Л. Ю. Девяткин, ИФ РАН

О КВАЗИМАТРИЧНЫХ СЕМАНТИКАХ

В исследованиях по многозначным логикам важную роль играет метод логических матриц. В литературе известно несколько модификаций и обобщений матричного подхода: разветвленные (*ramified*) матрицы [6, Ch. 3], q-матрицы [4], матрицы с обобщенными значениями истинности [5], а также матрицы, построенные на базе мультиалгебр, которые называют квазиматрицами [3] или недетерминистическими матрицами [1]. Для матричных семантик получено множество полезных результатов. Предметом этого доклада является обобщение некоторых из них для квазиматриц.

Пропозициональный язык $\mathcal{L} = \langle L, F \rangle$ определяем как абсолютно свободную алгебру, свободные порождающие $\mathcal{L}$ образуют счетное множество $Var = \{p_1, p_2, \dots\}$. Называем *отношением следования* рефлексивное, монотонное и транзитивное отношение C на $\mathcal{L}$. Если C — структурное отношение следования на $\mathcal{L}$, называем систему $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, C \rangle$ *пропозициональной логикой.*

Называем *логической матрицей* систему $M = \langle \mathcal{A}, D \rangle$, где $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ — алгебра, и $D \subseteq A$. Называем M *матрицей для* $\mathcal{L}$, если и только если $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$ подобны. Тогда гомоморфизм h из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{A}$ называем *оценкой* формулы языка $\mathcal{L}$ в матрице M. *Матричное следование* на $\mathcal{L}$, порождаемое M, определяем как множество $Cn(M) = \{\langle X, \alpha \rangle | \forall h(h(X) \subseteq D \Longrightarrow h(\alpha) \in D)\}$. Пусть $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, C \rangle$ — пропозициональная логика, а M — матрица для $\mathcal{L}$. Определяем $Matr(C)$ следующим образом: $M \in Matr(C) \Longleftrightarrow C \subseteq Cn(M)$.

Называем *мультиоперацией* отображение вида $A^n \longrightarrow \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$; *мультиалгеброй* — систему $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$, где A — непустое множество, а F — семейство мультиопераций на A; *квазиматрицей* – систему $M = \langle \mathcal{A}, D \rangle$, где $\mathcal{A}$ — мультиалгебра, а D — подмножество множества-носителя $\mathcal{A}$. Если мультиалгебра $\mathcal{A}$ и пропозициональный язык $\mathcal{L}$ подобны, называем оценкой формулы языка $\mathcal{L}$ в квазиматрице M отображение $h : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{A}$, такое что $h(f_L(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \in f_A(h(\alpha_1), \dots, h(\alpha_n))$. *Квазиматричное следование* на $\mathcal{L}$, порождаемое M, определяем как множество $Cn^*(M) = \{\langle X, \alpha \rangle | \forall h(h(X) \subseteq D \Longrightarrow h(\alpha) \in D)\}$. Пусть $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, C \rangle$ — пропозициональная логика, а M — квазиматрица для $\mathcal{L}$. Определяем $NMatr(C)$ следующим образом: $M \in NMatr(C) \Longleftrightarrow C \subseteq Cn^*(M)$.

Если область значений операций в квазиматрице ограничена одноэлементными подмножествами носителя, она есть матрица. Поэтому $Matr(C) \subseteq NMatr(C)$.

Пусть $M = \langle A, F, D \rangle$ — квазиматрица. Называем $M' = \langle A', F', D' \rangle$ *подсистемой* M, если и только если $A' \subseteq A$, семейство операций F' получено из F сужением области определения каждого элемента до A', и множество A' замкнуто относительно F'.

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ — мультиалгебра, и $\theta \subseteq A \times A$. Будем называть θ *мультиконгруэнцией* тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия: θ есть отношение эквивалентности; если f — n-местная мультиоперация и даны $\vec{a}, \vec{b} \in A^n$, где $\langle a_i, b_i \rangle \in \theta$ для всех $1 \leq i \leq n$, то для каждого $a \in f(\vec{a})$ найдется $b \in f(\vec{b})$, такое что $\langle a, b \rangle \in \theta$. Если $M = \{\mathcal{A}, D\}$ — квазиматрица, θ — мультиконгруэнция на $\mathcal{A}$, и $\langle a, b \rangle \in \theta$, $a \in D$ влечет $b \in D$, будем называть мультигонгруэнцию θ *квазиматричной*. Пусть θ — квазиматричная мультиконгруэнция на $M = \{\mathcal{A}, D\}$. Называем *фактор квазиматрицей* по θ систему $M/\theta = \{\mathcal{A}/\theta, D/\theta\}$, где для любых f и $\{a_1/\theta, \dots, a_n/\theta\} \in (A/\theta)^n$ выполняется: $f_{A/\theta}(a_1/\theta, \dots, a_n/\theta) = \{a/\theta | a \in f_A(\vec{a})\}$.

Пусть $\{M_i\}$, $i \in I$ — семейство попарно подобных квазиматриц. Обозначим элементы декартова произведения их множеств-носителей $\prod_I A_i$ как $\vec{a}_1, \dots \vec{a}_n$. Обозначим как $\pi_i(\vec{a})$ каноническую проекцию $A \longrightarrow A_i$ для каждого $i \in I$. Называем (прямым) *произведением* квазиматриц из $\{M_i\}$ систему $M = \langle A, F, D\rangle$, где $A = \prod_I A_i$, $D = \prod_I D_i$, и для каждой мультиоперации $f_A \in F$ верно, что $f_A(\vec{a}_1, \dots \vec{a}_k) = \prod_I f_{A_i}(\pi_i(\vec{a}_1), \dots \pi_i(\vec{a}_k))$. Пусть S — множество. Называем *фильтром* на S набор F его подмножеств, удовлетворяющий следующим условиям: $S \in F$; если $A \in F$ и $A \subseteq B \subseteq S$, то $B \in F$; если $A \in F$ и $B \in F$, то $A \cap B \in F$. Пусть $M = \langle \mathcal{A}, D\rangle$ — произведение квазиматриц $\{M_i\}$, $i \in I$, и ∇ фильтр на I. Определим мультиконгруэнцию $\equiv_\nabla$ на $\mathcal{A}$: $\vec{a} \equiv_\nabla \vec{b} \Longleftrightarrow \{i \in I | \pi_i(\vec{a}) = \pi_i(\vec{b})\} \in \nabla$. Фактор квазиматрицу M/∇ в этом случае называем *фильтрованным по* ∇ произведением $\{M_i\}$.

Пусть $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ и $\mathcal{A}' = \langle A', F'\rangle$ — две подобные мультиалгебры. Отображение h: $A \longrightarrow A'$ называем *гомоморфизмом*, если и только если для всех f имеет место $h(f(a_1, \dots, a_n)) \subseteq f'(h(a_1), \dots, h(a_n))$. Если $M = \langle \mathcal{A}, D\rangle$ и $M' = \langle \mathcal{A}', D'\rangle$ — квазиматрицы, h — гомоморфизм из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}'$, и верно, что $h(f(a_1, \dots, a_n)) \subseteq D \Longleftrightarrow f'(h(a_1), \dots, h(a_n)) \subseteq D'$, называем h *квазиматричным* гомоморфизмом. Пусть M и M' — квазиматрицы. Называем M *квазиматрично гомоморфным прообразом* M', если и только если существует квазиматричный гомоморфизм из M на M'.

Пусть $\mathbb{K} = \{M_i\}$, $i \in I$ — класс квазиматриц для языка $\mathcal{L}$. Пусть $Cn^*(\mathbb{K}) = \bigcap_I Cn(M_i)$. Обозначим как $P_R(\mathbb{K})$ класс всех изоморфных копий фильтрованных произведений непустых подмножеств $\mathbb{K}$; $S(\mathbb{K})$ — класс всех изоморфных копий всех подсистем квазиматриц из $\mathbb{K}$; $H_s(\mathbb{K})$ — класс всех гомоморфных копий квазиматриц из $\mathbb{K}$ относительно квазиматричных гомоморфизмов; $H_s^{-1}(\mathbb{K})$ — класс всех квазиматрично гомоморфных прообразов квазиматриц из $\mathbb{K}$. Следующий факт доказан Я. Челяковским [2]: пусть каждая квазиматрица в $\mathbb{K}$ есть матрица, и $Cn(\mathbb{K})$ — финитарное отношение следования, тогда $Matr(Cn(\mathbb{K})) = H_s^{-1}H_sSP_R(\mathbb{K})$.

Возникает закономерный вопрос: верно ли, что $NMatr(Cn^*(\mathbb{K})) = H_s^{-1}H_sSP_R(\mathbb{K})$ для произвольного класса квазиматриц $\mathbb{K}$? Ответу на этот вопрос и разбору сопутствующих проблем посвящен наш доклад.

Литература

[1] Avron A., Zamansky A. Non-deterministic semantics for logical systems. *Handbook of Philosophical Logic* 16. Ed. by D.M. Gabbay and F. Guenthner. Dordrecht: Springer, 2011, pp. 227–304.

[2] Czelakowski J. A characterization of $Matr(C)$. *Bulletin of the Section of Logic* 8(2), 1979, pp. 83–85.

[3] Ivlev Yu.V. Generalization of Kalmar's method for quasi-matrix logic. *Logical Investigations* 19, 2013, pp. 281–307.

[4] Malinowski G. Towards the notion of logical many-valuedness. *Acta Universitatis Lodziensis, Folia Philosophica* 7, 1990, pp. 97–103.

[5] Shramko Y., Wansing H. *Truth and Falsehood: An Inquiry into Generalized logical Values*. Springer Science & Business Media, 2011.

[6] Wójcicki R. *Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations*. Dordrecht: Kluwer, 1988.