

## СИМВОЛИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

В. И. Маркин · М. М. Никанорова, МГУ им. М. В. Ломоносова

## ИНТЕНСИОНАЛЬНАЯ СЕМАНТИКА СИЛЛОГИСТИКИ ВЕННА

Силлогистика, сформулированная Джоном Венном в его фундаментальном труде [4], строится как экстенциональная логическая теория. Венн выделяет пять базисных форм атрибутивных высказываний по количеству диаграмм Эйлера-Жергонна, причем каждому типу высказываний он ставит в соответствие ровно одну диаграмму, на которой высказывания данного (и только такого) типа принимают значение «истина».

По существу, Венн строит силлогистику в языке с нестандартным набором констант. Первая (будем обозначать её  $aa$ ) репрезентирует отношение равенства объемов субъекта и предиката, вторая ( $ai$ ) – строгого включения объема субъекта в объем предиката, третья ( $ia$ ) – строгого включения объема предиката в объем субъекта, четвертая ( $ii$ ) – частичного совпадения (перекрещивания) объемов терминов, пятая ( $e$ ) – объемной несовместимости терминов.

Попытки реконструкции силлогистики Венна, предпринятые в работах [1] и [2], осуществлялись в языке, элементарными формулами которого являются выражения видов  $SaaP$  («Класс  $S$  совпадает с классом  $P$ »),  $SaiP$  («Класс  $S$  совпадает с частью класса  $P$ »),  $SiaP$  («Часть класса  $S$  совпадает с классом  $P$ »),  $SiiP$  («Часть класса  $S$  совпадает с частью класса  $P$ »),  $SeP$  («Ни один  $S$  не есть  $P$ »), где под частью класса понимается правильный его подкласс, а  $S$  и  $P$  – произвольные общие термины. Сложные формулы образуются с помощью обычных пропозициональных связок.

Было установлено, что формализация силлогистики Венна может быть осуществлена в двух вариантах: «традиционном» (при принятии исходной предпосылки о непустоте всех общих терминов) и «фундаментальном» (при отсутствии указанной предпосылки). «Традиционный» вариант современной реконструкции этой логической теории, предложенный в [1], представляется исчислением **C4V**, схемами аксиом которого наряду с пропозициональными тавтологиями являются:

- |   |  |
|---|--|
| V1. $(MaaP \ \& \ SaaM) \supset SaaP$ , | V11. $SeP \supset PeS$ ,                             |
| V2. $(MaaP \ \& \ SaiM) \supset SaiP$ , | V12. $SaaS$ ,  |
| V3. $(MaiP \ \& \ SaaM) \supset SaiP$ , | V13. $\neg(SaiP \ \& \ SaiP)$ ,                      |
| V4. $(MaiP \ \& \ SaiM) \supset SaiP$ , | V14. $\neg(SaaP \ \& \ SiaP)$ ,                      |
| V5. $(MeP \ \& \ SaaM) \supset SeP$ ,   | V15. $\neg(SaaP \ \& \ SiiP)$ ,                      |
| V6. $(MeP \ \& \ SaiM) \supset SeP$ ,   | V16. $\neg(SaiP \ \& \ SiaP)$ ,                      |
| V7. $SaaP \supset PaaS$ ,               | V17. $\neg(SaiP \ \& \ SiiP)$ ,                      |
| V8. $SaiP \supset PiaS$ ,               | V18. $\neg(SaaP \ \& \ SeP)$ ,                       |
| V9. $SiaP \supset PaiS$ ,               | V19. $\neg(SiiP \ \& \ SeP)$ ,                       |
| V10. $SiiP \supset PiiS$ ,              | V20. $SaaP \vee SaiP \vee SiaP \vee SiiP \vee SeP$ . |

Единственное правило вывода в **C4V** – *modus ponens*. Данное исчисление рекурсивно эквивалентно известной силлогистике Лукасевича.

«Фундаментальная» версия силлогистики Венна предложена в [2]: исчисление **CФV** получается из **C4V** заменой V18 на две схемы аксиом:

- |                          |                                       |
|--------------------------|---------------------------------------|
| V21. $SeS \supset SeP$ , | V22. $SeS \supset (SaaP \vee SaiP)$ . |
|--------------------------|---------------------------------------|

Исчисление **CФV** рекурсивно эквивалентно системе позитивной фундаментальной силлогистики **CФ**, строящейся в языке со стандартными силлогистическими константами. Постулатами силлогистики **CФ** являются классические тавтологии, правило *modus ponens* и аксиомы следующих типов:

- |                                      |                         |
|--------------------------------------|-------------------------|
| Ф1. $(MaP \ \& \ SaM) \supset SaP$ , | Ф5. $SiP \supset SiS$ , |
|--------------------------------------|-------------------------|

$$\begin{array}{ll} \Phi 2. (MeP \& SaM) \supset SeP, & \Phi 6. SoP \supset SiS, \\ \Phi 3. SeP \supset PeS, & \Phi 7. SeP \equiv \neg SiP, \\ \Phi 4. SaS, & \Phi 8. SoP \equiv \neg SaP. \end{array}$$

**СФV** погружается в **СФ** посредством следующего перевода  $v_1$ :

$$\begin{array}{ll} v_1(SaaP) = SaP \& PaS, & v_1(SiiP) = SiP \& SoP \& PoS, \\ v_1(SaiP) = SaP \& PoS, & v_1(SeP) = SeP, \\ v_1(SiaP) = SoP \& PaS, & v_1(\neg A) = \neg v_1(A), \\ v_1(A \nabla B) = v_1(A) \nabla v_1(B), & \text{где } \nabla \text{ – бинарная пропозициональная связка.} \end{array}$$

**СФ** погружается в **СФV** посредством следующего перевода  $v_2$ :

$$\begin{array}{ll} v_2(SaP) = SaaP \vee SaiP, & v_2(SeP) = SeP, \\ v_2(SiP) = \neg SeP, & v_2(SoP) = \neg SaaP \& \neg SaiP, \\ v_2(\neg A) = \neg v_2(A), & v_2(A \nabla B) = v_2(A) \nabla v_2(B). \end{array}$$

Для силлогистики **СФ** может быть построена интенциональная семантика. Один из ее вариантов предложен В.И. Шалаком [3]. Общим терминам в качестве значений посредством интерпретирующей функции  $\delta$  сопоставляются формулы пропозиционального языка (их можно трактовать как фиксирующие содержания понятий), а условия значимости силлогистических формул определяются через отношение следования между значениями субъекта и предиката:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{V}(SaP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \models \delta(P), & \mathbf{V}(SeP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \models \neg \delta(P), \\ \mathbf{V}(SiP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \not\models \neg \delta(P), & \mathbf{V}(SoP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \not\models \delta(P). \end{array}$$

Исходя из факта рекурсивной эквивалентности систем **СФ** и **СФV** можно утверждать, что адекватная интенциональная семантика существует и для **СФV**. Условия значимости элементарных формул силлогистики Венна таковы:

$$\begin{array}{l} \mathbf{V}(SaaP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \models \delta(P) \text{ и } \delta(P) \models \delta(S), \\ \mathbf{V}(SaiP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \models \delta(P) \text{ и } \delta(P) \not\models \delta(S), \\ \mathbf{V}(SiaP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \not\models \delta(P) \text{ и } \delta(P) \models \delta(S), \\ \mathbf{V}(SiiP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \not\models \neg \delta(P) \text{ и } \delta(S) \not\models \delta(P) \text{ и } \delta(P) \not\models \delta(S), \\ \mathbf{V}(SeP, \delta), \text{ е.т.е. } \delta(S) \models \neg \delta(P). \end{array}$$

Далее, можно сделать еще один шаг в интенционализации семантики для силлогистики Венна: вместо классического следования использовать релевантное (следование известной системы **FDE**). Класс общезначимых формул при этом сузится. А адекватное подобной «релевантизированной» семантике исчисление **ИСФV** получается из **СФV** отбрасыванием схем аксиом V21 и V22. Интересно, что все три формализации силлогистики Венна – **С4V**, **СФV** и **ИСФV** – в качестве своих теорем содержат одинаковый набор модусов силлогизма и правил обращения.

## Литература

- [1] Дубаков Д.В., Маркин В.И. Система силлогистики с исходными константами, соответствующими круговым диаграммам. *Труды научно-исследовательского семинара Логического центра ИФ РАН*. Вып. XVIII, 2007, с. 63-75.
- [2] Маркин В.И. Формальные реконструкции силлогистики Венна. *Вестник Московского университета. Серия 7: Философия*. № 1, 2011, с. 63-73.
- [3] Шалак В.И. Синтаксическая интерпретация категорических атрибутивных высказываний. *Логические исследования*. №21(1), 2015, с. 60-78.
- [4] Venn J. *Symbolic Logic*. London: Macmillan and Co., 1881.