</b>
Objetivo General . . . . .	xiii
Objetivos Específicos . . . . .	xiii
<b>1. Preliminares</b>	<b>14</b>
1.1. Números Complejos . . . . .	14
1.1.1. El Sistema de los Números Complejos . . . . .	15
1.1.2. Operaciones Fundamentales con Números Complejos . . . . .	19
1.1.3. Representación Gráfica y Módulo de un Número Complejo . . . . .	21
1.1.4. Forma Polar . . . . .	24
1.1.5. Fórmula de Euler y Forma Exponencial . . . . .	26

1.1.6.	La Topología de los Números Complejos. . . . .	31
1.2.	Funciones Complejas . . . . .	33
1.2.1.	Funciones de una Variable Compleja . . . . .	33
1.2.2.	Curvas Paramétricas en el Plano Complejo . . . . .	39
1.2.3.	Límites y Continuidad . . . . .	42
1.2.4.	Límites y el Punto del Infinito . . . . .	49
1.3.	Funciones Analíticas y Armónicas . . . . .	55
1.3.1.	Funciones Diferenciables y Analíticas . . . . .	55
1.3.2.	Las Ecuaciones de Cauchy-Riemann . . . . .	59
1.3.3.	Funciones Armónicas . . . . .	64
1.4.	Funciones Elementales . . . . .	66
1.4.1.	La Función Exponencial Compleja . . . . .	67
1.4.2.	La Función Logaritmo Complejo . . . . .	71
1.4.3.	Exponentes Complejos . . . . .	77
1.4.4.	Funciones Trigonométricas e Hiperbólicas . . . . .	81
1.4.5.	Funciones Trigonométricas e Hiperbólicas Inversas . . . . .	87
1.5.	Sucesiones y Series Complejas . . . . .	89
1.5.1.	Sucesiones . . . . .	89
1.5.2.	Series . . . . .	90
1.5.3.	Series de Potencias . . . . .	93
1.5.4.	Serie de Taylor . . . . .	95

<b>2. Transformaciones por Funciones Elementales</b>	<b>98</b>
2.1. Transformaciones Afines . . . . .	100
2.2. Transformación Inversión . . . . .	123
2.3. Transformaciones de Möbius . . . . .	139
2.4. Punto Fijo y Razón Doble . . . . .	154
2.5. Transformaciones del Semiplano Superior . . . . .	166
2.6. La Transformación $w = e^z$ y los Logaritmos . . . . .	176
2.7. La transformación $w = \text{sen}(z)$ . . . . .	187
2.8. La Transformación $w = z^2$ . . . . .	198
<b>3. Transformaciones Conformes y Algunas de sus Aplicaciones</b>	<b>208</b>
3.1. Transformaciones Conformes . . . . .	208
3.1.1. Transformaciones Conformes . . . . .	209
3.1.2. Ángulos entre Curvas . . . . .	212
3.1.3. Funciones Analíticas . . . . .	216
3.1.4. Puntos Críticos . . . . .	218
3.1.5. Transformaciones Conformes Usando Tablas . . . . .	223
3.2. Aplicaciones de las Transformaciones Conformes . . . . .	226
3.2.1. Problema de Dirichlet . . . . .	236
3.2.2. Funciones Armónicas y el Problema de Dirichlet . . . . .	252
3.2.3. Problema de Neumann . . . . .	274
3.2.4. Flujo de Fluidos . . . . .	282

<b>Apéndice A. Tabla de Transformaciones Conformes</b>	<b>287</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>298</b>



## Introducción

La transformación conforme es un tópico del análisis complejo con poco estudio a nivel universitario en nuestro país, lo cual impide que tengamos conocimientos sólidos sobre las principales transformaciones en el plano complejo que cumplen con ser conformes. Además la teoría de transformación conforme no es tan fácil de manejar, pues es necesario del dominio avanzado del álgebra de números complejos, funciones de variable compleja, funciones analíticas, funciones armónicas y por supuesto de derivación e integraciones de funciones de variable compleja.

En este trabajo se estudiará la geometría de las transformaciones conformes, que es tan interesante por sí misma como por la magnífica visión geométrica que proporciona. Además las transformaciones conformes son de gran utilidad para resolver problemas de la ingeniería o la física que pueden ser expresados en términos de funciones de variable compleja, pero que presentan severas dificultades en su geometría. Escogiendo una transformación adecuada, el problema puede simplificarse transformando la región en la que se plantea el problema en otra de geometría más accesible.

Así que presentaremos las definiciones y propiedades de la transformación

conforme, la transformación de Möbius, algunas funciones elementales como transformaciones conformes y algunas de las aplicaciones de la transformación conforme. Por último brindaremos una bibliografía en la cual se encuentran libros muy interesantes que contienen teoría sobre la transformación conforme.

## Planteamiento del Problema

En las universidades del país y especialmente en la Universidad de El Salvador, Facultad Multidisciplinaria Oriental no se tiene suficientes trabajos de investigación escrito sobre la transformación conforme, lo cual hace necesario que en esta facultad se realicen estudios en esta rama del análisis complejo que sirvan de base para posteriores estudios académicos y que puedan solucionar problemas de escasez de información sobre la aplicación conforme o que permitan facilitar el desarrollo de futuras tesis de investigación que requieran del conocimiento previo de este tópico en específico.

De no existir suficiente información sobre la aplicación conforme, se podría atrasar el desarrollo de tesis que necesiten un conocimiento subyacente en esta rama del análisis complejo, lo que dificultaría y haría más lento el proceso de desarrollo de futuros trabajos académicos orientados en esta área del análisis complejo.

## Justificación

El propósito del presente trabajo es ampliar los conocimientos adquiridos sobre Análisis Complejo a lo largo de la carrera de Licenciatura en Matemáticas y además ser una guía a los estudiantes para el desarrollo de sus conocimientos en dicha área, en particular en el tema que estudiaremos denominado: "*Transformaciones Conformes y Algunas de sus Aplicaciones*" desarrollando de manera contundente, detallada y precisa la teoría de dicho tema, así como también dar a conocer la importancia y utilidad de este tópico de la matemática mediante sus aplicaciones, de igual forma servir de apoyo a futuras investigaciones en esta área. Por lo que concluimos que aparte de ser un tema que difícilmente se alcanza a abordar en la carrera, es muy interesante y de mucha utilidad e interés para nosotros.

# Objetivos

## Objetivo General

- Dar a conocer la base teórica y algunas aplicaciones de las transformaciones conformes en el área de Análisis Complejo.

## Objetivos Específicos:

- Desarrollar de manera factible y minuciosa los conceptos, teoremas y lemas sobre transformaciones conformes.
- Comprender los diferentes tipos de transformaciones en Análisis Complejo que son conformes.
- Presentar algunas aplicaciones sobre transformaciones conformes.

---

# Capítulo 1

---

---

## Preliminares

### 1.1. Números Complejos

Indudablemente, en cursos previos de matemáticas aparecen números complejos. Al aprender a resolver una ecuación cuadrática  $ax^2 + bx + c = 0$  por medio de la fórmula cuadrática, se observa que las raíces de la ecuación no son reales, sino complejas, cuando el discriminante  $b^2 - 4ac < 0$ . Por ejemplo, ecuaciones sencillas como  $x^2 + 5 = 0$  y  $x^2 + x + 1 = 0$  no tienen soluciones en los números reales.

Fueron más de 200 años, más o menos el tiempo que tomó a los números complejos ganar cierta respetabilidad en la comunidad matemática, el símbolo  $i$  se utilizaba originalmente como un disfraz para el engorroso símbolo  $\sqrt{-1}$ . Ahora simplemente se dice que  $i$  es **la unidad imaginaria** y se define por medio de la propiedad  $i^2 = -1$ . Utilizando la unidad imaginaria se construye un número complejo a partir de dos números reales.

### 1.1.1. El Sistema de los Números Complejos

Un **número complejo** es un par ordenado de números reales, y designamos por  $\mathbb{C}$  al conjunto de todos los números complejos. Es decir,

$$\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

En otras palabras, si  $z$  es un número complejo, debe ser  $z = (a, b)$  en donde  $a$  y  $b$  son ambos números reales;  $a$  se denomina la **parte real** de  $z$  (denotada mediante  $\text{Re}(z)$ ), y  $b$  se denomina la **parte imaginaria** de  $z$  (denotada mediante  $\text{Im}(z)$ ).

Se dice que dos números complejos son **iguales** si sus respectivas partes reales son iguales, al igual que sus respectivas partes imaginarias. Es decir,

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \iff a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

Por supuesto que así presentado, pareciera ser que  $\mathbb{C}$  es simplemente otro nombre para  $\mathbb{R}^2$ , pero ahora definiremos sobre  $\mathbb{C}$  operaciones que establecen diferencias.

**Definición 1.1.** *El sistema de los números complejos es el conjunto  $\mathbb{C}$  de todos los números complejos con las operaciones de **suma** (+) y **producto** ( $\cdot$ ) definidas de la siguiente manera, para complejos cualesquiera  $(a_1, b_1)$  y  $(a_2, b_2)$ :*

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$$

A veces, omitiremos el punto para denotar producto de números complejos. Como vemos de la definición,  $+$  y  $\cdot$  son operaciones binarias (cerradas) en  $\mathbb{C}$ . El siguiente resultado establece otras propiedades básicas.

**Proposición 1.1.** *La suma y el producto de números complejos son operaciones conmutativas y asociativas, y verifican la distributividad del producto respecto de la suma. El complejo  $(0, 0)$  es el elemento neutro (único) de la suma, mientras que  $(1, 0)$  es el del producto. Cualquier complejo  $(a, b)$  posee un único inverso para la suma, que es  $(-a, -b)$ . Cualquier complejo  $(a, b) \neq (0, 0)$  posee un único inverso para el producto, que es  $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$ .*

*Demostración.* Sean  $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{C}$ . Entonces, por la conmutatividad de la suma de números reales,

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) = (a_2 + a_1, b_2 + b_1) = (a_2, b_2) + (a_1, b_1)$$

quedando así establecida la conmutatividad de la suma de complejos. De igual manera, por aplicación de propiedades correspondientes para números reales, se deducen la conmutatividad del producto, la asociatividad de ambas operaciones y la distributividad del producto respecto de la suma.



En cuanto al elemento neutro de la suma, observemos que

$$(a, b) + (x, y) = (a, b) \iff a + x = a \wedge b + y = b \iff x = 0 \wedge y = 0$$

mostrando que  $(0, 0)$  es el elemento neutro de la suma de complejos, y que es único. En cuanto al elemento neutro para el producto, notemos que

$$(a, b)(x, y) = (a, b) \iff ax - by = a \wedge ay + bx = b$$

de modo que, resolviendo el sistema en las incógnitas  $x$  e  $y$  queda  $x = 1, y = 0$ . Por lo tanto,  $(1, 0)$  es el neutro para el producto de complejos. Por otro lado, nótese que

$$(a, b) + (x, y) = (0, 0) \iff a + x = 0 \wedge b + y = 0 \iff x = -a \wedge y = -b$$

de modo que  $(-a, -b)$  es el inverso de  $(a, b)$  para la operación de suma. Similarmente, si  $(a, b) \neq (0, 0)$ , tenemos que

$$(a, b)(x, y) = (1, 0) \iff ax - by = 1 \wedge ay + bx = 0$$

Como es  $a \neq 0$  o  $b \neq 0$ , ocurre que  $a^2 + b^2 \neq 0$ , así que resolviendo el sistema en

las incógnitas  $x$  e  $y$ , llegamos a que

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

◇

Si  $z \in \mathbb{C}$ , su inverso para la suma se llama el **opuesto** de  $z$ , y se denota mediante  $-z$ . Si además es  $z \neq (0,0)$ , su inverso para el producto se llama el **inverso** de  $z$ , y se denota mediante  $z^{-1}$ .

De la cerradura de las operaciones binarias  $+$  y  $\cdot$  en  $\mathbb{C}$  y de la proposición 1.1 vemos que,  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  es un cuerpo conmutativo.

El símbolo usual  $(a, b)$  para representar pares ordenados no es conveniente para representar el número complejo  $(a, b)$ . Representaremos los números complejos con un simbolismo más apropiado en el que va a intervenir el producto complejo. Para ello, observemos que:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

$$(a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

esto indica que los números complejos de la forma  $(a, 0)$  se comportan respec-

to a la suma y la multiplicación de números complejos exactamente de la misma forma que lo hacen los números reales respecto a la suma y multiplicación propias. Por esta razón, en las operaciones con números complejos podemos sustituir los complejos del tipo  $(a, 0)$  por el número real  $a$ . Es decir, hacemos la identificación  $(a, 0) = a$ .

El número complejo  $(0, 1)$  lo representaremos por  $i$  y lo llamaremos **unidad imaginaria**. Con ello tenemos que

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Ahora podemos escribir

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib$$

Se dice que  $a + ib$  es la **expresión binómica** del número complejo  $(a, b)$ .

### 1.1.2. Operaciones Fundamentales con Números Complejos

Los números complejos se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir.

Si  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  estas operaciones se definen como sigue.

**Suma:**  $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

**Resta:**  $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

**Multiplicación:**  $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$

**División:**  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \quad z_2 \neq 0$

**Definición 1.2.** Si  $z$  es un número complejo, entonces el número que se obtiene al cambiar el signo de su parte imaginaria se denomina **complejo conjugado** o simplemente, el **conjugado** de  $z$ .

Si  $z = x + iy$ , entonces su conjugado es  $\bar{z} = x - iy$ . De la definición de suma, se tiene que el conjugado de dos números complejos es la suma de los conjugados:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

Es más, se tienen las siguientes tres propiedades:

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; \quad z_2 \neq 0$$

Las definiciones de suma y multiplicación muestran que la suma y el producto de un número complejo  $z$  y su conjugado  $\bar{z}$  son también números reales:

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$$

$$z \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$$

La diferencia entre un número complejo  $z$  y su conjugado  $\bar{z}$  es un número imaginario puro:

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy$$

Como  $x = \operatorname{Re}(z)$  e  $y = \operatorname{Im}(z)$ , entonces  $z + \bar{z} = 2x$  y  $z - \bar{z} = 2iy$  conducen a dos fórmulas útiles:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Además,  $\overline{\bar{z}} = z$ .

### 1.1.3. Representación Gráfica y Módulo de un Número Complejo

Un número complejo  $z = x + iy$  se determina únicamente por un par ordenado de números reales  $(x, y)$ . El primero y el segundo elemento de cada par ordenado corresponden, respectivamente, a la parte real y a la parte imaginaria del número complejo. De esta forma se puede asociar un número complejo  $z = x + iy$  con un punto  $(x, y)$  del plano coordenado. Sabemos que un par ordenado de números reales puede interpretarse como las componentes de un vector. Entonces, un número complejo  $z = x + iy$  puede verse como un vector cuyo punto inicial es el

origen y cuyo punto terminal es  $(x, y)$ .

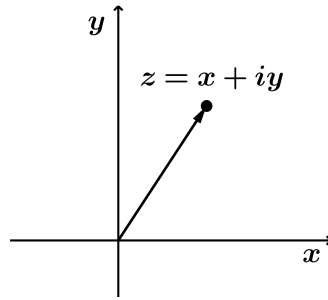


Figura 1.1: Representación de números complejos.

El **plano coordenado** ilustrado en la figura 1.1 se denomina **plano complejo** o simplemente el **plano z**. El eje horizontal o  $x$  se denomina el **eje real** y el eje vertical o  $y$  se denomina el **eje imaginario**.

La longitud de un vector  $z$ , o la distancia desde el origen hasta el punto  $(x, y)$ , es evidentemente  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Este número real se denomina de una forma especial.

**Definición 1.3.** *El **módulo** o **valor absoluto** de  $z = x + iy$  se denota por  $|z|$  y es el número real*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

De la definición de módulo se tienen las siguientes propiedades:

1.  $|z|^2 = z\bar{z}$ .
2.  $|z| \geq 0$ .

3.  $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ .
4.  $|zw| = |z||w|$ .
5. Si  $w \neq 0$ ,  $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ .
6.  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$  y  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ .
7.  $|z| = |\bar{z}|$ .

**Teorema 1.1 (Desigualdad triangular).** Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ , entonces  $|z + w| \leq |z| + |w|$ .

*Demostración.* Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned}
 z, w \in \mathbb{C} &\implies |z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} \\
 &\implies |z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) \\
 &\implies |z + w|^2 = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\
 &\implies |z + w|^2 = |z|^2 + z\bar{w} + \bar{w}z + |w|^2 \\
 &\implies |z + w|^2 = |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 \\
 &\implies |z + w|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\
 &\implies |z + w|^2 \leq |z|^2 + |2\operatorname{Re}(z\bar{w})| + |w|^2 \\
 &\implies |z + w|^2 \leq |z|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\bar{w})| + |w|^2 \\
 &\implies |z + w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\
 &\implies |z + w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||\bar{w}| + |w|^2
 \end{aligned}$$

$$\implies |z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2$$

$$\implies |z + w| \leq |z| + |w|.$$

◇

La desigualdad triangular se extiende a cualquier suma finita como sigue:

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$$

#### 1.1.4. Forma Polar

Las coordenadas rectangulares  $(x, y)$  y las polares  $(r, \theta)$  se relacionan mediante las ecuaciones  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \operatorname{sen} \theta$ . Por lo tanto, un número complejo no nulo  $z = x + iy$  se escribe como :

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Se dice que  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  es la **forma polar** del número complejo  $z$ .

De la figura 1.2 se observa que la coordenada polar  $r$  puede interpretarse como la distancia desde el origen al punto  $(x, y)$ . En otras palabras, se adopta la convención de que  $r$  nunca es negativo, por lo que se puede considerar de que  $r$



es el módulo de  $z$ , es decir

$$r = |z|$$

El ángulo  $\theta$  de inclinación del vector  $z$  medido en radianes desde el eje real positivo, es positivo cuando se mide en sentido antihorario y negativo cuando se mide en sentido horario. El ángulo  $\theta$  se denomina **argumento** de  $z$  y se escribe  $\theta = \arg z$ .

De la figura 1.2 se observa que el argumento de un número complejo debe satisfacer la ecuación

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad (1.1)$$

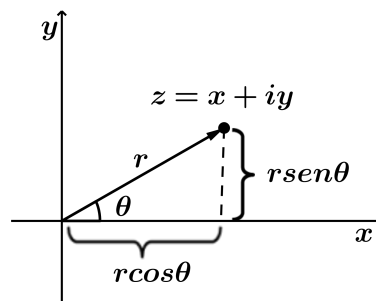


Figura 1.2: Coordenadas Polares.

Las soluciones de esta ecuación no son únicas, ya que si  $\theta_0$  es un argumento de  $z$ , entonces los ángulos  $\theta_0 \pm 2\pi, \theta_0 \pm 4\pi, \dots$ , son también argumentos necesariamente.

Si  $z = 0$ ,  $\theta$  es indefinido. De modo que cualquier número complejo que vaya a

ser escrito en polares se sobreentiende que es distinto de cero, aunque tal requisito no se haga explícito.

El **valor principal** de  $\arg(z)$ , denotado  $\text{Arg}(z)$ , se define como el único valor de  $\arg(z)$  tal que  $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ .

Dos propiedades importantes de los argumentos son:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad (1.2)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad (1.3)$$

### 1.1.5. Fórmula de Euler y Forma Exponencial

Una de las constantes más usadas en matemáticas es el número  $e$  o Número de Euler, cuyo valor aproximado de 11 cifras decimales es

$$e \approx 2,71828182846$$

Esta constante aparece en conexión con los números complejos, mediante la relación maravillosa

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \quad (1.4)$$

donde el lado derecho representa un número complejo en el círculo unitario de ángulo  $\theta$ . Dicha fórmula se conoce con el nombre de Fórmula de Euler en honor a Leonhard Euler, quien la descubrió cerca de 1740.

Muchos textos de bachillerato y aún universitarios tienen un tratamiento inadecuado, carente de toda pedagogía y rigor matemático, de la fórmula de Euler. Para estos autores el lado izquierdo no posee ningún significado y cometen el gran error de dar la fórmula (1.4) como una definición de  $e^{i\theta}$ . Para poder convencer al estudiante de que la relación (1.4) es una verdad matemática y no un simple acto de fé, debemos entonces tratar de entender primero qué cosa es la expresión  $e^{i\theta}$  y luego demostrar que dicha relación se cumple para todo ángulo  $\theta$ .

Del cálculo elemental sabemos que las funciones  $e^x$ ,  $\text{sen } \theta$  y  $\text{cos } \theta$  se pueden representar en serie de potencias de la siguiente forma.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (1.5)$$

$$\text{sen } \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \quad (1.6)$$

$$\text{cos } \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \quad (1.7)$$

Por el momento no nos preocupamos por los problemas de la convergencia de estas series de potencia. Sólo haremos un cálculo formal en una primera etapa,

para descubrir relaciones entre las funciones de manera heurística, como lo hacían los matemáticos en el pasado.

Si en (1.5) hacemos la sustitución  $x = i\theta$  obtenemos

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \cdots \end{aligned}$$

Olvidando por el momento del problema de la convergencia, podemos hacer un reordenamiento de esta última serie para obtener

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

Al menos heurísticamente, hemos probado la fórmula de Euler. Bastaría dar un toque final de rigurosidad a nuestro método, probando la convergencia de ambas series para cualquier  $\theta$  número real. Mas sin embargo, lo importante aquí es que la fórmula de Euler permite usar una notación más corta para expresar los números complejos tal y como lo indica la siguiente definición.

**Definición 1.4.** *La Fórmula de Euler permite expresar un número complejo no nulo en su forma exponencial:*

$$z = |z|e^{i\theta} = re^{i\theta}$$

Dos números complejos  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  y  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  no nulos, son **iguales** si  $r_1 = r_2$  y  $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$ .

Para **multiplicar** números complejos expresados en una de estas formas, basta multiplicar sus módulos y sumar sus argumentos:

$$(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Para **dividir** números complejos, basta dividir sus módulos y restar sus argumentos:

$$\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

El **inverso** de un número complejo distinto de cero  $z = r e^{i\theta}$ , tiene como módulo, el inverso del módulo, y como argumento, el opuesto del argumento:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{i(-\theta)}$$

Para elevar un número complejo a una **potencia**, se eleva el módulo a dicha potencia, y se multiplica el argumento por el exponente. Así:

$$(r e^{i\theta})^n = (r^n) e^{n(i\theta)}$$

cualquiera que sea el número entero  $n$ , lo que permite calcular raíces  $n$ -ésimas.

Se dice que un número  $w$  es una **raíz n-ésima** de un número complejo no nulo  $z$  si  $w^n = z$ . Si  $w = r_1 e^{i\theta_1}$  y  $z = r_2 e^{i\theta_2}$ , entonces  $w^n = z$  se convierte en

$$r_1^n e^{n(i\theta_1)} = r_2 e^{i\theta_2}$$

La igualdad anterior se cumple, si y sólo si,

$$r_1 = \sqrt[n]{r_2} \quad \text{y} \quad n\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi \quad (1.8)$$

donde  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ . Entonces

$$\theta_1 = \frac{\theta_2 + 2k\pi}{n}$$

El conjugado de un número complejo  $z = re^{i\theta}$ , tiene el mismo módulo y el argumento opuesto:

$$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$$

Al aplicar la fórmula obtenida de una potencia al número complejo de módulo  $|r| = 1$ ,  $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ , se obtiene

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta); \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Este resultado se conoce como la **fórmula de DeMoivre** y es útil para deducir ciertas igualdades trigonométricas.

### 1.1.6. La Topología de los Números Complejos.

Necesitamos desarrollar un vocabulario que ayude a describir conjuntos de puntos en el plano complejo. Una idea fundamental es la de una  $\varepsilon$ -vecindad del punto  $z_0$ . Es el disco abierto de radio  $\varepsilon > 0$  alrededor de  $z_0$  mostrado en la figura 1.3. Formalmente, es el conjunto de todos los puntos que satisface la desigualdad

$$\{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

y se denota por  $D_\varepsilon(z_0)$ . Es decir

$$D_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\} \quad (1.9)$$

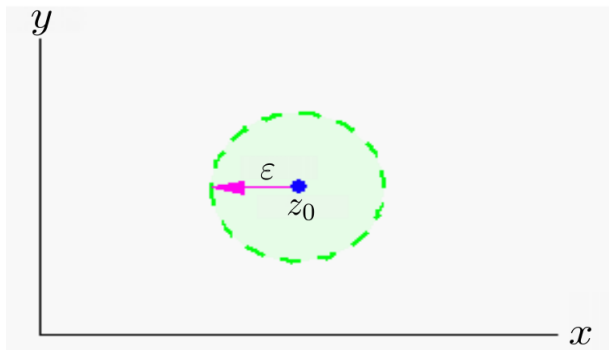


Figura 1.3: Una  $\varepsilon$ -vecindad del punto  $z_0$

También definimos  $\overline{D}_\varepsilon(z_0)$ , como el disco cerrado de radio  $\varepsilon$  con centro en  $z_0$  y

$D_\varepsilon^*(z_0)$ , el disco reducido de radio  $\varepsilon$  con centro en  $z_0$

$$\overline{D}_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| \leq \varepsilon\} \quad (1.10)$$

$$D_\varepsilon^*(z_0) = \{z : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} \quad (1.11)$$

El punto  $z_0$  se dice que es **un punto interior** del conjunto  $S$  siempre que exista una  $\varepsilon$ -vecindad de  $z_0$  que solo contiene puntos de  $S$ ;  $z_0$  se llama **un punto exterior** del conjunto  $S$  si existe una  $\varepsilon$ -vecindad de  $z_0$  que no contiene puntos de  $S$ . Si  $z_0$  no es ni punto interior ni un punto exterior de  $S$ , entonces es llamado **un punto frontera** de  $S$  y tiene la propiedad de que cada  $\varepsilon$ -vecindad de  $z_0$  contiene puntos que están dentro y fuera de  $S$ . La figura 1.4 ilustra esta situación.

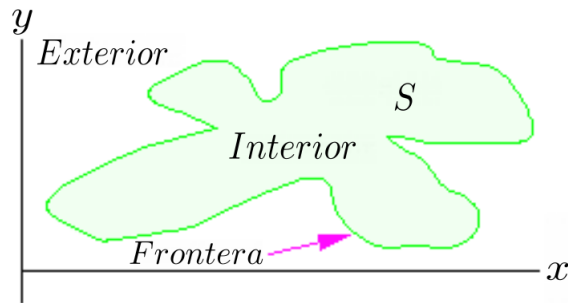


Figura 1.4: El interior, exterior y frontera de un conjunto  $S$

Denotemos al círculo  $C_R(z_0)$  y nos referimos a él como el círculo de radio  $R$  centrado en  $z_0$ . Así

$$C_R(z_0) = \{z : |z - z_0| = R\} \quad (1.12)$$



El punto  $z_0$  es llamado **un punto de acumulación** del conjunto  $S$  si para cada  $\varepsilon$ , el disco reducido  $D_\varepsilon^*(z_0)$  contiene al menos un punto de  $S$ . Un conjunto  $S$  es llamado **un conjunto abierto** si cada punto de  $S$  es un punto interior de  $S$ . Un conjunto  $S$  es llamado **un conjunto cerrado** si contiene todos sus puntos fronteras. Un conjunto  $S$  se dice que es **un conjunto conexo** si cada par de puntos  $z_1$  y  $z_2$  contenidos en  $S$  se pueden unir por una curva que está totalmente contenida en  $S$ . En términos generales, un conjunto conexo consiste en una única pieza. Un conjunto abierto conexo, junto con algunos, ninguno o todos sus puntos frontera, se llama **una región**. Una región que contenga todos sus puntos frontera se llama **región cerrada**. Un conjunto  $S$  se dice que es **acotado** si está completamente contenido en un disco cerrado. Un conjunto que no pueda estar contenido en un disco cerrado se llama **un conjunto sin límite o no acotado**.

## 1.2. Funciones Complejas

### 1.2.1. Funciones de una Variable Compleja

Una función de valor complejo  $f(z)$  de la variable compleja  $z$  es una regla que asigna a cada número complejo  $z$  en un conjunto  $D$ , uno y sólo un número complejo  $w$ . Se escribe

$$w = f(z)$$

y se llama  $w$  a la **imagen** de  $z$  bajo  $f$ . El conjunto  $D$  se denomina el **dominio** de  $f(z)$ , y el conjunto de todas las imágenes  $R = \{w = f(z) : z \in D\}$  se llama el **rango** de  $f$ . Cuando el contexto sea obvio, omitiremos la frase **valor complejo** y simplemente nos referimos a una función compleja.

Podemos definir el dominio como cualquier conjunto que tenga sentido para una regla determinada, por lo que para  $w = f(z) = z^2$ , se puede tomar todo el plano complejo como su dominio  $D$ , o artificialmente podemos restringir el dominio a algún conjunto tal como  $D = D_1(0) = \{z : |z| < 1\}$ . En algunos contextos funciones se denominan mapeos o transformaciones.

Al igual que  $z$  puede expresarse por sus partes real e imaginaria,  $z = x + iy$ , escribimos

$$f(z) = w = u + iv$$

donde  $u$  y  $v$  son la parte real e imaginaria de  $w$ , respectivamente. De lo anterior obtenemos la siguiente representación

$$w = f(z) = f(x + iy) = u + iv$$

Puesto que  $u$  y  $v$  dependen de  $x$  e  $y$ , pueden considerarse funciones de valor real de variables reales  $x$  e  $y$ ; es decir,

$$u = u(x, y) \quad \text{y} \quad v = v(x, y)$$

Combinando estas ideas; a menudo escribiremos una función compleja en la forma

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (1.13)$$

La figura 1.5 ilustra la noción de una función (mapeo) usando estos símbolos

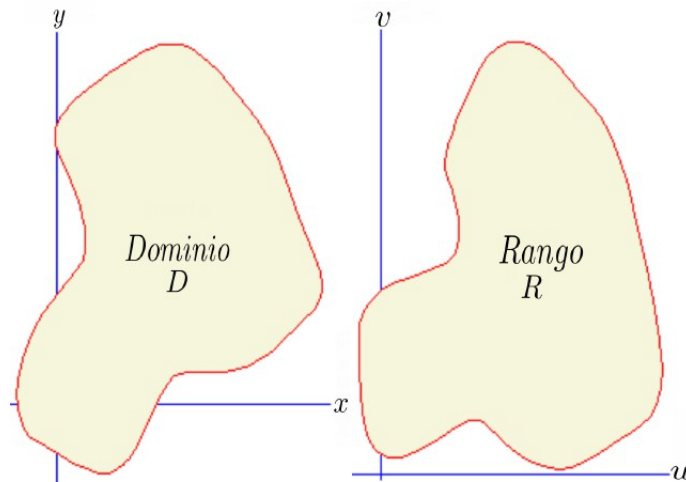


Figura 1.5: El mapeo  $w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

El uso de  $z = re^{i\theta}$ , en la expresión de una función compleja  $f(z)$  puede ser conveniente. Esto nos proporciona la representación en coordenadas polares

$$f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta) \quad (1.14)$$

donde  $u(r, \theta)$  y  $v(r, \theta)$  son funciones reales de las variables reales  $r$  y  $\theta$ .

Ahora veamos la interpretación geométrica de una función compleja. Si  $D$  es el dominio de las funciones de valor real  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$ , entonces el sistema de

ecuaciones

$$u(x, y) \quad \text{y} \quad v(x, y)$$

describen una transformación (o mapeo) para  $D$  en el plano  $xy$  al plano  $uv$ , también llamado plano  $w$ . Por lo tanto, consideramos la función

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

como una transformación (o mapeo) del conjunto  $D$  en el plano  $z$  sobre el rango  $R$  en el plano  $w$ . Esta idea se ilustra en la figura 1.5.

Si  $A$  es un subconjunto del dominio  $D$  de  $w = f(z)$ , entonces el conjunto  $B = \{w = f(z) : z \in A\}$  se llama la **imagen** del conjunto  $A$ , y  $w = f(z)$  se dice que es un mapeo de  $A$  sobre  $B$ . La imagen de un solo punto es un único punto, y la imagen de todo el dominio,  $D$ , es el rango,  $R$ . El mapeo  $w = f(z)$  se dice que es de  $A$  en  $S$  si la imagen de  $A$  está contenida en  $S$ . Matemáticamente se usa la notación  $f : A \rightarrow S$  para indicar que la función traza un mapeo de  $A$  en  $S$ .

La figura 1.6 ilustra una función  $w = f(z)$  cuyo dominio es  $D$  y cuyo rango es  $R$ . Las áreas sombreadas indican que la función traza un mapeo de  $A$  sobre  $B$ . La función también traza un mapeo de  $A$  en  $R$ , y, por supuesto, también traza un mapeo de  $D$  sobre  $R$ .

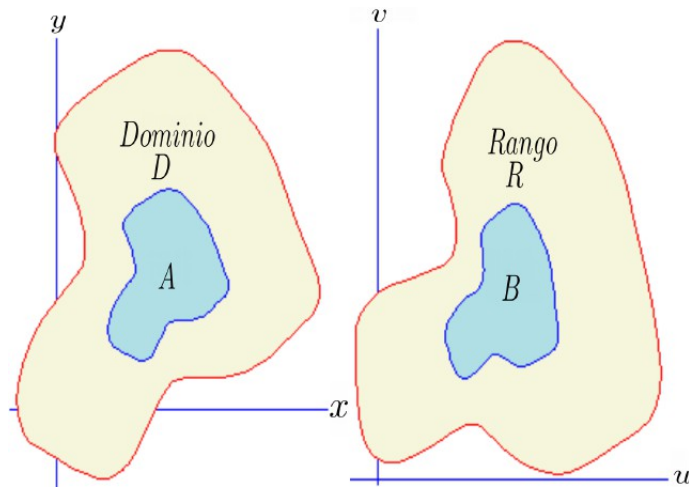


Figura 1.6:  $w = f(z)$  mapea de  $A$  sobre  $B$ , y  $w = f(z)$  mapea de  $D$  sobre  $R$ .

La **imagen inversa** de un punto  $w$  es el conjunto de todos los puntos  $z$  en  $D$  tal que  $w = f(z)$ . La imagen inversa de un punto puede ser un punto, varios puntos, o ningún punto. Si el último caso ocurre entonces el punto  $w$  no está en el rango de  $w = f(z)$ .

La imagen inversa de un conjunto de puntos,  $\mathcal{S}$ , es la colección de todos los puntos en el dominio que se asignan en  $\mathcal{S}$ . Si  $w = f(z)$  mapea  $D$  sobre  $R$  es posible que la imagen inversa de  $R$  también sea una función, pero la función original debe tener una propiedad especial, es decir, debe ser una función uno a uno.

**Definición 1.5.** Una función  $w = f(z)$  se dice que es uno a uno, si a diferentes elementos del dominio le corresponden diferentes elementos del rango. En esta función, para dos elementos cualesquiera  $z_1$  y  $z_2$  de su dominio se cumple que:

$$z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

La figura 1.7 y 1.8 ilustra este concepto

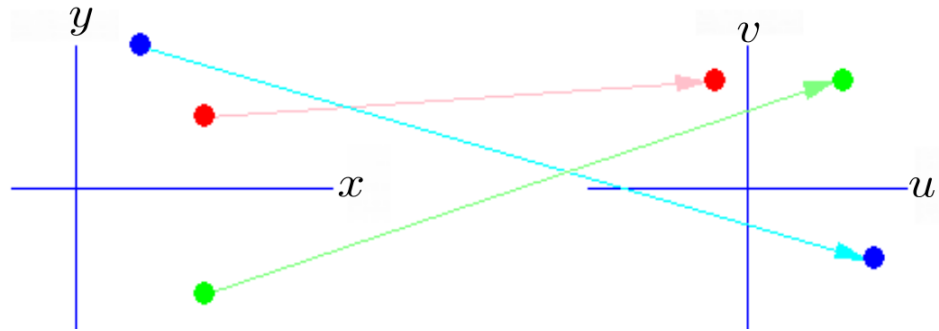


Figura 1.7: Una función  $w = f(z)$  que es uno a uno.

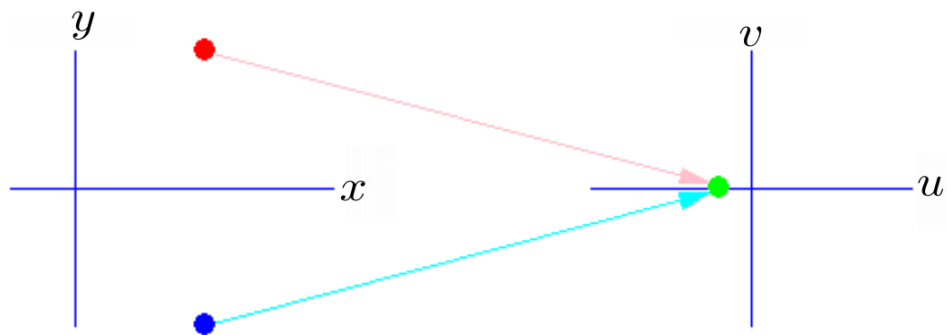


Figura 1.8: Una función  $w = f(z)$  que no es uno a uno.

**Teorema 1.2.** Si  $f_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  son funciones uno a uno, entonces  $f_2 \circ f_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es uno a uno.

*Demostración.* Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  tal que  $(f_2 \circ f_1)(z_1) = (f_2 \circ f_1)(z_2)$ .

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1)(z_1) = (f_2 \circ f_1)(z_2) &\Rightarrow f_2(f_1(z_1)) = f_2(f_1(z_2)) \\ &\Rightarrow f_1(z_1) = f_1(z_2); \quad f_2 \text{ es uno a uno} \\ &\Rightarrow z_1 = z_2; \quad f_1 \text{ es uno a uno} \end{aligned}$$

Por tanto,  $f_2 \circ f_1$  uno a uno. ◇

**Definición 1.6.** Dada la función  $w = f(z)$ , una **función inversa**  $z = g(w)$ , debe satisfacer las siguientes condiciones,

$$g(f(z)) = z; \quad \forall z \in A \quad \text{y} \quad f(g(w)) = w; \quad \forall w \in B \quad (1.15)$$

Además, si  $w = f(z)$  y  $z = g(w)$  son funciones que trazan un mapeo de  $A$  en  $B$  y de  $B$  en  $A$  respectivamente, y las ecuaciones 1.15 se mantienen, entonces  $w = f(z)$  asigna el conjunto  $A$  uno a uno en  $B$ . Generalmente indicamos la inversa de  $w = f(z)$  por la notación  $z = f^{-1}(w)$ . Si el dominio de  $f(z)$  y  $f^{-1}(w)$  son  $A$  y  $B$  respectivamente, entonces podemos escribir las ecuaciones 1.15 en la forma

$$f^{-1}(f(z)) = z; \quad \forall z \in A \quad \text{y} \quad f(f^{-1}(w)) = w; \quad \forall w \in B \quad (1.16)$$

Además para  $z_0 \in A$  y  $w_0 \in B$ .

$$w_0 = f(z_0) \Leftrightarrow f^{-1}(w_0) = z_0 \quad \text{y} \quad z_0 = f^{-1}(w_0) \Leftrightarrow f(z_0) = w_0$$

## 1.2.2. Curvas Paramétricas en el Plano Complejo

**Definición 1.7 (Curvas paramétricas en el plano complejo).** Si  $x(t)$  y  $y(t)$  son las funciones de valores reales de una variable real  $t$ , entonces el conjunto  $C$  que consiste

en todos los puntos  $z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , se llama **curva paramétrica** o **curva paramétrica compleja**. La función de valores complejos de la variable real  $t$ ,  $z(t) = x(t) + iy(t)$ , se llama **parametrización de  $C$** .

Supongamos que una curva  $C$  en el plano se parametriza con un conjunto de ecuaciones  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , donde  $x(t)$  y  $y(t)$  son funciones reales continuas. Haciendo que los **puntos inicial y final** de  $C$ , es decir,  $(x(a), y(a))$  y  $(x(b), y(b))$ , se denotan con los símbolos  $A$  y  $B$ , respectivamente. Decimos que:

- (i)  $C$  es una **curva suave**, si  $x'$  y  $y'$  son continuas en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y no son simultáneamente 0 en el intervalo abierto  $(a, b)$ .
- (ii)  $C$  es una **curva suave por tramos** si consiste de un número finito de curvas suaves  $C_1, C_2, \dots, C_n$  unidas una al extremo de la otra, es decir, el punto final de una curva  $C_k$  coincide con el punto inicial de la siguiente curva  $C_{k+1}$ .
- (iii)  $C$  es una **curva simple** si la curva  $C$  no se cruza con sí misma excepto posiblemente en  $t = a$  y  $t = b$ .
- (iv)  $C$  es una **curva cerrada** si  $A = B$ .
- (v)  $C$  es una **curva simple cerrada** si la curva  $C$  no se cruza con sí misma y  $A = B$ , es decir,  $C$  es simple y cerrada.

Si  $C$  no es una curva cerrada, se dice que la **dirección positiva** en  $C$  o que  $C$  tiene una **orientación positiva**, si se recorre  $C$  desde su punto inicial  $A$  a su punto



final  $B$ . En otras palabras, si  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  son las ecuaciones paramétricas para  $C$ , entonces la dirección positiva de  $C$  corresponde a los valores crecientes del parámetro  $t$ . Si  $C$  se recorre en sentido contrario al de la orientación positiva, entonces se dice que  $C$  tiene una **orientación negativa**. Si  $C$  tiene una orientación (positiva o negativa), entonces la **curva opuesta**, la curva con orientación opuesta, se representa con el símbolo  $-C$ .

A continuación se listan las parametrizaciones de algunas curvas comunes en el plano complejo:

- **Recta:** Una parametrización de la recta que contiene a los puntos  $z_0$  y  $z_1$  es:

$$z(t) = z_0(1 - t) + z_1t, \quad -\infty < t < \infty \quad (1.17)$$

- **Segmento de recta:** Una parametrización del segmento de recta de  $z_0$  a  $z_1$  es:

$$z(t) = z_0(1 - t) + z_1t, \quad 0 \leq t \leq \infty \quad (1.18)$$

- **Rayo:** Una parametrización del rayo que sale de  $z_0$  y que contiene a  $z_1$  es:

$$z(t) = z_0(1 - t) + z_1t, \quad 0 \leq t < \infty \quad (1.19)$$

- **Circunferencia:** Una parametrización de la circunferencia centrada en  $z_0$  con

radio  $r$  es:

$$z(t) = z_0 + r(\cos(t) + i \operatorname{sen}(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (1.20)$$

En notación exponencial, esta parametrización es:

$$z(t) = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (1.21)$$

**Definición 1.8 (Imagen de una curva paramétrica bajo una transformación compleja).** Si  $w = f(z)$  es una transformación compleja y si  $C$  es una curva parametrizada por  $z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , entonces

$$w(t) = f(z(t)), \quad a \leq t \leq b \quad (1.22)$$

es una parametrización de la imagen  $C'$  de  $C$  bajo  $w = f(z)$ .

### 1.2.3. Límites y Continuidad

Sea  $u = u(x, y)$  una función de valor real de las variables reales  $x$  e  $y$ . Decimos que  $u$  tiene **límite**  $u_0$ , cuando  $(x, y)$  se aproxima a  $(x_0, y_0)$ , si el valor de  $u(x, y)$  se pueda acercar arbitrariamente al valor  $u_0$  cuando elegimos a  $(x, y)$  lo suficientemente cerca de  $(x_0, y_0)$ . Cuando esto sucede escribimos.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$$

En lenguaje más técnico,  $u$  tiene límite  $u_0$  cuando  $(x, y)$  se aproxima a  $(x_0, y_0)$  si y sólo si  $|u(x, y) - u_0|$  se puede hacer arbitrariamente pequeño haciendo tanto a  $|x - x_0|$  como a  $|y - y_0|$  pequeños. Esta condición es como la definición de límite para funciones de una variable real. El punto  $(x, y)$  está en el plano  $xy$ , y la distancia entre  $(x, y)$  y  $(x_0, y_0)$  es  $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . Con esta perspectiva, ahora podemos proporcionar una definición más precisa de un límite.

**Definición 1.9.** La expresión  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0$  significa que para cada número  $\varepsilon > 0$ , existe un número  $\delta > 0$  tal que

$$|u(x, y) - u_0| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad (1.23)$$

El valor  $u_0$  del límite no debe depender de la forma en como  $(x, y)$  se aproxima a  $(x_0, y_0)$ , por lo tanto  $u(x, y)$  debe acercarse al valor  $u_0$  cuando  $(x, y)$  se aproxime a  $(x_0, y_0)$  a lo largo de una curva que termina en el punto  $(x_0, y_0)$ . Por el contrario, si podemos encontrar dos curvas  $C_1$  y  $C_2$  que terminen en  $(x_0, y_0)$  a lo largo de la cual  $u(x, y)$  se aproxime a dos valores distintos  $u_1$  y  $u_2$ , respectivamente, entonces  $u(x, y)$  no tiene límite cuando  $(x, y)$  se aproxima a  $(x_0, y_0)$ .

Sea  $f(z)$  una función compleja de la variable compleja  $z$  que esta definida para todo valor de  $z$  en alguna vecindad de  $z_0$ , excepto posiblemente en el punto  $z_0$ . Diremos que  $f$  tiene límite  $w_0$ , cuando  $z$  se aproxima a  $z_0$ , siempre que el va-

lor de  $f(z)$  se pueda acercar arbitrariamente al valor  $w_0$  cuando elegimos a  $z$  lo suficientemente cerca de  $z_0$ . Cuando esto resulta escribimos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

La distancia entre los puntos  $z$  y  $z_0$  puede ser expresada por  $|z - z_0|$ , entonces podemos dar una definición más precisa similar a la de una función de dos variables reales.

**Definición 1.10.** *La expresión  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$  significa que para cada número  $\varepsilon > 0$ , existe un número  $\delta > 0$  tal que  $|f(z) - w_0| < \varepsilon$  siempre que  $0 < |z - z_0| < \delta$ . Usando las ecuaciones 1.9 y 1.11 también podemos expresar la última relación como  $f(z) \in D_\varepsilon(w_0)$  siempre que  $z \in D_\delta^*(z_0)$ .*

La formulación de límites en términos de discos abiertos ofrece un buen contexto para interpretar esta definición. Se dice que para cada disco de radio  $\varepsilon > 0$  alrededor del punto  $w_0$  (representado por  $D_\varepsilon(w_0)$ ), existe un disco reducido de radio  $\delta > 0$  alrededor del punto  $z_0$  (representado por  $D_\delta^*(z_0)$ ) tal que la imagen de cada punto en el disco reducido de radio  $\delta$  está dentro del disco de radio  $\varepsilon$ , la imagen del disco de radio  $\delta$  no tiene que llenar todo el disco de radio  $\varepsilon$ ; pero si  $z$  se aproxima a  $z_0$  a lo largo de una curva que termina en  $z_0$ , entonces  $w = f(z)$  se aproxima a  $w_0$ . Esta situación se ilustra en la figura 1.9.

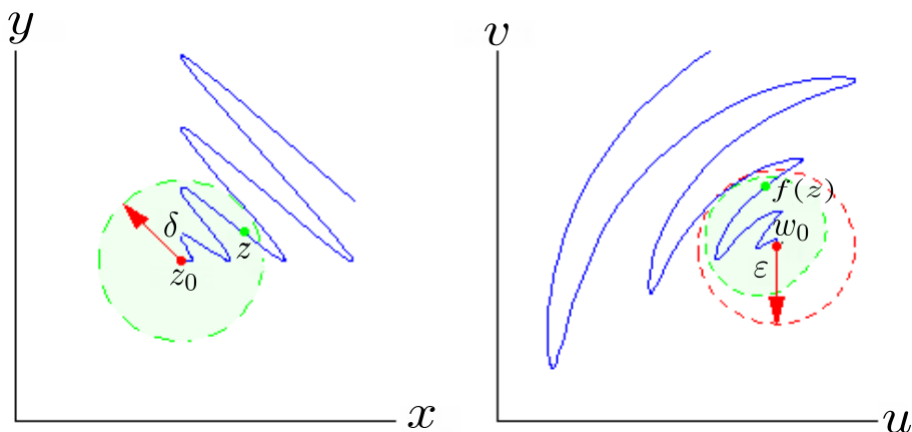


Figura 1.9: El límite  $f(z) \rightarrow w_0$  cuando  $z \rightarrow z_0$

**Teorema 1.3.** Sea  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  una función compleja que está definida en alguna vecindad de  $z_0$ , excepto posiblemente en  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0 \quad (1.24)$$

si y sólo si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0 \quad (1.25)$$

*Demostración.* En primer lugar, supongamos que 1.24 se cumple y demostremos que 1.25 es verdadera. De acuerdo con la definición de límite para cada  $\varepsilon > 0$ , existe un correspondiente  $\delta > 0$  tal que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Como  $f(z) - w_0 = u(x, y) - u_0 + i(v(x, y) - v_0)$ , y usando la propiedad 6 de módulo de un número complejo tenemos:

$$|u(x, y) - u_0| \leq |f(z) - w_0| \quad \text{y} \quad |v(x, y) - v_0| \leq |f(z) - w_0|.$$

Así tenemos,

$|u(x, y) - u_0| < \varepsilon$  y  $|v(x, y) - v_0| < \varepsilon$  siempre que  $0 < |z - z_0| < \delta$ , y así la afirmación 1.25 es verdadera.

Por otra parte, supongamos ahora que 1.25 se cumple. Entonces para cada  $\varepsilon > 0$ , existen  $\delta_1 > 0$  y  $\delta_2 > 0$  tal que

$$|u(x, y) - u_0| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ siempre que } 0 < |z - z_0| < \delta_1 \text{ y}$$

$$|v(x, y) - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ siempre que } 0 < |z - z_0| < \delta_2$$

Eligiendo  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  y aplicando la desigualdad triangular a  $f(z) - w_0 = u(x, y) - u_0 + i(v(x, y) - v_0)$  tenemos:

$$|f(z) - w_0| \leq |u(x, y) - u_0| + |v(x, y) - v_0|$$

es decir

$$|f(z) - w_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |z - z_0| < \delta$$

Por lo tanto la afirmación 1.25 implica la afirmación 1.24, y la prueba del teorema queda completada.  $\diamond$

**Teorema 1.4.** *Supongamos que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$  y  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$  entonces*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \pm g(z) = A \pm B \tag{1.26}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = AB \quad (1.27)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}; \quad B \neq 0 \quad (1.28)$$

En [3], se esboza una demostración del teorema 1.4.

**Definición 1.11.** Sea  $u(x, y)$  una función de valor real de las variables reales  $x$  e  $y$ . Decimos que  $u$  es continua en el punto  $(x_0, y_0)$  si se satisfacen las tres condiciones siguiente:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) \text{ existe,} \quad (1.29)$$

$$u(x_0, y_0) \text{ existe,} \quad (1.30)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0) \quad (1.31)$$

Existe una definición similar para funciones de valores complejos.

**Definición 1.12.** Sea  $f(z)$  una función compleja de la variable compleja  $z$  que está definida para todo los valores de  $z$  en alguna vecindad de  $z_0$ . Decimos que  $f$  es continua en  $z_0$  si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \text{ existe,} \quad (1.32)$$

$$f(z_0) \text{ existe,} \quad (1.33)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (1.34)$$

**Teorema 1.5.** Sea  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  que está definida en alguna vecindad de  $z_0$ . Entonces  $f(z)$  es continua en  $z_0 = x_0 + iy_0$  si y sólo si  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  son continuas en  $(x_0, y_0)$ .

En [1] se esboza una demostración del teorema 1.5.

**Teorema 1.6.** Supongamos que  $f(z)$  y  $g(z)$  son continuas en el punto  $z_0$ . Entonces las siguientes funciones son continuas en  $z_0$ .

- $f(z) \pm g(z)$
- $f(z)g(z)$
- $\frac{f(z)}{g(z)}$ ; siempre que  $g(z) \neq 0$ .

En [3] se esboza una demostración del teorema 1.6.

**Ejemplo 1.1.** Mostrar que la función  $\text{Arg}(z)$  es discontinua en el eje real negativo.

*Solución.* Para verificar que  $\text{Arg}(z)$  es discontinua en el eje real negativo, basta comprobar que tiene una discontinua en el punto  $z = -1$  del eje real negativo, para ello calculemos el límite de  $\text{Arg}(z)$  cuando  $z$  tiende a  $z = -1$  a lo largo de las (curvas) semicircunferencias (superior e inferior) de radio 1 y centro el origen (ver Figura 1.10 ). Sean,

$$l_1 = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (-1,0) \\ x^2+y^2=1, y \geq 0}} \text{Arg}(z) \quad \text{y} \quad l_2 = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (-1,0) \\ x^2+y^2=1, y \leq 0}} \text{Arg}(z)$$



entonces  $l_1 \neq l_2$  (pues  $l_1 = \pi$  y  $l_2 = -\pi$ ) y por consiguiente  $\lim_{z \rightarrow -1} \text{Arg}(z)$  no existe y, en consecuencia, la función  $\text{Arg}(z)$  no es continua en  $z = -1$  (tampoco lo es en cero, ya que no está definido en  $z = 0$ ). Por tanto la función  $\text{Arg}(z)$  no es continua en el eje real negativo.

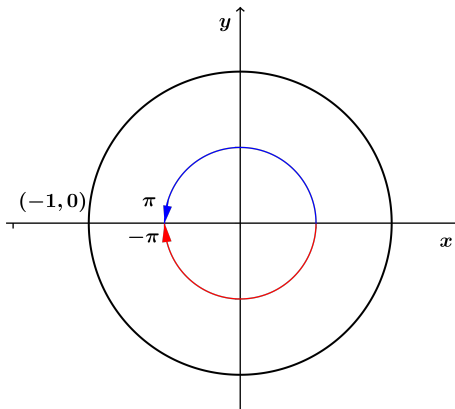


Figura 1.10: La función  $\text{Arg}(z)$  es discontinua en el eje real negativo

#### 1.2.4. Límites y el Punto del Infinito

Hasta el momento el plano complejo, como le hemos visto, no tiene claramente definido el infinito. Sin embargo, en muchas situaciones es necesario considerar un punto al infinito, cuando esto ocurre, y el plano complejo incluye al infinito, hablamos de **plano complejo extendido**  $\mathbb{C}_\infty$ .

El punto  $\infty$  satisface las siguientes reglas algebraicas:

$$x + \infty = \infty + x = \infty, \quad \frac{x}{\infty} = 0, \quad x \neq 0$$

$$y \infty = \infty y = \infty, \quad \frac{y}{0} = \infty, \quad y \neq 0$$

En el caso de variables reales, el infinito consta de dos puntos ubicados en los extremos positivo y negativo del eje real, en ambos casos el valor absoluto es el infinito. Para el caso de los números complejos, si queremos extender la idea nos encontramos con un problema, ya que existe un número infinito de números complejos  $z$  tales que su módulo (el análogo al valor absoluto) es infinito, para evitar esta situación trataremos con el llamado punto al infinito. Para visualizar este punto al infinito se utiliza la siguiente idea.

Consideremos que el plano complejo pasa por el ecuador de una esfera unitaria centrada en el origen  $O$ , tal como se muestra en la figura 1.11.

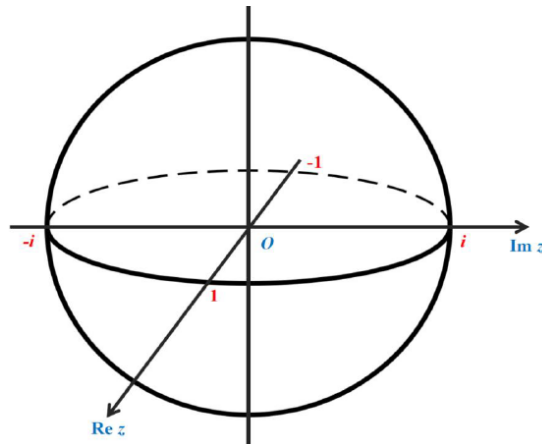


Figura 1.11: Esfera unitaria centrada en el origen

A cada punto  $z$  del plano le corresponde un punto  $P$  en la superficie de la esfera. El punto  $P$  se determina por intersección de la recta que va del polo norte  $N$ , y el punto  $z$  con la superficie de la esfera. Para puntos  $z$  tales que  $|z| > 1$ , el punto  $P$  se ubica sobre el el hemisferio Norte, para puntos tales que  $|z| = 1$ , el

punto  $P$  está sobre el ecuador, mientras que para puntos  $z$  tales que  $|z| < 1$  el punto  $P$  está sobre el hemisferio Sur, tal como se muestra en la figura 1.12.

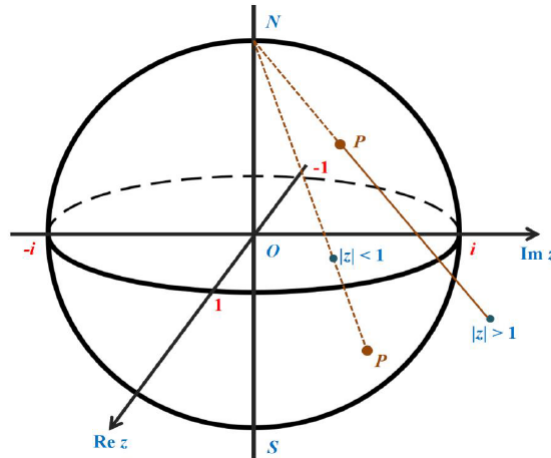


Figura 1.12: Esfera de Riemann

Al punto  $P$  ubicado en el polo Norte le corresponde el **punto al infinito** representado por  $\infty$ . A la esfera unitaria utilizada para desarrollar la idea del punto al infinito se le conoce como **esfera de Riemann** y a la correspondencia entre puntos  $P$  de la esfera y puntos  $z$  del plano se le llama **proyección estereográfica**.

Con el esquema anterior, podemos ver que conforme aumenta  $|z|$ , el punto  $P$  sobre la esfera se acerca a  $N$ , lo que nos permite decir que para  $\varepsilon$  positivo y pequeño, los puntos en el plano complejo exteriores al círculo  $|z| = 1/\varepsilon$  corresponden a puntos sobre la esfera próximos al punto  $N$ , esto es, los entornos del infinito son los conjuntos

$$\{z : |z| > 1/\varepsilon\}$$

Por lo tanto, se puede establecer las siguientes definiciones.

i)  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que

$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

ii)  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |z| > \frac{1}{\delta}$$

**Teorema 1.7.** Si  $z_0$  y  $w_0$  son puntos en los planos  $z$  y  $w$ , respectivamente, entonces

i.  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  si y sólo si  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ ,

ii.  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$  si y sólo si  $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$ ,

iii.  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$  si y sólo si  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0$ .

*Demostración.*

i. a) Supongamos que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  y probaremos  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ .

Por hipótesis,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que

$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Esto implica

$$\left| \frac{1}{f(z)} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Por lo tanto,  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ .

b) Supongamos que  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$  y probaremos que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .

Por hipótesis,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que

$$\left| \frac{1}{f(z)} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

Esto implica

$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Por lo tanto,  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .

ii. a) Supongamos que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$  y probaremos que  $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$ .

Por hipótesis,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |z| > \frac{1}{\delta}$$

Cuando reemplazamos  $z$  por  $\frac{1}{z}$  en las desigualdades anteriores se tiene

$$\left| f\left(\frac{1}{z}\right) - w_0 \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - 0| < \delta$$

Por lo tanto,  $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$ .

b) Supongamos que  $\lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$  y probaremos que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$ .

Por hipótesis,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que

$$\left| f\left(\frac{1}{z}\right) - w_0 \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - 0| < \delta$$

Cuando reemplazamos  $\frac{1}{z}$  por  $z$  en las desigualdades anteriores se tiene que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |z| > \frac{1}{\delta}$$

Por lo tanto,  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$ .

iii. a) Supongamos que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$  y probaremos que  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(\frac{1}{z})} = 0$ .

Por hipótesis,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que

$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{siempre que} \quad |z| > \frac{1}{\delta}$$

Reemplazando  $z$  por  $\frac{1}{z}$  en las desigualdades anteriores tenemos

$$\left| f\left(\frac{1}{z}\right) \right| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{siempre que} \quad \left| \frac{1}{z} \right| > \frac{1}{\delta}.$$

Reescribiendo las desigualdades anteriores se tiene

$$\left| \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - 0| < \delta.$$

Por lo tanto,  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0$ .

b) Supongamos que  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0$  y probaremos que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ .

Por hipótesis,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tal que

$$\left| \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - 0| < \delta.$$

Reemplazando  $\frac{1}{z}$  por  $z$  en las desigualdades anteriores tenemos que

$$\left| \frac{1}{f(z)} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad \left| \frac{1}{z} \right| < \delta$$

Reescribiendo las desigualdades anteriores tenemos

$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{siempre que} \quad |z| > \frac{1}{\delta}$$

Por lo tanto,  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ .

◇

## 1.3. Funciones Analíticas y Armónicas

### 1.3.1. Funciones Diferenciables y Analíticas

Usando nuestra imaginación, tomemos nuestra idea del cálculo elemental y definamos la derivada de  $f(z)$  en  $z_0$ , escrita  $f'(z_0)$ , por

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (1.35)$$

siempre que el limite exista. Si esto sucede, decimos que la función  $f(z)$  es **diferenciable** en  $z_0$ . Si escribimos  $\Delta z = z - z_0$ , entonces podemos expresar la ecuación 1.35 en la forma.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (1.36)$$

Si fijamos  $w = f(z)$  y  $\Delta w = f(z) - f(z_0)$ , entonces podemos utilizar la notación de **Leibniz**  $\frac{dw}{dz}$  para la derivada;

$$f'(z_0) = \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \quad (1.37)$$

Prestar especial atención al valor complejo  $\Delta z$  en la ecuación 1.37; el valor del límite debe ser independiente de la manera en que  $\Delta z \rightarrow 0$ .

Si podemos encontrar dos curvas que terminan en  $z_0$  a lo largo de las cuales  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$  se aproxima a dos valores distintos, entonces  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$  no tiene límite cuando  $\Delta z \rightarrow 0$  y  $f(z)$  no tiene derivada en  $z_0$ .

**Definición 1.13 (Función Analítica).** *La función compleja  $f(z)$  es **analítica** en el punto  $z_0$  siempre que exista algún  $\varepsilon > 0$  tal que  $f'(z)$  exista para todo  $z \in D_\varepsilon(z_0)$ . En otras palabras,  $f(z)$  debe ser diferenciable no solo en  $z_0$ , sino también en todos los puntos de alguna  $\varepsilon$ -vecindad de  $z_0$ .*

Si  $f(z)$  es analítica en cada punto de la región  $R$ , entonces decimos que  $f(z)$  es una **función analítica** sobre  $R$ .

**Definición 1.14 (Función Entera).** *Si  $f(z)$  es analítica en todo el plano complejo, entonces  $f(z)$  se dice que es **una función entera**.*

Los puntos donde la función  $f(z)$  no es analítica se llaman **puntos singulares**. Estos puntos críticos son importantes para las aplicaciones en física e ingeniería. Nuestra definición de la derivada para funciones complejas es formalmente la misma que para las funciones reales y es la extensión natural de las variables reales a variables complejas.



Las fórmulas básicas de diferenciación son idénticas a las funciones reales, y obtenemos las mismas reglas para la diferenciación de potencias, sumas, productos, cocientes y composición de funciones.

Supongamos que  $f(z)$  y  $g(z)$  son funciones diferenciables y sean  $k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ , entonces se tienen las siguientes reglas de diferenciación.

$$\frac{d}{dz}(k_1) = 0 \quad (1.38)$$

$$\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}; \quad \text{donde } n \text{ es un entero positivo} \quad (1.39)$$

$$\frac{d}{dz}(k_1f(z)) = k_1f'(z) \quad (1.40)$$

$$\frac{d}{dz}(k_1f(z) \pm k_2g(z)) = k_1f'(z) \pm k_2g'(z) \quad (1.41)$$

$$\frac{d}{dz}(f(z)g(z)) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \quad (1.42)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{f(z)}{g(z)} \right) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}; \quad \text{siempre que } g(z) \neq 0 \quad (1.43)$$

$$\frac{d}{dz}(f(g(z))) = f'(g(z))g'(z) \quad (1.44)$$

Los casos particulares pero importantes de las ecuaciones 1.43 y 1.44, respectivamente, son:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{z^n} \right) = \frac{-n}{z^{n+1}}; \quad \text{para } z \neq 0 \text{ y } n \text{ es un entero positivo} \quad (1.45)$$

$$\frac{d}{dz}(f(z))^n = n(f(z))^{n-1}f'(z); \quad \text{donde } n \text{ es un entero positivo} \quad (1.46)$$

**Teorema 1.8.** Si  $f(z)$  es diferenciable en  $z_0$ , entonces  $f(z)$  es continua en  $z_0$ .

*Demostración.* De la ecuación 1.35, obtenemos

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

Además,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) - f(z_0)] &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] (z - z_0) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \rightarrow z_0} z - z_0; \quad \text{Ecuación 1.27} \\ &= f'(z_0)(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Este resultado implica que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) - \lim_{z \rightarrow z_0} f(z_0) = 0$ , entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Por tanto,  $f(z)$  es continua en  $z_0$ . ◇

La regla para derivar polinomios también se puede trasladar al caso complejo.

Si  $P(z)$  es un polinomio de grado  $n$ , tal que

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n,$$

entonces la inducción matemática, junto con las ecuaciones 1.39 y 1.41, nos da

$$P'(z) = a_1 + 2a_2z + 3a_3z^2 + \cdots + na_nz^{n-1}.$$

Usamos las reglas de derivación como ayuda en la determinación de cuando las funciones son analíticas. Por ejemplo, la ecuación 1.43 nos dice que si  $P(z)$  y  $Q(z)$  son polinomios, entonces su cociente  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  es analítico en todos los puntos donde  $Q(z) \neq 0$ . Esta condición implica que la función  $f(z) = \frac{1}{z}$  es analítica para todo  $z \neq 0$ .

El siguiente teorema es de importancia en el análisis complejo y es una extensión del análisis real. La demostración se encuentra en [1].

**Teorema 1.9.** *Supongamos que  $f(z)$  y  $g(z)$  son ambas analíticas en  $z_0$ . Si  $f(z_0) = 0$ ,  $g(z_0) = 0$  y  $g'(z_0) \neq 0$ , entonces*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

### 1.3.2. Las Ecuaciones de Cauchy-Riemann

El cálculo de la derivada de funciones complejas escritas en una forma tal como  $f(z) = z^2$  es una tarea bastante simple. Pero en la práctica no siempre es tan fácil. Muchas veces nos encontramos con funciones complejas escritas como,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Por ejemplo, supongamos que tenemos

$$f(z) = f(x + iy) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3). \quad (1.47)$$

¿Existe algún criterio, tal vez con las derivadas parciales de  $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$  y  $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ , podemos determinar si  $f(z)$  es diferenciable, y si es así, para encontrar el valor de  $f'(z)$ ?

La respuesta a esta pregunta es si, gracias al descubrimiento independiente de dos ecuaciones importantes por el matemático francés **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857) y el matemático alemán **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826-1866).

**Teorema 1.10 (Ecuaciones de Cauchy-Riemann).** *Supongamos que*

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

*es diferenciable en el punto  $z_0 = x_0 + iy_0$ . Entonces las derivadas parciales de  $u$  y  $v$  existe en el punto  $(x_0, y_0)$ , y se pueden utilizar para calcular la derivada en  $(x_0, y_0)$ . Es decir,*

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \quad (1.48)$$

*y también*

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \quad (1.49)$$

*Iguando las partes real e imaginaria de las ecuaciones 1.48 y 1.49 obtenemos las llamadas Ecuaciones de Cauchy-Riemann,*

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad y \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \quad (1.50)$$

En [1] se esboza una demostración del teorema 1.10. Y es importante tener en cuenta algunas de las importantes implicaciones del teorema 1.10

- i. Si  $f$  es diferenciable en  $z_0$ , entonces la ecuaciones de Cauchy-Riemann 1.50 se satisface en  $z_0$ , y podemos utilizar cualquiera de las ecuaciones 1.48 o 1.49 para evaluar  $f'(z_0)$ .
- ii. Si no se satisfacen las ecuaciones 1.50 en  $z_0$ , entonces automáticamente sabemos que  $f(z)$  no es diferenciable en  $z_0$ .
- iii. Incluso si las ecuaciones 1.50 se satisfacen en  $z_0$ , no necesariamente se puede concluir que  $f(z)$  es diferenciable en  $z_0$ .

La satisfacción de las Ecuaciones de Cauchy-Riemann no es suficiente para garantizar la diferenciable de una función. El teorema siguiente, sin embargo, da las condiciones que garantizan la diferenciable de  $f(z)$  en  $z_0$ , de manera que podamos utilizar la ecuación 1.48 o 1.49 para calcular  $f'(z)$  en  $z_0$ .

**Teorema 1.11 (Condiciones de Cauchy-Riemann Suficientes para la Diferenciabilidad).** *Supongamos que*

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

*es una función continua que está definida en alguna vecindad del punto  $z_0 = x_0 + iy_0$ .*

*Si todas las derivadas parciales  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$ ,  $v_x(x, y)$  y  $v_y(x, y)$  son continuas en el punto  $(x_0, y_0)$  y si las ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$u_x(x, y) = v_y(x, y) \quad \text{y} \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

*se cumplen en  $z_0 = x_0 + iy_0$ , entonces  $f(z)$  es diferenciable en  $z_0$ , y la derivada  $f'(z_0)$  se puede calcular con cualquiera de las fórmulas 1.48 y 1.49, es decir,*

$$f'(z_0) = f'(x_0 + iy_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0),$$

*o*

$$f'(z_0) = f'(x_0 + iy_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

La forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann y una fórmula para encontrar  $f'(z)$  en términos de las derivadas parciales de  $u(r, \theta)$  y  $v(r, \theta)$ , se dan en el Teorema 1.12. Este teorema hace uso de la validez de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para las funciones  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$ , por lo que la relación entre ellas y las

funciones  $u(r, \theta)$  y  $v(r, \theta)$ , es decir,

$$u(x, y) = u(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) = u(r, \theta), \quad y$$

$$v(x, y) = v(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) = v(r, \theta),$$

es importante.

**Teorema 1.12 (Forma Polar de las Ecuaciones de Cauchy-Riemann).** *Sea  $f(z) = f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$  una función continua que está definida en alguna vecindad del punto  $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ . Si todas las derivadas parciales  $u_r(r, \theta)$ ,  $u_\theta(r, \theta)$ ,  $v_r(r, \theta)$  y  $v_\theta(r, \theta)$  son continuas en el punto  $(r_0, \theta_0)$  y si la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann*

$$u_r(r_0, \theta_0) = \frac{1}{r_0} v_\theta(r_0, \theta_0) \quad y \quad v_r(r_0, \theta_0) = \frac{-1}{r_0} u_\theta(r_0, \theta_0),$$

*se cumplen, entonces  $f(z)$  es diferenciable en  $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ , y podemos calcular la derivada  $f'(z_0)$  mediante el uso de cualquiera de las dos ecuaciones siguientes*

$$f'(z_0) = f'(r_0 e^{i\theta_0}) = e^{-i\theta_0} (u_r(r_0, \theta_0) + i v_r(r_0, \theta_0)) \quad (1.51)$$

$$f'(z_0) = f'(r_0 e^{i\theta_0}) = \frac{1}{r_0} e^{-i\theta_0} (v_\theta(r_0, \theta_0) - i u_\theta(r_0, \theta_0)) \quad (1.52)$$

Dos consecuencias importantes de las ecuaciones de Cauchy-Riemann se dan a continuación:

**Teorema 1.13.** Sea  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  una función analítica en el dominio  $D$ . Supongamos que para todo  $z \in D$  se cumple que  $|f(z)| = k$ , donde  $k$  es una constante. Entonces  $f(z)$  es constante.

**Teorema 1.14.** Sea  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  una función analítica en el dominio  $D$ . Si  $f'(z) = 0$  para todo  $z \in D$ , entonces  $f(z)$  es una constante en  $D$ .

### 1.3.3. Funciones Armónicas

Sea  $\phi(x, y)$  una función real continua de las dos variables reales  $x$  e  $y$  que está definida en un dominio  $D$ . La ecuación diferencial parcial

$$\phi_{xx}(x, y) + \phi_{yy}(x, y) = 0 \quad (1.53)$$

es conocida como la **ecuación de Laplace** y se refiere a veces como la ecuación potencial.

Si  $\phi_x(x, y)$ ,  $\phi_y(x, y)$ ,  $\phi_{xx}(x, y)$ ,  $\phi_{xy}(x, y)$ ,  $\phi_{yx}(x, y)$  y  $\phi_{yy}(x, y)$  son todas continuas y si  $\phi(x, y)$  satisface la ecuación de Laplace, entonces  $\phi(x, y)$  es llamada una **función armónica**.

En el cálculo podríamos habernos pedido demostrar que funciones polinómicas como

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 \quad y \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3$$



y funciones trascendentes como

$$u(x, y) = e^x \cos(y) \quad \text{y} \quad v(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y)$$

y

$$u(x, y) = \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) \quad \text{y} \quad v(x, y) = \arctan \left( \frac{y}{x} \right)$$

son todas funciones armónicas.

Estos pares de funciones no son elegidas al azar, pues hay una relación estrecha entre ellas, son llamadas **funciones armónicas conjugadas**. Nuestro objetivo es entender cómo este concepto está relacionado con las funciones analíticas. En el aspecto práctico, funciones armónicas son importantes en las áreas de matemáticas aplicadas, la ingeniería y la física matemática. Funciones armónicas se utilizan para resolver problemas que implican temperaturas en estado estacionario, la electrostática en dos dimensiones y el flujo de un fluido ideal.

Comenzamos con un teorema importante que relaciones funciones analíticas y armónicas. En [3], se esboza una demostración al teorema 1.15.

**Teorema 1.15.** *Sea  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  una función analítica en el dominio  $D$ . Entonces ambas  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  son funciones armónicas en  $D$ . En otras palabras, las partes real e imaginaria de una función analítica son armónicas.*

**Definición 1.15 (Función Armónica Conjugada).** *Si tenemos una función  $u(x, y)$  que es armónica en el dominio  $D$  y si podemos encontrar otra función armónica  $v(x, y)$  tal que las derivadas parciales de  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo  $D$ , entonces decimos que  $v(x, y)$  es una función armónica conjugada de  $u(x, y)$ . Además, se sigue entonces que la función  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  es analítica en  $D$ .*

El teorema 1.15 desbloquea la relación entre funciones armónicas, funciones armónicas conjugadas y funciones analíticas. En concreto, se establece claramente la relación especial entre una función armónica y su armónica conjugada. En términos generales, la función armónica es la parte real de la función analítica dada y la función conjugada armónica es la parte imaginaria de la función analítica dada.

## 1.4. Funciones Elementales

¿Cómo deberían las funciones de valores complejos, tales como  $e^z$ ,  $\log(z)$ ,  $\operatorname{sen}(z)$ , etc. ser definidas? Claramente, cualquier definición formal debe satisfacer los siguientes criterios.

- i. Las funciones deben ser analíticas.
- ii. Las funciones así definidas deben dar los mismos valores que las correspondientes funciones de variable real cuando el número  $z$  es un número real.

iii. En lo posible, las propiedades de estas nuevas funciones deben coincidir con sus homólogas reales. Por ejemplo, nos gustaría que  $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$  sea válido independientemente de si  $z$  es un número real o complejo.

### 1.4.1. La Función Exponencial Compleja

Deseamos definir la función exponencial compleja  $f(z) = e^z$  que sea analítica y que coincida con la función exponencial real cuando  $z = x$ . Recordemos que la función exponencial real  $f(x) = e^x$  satisface la ecuación diferencial

$$f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1,$$

nos preguntamos si existe una solución analítica de la ecuación

$$f'(z) = f(z), \quad f(0) = 1.$$

Si tal solución existe, necesariamente deberá coincidir con  $e^x$  cuando  $z = x$ , pues sólo así satisfará la ecuación que la determina sobre el eje real. De la definición de  $f'$ , tenemos

$$u_x + iv_x = u + iv, \quad u(0) = 1, \quad v(0) = 0.$$

Como  $u_x = u$ ,  $v_x = v$ , al separar variables, tenemos

$$u(x, y) = p(y)e^x, \quad v(x, y) = q(y)e^x,$$

con  $p(0) = 1$ ,  $q(0) = 0$  por las condiciones iniciales. Derivemos estas dos ecuaciones con respecto a  $y$ , y apliquemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann, para obtener

$$p'(y)e^x = u_y = -v_x = -q(y)e^x, \quad q'(y)e^x = v_y = u_x = p(y)e^x.$$

Por tanto,  $p' = -q$ ,  $q' = p$ , así que

$$q'' = p' = -q, \quad p'' = -q' = -p,$$

y  $p$ ,  $q$  son soluciones de la ecuación diferencial real  $\phi''(y) + \phi(y) = 0$ . Todas las soluciones de esta ecuación son de la forma  $A \cos(y) + B \sin(y)$ , con  $A$  y  $B$  constantes. Como  $q'(0) = p(0) = 1$ ,  $p'(0) = -q(0) = 0$ , debemos tener  $p(y) = \cos(y)$ ,  $q(y) = \sin(y)$ . Por tanto, obtenemos la función

$$f(z) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) = e^x(\cos(y) + i \sin(y)),$$

que coincide con  $e^x$  cuando  $z = x$  y es analítica, puesto que su construcción garantiza que las parciales son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

**Definición 1.16.** Para todo número complejo  $z = x + iy$ , se define la exponencial compleja como

$$e^z = \exp(z) = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) \tag{1.54}$$

**Teorema 1.16. (La Función Exponencial)** *La función  $\exp(z) = e^z$  es una función entera que satisface las siguientes condiciones:*

i.  $\frac{d}{dz} \exp(z) = \exp(z) = e^z$ , usando la notación de Leibniz  $\frac{d}{dz} e^z = e^z$ .

ii.  $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$ , es decir,  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ .

En [1] se esboza una demostración del teorema 1.16.

Ahora exploramos algunas propiedades adicionales de  $\exp(z) = e^z$ . Usando la identidad 1.54, podemos establecer fácilmente que

$$e^{z+i2n\pi} = e^z, \text{ para todo } z, \text{ siempre que } n \text{ sea un entero} \quad (1.55)$$

$$e^z = 1, \text{ si y sólo si } z = i2n\pi, \text{ donde } n \text{ es un entero, y} \quad (1.56)$$

$$e^{z_1} = e^{z_2}, \text{ si y sólo si } z_2 = z_1 + i2n\pi, \text{ para algún entero } n \quad (1.57)$$

Por ejemplo, debido a que la identidad 1.54 involucra las funciones periódicas  $\cos y$  y  $\sin y$ , dos puntos cualesquiera en el plano  $z$  que se encuentran en la misma línea vertical con sus partes imaginarias que difieren en un múltiplo entero de  $2\pi$  se mapean en el mismo punto en el punto  $w$ . Así, la función exponencial compleja es periódica con periodo  $2\pi$ , que se establece en la ecuación 1.55.

Ahora analicemos el rango de la función exponencial. Si  $z = x + iy$ , vemos de la identidad 1.54 que  $e^z$  nunca puede ser igual a 0, ya que  $e^x$  nunca es cero, y las funciones coseno y seno nunca son cero en el mismo punto. Supongamos entonces, que  $w = e^z \neq 0$ . Si escribimos  $w$  en su forma exponencial como  $w = \rho e^{i\phi}$ , la identidad 1.54 nos da

$$\rho e^{i\phi} = e^x e^{iy}$$

usando la propiedad 1.8, obtenemos

$$\rho = e^x \text{ y } \phi = y + 2n\pi, \text{ donde } n \text{ es un entero}$$

Por tanto

$$\rho = |e^z| = e^x \text{ y } \phi \in \arg(e^z) = \{\text{Arg}(e^z) + 2n\pi : n \text{ es un entero}\}$$

Resolviendo estas ecuaciones para  $x$  e  $y$ , se tiene

$$x = \ln(\rho) \text{ y } y = \phi + 2n\pi, \text{ donde } n \text{ es un entero} \quad (1.58)$$

Por tanto, para cualquier número complejo  $w \neq 0$ , existe un número infinito de números complejos  $z = x + iy$  tal que  $w = e^z$ . A partir de las ecuaciones anteriores, vemos que los números  $z$  son

$$z = x + iy = \ln|\rho| + i(\phi + 2n\pi)$$

$$z = \ln|w| + i(\text{Arg}(w) + 2n\pi), \text{ donde } n \text{ es un entero.} \quad (1.59)$$

Por lo tanto

$$\exp[\ln|w| + i(\text{Arg}(w) + 2n\pi)] = w$$

$$e^{(\ln|w| + i(\text{Arg}(w) + 2n\pi))} = w$$

En resumen la transformación  $w = e^z$  mapea el plano complejo (un número infinito de veces) en el conjunto de los números complejos no nulos.

### 1.4.2. La Función Logaritmo Complejo

Anteriormente demostramos que si  $w$  es un número complejo distinto de cero, entonces la ecuación  $w = e^z$  tiene infinitas soluciones. Dado que la función  $f(z) = e^z$  es una función de muchos a uno, es decir, para cualesquiera dos puntos en el plano  $z$  con sus partes imaginarias que difieren en un múltiplo entero de  $2\pi$  se mapean en el mismo punto en el plano  $w$ , entonces su inversa (el logaritmo) es una función de uno a muchos, es decir, a cada número complejo se le asocian infinitos valores complejos, que tienen la misma parte real pero su parte imaginaria difiere entre ellos en un múltiplo entero de  $2\pi$ .

**Definición 1.17 (Logaritmo de Varios Valores).** Para  $z \neq 0$ , definimos la función  $\log(z)$  como la inversa de la función exponencial, es decir,

$$\log(z) = w \text{ si y sólo si } z = e^w \quad (1.60)$$

Si seguimos los mismos pasos que hicimos en las ecuaciones 1.58 y 1.59, obtenemos que para cualquier número complejo  $z \neq 0$ , las soluciones de  $w$  en 1.60 toman la forma

$$w = \log(z) = \ln|z| + i\theta, \quad \text{para } z \neq 0 \quad (1.61)$$

donde  $\theta \in \arg(z)$  y  $\ln(z)$  denota el logaritmo natural del número positivo  $|z|$ . Debido a que  $\arg(z)$  es el conjunto  $\arg(z) = \{\text{Arg}(z) + 2n\pi : \text{donde } n \text{ es un entero}\}$ , podemos expresar el conjunto de valores que comprende  $\log(z)$  como

$$\log(z) = \{\ln|z| + i(\text{Arg}(z) + 2n\pi) : \text{donde } n \text{ es un entero}\} \quad (1.62)$$

o

$$\log(z) = \ln|z| + i \arg(z), \quad z \neq 0 \quad (1.63)$$

donde se entiende que la identidad 1.63 se refiere a la misma serie de números dados en la identidad 1.62.

Recordemos que  $\text{Arg}(z)$  es definido de modo que para  $z \neq 0$ , tengamos  $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$ . Llamamos a cualquiera de los valores dados en las identidades 1.62 y 1.63 un logaritmo de  $z$ . Tenga en cuenta que los diferentes valores de  $\log(z)$  todos tienen la misma parte real y que sus partes imaginarias difieren en la cantidad  $2n\pi$ , donde  $n$  es un entero. Cuando  $n = 0$  tenemos una situación especial.



**Definición 1.18 (Valor Principal del Logaritmo).** Para  $z \neq 0$ , definimos el valor principal del logaritmo de la siguiente manera:

$$\text{Log}(z) = \ln|z| + i \text{Arg}(z); \quad \text{donde } |z| > 0 \quad \text{y} \quad -\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi \quad (1.64)$$

Hacemos hincapié una vez más que  $\text{Log}(z)$  es una función de un solo valor que se obtiene cuando  $n = 0$  en la ecuación 1.62. La función  $\text{Arg}(z)$  es discontinua en cada punto a lo largo del eje  $x$  negativo, por tanto, también lo es la función  $\text{Log}(z)$ . De hecho, debido a que cualquier rama de la función de múltiples valores  $\text{Arg}(z)$  es discontinua a lo largo de algún rayo, una rama correspondiente del logaritmo también tendrá una discontinuidad a lo largo de ese mismo rayo. La rama principal,  $\text{Log}(z)$ , es discontinua en cada punto a lo largo del eje negativo  $x$ .

Ahora investigamos algunas de las propiedades de  $\log(z)$  y  $\text{Log}(z)$ . A partir de las ecuaciones 1.60, 1.62 y 1.64, se deduce que

$$\exp(\text{Log}(z)) = z; \quad \text{para todo } z \neq 0 \quad (1.65)$$

y

$$\text{Log}(\exp(z)) = z; \quad \text{siempre que } -\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi \quad (1.66)$$

Cuando  $z = x + i0$ , donde  $x$  es un número real positivo, el valor principal del

logaritmo complejo de  $z$  es

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(z) &= \ln|x + i0| + i \operatorname{Arg}(x + i0) \\ &= \ln|x| + i \operatorname{Arg}(x) \\ &= \ln(x) + i(0) \\ &= \ln(x)\end{aligned}$$

donde  $x > 0$ . Por lo tanto  $\operatorname{Log}(x)$  es una extensión de la función real  $\ln(x)$  para el caso complejo. Vamos a utilizar la teoría de funciones complejas para encontrar la derivada de  $\operatorname{Log}(z)$ .

Cuando usamos coordenadas polares para  $z = re^{i\theta} \neq 0$  la ecuación 1.64 se convierte en

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(z) &= \operatorname{Log}(re^{i\theta}) \\ &= \ln|re^{i\theta}| + i \operatorname{Arg}(re^{i\theta}) \\ &= \ln|r| + i\theta; \quad \text{para } r > 0 \quad \text{y} \quad -\pi < \theta \leq \pi \\ &= u(r, \theta) + iv(r, \theta)\end{aligned}$$

donde  $u(r, \theta) = \ln(r)$  y  $v(r, \theta) = \theta$ . Debido a que  $\operatorname{Arg}(z)$  es discontinua sólo en los puntos de su dominio que se encuentran en el eje real negativo,  $u$  y  $v$  tienen parciales continuas para cualquier punto  $(r, \theta)$  en su dominio, siempre que  $re^{i\theta}$  no

está en el eje real negativo, es decir,  $-\pi < \theta < \pi$  (Tenga en cuenta la desigualdad estricta). Además la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen en esta región y como  $u_r(r, \theta) = \frac{1}{r}$ ,  $u_\theta(r, \theta) = 0$ ,  $v_r(r, \theta) = 0$  y  $v_\theta(r, \theta) = 1$  tenemos que

$$u_r(r, \theta) = \frac{1}{r} = \frac{1}{r} v_\theta(r, \theta)$$

y

$$u_\theta(r, \theta) = 0 = \frac{-1}{r} 0 = -\frac{1}{r} v_r(r, \theta)$$

Usando el Teorema 1.12, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{Log}(z) &= e^{-i\theta} (u_r(r, \theta) + i u_\theta(r, \theta)) \\ &= e^{-i\theta} \left( \frac{1}{r} + 0i \right) \\ &= \frac{1}{r e^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{z} \end{aligned}$$

siempre que  $r > 0$  y  $-\pi < \theta < \pi$ . Así, la rama principal del logaritmo tiene la derivada que esperaríamos.

**Teorema 1.17.** *La identidad  $\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2)$  es verdadera si y sólo si  $-\pi < \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) \leq \pi$*

En [1] se esboza una demostración del teorema 1.17.

**Teorema 1.18.** Sean  $z_1$  y  $z_2$  números complejos no nulos. La función de varios valores  $\log(z)$  cumple las propiedades conocidas de los logaritmos:

$$\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) \quad (1.67)$$

$$\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log(z_1) - \log(z_2) \quad (1.68)$$

$$\log\left(\frac{1}{z}\right) = -\log(z) \quad (1.69)$$

En [1] se esboza una demostración del teorema 1.18.

Podemos construir muchas ramas diferentes de la función logaritmo de varios valores que son continuas y diferenciables excepto en puntos a lo largo de cualquier rayo preasignado  $\{re^{i\alpha} : r > 0\}$ . Supongamos que  $\alpha$  denota un número real fijo y elegimos el valor de  $\theta \in \arg(z)$ , que se encuentra en el intervalo  $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$ , entonces la función  $\log_\alpha(z)$  definida por

$$\log_\alpha(z) = \ln r + i\theta \quad (1.70)$$

donde  $z = re^{i\alpha} \neq 0$ , y  $\alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi$ , es una rama de un solo valor de la función logarítmica. La rama cortada por  $\log_\alpha(z)$  es el rayo  $\{re^{i\alpha} : r > 0\}$ , y cada punto a lo largo de este rayo es un punto de discontinuidad de  $\log_\alpha(z)$ .

Podemos calcular fácilmente la derivada de cualquier rama del logaritmo de varios valores. Para una rama particular  $w = \log_\alpha(z)$  de  $z = re^{i\theta} \neq 0$  y  $\alpha <$

$\theta \leq \alpha + 2\pi$  (tenga en cuenta la desigualdad estricta para  $\theta$ ), comenzamos con  $z = \exp(w)$  en la Ecuación 1.60 y diferenciamos ambos lados para obtener

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{d}{dz} z \\ &= \frac{d}{dz} \exp(\log_\alpha(z)) \\ &= \exp(\log_\alpha(z)) \frac{d}{dz} \log_\alpha(z) \\ &= z \frac{d}{dz} \log_\alpha(z) \end{aligned}$$

Resolviendo para  $\frac{d}{dz} \log_\alpha(z)$  obtenemos

$$\frac{d}{dz} \log_\alpha(z) = \frac{1}{z}, \text{ para } z = re^{i\theta} \neq 0 \text{ y } \alpha < \theta \leq \alpha + 2\pi.$$

### 1.4.3. Exponentes Complejos

La identidad 1.67 nos da  $\log(z^n) = n \log(z)$ , donde  $n$  es cualquier número natural, de modo que  $e^{\log(z^n)} = e^{n \log(z)} = z^n$  para  $z \neq 0$ . Con estos preliminares, podemos llegar a la definición de un número complejo elevado a una potencia compleja.

**Definición 1.19.** Sea  $c$  un número complejo. Definimos  $z^c$  como sigue

$$z^c = e^{c \log(z)} \tag{1.71}$$

El lado derecho de la ecuación 1.71 es un conjunto. Esta definición tiene sentido, por que si ambos  $z$  y  $c$  son números reales con  $z > 0$ , la ecuación 1.71 da la definición familiarizada (real) para  $z^c$ .

Debido a que  $\log(z)$  tiene múltiples valores, la función  $z^c$  tendrá en general, varios valores. Si queremos centrarnos en un sólo valor para  $z^c$ , podemos hacerlo a través de la función definida para  $z \neq 0$  por

$$f(z) = \exp(c \operatorname{Log}(z)) \quad (1.72)$$

que es llamada la rama principal de la función de varios valores  $z^c$ . Tenga en cuenta que la rama principal de  $z^c$  se obtiene de la ecuación 1.71 mediante la sustitución de  $\log(z)$  por la rama principal del logaritmo.

Consideremos ahora las diferentes posibilidades que pueden surgir de la definición de  $z^c$ .

**Caso (i).** Supongamos  $c = k$  donde  $k$  es un entero. Entonces, si  $z = re^{i\theta} \neq 0$ ,

$$k \log(z) = \{k \ln(r) + ik(\theta + 2n\pi) : n \text{ es un entero}\}$$

**Caso (ii).** Si  $c = \frac{1}{k}$  donde  $k$  es un entero y  $z = re^{i\theta} \neq 0$ , entonces

$$\frac{1}{k} \log(z) = \left\{ \frac{1}{k} \ln(r) + \frac{i(\theta + 2\pi n)}{k} : n \text{ es un entero} \right\} \quad (1.73)$$

Por lo tanto la ecuación 1.71 se convierte en

$$z^{\frac{1}{k}} = r^{\frac{1}{k}} \left( \cos \frac{\theta + 2n\pi}{k} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2n\pi}{k} \right); \text{ para } n = 0, 1, \dots, k-1.$$

**Caso (iii).** Si  $j$  y  $k$  son enteros positivos que no tienen factores comunes y  $c = \frac{j}{k}$ , entonces la ecuación 1.71 se convierte en

$$z^{\frac{j}{k}} = r^{\frac{j}{k}} \left( \cos \frac{(\theta + 2n\pi)j}{k} + i \operatorname{sen} \frac{(\theta + 2n\pi)j}{k} \right); \text{ para } n = 0, 1, \dots, k-1.$$

**Caso (iv).** Supongamos que  $c$  no es un número racional, entonces existe un número infinito de valores para  $z^c$ , siempre que  $z = re^{i\theta} \neq 0$ .

Sean  $c, d$  números complejos,  $n$  un entero y  $z \neq 0$ , entonces se tienen las siguientes reglas para exponentes

$$z^{-c} = \frac{1}{z^c} \tag{1.74}$$

$$z^c z^d = z^{c+d} \tag{1.75}$$

$$\frac{z^c}{z^d} = z^{c-d} \tag{1.76}$$

$$(z^c)^n = z^{cn} \quad (1.77)$$

Podemos calcular la derivada de la rama principal de  $z^c$ , que es la función

$$f(z) = \exp[c \operatorname{Log}(z)].$$

Por medio de la regla de la cadena,

$$f'(z) = \frac{c}{z} \exp[c \operatorname{Log}(z)] \quad (1.78)$$

Si restringimos  $z^c$  a la rama principal,  $z^c = \exp[c \operatorname{Log}(z)]$ , entonces para  $z \neq 0$  y  $z$  no es un número real negativo, la ecuación 1.78 se puede escribir de la manera siguiente

$$\frac{d}{dz} z^c = z^c \left( \frac{c}{z} \right) = cz^{c-1}$$

Podemos utilizar la identidad 1.71 para definir la función exponencial con base  $b$ , donde  $b \neq 0$  es un número complejo

$$b^z = \exp [z \log(b)]$$

Si especificamos una rama del logaritmo, entonces  $b^z$  será de un sólo valor y podemos usar las reglas de derivación para demostrar que la rama resultante de



$b^z$  es una función analítica. La derivada de  $b^z$  está dada por

$$\frac{d}{dz} b^z = b^z \log_{\alpha}(b) \quad (1.79)$$

donde  $\log_{\alpha}(z)$  es cualquier rama del logaritmo cuya rama cortada no incluye el punto  $z = b$ .

#### 1.4.4. Funciones Trigonométricas e Hiperbólicas

Tomemos  $y$  un número real. A partir de las expresiones

$$e^{iy} = \cos(y) + i \operatorname{sen}(y)$$

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y) = \cos(y) - i \operatorname{sen}(y)$$

se despeja

$$\cos(y) = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \text{ y}$$

$$\operatorname{sen}(y) = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

Teniendo en cuenta que las expresiones de la derecha tienen sentido si cambio  $y$  por un número complejo  $z$ , podemos extender estas funciones al plano complejo como sigue

**Definición 1.20 (Las Funciones Seno y Coseno).**

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (1.80)$$

$$\operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (1.81)$$

Evidentemente, estas definiciones coinciden con sus equivalentes reales cuando  $z$  es real. Además  $\cos(z)$  y  $\operatorname{sen}(z)$  son funciones enteras.

Con estas definiciones, ahora es fácil introducir las otras funciones trigonométricas complejas, siempre y cuando los denominadores de estas expresiones sean distintos de cero.

**Definición 1.21.**

$$\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}, \quad \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\operatorname{sen}(z)}, \quad \sec(z) = \frac{1}{\cos(z)} \quad y \quad \csc(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z)}$$

Dado que las funciones seno y coseno coinciden con la real del seno y coseno cuando  $z$  es real, las funciones trigonométricas complejas restantes también coinciden con sus equivalentes reales. ¿Qué propiedades adicionales son comunes?.

Para empezar tenemos

**Teorema 1.19.** *Las funciones  $\operatorname{sen}(z)$  y  $\cos(z)$  son enteras, con*

$$\frac{d}{dz} \operatorname{sen}(z) = \cos(z) \quad y \quad \frac{d}{dz} \cos(z) = -\operatorname{sen}(z)$$

Ahora enumeramos varias propiedades adicionales. Para todo número complejo  $z$ ,

- i.  $\text{sen}(-z) = -\text{sen}(z)$
- ii.  $\text{cos}(-z) = \text{cos}(z)$
- iii.  $(\text{cos}(z))^2 + (\text{sen}(z))^2 = 1$

Las otras cuatro funciones trigonométricas, definidas en términos de las funciones seno y coseno por medio de las relaciones usuales son analíticas, excepto donde se anulan sus denominadores y satisfacen las reglas normales de derivación.

$$\frac{d}{dz} \tan(z) = \sec^2(z)$$

$$\frac{d}{dz} \cot(z) = -\text{csc}^2(z)$$

$$\frac{d}{dz} \sec(z) = \sec(z) \tan(z)$$

$$\frac{d}{dz} \text{csc}(z) = -\cot(z) \text{csc}(z)$$

Usando las ecuaciones (1.80) y (1.81) podemos obtener las siguientes identidades importantes:

$$\text{sen}(z) = \text{sen}(x + iy) = \text{sen}(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y) \quad (1.82)$$

$$\text{cos}(z) = \text{cos}(x + iy) = \text{cos}(x) \cosh(y) - i \text{sen}(x) \sinh(y) \quad (1.83)$$

Con las identidades (1.80)-(1.83), ahora podemos establecer otras propiedades de las funciones trigonométricas. Comenzando con algunos resultados periódicos.

Para todo número complejo  $z = x + iy$ ,

$$\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen}(z)$$

$$\operatorname{cos}(z + 2\pi) = \operatorname{cos}(z)$$

$$\operatorname{sen}(z + \pi) = -\operatorname{sen}(z)$$

$$\operatorname{cos}(z + \pi) = -\operatorname{cos}(z)$$

$$\operatorname{tan}(z + \pi) = \operatorname{tan}(z)$$

$$\operatorname{cot}(z + \pi) = \operatorname{cot}(z)$$

Si  $z, z_1$  y  $z_2$  son números complejos, entonces

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen}(z_1) \operatorname{cos}(z_2) + \operatorname{cos}(z_1) \operatorname{sen}(z_2)$$

$$\operatorname{cos}(z_1 + z_2) = \operatorname{cos}(z_1) \operatorname{cos}(z_2) - \operatorname{sen}(z_1) \operatorname{sen}(z_2)$$

$$\operatorname{sen}(2z) = 2 \operatorname{sen}(z) \operatorname{cos}(z),$$

$$\operatorname{cos}(2z) = (\operatorname{cos}(z))^2 - (\operatorname{sen}(z))^2,$$

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \operatorname{cos}(z).$$

Una solución de la ecuación  $f(z) = 0$  se llama un cero de la ecuación dada  $f$ .

Los ceros de la función seno y coseno son los siguientes:

$$\operatorname{sen}(z) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad z = n\pi, \quad \text{para} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.84)$$

$$\operatorname{cos}(z) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad z = (2n + 1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{para} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.85)$$

Además, se tienen las siguientes identidades importantes

$$|\operatorname{sen}(z)|^2 = \operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{senh}^2(y) \quad (1.86)$$

$$|\operatorname{cos}(z)|^2 = \operatorname{cos}^2(x) + \operatorname{senh}^2(y) \quad (1.87)$$

Las funciones hiperbólicas también tienen uso práctico en expresar la función tangente en la forma cartesiana  $u + iv$ . Usando la Definición 1.21, y las Ecuaciones 1.82 y 1.83, tenemos

$$\tan(z) = \tan(x + iy) = \frac{\operatorname{sen}(x + iy)}{\operatorname{cos}(x + iy)} = \frac{\operatorname{sen}(x) \operatorname{cosh}(y) + i \operatorname{cos}(x) \operatorname{senh}(y)}{\operatorname{cos}(x) \operatorname{cosh}(y) - i \operatorname{sen}(x) \operatorname{senh}(y)} \quad (1.88)$$

Si multiplicamos cada término a la derecha por el conjugado del denominador, el resultado simplificado es

$$\tan(z) = \frac{\cos(x) \operatorname{sen}(x) + i \cosh(y) \operatorname{senh}(y)}{\cos^2(x) \cosh^2(y) + \operatorname{sen}^2(x) \operatorname{senh}^2(y)}$$

Utilizando las identidades  $\cosh^2(y) - \operatorname{senh}^2(y) = 1$  y  $\operatorname{senh}(2y) = 2 \cosh(y) \operatorname{senh}(y)$  podemos simplificar la ecuación 1.88 para obtener

$$\tan(z) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos(2x) + \cosh(2y)} + i \frac{\operatorname{senh}(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)} \quad (1.89)$$

**Definición 1.22.** Las funciones seno y coseno hiperbólicos son

$$\cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) \quad y \quad \operatorname{senh}(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

Con estas definiciones, ahora es fácil introducir las otras funciones trigonométricas hiperbólicas complejas, con la condición de que los denominadores en las expresiones siguientes no sean cero.

**Definición 1.23.** Las identidades para las funciones trigonométricas hiperbólicas son

$$\begin{aligned} \tanh(z) &= \frac{\operatorname{senh}(z)}{\cosh(z)} & \coth(z) &= \frac{\cosh(z)}{\operatorname{senh}(z)} \\ \operatorname{sech}(z) &= \frac{1}{\cosh(z)} & \operatorname{csch}(z) &= \frac{1}{\operatorname{senh}(z)} \end{aligned}$$

Las derivadas de las funciones hiperbólicas siguen las mismas reglas que en el cálculo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \cosh(z) &= \operatorname{senh}(z) & y & \quad \frac{d}{dz} \operatorname{senh}(z) = \cosh(z) \\ \frac{d}{dz} \tanh(z) &= \operatorname{sech}^2(z) & y & \quad \frac{d}{dz} \coth(z) = -\operatorname{csch}^2(z) \\ \frac{d}{dz} \operatorname{sech}(z) &= -\operatorname{sech}(z) \tanh(z) & y & \quad \frac{d}{dz} \operatorname{csch}(z) = -\operatorname{csch}(z) \coth(z) \end{aligned}$$

Algunas de las identidades importantes que involucran las funciones hiperbólicas son:

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh(z_1) \cosh(z_2) + \cosh(z_1) \sinh(z_2)$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1) \cosh(z_2) + \sinh(z_1) \sinh(z_2)$$

$$\cosh(z + 2\pi i) = \cosh(z)$$

$$\sinh(z + 2\pi i) = \sinh(z)$$

$$\cosh(-z) = \cosh(z)$$

$$\sinh(-z) = -\sinh(z)$$

### 1.4.5. Funciones Trigonómicas e Hiperbólicas Inversas

Expresamos funciones trigonométricas e hiperbólicas en términos de la función exponencial. Ahora analizamos sus inversas, cuando resolvemos ecuaciones como  $w = \sen(z)$  para  $z$ , obtenemos fórmulas que involucran el logaritmo. Dado que las funciones trigonométricas e hiperbólicas son todas periódicas, son de muchos a uno; por lo tanto, sus inversas son necesariamente de varios valores. Las fórmulas para las funciones trigonométricas inversas son:

$$\left. \begin{aligned} \arcsen(z) &= -i \log(iz + \sqrt{1 - z^2}) \\ \arccos(z) &= -i \log(z + \sqrt{1 - z^2}) \\ \arctan(z) &= \frac{i}{2} \log\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1.90)$$

Las derivadas de  $\arcsen(z)$ ,  $\arccos(z)$  y  $\arctan(z)$  están dadas por las siguientes expresiones

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} \arcsen(z) &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \\ \frac{d}{dz} \arccos(z) &= \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}} \\ \frac{d}{dz} \arctan(z) &= \frac{1}{1+z^2} \end{aligned} \right\} \quad (1.91)$$

cuando  $z$  toma valores al menos en el semiplano superior  $\text{Im}(z) > 0$  obtenemos el valor principal para las funciones trigonométricas inversas

- i.  $\text{Arcsen}(z) = -i \text{Log}[iz + \sqrt{1-z^2}]$
- ii.  $\text{Arccos}(z) = \frac{\pi}{2} + i \text{Log}[iz + \sqrt{1-z^2}]$
- iii.  $\text{Arctan}(z) = \frac{i}{z} \text{Log} \left( \frac{i+z}{i-z} \right)$

Las funciones hiperbólicas inversas son:

$$\left. \begin{aligned} \text{arcsenh}(z) &= \log[z + \sqrt{z^2+1}] \\ \text{arccosh}(z) &= \log[z + \sqrt{z^2-1}] \\ \text{arctanh}(z) &= \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+z}{1-z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.92)$$

Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas son:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{arcsenh}(z) &= \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \\ \frac{d}{dz} \text{arccosh}(z) &= \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \\ \frac{d}{dz} \text{arctanh}(z) &= \frac{1}{1-z^2} \end{aligned}$$



El valor principal para las funciones hiperbólicas inversas son:

i.  $\operatorname{Arcsinh}(z) = \operatorname{Log}[z + \sqrt{z^2 + 1}]$

Al menos para valores de  $z$  en el primer cuadrante del semiplano superior.

ii.  $\operatorname{Arccosh}(z) = \operatorname{Log}[z + \sqrt{z^2 - 1}]$

Cuando  $z$  toma valores en el 1º y 4º cuadrante.

iii.  $\operatorname{Arctanh}(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left( \frac{1+z}{1-z} \right)$

## 1.5. Sucesiones y Series Complejas

Gran parte de la teoría de sucesiones y series complejas es análoga a la existente en cálculo real. En esta sección se analizan las definiciones de convergencia y divergencia para sucesiones complejas y series infinitas complejas. Además, se proporcionan algunos teoremas para estudiar la convergencia de series infinitas.

### 1.5.1. Sucesiones

Una **sucesión compleja**  $\{z_n\}$  es una función cuyo dominio es el conjunto de enteros positivos y cuyo rango es un subconjunto de los números complejos  $\mathbb{C}$ . En otras palabras, a cada entero  $n = 1, 2, 3, \dots$ , le asignamos un único número complejo  $z_n$ . Si el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$ , se dice que la sucesión  $\{z_n\}$  es **convergente**. En otras palabras,  $z_n$  converge al número  $L$  si para cada número real positivo  $\varepsilon$  se puede encontrar un número positivo  $N$  tal que  $|z_n - L| < \varepsilon$  siempre que  $n > N$ .

Ya que  $|z_n - L|$  es la distancia, los términos  $\{z_n\}$  de una sucesión que converge a  $L$  se pueden hacer arbitrariamente cercanos a  $L$ . En otras palabras, cuando una sucesión  $\{z_n\}$  converge a  $L$ , entonces, todos salvo un número finito de términos de la sucesión están dentro de cada vecindad  $\varepsilon$  de  $L$ . Una sucesión que no es convergente se dice que es **divergente**

**Teorema 1.20 (Criterio para la convergencia).** *Una sucesión  $\{z_n\}$  converge a un número complejo  $L = a + ib$  si y sólo si  $\operatorname{Re}(z_n)$  converge a  $\operatorname{Re}(L) = a$  e  $\operatorname{Im}(z_n)$  converge a  $\operatorname{Im}(L) = b$ .*

## 1.5.2. Series

Una **serie infinita** o **serie** de números complejos

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots$$

es **convergente** si la sucesión de sumas parciales  $\{S_n\}$ , donde

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n$$

converge. Si  $S_n \rightarrow L$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , se dice que la serie converge a  $L$  o que la **suma** de la serie es  $L$ .

Una **serie geométrica** es cualquier serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} az^{k-1} = a + az + az^2 + \dots + az^{n-1} + \dots \quad (1.93)$$

Para (1.93), el  $n$ -ésimo término de la sucesión de sumas parciales es

$$S_n = a + az + az^2 + \dots + az^{n-1} \quad (1.94)$$

Cuando una serie infinita es una serie geométrica, siempre es posible encontrar una fórmula para  $S_n$ . Para demostrar por qué esto es así, se multiplica  $S_n$  en (1.94) por  $z$ .

$$zS_n = az + az^2 + az^3 + \dots + az^n$$

y se resta este resultado a  $S_n$ . Se eliminan todos los términos excepto el primer término en  $S_n$  y el último término de  $zS_n$ .

$$\begin{aligned} S_n - zS_n &= (a + az + az^2 + \dots + az^{n-1}) - (az + az^2 + az^3 + \dots + az^{n-1} + az^n) \\ &= a - az^n \end{aligned}$$

o  $(1 - z)S_n = a(1 - z^n)$ . Resolviendo la última ecuación para  $S_n$  se obtiene.

$$S_n = \frac{a(1 - z^n)}{1 - z} \quad (1.95)$$

Ahora  $z^n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  siempre que el  $|z| < 1$ , y así  $S_n \rightarrow a/(1 - z)$ . En

otras palabras, para el  $|z| < 1$ , la suma de una serie geométrica (1.93) es  $a/(1 - z)$ :

$$\frac{a}{1 - z} = a + az + az^2 + \dots + az^{n-1} + \dots \quad (1.96)$$

Una serie geométrica (1.93) diverge cuando  $|z| \geq 1$ . Algunas sucesiones geométricas especiales son las siguientes:

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots \quad (1.97)$$

$$\frac{1}{1 + z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots \quad (1.98)$$

válida para  $|z| < 1$ .

$$\frac{1 - z^n}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1} \quad (1.99)$$

o, en su forma alternativa

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{n-1} + \frac{z^n}{1 - z} \quad (1.100)$$

**Teorema 1.21 (Condición necesaria para la convergencia).** Si  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .

**Teorema 1.22 (La prueba del  $n$ -ésimo término para la divergencia).** Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \neq 0$ , entonces la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  diverge.

En [3] se esboza una demostración de los teoremas 1.21 y 1.22.

**Teorema 1.23 (Convergencia absoluta y condicional).** Una serie infinita  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  se dice que es *absolutamente converge* si  $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$  converge. Una serie infinita  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  se dice que es *condicionalmente convergente* si converge, pero  $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$  diverge.

En [3] se esboza una demostración del teorema 1.23.

**Teorema 1.24 (Prueba de la razón).** Supongamos que  $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$  es una serie de términos complejos no nulos tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = L. \quad (1.101)$$

i Si  $L < 1$ , entonces la serie converge absolutamente.

ii Si  $L > 1$ , entonces la serie diverge.

iii Si  $L = 1$ , entonces la prueba no es concluyente.

En [3] se esboza una demostración del teorema 1.24.

### 1.5.3. Series de Potencias

El concepto de series de potencias es importante en el estudio de funciones analíticas. Una serie infinita de la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \cdots \quad (1.102)$$

donde los coeficientes  $a_k$  son constantes complejas, se llama una **series de potencias** de  $z - z_0$ . La serie de potencias (1.102) se dice que está **centrada en**  $z_0$ , el punto complejo  $z_0$  se conoce como el **centro** de la serie. En (1.102) también es conveniente definir  $(z - z_0)^0 = 1$  incluso cuando  $z = z_0$ .

Cada serie de potencias complejas (1.102) tiene un **radio de convergencia**. Análogamente al concepto de intervalo de convergencia en cálculo real, una serie de potencias compleja (1.102) tiene un **círculo de convergencia**, que es el círculo centrado en  $z_0$  de mayor radio  $R > 0$  para el cual (1.102) converge en todo el punto dentro del círculo  $|z - z_0| = R$ . Una serie de potencias converge absolutamente para todos los puntos  $z$  que satisfagan  $|z - z_0| < R$  y diverge en todos los puntos  $z$  exteriores al círculo, esto es, para todo  $z$  que satisface  $|z - z_0| > R$ . El radio de convergencia puede ser:

- i  $R = 0$  (en cuyo caso (1.102) converge únicamente en  $z = z_0$ ),
- ii  $R$  un número finito (en cuyo caso (1.102) converge en todos los puntos del interior del círculo  $|z - z_0| = R$ ) o
- iii  $R = \infty$  (en cuyo caso (1.102) converge para cualquier  $z$ ).

Una serie de potencias puede converger en algunos, todos o ninguno de los puntos del círculo de convergencia.

### 1.5.4. Serie de Taylor

La correspondencia entre un número complejo  $z$  del interior del círculo de convergencia y el número al que converge la serie  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  tiene un único valor. En este sentido, una serie de potencias define o representa una función  $f$ ; para una  $z$  específica en el interior del círculo de convergencia, el número  $L$  al que converge la serie de potencias se define como el valor de  $f$  en  $z$ , esto es,  $f(z) = L$ .

**Teorema 1.25 (Continuidad).** *Una serie de potencias  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  representa una función continua  $f$  en el interior de su círculo de convergencia  $|z - z_0| = R$ , siendo  $R \neq 0$ .*

En [3] se esboza una demostración del teorema 1.25.

**Teorema 1.26 (Derivación término a término).** *Una serie de potencias  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  puede derivarse término a término en el interior de su círculo de convergencia  $|z - z_0| = R$ , siendo  $R \neq 0$ .*

Supongamos que una serie de potencias representa una función  $f$  dentro de  $|z - z_0| = R$ , siendo  $R \neq 0$ ; es decir,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots \quad (1.103)$$

Por lo que se deduce del teorema 1.26 que las derivadas de  $f$  son las series

$$f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1} = a_1 + 2a_2(z - z_0) + 3a_3(z - z_0)^2 + \dots, \quad (1.104)$$

$$f''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1)(z - z_0)^{k-2} = 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3(z - z_0) + \dots, \quad (1.105)$$

$$f'''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k(k-1)(k-2)(z - z_0)^{k-3} = 3 \cdot 2 \cdot 1a_2 + 3 \cdot 2a_3 + \dots, \quad (1.106)$$

y así sucesivamente. Puesto que la serie de potencias (1.103) representa una función derivable  $f$  dentro de su círculo de convergencia  $|z - z_0| = R$ , donde  $R$  es ya sea un número positivo o infinito, se concluye que una serie de potencias representa una función analítica dentro de su círculo de convergencia.

Existe una relación entre los coeficientes de  $a_k$  en (1.103) y las derivadas de  $f$ .

Evaluando (1.103), (1.104), (1.105), (1.106) en  $z = z_0$  se obtiene

$$f(z_0) = a_0, \quad f'(z_0) = 1!a_1, \quad f''(z_0) = 2!a_2 \quad \text{y} \quad f'''(z_0) = 3!a_3$$

respectivamente. En general,  $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$ , o



$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n \geq 0 \quad (1.107)$$

Cuando  $n = 0$  en (1.107), podemos interpretar la derivada de orden cero como  $f(z_0) = 0! = 1$ , de modo que la fórmula de  $a_0 = f(z_0)$ . Sustituyendo (1.107) en (1.103) se obtiene

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad (1.108)$$

Esta serie se llama la **serie de Taylor** de  $f$  centrada en  $z_0$ . Una serie de Taylor con centro en  $z_0 = 0$ ,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \quad (1.109)$$

se conoce como una **serie de Maclaurin**.

**Teorema 1.27 (Teorema de Taylor).** *Sea  $f$  analítica dentro de un dominio  $D$  y sea  $z_0$  un punto en  $D$ . Entonces  $f$  tiene la representación en serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad (1.110)$$

*que es válida para el mayor círculo  $C$  con centro en  $z_0$  y radio  $R$  que se encuentra totalmente dentro de  $D$ .*

En [3] se esboza una demostración del teorema 1.27.

---

## Capítulo 2

---

---

# Transformaciones por Funciones

## Elementales

En esta capítulo se estudia la transformación de regiones del plano complejo a través de funciones elementales de variable compleja. Estudiamos el efecto de una función de variable compleja sobre un conjunto de números complejos como una transformación, ya que una diferencia entre una función  $f(z) = u + iv$  de una variable compleja y una función  $y = f(x)$  de variable real, es que, en general, la relación  $y = f(x)$  puede representarse gráficamente en el plano cartesiano, en cambio, no es tan fácil elaborar la gráfica de una función compleja.

Se requieren dos números  $x$  e  $y$  para definir un valor  $z$  cualquiera y otros dos números para los valores de  $u$  y  $v$  correspondientes. Por lo tanto, se requiere un espacio de cuatro dimensiones para representar  $w = f(z)$  en forma gráfica. Evidentemente una gráfica de cuatro dimensiones no es un medio conveniente para estudiar el efecto gráfico de una función de variable compleja. Sin embargo, es posible establecer  $w = f(z)$  y hacer dos copias del plano complejo, una para  $z$  y

la otra para los puntos imagen  $w$ .

Conforme  $z$  traza una trayectoria o varía sobre un conjunto  $S$  en el plano  $z$ , se trazan los puntos imagen  $w = f(z)$  en el plano  $w$ , obteniendo una figura de cómo actúa la función en esta trayectoria o en los puntos en  $S$ . El conjunto de todos los puntos imagen  $f(z)$  para  $z$  en  $S$  es denotado por  $f(S)$ . A una función de esta manera, se le llama *mapeo* o *transformación*. En la figura 2.1 se ilustra esta situación.

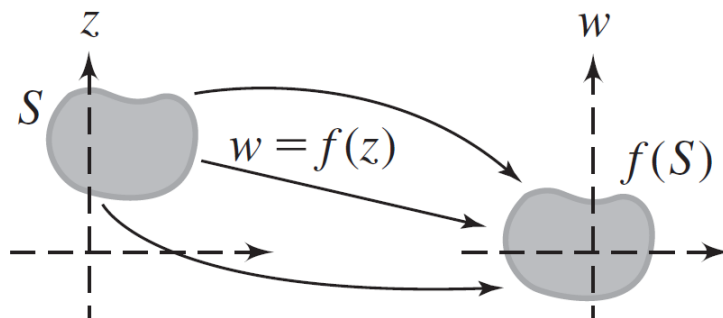


Figura 2.1: Transformación  $f(z)$

El objetivo principal de esta parte es determinar analítica y gráficamente el efecto que tiene un mapeo sobre un conjunto de puntos del plano complejo; pero primero necesitamos alguna terminología. Sea  $f$  una función compleja y  $D$  un conjunto de puntos en el plano complejo donde está definida  $f(z)$  y sea  $D^*$  también un conjunto de números en el plano complejo.

**Definición 2.1 (Transformación).** La función  $f$  transforma o aplica  $D$  en  $D^*$ , si  $f(z)$  está en  $D^*$  para todo  $z$  en  $D$ . En este caso, escribimos  $f : D \rightarrow D^*$ .

## 2.1. Transformaciones Afines

**Definición 2.2 (Transformación Afín).** *Una transformación Afín es una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forma*

$$f(z) = bz + c, \quad (2.1)$$

donde  $b, c \in \mathbb{C}$  y  $b \neq 0$ .

A continuación estudiaremos transformaciones del plano  $z$  en el plano  $w$  que corresponden a (2.1) para distintos valores de las constantes  $b$  y  $c$ . También introduciremos algunas propiedades generales de estas transformaciones.

**Definición 2.3 (Traslación).** *Una transformación afín  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forma*

$$f(z) = z + c \quad (2.2)$$

donde  $c \in \mathbb{C}$ , es una *traslación*.

La transformación del plano  $z$  en el plano  $w$  definida por la ecuación (2.2), es una traslación hecha mediante el vector representado por  $c$ . Es decir, si

$$z = x + iy \quad \text{y} \quad c = c_1 + ic_2$$

entonces la imagen de cualquier punto  $(x, y)$  en el plano  $z$  es el punto

$$w = f(z) = (x + c_1) + i(y + c_2)$$

En la Figura 2.2 se aprecia el movimiento geométrico que tiene un punto  $z_0$  cuando se transforma con una traslación.

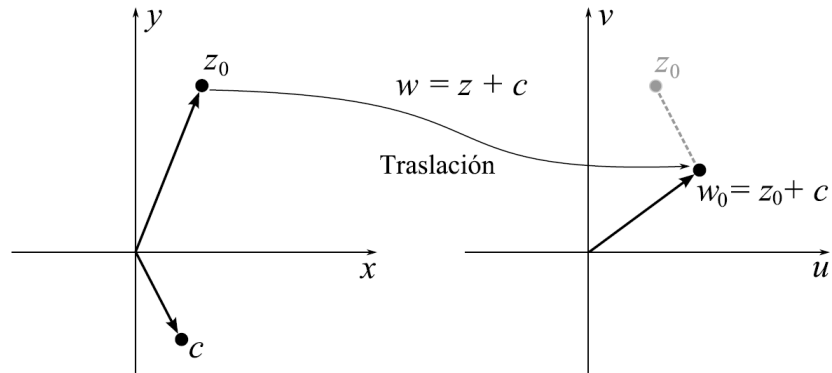


Figura 2.2: Movimiento geométrico de la traslación

**Proposición 2.1.** *Toda transformación afín  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forma  $f(z) = z + c$ , donde  $c \in \mathbb{C}$ , es uno a uno.*

*Demostración.* Sea  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  tal que  $f(z_1) = f(z_2)$ .

$$\begin{aligned} f(z_1) = f(z_2) &\Rightarrow z_1 + c = z_2 + c; \quad c \in \mathbb{C} \\ &\Rightarrow z_1 = z_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f(z) = z + c$  es uno a uno. ◇

La transformación (2.2) es uno a uno; por tanto, posee transformación inversa, la cual se encuentra mediante el siguiente proceso:

$$w = z + c \Rightarrow z = w - c \Rightarrow f^{-1}(w) = w - c$$

Por tanto, la transformación inversa de (2.2) es

$$f^{-1}(w) = w - c \quad (2.3)$$

**Teorema 2.1.** *La imagen de una recta en el plano  $z$ , bajo la transformación  $f(z) = z + c$  es una recta en el plano  $w$ .*

*Demostración.* Queremos encontrar la imagen bajo la transformación  $f(z) = z + c$  de una recta cualquiera en el plano  $z$ , para ello consideremos la ecuación

$$Ax + By + C = 0; \quad A, B, C \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

que representa una recta en el plano  $z$ .

Sean  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$  y  $c = c_1 + ic_2$ . De la transformación inversa dado por (2.3) tenemos.

$$\begin{aligned} f^{-1}(w) = w - c &\Rightarrow z = w - c \\ &\Rightarrow x + iy = u + iv - (c_1 + ic_2) \\ &\Rightarrow x + iy = (u - c_1) + i(v - c_2) \end{aligned}$$

Usando igualdad de números complejos en la expresión anterior obtenemos

$$x = u - c_1, \quad y = v - c_2$$

Ahora sustituyendo  $x$  e  $y$  en (2.4) se tiene.

$$\begin{aligned}Ax + By + C = 0 &\Rightarrow A(u - c_1) + B(v - c_2) + C = 0 \\&\Rightarrow Au - Ac_1 + Bv - Bc_2 + C = 0 \\&\Rightarrow Au + Bv + (C - Ac_1 - Bc_2) = 0 \\&\Rightarrow Au + Bv + C^* = 0; \quad C^* = C - Ac_1 - Bc_2\end{aligned}$$

Como la ecuación

$$Au + Bv + C^* = 0; \quad A, B, C^* \in \mathbb{R}$$

describe una recta en el plano  $w$ , se sigue que la aplicación  $f(z) = z + c$  transforma rectas en rectas. ◇

**Teorema 2.2.** *La imagen de una circunferencia en plano  $z$ , bajo la transformación  $w = z + c$  es una circunferencia en el plano  $w$ .*

*Demostración.* Para obtener el transformado de una circunferencia bajo la transformación  $w = z + c$ , utilizamos la transformación inversa dada por (2.3) de la siguiente forma. Sean  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$  y  $c = c_1 + ic_2$ , entonces

$$\begin{aligned}f^{-1}(w) = w - c &\Rightarrow x + iy = (u + iv) - (c_1 + ic_2) \\&\Rightarrow x + iy = u + iv - c_1 - ic_2 \\&\Rightarrow x + iy = (u - c_1) + i(v - c_2)\end{aligned}$$

Utilizando igualdad de números complejos en esta última expresión obtenemos

$$x = u - c_1, \quad y = v - c_2$$

Ahora, la ecuación general de una circunferencia está dada por

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0; \quad A, B, C \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

donde  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  y  $A \neq 0$ . Luego, sustituyendo los valores de  $x$  e  $y$  en la ecuación (2.5), obtenemos la siguiente ecuación

$$A((u - c_1)^2 + (v - c_2)^2) + B(u - c_1) + C(v - c_2) + D = 0$$

$$A(u^2 - 2uc_1 + c_1^2 + v^2 - 2vc_2 + c_2^2) + Bu - Bc_1 + Cv - Cc_2 + D = 0$$

$$Au^2 - 2Auc_1 + Ac_1^2 + Av^2 - 2Av c_2 + Ac_2^2 + Bu - Bc_1 + Cv - Cc_2 + D = 0$$

$$A(u^2 + v^2) + (B - 2Ac_1)u + (C - 2Ac_2)v + (Ac_1^2 + Ac_2^2 - Bc_1 - Cc_2 + D) = 0$$

Luego, haciendo  $B^* = B - 2Ac_1$ ,  $C^* = C - 2Ac_2$  y  $D^* = Ac_1^2 + Ac_2^2 - Bc_1 - Cc_2 + D$  obtenemos la siguiente ecuación.

$$A(u^2 + v^2) + B^*u + C^*v + D^* = 0$$

que describe analíticamente el conjunto transformado de una circunferencia, bajo la transformación  $f(z) = z + c$ . ◇

**Ejemplo 2.1.** Encontrar el transformado del triángulo con vértices  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = 2 + 3i$  y  $z_3 = 3 + i$  bajo la aplicación  $f(z) = z - i$ .



*Solución.* Sea  $f(z) = z - i$ . Las imágenes de los puntos  $z_1, z_2$ , y  $z_3$  bajo la aplicación  $f(z) = z - i$  son:

$$w_1 = f(z_1) = (1 + i) - i = 1 + i - i = 1$$

$$w_2 = f(z_2) = (2 + 3i) - i = 2 + 3i - i = 2 + 2i$$

$$w_3 = f(z_3) = (3 + i) - i = 3 + i - i = 3$$

Así el transformado del triángulo cuyos vértices son  $z_1, z_2$  y  $z_3$  es otro triángulo cuyos vértices son:

$$w_1 = 1, \quad w_2 = 2 + 2i, \quad w_3 = 3$$

La transformación  $w = z - i$  es una traslación de una unidad hacia abajo, como se muestra en la figura 2.3.

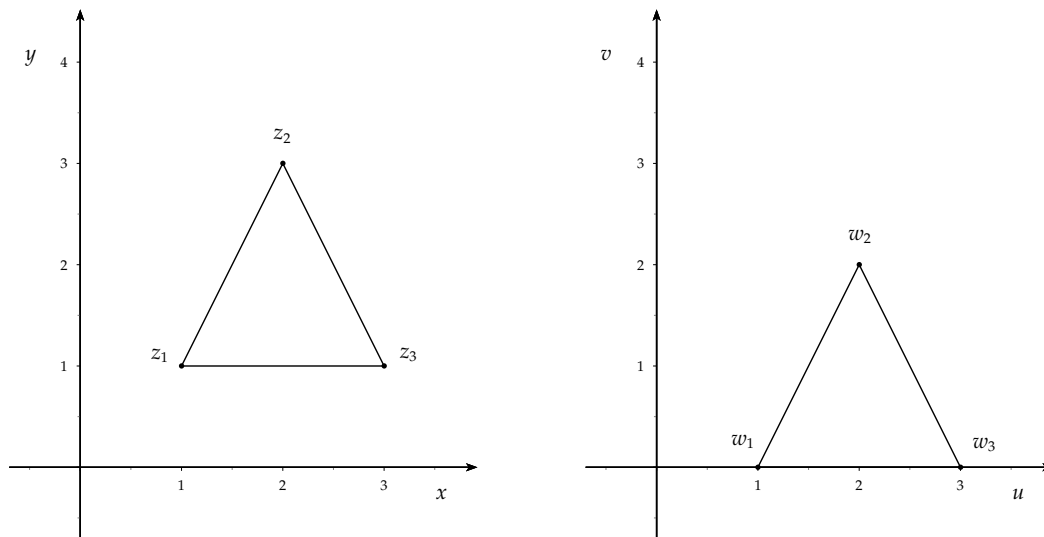


Figura 2.3: Transformado del triángulo con vértices  $z_1 = 1 + i$ ,  $z_2 = 2 + 3i$  y  $z_3 = 3 + i$  bajo la aplicación  $w = z - i$ .

**Definición 2.4 (Homotecia).** Se llama *homotecia* de razón  $\lambda > 0$  a la transformación afín  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forma

$$f(z) = \lambda z \quad (2.6)$$

Cuando  $\lambda > 1$  la homotecia recibe el nombre de **dilatación**, mientras que si  $\lambda < 1$  la homotecia recibe el nombre de **contracción**. Finalmente cuando  $\lambda = 1$  nos proporciona la **identidad** de un conjunto  $A \subset \mathbb{C}$  en sí mismo, es decir,  $f(A) = A$ .

**Definición 2.5 (Rotación-Homotecia).** Una *rotación-homotecia* es una transformación afín  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forma

$$f(z) = bz \quad (2.7)$$

donde  $b$  es una constante compleja distinta de cero.

Primero, observemos que

$$\begin{aligned} w = f(z) = bz &\Rightarrow |w| = |bz| \\ &\Rightarrow |w| = |b||z| \end{aligned}$$

de modo que el módulo del punto imagen  $w$  es el módulo de  $z$  multiplicado por la constante positiva  $|b|$ .

El vector que va del origen a  $w$  tiene magnitud  $|b|$  multiplicada por la magnitud del vector que va del origen a  $z$  en el plano  $z$ , por lo que recibe el nombre de

homotecia.

Al encontrar el argumento de un punto  $w$  bajo el mapeo  $f(z) = bz$  tenemos que

$$\begin{aligned}w = f(z) = bz &\Rightarrow \arg(w) = \arg(bz) \\ &\Rightarrow \arg(w) = \arg(z) + \arg(b)\end{aligned}$$

así, el mapeo gira a  $z$  en el sentido antihorario un ángulo  $\arg(b)$ , por lo que recibe el nombre de rotación.

Si  $|b| = 1$ , la transformación se llama **rotación pura**. En este caso, no hay dilatación ni contracción y el mapeo simplemente gira los puntos un ángulo igual a  $\arg(b)$ . Si  $\arg(b) = \theta$ , podemos escribir a la constante  $b = e^{i(\theta)}$ , con lo cual una rotación pura por un ángulo de  $\theta$  se puede escribir como

$$f(z) = e^{i(\theta)}z$$

Si  $|b| < 1$ , se dice que la transformación (2.7) es una rotación y contracción; en cambio, si  $|b| > 1$ , la transformación (2.7) es una rotación y dilatación.

La transformación  $f(z) = bz$  se puede visualizar fácilmente al utilizar la forma

exponencial de  $b$  y  $z$ . Tomando  $b = le^{i\beta}$  y  $z = re^{i\theta}$ , entonces

$$w = (lr)e^{i(\theta+\beta)} \quad (2.8)$$

La aplicación  $f(z) = bz$  transforma cualquier punto  $z$  diferente de cero con coordenadas polares  $(r, \theta)$  en el punto  $w$  distinto de cero cuyas coordenadas polares son  $(lr, \theta + \beta)$ . Efectivamente, la aplicación es una rotación del vector, representado por  $z$ , alrededor del origen, en un ángulo  $\beta = \arg(b)$  y también es una dilatación o contracción del vector por medio del factor  $l = |b|$ .

En la Figura 2.4 se aprecia el movimiento geométrico que tiene un punto  $z = re^{i\theta}$  cuando se transforma con la aplicación (2.7).

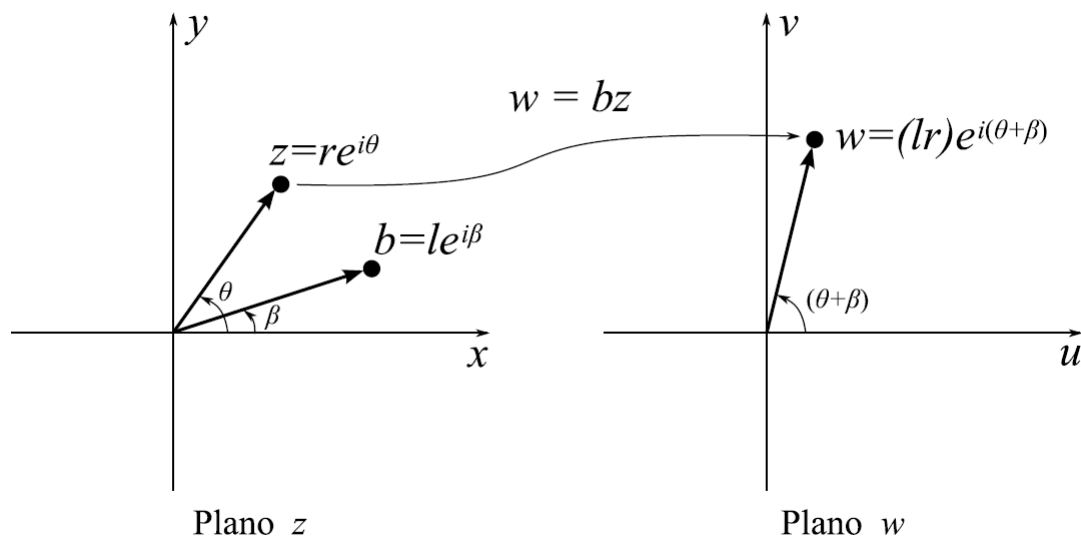


Figura 2.4: Movimiento geométrico de la rotación-homotecia

**Proposición 2.2.** Toda transformación afín  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forma  $f(z) = bz$ , donde  $b \in \mathbb{C}$  y  $b \neq 0$  es uno a uno.

*Demostración.* Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  tal que  $f(z_1) = f(z_2)$ .

$$\begin{aligned} f(z_1) = f(z_2) &\Rightarrow bz_1 = bz_2; \quad b \in \mathbb{C}, b \neq 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{b}(bz_1) = \frac{1}{b}(bz_2) \\ &\Rightarrow \left(\frac{b}{b}\right)z_1 = \left(\frac{b}{b}\right)z_2 \\ &\Rightarrow z_1 = z_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f(z) = bz$  es uno a uno. ◇

La transformación (2.7) es uno a uno; por tanto, posee transformación inversa, la cual se encuentra mediante el siguiente proceso

$$\begin{aligned} w = bz &\Rightarrow z = \frac{w}{b} \\ &\Rightarrow f^{-1}(w) = \frac{w}{b} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la transformación inversa de (2.7) es

$$f^{-1}(w) = \frac{w}{b} \tag{2.9}$$

**Teorema 2.3.** La imagen de una recta en plano  $z$ , bajo la transformación  $w = bz$  es una

recta en el plano  $w$ .

*Demostración.* Queremos encontrar la imagen bajo la transformación  $f(z) = bz$  de una recta cualquiera en el plano  $z$ , para ello consideremos la ecuación

$$Ax + By + C = 0; \quad A, B, C \in \mathbb{R} \quad (2.10)$$

que representa una recta en el plano  $z$ .

Sean  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ , y  $b = b_1 + ib_2$ . De la transformación inversa dado por (2.9) tenemos.

$$\begin{aligned} f^{-1}(w) = \frac{w}{b} &\Rightarrow x + iy = \frac{u + iv}{b_1 + ib_2} \\ &\Rightarrow x + iy = \frac{ub_1 + vb_2}{b_1^2 + b_2^2} + i \frac{vb_1 - ub_2}{b_1^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

Usando igualdad de números complejos en la expresión anterior obtenemos

$$x = \frac{ub_1 + vb_2}{b_1^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{vb_1 - ub_2}{b_1^2 + b_2^2}$$

Ahora sustituyendo  $x$  e  $y$  en (2.10) se tiene.

$$B \left( \frac{ub_1 + vb_2}{b_1^2 + b_2^2} \right) + C \left( \frac{vb_1 - ub_2}{b_1^2 + b_2^2} \right) + D = 0$$

$$\frac{Bub_1 + Bvb_2 + Cvb_1 - Cub_2}{b_1^2 + b_2^2} + D = 0$$

$$\frac{(Bb_1 - Cb_2)u + (Bb_2 + Cb_2)v}{b_1^2 + b_2^2} + D = 0$$

$$\frac{(Bb_1 - Cb_2)}{b_1^2 + b_2^2}u + \frac{(Bb_2 + Cb_2)}{b_1^2 + b_2^2}v + D = 0$$

Sea

$$E = \frac{(Bb_1 - Cb_2)}{b_1^2 + b_2^2} \quad y \quad F = \frac{(Bb_2 + Cb_2)}{b_1^2 + b_2^2}$$

y por tanto obtenemos

$$Eu + Fv + D = 0$$

Como la ecuación

$$Eu + Fv + D = 0; \quad E, F, D \in \mathbb{R}$$

describe una recta en el plano  $w$ , se sigue que la aplicación  $f(z) = bz$  transforma rectas en rectas. ◇

**Teorema 2.4.** *La imagen de una circunferencia en plano  $z$ , bajo la transformación  $w = bz$  es una circunferencia en el plano  $w$ .*

*Demostración.* Para obtener el transformado de una circunferencia bajo la transformación  $w = bz$ , utilizamos la transformación inversa dada por (2.9) de la siguiente forma. Sean  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ , y  $b = b_1 + ib_2$ , entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(w) = \frac{w}{b} &\Rightarrow x + iy = \frac{u + iv}{b_1 + ib_2} \\ &\Rightarrow x + iy = \frac{ub_1 + vb_2}{b_1^2 + b_2^2} + i \frac{vb_1 - ub_2}{b_1^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

utilizando igualdad de números complejos en esta ultima expresión obtenemos

$$x = \frac{ub_1 + vb_2}{b_1^2 + b_2^2}, \quad y = \frac{vb_1 - ub_2}{b_1^2 + b_2^2}$$

Ahora, la ecuación general de una circunferencia está dada por

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (2.11)$$

donde  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  y  $A \neq 0$ . Luego, sustituyendo los valores de  $x$  e  $y$  en la ecuación(2.11), obtenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & A \left( \left( \frac{ub_1 + vb_2}{b_1^2 + b_2^2} \right)^2 + \left( \frac{vb_1 - ub_2}{b_1^2 + b_2^2} \right)^2 \right) + B \left( \frac{ub_1 + vb_2}{b_1^2 + b_2^2} \right) + C \left( \frac{vb_1 - ub_2}{b_1^2 + b_2^2} \right) + D = 0 \\ & A \left[ \frac{(ub_1 + vb_2)^2 + (vb_1 - ub_2)^2}{(b_1^2 + b_2^2)^2} \right] + B \left( \frac{ub_1 + vb_2}{b_1^2 + b_2^2} \right) + C \left( \frac{vb_1 - ub_2}{b_1^2 + b_2^2} \right) + D = 0 \\ & A \left[ \frac{u^2b_1^2 + u^2b_2^2 + v^2b_1^2 + v^2b_2^2}{(b_1^2 + b_2^2)^2} \right] + B \left( \frac{ub_1 + vb_2}{b_1^2 + b_2^2} \right) + C \left( \frac{vb_1 - ub_2}{b_1^2 + b_2^2} \right) + D = 0 \\ & A \left[ \frac{u^2(b_1^2 + b_2^2) + v^2(b_1^2 + b_2^2)}{(b_1^2 + b_2^2)^2} \right] + B \left( \frac{ub_1 + vb_2}{b_1^2 + b_2^2} \right) + C \left( \frac{vb_1 - ub_2}{b_1^2 + b_2^2} \right) + D = 0 \\ & A \left[ \frac{u^2 + v^2(b_1^2 + b_2^2)}{(b_1^2 + b_2^2)^2} \right] + B \left( \frac{ub_1 + vb_2}{b_1^2 + b_2^2} \right) + C \left( \frac{vb_1 - ub_2}{b_1^2 + b_2^2} \right) + D = 0 \\ & A \left( \frac{u^2 + v^2}{b_1^2 + b_2^2} \right) + \frac{1}{b_1^2 + b_2^2} (Bub_1 + Bvb_2 + Cvb_1 - Cub_2) + D = 0 \\ & \frac{A}{b_1^2 + b_2^2} (u^2 + v^2) + \frac{1}{b_1^2 + b_2^2} ((Bb_1 - Cb_2)u + (Bb_2 + Cb_1))v + D = 0 \end{aligned}$$



$$\frac{A}{b_1^2 + b_2^2}(u^2 + v^2) + \left(\frac{Bb_1 - Cb_2}{b_1^2 + b_2^2}\right)u + \left(\frac{Bb_2 + Cb_1}{b_1^2 + b_2^2}\right)v + D = 0$$

Luego, haciendo  $M = \frac{A}{b_1^2 + b_2^2}$ ,  $N = \left(\frac{Bb_1 - Cb_2}{b_1^2 + b_2^2}\right)$  y  $P = \left(\frac{Bb_2 + Cb_1}{b_1^2 + b_2^2}\right)$  obtenemos la siguiente ecuación.

$$M(u^2 + v^2) + Nu + Pv + D = 0$$

que describe analíticamente el conjunto transformado de una circunferencia bajo  $w = bz$ . ◇

**Ejemplo 2.2.** Encontrar el transformado de una circunferencia de radio  $R$  centrada en el origen bajo la transformación  $w = \lambda z$ , donde  $\lambda \in \mathbb{R}$  y  $\lambda > 0$ .

*Solución.* La ecuación general de una circunferencia de radio  $R$  centrada en el origen está dada por

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{2.12}$$

Sean  $z = x + iy$  y  $w = u + iv$ , utilizando la transformación inversa dada por (2.9) obtenemos

$$\begin{aligned} f^{-1}(w) = \frac{w}{\lambda} &\Rightarrow x + iy = \frac{u + iv}{\lambda} \\ &\Rightarrow x + iy = \frac{u}{\lambda} + i\frac{v}{\lambda} \end{aligned}$$

Utilizando igualdad de números complejos en esta última expresión obtenemos

$$x = \frac{u}{\lambda}, \quad y = \frac{v}{\lambda}$$

Luego, sustituyendo los valores de  $x$  e  $y$  en (2.12) obtenemos la siguiente ecuación

$$u^2 + v^2 = (\lambda R)^2$$

que describe el conjunto transformado de una circunferencia centrada en el origen de radio  $\lambda R$  en plano  $w$ . Ahora, consideremos los siguientes casos para el valor de  $\lambda$ .

**CASO I: Cuando  $\lambda > 1$**

Si  $\lambda > 1$  entonces  $R < \lambda R$ . Por lo tanto, se obtiene una dilatación como se muestra en la siguiente figura.

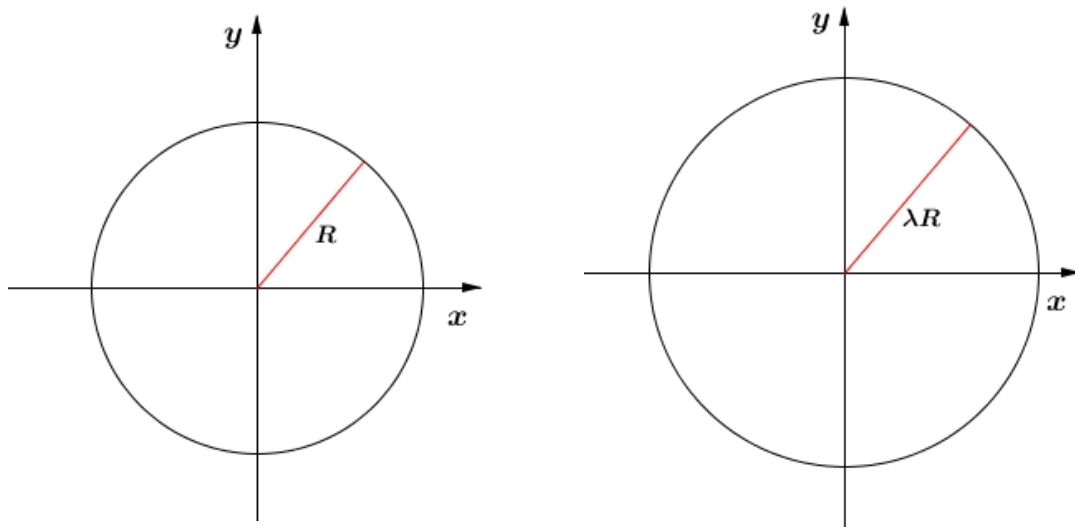


Figura 2.5: Transformado de una circunferencia de radio  $R$  centrada en el origen bajo la aplicación  $w = \lambda z$  para  $\lambda > 1$ .

**CASO II: Cuando  $\lambda < 1$**

Si  $\lambda < 1$  entonces  $R > \lambda R$ . Por lo tanto, se obtiene una contracción como se muestra en la siguiente figura.

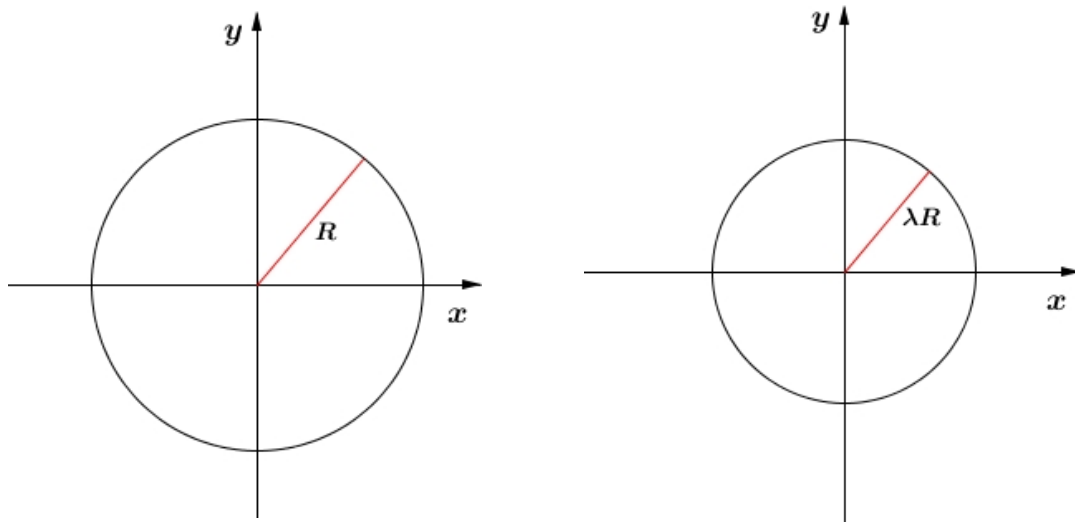


Figura 2.6: Transformado de una circunferencia de radio  $R$  centrada en el origen bajo la aplicación  $w = \lambda z$  para  $\lambda < 1$ .

**CASO III: Cuando  $\lambda = 1$**

Si  $\lambda = 1$  entonces  $R = \lambda R$ . Por lo tanto, se obtiene una identidad como se muestra en la siguiente figura.

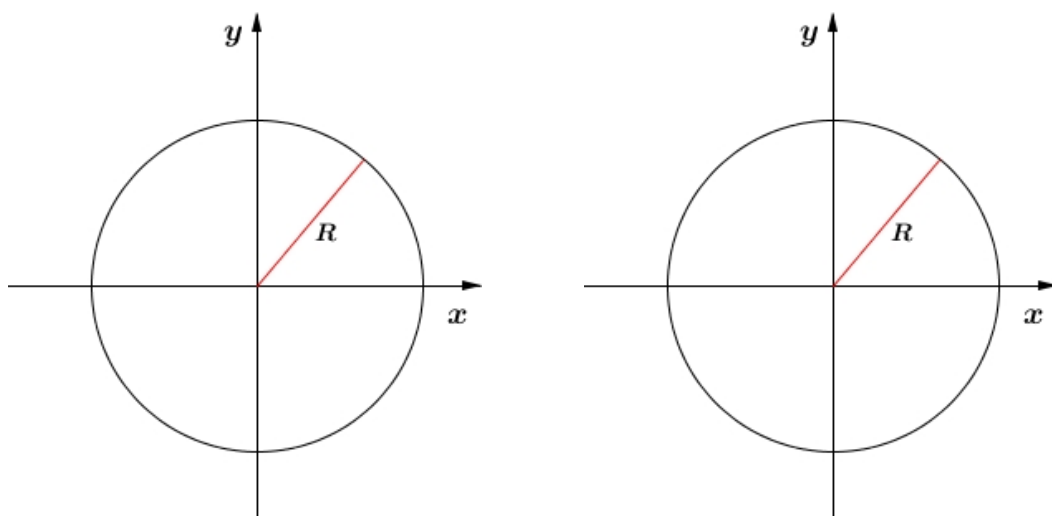


Figura 2.7: Transformado de una circunferencia de radio  $R$  centrada en el origen bajo la aplicación  $w = \lambda z$  para  $\lambda = 1$ .

**Ejemplo 2.3.** Encontrar el transformado del rectángulo cuyos vértices son  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 1 + 2i$ ,  $z_3 = 2 + 2i$  y  $z_4 = 2$  bajo la aplicación  $w = (1 + i)z$ .

*Solución.* Sea  $f(z) = (1 + i)z$ . Las imágenes de los puntos  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  y  $z_4$  bajo la aplicación  $f(z) = (1 + i)z$  son:

$$f(z_1) = (1 + i)(1) = 1 + i$$

$$f(z_2) = (1 + i)(1 + 2i) = 1 + 2i + i - 2 = -1 + 3i$$

$$f(z_3) = (1 + i)(2 + 2i) = 2 + 2i + 2i - 2 = 4i$$

$$f(z_4) = (1 + i)(2) = 2 + 2i$$

Así, el transformado del rectángulo dado en el plano  $z$  es otro rectángulo en el plano  $w$  cuyos vértices son:

$$w_1 = 1 + i, \quad w_2 = -1 + 3i, \quad w_3 = 4i \quad \text{y} \quad w_4 = 2 + 2i$$

Además tenemos que  $b = 1 + i$ , entonces  $\beta = \arg(1 + i) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$  y  $|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ .

Así el transformado del rectángulo en el plano  $z$  bajo la aplicación  $w = (1 + i)z$  es otro rectángulo en el plano  $w$  que ha sufrido una dilatación de factor  $\sqrt{2}$  y se ha rotado un ángulo de  $\frac{\pi}{4}$  como se muestra en la figura 2.8.

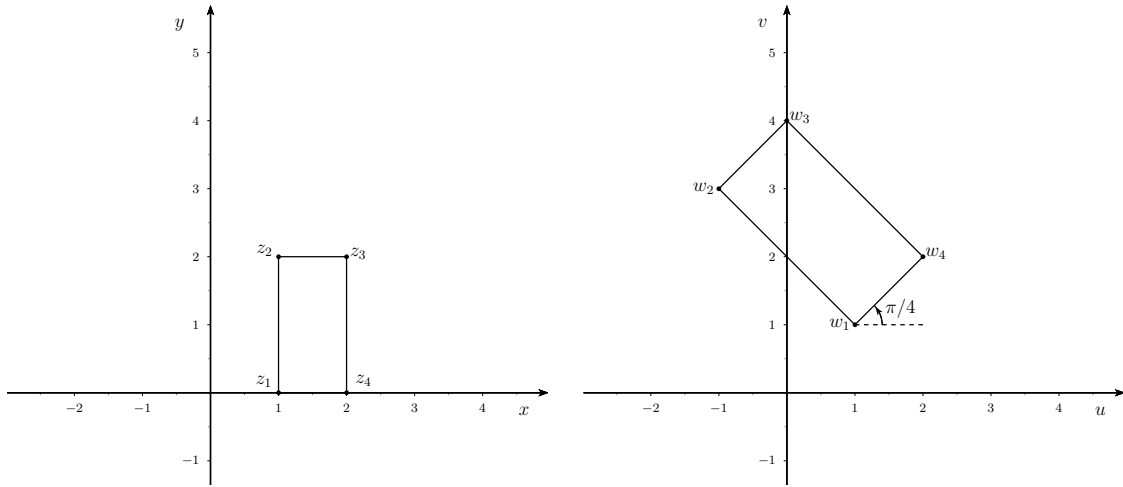


Figura 2.8: Transformado del rectángulo con vértices  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 1 + 2i$ ,  $z_3 = 2 + 2i$  y  $z_4 = 2$  bajo la aplicación  $w = (1 + i)z$ .

**Ejemplo 2.4.** Encontrar el transformado del rectángulo cuyos vértices son  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 1 + 2i$ ,  $z_3 = 2 + 2i$  y  $z_4 = 2$  bajo la aplicación  $w = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)z$ .

*Solución.* Sea  $f(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)z$ . Las imágenes de los puntos  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  y  $z_4$  bajo la aplicación  $f(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)z$  son:

$$f(z_1) = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(1) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

$$f(z_2) = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(1 + 2i) = \frac{1}{2} + i + \frac{i}{2} - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$f(z_3) = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(2 + 2i) = 1 + i + i - 1 = 2i$$

$$f(z_4) = \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(2) = 1 + i$$

Así, el transformado del rectángulo dado en el plano  $z$  es otro rectángulo en el

plano  $w$  cuyos vértices son:

$$w_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \quad w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3i}{2}, \quad w_3 = 2i \quad \text{y} \quad w_4 = 1 + i$$

Además tenemos que  $b = 1/2 + i/2$ , entonces  $\beta = \arg(1/2 + i/2) = \arctan(1) = \pi/4$  y  $|1/2 + i/2| = \sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{2}/2$ . Así el transformado del rectángulo en el plano  $z$  bajo la aplicación  $w = (1/2 + i/2)z$  es otro rectángulo en el plano  $w$  que ha sufrido una contracción de factor  $\sqrt{2}/2$  y se ha rotado un ángulo de  $\pi/4$  como se muestra en la figura 2.9.

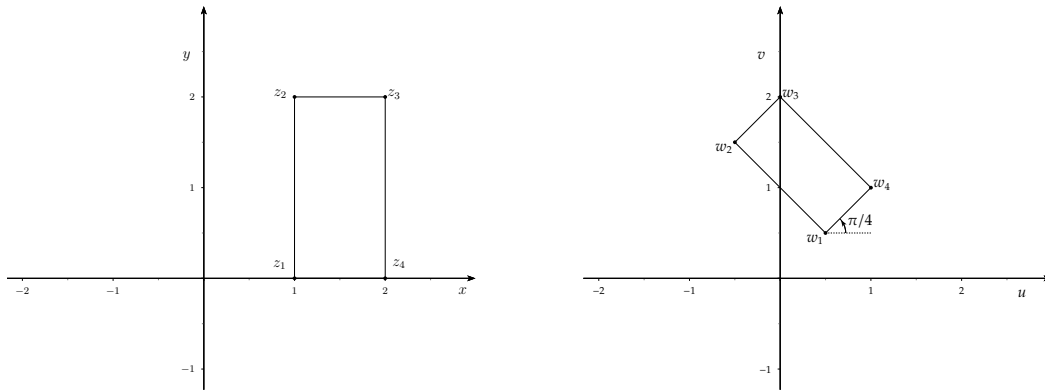


Figura 2.9: Transformado del rectángulo con vértices  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 1 + 2i$ ,  $z_3 = 2 + 2i$  y  $z_4 = 2$  bajo la aplicación  $w = (\frac{1}{2} + \frac{i}{2})z$ .

**Teorema 2.5.** *Cualquier transformación afín  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es la composición de una rotación, una homotecia y una traslación*

*Demostración.* Supongamos que  $f(z) = bz + c$ , donde  $b, c \in \mathbb{C}$ . Escribamos  $b$  en su forma polar, es decir,  $b = \rho e^{i\phi}$  donde  $\rho, \phi \in \mathbb{R}$  y  $\rho > 0$ .

Sea  $f_1(z) = e^{i\phi}z$  una rotación,  $f_2(z) = \rho z$  una homotecia y  $f_3(z) = z + c$  una traslación. Entonces

$$\begin{aligned}
 (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(z) &= f_3[f_2(f_1(z))] \\
 &= f_3[f_2(e^{i\phi}z)] \\
 &= f_3[\rho(e^{i\phi}z)] \\
 &= \rho(e^{i\phi}z) + c \\
 &= (\rho e^{i\phi})z + c \\
 &= bz + c; \quad b = \rho e^{i\phi} \\
 &= f(z)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, cualquier transformación afín es la composición de una rotación, una homotecia y una traslación.  $\diamond$

**Teorema 2.6.** *Toda transformación afín aplica rectas y circunferencias en rectas y circunferencias.*

*Demostración.* Sabemos que las transformaciones rotación-homotecia y traslación aplican rectas y circunferencias en rectas y circunferencias, respectivamente. De acuerdo con el teorema 2.5, toda transformación afín es una composición de una rotación, una homotecia y una traslación, por lo que se tiene lo deseado.  $\diamond$

**Ejemplo 2.5.** *Encuentre el transformado del rectángulo cuyos vértices son  $z_1 = 0$ ,  $z_2 =$*

$2i$ ,  $z_3 = 1 + 2i$  y  $z_4 = 1$  bajo la aplicación

$$w = (1 + i)z + 2 \quad (2.13)$$

*Solución.* Sea  $f(z) = (1 + i)z + 2$ . Las imágenes de los puntos  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$  bajo la aplicación  $f(z) = (1 + i)z + 2$  son:

$$f(z_1) = f(0) = (1 + i)(0) + 2 = 2 + 0i$$

$$f(z_2) = f(2i) = (1 + i)(2i) + 2 = 2i - 2 + 2 = 0 + 2i$$

$$f(z_3) = f(1 + 2i) = (1 + i)(1 + 2i) + 2 = 1 + 2i + i - 2 + 2 = 1 + 3i$$

$$f(z_4) = f(1) = (1 + i)(1) + 2 = 1 + i + 2 = 3 + i$$

Así, el transformado del rectángulo con vértices  $z_1, z_2, z_3$  y  $z_4$  en el plano  $z$ , es otro rectángulo en el plano  $w$  cuyos vértices son:

$$w_1 = 2 + 0i, \quad w_2 = 0 + 2i, \quad w_3 = 1 + 3i \quad \text{y} \quad w_4 = 3 + i$$

La aplicación (2.13) transforma la región rectangular en el plano  $z = (x, y)$  de la figura 2.10 sobre la región rectangular en el plano  $w = (u, v)$  que allí se indica. Esto se comprueba escribiendo  $f = h \circ g$ , donde

$$g(z) = (1 + i)z \quad \text{y} \quad h(z) = z + 2 \quad (2.14)$$



Si escribimos  $b = 1 + i$  y  $z$  en su forma polar tenemos

$$b = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{y} \quad z = re^{i\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Así la primera transformación de (2.14) se puede escribir en la forma

$$g(z) = (\sqrt{2}r)e^{i(\theta+\frac{\pi}{4})}$$

Por tanto, esta primera transformación dilata el radio vector de un punto  $z$  distinto de cero por el factor  $\sqrt{2}$  y gira hacia la izquierda  $\frac{\pi}{4}$  radianes alrededor del origen. La segunda transformación de (2.14) es, por supuesto, una traslación de dos unidades hacia la derecha.

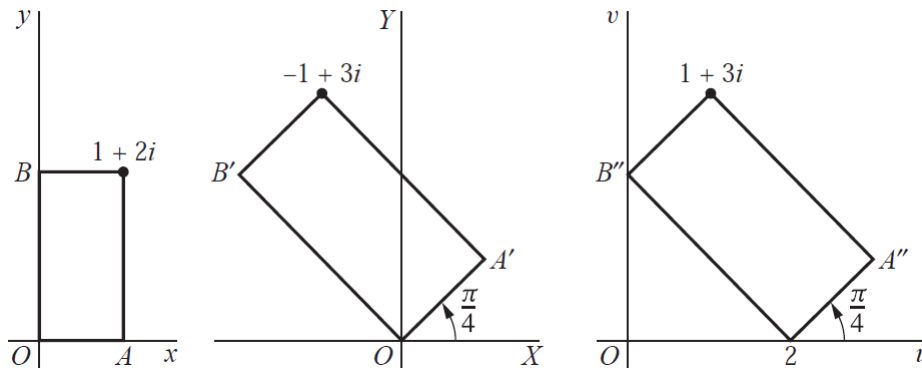


Figura 2.10: Transformación  $w = (1 + i)z + 2$

**Teorema 2.7.** *La composición de dos transformaciones afines es también una transformación afín.*

*Demostración.* Sean  $f_1(z) = b_1z + c_1$  y  $f_2(z) = b_2z + c_2$ , donde  $b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  y

$b_1, b_2 \neq 0$ . Entonces

$$\begin{aligned}(f_2 \circ f_1)(z) &= f_2(f_1(z)) \\ &= f_2(b_1z + c_1) \\ &= b_2(b_1z + c_1) + c_2 \\ &= b_1b_2z + (b_2c_1 + c_2) \\ &= b^*z + c^*; \quad b^* = b_1b_2, c^* = b_2c_1 + c_2 \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad b^* \neq 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, la composición de dos transformaciones afines es también una transformación afín.  $\diamond$

**Proposición 2.3.** *Toda transformación afín  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forma  $f(z) = bz + c$ , donde  $b, c \in \mathbb{C}$  y  $b \neq 0$  es uno a uno.*

*Demostración.* De las proposiciones 2.1 y 2.2 tenemos que las transformaciones de la forma  $g(z) = z + c$  y  $h(z) = bz$  donde  $b, c \in \mathbb{C}$  son uno a uno respectivamente.

Entonces

$$f(z) = bz + c = g(bz) = g(h(z)) = (g \circ h)(z)$$

es uno a uno, puesto que es la composición de dos funciones uno a uno.  $\diamond$

La transformación  $f(z) = bz + c$ , donde  $b, c \in \mathbb{C}$  y  $b \neq 0$  es uno a uno; por tanto, posee transformación inversa, la cual se encuentra mediante el siguiente proceso

$$\begin{aligned}
 w = bz + c &\Rightarrow bz = w - c \\
 &\Rightarrow z = \frac{w - c}{b} \\
 &\Rightarrow f^{-1}(w) = \frac{w - c}{b}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la transformación inversa es

$$f^{-1}(w) = \frac{w - c}{b}$$

## 2.2. Transformación Inversión

**Definición 2.6 (Transformación Inversión).** *Una transformación inversión es una función  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  de la forma*

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

donde  $z \neq 0$ .

Además, es posible ampliar el dominio de definición de la transformación inversión al plano complejo extendido. En primer lugar escribimos

$$T(z) = \frac{1}{z}$$

Puesto que  $T$  está definida para todos los puntos en el plano complejo extendido

excepto en los puntos  $z = 0$  y  $z = \infty$ , sólo necesitamos ampliar la definición de  $T$  que incluya estos puntos. Hacemos esta definición considerando el límite de  $T$  cuando  $z$  tiende a cero y cuando  $z$  tiende a infinito.

Como

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{T(z)} = \lim_{z \rightarrow 0} (z) = 0$$

entonces por (i) del teorema 1.7 se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow 0} T(z) = \infty$$

Por otra parte,

$$\lim_{z \rightarrow 0} T\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} (z) = 0$$

entonces por (ii) del teorema 1.7 se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow 0} T(z) = 0$$

Utilizando los límites anteriores, podemos definir la transformación inversión en el plano complejo extendido de la siguiente manera.

**Definición 2.7 (La Transformación Inversión sobre el Plano Complejo Extendido).** *La transformación inversión sobre el plano complejo extendido es la función definida*

por

$$T(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} & ; \text{ si } z \neq 0 \text{ o } z = \infty. \\ \infty & ; \text{ si } z = 0. \\ 0 & ; \text{ si } z = \infty. \end{cases} \quad (2.15)$$

Cuando ese dominio de definición se amplia de ese modo, la transformación inversión (2.15) es *uno a uno* del plano  $z$  extendido sobre el plano  $w$  extendido.

**Proposición 2.4.** *Si  $T : C_\infty \rightarrow C_\infty$  es una transformación inversión, entonces  $T$  es uno a uno.*

*Demostración.* Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  tal que  $T(z_1) = T(z_2)$  y  $z_1, z_2 \neq 0$ .

$$\begin{aligned} T(z_1) = T(z_2) &\Rightarrow \frac{1}{z_1} = \frac{1}{z_2} \\ &\Rightarrow z_2 \left( \frac{1}{z_1} \right) = z_2 \left( \frac{1}{z_2} \right) \\ &\Rightarrow \frac{z_2}{z_1} = 1 \\ &\Rightarrow z_1 \left( \frac{z_2}{z_1} \right) = z_1(1) \\ &\Rightarrow z_2 = z_1 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $T(z_1) = T(z_2)$  implica  $z_1 = z_2$ . Además por (2.15) tenemos que  $T(0) = \infty$  y  $T(\infty) = 0$ . Con lo cual la transformación inversión en el plano complejo extendido mapea puntos distintos sobre imágenes distintas es decir, es uno a uno. ◇

Una forma de visualizar la transformación  $f(z) = 1/z$ , es escribir el número  $z$  en su forma polar  $z = re^{i\theta}$ . Entonces la inversión se puede escribir como se ve a continuación:

$$f(z) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

Analizando la expresión anterior, se puede ver que la inversión lleva cada número  $z$  al semiplano horizontal opuesto en el plano complejo.

Otra forma conveniente de visualizar una inversión es utilizando su forma binomial,

$$f(z) = \frac{1}{x + iy} = \frac{(x - iy)}{(x^2 + y^2)} = \frac{x}{(x^2 + y^2)} + i\frac{-y}{(x^2 + y^2)}$$

De aquí vemos que una inversión transforma cada número  $z$  en otro número que es igual a su complejo conjugado dividido por su módulo al cuadrado.

Separando  $f(z)$  en su parte real e imaginaria, podemos escribir lo siguiente:

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad y \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad (2.16)$$

A partir de la expresión anterior podemos despejar  $x$  e  $y$  respecto de  $u$  y  $v$ :

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} \Rightarrow (x^2 + y^2) = \frac{x}{u} \Rightarrow x = u(x^2 + y^2)$$

$$v = \frac{-y}{x^2 + y^2} \Rightarrow (x^2 + y^2) = \frac{-y}{v} \Rightarrow y = -v(x^2 + y^2)$$

Reemplazando en (2.16)

$$u = \frac{u(x^2 + y^2)}{(u(x^2 + y^2))^2 + (-v(x^2 + y^2))^2} = \frac{u(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2(u^2 + v^2)} = \frac{u}{(x^2 + y^2)(u^2 + v^2)}$$

Simplificando  $u$  llegamos a la expresión

$$(x^2 + y^2) = \frac{1}{u^2 + v^2} \quad (2.17)$$

Utilizando la expresión (2.17) en (2.16) obtenemos

$$u = \frac{1}{\frac{1}{u^2 + v^2}} \Rightarrow x = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad y \quad v = \frac{-y}{\frac{1}{u^2 + v^2}} \Rightarrow y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$$

Finalmente obtenemos las siguientes expresiones que permiten obtener  $x$  e  $y$  a partir de  $u$  y  $v$ :

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad , \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2} \quad (2.18)$$

**Teorema 2.8.** *La transformación inversión aplica rectas o circunferencias en rectas o circunferencias.*

*Demostración.* Sea

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (2.19)$$

la ecuación de una circunferencia o una recta en el plano  $z$ . Si  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son

números reales que satisfacen la condición  $B^2 + C^2 > 4AD$ , la ecuación (2.19) representa una circunferencia o una recta, donde  $A \neq 0$  corresponde a una circunferencia y  $A = 0$  corresponde a una recta. Si  $x$  e  $y$  satisfacen la ecuación (2.19), podemos utilizar las relaciones indicadas en (2.18) para sustituir esas variables.

$$A \left( \frac{1}{u^2 + v^2} \right) + B \left( \frac{u}{u^2 + v^2} \right) + C \left( \frac{-v}{u^2 + v^2} \right) + D = 0$$

Si tomamos como factor común  $\frac{1}{u^2 + v^2}$  obtenemos:

$$\left( \frac{1}{u^2 + v^2} \right) [A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2)] = 0$$

Finalmente, multiplicamos la expresión anterior por  $u^2 + v^2$  y encontramos que  $u$  y  $v$  cumplen la siguiente ecuación

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0 \tag{2.20}$$

La expresión anterior es muy similar a la expresión (2.19) y representa un circunferencia o una recta en el plano  $w$ . ◇

A continuación estudiaremos los cuatro casos que pueden presentarse al hacer una inversión de este tipo:

**CASO I: Condiciones  $A = 0, D = 0$ .**

Si  $A = 0$ , a partir de la ecuación (2.19) obtenemos la siguiente ecuación de una recta en el plano  $(x, y)$ :



$$Bx + Cy + D = 0$$

$$y = -\frac{B}{C}x - \frac{D}{C}$$

Como  $D = 0$ , tenemos una recta que pasa por el origen:

$$y = -\frac{B}{C}x$$

Usando (2.18), deducimos la correspondiente ecuación en el plano  $(u, v)$ :

$$\begin{aligned} -\frac{v}{u^2 + v^2} &= -\frac{B}{C} \frac{u}{u^2 + v^2} \\ v &= \frac{B}{C}u \end{aligned}$$

Vemos que se obtiene una recta que también pasa por el origen pero con una pendiente de signo opuesto a la recta original.

### CASO II: Condiciones $A = 0, D \neq 0$ .

Al igual que el caso I, de la ecuación (2.19) obtenemos

$$y = -\frac{B}{C}x - \frac{D}{C}$$

En este caso  $D \neq 0$ , y entonces en el plano  $(x, y)$  tenemos una recta que no pasa por el origen. Usando (2.18), deducimos ahora la correspondiente ecuación en el plano  $(u, v)$ :

$$-\frac{v}{u^2 + v^2} = -\frac{B}{C} \frac{u}{u^2 + v^2} - \frac{D}{C}$$

Multiplicando por  $-(u^2 + v^2)$  y operando:

$$v = \frac{Bu}{C} + \frac{D(u^2 + v^2)}{C}$$

Si despejamos y multiplicamos por  $\frac{C}{D}$ , tenemos que:

$$u^2 + \frac{B}{D}u + v^2 - v\frac{C}{D} = 0 \quad (2.21)$$

Completando cuadrados:

$$\left(u + \frac{B}{2D}\right)^2 + \left(v - \frac{C}{2D}\right)^2 = \left(\frac{B}{2D}\right)^2 + \left(\frac{C}{2D}\right)^2$$

Finalmente, llegamos a la expresión de una circunferencia con centro en  $\left(-\frac{B}{2D}, \frac{C}{2D}\right)$  que pasa por el origen, lo cual puede verse ya que  $(u, v) = (0, 0)$  verifica a la ecuación (2.21).

### CASO III: Condiciones $A \neq 0, D = 0$ .

Escribimos la ecuación (2.19) para el caso de  $A \neq 0$  y  $D = 0$ :  $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy = 0$  Usando las ecuaciones (2.18) en la expresión anterior queda:

$$\begin{aligned} A \left( \frac{1}{u^2 + v^2} \right) + B \left( \frac{u}{u^2 + v^2} \right) - C \left( \frac{v}{u^2 + v^2} \right) &= 0 \\ \left( \frac{1}{u^2 + v^2} \right) (A + Bu - Cv) &= 0 \\ A + Bu - Cv &= 0 \end{aligned}$$

Se puede ver que en el plano  $(u, v)$  se obtiene la ecuación de una recta que no pasa por el origen.

**CASO IV: Condiciones  $A \neq 0, D \neq 0$ .**

Recordando la ecuación (2.19) bajo estas condiciones, y utilizando (2.18) queda:

$$A\left(\frac{1}{u^2 + v^2}\right) + B\left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right) - C\left(\frac{v}{u^2 + v^2}\right) + D = 0$$

Multiplicando por  $u^2 + v^2$  y operando:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{u^2 + v^2}\right)(A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2)) &= 0 \\ A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) &= 0 \end{aligned}$$

$$u^2 + u\frac{B}{D} + v^2 - v\frac{C}{D} + \frac{A}{D} = 0 \quad (2.22)$$

$$\left(u + \frac{B}{2D}\right)^2 + \left(v - \frac{C}{2D}\right)^2 = \left(\frac{B}{2D}\right)^2 + \left(\frac{C}{2D}\right)^2 - \frac{A}{D}$$

Llegamos a la expresión de una circunferencia con centro en  $\left(-\frac{B}{2D}, \frac{C}{2D}\right)$  que no pasa por el origen, lo cual puede verse ya que  $(u, v) = (0, 0)$  no verifica a la ecuación (2.22).

En la tabla 2.1, se muestran los distintos casos que se han analizado. Adicionalmente estudiaremos cómo se comportan ciertos puntos de las rectas y circunferencias al hacer una transformación inversión. Para hacer esto, es importante recordar la notación exponencial  $z = re^{i\theta}$ , donde  $r$  es la distancia del punto al origen y  $\theta$  el ángulo con respecto al eje real.

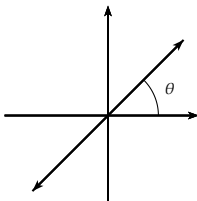
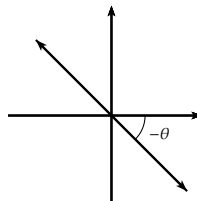
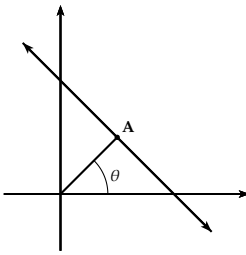
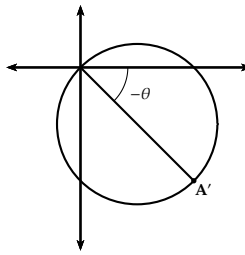
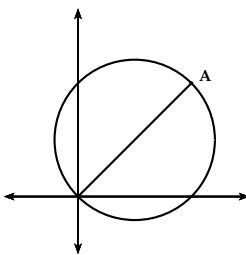
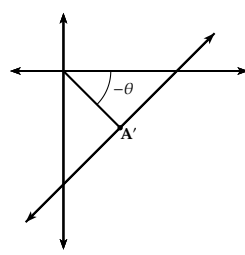
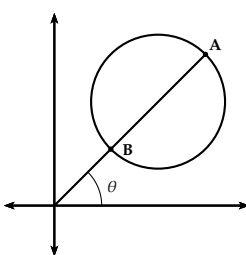
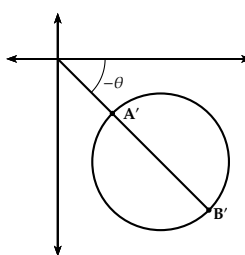
Plano $z$	Condiciones	Plano $w$
	$A = 0$ y $D = 0$ <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>Bx + Cy = 0</math></li> <li>■ <math>Bu - Cv = 0</math></li> </ul>	
	$A = 0$ y $D \neq 0$ <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>Bx + Cy + D = 0</math></li> <li>■ <math>D(u^2 + v^2) + Bu - Cv = 0</math></li> </ul>	
	$A \neq 0$ y $D = 0$ <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>A(x^2 + y^2) + Bx + Cy = 0</math></li> <li>■ <math>Bu - Cv + A = 0</math></li> </ul>	
	$A \neq 0$ y $D \neq 0$ <ul style="list-style-type: none"> <li>■ <math>A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0</math></li> <li>■ <math>D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0</math></li> </ul>	

Tabla 2.1: La aplicación  $w = 1/z$  transforma círculos y rectas en círculos y rectas

Para el caso I podemos observar que si a la recta que pasa por el origen se le aplica la transformación  $1/z$ , para cada punto se obtiene  $f(z) = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$ . Esto significa que en la recta del plano  $(u, v)$ , el módulo de cada punto será  $1/r$  y el ángulo será  $-\theta$ , lo que demuestra el gráfico de la tabla.

Para el caso II procedemos de la misma manera y obtenemos que el punto de la recta más cercano al origen, llamado  $A$ , se transformará en el punto  $A'$ , que será el más alejado del origen de los puntos pertenecientes a la circunferencia obtenida mediante la transformación, y que el ángulo, que es  $\theta$  para el punto  $A$  será  $-\theta$  para  $A'$ .

Para el caso III se puede hacer un análisis similar al del caso II pero esta vez la circunferencia se transforma en recta. Por lo tanto el punto más lejano del origen de los puntos de la circunferencia, que tiene un ángulo  $\theta$  respecto del eje real, se transforma en el punto de la recta más cercano al origen con un ángulo  $-\theta$  respecto al eje real.

El último caso tiene la particularidad de que las circunferencias no pasan por el origen, lo cual nos obliga a observar el punto más cercano y más lejano de las mismas. Sin embargo, teniendo en mente la forma exponencial de  $z$  podemos deducir de manera similar al resto de los casos cómo el punto más cercano se transforma

en el más lejano y viceversa. Además, los dos puntos de la circunferencia original (el más cercano y el más lejano del origen) comparten el mismo ángulo  $\theta$  respecto al eje real y al aplicar la transformación también los dos puntos de la circunferencia resultante comparten el ángulo  $-\theta$ .

**Ejemplo 2.6.** Encontrar la imagen de la recta vertical  $x = c_1$  ( $c_1 \neq 0$ ) bajo la transformación  $w = 1/z$ .

*Solución.* Para que en la ecuación (2.19) se tenga una recta vertical  $x = c_1$  se debe tener que  $A = 0, B = 1, C = 0$  y  $D = -c_1$ . Sustituyendo  $A, B, C$  y  $D$  en la ecuación (2.20) obtenemos

$$\begin{aligned}
 -c_1(u^2 + v^2) + u &= 0 \\
 -\frac{1}{c_1} \left[ -c_1(u^2 + v^2) + u \right] &= 0; \quad c_1 \neq 0 \\
 (u^2 + v^2) - \frac{u}{c_1} &= 0 \\
 \left[ u^2 - 2(u) \left( \frac{1}{2c_1} \right) + \left( \frac{1}{2c_1} \right)^2 \right] + v^2 &= \left( \frac{1}{2c_1} \right)^2 \\
 \left( u - \frac{1}{2c_1} \right)^2 + v^2 &= \left( \frac{1}{2c_1} \right)^2 \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Entonces en el plano  $w$  obtenemos una circunferencia centrada en el eje  $u$  y tangente al eje  $v$ . La imagen de un punto típico  $(c_1, y)$  de esta recta, según las ecuaciones (2.16) es

$$(u, v) = \left( \frac{c_1}{c_1^2 + y^2}, \frac{-y}{c_1^2 + y^2} \right)$$

Si  $c_1 > 0$ , la circunferencia está a la derecha del eje  $v$ . Al mover el punto  $(c_1, y)$  hacia arriba por toda la recta, su imagen atraviesa la circunferencia una vez en el sentido de las agujas del reloj, correspondiendo el punto del infinito en el plano  $z$  extendido al origen del plano  $w$ . En efecto, si  $y < 0$  entonces  $v > 0$ ; y al hacer crecer  $y$  desde valores negativos hasta 0,  $u$  crece desde 0 hasta  $1/c_1$ . Entonces, cuando  $y$  crece por valores positivos,  $v$  es negativa y  $u$  decrece desde  $1/c_1$  hasta 0.

Por otra parte, si  $c_1 < 0$ , la circunferencia está a la izquierda del eje  $v$ . Al subir el punto  $(c_1, y)$ , su imagen describe de nuevo una circunferencia, pero ahora en sentido positivo. En efecto, si  $y < 0$  entonces  $v > 0$ ; y al crecer  $y$  desde valores negativos hasta 0,  $u$  decrece desde 0 hasta  $1/c_1$ . Entonces cuando  $y$  crece por valores positivos,  $v$  es negativa y  $u$  crece desde  $1/c_1$  hasta 0. En la figura 2.11 se ilustran los casos  $c_1 = 1/3$  y  $c_1 = -1/2$ .

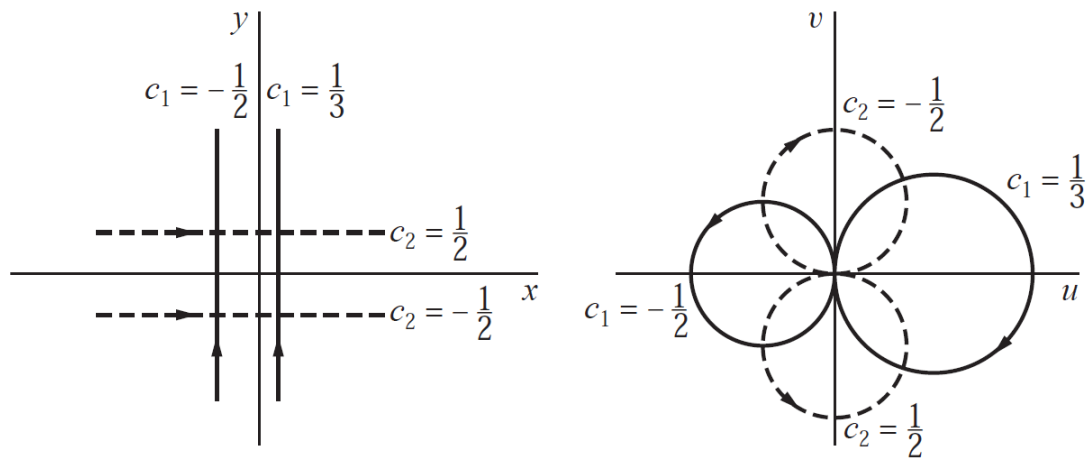


Figura 2.11: Imagen de las rectas  $x = c_1$  e  $y = c_2$  bajo la transformación  $w = 1/z$

**Ejemplo 2.7.** Encontrar la imagen de la recta vertical  $y = c_2$  ( $c_2 \neq 0$ ) bajo la transformación  $w = 1/z$ .

*Solución.* La recta  $y = c_2$  ( $c_2 \neq 0$ ), la podemos escribir como

$$y - c_2 = 0$$

De acuerdo con la ecuación (2.19) se tiene que  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 1$ ,  $D = -c_2$

Sustituyendo  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  en la ecuación (2.20) obtenemos

$$\begin{aligned} -c_2(u^2 + v^2) - v &= 0 \\ -\frac{1}{c_2} [-c_2(u^2 + v^2) - v] &= 0; \quad c_2 \neq 0 \\ (u^2 + v^2) + \frac{v}{c_2} &= 0 \\ \left[ u^2 + v^2 + \frac{v}{c_2} + \left(\frac{1}{2c_2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2c_2}\right)^2 \right] &= 0 \\ u^2 + \left[ v^2 + 2(v)\left(\frac{1}{2c_2}\right) + \left(\frac{1}{2c_2}\right)^2 \right] &= \left(\frac{1}{2c_2}\right)^2 \\ u^2 + \left(v + \frac{1}{2c_2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2c_2}\right)^2 \end{aligned}$$

Entonces en el plano  $w$  obtenemos una circunferencia centrada en el eje  $v$  y tangente al eje  $u$ . La imagen de un punto típico  $(x, c_2)$  de esta recta, según las ecuaciones (2.16) es

$$(u, v) = \left( \frac{x}{x^2 + c_2^2}, \frac{-c_2}{x^2 + c_2^2} \right)$$

Si  $c_2 > 0$ , la circunferencia está abajo del eje  $u$ . Al mover el punto  $(x, c_2)$  hacia la derecha por toda la recta, su imagen atraviesa la circunferencia una vez en el



sentido contrario de las agujas del reloj. En efecto, si  $x > 0$  entonces  $u > 0$ ; y al crecer  $x$  desde valores negativos hasta 0,  $v$  decrece desde 0 hasta  $-\frac{1}{c_2}$ . Entonces, cuando  $x$  crece desde 0 a valores positivos,  $v$  crece de  $-\frac{1}{c_2}$  hasta 0.

Por otra parte, si  $c_2 < 0$ , la circunferencia está arriba del eje  $u$ . Al mover el punto  $(x, c_2)$  hacia la derecha por toda la recta, su imagen describe de nuevo una circunferencia, pero ahora en sentido de las agujas del reloj. En efecto, si  $x < 0$  entonces  $u < 0$ ; y al crecer  $x$  desde valores negativos hasta 0,  $v$  crece desde 0 hasta  $\frac{1}{c_2}$ . Entonces cuando  $x$  crece desde 0 a valores positivos,  $v$  decrece desde  $1/c_2$  hasta 0.

En la figura 2.11 se ilustran los casos  $c_2 = \frac{1}{2}$  y  $c_2 = -\frac{1}{2}$ .

**Ejemplo 2.8.** *Encontrar la imagen del semiplano  $x > c_1$  ( $c_1 > 0$ ) bajo la transformación  $w = 1/z$ .*

*Solución.* De la primera de las ecuaciones (2.18) vemos que cuando  $w = 1/z$ , las imágenes de puntos del semiplano están en la región

$$\frac{u}{u^2 + v^2} > c_1 \tag{2.24}$$

Podemos reescribir esta expresión de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{u}{u^2 + v^2} &> c_1 \\ u &> c_1(u^2 + v^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-u^2c_1 + u - c_1v^2 &> 0 \\
u^2 - \frac{u}{c_1} + v^2 &< 0 \\
u^2 - \frac{1}{c_1}u + \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 &< \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2 \\
\left(u^2 - \frac{1}{2c}\right)^2 + v^2 &< \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos

$$\left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 < \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2$$

Esto significa que la imagen de cualquier punto del semiplano  $x > c_1$  está dentro de la circunferencia

$$\left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2 \quad (2.25)$$

Recíprocamente, todo punto interior a la circunferencia (2.25) satisfacen la desigualdad (2.24) y es, por tanto, imagen de un punto del semiplano. En consecuencia, la imagen del semiplano es el interior de la circunferencia (2.25).

Otra forma de obtener ese resultado consiste en referirnos al Ejemplo 2.6 y observar que la imagen de la recta  $x = c$ , donde  $c > c_1$ , es la circunferencia

$$\left(u - \frac{1}{2c}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2 \quad (2.26)$$

Al crecer  $c$  por todos los valores mayores que  $c_1$ , las rectas  $x = c$  se desplazan a la derecha y las circunferencias imagen (2.26) son interiores a la circunferencia (2.25) y se contraen en tamaño (como se muestra en la figura 2.12). Además, las rectas  $x = c$  llenan el semiplano  $x > c_1$  mientras que las circunferencias (2.26) llenan todo el interior de la circunferencia (2.25).

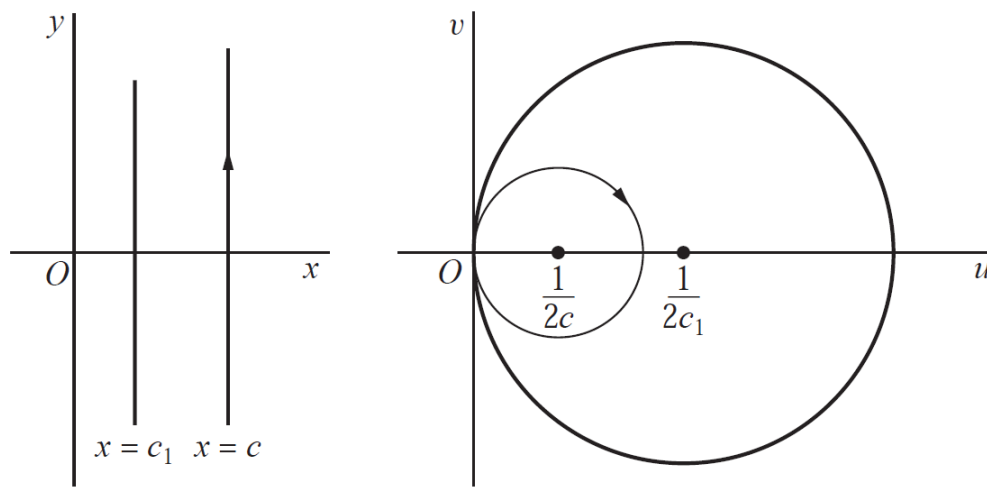


Figura 2.12: Imagen del semiplano  $x > c_1$  bajo la transformación  $w = 1/z$

### 2.3. Transformaciones de Möbius

**Definición 2.8 (Transformación de Möbius).** Una transformación fraccional lineal

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.27)$$

donde  $a, b, c$  y  $d \in \mathbb{C}$  y  $ad - bc \neq 0$ , se llama **transformación de Möbius**.

De la ecuación (2.27) tenemos

$$\begin{aligned}
w = \frac{az + b}{cz + d} &\implies w(cz + d) = az + b \\
&\implies wcz + wd = az + b \\
&\implies czw - az + dw - b = 0
\end{aligned}$$

Si hacemos  $A = c$ ,  $B = -a$ ,  $C = d$  y  $D = -b$  en la expresión anterior, entonces la ecuación (2.27) se convierte en

$$Azw + Bz + Cw + D = 0, \quad AD - BC \neq 0 \quad (2.28)$$

y, recíprocamente, toda ecuación del tipo (2.28) puede expresarse en la forma (2.27). Como esta forma alternativa es afín en  $z$  y afín en  $w$ , o sea, bilineal en  $z$  y  $w$ , otra denominación para una transformación racional lineal es **transformación bilineal**.

Despejando  $z$  en (2.27) tenemos,

$$\begin{aligned}
w = \frac{az + b}{cz + d} &\implies w(cz + d) = az + b \\
&\implies wcz + wd = az + b \\
&\implies czw - az = -dw + b
\end{aligned}$$

$$\implies (cw - a)z = -dw + b$$

$$\implies z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

Por lo tanto,

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}; \quad (ad - bc) \neq 0 \quad (2.29)$$

Así pues, cuando un punto  $w$  dado es imagen de algún punto  $z$  bajo la transformación (2.27), el punto  $z$  se recupera mediante la ecuación (2.29). Si  $c = 0$ , entonces  $a$  y  $d$  son ambos no nulos, cada punto del plano  $w$  es imagen de un punto, y sólo un punto, del plano  $z$ . Lo mismo es cierto si  $c \neq 0$ , excepto cuando  $w = a/c$ , pues el denominador de la ecuación (2.29) se anula si  $w$  tiene ese valor. Podemos no obstante, ampliar el dominio de definición de la transformación (2.27) con el fin de definir una transformación racional lineal  $T$  sobre el plano  $z$  extendido de tal manera que el punto  $w = a/c$  sea la imagen de  $z = \infty$  cuando  $c \neq 0$ .

En primer lugar escribimos

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}; \quad (ad - bc) \neq 0 \quad (2.30)$$

Puesto que  $T$  está definida para todos los puntos en el plano complejo extendido excepto en los puntos  $z = -d/c$  y  $z = \infty$ , sólo necesitamos ampliar la definición de  $T$  que incluya estos puntos. Hacemos esta definición considerando el límite de

$T$  cuando  $z$  tiende a  $-d/c$  y cuando  $z$  tiende a  $\infty$ . Para hacer esto, consideremos dos casos: (i)  $c = 0$  y (ii)  $c \neq 0$ .

(i)  $c = 0$ .

Si  $c = 0$ , entonces (2.30) se puede expresar en la forma

$$T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}; \quad ad \neq 0$$

Además,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left( \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \right) = \infty$$

(ii)  $c \neq 0$ .

Si  $c \neq 0$ , entonces (2.30) se expresa como

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad (ad - bc) \neq 0$$

Además

$$\begin{aligned} ad - bc \neq 0 &\implies (ad - bc) \left( -\frac{1}{c} \right) \neq 0 \\ &\implies a \left( -\frac{d}{c} \right) + b \neq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{1}{T(z)} = \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{cz+d}{az+b} = \frac{c \left( -\frac{d}{c} \right) + d}{a \left( -\frac{d}{c} \right) + b} = 0; \quad a \left( -\frac{d}{c} \right) + b \neq 0$$

Se sigue de (1.7) que

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{1}{T(z)} = \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \left( \frac{az + b}{cz + d} \right) = \infty$$

Por otra parte de (1.7) tenemos que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \lim_{z \rightarrow 0} T\left(\frac{1}{z}\right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{a\left(\frac{1}{z}\right) + b}{c\left(\frac{1}{z}\right) + d} = \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{a + zb}{c + zd} \right) = \frac{a}{c}$$

Con el análisis de los dos casos anteriores, podemos definir la transformación bilineal en el plano complejo extendido de la siguiente manera.

**Definición 2.9 (Transformación de Möbius Extendida).** Una transformación de Möbius extendida es una función  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}; \quad \text{donde } ad - bc \neq 0$$

Definimos

$$T(\infty) = \begin{cases} \frac{a}{c} & ; \text{ si } c \neq 0 \\ \infty & ; \text{ si } c = 0 \end{cases}$$

y además  $T(-\frac{d}{c}) = \infty$  si  $c \neq 0$ .

Cuando ese dominio de definición se amplía de ese modo, la transformación

racional lineal es una aplicación *uno a uno* del plano  $z$  extendido sobre el plano  $w$  extendido.

**Teorema 2.9.** *Si  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  es una transformación de Möbius, entonces  $T$  es uno a uno.*

*Demostración.* Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Además, supongamos que  $T(z_1) = T(z_2)$ . Así que,

$$\begin{aligned}
 T(z_1) = T(z_2) &\Rightarrow \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \\
 &\Rightarrow (cz_2 + d)(az_1 + b) = (az_2 + b)(cz_1 + d) \\
 &\Rightarrow acz_2z_1 + bcz_2 + adz_1 + bd = acz_2z_1 + bcz_1 + adz_2 + bd \\
 &\Rightarrow adz_1 + bcz_2 = adz_2 + bcz_1 \\
 &\Rightarrow adz_1 + bcz_2 - adz_2 - bcz_1 = 0 \\
 &\Rightarrow z_1(ad - bc) + z_2(bc - ad) = 0 \\
 &\Rightarrow z_1(ad - bc) - z_2(ad - bc) = 0 \\
 &\Rightarrow (ad - bc)(z_1 - z_2) = 0 \\
 &\Rightarrow z_1 - z_2 = 0; \quad ad - bc \neq 0 \\
 &\Rightarrow z_1 = z_2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $T(z_1) = T(z_2)$  implica  $z_1 = z_2$ . Por otra parte, esto significa que la transformación  $T$  mapea puntos distintos sobre imágenes distintas es decir, es uno a uno. ◇



Como  $T$  es *uno a uno*, entonces asociada con la transformación  $T$  existe una *transformación inversa*  $T^{-1}$  que se define sobre el plano  $w$  extendido como

$$T^{-1}(w) = z \text{ si y sólo si } T(z) = w$$

**Corolario 2.1.** Si  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  es una transformación de Möbius, entonces  $T^{-1}$  también es una transformación de Möbius.

*Demostración.* De la ecuación (2.29) vemos que la expresión

$$T^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

tiene la forma (2.27). Además,

$$(-b)(-a) - bc = ad - bc \neq 0$$

Por tanto,

$$T^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}, \quad (ad - bc) \neq 0$$

es una transformación de Möbius. ◇

Además  $T^{-1}$  cumple,

$$T^{-1}(\infty) = \infty \quad \text{si} \quad c = 0$$

y

$$T^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty \quad \text{y} \quad T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c} \quad \text{si} \quad c \neq 0$$

**Teorema 2.10.** Si  $T : C_\infty \longrightarrow C_\infty$  es una transformación de Möbius, entonces  $T$  es la composición de traslaciones, homotecias, rotaciones e inversiones.

*Demostración.* Sea

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde  $ad - bc \neq 0$ . Si  $c = 0$ , entonces

$$T(z) = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}; \quad ad \neq 0$$

En este caso,  $T$  es una transformación afín, y el resultado se sigue del teorema 2.5.

Si  $c \neq 0$ , definamos:

$$T_1(z) = cz + d, \quad T_2(z) = \frac{1}{z} \quad y \quad T_3(z) = \left(b - \frac{ad}{c}\right)z + \frac{a}{c}$$

entonces

$$\begin{aligned} (T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z) &= T_3[T_2(T_1(z))] \\ &= T_3[T_2(cz + d)] \\ &= T_3\left[\frac{1}{cz + d}\right] \\ &= \left(b - \frac{ad}{c}\right)\left(\frac{1}{cz + d}\right) + \frac{a}{c} \\ &= \left(\frac{bc - ad}{c}\right)\left(\frac{1}{cz + d}\right) + \frac{a}{c} \\ &= \frac{c(bc - ad) + ac(cz + d)}{c^2(cz + d)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(bc - ad) + a(cz + d)}{c(cz + d)}; \quad c \neq 0 \\
&= \frac{bc - ad + acz + ad}{c(cz + d)} \\
&= \frac{c(az + b)}{c(cz + d)} \\
&= \frac{az + b}{cz + d}; \quad c \neq 0 \\
&= T(z)
\end{aligned}$$

Como  $T_1$  y  $T_3$  son transformaciones afines, mientras que  $T_2$  es la transformación inversión, entonces el resultado ahora se sigue del teorema 2.5.  $\diamond$

**Teorema 2.11.** *Sea  $T$  una transformación de Möbius, entonces  $T$  transforma rectas o circunferencias en rectas o circunferencias.*

*Demostración.* En el teorema 2.6 demostramos que traslaciones, homotecias y rotaciones transforman rectas y circunferencias en rectas y circunferencias, respectivamente. Además en el teorema 2.8 demostramos que la transformación inversión aplica rectas o circunferencias en rectas o circunferencias. Por lo tanto, una transformación de Möbius, que puede ser escrita como composición de estas transformaciones (teorema 2.10), transforma también rectas o circunferencias en rectas o circunferencias.  $\diamond$

**Ejemplo 2.9.** *Sea  $S$  el conjunto de números complejos que se muestra en la figura 2.13.*

*Determinar el transformado de  $S$  bajo la transformación bilineal.*

$$w = f(z) = \frac{iz + 1 + i}{iz + i}$$

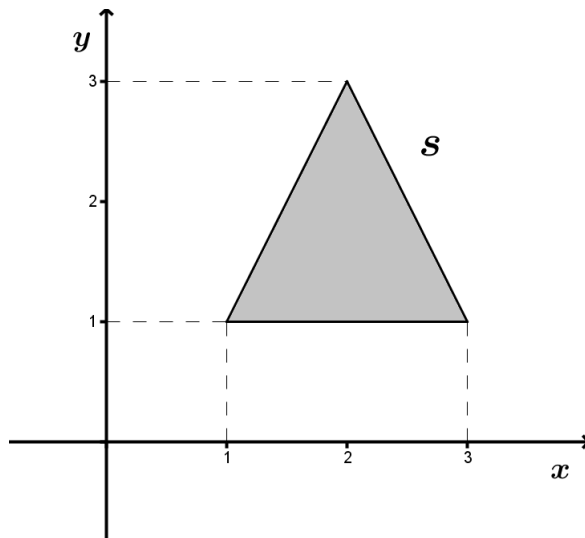


Figura 2.13: Conjunto S.

*Solución.* Se tiene que todo  $z = x + iy \in S$  satisface el siguiente conjunto de inecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y \geq 1 \\ 2x + y \leq 7 \\ y \geq 1 \end{cases}$$

Por lo tanto

$$S = \{z = x + iy : 2x - y \geq 1, 2x + y \leq 7, y \geq 1\}$$

Además, la función inversa de  $w = f(z) = \frac{iz + 1 + i}{iz + i}$  la obtenemos de la siguiente

forma:

$$\begin{aligned}
 w = f(z) &= \frac{iz + 1 + i}{iz + i} \Rightarrow w(iz + i) = iz + 1 + i \\
 &\Rightarrow wi(z + 1) - i(z + 1) = 1 \\
 &\Rightarrow (z + 1)(wi - i) = 1 \\
 &\Rightarrow z + 1 = \frac{1}{wi - i} \\
 &\Rightarrow z + 1 = \frac{i}{1 - w} \\
 &\Rightarrow z = \frac{i}{1 - w} - 1
 \end{aligned}$$

Así,  $f^{-1}(w) = \frac{i}{1 - w} - 1$ .

Ahora, utilizando la ecuación  $x + iy = f^{-1}(u + iv)$  tenemos:

$$\begin{aligned}
 x + iy &= \frac{i}{1 - (u + iv)} - 1 \\
 &= \frac{i - 1(1 - (u + iv))}{1 - u - iv} \\
 &= \frac{i - 1 + u + iv}{1 - u - iv} \\
 &= \frac{(1 - u) - i(1 + v)}{(u - 1) + iv} \\
 &= \frac{(1 - u)(u - 1) + v(-(1 + v))}{(u - 1)^2 + v^2} + i \frac{-(1 + v)(u - 1) - v(1 - u)}{(u - 1)^2 + v^2} \\
 &= \frac{u - 1 - u^2 + u - v + v^2}{(u - 1)^2 + v^2} + i \frac{-u + 1 - uv + v - v + uv}{(u - 1)^2 + v^2} \\
 &= \frac{-v - ((u^2 - 2u + 1) + v^2)}{(u - 1)^2 + v^2} + i \frac{(1 - u)}{(u - 1)^2 + v^2}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{-v - ((u-1)^2 + v^2)}{(u-1)^2 + v^2} + i \frac{(1-u)}{(u-1)^2 + v^2}$$

Por tanto,

$$x = \frac{-v - ((u-1)^2 + v^2)}{(u-1)^2 + v^2}, \quad y = \frac{(1-u)}{(u-1)^2 + v^2}$$

Sustituyendo convenientemente estas últimas expresiones en el conjunto de inecuaciones que describe a  $S$  tenemos:

$$\begin{aligned} 2x - y \geq 1 &\Rightarrow 2 \left( \frac{-v - ((u-1)^2 + v^2)}{(u-1)^2 + v^2} \right) - \left( \frac{(1-u)}{(u-1)^2 + v^2} \right) \geq 1 \\ &\Rightarrow \frac{2(-v - ((u-1)^2 + v^2)) - (1-u)}{(u-1)^2 + v^2} \geq 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (3u^2 - 7u) + (3v^2 + 2) \leq -4$$

$$\Rightarrow \left( u^2 - \frac{7}{3}u + \left(\frac{7}{3}\right)^2 \right) + \left( v^2 + \frac{2}{3}v + \left(\frac{2}{6}\right)^2 \right) \leq \frac{5}{36}$$

$$\Rightarrow \left( u - \frac{7}{6} \right)^2 + \left( v + \frac{2}{6} \right)^2 \leq \frac{5}{6^2}$$

$$\begin{aligned} 2x + y \leq 7 &\Rightarrow 2 \left( \frac{-v - ((u-1)^2 + v^2)}{(u-1)^2 + v^2} \right) + \left( \frac{(1-u)}{(u-1)^2 + v^2} \right) \leq 7 \\ &\Rightarrow \frac{2(-v - ((u-1)^2 + v^2)) + (1-u)}{(u-1)^2 + v^2} \leq 7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (9u^2 - 17u) + (9v^2 + 2v) \geq -8$$

$$\Rightarrow \left( u^2 - \frac{17}{9}u + \left(\frac{17}{18}\right)^2 \right) + \left( v^2 + \frac{2}{9}v + \left(\frac{2}{18}\right)^2 \right) \geq \frac{5}{324}$$

$$\Rightarrow \left( u - \frac{17}{18} \right)^2 + \left( v + \frac{2}{18} \right)^2 \geq \frac{5}{18^2}$$

$$\begin{aligned}
y \geq 1 &\Rightarrow \frac{(1-u)}{(u-1)^2 + v^2} \geq 1 \\
&\Rightarrow (u^2 - u) + v^2 \leq 0 \\
&\Rightarrow \left(u^2 - u + \frac{1}{4} + v^2\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&\Rightarrow \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 \leq \frac{1}{2^2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que los puntos  $w = u + iv$  del transformado de  $S$ , bajo la transformación bilineal dada, satisface las inecuaciones siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(u - \frac{7}{6}\right)^2 + \left(v + \frac{2}{6}\right)^2 \leq \frac{5}{6^2} \\ \left(u - \frac{17}{18}\right)^2 + \left(v + \frac{2}{8}\right)^2 \geq \frac{5}{18^2} \\ \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 \leq \frac{1}{2^2} \end{array} \right.$$

La gráfica del transformado de  $S$  se aprecia en la figura 2.14.

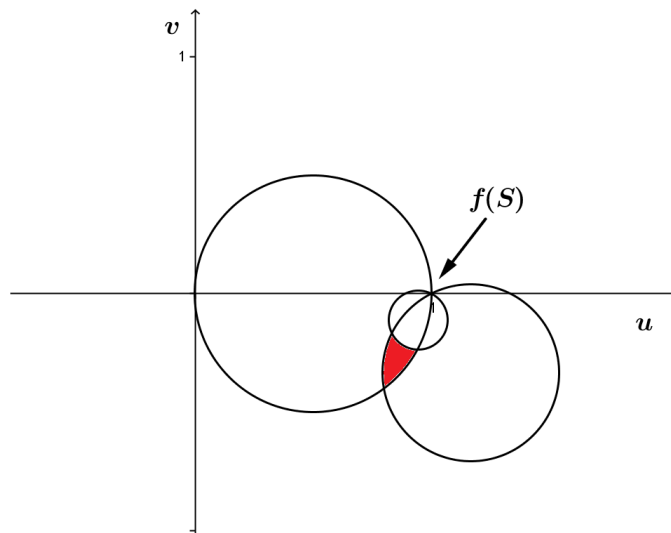


Figura 2.14: Conjunto  $f(S)$ .

**Teorema 2.12.** *La composición de dos transformaciones de Möbius es también una transformación de Möbius.*

*Demostración.* Sean  $T_1 = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$  y  $T_2 = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$  donde  $a_1d_1 - b_1c_1 \neq 0$  y  $a_2d_2 - b_2c_2 \neq 0$  respectivamente, dos transformaciones de Möbius. Entonces

$$\begin{aligned}
 (T_2 \circ T_1)(z) &= T_2(T_1(z)) \\
 &= T_2\left(\frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}\right) \\
 &= \frac{a_2\left(\frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}\right) + b_2}{c_2\left(\frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}\right) + d_2} \\
 &= \frac{\frac{a_2a_1z + a_2b_1}{c_1z + d_1} + b_2}{\frac{c_2a_1z + c_2b_1}{c_1z + d_1} + d_2} \\
 &= \frac{a_2a_1z + a_2b_1 + b_2(c_1z + d_1)}{c_2a_1z + c_2b_1 + d_2(c_1z + d_1)} \\
 &= \frac{a_2a_1z + a_2b_1 + b_2c_1z + b_2d_1}{c_2a_1z + c_2b_1 + d_2c_1z + d_2d_1} \\
 &= \frac{(a_2a_1 + b_2c_1)z + (a_2b_1 + b_2d_1)}{(c_2a_1 + d_2c_1)z + (c_2b_1 + d_2d_1)}
 \end{aligned}$$

Haciendo  $a' = a_2a_1 + b_2c_1$ ,  $b' = a_2b_1 + b_2d_1$ ,  $c' = c_2a_1 + d_2c_1$  y  $d' = c_2b_1 + d_2d_1$  tenemos que

$$a'd' - b'c' = (a_2a_1 + b_2c_1)(c_2b_1 + d_2d_1) - (a_2b_1 + b_2d_1)(c_2a_1 + d_2c_1)$$



$$\begin{aligned}
&= a_2 a_1 d_2 d_1 + b_2 c_1 c_2 b_1 - a_2 d_2 b_1 c_1 - b_2 c_2 d_1 a_1 \\
&= (a_2 d_2 - b_2 c_2)(a_1 d_1 - b_1 c_1)
\end{aligned}$$

Así,  $a'd' - b'c' \neq 0$ , pues  $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$  y  $a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0$ . Obteniéndose la siguiente expresión

$$(T_2 \circ T_1)(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}; \quad a'd' - b'c' \neq 0$$

la cual tiene la forma (2.27). Por tanto, la composición de dos transformaciones de Möbius es también una transformación de Möbius.  $\diamond$

**Ejemplo 2.10.** Sean  $T_1(z) = \frac{z-2}{z+1}$  y  $T_2(z) = \frac{z}{z+3}$  dos transformaciones de Möbius.

Encontrar  $(T_1 \circ T_2)(z)$  y  $(T_2 \circ T_1)(z)$ .

*Solución.*

i).  $(T_1 \circ T_2)(z)$ .

$$\begin{aligned}
(T_1 \circ T_2)(z) &= T_1(T_2(z)) \\
&= T_1\left(\frac{z}{z+3}\right) \\
&= \frac{\frac{z}{z+3} - 2}{\frac{z}{z+3} + 1} \\
&= \frac{z - 2(z+3)}{z + (z+3)} \\
&= \frac{z - 2(z+3)}{z + z + 3}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-z - 6}{2z + 6}$$

Por lo tanto,  $(T_1 \circ T_2)(z) = \frac{-z - 6}{2z + 6}$  y por el teorema (2.12),  $(T_1 \circ T_2)(z)$  es de Möbius.

ii).  $(T_2 \circ T_1)(z)$

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(z) &= T_2(T_1(z)) \\ &= T_2\left(\frac{z-2}{z+1}\right) \\ &= \frac{\frac{z-2}{z+1}}{\frac{z-2}{z+1} + 3} \\ &= \frac{\frac{z-2}{z+1}}{\frac{z-2 + 3(z+1)}{z+1}} \\ &= \frac{z-2}{4z+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $(T_2 \circ T_1)(z) = \frac{z-2}{4z+1}$ , y por el teorema (2.12),  $(T_2 \circ T_1)(z)$  es de Möbius.

## 2.4. Punto Fijo y Razón Doble

**Definición 2.10 (Punto fijo).** Se dice que un punto  $z_1$  es un **punto fijo** de una transformación  $w = f(z)$  si  $z_1 = f(z_1)$ .

Veamos a continuación que una transformación de Möbius que no es la identidad puede tener como máximo dos puntos fijos.

**Teorema 2.13.** *Una transformación de Möbius  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  tiene como máximo dos puntos fijos en  $\mathbb{C}_\infty$ , a menos que  $T$  sea la identidad.*

*Demostración.* Sea

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde  $ad - bc \neq 0$ .  $\infty$  es un punto fijo de  $T$  si y sólo si  $c = 0$  y  $ad \neq 0$ . Tenemos que  $z \in \mathbb{C}$  es un punto fijo de  $T$  si y sólo si  $T(z) = z$ . Así

$$\begin{aligned} T(z) = z &\Rightarrow \frac{az + b}{cz + d} = z \\ &\Rightarrow az + b = z(cz + d) \\ &\Rightarrow az + b = cz^2 + dz \\ &\Rightarrow 0 = cz^2 - (a - d)z - b \end{aligned}$$

Si  $\infty$  es un punto fijo (es decir,  $c = 0$ ), entonces la ecuación  $T(z) = z$  se convierte en una ecuación lineal de la forma

$$(a - d)z + b = 0,$$

que tiene a lo sumo una solución si  $T(z)$  no es idénticamente igual a  $z$ , y sin solución si  $a = d$  y  $b \neq 0$ . Por lo tanto  $T$  tiene a lo sumo dos puntos fijos ( $\infty$ , junto con

un máximo de un punto fijo en  $\mathbb{C}$ ).

Si  $c \neq 0$ , entonces  $\infty$  no es un punto fijo ya que  $\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) \neq \infty$  y la ecuación  $T(z) = z$  se convierte en una ecuación cuadrática de la forma

$$cz^2 - (a - d)z - b = 0,$$

que tiene como máximo dos soluciones en  $\mathbb{C}$ . Por lo tanto  $T(z)$  tiene como máximo dos puntos fijos en  $\mathbb{C}_\infty$ .

◇

Se sigue del teorema (2.13) que una transformación de Möbius debe ser la identidad si tiene al menos tres puntos fijos.

**Definición 2.11 (Razón doble).** Si  $z, z_1, z_2$  y  $z_3$  son cualesquiera cuatro puntos en  $\mathbb{C}_\infty$  donde  $z_1, z_2$  y  $z_3$  son distintos, entonces la **razón doble** está definida por

$$[z, z_1, z_2, z_3] = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

Si  $z = z_3$ , entonces la razón doble no está definida pues su denominador se anula y para calcularla hacemos uso de la parte *i*) del teorema (1.7), es decir

$$\lim_{z \rightarrow z_3} \frac{1}{[z, z_1, z_2, z_3]} = \lim_{z \rightarrow z_3} \left( \frac{z - z_3}{z - z_1} \cdot \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \right) = 0$$

Por tanto,

$$\lim_{z \rightarrow z_3} [z, z_1, z_2, z_3] = \infty$$

Así,

$$[z, z_1, z_2, z_3] = \infty \quad \text{cuando} \quad z = z_3$$

Si uno de  $z, z_1, z_2$  o  $z_3$  es  $\infty$ , entonces los dos términos que contiene  $\infty$  se cancelan,

por ejemplo;  $[z, \infty, z_2, z_3] = \frac{z - z_3}{z_2 - z_3}$ .

**Ejemplo 2.11.** Escribir la función  $f(z) = \frac{z-1}{iz+i}$  en términos de la razón doble

*Solución.* Reescribamos  $f(z)$ ,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z-1}{iz+i} \\ &= \frac{z-1}{i(z+1)} \\ &= \frac{z-1}{i(z+1)} \cdot \frac{-2}{-2} \\ &= \frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{-2}{-2i} \\ &= \frac{(z-1)(i+1)(i-1)}{(z+1)(i-1)(i-1)} \\ &= \frac{(z-1)(i+1)}{(z+1)(i-1)} \\ &= [z, 1, i, -1] \end{aligned}$$

Así,  $f(z) = [z, 1, i, -1]$ .

**Proposición 2.5.** La función  $f : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  definida por  $f(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$  es una transformación de Möbius que satisface

$$f(z_1) = 0 \quad f(z_2) = 1 \quad f(z_3) = \infty$$

Por otra parte, si  $g$  es cualquier transformación de Möbius con  $g(z_1) = 0$ ,  $g(z_2) = 1$  y  $g(z_3) = \infty$ , entonces  $f$  y  $g$  son idénticas.

*Demostración.* Primero comprobemos que  $f(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$  es una transformación de Möbius.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= [z, z_1, z_2, z_3] \\
 &= \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}; && \text{definición de razón doble} \\
 &= \frac{zz_2 - zz_3 - z_1z_2 + z_1z_3}{zz_2 - zz_1 - z_2z_3 + z_1z_3}; && \text{ley distributiva} \\
 &= \frac{(z_2 - z_3)z + z_1(z_3 - z_2)}{(z_2 - z_1)z + z_3(z_1 - z_2)}; && \text{ley asociativa}
 \end{aligned}$$

Además,

$$z_3(z_2 - z_3)(z_1 - z_2) - z_1(z_3 - z_2)(z_2 - z_1) = (z_2 - z_3)(z_1 - z_2)(z_3 - z_1) \neq 0$$

ya que  $z_1, z_2$  y  $z_3$  son distintos. Por lo tanto,  $f(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$  es una transformación de Möbius.

Ahora veamos si  $f(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$  cumple las condiciones  $f(z_1) = 0$ ,  $f(z_2) = 1$  y  $f(z_3) = \infty$ .

$$f(z_1) = \frac{(z_1 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_1)} = 0 \Rightarrow f(z_1) = 0$$

$$f(z_2) = \frac{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_3)(z_2 - z_1)} = 1 \Rightarrow f(z_2) = 1$$

$f(z_3)$  no está definido ya que el denominador de  $f(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$  se anula,

cuando  $z = z_3$ . Así que encontremos la imagen de  $z_3$  usando límite cuando  $z$  tiende a  $z_3$  en  $f(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$ . Primero veamos que,

$$\lim_{z \rightarrow z_3} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_3} \frac{(z-z_3)(z_2-z_1)}{(z-z_1)(z_2-z_3)} = 0$$

Como  $\lim_{z \rightarrow z_3} \frac{1}{f(z)} = 0$ , entonces por i) del teorema (1.7) se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow z_3} f(z) = \infty \Rightarrow f(z_3) = \infty$$

Así,  $f(z) = [z, z_1, z_2, z_3]$  es una transformación de Möbius que satisface  $f(z_1) = 0$ ,  $f(z_2) = 1$  y  $f(z_3) = \infty$ .

Demostremos ahora que  $f$  y  $g$  son idénticas. La inversa  $f^{-1}$  es una transformación de Möbius y, por el teorema (2.12), la composición  $h = g \circ f^{-1}$  es una transformación de Möbius. Además,

$$h(0) = g(f^{-1}(0)) = g(z_1) = 0 \Rightarrow h(0) = 0$$

$$h(1) = g(f^{-1}(1)) = g(z_2) = 1 \Rightarrow h(1) = 1$$

$$h(\infty) = g(f^{-1}(\infty)) = g(z_3) = \infty \Rightarrow h(\infty) = \infty$$

Si escribimos  $h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ , entonces

$$0 = h(0) = \frac{b}{d} \Rightarrow b = 0$$

$$\infty = h(\infty) = \frac{a}{c} \Rightarrow c = 0$$

$$1 = h(1) = \frac{a}{d} \Rightarrow a = d$$

Por lo tanto,  $h(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + 0}{0 + d} = \frac{a}{d}z = z$ . Pero como  $h(z) = z$  para todo  $z$ , se tiene que  $h(f(z)) = f(z)$  y por tanto

$$\begin{aligned} g(z) &= g \circ (f^{-1} \circ f)(z) \\ &= (g \circ f^{-1}) \circ f(z) \\ &= h(f(z)) \\ &= f(z) \end{aligned}$$

Es decir,  $f$  y  $g$  son idénticas. ◇

**Teorema 2.14 (Razón Doble y Transformación de Möbius).** *Existe una única transformación de Möbius  $w = T(z)$  que asigna tres puntos distintos  $z_1, z_2$  y  $z_3$  en tres puntos distintos  $w_1, w_2$  y  $w_3$ , respectivamente. Una fórmula implícita para esta transformación está dada por*

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \quad (2.31)$$

*Demostración.* Sean  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$  distintos. La transformación

$$R(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

es una transformación de Möbius que asigna  $z_1, z_2, z_3$  en  $0, 1, \infty$ . De igual manera la transformación

$$S(w) = \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}$$



es una transformación de Möbius que asigna  $w_1, w_2, w_3$  en  $0, 1, \infty$ . Por la proposición (2.1)  $S^{-1}$  también es una transformación de Möbius y por el teorema (2.12) la composición  $T = S^{-1} \circ R$  también es una transformación de Möbius que satisface

$$T(z_1) = S^{-1}(R(z_1)) = S^{-1}(0) = w_1$$

$$T(z_2) = S^{-1}(R(z_2)) = S^{-1}(1) = w_2$$

$$T(z_3) = S^{-1}(R(z_3)) = S^{-1}(\infty) = w_3$$

Observemos que la ecuación  $T(z) = w$  se puede escribir como

$$S^{-1}(R(z)) = w \iff R(z) = S(w)$$

lo que significa que,

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}.$$

Para probar la unicidad supongamos que  $T$  y  $T_1$  son transformación de Möbius, y que existen distintos  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$  tal que

$$T(z_j) = T_1(z_j) = w_j, \quad j = 1, 2, 3$$

Entonces por la proposición (2.1)  $T^{-1}$  es una transformación de Möbius y por el teorema (2.12)  $T^{-1} \circ T_1$  es una transformación de Möbius que fija  $z_1, z_2, z_3$  sobre sí mismo. Por el teorema (2.13) la única transformación de Möbius que fija tres

puntos es la identidad. Por lo tanto  $T^{-1} \circ T_1 = Id$ , es decir,  $T = T_1$ , así  $T$  es única.  $\diamond$

**Ejemplo 2.12.** Encontrar una transformación de Möbius  $T : C_\infty \rightarrow C_\infty$ , que fije los puntos  $T(0) = 2, T(1) = 3$  y  $T(6) = 4$ .

*Solución.* Para encontrar una transformación de Möbius  $T : C_\infty \rightarrow C_\infty$  tal que  $T(0) = 2, T(1) = 3$  y  $T(6) = 4$ , notemos que  $T_1 : C_\infty \rightarrow C_\infty$ , dada por

$$T_1(z) = \frac{(z-0)(1-6)}{(z-6)(1-0)} = \frac{-5z}{z-6}; \quad (1)(0) - (-6)(-5) \neq 0$$

Si  $z = 0$ ,

$$T_1(0) = \frac{-5(0)}{5-6} = 0$$

Si  $z = 1$ ,

$$T_1(1) = \frac{-5(1)}{1-6} = 1$$

Si  $z = 6$

$$\begin{aligned} T_1(6) &= \lim_{z \rightarrow 6} T_1(z) \implies \lim_{z \rightarrow 6} \frac{1}{T_1(z)} = \lim_{z \rightarrow 6} \frac{z-6}{-5z} = 0 \\ &\implies \lim_{z \rightarrow 6} T_1(z) = \infty \\ &\implies T_1(6) = \infty \end{aligned}$$

Así,  $T_1(z)$  es una transformación de Möbius con  $T_1(0) = 0, T_1(1) = 1$  y  $T_1(6) = \infty$ .

Similarmente,  $T_2 : C_\infty \rightarrow C_\infty$ , dada por

$$T_2(w) = \frac{(w-2)(3-4)}{(w-4)(3-2)} = \frac{-w+2}{w-4}; \quad (-1)(-4) - (2)(1) \neq 0$$

Si  $w = 2$ ,

$$T_2(2) = \frac{-2+2}{2-4} = 0$$

Si  $w = 3$ ,

$$T_2(3) = \frac{-3+2}{3-4} = 1$$

Si  $w = 4$ ,

$$\begin{aligned} T_2(4) &= \lim_{w \rightarrow 4} T_2(w) \implies \lim_{w \rightarrow 4} \frac{1}{T_2(w)} = \lim_{w \rightarrow 4} \frac{w-4}{-w+2} = 0 \\ &\implies \lim_{w \rightarrow 4} T_2(w) = \infty \\ &\implies T_2(4) = \infty \end{aligned}$$

así,  $T_2(w)$  es una transformación de Möbius con  $T_2(2) = 0$ ,  $T_2(3) = 1$  y  $T_2(4) = \infty$ .

Calcularemos  $T = T_2^{-1} \circ T_1$ , haciendo  $T_2(w) = z$ , obtenemos

$$z = \frac{-w+2}{w-4}$$

$$(w-4)z = -w+2$$

$$wz - 4z = -w+2$$

$$zw + w = 4z + 2$$

$$w(z+1) = 4z+2$$

$$w = \frac{4z + 2}{z + 1}$$

Así,  $T_2^{-1}(z) = \frac{4z + 2}{z + 1}$  y como  $(4)(1) - (2)(1) \neq 0$  es una transformación de Möbius. Luego,

$$\begin{aligned} T(z) &= (T_2^{-1} \circ T_1)(z) \\ &= T_2^{-1}(T_1(z)) \\ &= T_2^{-1}\left(\frac{-5z}{z-6}\right) \\ &= \frac{4\left(\frac{-5z}{z-6}\right) + 2}{\left(\frac{-5z}{z-6}\right) + 1} \\ &= \frac{-20z + 2(z-6)}{-5z + (z-6)} \\ &= \frac{-18z - 12}{-4z - 6} \\ T(z) &= \frac{9z + 6}{2z + 3}; \quad (9)(3) - (6)(3) \neq 0 \end{aligned}$$

Además,

Si  $z = 0$ ,

$$T(0) = \frac{9(0)+6}{2(0)+3} = 2$$

Si  $z = 1$ ,

$$T(1) = \frac{9(1)+6}{2(1)+3} = 3$$

Si  $z = 6$ ,

$$T(6) = \frac{9(6)+6}{2(6)+3} = 4$$

Así,  $T(z) = \frac{9z+6}{2z+3}$  es una transformación de Möbius que fija los puntos  $T(0) = 2$ ,  $T(1) = 3$  y  $T(6) = 4$ .

**Ejemplo 2.13.** *Encontrar la transformación de Möbius que aplique los puntos  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ ,  $z_3 = i$ , en los puntos  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = i$ ,  $w_3 = -1$ , respectivamente.*

*Solución.* Sustituyendo  $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2$  y  $w_3$  en la ecuación (2.31) tenemos

$$\frac{w-0}{w+1} \frac{i+1}{i-0} = \frac{z-0}{z-i} \frac{1-2}{1-0}$$

entonces

$$w(i+1)(z-1) = z(1-i)(w+1)i$$

$$wzi + w + zw - wi = zwi + zi + zw + z$$

$$w(1-i) = z(1+i)$$

$$w = \frac{z(1+i)}{(1-i)}$$

$$w = zi$$

Por lo tanto  $T(z) = w = zi$ , donde

$$T(0) = (0)i = 0$$

$$T(1) = (1)i = i$$

$$T(i) = (i)i = i^2 = -1$$

## 2.5. Transformaciones del Semiplano Superior

Encontremos todas las transformaciones de Möbius que aplican el semiplano superior  $\text{Im}(z) > 0$  sobre el disco abierto  $|w| < 1$  y el eje real  $\text{Im}(z) = 0$  en la circunferencia  $|w| = 1$  (Figura 2.15).

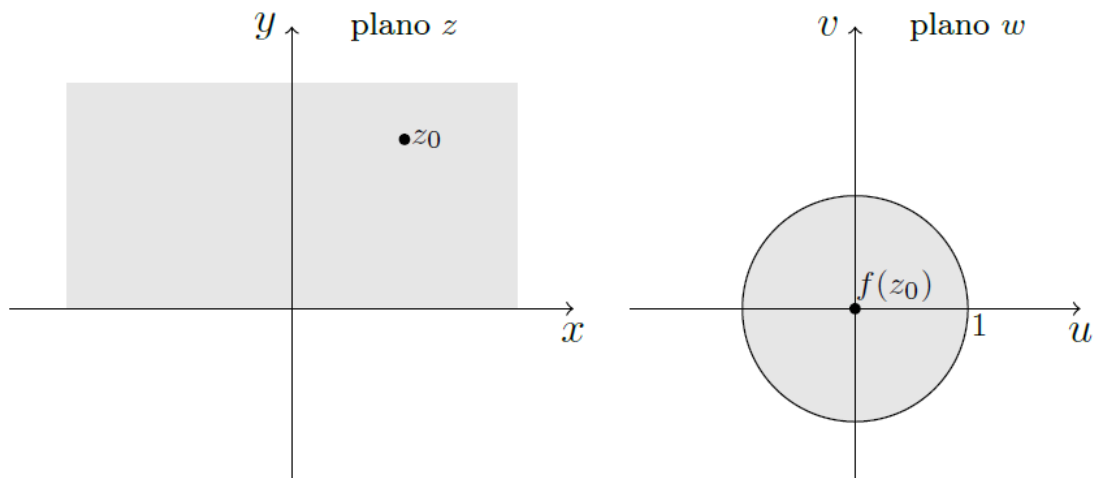


Figura 2.15: Transformación del Semiplano.

En primer lugar, buscaremos transformaciones de Möbius que lleven el eje real a la circunferencia de radio unidad,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad |f(z)| = 1.$$

Teniendo en cuenta que los puntos del eje real  $\text{Im}(z) = 0$  se deben transformar en puntos de la circunferencia  $|f(z)| = 1$ , empezamos seleccionando los puntos  $z = 0$ ,  $z = 1$  y  $z = \infty$  sobre la recta real y determinando condiciones necesarias

sobre una transformación de Möbius

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0 \quad (2.32)$$

para que las imágenes de esos puntos tengan módulo unidad.

Observemos que  $c \neq 0$  porque, la imagen del punto  $z = \infty$  es  $w = f(\infty) = \infty$  cuando  $c = 0$ . En particular de  $f(\infty) = a/c$  y  $f(0) = b/d$  tenemos,

$$\begin{aligned} f(\infty) = \frac{a}{c} &\Rightarrow |f(\infty)| = \left| \frac{a}{c} \right| \\ &\Rightarrow 1 = \frac{|a|}{|c|}; \quad |f(z)| = 1 \quad \forall z. \\ &\Rightarrow |a| = |c| \neq 0; \quad c \neq 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} f(0) = \frac{b}{d} &\Rightarrow |f(0)| = \left| \frac{b}{d} \right| \\ &\Rightarrow 1 = \frac{|b|}{|d|}; \quad |f(z)| = 1 \quad \forall z. \\ &\Rightarrow |b| = |d| \neq 0; \quad c \neq 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

El hecho de que  $a$  y  $c$  son no nulos nos permite reformular (2.32) como

$$f(z) = \frac{a \left( z + \frac{b}{a} \right)}{c \left( z + \frac{d}{c} \right)} = \left( \frac{a}{c} \right) \left( \frac{z + (b/a)}{z + (d/c)} \right)$$

Como  $|a/c| = 1$ , entonces al escribir  $a/c$  en forma polar tenemos  $(a/c) = |a/c|e^{i\alpha} = e^{i\alpha}$  para  $\alpha \in \mathbb{R}$  y, como  $b$  y  $d$  son distintos de cero, podemos reformular la expresión anterior como

$$f(z) = e^{i\alpha} \left( \frac{z - z_0}{z - z_1} \right) \quad (2.35)$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R}$ , y  $z_0 = (-b/a)$ ,  $z_1 = (-d/c)$  son constantes complejas no nulas. Por otra parte

$$\begin{aligned} \left| \frac{b}{a} \right| &= \frac{|b|}{|a|}; && \text{propiedad de módulo.} \\ &= \frac{|d|}{|c|}; && \text{por (2.33) y (2.34).} \\ &= \left| \frac{d}{c} \right|; && \text{propiedad de módulo.} \end{aligned}$$

Es decir,  $|z_1| = |z_0|$ .

A continuación, imponemos sobre la transformación (2.35) la condición de que  $|f(z)| = 1$  cuando  $z = 1$ .

$$\begin{aligned} |f(1)| = 1 &\Rightarrow \left| e^{i\alpha} \left( \frac{1 - z_0}{1 - z_1} \right) \right| = 1 \\ &\Rightarrow \frac{|1 - z_0|}{|1 - z_1|} = 1; \quad |e^{i\alpha}| = 1, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow |1 - z_1| = |1 - z_0|; \quad z_1 \neq 1 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow |1 - z_1|^2 = |1 - z_0|^2$$

$$\Rightarrow (1 - z_1)(1 - \bar{z}_1) = (1 - z_0)(1 - \bar{z}_0); \quad \text{propiedad de conjugado}$$

$$\Rightarrow 1 - \bar{z}_1 - z_1 + z_1\bar{z}_1 = 1 - \bar{z}_0 - z_0 + z_0\bar{z}_0$$

$$\Rightarrow -\bar{z}_1 - z_1 + |z_1|^2 = -\bar{z}_0 - z_0 + |z_0|^2$$

$$\Rightarrow -\bar{z}_1 - z_1 = -\bar{z}_0 - z_0; \quad |z_1| = |z_0|$$

$$\Rightarrow z_1 + \bar{z}_1 = z_0 + \bar{z}_0$$

$$\Rightarrow 2 \operatorname{Re}(z_1) = 2 \operatorname{Re}(z_0); \quad \text{propiedad de conjugado.}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_0)$$

Como  $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_0)$  entonces  $z_1 = x + iy$ ,  $z_0 = x + iv$  para  $x, y, v \in \mathbb{C}$ .

Además

$$|z_1| = |z_0| \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + v^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 + v^2$$

$$\Rightarrow y = v \quad \text{ó} \quad y = -v$$

$$\Rightarrow z_1 = x + iv = z_0 \quad \text{ó} \quad z_1 = x - iv = \bar{z}_0$$

Por lo tanto,  $z_1 = z_0$  ó  $z_1 = \bar{z}_0$ .

Si  $z_1 = z_0$ , la transformación (2.35) pasa a ser la función constante,  $f(z) = e^{i\alpha}$ ;

luego el caso más general se tiene cuando  $z_1 = \bar{z}_0$ . Así pues, la expresión más general de una transformación de Möbius que aplica el eje real  $\text{Im}(z) = 0$  sobre la circunferencia unitaria  $|f(z)| = 1$  es

$$f(z) = e^{i\alpha} \left( \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right); \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Sólo, resta ver si aplica el semiplano superior  $\text{Im}(z) > 0$  sobre el disco abierto  $|f(z)| = 1$ . Para ello, es preciso que  $z_0$  pertenezca al semiplano superior, es decir,  $\text{Im}(z_0) > 0$ , ya que

$$|z - z_0|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < (x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 = |z - \bar{z}_0|^2$$

si  $y, y_0 > 0$ . Por tanto,  $|f(z)| = |z - z_0| / |z - \bar{z}_0| < 1$ .

Así, cualquier transformación de Möbius que posea la propiedad enunciada al principio de esta sección debe tener, en consecuencia, la forma

$$f(z) = e^{i\alpha} \left( \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right), \quad \text{Im}(z_0) > 0 \quad (2.36)$$

con  $\alpha$  real.

**Teorema 2.15.** *La transformación  $w = f(z) = e^{i\alpha} \left( \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right)$ , donde  $z_0$  es un punto del semiplano superior y  $\theta \in \mathbb{R}$  aplica el semiplano superior  $\text{Im } z > 0$  en el disco abierto  $|w| < 1$  y la recta real  $\text{Im } z = 0$  en la circunferencia unitaria  $|w| = 1$  ( Ver Figura 2.15).*

*Demostración.* Sean  $z = x + iy$  un punto del semiplano superior y  $z_0 = x_0 + iy_0$ , donde  $y, y_0 > 0$ , entonces tenemos

$$\begin{aligned}
 y - y_0 &\leq y + y_0 \\
 (y - y_0)^2 &\leq (y + y_0)^2 \\
 (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &\leq (x - x_0)^2 + (y + y_0)^2 \\
 \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &\leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2} \\
 |z - z_0| &\leq |z - \bar{z}_0|
 \end{aligned}$$

Así

$$|z - z_0| \leq |z - \bar{z}_0| \tag{2.37}$$

La igualdad ocurre cuando  $z$  pertenece al eje real. Luego obtenemos

$$\begin{aligned}
 |w| &= \left| e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right| \\
 &= |e^{i\alpha}| \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right| \\
 &= \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right|; \quad |e^{i\alpha}| = 1 \\
 &\leq 1
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la transformación  $f(z) = e^{i\alpha} \left( \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right)$  aplica el semiplano superior

$\text{Im } z > 0$  en el disco abierto  $|w| < 1$  y la recta real  $\text{Im } z = 0$  en la circunferencia unitaria  $|w| = 1$ . ◇

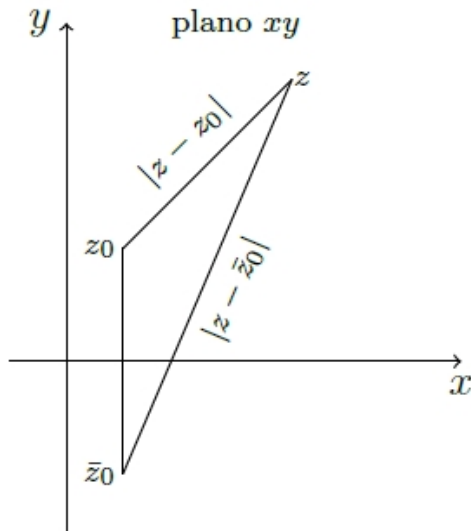


Figura 2.16: Distancia entre  $z$ ,  $z_0$  y  $\bar{z}_0$ .

**Ejemplo 2.14.** Comprobar que la transformación racional lineal

$$w = \frac{i - z}{i + z} \tag{2.38}$$

transforma el semiplano superior  $\text{Im } z > 0$  en el disco abierto  $|w| < 1$  y la frontera  $\text{Im } z = 0$  en  $|w| = 1$ .

*Solución.* Verifiquemos que (2.38) se puede expresar en la forma de la ecuación (2.36). La ecuación (2.38) se puede escribir como una transformación de Mobius de la siguiente forma

$$w = \frac{-z + i}{z + i}$$

donde  $a = -1, b = i, c = 1$  y  $d = i$ . Como  $a$  y  $c$  son no nulos podemos expresar la ecuación (2.38) como sigue.

$$\begin{aligned} w &= \frac{-z + i}{z + i} = \frac{-1(z + \frac{i}{-1})}{1(z + \frac{i}{1})} \\ &= \left(-\frac{1}{1}\right) \frac{z - i}{z - (-i)} \end{aligned}$$

Luego, expresamos el número  $\frac{a}{c}$  en forma exponencial

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \left(-\frac{1}{1}\right) \Rightarrow \frac{a}{c} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{a}{c} = -1 = |-1|e^{i\arg(-1)} \\ &\Rightarrow \frac{a}{c} = -1 = e^{i\pi} \end{aligned}$$

Sustituyendo esta ultima expresión obtenemos

$$\begin{aligned} w &= e^{i\pi} \left(\frac{z - i}{z - (-i)}\right) \\ &= e^{i\pi} \left(\frac{z - i}{z - \bar{i}}\right); \text{ ya que } -i = \bar{i} \end{aligned}$$

Así

$$w = e^{i\pi} \left(\frac{z - i}{z - \bar{i}}\right)$$

Por lo tanto como la ecuación anterior tiene la forma (2.36), entonces (2.38) transforma el semiplano superior  $\text{Im } z > 0$  en el disco abierto  $|w| < 1$  y la frontera

$\text{Im } z = 0$  en  $|w| = 1$

Las imágenes del semiplano superior  $\text{Im } z \geq 0$  bajo otros tipos de transformaciones racionales lineales suelen ser fáciles de averiguar examinando la transformación particular en cuestión.

**Ejemplo 2.15.** *Comprobar que la transformación racional lineal*

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (2.39)$$

*aplica el semiplano  $\text{Im } z \geq 0$  en el plano  $z$  sobre el semiplano  $\text{Im } w \geq 0$  en el plano  $w$ .*

*Solución.* Sean  $z = x + iy$  y  $w = u + iv$  comprobaremos que la transformación 2.39 aplica el semiplano  $y > 0$  sobre el semiplano  $v > 0$  y el eje  $x$  sobre el eje  $u$ .  
Encontremos primero la imagen del eje real  $y = 0$ . Utilizando la ecuación (2.39) obtenemos

$$\begin{aligned} y = 0 &\implies w = \frac{(x + 0i) - 1}{(x + 0i) + 1} \\ &\implies u + iv = \left( \frac{x - 1}{x + 1} \right) + 0i \end{aligned}$$

Luego, por igualdad de números complejos tenemos

$$u = \frac{x - 1}{x + 1}, \quad v = 0$$

Por tanto, obtenemos que si  $z$  es real también  $w$  lo es. Así la imagen de la recta

$y = 0$  en el plano  $z$  es la recta real  $v = 0$  en el plano  $w$ . Ahora, consideramos cualquier punto  $w$  (con  $v \neq 0$ ) en el plano  $w$  infinito.

$$\begin{aligned}
 v = \text{Im}(w) &\implies v = \text{Im}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \\
 &\implies v = \text{Im}\left(\frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{\overline{z+1}}{\overline{z+1}}\right) \\
 &\implies v = \text{Im}\left(\frac{(z-1)\overline{(z+1)}}{|z+1|^2}\right) \\
 &\implies v = \text{Im}\left(\frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{|z+1|^2}\right) \\
 &\implies v = \text{Im}\left(\frac{x^2+y^2-1}{|z+1|^2} + i\frac{2y}{|z+1|^2}\right) \\
 &\implies v = \frac{2y}{|z+1|^2}; \quad z \neq -1
 \end{aligned}$$

De esta última expresión obtenemos que  $|z+1|^2 > 0$ , por tanto los números  $v$  e  $y$  tienen el mismo signo, es decir, si  $y > 0$ , entonces  $v > 0$ , lo cual significa que puntos por encima del eje  $x$  en el plano  $z$  corresponden a puntos por encima del eje  $u$  en el plano  $w$ . Finalmente como las transformaciones racionales lineales son uno a uno del plano extendido  $z$  sobre el plano extendido  $w$ , entonces los puntos  $z = \infty$  y  $z = -\frac{d}{c}$ , donde  $d = -1$  y  $c = 1 \neq 0$  se transforman en

$$z = \infty \implies w = \frac{a}{c} = 1; \quad \text{donde } a = 1$$

y

$$z = -\frac{d}{c} \implies w = \infty$$

Por tanto el semiplano  $\text{Im } z \geq 0$  en el plano  $z$  bajo la transformación (2.39) se transforma en el semiplano  $\text{Im } w \geq 0$  en el plano  $w$ . Esta situación se ilustra en la siguiente figura.

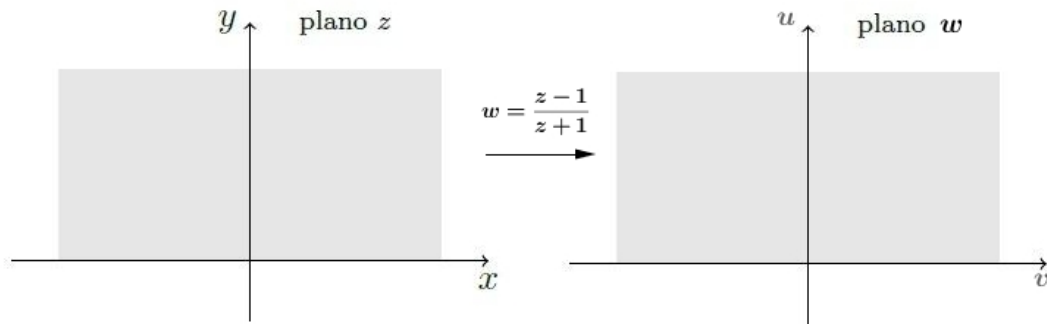


Figura 2.17: Transformación  $w = \frac{z-1}{z+1}$ .

## 2.6. La Transformación $w = e^z$ y los Logaritmos

Si  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , entonces  $w = e^z$  puede escribirse como

$$w = e^z = e^x \cos(y) + ie^x \text{sen}(y)$$

por lo que la función exponencial queda descrita en la forma  $f(z) = e^z = u(x, y) + iv(x, y)$ , donde

$$\begin{cases} u(x, y) = e^x \cos(y) \\ v(x, y) = e^x \text{sen}(y) \end{cases}$$

obteniéndose

$$|w|^2 = u^2 + v^2 = e^{2x} \cos^2(y) + e^{2x} \text{sen}^2(y)$$



$$= e^{2x}(\cos^2(y) + \operatorname{sen}^2(y))$$

$$|w| = e^x$$

y

$$\begin{aligned} \arg w &= \arctan\left(\frac{v}{u}\right) = \arctan\left(\frac{e^x \operatorname{sen}(y)}{e^x \cos(y)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(y)}{\cos(y)}\right) = \arctan(\tan(y)) = y \end{aligned}$$

Por tanto, la transformación  $w = e^z$  del plano  $z$  en el plano  $w$  usando coordenadas polares tiene la forma

$$\rho = e^x \quad y \quad \phi = y \quad (2.40)$$

donde  $\rho = |w|$  y  $\phi = \arg(w)$ .

**Ejemplo 2.16.** *Obtener las imágenes en el plano  $w$  de las rectas paralelas a los ejes real e imaginario en el plano  $z$  bajo la transformación  $w = e^z$ .*

*Solución.* Consideremos la recta vertical  $x = \operatorname{Re}(z) = c_1$ . De acuerdo a lo anterior, la imagen de esta recta es

$$w = u + iv = e^{c_1+iy} = e^{c_1} \cos(y) + ie^{c_1} \operatorname{sen}(y)$$

de donde

$$\begin{cases} u = e^{c_1} \cos(y) \\ v = e^{c_1} \operatorname{sen}(y) \end{cases}$$

obteniéndose

$$\begin{aligned} |w|^2 &= u^2 + v^2 = e^{2c_1} \cos^2(y) + e^{2c_1} \operatorname{sen}^2(y) \\ &= e^{2c_1} (\cos^2(y) + \operatorname{sen}^2(y)) \end{aligned}$$

$$|w| = e^{c_1}$$

de modo que la recta  $x = c_1$  paralela al eje imaginario se transforma en una circunferencia en el plano  $w$  de radio  $e^{c_1}$  con centro en el origen.

La imagen de un punto típico  $z = (c_1, y)$  sobre la recta vertical  $x = c_1$  tiene coordenadas polares  $\rho = e^{c_1}$  y  $\phi = y$  en el plano  $w$ . Esa imagen se mueve en sentido positivo a lo largo de la circunferencia que se muestra en la Figura 2.19.

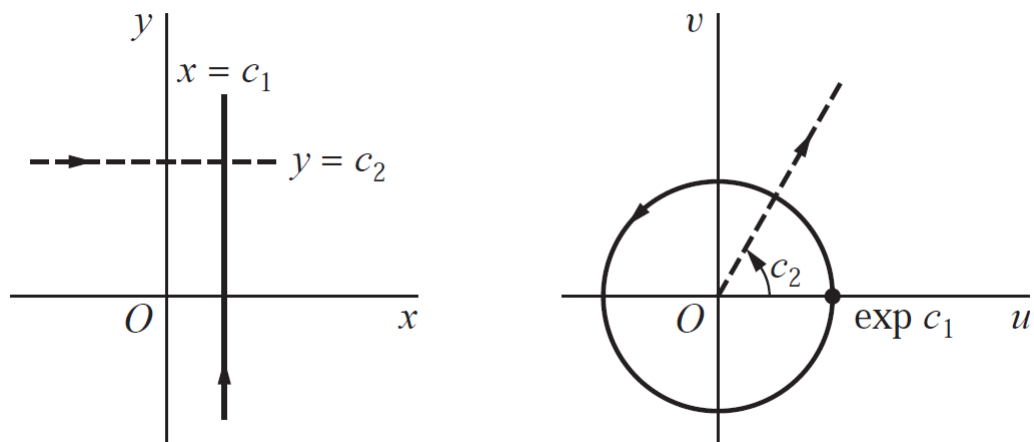


Figura 2.18:  $w = e^z$ .

Cuando  $y$  varía sobre el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , el punto  $z = c_1 + iy$  recorre una vez

la recta  $x = c_1$  y el punto  $w = u + iv$  da una vuelta completa a la circunferencia cada vez que  $y$  varía en  $2\pi$ , es decir, cada punto de la circunferencia es imagen de infinitos puntos separados entre sí  $2\pi$  unidades a lo largo de la recta. Por lo tanto, el punto imagen recorre la circunferencia una infinidad de veces conforme  $z$  se mueve sobre la recta  $x = c_1$ , es decir, la transformación  $w = e^z$  no es uno a uno de la recta vertical  $x = c_1$  del plano  $z$  en la circunferencia centrada en el origen de radio  $e^{c_1}$  sobre el plano  $w$ .

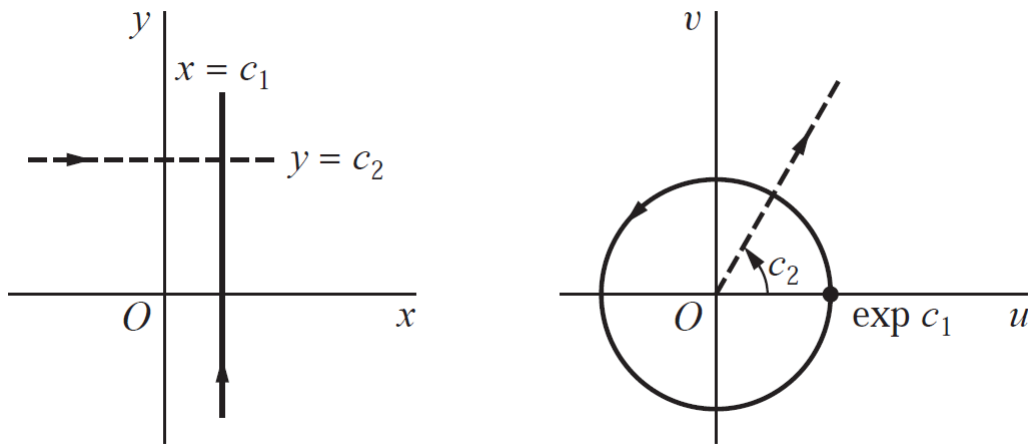


Figura 2.19:  $w = e^z$ .

Los puntos de la recta horizontal  $y = \text{Im}(z) = c_2$  se transforman en

$$w = u + iv = e^{x+ic_2} = e^x \cos(c_2) + ie^x \text{sen}(c_2)$$

de donde

$$\begin{cases} u = e^x \cos(c_2) \\ v = e^x \text{sen}(c_2) \end{cases}$$

obteniéndose

$$\begin{aligned}\arg w &= \arctan\left(\frac{v}{u}\right) = \arctan\left(\frac{e^x \operatorname{sen}(c_2)}{e^x \operatorname{cos}(c_2)}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\operatorname{sen}(c_2)}{\operatorname{cos}(c_2)}\right) = \arctan(\tan(c_2)) = c_2\end{aligned}$$

La imagen de un punto típico  $z = (x, c_2)$  sobre una recta horizontal  $y = c_2$  tiene coordenadas polares  $\rho = e^x$  y  $\phi = c_2$  en el plano  $w$ . Al desplazarse el punto  $z = (x, c_2)$  por esa recta de izquierda a derecha, la coordenada  $\rho = e^x$  del punto imagen sobre el rayo crece por todos los valores positivos, como indica la Figura 2.19. Así,  $w$  varía sobre una recta que inicia desde el origen con un ángulo de inclinación  $c_2$ . Por lo tanto, la imagen de la recta horizontal  $y = c_2$  bajo la transformación  $w = e^z$  es el conjunto de todos los punto  $w \neq 0$  en el rayo que inician desde el origen y que forma un ángulo de  $c_2$  radianes con el eje  $u$  positivo, es decir, es el conjunto de todos los  $w \neq 0$ , que satisfacen  $\phi = \arg(w) = c_2$ . Además cada punto sobre el rayo  $\phi = c_2$  tiene una y sólo una preimagen sobre la recta horizontal  $y = c_2$ , es decir, la recta horizontal  $y = c_2$  se aplica de manera uno a uno sobre el rayo  $\phi = c_2$ .

Los *segmentos* de rectas verticales y horizontales se aplican, respectivamente sobre porciones de circunferencias y rayos, y las imágenes de diversas regiones se obtienen fácilmente a partir de las observaciones realizadas en el ejemplo 2.16.

Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.17.** *Demostrar que la transformación  $w = e^z$  aplica la región rectangular  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  sobre la región  $e^a \leq \rho \leq e^b, c \leq \phi \leq d$ .*

*Solución:* Las dos regiones y partes correspondiente de sus fronteras han sido representadas en la Figura 2.20. El segmento de recta vertical  $AD$  se aplica sobre el arco  $\rho = e^a, c \leq \phi \leq d$ , marcado como  $A'B'$ . Las imágenes de segmentos de recta verticales a la derecha de  $AD$  y que une las partes horizontales de la frontera son arcos mayores, eventualmente, la imagen del segmento de recta  $BC$  es el arco  $\rho = e^b, c \leq \phi \leq d$ , señalado como  $B'C'$ . Por lo tanto, la transformación  $w = e^z$  aplica la región rectangular  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  sobre la región  $e^a \leq \rho \leq e^b, c \leq \phi \leq d$ .

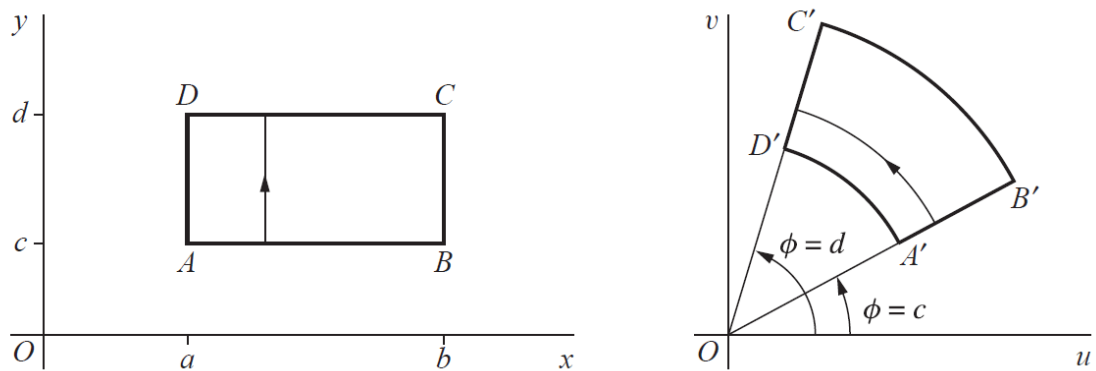


Figura 2.20:  $w = e^z$ .

Nuestro siguiente ejemplo aquí utiliza las imágenes de líneas *horizontales* para encontrar la imagen de una banda infinita horizontal.

**Ejemplo 2.18.** *Mostrar que la transformación  $w = e^z$  aplica la banda infinita  $0 \leq y \leq \pi$  sobre el semiplano superior  $v \geq 0$  (Ver Figura 2.21).*

*Solución:* Del ejemplo 2.16 una línea horizontal  $y = c$  se transforma en un rayo  $\phi = c$  desde el origen. Cuando el número  $c$  incrementa de  $c = 0$  a  $c = \phi$ , las líneas horizontales  $y = c$  llenan la banda infinita  $0 \leq y \leq \phi$  y los rayos  $\phi = c$  llenan el semiplano superior  $v \geq 0$ . Por lo tanto, la transformación  $w = e^z$  aplica la banda infinita  $0 \leq y \leq \pi$  sobre el semiplano superior  $v \geq 0$ .

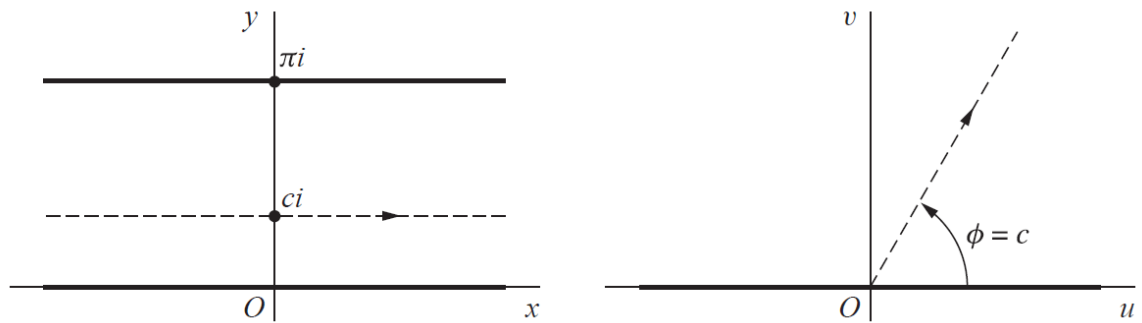


Figura 2.21:  $w = e^z$ .

Para tener una función exponencial compleja *uno a uno* (es decir, univaluada) hay que tener cuidado en la elección del dominio sobre el cual definir la exponencial, tal como se muestra a continuación.

**Teorema 2.16.** *Sea  $A_\alpha = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \alpha < y \leq \alpha + 2\pi\}$  entonces la transformación  $w = e^z$  aplica el conjunto  $A_\alpha$  uno a uno en  $\mathbb{C} - \{0\}$ .*

*Demostración.* Sean  $z_1, z_2 \in A_\alpha$  tal que  $e^{z_1} = e^{z_2}$ . Primero observemos que si  $z_1, z_2 \in A_\alpha$  entonces  $|\text{Im}(z_1) - \text{Im}(z_2)| < 2\pi$ .

Luego,

$$\begin{aligned}e^{z_1} = e^{z_2} &\Rightarrow e^{z_1} e^{-z_2} = e^{z_2} e^{-z_2} \\&\Rightarrow e^{z_1 - z_2} = e^{z_2 - z_2} = e^0 \\&\Rightarrow e^{z_1 - z_2} = 1 \\&\Rightarrow z_1 - z_2 = 2\pi ni; \quad n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\text{Im}(z_1) - \text{Im}(z_2) = 2\pi ni$ , y por consiguiente  $|\text{Im}(z_1) - \text{Im}(z_2)| = 2\pi|n|$ . Sin embargo, por hipótesis  $|\text{Im}(z_1) - \text{Im}(z_2)| < 2\pi$ , por lo tanto,  $n = 0$ , con lo cual  $z_1 = z_2$ . Así  $w = e^z$  aplica el conjunto  $A_\alpha$  uno a uno en  $\mathbb{C} - \{0\}$ .  $\diamond$

**Ejemplo 2.19.** *Mostrar que la franja horizontal  $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : -\pi < y \leq \pi\}$  del plano  $z$  se aplica uno a uno en el conjunto  $S = \{w \in \mathbb{C} : w \neq 0\}$  del plano  $w$ , mediante la transformación  $w = e^z$ .*

*Solución:* La línea horizontal  $z = t + ib$ , para  $-\infty < t \leq \infty$  en el plano  $z$ , se aplica sobre el rayo  $w = e^t(\cos(b) + i \text{sen}(b))$  que está inclinado un ángulo  $\phi = b$  en el plano  $w$ . El segmento vertical  $z = a + i\theta$ , para  $-\pi < \theta \leq \pi$  en el plano  $z$ , se aplica sobre la circunferencia centrada en el origen con radio  $e^a$  en el plano  $w$ , es decir,  $w = e^a e^{i\theta} = e^a(\cos \theta + i \text{sen} \theta)$ . Los segmentos de recta vertical  $z = a + i\theta$ , para  $-\pi < \theta \leq \pi$  en el plano  $z$ , llenan la franja horizontal  $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : -\pi < y \leq \pi\}$  cuando  $-\infty < a \leq \infty$  y las correspondientes circunferencias llenan el conjunto  $S = \{w \in \mathbb{C} : w \neq 0\}$ . Por el teorema 2.16, la transformación  $w = e^z$  aplica

uno a uno la franja horizontal  $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : -\pi < y \leq \pi\}$  en el conjunto  $S = \{w \in \mathbb{C} : w \neq 0\}$ . Esta franja se llama la **franja periódica fundamental** y se muestra en la figura 2.22.

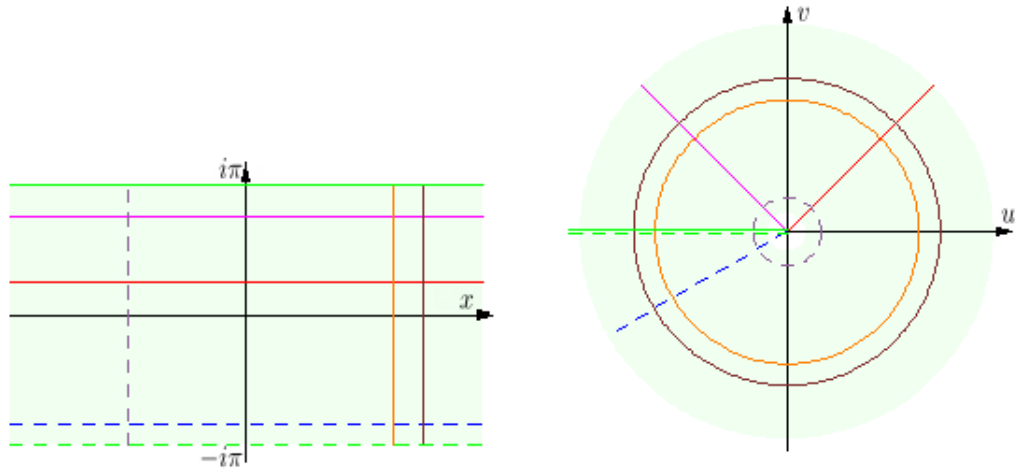


Figura 2.22: La franja periódica fundamental de la transformación  $w = e^z$ .

Estudiemos ahora, el mapeo de la rama principal,

$$w = \text{Log}(z) = \ln|z| + i \text{Arg}(z); \quad \text{donde } |z| > 0 \quad \text{y} \quad -\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$$

de la función logarítmica. Debido a que  $\exp(\text{Log}(z)) = z; \forall z \neq 0$  y  $\text{Log}(\exp(z)) = z$ ; siempre que  $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$ , entonces  $w = \text{Log}(z)$  es la inversa de la función exponencial restringida sobre este dominio. Por lo tanto, la transformación  $w = \text{Log}(z)$  es uno a uno desde el dominio  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0\}$  en el plano  $z$  sobre la franja horizontal  $\{w : -\pi < \text{Im}(w) \leq \pi\}$  en el plano  $w$ .

La rama principal del logaritmo  $w = \text{Log}(z)$  se muestra en la figura 2.23.



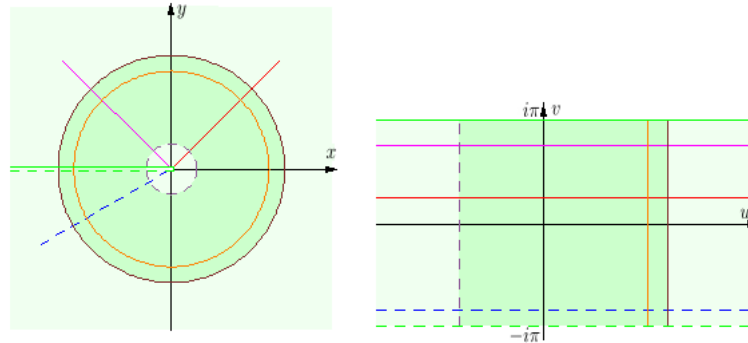


Figura 2.23: La rama principal del logaritmo  $w = \text{Log}(z)$

Ahora consideremos, cualquier rama

$$w = \log_{\alpha}(z) = \ln r + i\theta \quad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$$

de la función logarítmica. Debido a que  $\exp(\log_{\alpha}(z)) = z$ , concluimos que la transformación  $w = \log_{\alpha}(z)$  es un mapeo uno a uno del dominio  $|z| > 0$  sobre la franja horizontal  $\{w : \alpha < \text{Im}(w) < \alpha + 2\pi\}$  (Ver figura 2.24).

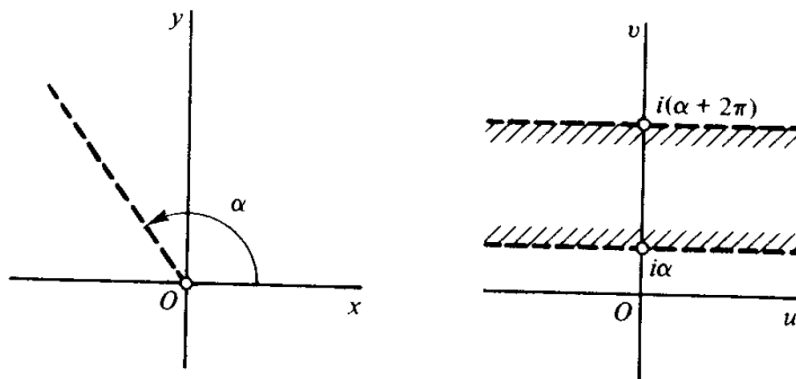


Figura 2.24:  $w = \log_{\alpha}(z) = \ln r + i\theta \quad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$

Eso es sencillo de ver haciendo mover un punto  $z = re^{i\theta_0}$ , con  $\alpha < \theta_0 < \alpha + 2\pi$ ,

hacia el exterior, a partir del origen, por el rayo  $\theta = \theta_0$ . Su imagen es, el punto cuyas coordenadas *rectangulares* en el plano  $w$  son  $(\ln r, \theta_0)$ . Por tanto, la imagen se mueve hacia la derecha a lo largo de toda la recta horizontal  $v = \theta_0$ . Estas rectas llenan la franja  $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$  al variar  $\theta_0$  entre  $\alpha$  y  $\alpha + 2\pi$ .

Las transformaciones logarítmicas pueden ser útiles en la práctica, y concluiremos esta sección con una aplicación que necesitaremos más adelante.

**Ejemplo 2.20.** *Verificar que la transformación*

$$w = \text{Log} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \quad (2.41)$$

*aplica el semiplano  $y > 0$  sobre la banda  $0 < v < \pi$ .*

*Solución:* La transformación (2.41), es la composición de las transformaciones

$$Z = \frac{z-1}{z+1} \quad \text{y} \quad w = \text{Log}(Z). \quad (2.42)$$

Sabemos por el ejemplo 2.15 que la primera de las transformaciones (2.42) aplica el semiplano superior  $y > 0$  sobre el semiplano superior  $Y > 0$ , donde  $z = x + iy$  y  $Z = X + iY$ . Además, por el párrafo inmediatamente después del ejemplo 2.19, la segunda transformación de (2.42) aplica el semiplano  $Y > 0$  sobre la banda  $0 < v < \pi$ , donde  $w = u + iv$ . En consecuencia, la transformación (2.41) aplica el semiplano  $y > 0$  sobre la banda  $0 < v < \pi$ . En la siguiente figura se indican

puntos frontera correspondientes.

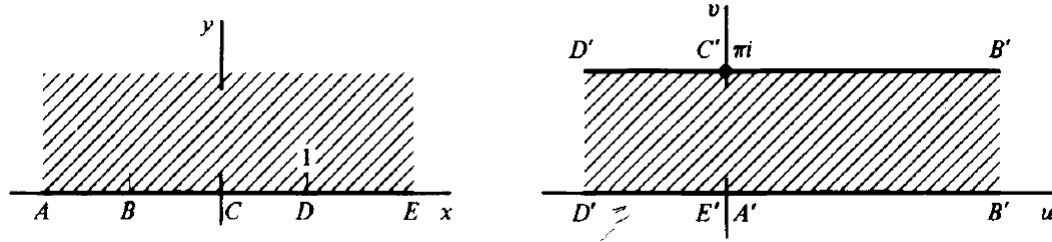


Figura 2.25:  $w = \text{Log} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)$

## 2.7. La transformación $w = \text{sen}(z)$

Consideremos la transformación  $w = \text{sen}(z)$ , la cual se puede reescribir mediante la ecuación (1.83) de la siguiente forma.

$$w = \text{sen}(z) = \text{sen}(x) \cos(y) + i \cos(x) \text{senh}(y), \quad \text{donde } z = x + iy$$

considerando  $w = u + iv$  obtenemos

$$u = \text{sen}(x) \cos(y), \quad v = \cos(x) \text{senh}(y) \quad (2.43)$$

**Teorema 2.17.** Si  $D = \{z = x + iy : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\infty < y < \infty\}$ , entonces la transformación  $w = \text{sen}(z)$  aplica el conjunto  $D$  uno a uno en  $\mathbb{C}$ .

*Demostración.* Sean  $z_1, z_2 \in D$  tal que  $\text{sen}(z_1) = \text{sen}(z_2)$ .

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(z_1) = \operatorname{sen}(z_2) &\Rightarrow \frac{e^{iz_1} - e^{i(-z_1)}}{2} = \frac{e^{iz_2} - e^{i(-z_2)}}{2} \\
&\Rightarrow e^{iz_1} - e^{i(-z_1)} = e^{iz_2} - e^{i(-z_2)} \\
&\Rightarrow e^{iz_1} - e^{iz_2} = e^{i(-z_1)} - e^{i(-z_2)} \\
&\Rightarrow e^{iz_1} - e^{iz_2} = e^{i(-z_1)-iz_2+iz_2} - e^{i(-z_2)-iz_1+iz_1} \\
&\Rightarrow e^{iz_1} - e^{iz_2} = e^{i(-z_1)}e^{i(-z_2)}(e^{iz_2} - e^{iz_1}) \\
&\Rightarrow e^{iz_1} - e^{iz_2} - e^{i(-z_1)}e^{i(-z_2)}(e^{iz_2} - e^{iz_1}) = 0 \\
&\Rightarrow e^{iz_1} - e^{iz_2} + e^{-i(z_1+z_2)}(e^{iz_1} + e^{iz_2}) = 0 \\
&\Rightarrow (e^{iz_1} - e^{iz_2})(1 + e^{-i(z_1+z_2)}) = 0
\end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$e^{iz_1} - e^{iz_2} = 0 \quad \text{ó} \quad 1 + e^{-i(z_1+z_2)} = 0$$

Primero supongamos que  $e^{iz_1} - e^{iz_2} = 0$ .

$$\begin{aligned}
e^{iz_1} - e^{iz_2} = 0 &\Rightarrow e^{iz_1} = e^{iz_2} \\
&\Rightarrow z_1 = z_2 + 2\pi n \\
&\Rightarrow z_1 - z_2 = 2\pi n
\end{aligned}$$

esto significa que  $|\operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2| = 2\pi|n|$ . Pero  $|\operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2| < \pi$ , así  $n = 0$ , por

tanto  $z_1 = z_2$ .

Ahora supongamos que  $1 + e^{-i(z_1+z_2)} = 0$ .

$$\begin{aligned}1 + e^{-i(z_1+z_2)} = 0 &\Rightarrow e^{-i(z_1+z_2)} = -1 \\&\Rightarrow e^{-i(z_1+z_2)} = e^{i\pi} \\&\Rightarrow e^{-i(z_1+z_2)} e^{-i\pi} = e^{i\pi} e^{-i\pi} \\&\Rightarrow e^{-i(z_1+z_2+\pi)} = 1 \\&\Rightarrow z_1 + z_1 + \pi = 2\pi n \\&\Rightarrow z_1 + z_1 = \pi(2n - 1)\end{aligned}$$

Es decir que  $z_1 + z_2$  sera un múltiplo impar (posiblemente negativo) de  $\pi$ , por tanto  $\operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2$  sera un múltiplo impar de  $\pi$ . Pero ya que  $z_1, z_2 \in D$ , entonces  $-\pi < \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 < \pi$ , por tanto no existe tales múltiplos.

Así, la transformación  $w = \operatorname{sen}(z)$  mapea puntos distintos sobre imágenes distintas, es decir es uno a uno. ◇

**Ejemplo 2.21.** *Comprobar que la transformación  $w = \operatorname{sen}(z)$  es una aplicación uno a uno de la franja semiinfinita  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $y \geq 0$  en el plano  $z$  sobre la mitad superior  $v \geq 0$  del plano  $w$ .*

*Solución.* Primero probaremos que la frontera de la franja se aplica de manera uno a uno sobre el eje real del plano  $w$ , como se indica en la figura (2.26).

Consideremos primero el segmento recto semi-infinito  $BA$ , el cual tiene coordenadas  $x = \pi, y \geq 0$ . Sustituyendo en la ecuación (2.43) obtenemos

$$u = \cos(y) \quad v = 0$$

Se sigue que un punto  $(\frac{\pi}{2}, y)$  de  $BA$  se aplica sobre un punto  $(\cos(y), 0)$  del plano  $w$  y la imagen se desplaza hacia la derecha desde  $B'$  a lo largo del eje  $u$  al desplazarse  $(\frac{\pi}{2}, y)$  hacia arriba partiendo de  $B$ .

Ahora consideremos el segmento horizontal  $DB$  que tiene coordenadas  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y = 0$ , el cual al sustituirlo en la ecuación (2.43) obtenemos

$$u = \sin(x) \quad v = 0$$

Por tanto un punto  $(x, 0)$  de  $DB$  tiene imagen  $(\sin(x), 0)$  en el plano  $w$ , que se desplaza desde  $D'$  hacia la derecha hasta  $B'$  cuando  $(x, 0)$  se desplaza hacia la derecha desde  $D$  hasta  $B$ .

Finalmente tomemos el segmento recto semiinfinito  $DE$  con coordenadas  $x = -\frac{\pi}{2}, y \geq 0$ , el cual al sustituirlo en la ecuación (2.43) obtenemos

$$u = -\cosh(y) \quad v = 0$$

Se sigue que un punto  $(-\frac{\pi}{2}, y)$  del segmento  $DE$  tiene imagen  $(-\cosh(y), 0)$  en

el plano  $w$ , que se desplaza hacia la izquierda desde  $D'$  a lo largo del eje  $u$  al desplazarse  $(-\frac{\pi}{2}, y)$  hacia arriba partiendo de  $D$ .

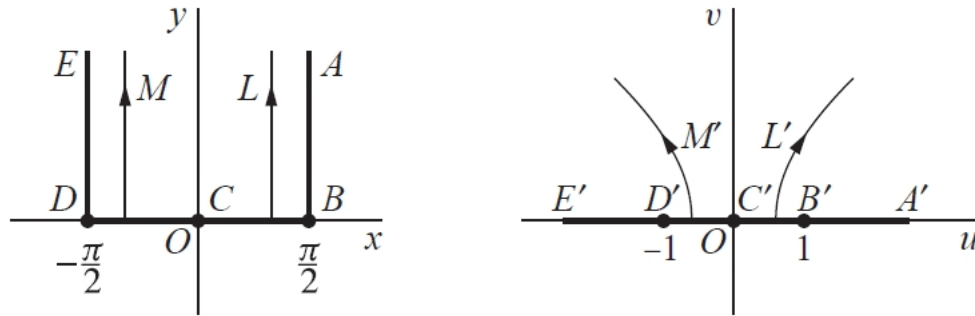


Figura 2.26:  $w = \text{sen } z$ .

Una forma de ver como se aplica el interior de la franja sobre el semiplano superior  $v > 0$  del plano  $w$  consiste en examinar las imágenes de ciertas semirrectas verticales.

Si  $x = c_1$  donde  $0 < c_1 < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\infty < y < \infty$  utilizando la ecuación (2.43) obtenemos las siguientes ecuaciones paramétricas.

$$u = \text{sen}(c_1) \cosh(y) \quad v = \cos(c_1) \sinh(y), \quad -\infty < y < \infty \quad (2.44)$$

las cuales podemos reescribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} u = \text{sen}(c_1) \cosh(y) &\Rightarrow \frac{u}{\text{sen}(c_1)} = \cosh(y) \\ &\Rightarrow \frac{u^2}{\text{sen}^2(c_1)} = \cosh^2(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v = \cos c_1 \operatorname{senh} y &\Rightarrow \frac{v}{\cos(c_1)} = \operatorname{senh}(y) \\
&\Rightarrow \frac{v^2}{\cos^2(c_1)} = \operatorname{senh}^2(y)
\end{aligned}$$

Luego, sustituyendo esto en la identidad  $\cosh^2(z) - \operatorname{senh}^2(z) = 1$ , tenemos

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2(c_1)} - \frac{v^2}{\cos^2(c_1)} = 1 \quad (2.45)$$

la cual es una hipérbola con focos

$$\begin{aligned}
w^2 &= \operatorname{sen}^2(c_1) + \cos^2(c_2) \\
w &= \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2(c_1) + \cos^2(c_2)} \\
w &= \pm 1
\end{aligned}$$

Por tanto la imagen de la recta  $x = c_1$  es la rama de la hipérbola (2.45). La segunda de las ecuaciones (2.44) muestra que al ascender un punto por la recta, su imagen sobre la hipérbola también haciende. En particular, existe una aplicación uno a uno de la mitad superior ( $y > 0$ ) de la recta sobre la mitad superior ( $v > 0$ ) de la rama de hipérbola, por tanto podemos concluir que la mitad derecha de la franja se aplica sobre el primer cuadrante del plano  $w$ .

Por otra parte si tomamos la recta  $x = c_1$  donde  $-\frac{\pi}{2} < c_1 < 0$ ,  $-\infty < y < \infty$



su imagen es la rama izquierda de la hipérbola (2.45) y de igual forma que en el caso anterior existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de la mitad superior de la recta y la mitad superior de la rama de la hipérbola, por tanto la mitad izquierda de la franja se aplica sobre el segundo cuadrante del plano  $w$ .

Por ultimo estudiemos la recta  $x = 0$ , es decir el eje  $y$ . Según la ecuación (2.43) la imagen de cada punto  $(0, y)$  es  $(0, \sinh(y))$ . Por tanto el eje  $y$  se aplica uno a uno sobre el eje  $v$ , correspondiendo el eje  $y$  positivo al eje  $v$  positivo.

Ahora bien, cada punto en el interior  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0$  de la franja semiinfinita esta en una de las semirrectas antes dichas, y por ser la transformación uno a uno podemos concluir que las imágenes de esas semirrectas son distintas y llenan el semiplano  $v > 0$ . Más específicamente, si la mitad superior  $L$  de una recta  $x = c_1$  ( $0 < c_1 < \frac{\pi}{2}$ ) se desplaza hacia la izquierda acercándose al eje  $y$  positivo, la rama derecha de la hipérbola que contiene a  $L'$  se va haciendo mas amplia y su vértice  $(\sinh(c_1), 0)$  tiende hacia el origen  $w = 0$ . Luego  $L'$  tiende a convertirse en el eje  $v$  positivo, que como vimos anteriormente es la imagen del eje  $y$  positivo. Además al tender  $L$  al segmento  $BA$  de la frontera de la banda, la rama de la hipérbola tiende a convertirse en el segmento  $B'A'$  del eje  $u$  y su vértice  $(\sinh c_1, 0)$  tiende al punto  $w = 1$ . Conclusiones similares se hacen respecto a la semirrecta  $M$  y su imagen  $M'$  en la figura 2.26.

Concluimos que la imagen de todo punto en el interior de la banda esta en el semiplano superior  $v > 0$  y que ademas, todo punto del semiplano es imagen de exactamente un punto del interior de la banda.

Esto completa la demostración de que la transformación  $w = \text{sen}(z)$  es una aplicación uno a uno de la franja  $-\pi \leq x \leq \pi, y > 0$  sobre el semiplano  $v \geq 0$ .

Otra forma de encontrar las imágenes de ciertas regiones bajo  $w = \text{sen } z$  consiste en considerar las imágenes de segmentos de rectas *horizontales*  $-\pi \leq x \leq \pi, y = c_2$ , donde  $c_2 > 0$ . Según la ecuación (2.43), la imagen de estos segmentos es la curva con representación paramétrica

$$u = \text{sen}(x) \cosh(c_2), \quad v = \cos(x) \sinh(c_2) \quad (-\pi \leq x \leq \pi) \quad (2.46)$$

las cuales podemos reescribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u = \text{sen}(x) \cosh(c_2) &\Rightarrow \frac{u}{\cosh(c_2)} = \text{sen}(x) \\ &\Rightarrow \frac{u^2}{\cosh^2(c_2)} = \text{sen}^2(x) \\ v = \cos x \sinh c_2 &\Rightarrow \frac{v}{\sinh(c_2)} = \cos(x) \\ &\Rightarrow \frac{v^2}{\sinh^2(c_2)} = \cos^2(x) \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo en la identidad  $\operatorname{sen}^2(z) + \operatorname{cos}^2(z) = 1$  obtenemos

$$\frac{u^2}{\operatorname{cosh}^2(c_2)} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2(c_2)} = 1 \quad (2.47)$$

la cual es una elipse con focos en los puntos

$$\begin{aligned} w^2 &= \operatorname{cosh}^2(c_2) - \operatorname{senh}^2(c_2) \\ w &= \pm \sqrt{\operatorname{cosh}^2(c_2) - \operatorname{senh}^2(c_2)} \\ w &= \pm 1 \end{aligned}$$

La imagen de un punto  $(x, c_2)$  que se desplaza hacia la derecha desde  $A$  hasta  $E$  en la figura 2.27 describe un recorrido alrededor de la elipse en sentido horario. Notemos también que si se toman valores mas pequeños para  $c_2$ , la elipse se hace mas pequeña pero conserva los mismos focos  $(\pm 1, 0)$ . La elipse, en efecto, tiende hacia el intervalo  $-1 \leq u \leq 1$  del eje  $u$ , imagen del intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$  del eje  $x$ .

En este caso ( $c_2 > 0$ ) la aplicación no es uno a uno, puesto que según la ecuación (2.46) tenemos

$$x = \pm\pi \Rightarrow u = 0 \quad y \quad v = -\operatorname{senh}(c_2)$$

así, la imagen  $(0, \operatorname{senh}(c_2))$  tiene dos preimágenes. En el caso límite  $c_2 = 0$ , la ecuación (2.46) se convierte en

$$u = \text{sen}(x), \quad v = 0 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

por lo que podemos concluir que la aplicación en este caso tampoco es uno a uno puesto que  $\text{sen}(\pm\pi) = \text{sen}(0)$ , por lo tanto la imagen  $(0,0)$  tiene tres preimágenes.

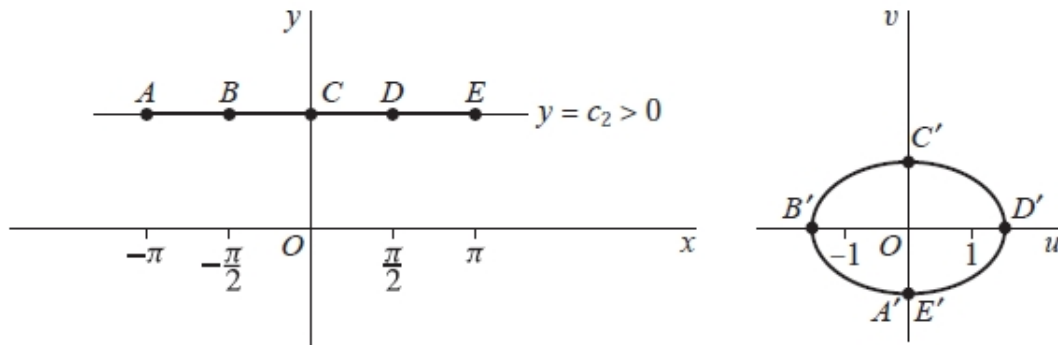


Figura 2.27:  $w = \text{sen } z$ .

**Ejemplo 2.22.** *Demostrar que transformación  $w = \text{sen}(z)$  aplica de manera uno a uno la región rectangular  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  en la región semielíptica que se muestra en la figura 2.28 .*

*Solución.* Denotemos por  $L$  es segmento de recta  $y = c_2 \quad (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$  donde  $0 \leq c_2 \leq b$ , entonces su imagen  $L'$  es la mitad superior de la elipse (2.47). Podemos observar que a medida  $c_2$  disminuye,  $L$  tiende a convertirse en un segmento del eje real y la semielipse  $L'$  tiende a convertirse en el segmento de recta  $E'F'A' \quad (-1 \leq w \leq 1)$ .

En el caso  $(c_2 = 0, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$  la ecuación (2.46) se convierte en  $u = \text{sen } x \quad v = 0 \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

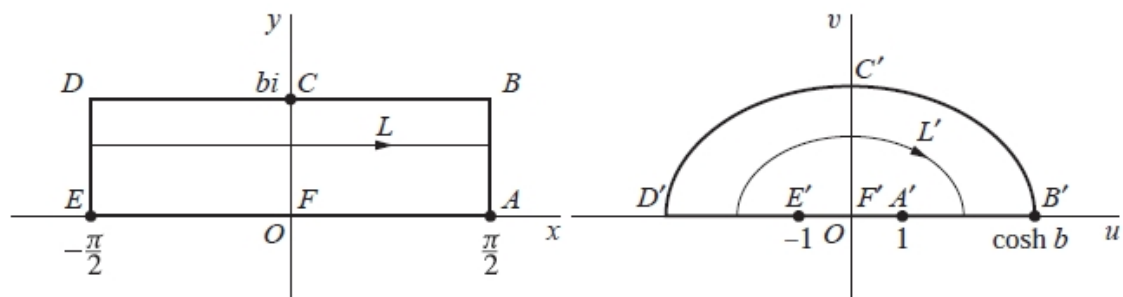


Figura 2.28:  $w = \text{sen } z$ .

y esto es una asignación de los segmentos  $EFA$  sobre  $E'F'A'$ .

Finalmente por el teorema 2.17 tenemos que la región rectangular  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  se aplica de manera uno a uno sobre la región semielíptica.

La aplicación coseno se obtiene fácilmente una vez conociendo la aplicación seno debido a que estas aplicaciones están estrechamente relacionadas. Retomando la identidad  $\cos z = \text{sen}(z + \frac{\pi}{2})$  podemos definir la transformación

$$w = \cos z$$

haciendo  $Z = z + \frac{\pi}{2}$ , obtenemos

$$w = \cos z = \text{sen } Z$$

Por tanto, la transformación coseno es la misma que la transformación seno prece-

dida por una traslación de  $\frac{\pi}{2}$  unidades a la derecha.

## 2.8. La Transformación $w = z^2$

La transformación

$$w = z^2 \tag{2.48}$$

se describe más fácilmente en términos de coordenadas polares. Si  $z = re^{i\theta}$  y  $w = \rho e^{i\phi}$ , donde  $\theta = \arg(z)$  y  $\phi = \arg(w)$ .

$$\begin{aligned} w = z^2 &\implies \rho e^{i\phi} = (re^{i\theta})^2 \\ &\implies \rho e^{i\phi} = r^2 e^{i2\theta} \end{aligned}$$

Por tanto, la imagen de cualquier punto  $z$  no nulo se encuentra elevando al cuadrado el módulo de  $z$  y multiplicando por dos un valor de  $\arg z$ ; es decir,  $|w| = |z|^2$  y  $\arg(w) = 2 \arg(z)$  lo que significa que,

$$\rho = r^2, \quad \phi = 2\theta \tag{2.49}$$

**Ejemplo 2.23.** *Encontrar el transformado del primer cuadrante del plano  $z$  sobre el plano  $w$  mediante la transformación  $w = z^2$ .*

*Solución.* Sea  $z$  un punto que pertenece al primer cuadrante  $\{z = x + iy : x \geq 0, y \geq 0\}$

del plano  $z$ . Escribimos  $z$  en coordenadas polares

$$z = r_0 e^{i\theta}, \text{ donde } r_0 > 0 \text{ y } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Los puntos  $z = r_0 e^{i\theta}$  de la circunferencia  $r = r_0$  se transforman en puntos  $w = r_0^2 e^{i2\theta}$  de la circunferencia  $\rho = r_0^2$ . Luego tenemos que,

$$\begin{aligned} r_0 > 0 &\implies r_0^2 > 0 \\ &\implies \rho = r_0^2 > 0 \\ &\implies \rho > 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} &\implies (2)0 \leq 2\theta \leq (2)\frac{\pi}{2} \\ &\implies 0 \leq \phi \leq \pi \end{aligned}$$

Así,  $\{\rho > 0, 0 \leq \phi \leq \pi\}$  representa a el semiplano superior en el plano  $w$ . Si un punto de la primer circunferencia se mueve en sentido positivo desde el eje real positivo hasta el eje imaginario positivo, su imagen sobre la segunda circunferencia, se mueve en sentido positivo desde el eje real positivo hasta el eje negativo Figura(2.29). Así que si se toman todos los valores positivos para  $r_0$  los correspondientes arcos en los planos  $z$  y  $w$  llenan el primer cuadrante y el semi-

plano superior, respectivamente. El punto  $z = 0$  es aplicado claramente sobre el punto  $w = 0$ . La transformación (2.48) es una aplicación uno a uno del primer cuadrante  $\{r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$  del plano  $z$  sobre la mitad superior  $\{\rho \geq 0, 0 \leq \phi \leq \pi\}$  del plano  $w$ , como indica la figura (2.29).

Ahora tomando el semiplano superior  $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi$  del plano  $z$  obtenemos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} r > 0 &\implies r^2 > 0 \\ &\implies \rho = r^2; \quad \text{por ecuación 2.49} \\ &\implies \rho > 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 0 \leq \theta \leq \pi &\implies (2)0 \leq 2\theta \leq (2)\pi \\ &\implies 0 \leq \phi \leq 2\pi; \quad \text{por ecuación 2.49} \end{aligned}$$

así, el semiplano superior se aplica sobre el plano  $w$ , representado en coordenadas polares  $(\rho, \phi)$ , donde  $\rho \geq 0$  y  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Sin embargo, en este caso la transformación no es uno a uno, ya que tanto el eje real positivo como el eje real negativo del plano  $z$  se aplican sobre el eje real positivo del plano  $w$ .



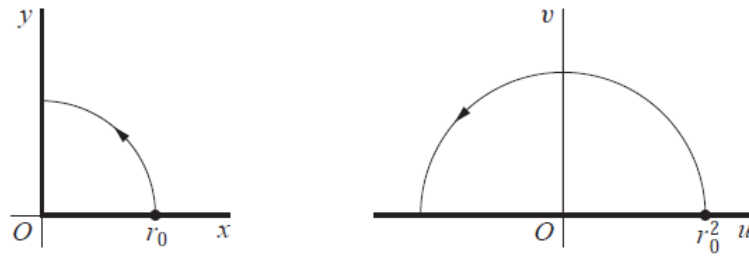


Figura 2.29:  $w = z^2$

En cuanto a las curvas en el plano, es preferible trabajar con coordenadas cartesianas.

Cuando  $z = x + iy$  y  $w = u + iv$ , la transformación (2.48) se convierte en

$$u + iv = x^2 - y^2 + 2xyi$$

o sea,

$$u = x^2 - y^2, v = 2xy \quad (2.50)$$

donde  $w$  transforma hipérbolas del plano  $z$  a rectas en el plano  $w$ .

**Ejemplo 2.24.** *Demostrar que cada rama de la hipérbola  $x^2 - y^2 = c_1$  ( $c_1 > 0$ ) se aplica de manera uno a uno sobre la recta vertical  $u = c_1$  mediante la transformación  $w = z^2$ .*

*Solución.* Sea  $z = x + iy$ , por hipótesis  $x^2 - y^2 = c_1$  ( $c_1 > 0$ ), por (2.50) se tiene que,  $u = x^2 - y^2$  y  $v = 2xy$  así que,

$$x^2 - y^2 = c_1 \implies u = x^2 - y^2 = c_1$$

$$\implies u = c_1$$

Cuando  $(x, y)$  es un punto de algunas de las ramas,  $x$  es de la forma

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 = c_1 &\implies x^2 = y^2 + c_1 \\ &\implies x = \pm\sqrt{y^2 + c_1}\end{aligned}$$

Cuando en particular  $(x, y)$  está en la rama derecha  $x = \sqrt{y^2 + c_1}$ , podemos expresar a  $u$  y  $v$  de la siguiente manera

$$u = c_1 \quad y \quad v = 2y\sqrt{y^2 + c_1} \quad (-\infty < y < \infty)$$

Si  $(x, y)$  se mueve a lo largo de la rama derecha de la hipérbola con  $-\infty < y < \infty$ ,  $(u, v)$  se mueve a lo largo de la recta vertical  $u = c_1$ .

Cuando  $(x, y)$  está en la rama izquierda  $x = -\sqrt{y^2 + c_1}$ , podemos expresar a  $u$  y  $v$  de la siguiente manera

$$u = c_1 \quad y \quad v = -2y\sqrt{y^2 + c_1} \quad (-\infty < y < \infty)$$

Si  $(x, y)$  se mueve a lo largo de la rama izquierda de la parábola con  $y$  de  $-\infty$  a  $\infty$ ,  $(u, v)$  se mueve hacia arriba a lo largo de la recta vertical  $u = c_1$ .

Así cada rama de la hipérbola  $x^2 - y^2 = c_1$  ( $c_1 > 0$ ) se aplica de manera uno a uno sobre la recta  $u = c_1$  como muestra la figura (2.30).

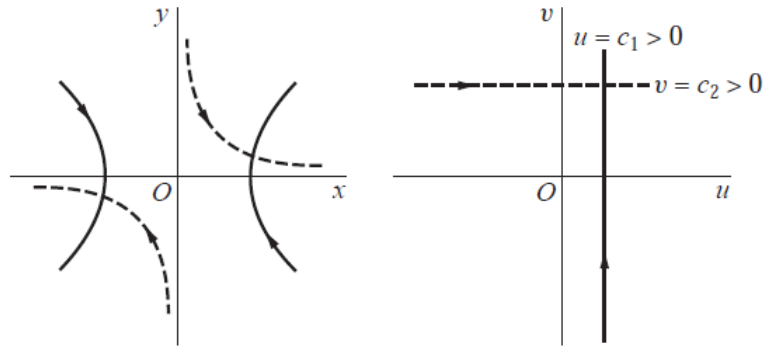


Figura 2.30:  $w = z^2$

**Ejemplo 2.25.** Encontrar el transformado de cada rama de la hipérbola  $2xy = c_2 (c_2 > 0)$  mediante la transformación  $w = z^2$ .

*Solución.* Sea  $z = x + iy$ , supongamos que  $(x, y)$  está en la rama que se encuentra en el primer cuadrante, donde  $0 < x < \infty$ . Despejando  $y$  tenemos que

$$2xy = c_2 \implies y = \frac{c_2}{2x}$$

Por (2.50) se tiene que

$$\begin{aligned} u = x^2 - y^2 &\implies u = x^2 - \left(\frac{c_2}{2x}\right)^2 \\ &\implies u = x^2 - \frac{c_2^2}{4x^2} \end{aligned}$$

Además, como  $v = 2xy$ , se obtiene

$$\begin{aligned} 2xy = c_2 &\implies v = 2xy = c_2 \\ &\implies v = c_2 \end{aligned}$$

Por lo que,

$$u = x^2 - \frac{c_2^2}{4x^2} \quad \text{y} \quad v = c_2 \quad (0 < x < \infty)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (u) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 - \frac{c_2^2}{4x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2) - \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{c_2^2}{4x^2} \right) \\ &= 0 - \infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (u) = -\infty$$

Además,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (u) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^2 - \frac{c_2^2}{4x^2} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (u) = \infty$$

Notemos que cuando  $x \rightarrow \infty$ , entonces  $u \rightarrow \infty$ , y si  $x \rightarrow 0$ , entonces  $u \rightarrow -\infty$ .

Cuando  $(x, y)$  se mueve a lo largo de la rama derecha de la hipérbola, con  $x$  de 0 a  $\infty$ ,  $(u, v)$  se mueve a la derecha a lo largo de la recta horizontal  $v = c$ .

Cuando  $(x, y)$  está en la rama inferior se tiene que

$$2xy = c_2 \implies x = \frac{c_2}{2y}$$

luego

$$u = x^2 - y^2 \implies u = \frac{c_2^2}{4y^2} - y^2$$

Así,

$$u = x^2 - y^2 \implies u = \frac{c_2^2}{4y^2} - y^2 \quad y \quad v = c_2 \quad (-\infty < y < 0)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -\infty} (u) &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \left( \frac{c_2^2}{4y^2} - y^2 \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \left( \frac{c_2^2}{4y^2} \right) - \lim_{y \rightarrow -\infty} (y^2) \\ &= 0 - \infty \end{aligned}$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} (u) = -\infty$$

Además,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} (u) &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \left( \frac{c_2^2}{4y^2} - y^2 \right) \\ &= \infty - 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} (u) = \infty$$

Así, cuando  $y \rightarrow -\infty$ , entonces  $u \rightarrow -\infty$ , si  $y \rightarrow 0$ , entonces  $u \rightarrow \infty$ . Cuando  $(x, y)$  es un punto que se mueve hacia arriba de la rama inferior, su imagen  $(u, v)$  se mueve a la derecha de la recta  $v = c_2$ . Figura(2.30).

Por lo tanto, el transformado de cada rama de la hipérbola  $2xy = c_2 (c_2 > 0)$  mediante la aplicación  $w = z^2$  es la recta  $v = c_2$  del plano  $w$ .

**Ejemplo 2.26.** La región  $\{z = x + iy : x > 0, y < 0, xy < 1\}$  consta de todos los puntos de las ramas superiores de las hipérbolas  $xy = c$ , con  $0 < c < 1$ . Encontrar el transformado de esta región en el plano  $w$  mediante la transformación  $w = z^2$ .

*Solución.* Sea  $R = \{z = x + iy : x > 0, y < 0, xy < 1\}$  la región que consta de todos los puntos de las ramas superiores de la familia de hipérbolas  $xy = c$ , con  $0 < c < 1$ . De la ecuación 2.50, sabemos que los valores de  $u$  y  $v$  son

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad v = 2xy$$

Como  $xy = c$ , tenemos que,

$$\begin{aligned} xy = c &\implies v = 2xy = 2c \\ &\implies v = 2c \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} 0 < c < 1 &\implies 2(0) < 2c < 2(1) \\ &\implies 0 < 2c < 2 \\ &\implies 0 < v < 2 \end{aligned}$$

Así, el transformado de la región  $R$ , en el plano  $w$  es la región  $\{w = u + iv : 0 < v < 2\}$ .

$0 < v < 2$ }. Por la ecuación (2.50), la imagen de un punto  $(0, y)$  en el plano  $z$  es  $(-y^2, 0)$ . Por tanto, cuando  $(0, y)$  se desplaza hacia abajo hasta el origen a lo largo del eje  $y$ , su imagen se desplaza hacia la derecha a lo largo del eje  $u$  negativo y alcanza el origen en el plano  $w$ . La imagen de un punto  $(x, 0)$  es  $(x^2, 0)$ , esa imagen se desplaza hacia la derecha desde el origen a lo largo del eje  $u$  como  $(x, 0)$  se desplaza hacia la derecha desde el origen a lo largo del eje  $x$ .

La imagen de la rama superior de la hipérbola  $xy = 1$  es la recta horizontal  $v = 2$  ya que,

$$\begin{aligned} xy = 1 &\implies v = 2xy = 2(1) \\ &\implies v = 2 \end{aligned}$$

Por lo que, el transformado de la región  $\{z = x + iy : x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1\}$  mediante la transformación 2.48 en el plano  $z$ , es la región  $\{w = u + iv : 0 \leq v \leq 2\}$  en el plano  $w$ , como se indica en la figura 2.31.

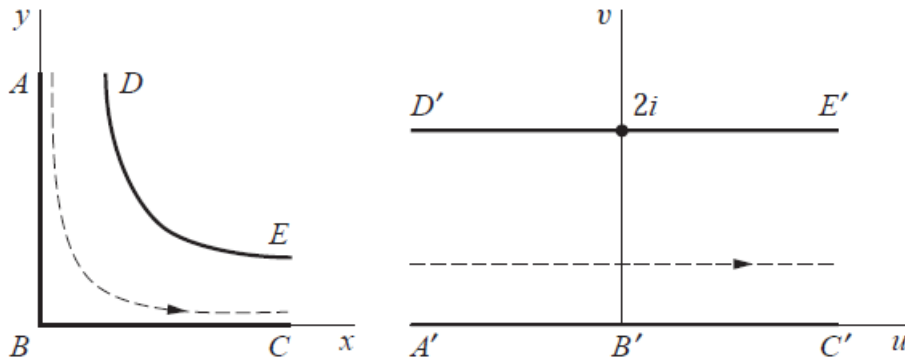


Figura 2.31:  $w = z^2$

---

## Capítulo 3

---

# Transformaciones Conformes y

# Algunas de sus Aplicaciones

## 3.1. Transformaciones Conformes

En la sección 2.1 vimos que una transformación afín no constante actúa rotando, ampliando y trasladando puntos en el plano complejo. Como resultado, el ángulo entre cualesquiera dos arcos que se intersectan en el plano  $z$  es igual al ángulo entre las imágenes de los arcos en el plano  $w$  bajo una transformación afín. Los mapeos complejos que tienen la propiedad de preservar el ángulo se llaman **transformaciones conformes**. En esta sección definiremos y discutiremos formalmente las transformaciones conformes. Demostraremos que cualquier función compleja analítica es conforme donde la derivada no es cero. Consecuentemente, todas las funciones elementales estudiadas en el capítulo 2 son conformes en algún dominio  $D$ . Posteriormente en este capítulo, veremos que las transformaciones conformes tienen importantes aplicaciones a problemas con valores en la frontera que involucran a la ecuación de Laplace.



### 3.1.1. Transformaciones Conformes

Suponga que  $w = f(z)$  es una transformación compleja definida en un dominio  $D$ . Se dice que la transformación es conforme en un punto  $z_0$  en  $D$  si se **conserva el ángulo** entre dos curvas cualesquiera que se intersectan en  $z_0$ . Para hacer preciso este concepto, suponga que  $C_1$  y  $C_2$  son suaves en  $D$  que se intersectan en  $z_0$  y tiene una orientación fija. Sean  $z_1(t)$  y  $z_2(t)$  parametrizaciones de  $C_1$  y  $C_2$  tal que  $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$ , donde las orientaciones en  $C_1$  y  $C_2$  corresponde a valores crecientes del parámetro  $t$ .

Dado que  $C_1$  y  $C_2$  son suaves, los vectores tangentes  $z'_1 = z'_1(t_0)$  y  $z'_2 = z'_2(t_0)$  son distintos de cero. Se define el **ángulo** entre  $C_1$  y  $C_2$  como el ángulo  $\theta$  en el intervalo  $[0, \pi]$  entre los vectores tangentes  $z'_1$  y  $z'_2$ . Vea la figura 3.1

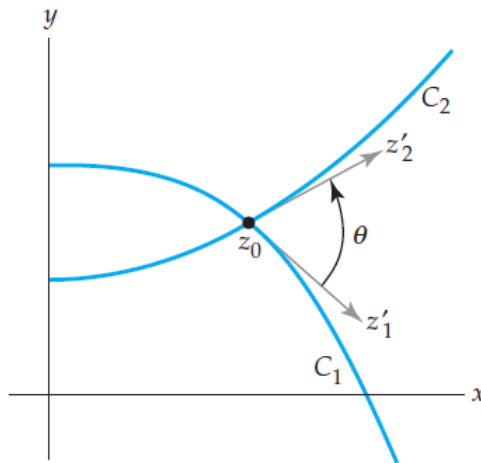


Figura 3.1: El ángulo  $\theta$  entre  $C_1$  y  $C_2$

Ahora suponga que bajo la transformación compleja  $w = f(z)$  las curvas  $C_1$

y  $C_2$  en el plano  $z$  se mapean sobre las curvas  $C'_1$  y  $C'_2$  respectivamente, sobre el plano  $w$ . Dado que  $C_1$  y  $C_2$  se intersectan en  $z_0$ , debemos tener que  $C'_1$  y  $C'_2$  se intersectan en  $f(z_0)$ . Si  $C'_1$  y  $C'_2$  son suaves, entonces el ángulo entre  $C'_1$  y  $C'_2$  en  $f(z_0)$  se define de forma similar como el ángulo  $\phi$  en el intervalo  $[0, \pi]$  entre los vectores tangentes definidos de forma similar  $w'_1$  y  $w'_2$ . Decimos que los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  son **iguales en magnitud** si  $\theta = \phi$ .

En el plano  $z$ , el vector  $z'_1$  cuyo punto inicial es  $z_0$ , puede rotarse a través del ángulo  $\theta$  sobre el vector  $z'_2$ . Esta rotación es contra las manecillas del reloj o en la dirección de éstas. Del mismo modo, en el plano  $w$ , el vector  $w'_1$  cuyo punto inicial es  $f(z_0)$  se puede rotar en cualquier sentido, ya sea en contra de las manecillas del reloj o en la dirección de éstas, un ángulo de  $\phi$  sobre el vector  $w'_2$ . Si la rotación en el plano  $z$  se encuentra en la misma dirección que la rotación en el plano  $w$ , se dice que los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  tienen **el mismo sentido**. El siguiente ejemplo ilustra estos conceptos.

**Ejemplo 3.1 (Magnitud y sentido de los ángulos).** Sean  $z_1(t) = t + (2t - t^2)i$  y  $z_2(t) = t + \frac{1}{2}(t^2 + 1)i$ ;  $0 \leq t \leq 2$  las parametrizaciones de las curvas  $C_1$  y  $C_2$ . Estudiar la magnitud y sentido de los ángulos entre las curvas  $C_1$  y  $C_2$  y sus imágenes correspondientes bajo la aplicación  $w = \bar{z}$ .

*Solución.* Las curvas suaves  $C_1$  y  $C_2$  que se muestran en la figura 3.2(a) están dadas por  $z_1(t) = t + (2t - t^2)i$  y  $z_2(t) = t + \frac{1}{2}(t^2 + 1)i$ ,  $0 \leq t \leq 2$ , respectivamente.

Estas curvas se intersectan en el punto  $z_0 = z_1(1) = z_2(1) = 1 + i$ . Los vectores tangentes en  $z_0$  son  $z'_1 = z'_1(1) = 1$  y  $z'_2 = z'_2(1) = 1 + i$ . Además, en la figura 3.2(a) vemos que el ángulo entre  $C_1$  y  $C_2$  en  $z_0$  es  $\theta = \pi/4$ . Bajo la aplicación  $w = \bar{z}$ , las imágenes de  $C_1$  y  $C_2$  son las curvas  $C'_1$  y  $C'_2$ , respectivamente, que se muestran en la figura 3.2(b). La imagen de estas curvas están parametrizadas por  $w_1 = t - (2t - t^2)i$  y  $w_2(t) = t - \frac{1}{2}(t^2 + 1)i$ ,  $0 \leq t \leq 2$ , y se intersectan en el punto  $w_0 = f(z_0) = 1 - i$ . Además, en  $w_0$  tenemos los vectores tangentes  $w'_1 = w'_1(1) = 1$  y  $w'_2 = w'_2(1) = 1 - i$  a  $C'_1$  y  $C'_2$ , respectivamente. Revisando la figura 3.2(b) indica que el ángulo entre  $C'_1$  y  $C'_2$  en  $w_0$  es  $\theta = \pi/4$ . Por tanto, los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  son iguales en magnitud. Sin embargo, debido a que la rotación de  $\pi/4$  del vector  $z'_1$  sobre  $z'_2$  debe ser en *contra de las manecillas del reloj*, mientras que la rotación de  $\pi/4$  de  $w'_1$  sobre  $w'_2$  debe ser en el *de las manecillas del reloj*, llegamos a la conclusión de que  $\theta$  y  $\phi$  no tienen el mismo sentido.

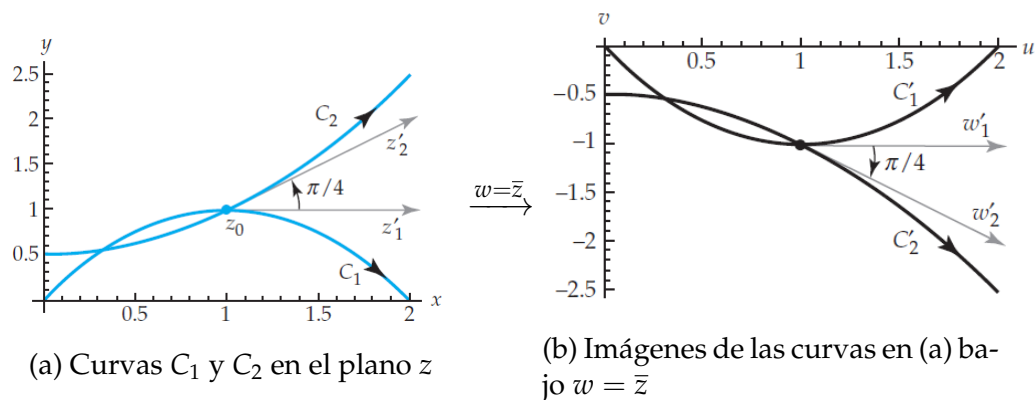


Figura 3.2: Figura para el ejemplo 3.1

Con la terminología referente a la magnitud y al sentido de un ángulo estable-

cido, ahora estamos en condiciones de dar la siguiente definición precisa de una transformación conforme.

**Definición 3.1 (Transformación conforme).** *Sea  $w = f(z)$  una transformación compleja definida en un dominio  $D$  y sea  $z_0$  un punto en  $D$ . Entonces decimos que  $w = f(z)$  es **conforme** en  $z_0$  si para todo par de curvas suaves orientadas  $C_1$  y  $C_2$  en  $D$  que se intersectan en  $z_0$  el ángulo entre  $C_1$  y  $C_2$  en  $z_0$  es igual al ángulo entre las curvas imagen  $C'_1$  y  $C'_2$  en  $f(z_0)$  en magnitud y sentido.*

También vamos a utilizar el término **transformación conforme** para referirnos a un mapeo complejo  $w = f(z)$  que es conforme en  $z_0$ . Además, si  $w = f(z)$  mapea un dominio  $D$  sobre  $D'$  y si  $w = f(z)$  es conforme en todos los puntos en  $D$ , entonces se llama a  $w = f(z)$  un mapeo conforme de  $D$  sobre  $D'$ . De la sección 2.1 debería ser claro que si  $f(z) = az + b$  es una transformación afín con  $a \neq 0$ , entonces  $w = f(z)$  es conforme en todos los puntos en el plano complejo. En el ejemplo 3.1 hemos demostrado que  $w = \bar{z}$  no es una transformación conforme en el punto  $z_0 = 1 + i$ , porque los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  son iguales en magnitud pero no en sentido.

### 3.1.2. Ángulos entre Curvas

La definición 3.1 rara vez se utiliza directamente para demostrar que un mapeo complejo es conforme. Más bien, vamos a demostrar en el teorema 3.1 que una función analítica  $f$  es un mapeo conforme en  $z$  siempre que  $f'(z) \neq 0$ . Para probar

este resultado es necesario un procedimiento para determinar el ángulo (en magnitud y sentido) entre dos curvas suaves en el plano complejo. Para este propósito, la forma más eficaz de hacerlo es utilizar el argumento de un número complejo.

Vamos a adoptar de nuevo la notación de la figura 3.1, donde  $C_1$  y  $C_2$  son curvas suaves parametrizadas por  $z_1(t)$  y  $z_2(t)$ , respectivamente, que se intersectan en  $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$ . El requisito de que  $C_1$  sea suave asegura que el vector tangente a  $C_1$  en  $z_0$ , dado por  $z'_1 = z'_1(t_0)$ , es distinto de cero, por lo que  $\arg(z'_1)$  se define y representa un ángulo entre el vector posición  $z'_1$  y el eje  $x$  positivo. Del mismo modo, el vector tangente a  $C_2$  en  $z_0$ , dado por  $z'_2 = z'_2(t_0)$  es distinto de cero y  $\arg(z'_2)$  representa un ángulo entre el vector de posición  $z'_2$  y el eje  $x$  positivo.

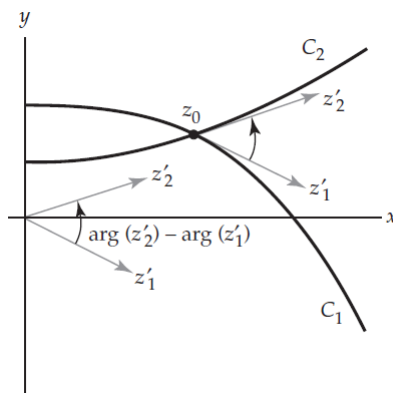


Figura 3.3: El ángulo entre  $C_1$  y  $C_2$

Se observa de la figura 3.3 que el ángulo  $\theta$  entre  $C_1$  y  $C_2$  en  $z_0$  es el valor de

$$\arg(z'_2) - \arg(z'_1) \tag{3.1}$$

en el intervalo  $[0, \pi]$ , siempre que podamos rotar  $z'_1$  en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de 0 a través del ángulo  $\theta$  sobre  $z'_2$ . En el caso de que se necesite una rotación en el sentido de las manecillas del reloj, entonces  $-\theta$  es el valor de (3.1) en el intervalo  $(-\pi, 0)$ . En cualquier caso, observamos que (3.1) da tanto la magnitud como el sentido del ángulo entre  $C_1$  y  $C_2$  en  $z_0$ . Como ejemplo, consideremos las curvas  $C_1, C_2$  y sus imágenes bajo el mapeo complejo  $w = \bar{z}$  en el ejemplo 3.1. Tengamos en cuenta que el único valor de

$$\arg(z'_2) - \arg(z'_1) = \arg(1 + i) - \arg(1) = \frac{\pi}{4} + 2n\pi,$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  que se encuentra en el intervalo  $[0, \pi]$  es  $\pi/4$ . Por tanto, el ángulo entre  $C_1$  y  $C_2$  es  $\theta = \pi/4$ , y la rotación de  $z'_1$  sobre  $z'_2$  es contra las manecillas del reloj. Por otra parte,

$$\arg(w'_2) - \arg(w'_1) = \arg(1 - i) - \arg(1) = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi,$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  no tiene valor en  $[0, \pi]$ , pero tiene el valor único  $-\pi/4$  en el intervalo  $(-\pi, 0)$ . Por tanto, el ángulo entre  $C'_1$  y  $C'_2$  es  $\theta = \pi/4$  y la rotación de  $w'_1$  sobre  $w'_2$  es en el sentido de las manecillas del reloj.

Existe un problema al momento de determinar el ángulo entre dos curvas  $C_1$  y  $C_2$  en un punto donde una (o ambas) curvas tienen un vector tangente cero.

Supongamos que  $C_1$  y  $C_2$  están parametrizadas con  $z_1(t)$  y  $z_2(t)$ , respectivamente, y que las curvas se intersectan en  $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$ . Supongamos también que tanto  $z_1$  y  $z_2$  son funciones derivables de  $t$ , y sea  $z'_1 = z'_1(t_0)$  y  $z'_2 = z'_2(t_0)$ . El problema es que la expresión  $[\arg(z'_2) - \arg(z'_1)]$  no representa el ángulo entre  $C_1$  y  $C_2$ , si ya sean  $z'_1$  o  $z'_2$  cero. La función  $\arg(z)$  no está definida en  $z = 0$ . Por tanto,  $[\arg(z'_2) - \arg(z'_1)]$  no representa el ángulo entre las dos curvas  $C'_1$  y  $C'_2$ , si cualesquiera  $z'_1$  o  $z'_2$  es cero. Consideremos el caso cuando ambos  $z'_1$  y  $z'_2$  son iguales a cero. En este caso, tanto  $\arg(z'_1)$  y  $\arg(z'_2)$  no están definidos. Por lo tanto, tampoco se define su diferencia.

La expresión

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\arg(z_2(t) - z_0)] - \lim_{t \rightarrow t_0} [\arg(z_1(t) - z_0)] \quad (3.2)$$

representa el ángulo entre  $C_1$  y  $C_2$ , independientemente si  $z'_1$  o  $z'_2$  es cero. La expresión  $\lim_{t \rightarrow t_0} [\arg(z_2(t) - z_0)]$  está bien definida. La variable  $t$  nunca se acerca plenamente a  $t_0$  y  $z \neq 0$  en la vecindad de  $t = t_0$ . Por tanto, la expresión  $\lim_{t \rightarrow t_0} [\arg(z_2(t) - z_0)]$  significa el argumento de una sección pequeña de  $C_2$ , en la vecindad de  $z_0$ . La expresión  $\lim_{t \rightarrow t_0} [\arg(z_1(t) - z_0)]$  se explica de una manera similar, para  $C_1$ . Por lo tanto, se concluye que las diferencias entre las dos expresiones anteriores representa el ángulo entre las dos curvas en  $z = z_0$ .

### 3.1.3. Funciones Analíticas

Ahora usamos (3.1) para demostrar el siguiente teorema.

**Teorema 3.1 ( Transformación conforme).** *Si  $f$  es una función analítica en un dominio  $D$  que contiene a  $z_0$ , y si  $f'(z_0) \neq 0$  entonces  $w = f(z)$  es una transformación conforme en  $z_0$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es analítica en un dominio  $D$  que contiene a  $z_0$ , y que  $f'(z_0) \neq 0$ . Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos curvas suaves en  $D$  parametrizadas por  $z_1(t)$  y  $z_2(t)$ , respectivamente, con  $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$ . Además, supongamos que  $w = f(z)$  aplica las curvas  $C_1$  y  $C_2$  sobre las curvas  $C'_1$  y  $C'_2$ . Queremos demostrar que el ángulo  $\theta$  entre  $C_1$  y  $C_2$  en  $z_0$  es igual al ángulo  $\phi$  entre  $C'_1$  y  $C'_2$  en  $f(z_0)$ , tanto en magnitud como en sentido. Podemos suponer, que  $z'_1 = z'_1(t_0)$  se puede rotar en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de 0 un ángulo  $\theta$  sobre  $z'_2 = z'_2(t_0)$ . Por tanto por (3.1), el ángulo  $\theta$  es el único valor de  $\arg(z'_2) - \arg(z'_1)$  en el intervalo  $[0, \pi]$ . De (1.22),  $C'_1$  y  $C'_2$  se parametrizan con  $w_1(t) = f(z_1(t))$  y  $w_2(t) = f(z_2(t))$ . Para calcular los vectores tangentes  $w'_1$  y  $w'_2$  para  $C'_1$  y  $C'_2$  en  $f(z_0) = f(z_1(t_0)) = f(z_2(t_0))$  se utiliza la regla de la cadena

$$w'_1 = w'_1(t_0) = f'(z_1(t_0)) \cdot z'_1(t_0) = f'(z_0) \cdot z'_1$$

y

$$w'_2 = w'_2(t_0) = f'(z_2(t_0)) \cdot z'_2(t_0) = f'(z_0) \cdot z'_2$$



Ya que  $C_1$  y  $C_2$  son suaves, tanto  $z'_1$  como  $z'_2$  son distintas de cero. Por otra parte, según nuestra hipótesis, tenemos  $f'(z_0) \neq 0$ . Por lo que, tanto  $w'_1$  como  $w'_2$  son distintos de cero, y el ángulo  $\phi$  entre  $C'_1$  y  $C'_2$  en  $f(z_0)$  es un valor de

$$\arg(w'_2) - \arg(w'_1) = \arg(f'(z_0) \cdot z'_2) - \arg(f'(z_0) \cdot z'_1)$$

Ahora aplicando la propiedad (1.2) tenemos

$$\begin{aligned} \arg(w'_2) - \arg(w'_1) &= [\arg(f'(z_0)) + \arg(z'_2)] - [\arg(f'(z_0)) + \arg(z'_1)] \\ &= \arg(z'_2) - \arg(z'_1) \end{aligned}$$

Esta expresión tiene un valor único en el intervalo  $[0, \pi]$ , a saber,  $\theta$ . Por tanto,  $\theta = \phi$ , tanto en magnitud como en sentido, así que  $w = f(z)$  es una transformación conforme en  $z_0$ . ◇

Usando el teorema 3.1 es relativamente fácil determinar donde una función analítica es una transformación conforme.

**Ejemplo 3.2 (Transformaciones Conformes).** *Comprobar donde son conformes las transformaciones  $f_1(z) = e^z$  y  $f_2(z) = z^2$ .*

*Solución.*

- a) Por el teorema 3.1 la función entera  $f_1(z) = e^z$  es conforme en todos los puntos del plano complejo ya que  $f'_1(z) = e^z \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

b) Por el teorema 3.1 la función entera  $f_2(z) = z^2$  es conforme si  $z \neq 0$  ya que  $f_2'(z) = 2z \neq 0$  cuando  $z \neq 0$ .

### 3.1.4. Puntos Críticos

En general, si una función compleja  $f$  es analítica en un punto  $z_0$  y si  $f'(z_0) = 0$ , entonces  $z_0$  es llamado **punto crítico** de  $f$ . Aunque esto no se deduce del teorema 3.1, es cierto que las funciones analíticas son no conformes en los puntos críticos. Más específicamente podemos demostrar que el aumento de los ángulos se produce en un punto crítico.

**Teorema 3.2 ( Aumento de ángulo en un punto crítico).** *Sea  $f$  analítica en el punto crítico  $z_0$ . Si  $k > 1$  es un entero tal que  $f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{k-1}(z_0) = 0$  y  $f^k(z_0) \neq 0$ , entonces el ángulo entre cualesquiera dos curvas suaves que se intersectan en  $z_0$  aumenta en un factor de  $k$  por el mapeo complejo  $w = f(z)$ . En particular,  $w = f(z)$  no es un mapeo conforme en  $z_0$*

*Demostración.* Dado que  $f$  es analítica en  $z_0$ , esta tiene una expansión en series de Taylor. Puesto que  $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = 0$ , para  $n = 1, 2, 3, \dots, k-1$ , la representación en series para  $f$  es

$$f(z) = f(z_0) + a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots \quad (3.3)$$

De la ecuación (3.3) concluimos que

$$\begin{aligned}
 f(z) - f(z_0) &= a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots \\
 &= (z - z_0)^k [a_k + a_{k+1}(z - z_0) + a_{k+2}(z - z_0)^2 + \dots]
 \end{aligned}$$

Es decir,

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^k g(z) \quad (3.4)$$

donde

$$g(z) = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + a_{k+2}(z - z_0)^2 + \dots$$

que es analítica en  $z_0$  y

$$g(z_0) = a_k \neq 0 \quad (3.5)$$

Si  $w_0 = f(z_0)$ , entonces de la ecuación (3.4), se deduce que

$$\begin{aligned}
 \arg(f(z) - w_0) &= \arg[f(z) - f(z_0)] \\
 &= k \arg(z - z_0) + \arg(g(z))
 \end{aligned}$$

Así,

$$\arg(f(z) - w_0) = k \arg(z - z_0) + \arg(g(z)) \quad (3.6)$$

donde se ha utilizado la identidad (1.2).

Si  $C$  es una curva que pasa por  $z_0$  y  $z \rightarrow z_0$  a lo largo de  $C$ , entonces por (3.3) el ángulo de inclinación del vector tangente  $T$  a  $C$  está dado por

$$\theta = \lim_{z \rightarrow z_0} \arg(z - z_0) \quad (3.7)$$

Similarmente, el ángulo de inclinación del vector tangente  $T'$  a la curva imagen  $C'$  de  $C$  bajo  $w = f(z)$  está dado por

$$\phi = \lim_{z \rightarrow z_0} \arg(f(z) - w_0) \quad (3.8)$$

Tomando límite cuando  $z$  tiende a  $z_0$  en (3.6) y utilizando (3.5), (3.7), (3.8) se tiene

$$\begin{aligned} \phi &= k\theta + \arg(g(z_0)) \\ &= k\theta + \arg(a_k) \end{aligned}$$

Así,

$$\phi = k\theta + \arg(a_k) \quad (3.9)$$

Sean  $C_1$  y  $C_2$  dos curvas que pasan por  $z_0$  y sean  $\theta_1$  y  $\theta_2$  los ángulos de inclinación de los vectores tangentes a  $C_1$  y  $C_2$ , respectivamente, en  $z_0$  y sean  $\phi_1$  y  $\phi_2$  los ángulos de inclinación de los vectores tangentes de las curvas imagen  $C'_1$  y  $C'_2$  respectivamente en el punto  $w_0 = f(z_0)$ . Entonces por (3.9) tenemos

$$\phi_1 = k\theta_1 + \arg(a_k) \quad \text{y} \quad \phi_2 = k\theta_2 + \arg(a_k)$$

Por lo tanto,

$$\phi_1 - k\theta_1 = \arg(a_k) \quad \text{y} \quad \phi_2 - k\theta_2 = \arg(a_k)$$

Es decir,

$$\phi_1 - k\theta_1 = \phi_2 - k\theta_2$$

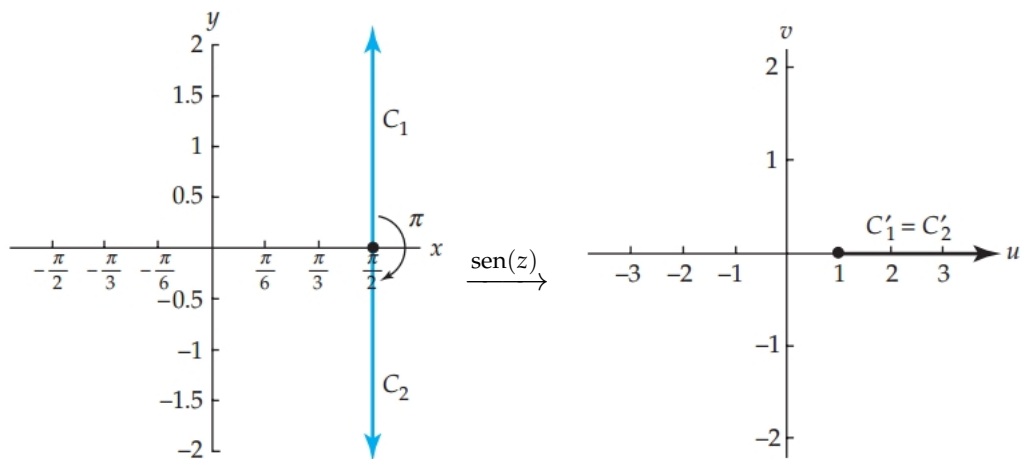
$$\phi_2 - \phi_1 = k(\theta_2 - \theta_1)$$

lo que implica que el ángulo entre  $C'_1$  y  $C'_2$  es  $k$  veces más grande que el ángulo entre  $C_1$  y  $C_2$ . ◇

**Ejemplo 3.3 ( Mapeos conformes).** *Determinar todos los puntos en los que el mapeo  $f(z) = \text{sen}(z)$  es conforme.*

*Solución.* Por el teorema 1.19 la función  $f(z) = \text{sen}(z)$  es entera y  $f'(z) = \text{cos}(z)$ . Además de (1.85) se tiene que  $\text{cos}(z) = 0$  si y sólo si  $z = (2n + 1)\pi/2$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , y así cada uno de estos puntos es un punto crítico. Por el teorema 3.1,  $w = \text{sen}(z)$  es un mapeo conforme para todo  $z \neq (2n + 1)\pi/2$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Por otra parte,  $w = \text{sen}(z)$  no es un mapeo conforme en  $z = (2n + 1)\pi/2$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Debido a que  $f''(z) = -\text{sen}(z) = \pm 1$  en los puntos críticos de  $f$ , el teorema 3.2 indica que los ángulos en estos puntos aumentan por un factor de 2.

El aumento del ángulo en un punto crítico del mapeo complejo  $w = \text{sen}(z)$  en el ejemplo 3.3 se puede ver directamente. Por ejemplo, consideremos el punto crítico  $z = \pi/2$ . Bajo  $w = \text{sen}(z)$ , el rayo vertical  $C_1$  en el plano  $z$  que sale de  $z = \pi/2$  y dado por  $z = \pi/2 + iy, y \geq 0$ , se mapea sobre el conjunto en el plano  $w$  dado por  $w = \text{sen}(\pi/2) \cosh(y) + i \cos(\pi/2) \sinh(y), y \geq 0$ . Ya que  $\text{sen}(\pi/2) = 1$  y  $\cos(\pi/2) = 0$ , la imagen se puede escribir como  $w = \cosh(y), y \geq 0$ . Es decir, la imagen  $C'_1$  es un rayo en el plano  $w$  que sale de  $w = 1$  y que contiene al punto  $w = 2$ . Un análisis similar muestra que la imagen  $C'_2$  del rayo vertical  $C_2$  dado por  $z = \pi/2 + iy, y \leq 0$ , es también un rayo que sale de  $w = 1$  y que contiene al punto  $w = 2$ . Es decir,  $C'_1 = C'_2$ . El ángulo entre los rayos  $C_1$  y  $C_2$  en el plano  $z$  es  $\pi$ , por lo que el teorema 3.2 implica que el ángulo entre sus imágenes en el plano  $w$  se incrementa a  $2\pi$ , o, equivalentemente, 0. Esto concuerda con la observación de que  $C'_1 = C'_2$ . Ver figura 3.4.



(a) El ángulo entre los rayos verticales en el plano  $z$  es  $\pi$

(b) El ángulo entre las imágenes de los rayos en (a) es  $2\pi$  o 0

Figura 3.4: La transformación  $w = \text{sen}(z)$

### 3.1.5. Transformaciones Conformes Usando Tablas

En la siguiente sección se introducirá un método para resolver un determinado problema con valores en la frontera usando mapeos complejos. En concreto, veremos que un problema de Dirichlet en un dominio  $D$  complicado se puede resolver encontrando un mapeo **analítico** de  $D$  sobre un dominio  $D'$  más sencillo en el que el problema de Dirichlet ya ha sido resuelto. Al final de este capítulo veremos una aplicación similar de los mapeos **conformes** a un tipo generalizado de problema de Dirichlet. En estas aplicaciones, nuestro método para producir una solución en un dominio  $D$  primero necesitará que encontremos un mapeo **conforme** de  $D$  sobre un dominio simple  $D'$  en el que el problema asociado con valores en la frontera tenga una solución. Una ayuda importante en esta tarea es la tabla de transformaciones conformes dados en el apéndice A.

Los mapeos del apéndice A se han clasificado como mapeos elementales (E-1 a E-9), mapeos sobre semiplanos (H-1 a H-6), mapeos sobre regiones circulares (C-1 a C-5) y miscelánea de mapeos (M-1 a M-10). Muchas propiedades de los mapeos que se presentan en esta tabla se han analizado en el capítulo 2. Cuando utilicemos la tabla, en algunos casos el mapeo deseado aparecerá como una sola entrada en la tabla, mientras que en otros casos se pueden requerir uno o más mapeos sucesivos de la tabla. También se observa que los mapeos del apéndice A son, en general, sólo transformaciones conformes de los interiores de las regiones que se

muestran. Por ejemplo, es evidente que el mapeo complejo que se muestra en la entrada E-4 no es conforme en  $B = 0$ . Como regla general, cuando nos referimos a una transformación conforme de una región  $R$  sobre una región  $R'$  requerimos para ello que la transformación sea conforme en los puntos del interior de  $R$ .

**Ejemplo 3.4 ( Uso de una tabla de mapeos conformes).** Usar el apéndice A para encontrar un mapeo conforme de la franja horizontal infinita  $0 \leq y \leq 2$ ,  $-\infty < x < \infty$ , sobre el semiplano superior  $v \geq 0$ . Bajo este mapeo, ¿cuál es la imagen del eje  $x$  negativo?.

*Solución.* En la entrada H-2 en el apéndice A se presenta un mapeo de una franja infinita horizontal sobre el semiplano superior. Haciendo  $a = 2$ , se obtiene el mapeo deseado  $w = e^{\pi z/2}$ . De H-2 también vemos que los puntos marcados  $D$  y  $E = 0$  en el eje  $x$  negativo en el plano  $z$  se mapean sobre los puntos  $D'$  y  $E' = 1$  en el eje  $u$  positivo en el plano  $w$ . De las posiciones relativas de estos puntos, concluimos que el eje  $x$  negativo se mapea sobre el intervalo  $(0, 1]$  en el eje  $u$  con  $w = e^{\pi z/2}$ . Ver la figura 3.5.

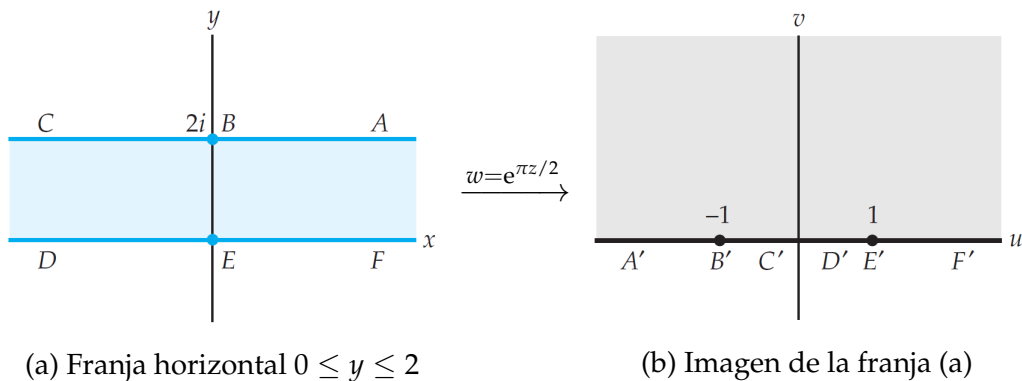


Figura 3.5: Figura para el ejemplo 3.4



**Ejemplo 3.5 ( Uso de una tabla de mapeos conformes).** Usar el apéndice A para encontrar una transformación conforme de la franja horizontal infinita  $0 \leq y \leq 2, -\infty < x < \infty$ , sobre el disco unitaria  $|w| \leq 1$ . Bajo esta transformación, ¿ cuál es la imagen del eje  $x$  negativo?.

*Solución.* El apéndice A no tiene una entrada que mapee una franja horizontal infinita en el disco unitario. Por tanto, construimos un mapeo conforme que hace esto componiendo dos mapeos de la tabla. En el ejemplo 3.4 se encontró que la franja horizontal infinita  $0 \leq y \leq 2, -\infty < x < \infty$ , se mapea sobre el semiplano superior por  $w = e^{\pi z/2}$ . Además, desde la entrada C-4 vemos que el semiplano superior se mapea sobre el disco unitario por  $g(z) = \frac{i-z}{i+z}$ . La composición de estas dos funciones

$$w = g(f(z)) = \frac{i - e^{\pi z/2}}{i + e^{\pi z/2}}$$

por tanto, mapea la franja  $0 \leq y \leq 2, -\infty < x < \infty$ , sobre el disco unitario  $|w| \leq 1$ . Bajo el primero de estos mapeos sucesivos, el eje real negativo se mapea sobre el intervalo  $(0, 1]$  en el eje real como se observó en el ejemplo 3.4. Examinando la entrada C-4 ( o la figura 3.6) se encuentra que el intervalo de 0 a  $C = 1$  se mapea sobre el arco circular de 1 a  $C' = i$  en la circunferencia unitaria  $|w| = 1$ . Por tanto, concluimos que el eje real negativo se mapea sobre el arco circular de 1 a  $i$  en la circunferencia unitaria bajo  $w = \frac{i - e^{\pi z/2}}{i + e^{\pi z/2}}$ .

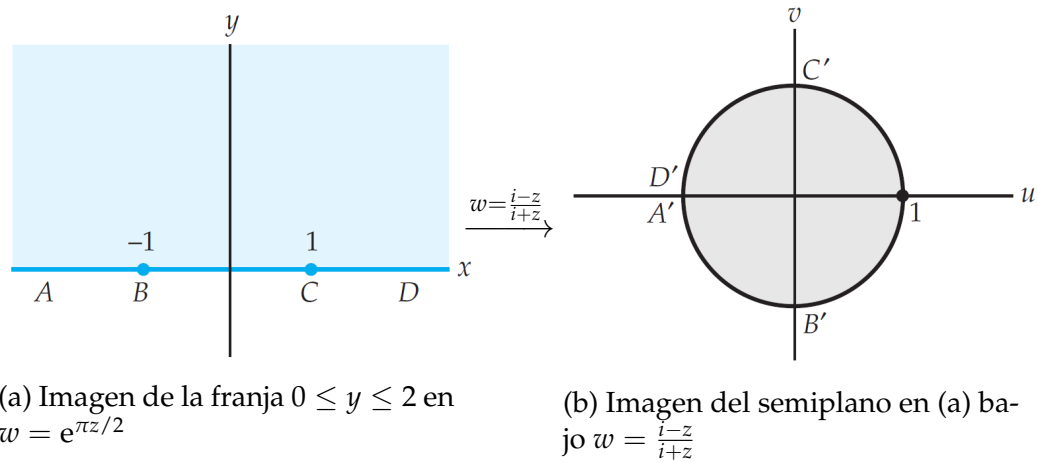


Figura 3.6: Figura para el ejemplo 3.5

### 3.2. Aplicaciones de las Transformaciones Conformes

En la sección 1.3 vimos que si la función  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  es analítica en un dominio  $D$ , entonces las partes real e imaginaria de  $f$  son armónicas, es decir, tanto  $u$  como  $v$  tienen segundas derivadas parciales continuas y satisfacen la ecuación de Laplace en  $D$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (3.10)$$

Por el contrario, si sabemos que una función  $u(x, y)$  es armónica en  $D$ , podemos encontrar una única (excepto por una constante aditiva) armónica conjugada  $v(x, y)$  y construir una función  $f(z)$  que es analítica en  $D$ .

En las ciencias físicas e ingeniería, la ecuación diferencial parcial de Laplace se

encuentra con frecuencia como un modelo matemático de un fenómeno independiente del tiempo, y en ese contexto, el problema que enfrentamos es *resolver* la ecuación dada sujeta a ciertas condiciones de la física llamadas condiciones frontera. Debido a la relación que se presenta en (3.10), las funciones analíticas son las fuentes de un número ilimitado de soluciones de la ecuación de Laplace, y podemos ser capaces de encontrar una que se ajuste al problema en cuestión. Esta es sólo una razón por la cual la teoría de variables compleja es tan fundamental en estudio de las matemáticas aplicadas.

Comenzamos esta sección demostrando que las curvas de nivel de las partes reales e imaginarias de una función analítica  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  son dos **familias ortogonales** de curvas.

**Familias Ortogonales.** Suponga que la función  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  es analítica en un dominio  $D$ . Entonces las partes real e imaginaria de  $f$  se pueden utilizar para definir dos familias de curvas en  $D$ . Las ecuaciones

$$u(x, y) = c_1 \quad \text{y} \quad v(x, y) = c_2 \tag{3.11}$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes reales arbitrarias, se llaman **curvas de nivel** de  $u$  y  $v$ , respectivamente. Las curvas de nivel (3.11) son **familias ortogonales**. A grandes rasgos, esto significa que cada curva de una familia es ortogonal a cada curva de

la otra familia. Más precisamente, en un punto de intersección  $z_0 = x_0 + y_0$ , donde supondremos que  $f'(z) \neq 0$ , la recta tangente  $L_1$  a la curva de nivel  $u(x, y) = u_0$  y la recta tangente  $L_2$  a la curva de nivel  $v(x, y) = v_0$  son perpendiculares. Vea la figura 3.7. Los números  $u_0$  y  $v_0$  se definen evaluando a  $u$  y a  $v$  en  $z_0$ , es decir,  $c_1 = u(x_0, y_0) = u_0$  y  $c_2 = v(x_0, y_0) = v_0$ .

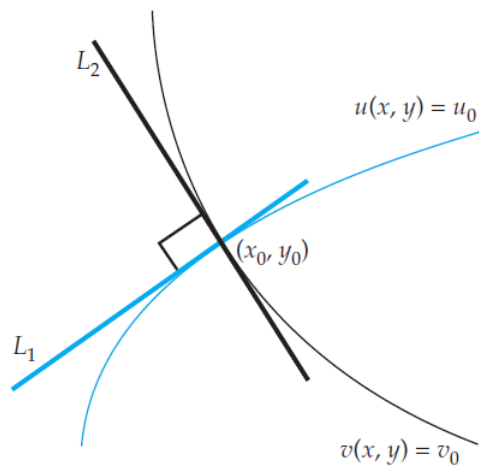


Figura 3.7: Las tangentes  $L_1$  y  $L_2$  en el punto de intersección  $z_0$  son perpendiculares

Para probar que  $L_1$  y  $L_2$  son perpendiculares en  $z_0$  demostramos que la pendiente de una tangente es el recíproco negativo de la pendiente de la otra, demostrando que el producto de las dos pendientes es  $-1$ . Comenzamos por derivar a  $u(x, y) = u_0$  y  $v(x, y) = v_0$  respecto a  $x$  utilizando la regla de la cadena de la derivación parcial:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

Entonces resolvemos cada una de las ecuaciones anteriores para  $dy/dx$ :

$$\overbrace{\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}}^{\text{pendiente de una curva } u(x,y)=u_0} \quad \overbrace{\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y}}^{\text{pendiente de una curva } v(x,y)=v_0} \quad (3.12)$$

En  $(x_0, y_0)$  vemos de (3.12), las ecuaciones de Cauchy-Riemann  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ , y de  $f'(z_0) \neq 0$ , que el producto de las dos funciones pendientes es

$$\left(-\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}\right) \left(-\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y}\right) = \left(\frac{\partial v/\partial y}{\partial v/\partial x}\right) \left(-\frac{\partial v/\partial x}{\partial v/\partial y}\right) = -1. \quad (3.13)$$

**Vector Gradiente.** En cálculo vectorial, si  $f(x, y)$  es una función escalar derivable, entonces el **gradiente** de  $f$  ya sea escrito como **grad**  $f$  o  $\nabla f$  (el símbolo  $\nabla$  se llama *nabla* o *del*), se define como el vector bidimensional

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} \quad (3.14)$$

Como se muestra a color en la figura 3.8, el vector gradiente  $\nabla f(x_0, y_0)$  en un punto  $(x_0, y_0)$  es perpendicular a la curva de nivel  $f(x, y)$  que pasa por ese punto, es decir, a la curva de nivel  $f(x, y) = c_0$ , donde  $c_0 = f(x_0, y_0)$ .

Para ver esto, supongamos que  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$ , donde  $x_0 = g(t_0)$ ,  $y_0 = h(t_0)$  son las ecuaciones paramétricas para la curva  $f(x, y) = c_0$ . Entonces la derivada de  $f(x(t), y(t)) = c_0$  respecto a  $t$  es

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0 \quad (3.15)$$

Este último resultado es el producto de (3.14) con el vector tangente  $\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$ . Concretamente, en  $t = t_0$ , (3.15) muestra que si  $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ , entonces  $\nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$ . Esto significa que  $\nabla f$  es perpendicular a la curva de nivel en  $(x_0, y_0)$ .

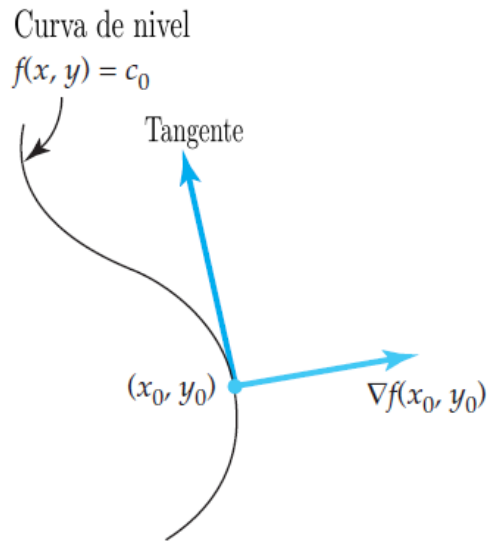


Figura 3.8: El gradiente es perpendicular en la curva de nivel  $(x_0, y_0)$

**Campos gradiente.** En el análisis complejo los campos vectoriales bidimensionales  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  definidos en un dominio  $D$  del plano, son de interés ya que  $\mathbf{F}$  se puede representar de manera equivalente como una función compleja  $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ . De particular importancia en ciencia son los campos vectoriales que se pueden escribir como el gradiente de alguna función escalar  $\phi$  con segundas derivadas parciales continuas. En otras palabras, donde el

campo  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$  es igual a

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} \quad (3.16)$$

por lo que  $P(x, y) = \partial\phi/\partial x$  y  $Q(x, y) = \partial\phi/\partial y$ . Tal campo vectorial  $\mathbf{F}$  se llama **campo gradiente** y  $\phi$  se llama **función potencial** o simplemente **potencial** de  $\mathbf{F}$ . Los campos gradiente se presentan en forma natural en el estudio de la electricidad y el magnetismo, de flujo de fluidos, en gravitación, y en las temperaturas de estado estable. En un campo gravitacional, el trabajo realizado por la fuerza sobre una partícula que se mueve de la posición A a la posición B es igual en todas las trayectorias entre estos puntos. Además, el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de una trayectoria cerrada es cero, en otras palabras la ley de conservación de la energía mecánica es : *energía cinética+energía potencial=constante*. Por esta razón, los campos gradiente también se conocen como **campos conservativos**.

En el estudio de la electrostática la intensidad del campo eléctrico  $\mathbf{F}$  debido a un conjunto de cargas estacionarias en una región del plano está dada por  $\mathbf{F}(x, y) = -\nabla\phi$ , donde la función de valor real  $\phi(x, y)$  se denomina **potencial electrostático**. La ley de Gauss establece que la divergencia del campo  $\mathbf{F}$ , es decir,  $\nabla \cdot \mathbf{F} = P_x + Q_y$  es proporcional a la densidad de carga  $\rho$ , donde  $\rho$  es una función escalar. Si la región del plano está libre de cargas, entonces, la divergencia de  $\mathbf{F}$  es cero. Puesto que  $\mathbf{F} = -\nabla\phi$ , si  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ , entonces

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \left( -\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} \right) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0'$$

o  $\nabla^2 \phi = 0$ . En otras palabras: la ecuación de la función potencial  $\phi$  satisface la ecuación de Laplace y es, por tanto, armónica en algún dominio  $D$ .

**Potencial Complejo.** En general si una función de potencial  $\phi(x, y)$  satisface la ecuación de Laplace en un dominio  $D$ , es armónica y sabemos de la sección 1.3 que existe una función armónica conjugada  $\psi(x, y)$ , definida en  $D$  tal que la función compleja

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \tag{3.17}$$

es analítica en  $D$ . La función  $\Omega(z)$  en (3.17) se llama **potencial complejo** correspondiente al potencial real  $\phi$ . Como hemos visto en la discusión inicial de esta sección, las curvas de nivel  $\phi$ ,  $\phi(x, y) = c_1$ , se llaman **curvas equipotenciales**, es decir, curvas a lo largo de las cuales el potencial es constante. En el caso en que  $\phi$  representa un potencial electrostático, la intensidad de campo eléctrico  $\mathbf{F}$  se debe dirigir a lo largo de la familia de curvas ortogonales a las curvas equipotenciales porque la fuerza del campo es el gradiente del potencial  $\phi$ ,  $\mathbf{F}(x, y) = -\nabla \phi$ , y se demostró en (3.15), el vector gradiente en un punto  $(x_0, y_0)$  es perpendicular a una curva de nivel  $\psi(x, y) = c_2$ , que son curvas ortogonales a la familia  $\phi(x, y) = c_1$ ,



se llaman **líneas de fuerza** y son las trayectorias a lo largo de las que una partícula cargada se mueve en el campo electrostático. Vea la figura 3.9

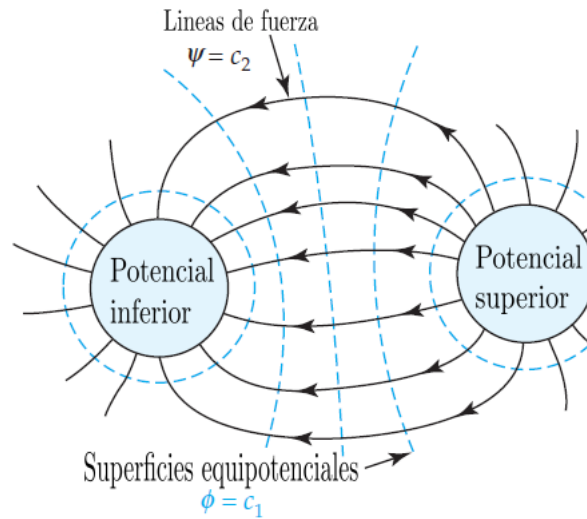


Figura 3.9: Campo eléctrico

**Flujo ideal.** En mecánica de fluidos en flujo dice que es bidimensional o **flujo planar** si el flujo (que puede ser agua, o incluso el aire, moviéndose en velocidades lentas) se mueve en planos paralelos al plano  $xy$ . Suponga que  $\mathbf{F}(x, y)$  es el campo de velocidades bidimensional de un fluido viscoso que es **incomprensible**, es decir, un fluido para el que  $\text{div } \mathbf{F} = 0$  o  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ .

El flujo es **irrotacional** si  $\text{rot } \mathbf{F} = 0$  o  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Un fluido incomprensible cuyo flujo planar es irrotacional se dice que es un **fluido ideal**. El campo de velocidades  $\mathbf{F}$  de un fluido ideal es un campo gradiente y se puede representar por (3.16), donde  $\phi$  es una función de valor real llamada **potencial de velocidad**. Las curvas de nivel  $\phi(x, y) = c_1$  se llaman **curvas equipotenciales** o simplemente **equipotencia-**

les. Además,  $\phi$  satisface la ecuación de Laplace ya que  $\text{div } \mathbf{F} = 0$  es equivalente a  $\nabla \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \phi) = 0$  o  $\nabla^2 \phi = 0$  y así  $\phi$  es armónica. La armónica conjugada  $\psi(x, y)$  se llama **función de corriente** y sus curvas de nivel  $\psi(x, y) = c_2$  se llaman **líneas de corriente**.

Las líneas de corriente representan trayectorias reales a lo largo de las cuales se mueven las partículas en el fluido. La función  $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  se llama **potencial de velocidad compleja** del fluido. Vea la figura 3.10

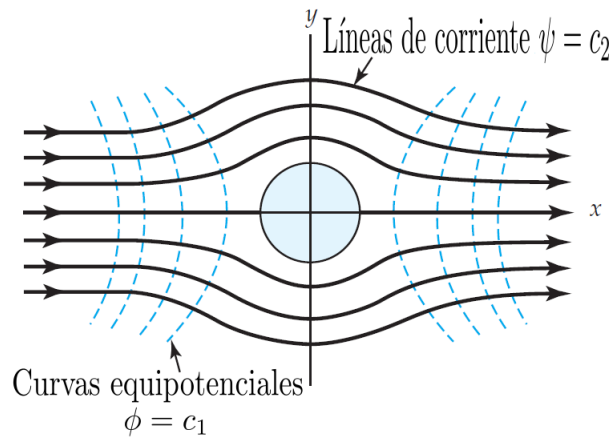


Figura 3.10: Flujo de fluidos

**Flujo de Calor.** Por último, si  $\phi(x, y)$  representa la temperatura independiente del tiempo o de estado estable que satisface la ecuación de Laplace, entonces las curvas de nivel  $\phi(x, y) = c_1$  son suaves a lo largo de las cuales la temperatura es constante y se llaman **isotermas** de la función armónica conjugada de  $\phi$  son las curvas a lo largo de las que fluye el calor y se llaman **línea de flujo**. Vea la figura 3.11

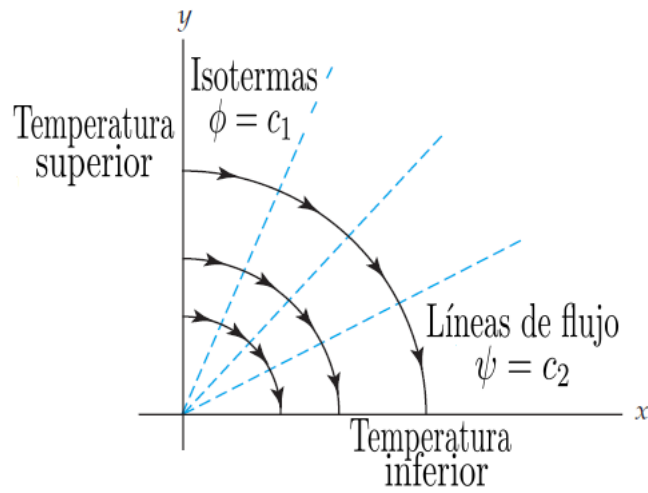


Figura 3.11: Flujo de Calor

La tabla 3.1 resume algunas de las aplicaciones de la función compleja potencial  $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  y los nombres dados a las curvas de nivel

$$\phi(x, y) = c_1 \quad y \quad \psi(x, y) = c_2$$

Aplicación	Curvas de nivel $\phi(x, y) = c_1$	Curvas de nivel $\psi(x, y) = c_2$
Electrostática	Curvas equipotenciales	Líneas de fuerza
Flujo de fluidos	Curvas equipotenciales	Líneas de corriente de flujo
Gravitación	Curvas equipotenciales	Lineas de fuerza
Flujo de Calor	Isotermas	Líneas de flujo de calor

Tabla 3.1: Función potencial complejo

### 3.2.1. Problema de Dirichlet

Un problema clásico e importante en matemáticas aplicadas que implica a la ecuación de Laplace se ilustra en la figura 3.12 y se enuncia como se muestra a continuación.

**Definición 3.2 (Problema de Dirichlet).** *Supongamos que  $D$  es un dominio en el plano y que  $g$  es una función definida en la frontera  $C$  de  $D$ . El problema de encontrar una función  $\phi(x, y)$ , la cual satisface la ecuación de Laplace en  $D$  y que es igual a  $g$  en la frontera  $C$  de  $D$  se llama **problema de Dirichlet**.*

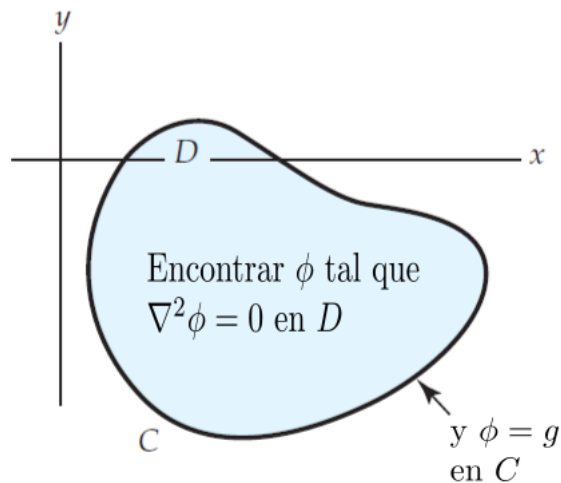


Figura 3.12: Problema de Dirichlet

Tales problemas surgen con frecuencia en el modelado bidimensional de la electrostática, flujo de fluidos, gravitación y flujo de calor. En el siguiente ejemplo resolveremos un problema de Dirichlet. Aunque el problema es bastante simple su solución nos ayudará en la solución de problemas más complicados.

**Ejemplo 3.6 (Un simple problema de Dirichlet).** Resuelva el problema de Dirichlet que se ilustra en la figura 3.13. El dominio  $D$  es una franja vertical infinita definida por  $-1 < x < 1$ ,  $-\infty < y < \infty$ ; los límites de  $D$  son las rectas verticales  $x = -1$  y  $x = 1$ .

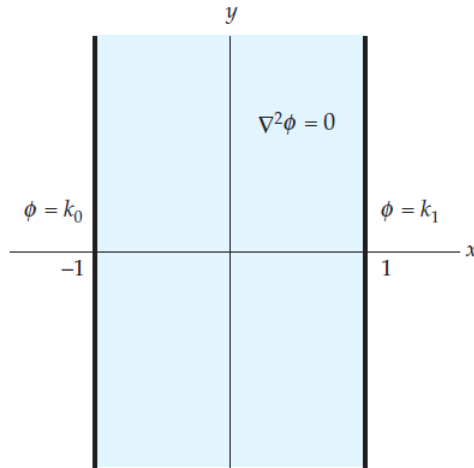


Figura 3.13: Figura para el ejemplo 3.6

*Solución.* El problema de Dirichlet en la figura 3.13 es

$$\text{Resuelva : } \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad -1 < x < 1, \quad -\infty < y < \infty \quad (3.18)$$

$$\text{Sujeto a : } \phi(-1, y) = k_0, \quad \phi(1, y) = k_1, \quad -\infty < y < \infty \quad (3.19)$$

La forma de  $D$ , junto con el hecho de que las dos condiciones de frontera son constantes, sugieren que la función  $\phi$  es independiente de  $y$ , es decir, es razonable tratar de buscar una solución de (3.18) de la forma  $\phi(x)$ . Con esta última suposición, la ecuación diferencial parcial de Laplace (3.18) se convierte en la ecuación diferencial ordinaria  $d^2\phi/dx^2 = 0$ . Integrando dos veces con respecto a  $x$  se ob-

tiene la solución general  $\phi(x) = ax + b$ . Las condiciones de frontera nos permiten determinar los coeficientes  $a$  y  $b$ . En particular,  $\phi(-1) = k_0$  y  $\phi(1) = k_1$  debemos tener  $a(-1) + b = k_0$  y  $a(1) + b = k_1$ , respectivamente. Sumando estas dos últimas ecuaciones simultáneamente se obtiene  $2b = k_0 + k_1$ , mientras que restando la primera ecuación de la segunda se obtiene  $2a = k_1 - k_0$ . Estos dos resultados nos dan  $a$  y  $b$

$$b = \frac{k_1 + k_0}{2} \quad \text{y} \quad a = \frac{k_1 - k_0}{2}.$$

Por lo tanto, tenemos la siguiente solución del problema de Dirichlet dado

$$\phi(x) = \frac{k_1 - k_0}{2}x + \frac{k_1 + k_0}{2} \tag{3.20}$$

El problema del ejemplo 3.6 se puede interpretar como la determinación del potencial electrostático  $\phi$  entre dos placas conductoras paralelas infinitamente largas que se mantienen a potenciales constantes. Dado que satisface la ecuación de Laplace en  $D$ ,  $\phi$  es una función armónica. Por tanto, una armónica conjugada  $\psi$  se puede encontrar de la siguiente manera. Ya que  $\phi$  y  $\psi$  deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{k_1 - k_0}{2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0.$$

La segunda ecuación indica que  $\psi$  es una función sólo de  $y$ , y así, integrando la primera ecuación respecto a  $y$ , se obtiene:

$$\psi(y) = \frac{k_1 - k_0}{2}y,$$

donde, por conveniencia, hemos tomado la constante de integración como 0. De (3.17), una función de potencial compleja para el problema de Dirichlet de ejemplo 3.6 es entonces  $\Omega(z) = \phi(x) + i\psi(y)$ , o

$$\Omega(z) = \frac{k_1 - k_0}{2}x + \frac{k_1 + k_0}{2} + i\frac{k_1 - k_0}{2}y = \frac{k_1 - k_0}{2}z + \frac{k_1 + k_0}{2}.$$

Las curvas de nivel de  $\phi$  o curvas equipotenciales son las rectas verticales  $x = c_1$  que se muestran a color en la figura 3.14, y las curvas de nivel de  $\psi$  o las líneas de fuerza son los segmentos de rectas horizontales  $y = c_2$  que se muestran en negro. La figura muestra claramente que las dos familias de curvas de nivel son ortogonales.

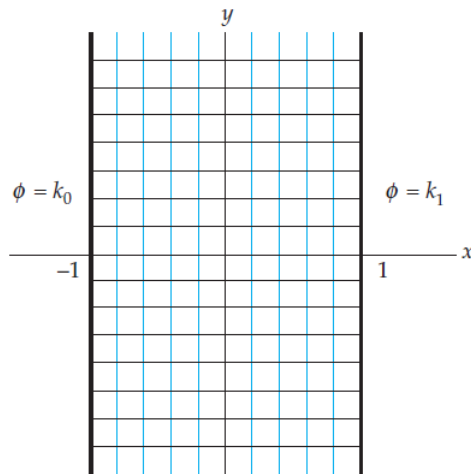


Figura 3.14: Las curvas equipotenciales y líneas de fuerza del ejemplo 3.6

**Ejemplo 3.7 (Un simple problema de Dirichlet).**

- a) Determinar el potencial  $\phi$  en el dominio  $D$  entre las dos placas infinitamente largas paralelas al eje  $x$  que se muestra en la figura 3.15, si los potenciales en las fronteras son  $\phi(x, -1) = 10$  y  $\phi(x, 2) = 20$ .
- b) Determinar el potencial complejo  $\Omega(z)$ .
- b) Dibujar las curvas equipotenciales y las líneas de fuerza.

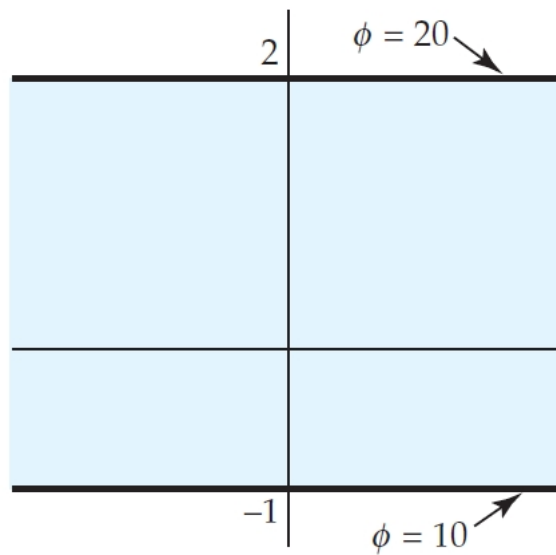


Figura 3.15: Figura del ejemplo 3.7

*Solución.*

- a) El problema de Dirichlet en la figura 3.15 es:

$$\text{Resolver: } \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -1 < y < 2 \quad (3.21)$$



$$\text{Sujeta a: } \phi(x, -1) = 10, \quad \phi(x, 2) = 20 \quad -\infty < x < \infty \quad (3.22)$$

La forma de  $D$ , junto con el hecho de que las dos condiciones de frontera son constantes, sugieren que la función  $\phi$  es independiente de  $x$ , es decir, es razonable buscar una solución de (3.21) de la forma  $\phi(y)$ . Con esta última suposición, la ecuación diferencial parcial de Laplace (3.21) se convierte en la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2\phi}{dy^2} = 0$$

Integrando dos veces con respecto a  $y$  se obtiene la solución general

$$\phi(y) = ay + b \quad (3.23)$$

Las condiciones de frontera nos permiten determinar los coeficientes  $a$  y  $b$ .

En particular, de  $\phi(-1) = 10$  y  $\phi(2) = 20$  tenemos las siguientes ecuaciones:

$$-a + b = 10 \quad \text{y} \quad 2a + b = 20 \quad (3.24)$$

Despejando  $a$  de la primera de las ecuaciones anteriores obtenemos

$$a = b - 10 \quad (3.25)$$

Sustituyendo (3.25) en la segunda expresión de (3.24) tenemos

$$2(b - 10) + b = 20 \Rightarrow 2b - 20 + b = 20$$

$$\Rightarrow 2b + b = 20 + 20$$

$$\Rightarrow 3b = 40$$

$$\Rightarrow b = \frac{40}{3}$$

Sustituyendo  $b = \frac{40}{3}$  en (3.25) obtenemos

$$a = \frac{10}{3}$$

Por lo tanto, sustituyendo  $a = 10/3$  y  $b = 40/3$  en (3.23) obtenemos la siguiente solución al problema de Dirichlet dado:

$$\phi(y) = \frac{10}{3}y + \frac{40}{3} \quad (3.26)$$

b) El potencial complejo  $\Omega(z)$  es

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (3.27)$$

La función  $\Omega(z)$  es una función analítica y la parte imaginaria  $\psi(x, y)$  será

la armónica conjugada del potencial

$$\phi(x, y) = \frac{10}{3}y + \frac{40}{3}$$

Ya que  $\phi$  y  $\psi$  deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann, tenemos

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{10}{3}$$

La primera ecuación indica que  $\psi$  es una función sólo de  $x$ , y así, integrando la segunda ecuación respecto a  $x$ , se obtiene:

$$\psi(x) = -\frac{10}{3}x$$

donde, por conveniencia, hemos tomado la constante de integración como 0. Sustituyendo  $\phi$  y  $\psi$  en (3.27) obtenemos el potencial complejo

$$\Omega(z) = \frac{10}{3}y + \frac{40}{3} - \frac{10}{3}ix$$

- c) Las curvas de nivel de  $\phi$  o curvas equipotenciales son las rectas horizontales  $y = c_2$  que se muestra a color en la figura 3.16, y las curvas de nivel de  $\psi$  o las líneas de fuerza son los segmentos de recta verticales  $x = c_2$  que se muestran en negro

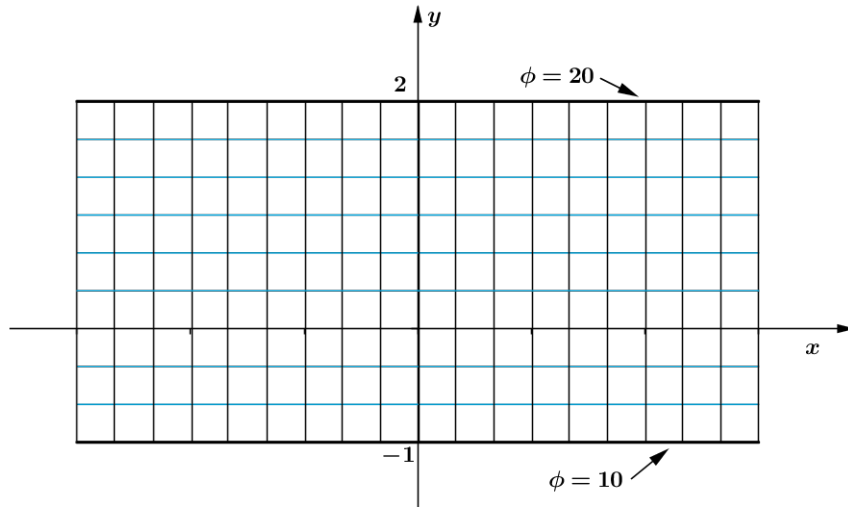


Figura 3.16: Las curvas equipotenciales y las líneas de fuerza del ejemplo 3.7

**Ejemplo 3.8 (Un simple problema de Dirichlet).**

La temperatura en estado estacionario  $\phi(r)$  entre los dos conductores cilíndricos circulares concéntricos que se muestran en la figura 3.17 satisfacen la ecuación de Laplace en coordenadas polares en la forma

$$r^2 \frac{d^2 \phi}{dr^2} + r \frac{d\phi}{dr} = 0$$

- a) Demuestre que una solución de la ecuación diferencial sujeta a las condiciones de frontera  $\phi(a) = k_0$  y  $\phi(b) = k_1$ , donde  $k_0$  y  $k_1$  son potenciales complejos constantes, esta dada por

$$\phi(r) = A \ln|r| + B$$

donde

$$A = \frac{k_0 - k_1}{\ln|a/b|} \quad y \quad B = \frac{-k_0 \ln|b| + k_1 \ln|a|}{\ln|a/b|}$$

b) Determinar el potencial complejo  $\Omega(z)$ .

b) Dibujar las isotermas y las líneas de flujo de calor.

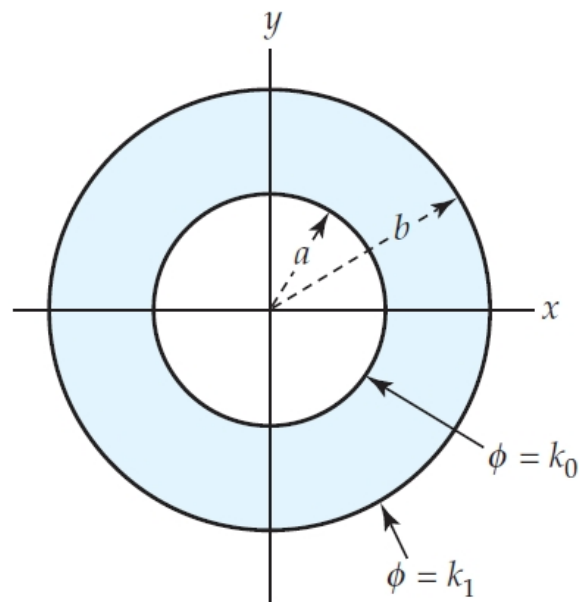


Figura 3.17: Figura del ejemplo 3.8

*Solución.*

a) El problema de Dirichlet en la figura 3.17 es:

$$\text{Resolver: } r^2 \frac{d^2 \phi}{dr^2} + r \frac{d\phi}{dr} = 0, \quad a \leq r \leq b, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (3.28)$$

$$\text{Sujeta a: } \phi(a, \theta) = k_0, \quad \phi(b, \theta) = k_1 \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Resolvamos la ecuación de Laplace (3.28) usando sustitución de la siguiente forma.

Sea  $v = \frac{d\phi}{dr}$  en (3.28), entonces  $\frac{d^2\phi}{dr^2} = \frac{dv}{dr}$ . Por lo tanto (3.28) se convierte en:

$$r^2 \frac{dv}{dr} + rv = 0$$

$$r^2 \frac{dv}{dr} = -rv$$

$$\int \frac{dv}{v} = - \int \frac{dr}{r}$$

$$\ln|v| = -(\ln|r| + c)$$

$$e^{\ln|v|} = e^{\ln|r^{-1}| - c}$$

$$v = r^{-1}e^{-c}$$

$$v = \frac{1}{c_1 r}; \quad c_1 = e^{-c}, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Luego, sustituyendo  $v = \frac{1}{c_1 r}$  en  $v = \frac{d\phi}{dr}$  tenemos

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{c_1 r}$$

$$c_1 \frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r}$$

$$c_1 \int \frac{d\phi}{dr} = \int \frac{dr}{r}$$

$$c_1\phi(r) = \ln|r| + c_2$$

$$\phi(r) = \frac{1}{c_1} \ln|r| + \frac{c_2}{c_1}$$

$$\phi(r) = A \ln|r| + B; \quad \text{donde} \quad A = \frac{1}{c_1}, B = \frac{c_2}{c_1}$$

Ahora, tomando las condiciones de frontera en el resultado obtenido anteriormente tenemos

$$k_0 = A \ln|a| + B$$

$$k_1 = A \ln|b| + B$$

Restando la segunda ecuación de la primera tenemos

$$k_0 - k_1 = A(\ln|a| - \ln|b|)$$

$$A = \frac{k_0 - k_1}{\ln|a| - \ln|b|}$$

$$A = \frac{k_0 - k_1}{\ln|a/b|}$$

Luego, sustituyendo  $A$  en la primera ecuación tenemos

$$k_0 = \frac{k_0 - k_1}{\ln|a/b|} \ln|a| + B$$

$$B = k_0 - \frac{\ln|a|(k_0 - k_1)}{\ln|a/b|}$$

$$B = \frac{k_0 \ln|a/b| - \ln|a|(k_0 - k_1)}{\ln|a/b|}$$

$$B = \frac{k_0 \ln|a| - k_0 \ln|b| - k_0 \ln|a| + k_1 \ln|a|}{\ln|a/b|}$$

$$B = \frac{-k_0 \ln|b| + k_1 \ln|a|}{\ln|a/b|}$$

Así

$$\phi(r) = A \ln|r| + B \quad (3.29)$$

donde

$$A = \frac{k_0 - k_1}{\ln|a/b|} \quad \text{y} \quad B = \frac{-k_0 \ln|b| + k_1 \ln|a|}{\ln|a/b|}$$

b) El potencial complejo  $\Omega(z)$  es

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (3.30)$$

La función  $\Omega(z)$  es una función analítica y la parte imaginaria  $\psi(x, y)$  será la armónica conjugada de (3.29), iniciemos por convertir a coordenadas cartesianas esta ecuación.

Sea  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , entonces



$$\begin{aligned}\phi(r) &= A \ln|r| + B \\ &= A \ln\left|\sqrt{x^2 + y^2}\right| + B\end{aligned}$$

Sabemos que  $\psi$  es la conjugada armónica de  $\phi$ , por tanto ambas funciones deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{Ax}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{Ay}{x^2 + y^2} \quad (3.31)$$

La integral parcial con respecto a  $y$  de la primera de estas ecuaciones la obtenemos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\int \partial\psi &= \int \frac{Ax}{x^2 + y^2} \partial y \\ &= A \int \frac{x}{x^2(1 + \frac{y^2}{x^2})} \partial y \\ &= \frac{A}{x} \int \frac{\partial y}{1 + (\frac{y}{x})^2}\end{aligned}$$

Sea  $u = \frac{y}{x}$ ,

$$\begin{aligned}u &= \frac{y}{x} \Rightarrow du = \frac{1}{x} dy \\ &\Rightarrow x du = dy\end{aligned}$$

Sustituyendo esto obtenemos

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= \frac{A}{x} \int \frac{x du}{1 + u^2} \\ &= A \arctan(y/x) + g(x)\end{aligned}$$

Así

$$\psi(x, y) = A \arctan(y/x) + g(x) \quad (3.32)$$

Derivando parcialmente (3.32) con respecto a  $x$  tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (A \arctan(y/x) + g(x)) \\ &= A \frac{\partial}{\partial x} (\arctan(y/x)) + \frac{\partial}{\partial x} (g(x)) \\ &= -\frac{Ay}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial x} (g(x))\end{aligned}$$

Ahora por la segunda parte de (3.31) tenemos

$$-\frac{Ay}{x^2 + y^2} + \frac{\partial}{\partial x}(g(x)) = -\frac{Ay}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(g(x)) = 0$$

$$g(x) = 0$$

donde, por conveniencia, hemos tomado la constante de integración como 0. Sustituyendo en (3.32) obtenemos

$$\psi(x, y) = A \arctan(y/x)$$

Por lo tanto el potencial complejo queda determinado por

$$\Omega(z) = A \left[ \ln \left| \sqrt{x^2 + y^2} \right| + i \arctan(y/x) \right] + B$$

donde

$$A = \frac{k_0 - k_1}{\ln|a/b|} \quad \text{y} \quad B = \frac{-k_0 \ln|b| + k_1 \ln|a|}{\ln|a/b|}$$

- c) Las curvas de nivel de  $\phi$  o curvas isothermas son las que se muestra a color en la figura 3.18, y las curvas de nivel de  $\psi$  o las líneas de fluido de calor son que se muestran en negro

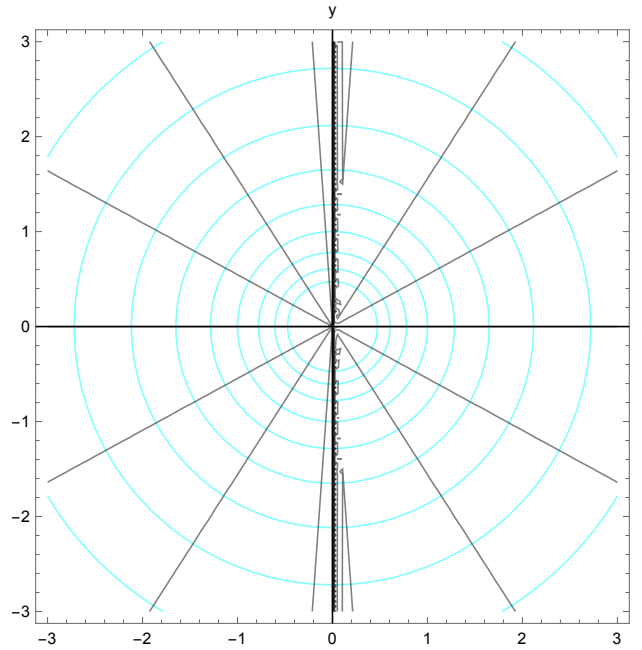


Figura 3.18: Las curvas isotermas y las líneas de flujo de calor del ejemplo 3.8

### 3.2.2. Funciones Armónicas y el Problema de Dirichlet

Supongamos que  $D$  es un dominio en el plano complejo. Recordemos de la sección 1,3 que una función de valor real  $\phi$  de dos variables reales  $x, y$  se llama armónica en  $D$  si  $\phi$  tiene primeras y segundas derivadas parciales continuas y si  $\phi$  satisface la ecuación de Laplace  $\nabla^2\phi = 0$ , que es equivalente a

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.33)$$

Un **problema de Dirichlet** se define como el problema de encontrar una función  $\phi(x, y)$  que es armónica en  $D$  y que toma valores especificados en la frontera de  $D$ . Ver figura 3.19. Las especificaciones de los valores de la función  $\phi$  en la

frontera de  $D$  se llaman **condiciones de frontera**.

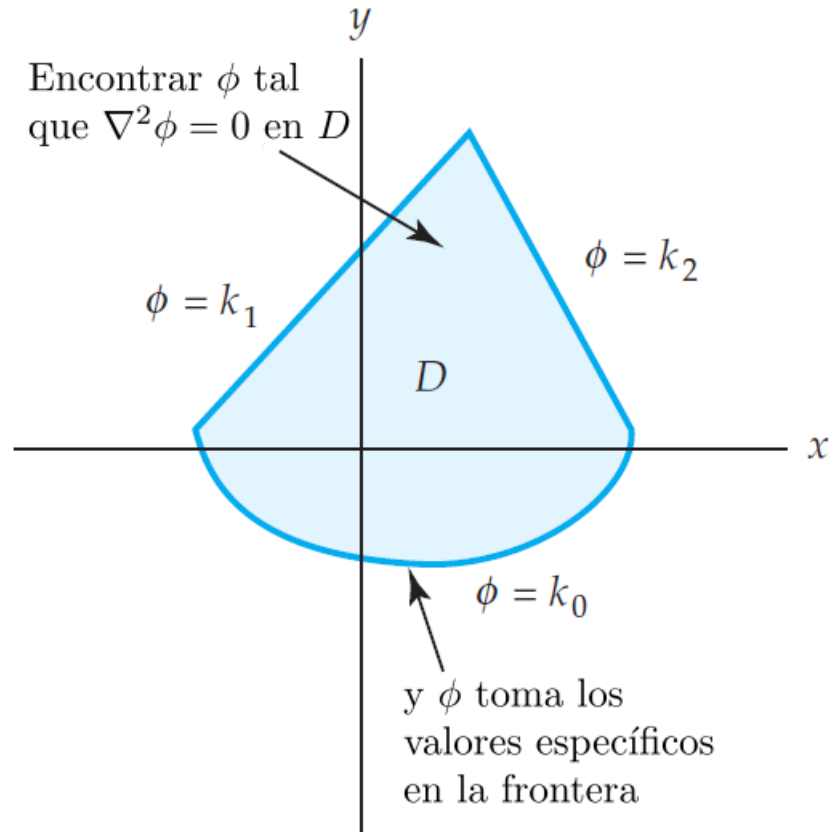


Figura 3.19: Problema de Dirichlet

Por ejemplo, consideremos el problema

$$\text{Resuelva : } \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0, \quad -1 < x < 1, \quad -\infty < y < \infty$$

$$\text{Sujeto a : } \phi(-1, y) = k_0, \quad \phi(1, y) = k_1, \quad -\infty < y < \infty,$$

donde  $k_0$  y  $k_1$  son constantes reales. Este es un problema de Dirichlet en el dominio

$D$  acotado por las rectas verticales  $x = -1$  y  $x = 1$ . Ver la figura 3.20.

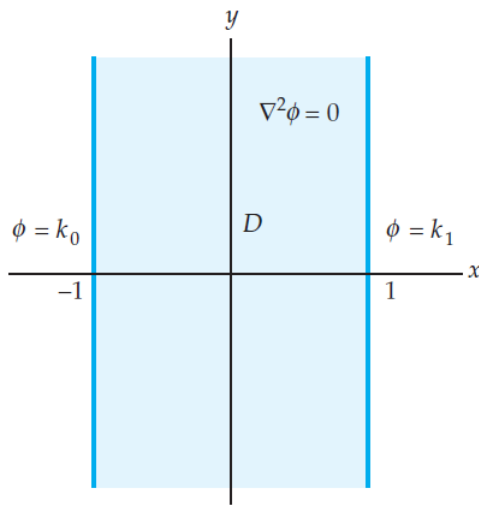


Figura 3.20: Problema de Dirichlet del ejemplo 3.6.

En el ejemplo 3.6 utilizamos las técnicas elementales de ecuaciones diferenciales para encontrar la solución

$$\phi(x, y) = \frac{k_1 - k_0}{2}x + \frac{k_1 + k_0}{2} \quad (3.34)$$

de este particular problema de Dirichlet.

En parte, el problema de Dirichlet representado en la figura 3.20 es relativamente fácil de resolver debido a la forma simple del dominio  $D$ . Las técnicas utilizadas para resolver este tipo de problemas de Dirichlet en general, no se aplican a los problemas de Dirichlet con un dominio más complicado. Una función  $f$  que es analítica en un dominio  $D$  y que mapea a  $D$  sobre un dominio  $D'$  se llama un **mapeo analítico** de  $D$  sobre  $D'$ . A menudo se presenta el caso de que un pro-

blema de Dirichlet en un dominio complicado  $D$  se puede resolver encontrando un mapeo analítico de  $D$  sobre  $D'$  en el que el problema de Dirichlet asociado, o *transformado*, es más fácil de resolver.

A continuación se muestra cómo es posible utilizar transformaciones conformes para resolver un problema de Dirichlet en una región  $D$  una vez conocida la solución al problema de Dirichlet correspondiente en la región  $D'$ . El método depende del siguiente teorema:

**Teorema 3.3 (Teorema de la transformación para funciones armónicas).** *Sea  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  una función analítica que transforma un dominio  $D$  en el plano  $z$  sobre un dominio  $D'$  en el plano  $w$ . Si la función  $\Phi(u, v)$  es armónica en  $D'$ , entonces la función  $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$  es armónica en  $D$ .*

*Demostración.* Para demostrar que la función  $\phi(x, y)$  es armónica en  $D$ , tenemos que demostrar que  $\phi(x, y)$  satisface la ecuación de Laplace (3.33) en  $D$ . Comenzamos por encontrar las derivadas parciales de  $\phi(x, y)$  respecto a  $x$ . Ya que

$$\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y)),$$

con la regla de la cadena de la derivación parcial se obtiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Una segunda aplicación de la regla de la cadena junto con la regla del producto da la segunda derivada parcial con respecto a  $x$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\end{aligned}\tag{3.35}$$

De manera similar se encuentra la segunda derivada parcial con respecto a  $y$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.\end{aligned}\tag{3.36}$$

Sumando las ecuaciones (3.35) y (3.36) se obtiene:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} \left( \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \\ &\quad + \frac{\partial \Phi}{\partial u} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &\quad + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u \partial v} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right).\end{aligned}\tag{3.37}$$

Debido a que  $f$  es una función analítica en  $D$ , sabemos por el teorema 1.10, que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann dadas por  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  y  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ .

Además, del teorema 1.15 tenemos que  $u$  y  $v$  son conjugadas armónicas en  $D$  y,

por tanto,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  y  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ . Por tanto, (3.37) se convierte en:



$$\begin{aligned}\nabla^2\phi &= \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2} \left( \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right) \\ &= \nabla^2\Phi \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right)\end{aligned}$$

Usando (1.48), vemos que  $\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = |f'(z)|^2$ , y por tanto esta ecuación para  $\nabla^2\phi$  se simplifica en la siguiente ecuación

$$\nabla^2\phi = \nabla^2\Phi \cdot |f'(z)|^2 \quad (3.38)$$

Puesto que  $\Phi(u, v)$  es armónica en  $D'$ ,  $\nabla^2\Phi = 0$ , (3.38) se convierte en

$$\nabla^2\phi = 0 \cdot |f'(z)|^2 = 0 \quad (3.39)$$

Por último, de (3.39) se concluye que  $\phi(x, y)$  satisface la ecuación de Laplace en  $D$ . Por tanto, la función  $\phi(x, y)$  es armónica en  $D$ .  $\diamond$

**Un método para resolver problemas de Dirichlet utilizando transformaciones conformes.**

El teorema 3.3 se utiliza para resolver problemas de Dirichlet en una región  $D$  transformando el problema a una región  $D'$  en la cual la solución sea conocida. Sea

$D$  un dominio, cuya frontera esta formada por las curvas  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Supongamos que deseamos encontrar una función  $\phi(x, y)$  armónica en  $D$  y que tome los valores  $k_1, k_2, \dots, k_n$  en las curvas frontera  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , respectivamente. Nuestro método para resolver problemas de Dirichlet utilizando transformaciones conformes consiste en los siguientes cuatro pasos.

**Pasos para resolver problemas de Dirichlet utilizando transformaciones conformes**

1. Encontrar una transformación conforme  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  que mapea el dominio  $D$  en el plano  $z$  sobre el dominio simple  $D'$  en el plano  $w$  y que mapea las curvas frontera  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sobre las curvas  $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ .
2. Transformar las condiciones de frontera en  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , a las condiciones de frontera en  $C'_1, C'_2, \dots, C'_n$ .
3. Resolver este nuevo (y más fácil) problema de Dirichlet en  $D'$  para obtener una función armónica  $\Phi(u, v)$ .
4. Sustituir las partes real e imaginaria  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$  de  $f$  para las variables  $u$  y  $v$  en  $\Phi(u, v)$ . Por el teorema 3.3, la función  $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$  es una solución para el problema de Dirichlet en  $D$ .

Se ilustra la idea general de estos pasos en la figura 3.21.

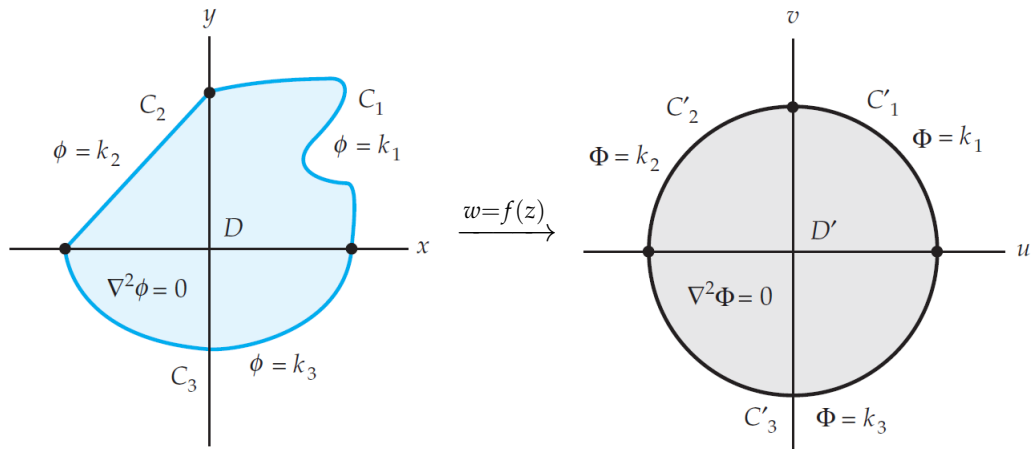


Figura 3.21: Transformación de un problema de Dirichlet

**Ejemplo 3.9 (Uso de mapeos conformes para resolver un problema de Dirichlet).**

Sea  $D$  el dominio en el plano  $z$  delimitado por las rectas  $y = x$  e  $y = x + 2$  que se muestran a color en la figura 3.22. Determine una función  $\phi(x, y)$  que sea armónica en  $D$  y que satisfaga las condiciones de frontera  $\phi(x, x + 2) = -2$  y  $\phi(x, x) = 3$ .

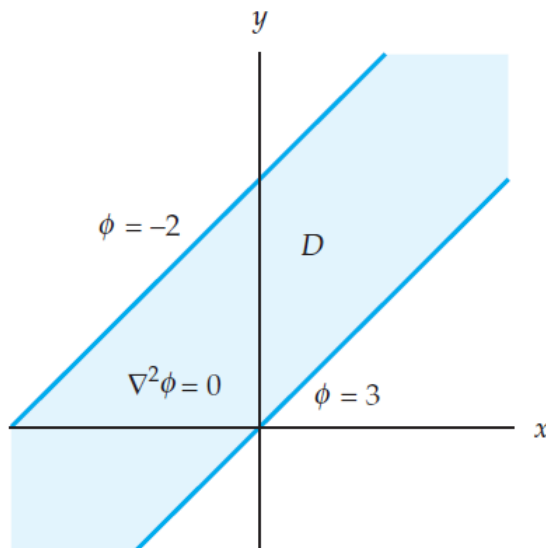


Figura 3.22: Figura del ejemplo 3.9

*Solución.* Este problema se resolverá con los cuatro pasos enunciados anteriormente.

**Paso 1.** El examen del dominio  $D$  en la figura 3.22 sugiere que tomemos  $D'$  como un dominio acotado por las rectas  $u = -1$  y  $u = 1$  en el que se da una solución del problema asociado dado por (3.34).

Nuestro primer paso es encontrar un mapeo conforme de  $D$  sobre  $D'$ . Para hacerlo, primero giramos la región  $D$  a través de  $\pi/4$  radianes en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del origen. Bajo esta rotación, las rectas frontera  $y = x + 2$  e  $y = x$  se mapean sobre las rectas verticales  $u = -\sqrt{2}$  y  $u = 0$ , respectivamente. Si después ampliamos este dominio en un factor de  $\sqrt{2}$ , se obtiene un dominio acotado por las rectas  $u = -2$  y  $u = 0$ . Por último, trasladamos esta imagen por 1 para obtener un dominio acotado por las rectas  $u = 1$  y  $u = -1$ . Recordemos que la rotación de  $\pi/4$  radianes alrededor del origen está dada por el mapeo  $R(z) = e^{i\pi/4}z$ , la ampliación por  $\sqrt{2}$  está dada por  $M(z) = \sqrt{2}z$ , y la traslación por 1 está dada por el mapeo  $T(z) = z + 1$ . Por tanto, el dominio  $D$  se proyectó sobre el dominio  $D'$  por la composición

$$f(z) = T(M(R(z))) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}z + 1 = (1 + i)z + 1.$$

Dado que la función  $f$  es una función afín, es conforme, y así hemos completado el paso 1.

**Paso 2.** Ahora encontramos las condiciones de frontera en  $D$  a las condiciones frontera en  $D'$ . Para esto, debemos encontrar las imágenes bajo  $w = f(z)$  de las rectas  $y = x$  e  $y = x + 2$  de  $D$ . Sustituyendo el símbolo  $z$  con  $x + iy$ , podemos expresar el mapeo  $w = (1 + i)z + 1$  como:

$$w = (1 + i)(x + iy) + 1 = (x - y + 1) + (x + y)i. \quad (3.40)$$

De (3.40) encontramos con que la imagen de la recta frontera  $y = x + 2$  es el conjunto de puntos:

$$w = u + iv = x - (x + 2) + 1 + (x + (x + 2))i = -1 + 2(x + 1)i$$

que es la recta  $u = -1$ . De manera similar, también encontramos que la imagen de la recta frontera  $y = x$  es el conjunto de puntos:

$$w = u + iv = x - (x) + 1 + (x + (x))i = 1 + 2xi$$

que es la recta  $u = 1$ . Por tanto, la condición de frontera  $\phi(x, x + 2) = -2$  se transforma en la condición frontera  $\Phi(-1, v) = -2$ , y la condición de frontera  $\phi(x, x) = 3$  se transforma en la condición de frontera  $\Phi(1, v) = 3$ . Vea la figura 3.23

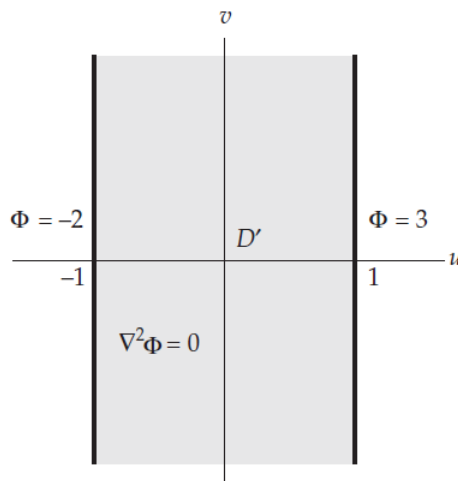


Figura 3.23: El problema de Dirichlet transformando del ejemplo 3.9

**Paso 3.** Una solución del problema de Dirichlet en  $D'$  está dada por (3.34) con  $x$  e  $y$  y sustituidos por  $u$  y  $v$ , y con  $k_0 = -2$  y  $k_1 = 3$ :

$$\Phi(u, v) = \frac{3 - (-2)}{2}u + \frac{-2 + 3}{2} = \frac{5}{2}u + \frac{1}{2}.$$

**Paso 4.** El paso final en nuestra solución es sustituir las partes real e imaginaria de  $f$  en  $\Phi$  para las variables  $u$  y  $v$  para obtener la solución deseada  $\phi$ . De (3.40) vemos que las partes real e imaginaria de  $f$  son:

$$u(x, y) = x - y + 1 \quad \text{y} \quad v(x, y) = x + y,$$

respectivamente, y así la función:

$$\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y)) = \frac{5}{2}(x - y + 1) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}y + 3 \quad (3.41)$$

es una solución del problema de Dirichlet en  $D$ .

Hemos visto que si  $\phi$  es armónica en un dominio  $D$  y si  $\psi$  es armónica conjugada de  $\phi$  en  $D$ , entonces la **función potencial compleja**  $\Omega(z)$  dada por:

$$\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

es una función analítica en  $D$ . Las curvas de nivel de  $\phi$  y  $\psi$  forman una familia ortogonal de curvas, y el significado físico de estas curvas se resume en la tabla 3.1. Por ejemplo, si la función  $\phi$  del ejemplo 3.9 representa el potencial electrostático entre dos placas conductoras infinitamente largas, entonces las curvas de nivel  $\phi(x, y) = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}y + 3 = c_1$  representan las curvas de potencial. Estas curvas equipotenciales, que son rectas con pendiente 1, se muestran a color en la figura 3.24.

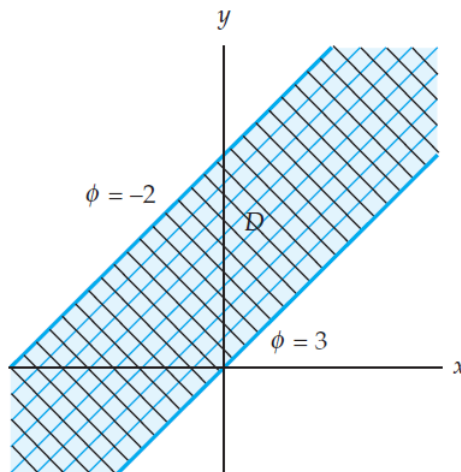


Figura 3.24: Curvas equipotenciales y líneas de fuerza del ejemplo 3.9

Este es un cálculo sencillo para encontrar una función armónica conjugada

$\Psi(u, v) = \frac{5}{2}v$  de  $\Phi(u, v) = \frac{5}{2}u + \frac{1}{2}$  y forma la función de potencial compleja  $\Omega(w) = \frac{5}{2}w + \frac{1}{2}$  del problema de Dirichlet en  $D'$  para el ejemplo 3.9. Por tanto, una función de potencial compleja para el problema de Dirichlet en  $D$  se encuentra sustituyendo el símbolo  $w$  por el mapeo conforme  $w = (1 + i)z + 1$ :

$$\Omega(z) = \frac{5}{2}[(1 + i)z + 1] + \frac{1}{2} = \left(\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i\right)z + 3.$$

Por tanto, una conjugada armónica de  $\phi$  es  $\psi(x, y) = \text{Im}(\Omega(z)) = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}y$ . Si  $\phi$  es el potencial electrostático, entonces las curvas de nivel  $\psi(x, y) = \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}y = c_2$  representan las líneas de fuerza. Esas líneas de fuerza, que son segmentos de recta con pendiente -1, se muestran en negro en la figura 3.24.

El método usado en el ejemplo 3.9 se puede generalizar para resolver un problema de Dirichlet en cualquier dominio  $D$  limitado por dos rectas paralelas. La clave para resolver este problema es encontrar una función afín apropiada que transforme las rectas frontera de  $D$  sobre las rectas frontera del dominio que se muestra en la figura 3.20.

**Ejemplo 3.10 (Una aplicación al flujo de calor).** *Determinar la temperatura de estado estable  $\phi$  en el dominio  $D$  que consiste en todos los puntos fuera de las circunferencias,  $|z| = 1$  y  $|z - \frac{5}{2}| = \frac{1}{2}$ , que se muestran a color en la figura 3.25(a), que satisface las condiciones de frontera dadas*



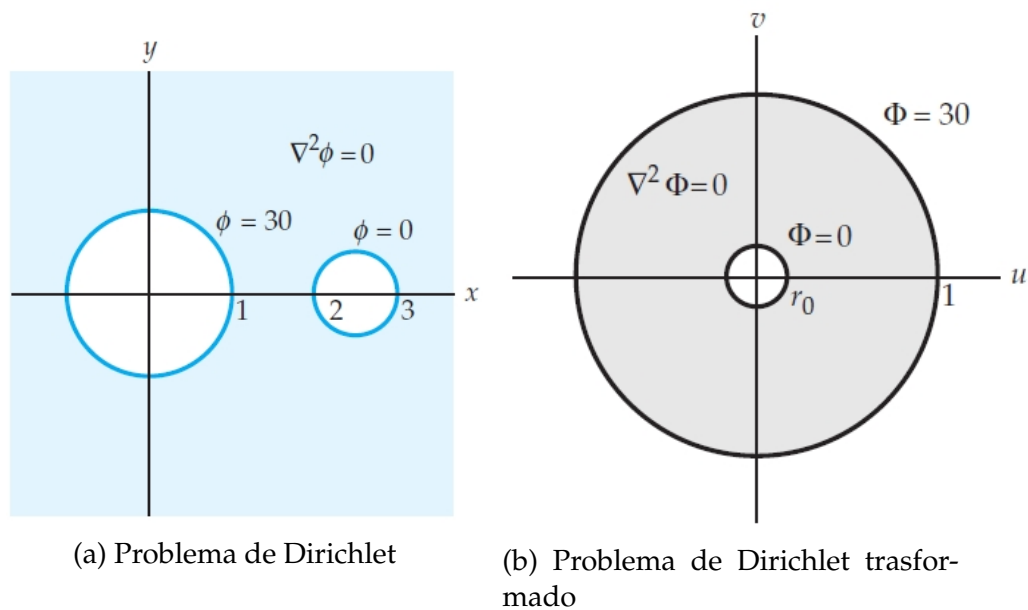


Figura 3.25: Figura del ejemplo 3.10

*Solución.* La temperatura de estado estable  $\phi$  es una solución de la ecuación de Laplace (3.33) en  $D$  que satisface las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= 30 & \text{si } x^2 + y^2 &= 1 \\ \phi(x, y) &= 0 & \text{si } \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Resolveremos este problema utilizando los cuatro pasos para resolver problemas de Dirichlet mediante transformaciones conformes.

**Paso 1.** La entrada C-1 del apéndice A indica que se puede mapear a  $D$  sobre un anillo. Identificando  $b = 2$  y  $c = 3$  en la entrada de C-1, encontraremos que

$$a = \frac{bc + 1 + \sqrt{(b^2 - 1)(c^2 - 1)}}{b + c} = \frac{7 + 2\sqrt{6}}{5}$$

$$r_0 = \frac{bc - 1 - \sqrt{(b^2 - 1)(c^2 - 1)}}{c - b} = 5 - 2\sqrt{6}$$

Así, el dominio  $D$  se mapea sobre el anillo  $5 - 2\sqrt{6} < w < 1$  que se muestra en gris en la figura 3.25(b) por el mapeo analítico  $w = f(z)$ , donde

$$f(z) = \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{(7 + 2\sqrt{6})z - 5} \quad (3.42)$$

**Paso 2.** Examinando la entrada de C-1 del apéndice A se encuentra que la circunferencia frontera  $|z - \frac{5}{2}| = \frac{1}{2}$  se mapea sobre la circunferencia frontera  $|w| = r_0 = 5 - 2\sqrt{6}$ . Por tanto, la condición de frontera  $\phi = 0$  se transforma en la condición frontera  $\Phi = 0$  en la circunferencia  $|w| = 5 - 2\sqrt{6}$ . Del mismo modo, vemos que la condición de frontera  $\phi = 30$  en la circunferencia  $|z| = 1$  se transforma en la condición de frontera  $\Phi = 30$  en la circunferencia  $|w| = 1$ . Ver la figura 3.25(b).

**Paso 3.** La forma del anillo junto con el hecho de que las dos condiciones de frontera son constantes en la figura 3.25(b) sugiere que una solución del problema de Dirichlet transformado está dada por una función  $\Phi(u, v)$  que se define en términos del módulo  $r = \sqrt{u^2 + v^2}$  de  $w = u + iv$ . En el ejemplo 3.8 demostramos que una solución esta dada por

$$\Phi(u, v) = A \ln \left| \sqrt{u^2 + v^2} \right| + B \quad (3.43)$$

donde

$$A = \frac{k_0 - k_1}{\ln|a/b|} \quad \text{y} \quad B = \frac{-k_0 \ln|b| + k_1 \ln|a|}{\ln|a/b|}$$

De acuerdo con las definiciones de  $k_0, k_1, a$  y  $b$ , dadas en el ejemplo 3.8 tenemos  $a = 5 - 2\sqrt{6}, b = 1, k_0 = 0, k_1 = 30$ . Así, se obtiene la solución

$$\Phi(u, v) = \frac{-30 \ln \left| \sqrt{u^2 + v^2} \right|}{\ln \left| 5 - 2\sqrt{6} \right|} + 30 \quad (3.44)$$

del problema de Dirichlet transformado.

**Paso 4.** El paso final es sustituir las partes real e imaginaria de las funciones  $f$  dadas por (3.42) para la variable  $u$  y  $v$  en (3.44). Ya que

$$u(x, y) + iv(x, y) = \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{(7 + 2\sqrt{6})z - 5}$$

tenemos

$$\sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2} = \left| \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{(7 + 2\sqrt{6})z - 5} \right|$$

Por tanto, la temperatura de estado estable está dada por la función

$$\phi(x, y) = \frac{-30}{\ln|5 - 2\sqrt{6}|} \ln \left| \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{(7 + 2\sqrt{6})z - 5} \right|$$

Una función de potencial complejo  $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  para la función armónica  $\phi(x, y)$  encontrada en el ejemplo 3.10 es

$$\Omega(z) = \frac{-30}{\ln|5 - 2\sqrt{6}|} \text{Log} \left( \frac{5z - 7 - 2\sqrt{6}}{(7 + 2\sqrt{6})z - 5} \right)$$

Si se define esta función como  $\Omega[z]$  en *Mathematica*, entonces las partes real e imaginaria  $\phi(x, y)$  y  $\psi(x, y)$  de  $\Omega(z)$  están dadas por  $\text{Re}[\Omega[z]]$  e  $\text{Im}[\Omega[z]]$ , respectivamente. Entonces se puede utilizar el **comando ContourPlot** en *Mathematica* para trazar las curvas de nivel de las partes real e imaginaria de  $\Omega$ . Por ejemplo, el comando

$$\text{ContourPlot}[\text{Re}[\Omega[x + Iy]], \{x, a, b\}, \{y, c, d\}]$$

genera una gráfica de las curvas de nivel  $\phi = c_1$  en la región rectangular  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  del plano. De acuerdo a la tabla 3.1, las curvas de nivel de  $\phi$  y  $\psi$  representan las isotermas y las líneas de flujo de calor, respectivamente. Ambos conjuntos de curvas de nivel se muestran en la figura 3.26. Las isotermas son las curvas que se muestran a color y las líneas de flujo de calor son las curvas que se muestran en negro.

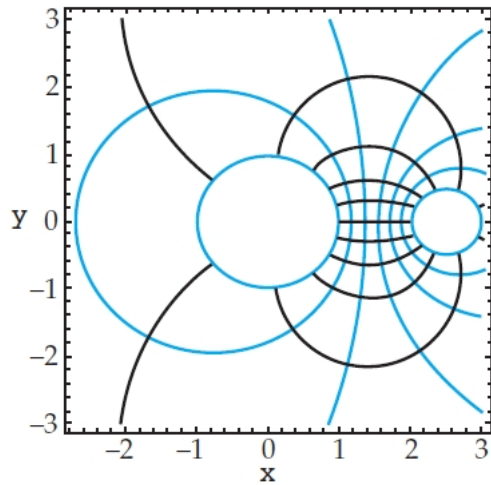


Figura 3.26: Isothermas y líneas de flujo de color para el ejemplo 3.10

**Ejemplo 3.11 (Una aplicación a la electrostática).** *Determinar la temperatura de estado estable  $\phi$  en el dominio  $D$  la circunferencias,  $|z| = 1$  y  $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ , que se muestran en color en la figura 3.27(a), que satisface las condiciones de frontera dadas*

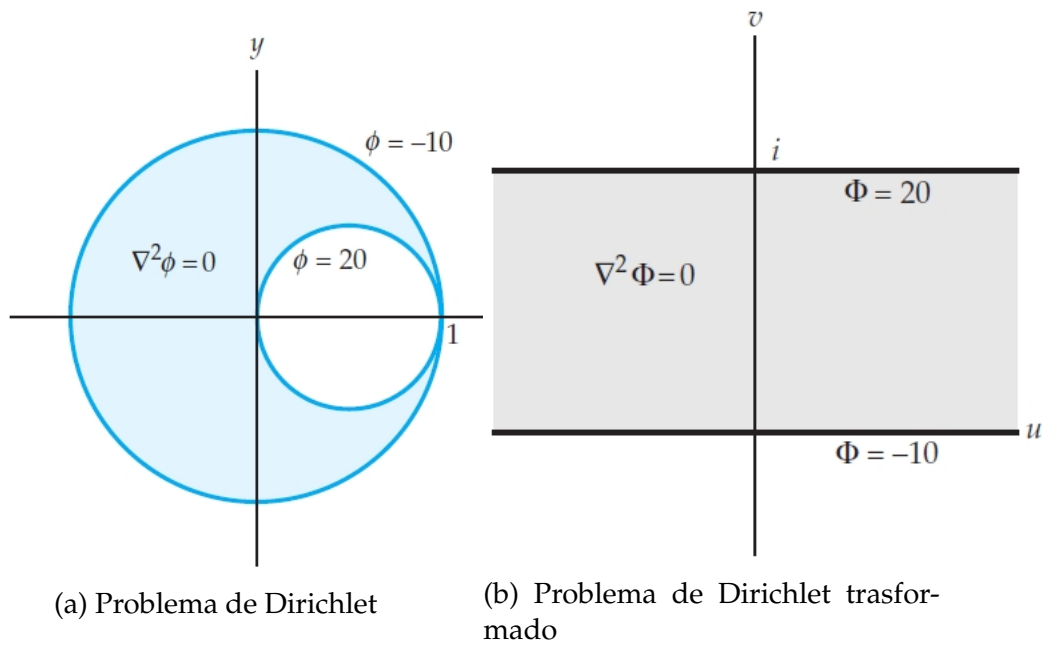


Figura 3.27: Figura del ejemplo 3.10

*Solución.*

El potencial electrostático  $\phi$  es una solución de la ecuación de Laplace (3.33) en  $D$  que satisface las condiciones de frontera

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= -10 \quad \text{si} \quad x^2 + y^2 = 1 \\ \phi(x, y) &= 20 \quad \text{si} \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Resolveremos este problema utilizando los cuatro pasos para resolver problemas de Dirichlet mediante transformaciones conformes

**Paso 1.** El dominio dado  $D$  se puede mapear sobre la franja infinita horizontal  $0 < v < 1$ , que se muestra en gris en la figura 3.27(b), por una transformación fraccional lineal. Una forma de hacerlo es requerir que los puntos  $1, i$  y  $-1$  en la circunferencia  $|z| = 1$  se mapean sobre los puntos  $\infty, 0$  y  $1$ , respectivamente. Por el teorema 2.14 la transformación fraccional lineal deseada  $w = T(z)$  debe satisfacer

$$\frac{z-1}{z+1} \cdot \frac{i+1}{i-1} = \lim_{w_1 \rightarrow \infty} \frac{w-w_1}{w-1} \cdot \frac{0-1}{0-w_1}, \quad \text{o} \quad \frac{z-1}{z+1}(-i) = \frac{-1}{w-1}$$

Después de resolver para  $w = T(z)$ , obtenemos

$$T(z) = (1-i) \frac{z-i}{z-1} \tag{3.45}$$

Por construcción, la circunferencia  $|z| = 1$  se mapea sobre la recta  $v = 0$  y por  $w = T(z)$ . Además, ya que el polo  $z = 1$  de (3.45) se encuentra en la circunferencia  $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ , se deduce que esta circunferencia se mapea sobre una recta. La recta imagen se puede encontrar determinando la imagen de los dos puntos en la circunferencia  $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ . Para los puntos  $z = 0$  y  $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  en la circunferencia  $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$  tenemos que  $T(0) = 1 + i$  y  $T(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i) = -1 + i$ . Por tanto, la imagen de la circunferencia  $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$  debe ser la recta horizontal  $v = 1$ . Usando el punto de prueba  $z = -\frac{1}{2}$ , encontramos que  $T(-\frac{1}{2}) = 1 + \frac{1}{3}i$  y así concluimos que el dominio que se muestra a color entre las circunferencias de la figura 3.27(a) se mapean con  $w = T(z)$  sobre el dominio que se muestra en gris entre las rectas horizontales de la figura 3.27(b).

**Paso 2.** Del paso 1 se tiene que  $w = T(z)$  mapea la circunferencia  $|z| = 1$  sobre la recta horizontal  $y = 0$ , y éste mapea la circunferencia  $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$  sobre la recta horizontal  $y = 1$ . Por tanto, las condiciones de frontera transformadas son  $\Phi = -10$  en la recta  $v = 0$  y  $\Phi = 20$  en la recta  $v = 1$ . Ver la figura 3.27(b).

**Paso 3.** Modelando después del ejemplo 3.6 y el ejemplo 3.7, una solución del problema de Dirichlet transformado está dado por

$$\Phi(u, v) = 30v - 10$$

**Paso 4.** Una solución del problema de Dirichlet original se obtiene sustituyendo las partes real e imaginaria de  $T(z)$  definida en (3.45) para las variables  $u$  y  $v$  en  $\Phi(u, v)$ . Al sustituir el símbolo  $z$  con  $x + iy$  en  $T(z)$  y simplificando se obtiene:

$$\begin{aligned} T(x + iy) &= (1 - i) \frac{x + iy - i}{x + iy - 1} = (1 - i) \frac{x + i(y - 1)}{x - 1 + yi} \cdot \frac{x - 1 - iy}{x - 1 - iy} \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1}{(x - 1)^2 + y^2} + \frac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + y^2} \end{aligned}$$

Por tanto

$$\phi(x, y) = 30 \frac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + y^2} - 10 \quad (3.46)$$

es la función de potencial electrostático deseada.

Una función de potencial compleja de la función armónica  $\phi(x, y)$  dada por (3.46) en el ejemplo 3.11 se puede encontrar de la siguiente manera. Si  $\Omega(z)$  es un potencial complejo para  $\phi$ , entonces,  $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  y  $\Omega(z)$  es analítica en  $D$ . Del paso 4 del ejemplo 3.11 tenemos que la función compleja  $T(z)$  dada por (3.45) tiene las partes real e imaginaria  $u = \frac{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1}{(x - 1)^2 + y^2}$  y  $v = \frac{1 - x^2 - y^2}{(x - 1)^2 + y^2}$ , respectivamente. Es decir,  $T(z) = u + iv$ . También tenemos del paso 4 que  $\phi(x, y) = 30v - 10$ . Para obtener una función con  $30v - 10$  como su parte real, multiplicamos  $T(z)$  por  $-30i$  y después se resta 10



$$-30iT(z) - 10 = -30i(u + iv) - 10 = 30v - 10 - 30ui$$

Ya que  $T(z) = (1 - i)\frac{z-i}{z-1}$  es analítica en  $D$ , se tiene que la función  $-30iT(z) - 10$  también es analítica en  $D$ . Por tanto,

$$\Omega(z) = -30i(1 - i)\frac{z - i}{z - 1} - 10 \quad (3.47)$$

es una función de potencial compleja para  $\phi(x, y)$ . Ya que  $\phi$  representa el potencial electrostático, las curvas de nivel de las partes real e imaginario de  $\Omega$  representan las curvas equipotenciales y las líneas de fuerza, respectivamente. La figura generada en *Mathematica* de la figura 3.28 muestra las curvas equipotenciales a color y las líneas de fuerza en negro.

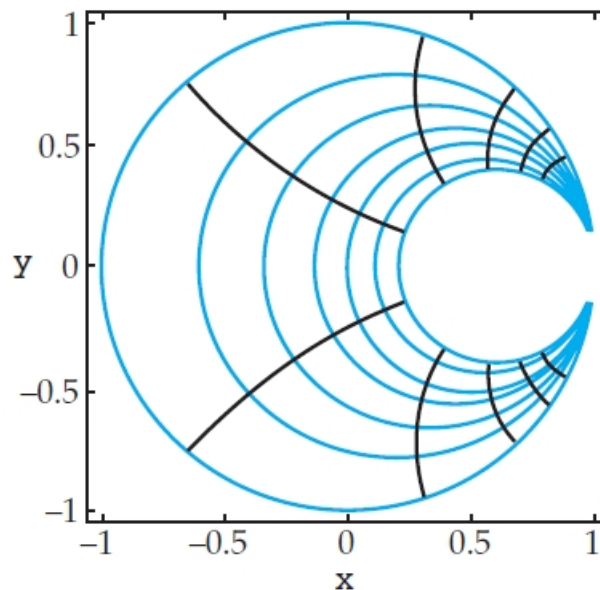


Figura 3.28: Curvas equipotenciales y líneas de fuerza del ejemplo 3.11

### 3.2.3. Problema de Neumann

El teorema 3.1 establece que un mapeo analítico es conforme en un punto donde la derivada es distinta de cero. Este hecho no parece tener una importancia inmediata en los ejemplos anteriores, cuando resolvimos los problemas de Dirichlet, pero es extremadamente importante en otra clase de problemas con valores en la frontera asociados con las ecuaciones de Laplace llamados problemas de Neumann.

**Definición 3.3 (Problema de Neumann).** *Suponga que  $D$  es un dominio en el plano y que  $h$  es una función definida en la frontera  $C$  de  $D$ . El problema de encontrar una función  $\phi(x, y)$  que satisfice la ecuación de Laplace en  $D$  cuya derivada normal  $d\phi/dn$  es igual a  $h$  en la frontera  $C$  de  $D$  se le llama **problema de Neumann**.*

Ciertos tipos de problemas de Neumann se producen naturalmente en el estudio de la electrostática, flujo de fluidos y el flujo de calor. Por ejemplo, consideremos el problema de determinar la temperatura en estado estable  $\phi$  en un dominio  $D$  con frontera  $C$ . Si se especifican las temperaturas en la frontera  $C$  de  $D$ , entonces tenemos un problema de Dirichlet. Sin embargo, también puede ser el caso de que toda o parte de la frontera está **aislado**. Esto significa que no hay flujo de calor a través de ella, y se puede demostrar que esto implica que la derivada direccional de  $\phi$  en la dirección del vector normal  $\mathbf{n}$  a  $C$  es 0. A esta derivada se le llama **derivada normal** y la denotamos por  $d\phi/dn$ . En resumen, una curva frontera aislada en un problema de flujo de calor corresponde a una condición frontera de la for-

ma  $d\phi/dn = 0$ , y por tanto, es un ejemplo de un problema de Neumann. Como lo establece el siguiente teorema, los mapeos conformes conservan las condiciones de frontera de la forma  $d\phi/dn = 0$ .

**Teorema 3.4 (Conservación de las condiciones de frontera).** *Supongamos que la función  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  es conforme en todos los puntos de una curva suave  $C$ . Sea  $C'$  la imagen de  $C$  bajo  $w = f(z)$ . Si la derivada normal  $d\Phi/dn$  de la función  $\Phi(u, v)$  satisface*

$$\frac{d\Phi}{dN} = 0$$

*en cada punto en  $C'$  en el plano  $w$ , entonces la derivada normal  $d\phi/dn$  de la función  $\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y))$  satisface*

$$\frac{d\phi}{dn} = 0$$

*en cada punto de  $C$  en el plano  $z$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $f$  y  $h$  satisfacen las hipótesis del teorema. Sea  $z_0 = x_0 + iy_0$  un punto de  $C$  y sea  $w_0 = u_0 + iv_0 = f(z_0)$  su imagen en  $C'$ . Recordemos del cálculo de varias variables que si  $N$  es un vector normal a  $C'$  en  $w_0$ , entonces la derivada normal en  $w_0$  está dada por el producto escalar

$$\frac{d\Phi}{dN} = \nabla\Phi \cdot N$$

donde  $\nabla\Phi$  es el vector gradiente  $\Phi_u(u_0, v_0)\mathbf{i} + \Phi_v(u_0, v_0)\mathbf{j}$ . La condición  $d\Phi/dN = 0$  implica que  $\nabla\Phi$  y  $\mathbf{N}$  son ortogonales, o, equivalentemente, que  $\nabla\Phi$  es un vector tangente a  $C'$  en  $w_0$ . Sea  $B'$  la curva de nivel  $\Phi(u, v) = c_0$  que contiene a  $(u_0, v_0)$ . Recordemos del cálculo de varias variables que el vector gradiente  $\nabla\Phi$  es ortogonal a la curva de nivel  $B'$ . Por tanto, ya que el gradiente es tangente a  $C'$  y ortogonal a  $B'$ , concluimos que  $C'$  es ortogonal a  $B'$  en  $w_0$ . Vea la figura 3.29

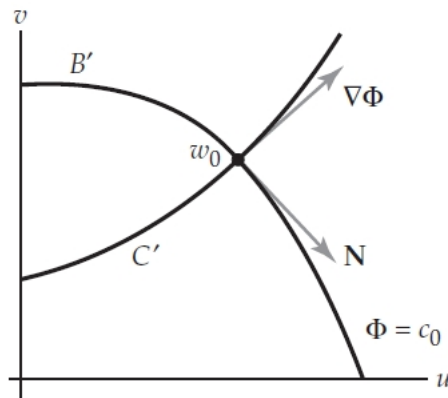


Figura 3.29: Figura para la demostración de teorema 3.4

Consideremos ahora la curva de nivel  $B$  en el plano  $z$  dado por

$$\phi(x, y) = \Phi(u(x, y), v(x, y)) = c_0$$

El punto  $(x_0, y_0)$  está en  $B$  y el vector gradiente  $\nabla\phi$  es ortogonal a  $B$  en este punto. Por otra parte, dado cualquier punto  $(x, y)$  sobre  $B$  en el plano  $z$  tenemos que el punto  $(u(x, y), v(x, y))$  está en  $B'$  en el plano  $w$ . Es decir, la imagen de  $B$  bajo  $w = f(z)$  es  $B'$ . La curva  $C$  intersecta  $B$  en  $z_0$ , y ya que  $f$  es conforme en

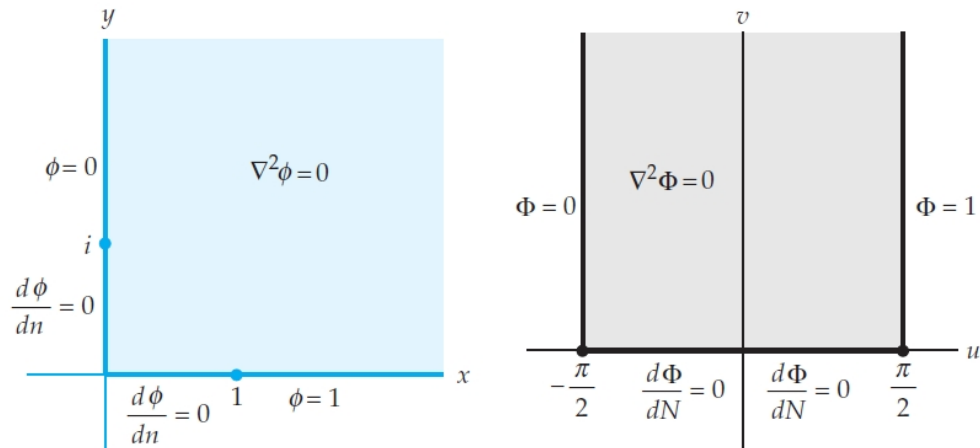
$z_0$ , se deduce que el ángulo entre  $C$  y  $B$  en  $z_0$  es igual al ángulo entre  $C'$  y  $B'$  en  $w_0$ . En el párrafo anterior encontramos que este ángulo es  $\pi/2$ , y así  $C$  y  $B$  son ortogonales en  $z_0$ . Ya que  $\nabla\phi$  es ortogonal a  $B$ , debemos tener que  $\nabla\phi$  es tangente a  $C$ . Si  $\mathbf{n}$  es un vector normal a  $C$  en  $z_0$ , entonces, hemos demostrado que  $\nabla\phi$  y  $\mathbf{n}$  son ortogonales. Por tanto,

$$\frac{d\phi}{dn} = \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = 0$$

◇

El teorema 3.4 nos da un procedimiento para resolver los problemas de Neumann asociados con condiciones de frontera de la forma  $d\phi/dn = 0$ . Es decir, seguimos los mismo cuatro pasos para resolver problemas de Dirichlet utilizando transformaciones conformes. En el paso 1, sin embargo, encontraremos un mapeo conforme de  $D$  sobre  $D'$ . Ya que los mapeos conformes conservan las condiciones de frontera de la forma  $d\phi/dn = 0$ , la solución del problema de Neumann asociado en  $D'$ , nos da una solución del problema original de Neumann. Dado que los mapeos analíticos son conformes en los puntos no críticos, este método también funciona con las condiciones de frontera **mixtas**. Generalmente, estas son las condiciones de frontera donde los valores de  $\phi$  se especifican en algunas curvas frontera, mientras que se requiere que la derivada normal satisfaga que  $d\phi/dn = 0$  en las otras curvas frontera.

**Ejemplo 3.12 (Una aplicación de flujo de calor).** Determinar la temperatura en estado estable  $\phi$  en el primer cuadrante, que se muestran a color en la figura 3.30(a), que satisface las condiciones de frontera mixtas dadas



(a) Problema de valores en la frontera

(b) Problema de valores en la frontera transformado

Figura 3.30: Figura para ejemplo 3.12

*Solución.* La temperatura de estado estable  $\phi$  es una solución de la ecuación de Laplace en el dominio  $D$  definida por  $0 < x < \infty, 0 < y < \infty$  que satisface las condiciones de frontera

$$\phi(0, y) = 0 \quad y > 1$$

$$\phi(x, 0) = 1 \quad x > 1$$

$$\frac{d\phi}{dn} = 0, \quad \text{para } 0 < y < 1, \quad x = 0, \quad y \quad 0 < x < 1, \quad y = 0$$

Determinaremos  $\phi$  utilizando los cuatro pasos para resolver problemas de Dirichlet mediante transformaciones conformes

**Paso 1.** El dominio dado  $D$  se puede mapear sobre la franja vertical semi-infinita  $-a < u < a, v > 0$ , cuando la curva frontera  $-a < u < a, v = 0$  está aislada. Así, en este paso encontraremos un mapeo conforme del primer cuadrante sobre una franja vertical semi-infinita. Identificando  $\alpha = 2$  en la entrada E-4 del apéndice A, vemos que el primer cuadrante se mapea sobre el semiplano superior  $v > 0$  con el mapeo  $w = z^2$ . Después se aplica el mapeo  $w = \arcsen(z)$  de la entrada E-6. Bajo este mapeo, el semiplano superior  $y > 0$  se mapea sobre la franja vertical semi-infinita  $-\frac{1}{2}\pi < u < \frac{1}{2}\pi, v > 0$ . Por tanto, la composición

$$w = \arcsen(z^2) \tag{3.48}$$

mapea el primer cuadrante  $x > 0, y > 0$ , sobre el dominio  $D'$  definido por  $-\frac{1}{2}\pi < u < \frac{1}{2}\pi, v > 0$ .

**Paso 2.** De las entradas E-4 y E-6 del apéndice A, vemos que las curvas frontera  $1 < x < \infty, y = 0$  y  $1 < y < \infty, x = 0$ , se mapean con  $w = \arcsen(z^2)$  sobre las semirectas  $u = \frac{1}{2}\pi, v > 0$  y  $u = -\frac{1}{2}\pi, v > 0$ , respectivamente. También vemos que los segmentos  $0 < x < 1, y = 0$  y  $0 < y < 1, x = 0$ , se mapean sobre los segmentos  $0 < u < \frac{1}{2}\pi, v = 0$  y  $-\frac{1}{2}\pi < u < 0, v = 0$ , respectivamente. Por tanto,

las condiciones de frontera se transforman

$$\begin{aligned}\Phi\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) &= 0, & \Phi\left(\frac{\pi}{2}, v\right) &= 1, & v > 0 \\ \frac{d\Phi}{dN} &= 0, & -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, & & v = 0\end{aligned}$$

**Paso 3.** La forma del dominio  $D'$  y las condiciones de frontera transformadas sugiere que una solución de  $\Phi$  es una función lineal en la variable  $u$ . Es decir,

$$\Phi(u, v) = Au + B$$

para algunas constantes reales  $A$  y  $B$ . Ya que el vector  $\mathbf{N} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j}$  es normal a la curva frontera  $-\frac{1}{2}\pi < u < \frac{1}{2}\pi, v = 0$ , tenemos

$$\frac{d\Phi}{dN} = \nabla\Phi \cdot \mathbf{N} = A(0) + 0(1) = 0$$

y así, para cualquier valor  $A$  y  $B$ ,  $\Phi$  que satisfacen la condición de frontera para la derivada normal. Al requerir que

$$\Phi\left(-\frac{\pi}{2}, v\right) = -A\frac{\pi}{2} + B = 0$$

y

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = A\frac{\pi}{2} + B = 1$$



podemos despejar las constantes  $A$  y  $B$  para obtener la solución

$$\phi(u, v) = \frac{\pi}{2}u + \frac{1}{2} \quad (3.49)$$

**Paso 4.** Con el fin de encontrar una solución del problema original con valores en la frontera, sustituimos las partes real e imaginaria del mapeo en (3.48) para las variables  $u$  y  $v$  en (3.49). Ya que la fórmula para la parte real de la expresión  $\text{arc sen}(z^2)$  es complicada, la forma más sencilla de escribir la solución de  $\phi$  es

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \left[ \text{arc sen}(z^2) \right] + \frac{1}{2}$$

Ya que tanto  $\frac{1}{\pi}$  como  $\frac{1}{2}$  son reales, una función de potencial compleja  $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  para la función de temperatura de estado estable  $\phi$  que se encontró en el ejemplo 3.12 es

$$\Omega(z) = \frac{1}{\pi} \text{arc sen}(z^2) + \frac{1}{2}$$

Las curvas de nivel de las partes real e imaginaria de  $\Omega$  representan las isoterms y las líneas de flujo de calor, respectivamente.

En la figura 3.31, hemos utilizado *Mathematica* para trazar las curvas. Las isoterms se muestran a color y las líneas de flujo de calor se muestran en negro.

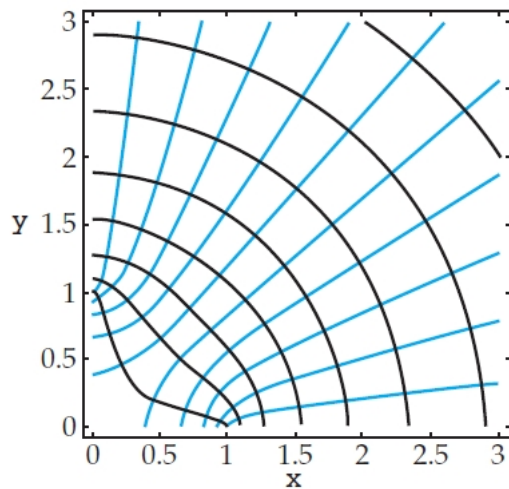


Figura 3.31: Isotermas y líneas de flujo de color para el ejemplo 3.12

### 3.2.4. Flujo de Fluidos

**Líneas de corrientes.** Ahora veremos un método de uso de los mapeos conformes con el modelo del flujo planar de un fluido ideal. Recordemos que un fluido ideal es un fluido incompresible no viscoso cuyo flujo es irrotacional. Si  $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  es el potencial de velocidad compleja de la corriente de un fluido ideal en un dominio  $D$ , entonces  $\Omega(z)$  es analítica en  $D$  y  $f(z) = \overline{\Omega'(z)}$  es una representación compleja del campo de velocidades. Además, las **líneas de corriente** del flujo de un fluido ideal son las curvas de nivel  $\psi(x, y) = c_2$ , y, por esta razón,  $\psi$ , se llama **función de corriente** del flujo.

El proceso de construcción de un flujo de un fluido ideal que se queda dentro de un dominio dado  $D$  se llama **líneas de corriente**. Si  $C$  es una curva frontera de

$D$ , entonces el requisito de que el flujo permanezca en el interior de  $D$  significa que no hay flujo a través de  $C$ , o, equivalentemente, que la derivada direccional de  $\psi$ , en la dirección del vector normal  $\mathbf{n}$  a  $C$  es 0. Ya que el vector gradiente  $\nabla\psi$  es siempre normal a la curva de nivel  $\psi(x, y)$  esta condición es equivalente a que  $\psi$  sea constante en  $C$ . Dicho de otra manera, la frontera de  $D$  debe ser una línea de corriente del flujo. A continuación se resume este análisis.

**Definición 3.4 (Líneas de corriente).** *Supongamos que el potencial de velocidad complejo  $\Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  es analítica en un dominio  $D$  y que  $\psi$  es constante en la frontera de  $D$ . Entonces  $f(z) = \overline{\Omega'(z)}$  es una representación compleja del campo de velocidades de un flujo de un fluido ideal en  $D$ . Además, si una partícula se coloca en  $D$  y se deja fluir con el fluido, entonces su trayectoria  $z(t)$  permanece en  $D$ .*

Muchos problemas de líneas de corriente se pueden resolver usando mapeos conformes de manera similar a la que se presenta en la solución de problemas de Dirichlet y de Neumann. Para ello, consideramos el potencial de velocidad complejo como un mapeo conforme del plano  $z$  al plano  $w$ . Si  $z(t) = x(t) + iy(t)$  es una parametrización de una línea de corriente  $\psi(x, y) = c_2$  en el plano  $z$ , entonces

$$w(t) = \Omega(z(t)) = \phi(x(t), y(t)) + i\psi(x(t), y(t)) = \phi(x(t), y(t)) + ic_2$$

Así, la imagen de una línea de corriente bajo el mapeo conforme  $w = \Omega(z)$  es una recta horizontal en el plano  $w$ . Dado que la frontera  $C$  requiere que sea

una línea de corriente, la imagen de  $C$  bajo  $w = \Omega(z)$  debe ser una horizontal. Es decir, podemos determinar el potencial de velocidad complejo determinando un mapeo conforme de  $D$  sobre un dominio en el plano  $w$  que mapee la frontera  $C$  de  $D$  sobre una recta horizontal. Sin embargo, con frecuencia se presenta el caso, que es más fácil encontrar un mapeo conforme  $z = \Omega^{-1}(w)$  de, digamos, el semiplano superior  $v > 0$  sobre  $D$  que toma la frontera  $v = 0$  sobre la frontera  $C$  de  $D$ . Si  $z = \Omega^{-1}(w)$  es una función uno a uno, entonces su inversa  $w = \Omega(z)$  es el potencial de velocidad complejo deseado. En resumen, tenemos el siguiente método para resolver los problemas de líneas de corriente.

### **Solución de un problema de líneas de corrientes**

Si  $w = \Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  es un mapeo conforme unívoco del dominio  $D$  en el plano  $z$  sobre un dominio  $D'$  en el plano  $w$  tal que la imagen de la frontera  $C$  de  $D$  es una recta horizontal en el plano  $w$ , entonces  $f(z) = \overline{\Omega'(z)}$  es una representación compleja de un flujo de un fluido ideal en  $D$ .

**Ejemplo 3.13 (Flujo alrededor de una esquina).** *Construya un flujo de un fluido ideal en el primer cuadrante*

*Solución.* Sea  $D$  el primer cuadrante  $x > 0, y > 0$ . De la entrada E-4 del apéndice A identificando  $\alpha = 2$ , vemos que  $w = \Omega(z) = z^2$  es un mapeo conforme uno a uno del dominio  $D$  sobre el semiplano superior  $v > 0$  y que la imagen de la frontera de  $D$  bajo este mapeo es el eje real  $v = 0$ . Por tanto,  $f(z) = \overline{\Omega'(z)} = 2\bar{z}$  es

una representación compleja del flujo ideal en el primer cuadrante. Ya que  $\Omega(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ , las líneas de corriente de este flujo son las curvas  $2xy = c_2$ . En la figura 3.32 se han dibujado algunas líneas de corriente. Debe quedar claro de esta figura por que este flujo se conoce como **flujo alrededor de una esquina**.

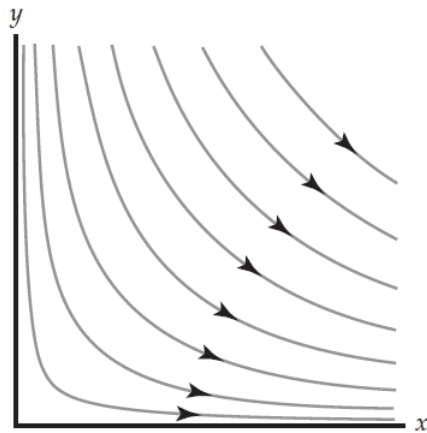


Figura 3.32: Flujo alrededor de una esquina

**Ejemplo 3.14 (Flujo alrededor de un cilindro).** *Construya un flujo de un fluido ideal en el dominio que consiste de todos los puntos fuera de la circunferencia unitaria  $|z| = 1$  y en el semiplano superior  $y > 0$  que se muestra en la figura 3.33*

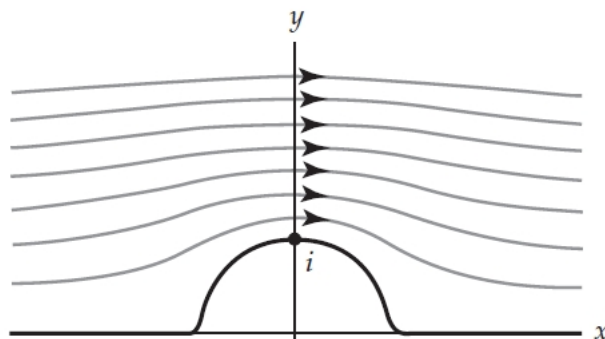


Figura 3.33: Flujo alrededor de un cilindro

*Solución.* Sea  $D$  el dominio que se muestra en la figura 3.33. Identificando  $\alpha = 2$  en la entrada H-3 del apéndice A, se obtiene el mapeo conforme uno a uno

$$w = \Omega(z) = z + \frac{1}{z}$$

de  $D$  sobre el semiplano superior  $v > 0$ . Además, la entrada H-3 indica que la frontera de  $D$  es mapeada sobre el eje real  $v = 0$ . Por tanto,

$$f(z) = \overline{\Omega'(z)} = \overline{1 - \frac{1}{z^2}} = 1 - \frac{1}{\bar{z}}$$

es una representación compleja de un flujo de un fluido ideal en  $D$ . Ya que

$$\Omega(z) = z + \frac{1}{z} = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

las líneas de corriente de este flujo son las curvas

$$\psi(x, y) = c_2 \quad \text{o} \quad y - \frac{y}{x^2 + y^2} = c_2$$

Algunas líneas de corrientes de este flujo se han dibujado en la figura 3.33.

---

# Apéndice A

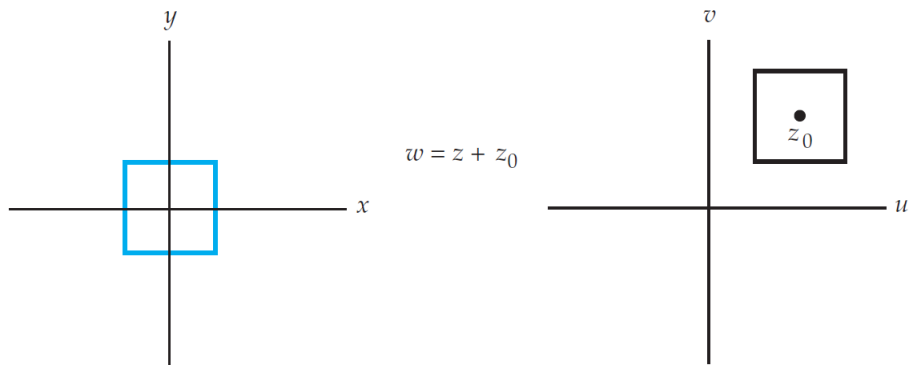
---

## Tabla de Transformaciones

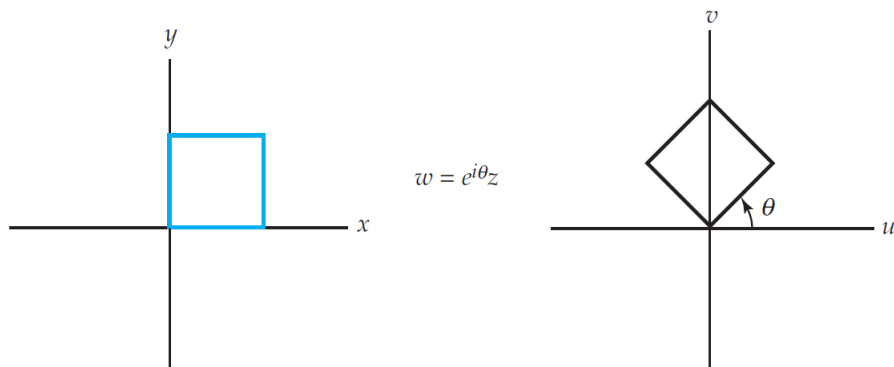
### Conformes

#### ■ Transformaciones Elementales

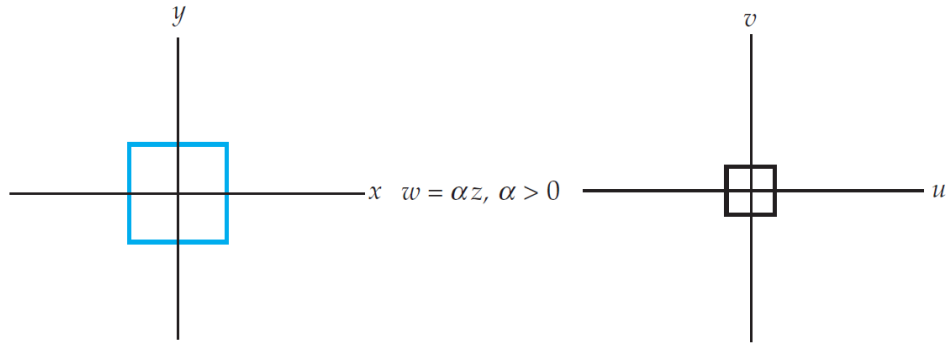
E-1



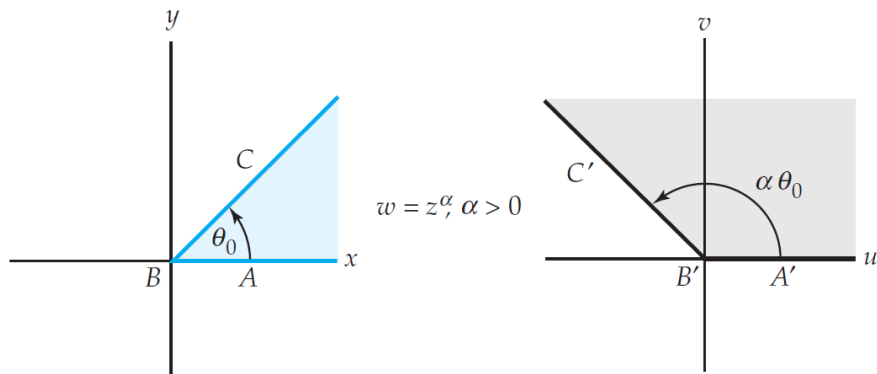
E-2



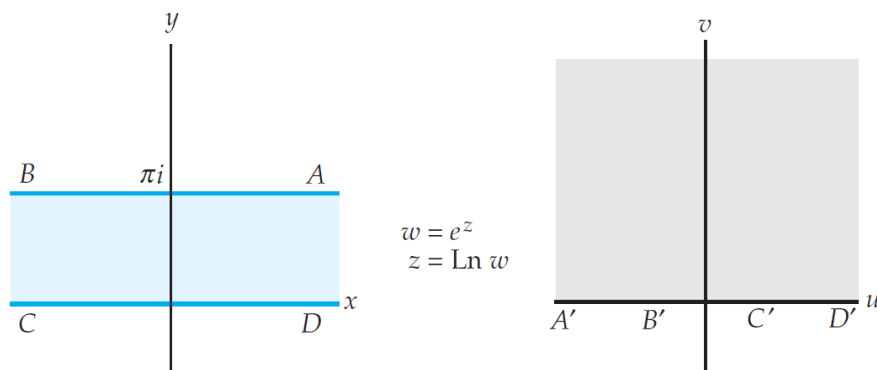
E-3



E-4

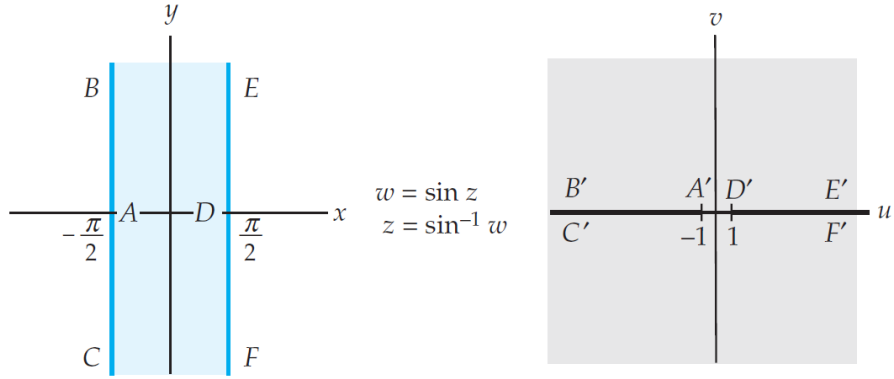


E-5

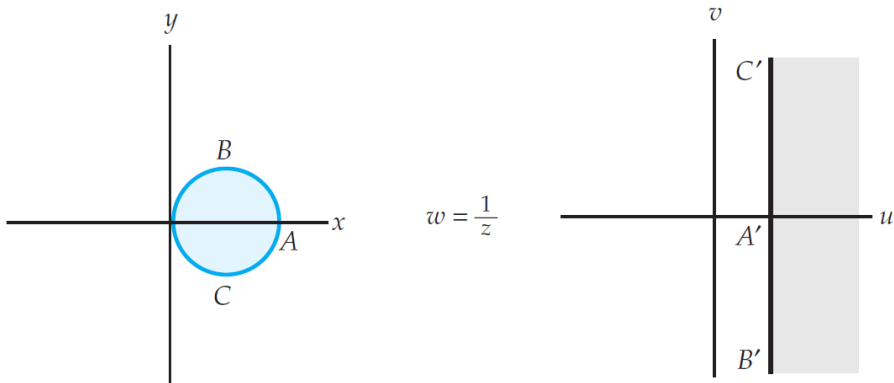




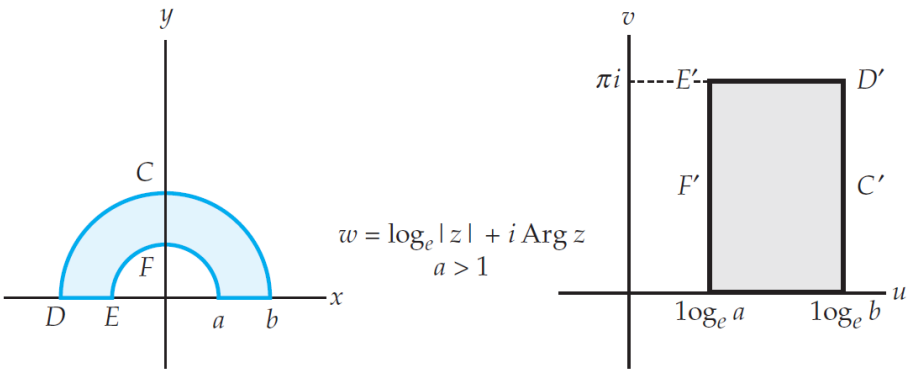
E-6



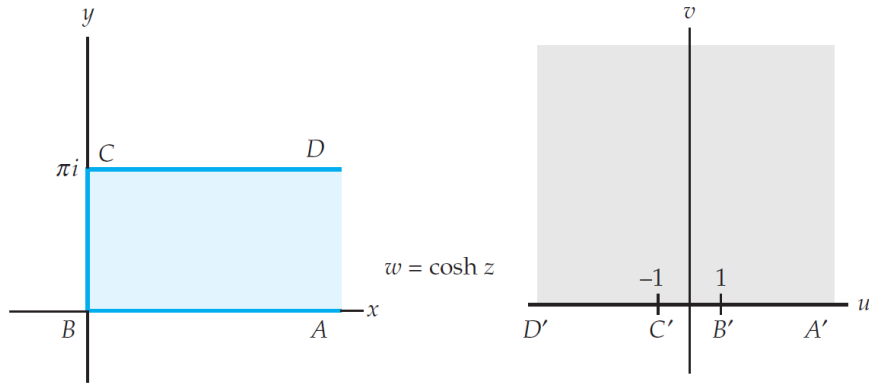
E-7



E-8

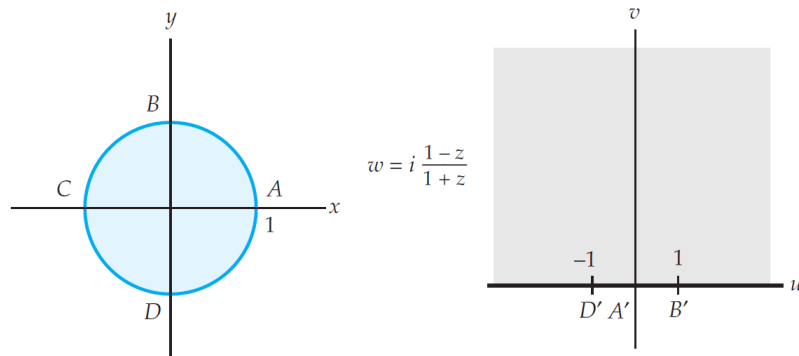


E-9

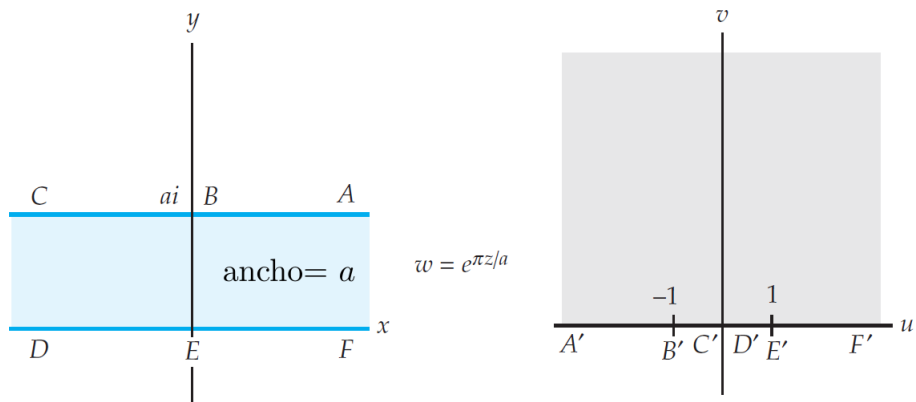


■ Transformaciones sobre Semiplanos

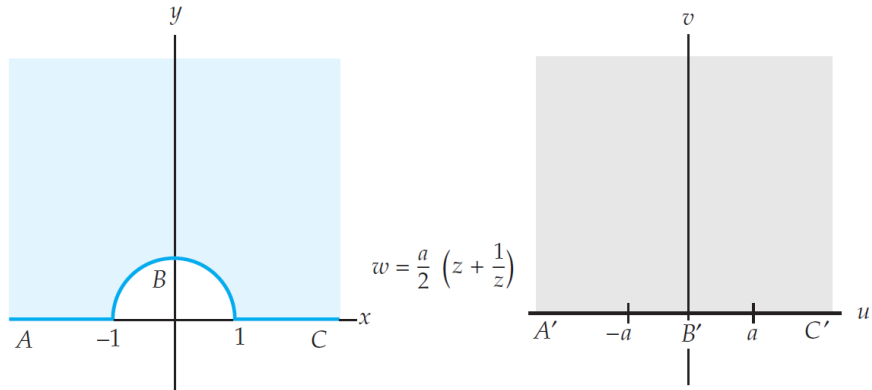
H-1



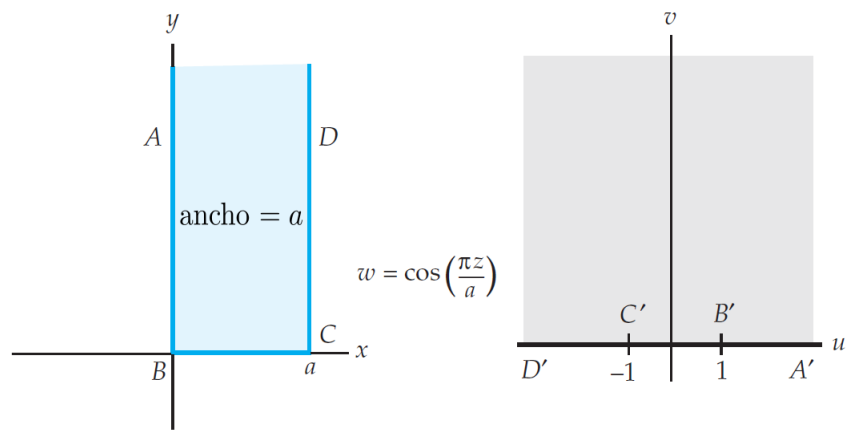
H-2



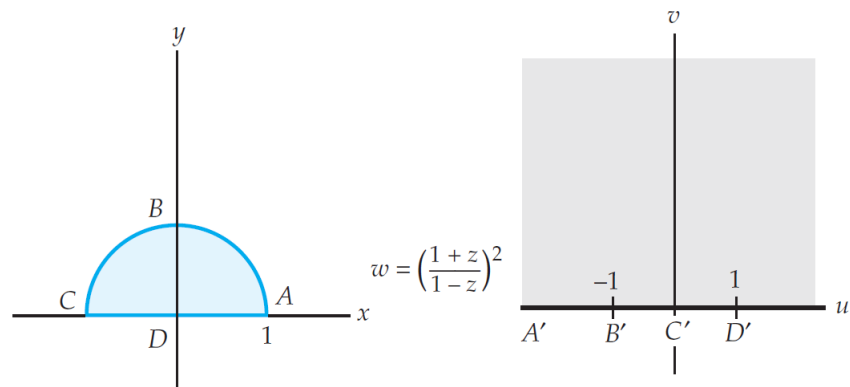
H-3



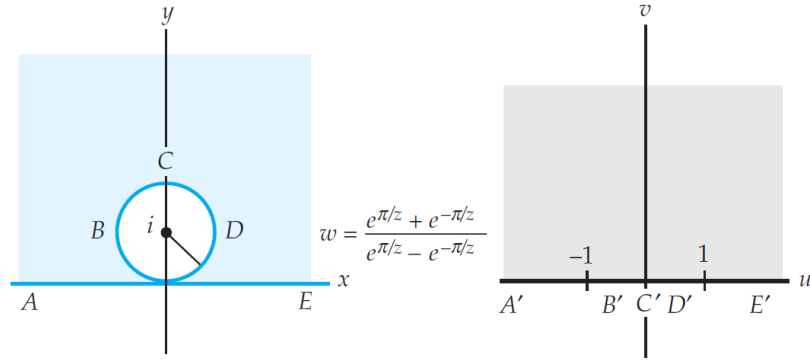
H-4



H-5

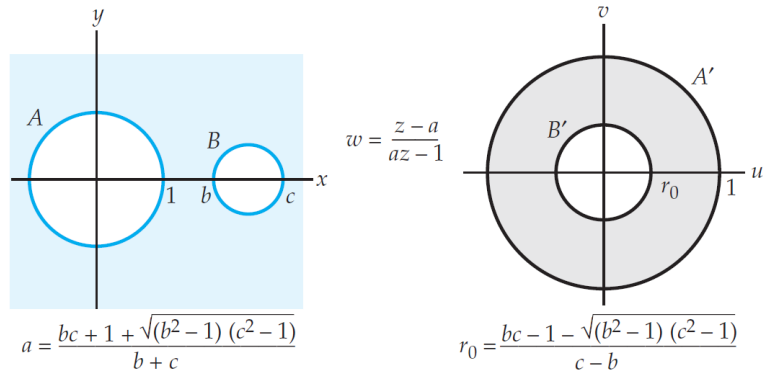


H-6

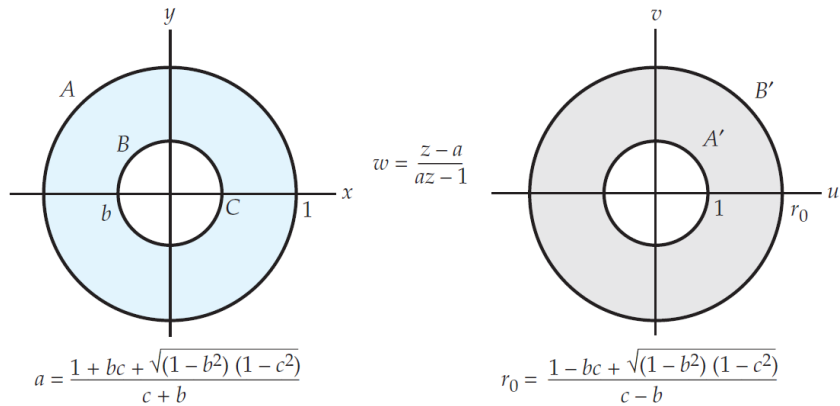


■ Transformaciones sobre Regiones Circulares

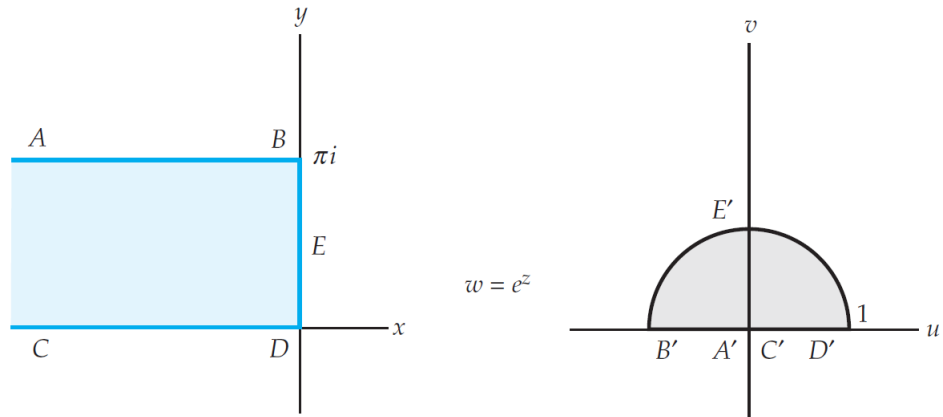
C-1



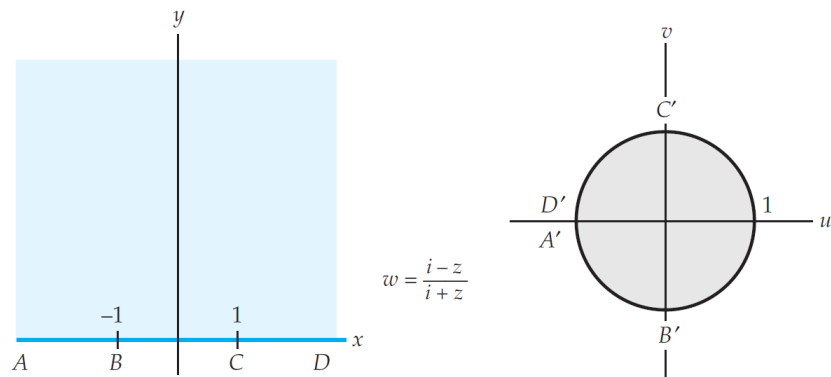
C-2



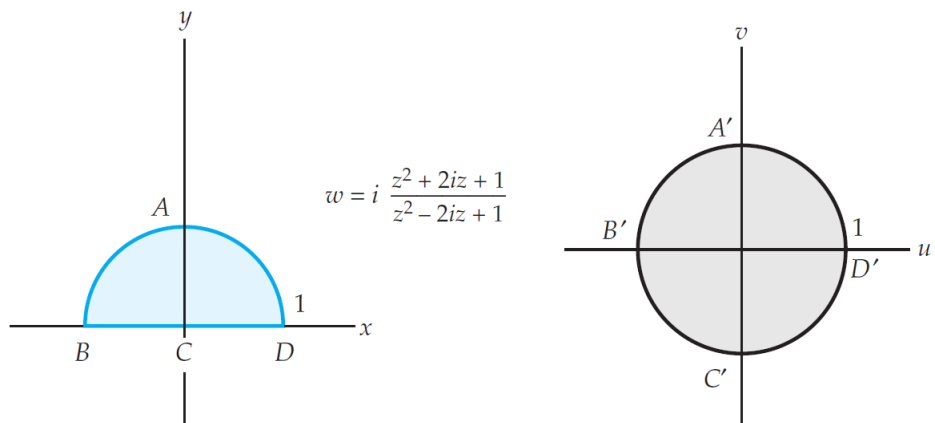
C-3



C-4

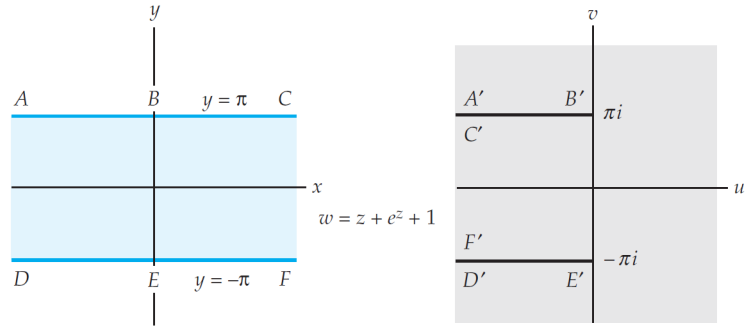


C-5

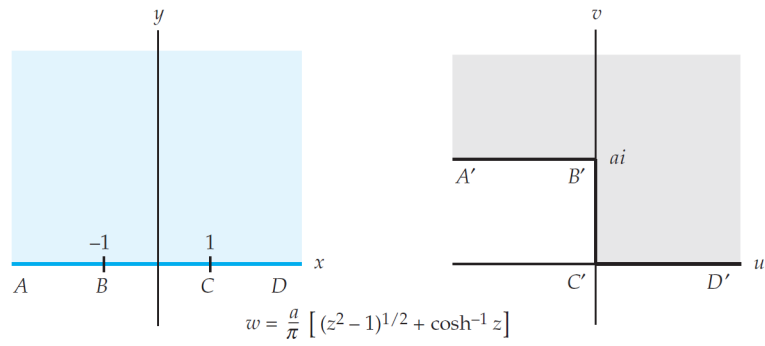


■ Miscelánea de Transformaciones

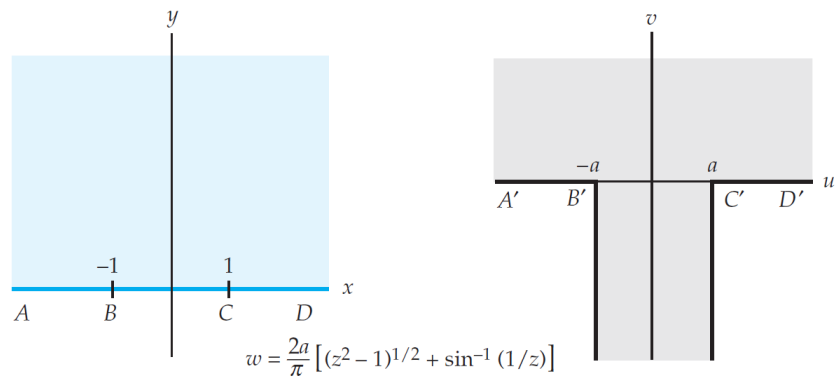
M-1



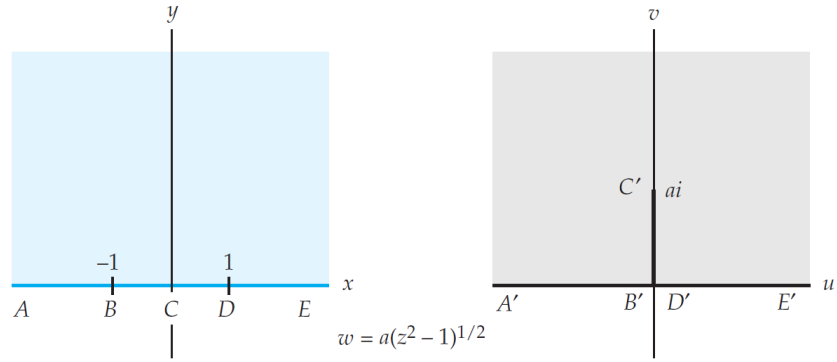
M-2



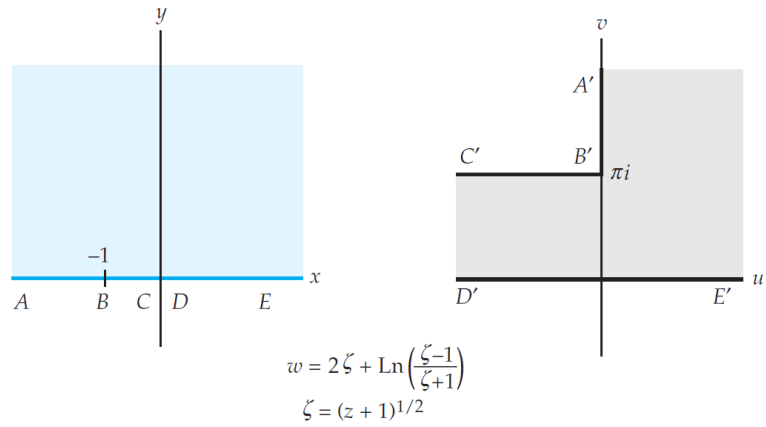
M-3



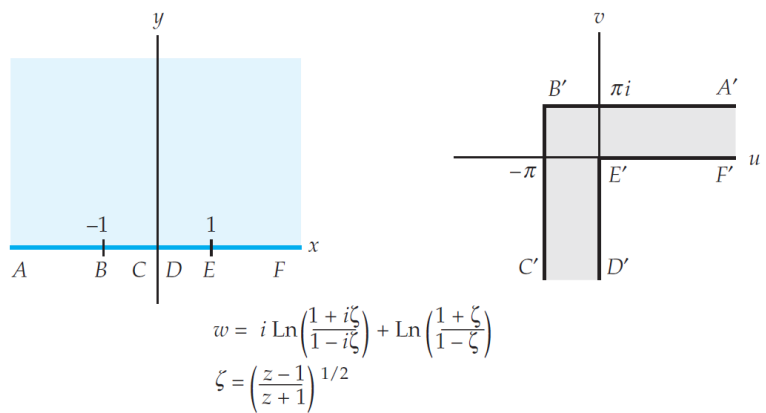
M-4



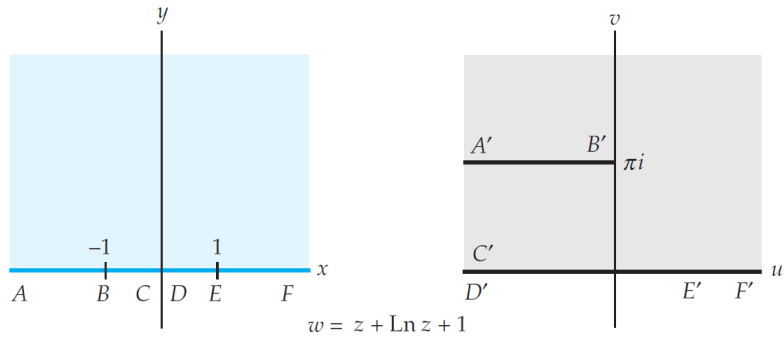
M-5



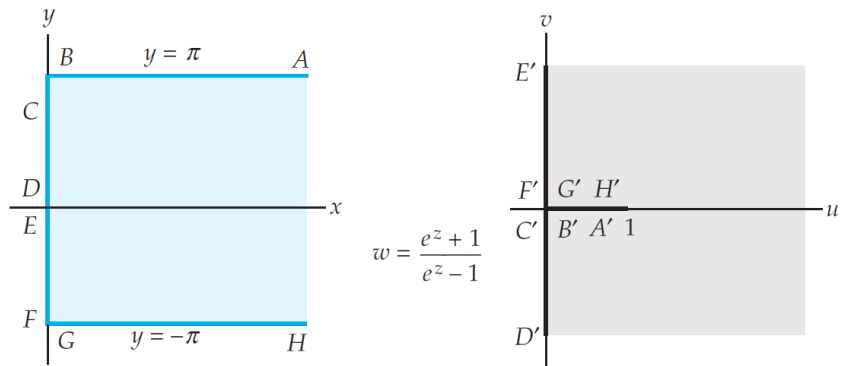
M-6



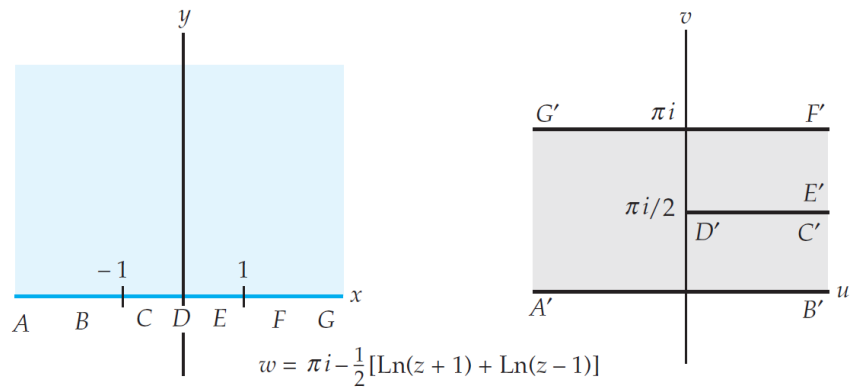
M-7



M-8

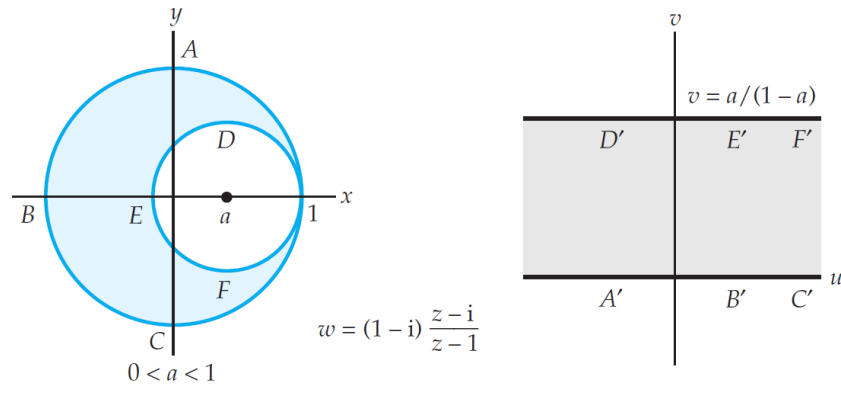


M-9





M-10



# Bibliografía

- [1] J.H. Mathews, R.W. Howell. *Complex Analysis. For Mathematics and Engineering*. 6<sup>a</sup> ed. Jones & Bartleett Learning.
- [2] James Ward Brown, Ruel V. Churchill. *Complex Variables and Aplications*. 8<sup>a</sup> ed. McGraw-Hill.
- [3] D.G Zill, P.D. Shanahan. *A First Course in Complex Analysis with Applications*. 3<sup>a</sup> ed. Jones & Bartleett Learning, 2015.
- [4] Francisco Rivero Mendoza. *Una Introducción a los Números Complejos*. Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes, Mérida - Venezuela.
- [5] W.R. Derrick. *Variable Compleja con Aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamericana, S.A. de C.V.
- [6] Ing. Juan Aguilar Pascual, Dr. Guillermo Monsiváis Galindo. *Apuntes de Variable Compleja*. 1<sup>a</sup> ed. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.

- [7] W.W.L Chen. *Introduction to Complex Analysis*. Imperial College, University of London.
- [8] Jorge Yazlle. *Variable Compleja*. Universidad Nacional de Salta, Facultad de Ciencias Exactas, Departamento de Matemática.