Math. Ann. 269, 431–467 (1984)

Mathematische Annalen

Über das Synthese-Problem für nilpotente Liesche Gruppen

Detlev Poguntke

Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, Universitätsstraße, D-4800 Bielefeld, Bundesrepublik Deutschland

In der Theorie der kommutativen Banachschen Algebren versteht man unter einer Synthese-Menge (oder auch einer Wienerschen Menge) eine Teilmenge $\mathscr{X}$ des Strukturraumes einer Banachschen Algebra $\mathscr{A}$ mit der Eigenschaft, daß es zu $\mathscr{X}$ nur ein abgeschlossenes (zweiseitiges) Ideal I in $\mathscr{A}$, nämlich den Kern $k(\mathscr{X})$, gibt, dessen Hülle gerade $\mathscr{X}$ ist. Insbesondere für L^1-Faltungsalgebren lokalkompakter abelscher Gruppen ist die Frage ausgiebig, wenn auch keineswegs erschöpfend, untersucht worden, wleche Teilmengen Synthese-Mengen ist. Allgemeiner kann man versuchen, zu gegebenem $\mathscr{X}$ sämtliche abgeschlossenen zweiseitigen Ideale I mit Hülle $\mathscr{X}$ zu bestimmen. In dieser Allgemeinheit erscheint eine befriedigende Antwort einigermaßen aussichtslos. Doch für manche Zwecke ist es sehr hilfreich, wenigstens das folgende qualitative Resultat zur Verfügung zu haben: Es gibt eine nur von $\mathscr{X}$ abhängige natürliche Zahl m mit $(k(\mathscr{X})/I)^m=0$ für jedes I mit Hülle $\mathscr{X}$. Im Falle $\mathscr{A}=L^1(\mathbb{R}^n)$ hat Müller, [25], ein solches Ergebnis für weite Klassen von Untermannigfaltigkeiten $\mathscr{X}$ von $\mathbb{R}^n$ erhalten.

Die obigen Begriffsbildungen und Fragestellungen lassen sich ohne Mühe auf zweiseitige abgeschlossene Ideale in nicht-kommutativen Banachschen Algebren $\mathscr{A}$ (insbesondere L^1-Faltungsalgebren nicht-kommutativer lokalkompakter Gruppen) übertragen, wenn man sich einigt, was man hier unter dem Strukturraum verstehen will. Der nächstliegende Kandidat ist der Raum $\mathrm{Priv}(\mathscr{A})$ aller primitiven Ideale, d.h. der Annullatoren algebraisch irreduzibler Darstellungen von $\mathscr{A}$. Als ein anderer Kandidat bietet sich im Falle involutiver Banachscher Algebren, also beispielsweise L^1-Algebren, der Raum $\mathrm{Priv}_*(\mathscr{A})$ aller Kerne involutiver irreduzibler Darstellungen von $\mathscr{A}$ in Hilbertschen Räumen an, und zwar weniger aus Analogie-Betrachtungen als aus den pragmatischen Erwägungen, daß über diesen Raum viel mehr Information zur Verfügung steht und daß es vielleicht nützlicher ist, L^∞-Funktionen durch Matrix-Koeffizienten unitärer Darstellungen approximieren zu können als durch Koeffizienten von weniger leicht handhabbaren Darstellungen (auf den „Approximations-Aspekt" der Synthese-Eigenschaft möchte ich nicht näher eingehen, da dieser im folgenden keine Rolle spielt). Im Falle von L^1-Algebren nilpotenter Liescher Gruppen N (und nur für diese werden hier Ergebnisse vorgelegt) gibt es zum Glück eine solche

Alternative gar nicht, da dann $\operatorname{Priv}(L^1(N))$ mit $\operatorname{Priv}_*(L^1(N))$ und auch mit dem Raum der maximalen Ideale in $L^1(N)$ übereinstimmt, siehe [26].

Ich möchte nun bekennen, daß ich den Titel dieses Artikels aus einem recht oberflächlichen Grunde gewählt habe, nämlich um den Leser mit ihm vertrauten Begriffen anzusprechen. Rechtfertigen kann ich den Titel damit, daß die hier erhaltenen Ergebnisse in der Tat Konsequenzen für das Synthese-Problem haben (siehe Abschn. 4, Satz 7). Meine ursprüngliche Motivation war und meine Sicht des Problems ist hingegen eine andere, und von daher hätte ich besser den Titel „Infinitesimal bestimmte Ideale in L^1-Algebren nilpotenter Liescher Gruppen" genommen. Mir geht es eigentlich darum, die inzwischen gut ausgebaute Idealtheorie in universellen Einhüllenden Liescher Algebren für die Darstellungstheorie Liescher Gruppen zu nutzen. So weiß man beispielsweise, siehe [10], daß für irgendeine stark stetige, vollständig topologisch irreduzible Darstellung π einer zusammenhängenden Lieschen Gruppe G in einem Banachschen Raum E der Annullator $\mathfrak{q}$ von E_∞, dem Raum der unendlich oft differenzierbaren Vektoren in E, in $\mathscr{U}\mathfrak{g}$ – $\mathscr{U}\mathfrak{g}$ bezeichnet, wie stets in diesem Artikel, die komplexe universelle Einhüllende der reellen Lieschen Algebra $\mathfrak{g}$ (von G) – ein primitives Ideal ist. Ist weiter N ein zusammenhängender (nilpotenter) Normalteiler in G mit Liescher Algebra $\mathfrak{n}$, so ist $\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap \mathscr{U}\mathfrak{n}$ ein Primideal in $\mathscr{U}\mathfrak{n}$, dessen Hülle im Raum $\operatorname{Priv} \mathscr{U}\mathfrak{n}$ der primitiven Ideale von $\mathscr{U}\mathfrak{n}$ der (Jacobson-) Abschluß einer Γ-Bahn ist, wobei mit Γ der komplexe Zariski-Abschluß der adjungierten Gruppe von G bezeichnet ist. Dann wird E von $\mathfrak{p} * \mathscr{D}(N)$ annulliert; dabei ist $\mathscr{D}(N)$ der Raum der Testfunktionen auf N, und $\mathscr{D}(N)$, ist, in wohlbekannter Manier, siehe unten, ein $\mathscr{U}\mathfrak{n}$-Bimodul. Nehmen wir nun der Einfachheit halber für diese Diskussion an, daß π gleichmäßig beschränkt (auf N) ist (im allgemeinen Fall hat man zusätzlich ein Gewicht auf N einzuführen). Dann wird E auch von dem Abschluß von $\mathfrak{p} * \mathscr{D}(N)$ in $L^1(N)$ annulliert, und man interessiert sich für dieses annullierende Ideal. Genauer gesagt, man möchte beweisen, daß dieses Ideal so groß als eben möglich ist: Man kann nämlich $\operatorname{Priv} L^1(N) = \operatorname{Priv}_* L^1(N)$ in $\operatorname{Priv} \mathscr{U}\mathfrak{n}$ einbetten, siehe [11], und daher den Durchschnitt $\mathscr{X} = h(\mathfrak{p}) \cap \operatorname{Priv}(L^1(N))$ bilden, und man hätte gerne, daß der Abschluß von $\mathfrak{p} * \mathscr{D}(N)$ in $L^1(N)$ gleich dem Kern von $\mathscr{X}$ in $L^1(N)$ ist.

Diese Fragestellung läßt sich allgemeiner formulieren, und man kommt zu dem Begriff des „infinitesimal bestimmten Ideals". Ist nämlich G irgendeine zusammenhängende Liesche Gruppe und I ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $L^1(G)$ – oder in einer Beurlingschen Algebra auf G –, so kann man dem Ideal I ein zweiseitiges Ideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I$ in $\mathscr{U}\mathfrak{g}$ assoziieren durch die Setzung $\mathfrak{p} = \{u \in \mathscr{U}\mathfrak{g};\ u * \mathscr{D}(G) \subseteqq I\}$ oder, da $\mathscr{D}(G)$ approximierende Einsen für $L^1(G)$ enthält,

$$\mathfrak{p} = \{u \in \mathscr{U}\mathfrak{g};\ \mathscr{D}(G) * u * \mathscr{D}(G) \subseteqq I\} = \{u \in \mathscr{U}\mathfrak{g};\ \mathscr{D}(G) * u \subseteqq I\}.$$

Und man kann sich fragen, ob I mit dem Abschluß (der linearen Hülle) von $\mathfrak{p} * \mathscr{D}(G)$ übereinstimmt, also aus $\mathfrak{p}$ zurückgewonnen werden kann. In diesem Falle wollen wir das Ideal I infinitesimal bestimmt nennen. Ich möchte die Gelegenheit nutzen, um für dieses Problem etwas Reklame zu machen, auch wenn ich derzeit nur unter sehr einschränkenden Bedingungen, siehe Satz 6, eine positive Lösung vorweisen kann. Nebenbei bemerkt, es scheint mir, daß selbst im Falle $G = \mathbb{R}^n$ und $I = k(\mathscr{X})$ mit einer abgeschlossenen Menge $\mathscr{X}$ in $\hat{G} \cong \mathbb{R}^n$ das obige Problem in dieser Formulierung bisher nicht systematisch behandelt wurde. In diesem Falle läuft durch Dualisieren die obige Dichtigkeits-Aussage darauf hinaus, daß man die *beschränkten* Lösungen eines gewissen Systems homogener partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten durch Linearkombinationen von Charakteren in $\mathscr{X}$ schwach approximieren kann. Man hat hingegen sehr wohl das Problem behandelt, beliebige Lösungen durch sogenannte Exponentialpolynome, in die dann auch unbeschränkte Charaktere eingehen, zu approximieren, siehe etwa [29, 30, 23] und [12].

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen möchte ich nun den Inhalt dieses Artikels etwas detaillierter vorstellen. Ab jetzt sei mit N stets eine einfachzusammenhängende, zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe N mit Liescher Algebra $\mathfrak{n}$ bezeichnet. Die Voraussetzung des einfachen Zusammenhangs ist für alle folgenden Ergebnisse unerheblich; bei gewissen Konstruktionen erweist sie sich gelegentlich als nützlich. Für solche Gruppen kann man neben $\mathscr{D}(N)$ auch den Raum $\mathscr{S}(N)$ der Schwartzschen Funktionen bilden, $\mathscr{S}(N)$ besteht aus allen Funktionen $f: N \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, daß $f \circ \exp$ eine Schwartzsche Funktion auf dem Vektorraum $\mathfrak{n}$ ist. Da die Gruppenoperationen in den (hier globalen) Koordinaten erster Art durch Polynome gegeben sind, ist $\mathscr{S}(N)$ eine Faltungsalgebra, in der Tat eine topologische Algebra, siehe auch [14]. Weiter operiert $\mathscr{U}\mathfrak{n}$ von links und von rechts auf allen unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf N, wobei für $X \in \mathfrak{n}$ die Wirkung durch $(X * f)(y) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\exp(-tX)y)$ bzw. $(f * X)(y) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(y \exp(-tX))$ gegeben ist, und $\mathscr{S}(N)$ ist invariant unter dieser Wirkung, also ein $\mathscr{U}\mathfrak{n}$-Bimodul. Oben hatten wir jedem zweiseitigen abgeschlossenen Ideal I in $L^1(N)$ mittels der Testfunktionen ein Ideal $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I$ in $\mathscr{U}\mathfrak{n}$ zugeordnet. Zur Definition von $\mathfrak{p}$ kann man ebenso gut die Schwartzschen Funktionen verwenden; denn mit Hilfe von approximierenden Einsen in $\mathscr{D}(N)$ sieht man leicht, daß

$$\begin{aligned}\mathfrak{p} &= \{u \in \mathscr{U}\mathfrak{n};\, u * \mathscr{S}(N) \subseteq I\} = \{u \in \mathscr{U}\mathfrak{n};\, \mathscr{S}(N) * u \subseteq I\} \\ &= \{u \in \mathscr{U}\mathfrak{n};\, \mathscr{S}(N) * u * \mathscr{S}(N) \subseteq I\}.\end{aligned}$$

Aus demselben Grunde stimmt auch der Abschluß $\langle \mathfrak{p} * \mathscr{D}(N)\rangle^-$ des von $\mathfrak{p} * \mathscr{D}(N)$ erzeugten Ideals mit $\langle \mathfrak{p} * \mathscr{S}(N)\rangle^-$, mit $\langle \mathscr{D}(N) * \mathfrak{p} * \mathscr{D}(N)\rangle^-$ und mit $\langle \mathscr{S}(N) * \mathfrak{p} * \mathscr{S}(N)\rangle^-$ überein. Der Vorteil der Schwartzschen Funktionen liegt darin, daß $\mathscr{S}(\mathfrak{n})$ unter der Fouriertransformation auf $\mathscr{S}(\mathfrak{n}^*)$ übergeht, der Vorteil der Testfunktionen darin, daß man sich durch die Faltung von $\mathfrak{p}$ mit $\mathscr{D}(N)$ Funktionen mit kompaktem Träger in I verschaffen kann. Sei nun speziell I der Kern einer abgeschlossenen Menge $\mathscr{X}$ in $\operatorname{Priv}(L^1(N)) = \operatorname{Priv}_*(L^1(N))$, abgeschlossen bezüglich der Jacobson-Topologie, die laut [1] unter der Identifikation von $\operatorname{Priv}_*(L^1(N))$ mit $\operatorname{Priv}_*(C^*(N))$ mit der Jacobson-Topologie auf $\operatorname{Priv}_*(C^*(N))$, also mit der Topologie auf dem unitären Dual $\hat{N}$ übereinstimmt. Dann kann man $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I$ leicht „ausrechnen", $\mathfrak{p}$ ist nämlich nichts anderes als der Kern von $\mathscr{X}$, aufgefaßt als Teil von $\operatorname{Priv}\mathscr{U}\mathfrak{n}$, also auch der Kern von $\bar{\mathscr{X}}$, wobei der Abschluß $\bar{\mathscr{X}}$ in der Jacobson-Topologie von $\operatorname{Priv}\mathscr{U}\mathfrak{n}$ zu bilden ist. Folglich ist das abgeschlossene Ideal $\langle \mathfrak{p} * \mathscr{D}(N)\rangle^-$ von $L^1(N)$ jedenfalls in $k(\bar{\mathscr{X}} \cap \operatorname{Priv}(L^1(N))$ enthalten. Für die gewünschte Gleichung $\langle \mathfrak{p} * \mathscr{D}(N)\rangle^- = I = k(\mathscr{X})$ ist also notwendig, daß $\mathscr{X} = \bar{\mathscr{X}} \cap \operatorname{Priv}(L^1(N))$ ist. Interpretiert man $\mathscr{X}$ im Kirillowschen Bild als eine N-invariante Teilmenge von $\mathfrak{n}^*$, so muß $\mathscr{X}$ notwendigerweise eine algebraische Menge sein.

Die Ergebnisse dieses Artikels beziehen sich ausschließlich auf den Fall, daß $\mathscr{X}$ eine Bahn unter einer Automorphismengruppe G von N ist, wobei noch vorausgesetzt wird, daß G ein semidirektes Produkt aus einer kompakten abelschen Lieschen Gruppe T (die nicht zusammenhängend zu sein braucht) und einer (auf $\mathfrak{n}$) unipotent wirkenden, zusammenhängenden nilpotenten Lieschen Gruppe M ist. Im Sinne der obigen notwendigen Bedingung wird im Abschn. 1 ein (etwas allgemeinerer) Bahnensatz bewiesen, welcher zeigt, daß für Bahnen $\mathscr{X}$ unter solchen Gruppen die Gleichung $\mathscr{X}=\bar{\mathscr{X}}\cap\mathrm{Priv}(L^1(N))$ allemal richtig ist. Danach behandeln wir erst einmal den Fall eines trivialen M und erhalten Ergebnisse, die auch von unabhängigem Interesse sind. So wird im Abschn. 2 die topologische Algebra $\mathscr{S}(N)/\mathscr{S}(N)\cap k(\mathscr{X})$ bestimmt. Für einen einzelnen Punkt $\mathscr{X}=\{\Omega\}$ wurde dies bereits von Howe getan, [14], und der hier gegebene Beweis verwendet viele seiner Methoden. Im Abschn. 3 wird gezeigt, daß $\mathfrak{p} * \mathscr{S}(N)$ total in $k(\mathscr{X})\cap\mathscr{S}(N)$ ist. Auch dieser Satz ist für einzelne Punkte bereits bekannt, er wurde in [22] von Ludwig bewiesen. Mit ähnlichen Methoden wie in [21] kann man aus den Ergebnissen der Abschnitte 2 und 3 herleiten, daß $\mathfrak{p}*\mathscr{S}(N)$ total in $I=k(\mathscr{X})\lhd L^1(N)$ ist. Weiter wird im Abschn. 4 ausgeführt, daß eine solche Aussage dann auch für nicht-triviales M wahr ist, und zwar indem man sie mit Hilfe eines einfachen, bereits in [27] verwendeten Tricks auf den Fall eines trivialen M zurückführt. Als eine Anwendung erhält man daraus, daß es eine nur von N abhängige natürliche Zahl d mit der Eigenschaft gibt, daß $(k(\mathscr{X})/J)^d=0$ ist für jedes abgeschlossene zweiseitige Ideal J in $L^1(N)$ mit Hülle $\mathscr{X}$.

1. Ein Bahnensatz

Hier wird neben dem in der Einleitung angekündigten Bahnensatz ein weiterer, im Abschn. 3 benötigter (Hilfs)Satz 2 bewiesen. Ein ganz wesentliches Hilfsmittel für Satz 2 ist ein Satz von Borho aus [3]. Die in diesem Paragraphen verwendeten Grundbegriffe aus der Theorie der (komplexen) algebraischen Gruppen findet man etwa in [2] oder [15].

Satz 1. *Es seien T eine kompakte Liesche Gruppe und N eine einfachzusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe. T operiere stetig und homomorph durch Automorphismen auf N, so daß man das semidirekte Produkt $G=T\ltimes N$ bilden kann. Weiter seien V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $\pi: G\to\mathrm{Aut}(V)$ eine stetige Darstellung von G in V mit der Eigenschaft, daß $\pi(N)$ aus unipotenten Transformationen besteht. Mit K sei der (komplexe) Zariski-Abschluß von $\pi(G)$ in $\mathrm{Aut}(V_{\mathbb{C}})$ bezeichnet; dabei ist $V_{\mathbb{C}}=V+iV$ die Komplexifizierung von V. Dann gelten für jedes $x\in V$:*

(i) *Die Zusammenhangskomponente $(G_x)_0$ der Standuntergruppe G_x ist von endlichem Index in G_x.*

(ii) *Es sei $T':=\{t\in T;\ \pi(t)x\in\pi(N)x\}=G_xN\cap T$. Dann gibt es $y\in\pi(N)x$ mit $T_y=T'$ und $G_y=T_yN_y$.*

(iii) *Der Zariski-Abschluß von $\pi(G)x$ in $V_{\mathbb{C}}$ ist gleich Kx.*

(iv) $Kx\cap V=\pi(G)x$.

Bemerkung 1. Kx ist natürlich stets im Abschluß von $\pi(G)x$ enthalten. (iii) bedeutet also nichts anderes, als daß Kx Zariski-abgeschlossen ist.

Bemerkung 2. Es ist wesentlich, daß $x \in V$ vorausgesetzt wird. Für beliebige $x \in V_{\mathbb{C}}$ ist (iii) offenbar im allgemeinen nicht richtig. Das sieht man bereits an dem Beispiel $N = \{1\}$, $T = \mathbb{T}$, $V = \mathbb{C}$ (aufgefaßt als zweidimensionaler reeller Vektorraum) und $\pi(t)v = tv$. Bezeichnet man nämlich mit $e_1 = 1$, $e_2 = i$ die kanonische Basis des reellen Vektorraumes V, so ist $f_1 = e_1 + ie_2$, $f_2 = e_1 - ie_2$ eine Basis des komplexen Vektorraumes $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$. Eine einfache Rechnung zeigt, daß $\pi(t)f_1 = t^{-1}f_1$ und $\pi(t)f_2 = tf_2$ für alle $t \in \mathbb{T}$ gilt. Erklärt man die lineare Transformation $A_z: V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ für $z \in \mathbb{C}^x$ durch $A_z f_1 = z^{-1} f_1$ und $A_z f_2 = z f_2$, so ist also $K = \{A_z;\ z \in \mathbb{C}^x\}$, und Kf_1 ist ersichtlich nicht Zariski-abgeschlossen.

Beweis. (i) und (ii): Bekanntlich sind Bahnen unipotenter Gruppen abgeschlossen, also ist $\pi(N)x$ abgeschlossen, woraus man erhält, daß T' und $G_x N = T'N$ abgeschlossene Untergruppen von G sind. Insbesondere sind G_x/N_x, $G_x N/N$ und T' isomorphe topologische Gruppen. Da natürlich T'_0 von endlichem Index in T' ist, ist $(G_x/N_x)_0$ von endlichem Index in G_x/N_x. Nun ist aber N_x bekanntlich zusammenhängend und daher $(G_x/N_x)_0 = (G_x)_0/N_x$, womit (i) bewiesen ist. – Wegen (i) gibt es eine maximale kompakte Untergruppe H in G_x, und da N_x zusammenhängend ist, wird H unter der Quotientenabbildung $G_x \to G_x/N_x \cong T'$ auf eine maximale kompakte Untergruppe von T', d. h. auf T' abgebildet. Es gilt also $G_x = N_x H$. Weiter ist H in einer zu T konjugierten Untergruppe enthalten, es gibt $a \in G$ mit $H \subseteqq aTa^{-1}$, und man kann natürlich a in N wählen. Dann sei $y = \pi(a)^{-1}x$. Damit ist $G_y = a^{-1}G_x a = a^{-1}HaN_y = T_y N_y$ und dann auch $T' = T_y$.

(iii) und (iv): Für diese beiden Aussagen kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß T zusammenhängend ist.

Weiter ist π unendlich oft differenzierbar, und $\pi(G)$ ist eine abgeschlossene Liesche Untergruppe von $\mathrm{Aut}(V)$ mit Liescher Algebra $d\pi(\mathfrak{g})$. Man kann dann die komplexe Liesche Unteralgebra $d\pi(\mathfrak{g}) + id\pi(\mathfrak{g})$ von $\mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})$ bilden. Aus den Voraussetzungen und der Charakterisierung „algebraischer" Liescher Algebren (d. h. solcher, welche Liesche Algebren von algebraischen Gruppen sind, vgl. [24] sowie [5] und [6]) folgt, daß $d\pi(\mathfrak{g}) + id\pi(\mathfrak{g})$ eine algebraische Liesche Algebra ist. Daher stimmt die Liesche Algebra $\mathfrak{k}$ von K mit $d\pi(\mathfrak{g}) + id\pi(\mathfrak{g})$ überein. Mit M wird die Zariski-Hülle von $\pi(N)$ bezeichnet; ihre Liesche Algebra $\mathfrak{m}$ ist gleich $d\pi(\mathfrak{n}) + id\pi(\mathfrak{n})$. Ferner gilt $K = \pi(T)\exp(id\pi(\mathfrak{t}))M$, und die entsprechende Zerlegung eines Elementes aus K ist eindeutig.

Der folgende Beweis für (iii) ist eine Erweiterung des Argumentes für Operationen unipotenter Gruppen. Sei $B = Kx$ und B' der Zariski-Abschluß von B. Bekanntlich sind Bahnen algebraischer Gruppen Zariski-lokal abgeschlossen, also ist $B' \setminus B$ Zariski-abgeschlossen. Nehmen wir im Gegensatz zur Behauptung an, daß $B' \setminus B$ nicht leer ist. Es seien I bzw. J die Ideale zu B' bzw. $B' \setminus B$ in der Algebra $\mathbb{C}[V_{\mathbb{C}}]$ der komplexen Polynome auf $V_{\mathbb{C}}$. Offenbar sind I und J invariant unter K, und I ist ein echter Teil von J. Da die unipotente Gruppe M in J/I nicht-triviale Fixpunkte besitzt, gibt es $f \in J \setminus I$ mit $f(my) = f(y)$ für alle $m \in M$ und $y \in B'$. Anders ausgedrückt: Setzt man

$$A = \{g \in J;\ g(my) = g(y) \text{ für alle } m \in M \text{ und } y \in B'\},$$

so ist A nicht in I enthalten. Des weiteren sind I, J sowie A invariant unter komplexer Konjugation, d. h. unter $g \to g^*$, $g^*(v) = \overline{g(\bar{v})}$. Daher gibt es ein reelles Polynom $f \in \mathbb{R}[V]$, $f \in A$, $f \notin I$. Wir fixieren nun ein solches f. Die reellen

Polynome in A, deren Grad den von f nicht übersteigt, bilden einen endlichdimensionalen reellen Unterraum W von $A \cap \mathbb{R}[V]$ mit $f \in W$. Mit A ist auch W invariant unter $\pi(G)$, also insbesondere unter $\pi(T)$. Da $\pi(T)$ eine kompakte Gruppe ist, gibt es eine Basis $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_n$ von W derart, daß die Wirkung von $\pi(T)$ auf W in dieser Basis durch orthogonale Matrizen gegeben ist. Man verifiziert ohne Mühe, daß dann $\varphi := f_1^2 + \ldots + f_n^2$ invariant unter $\pi(T)$ und dann auch unter der Komplexifizierung $\pi(T)_{\mathbb{C}} = \pi(T)\exp(id\pi(\mathfrak{t}))$ ist. Da φ außerdem in A liegt (A ist eine Algebra), ist φ konstant auf B'. Wegen $\varphi \in J$ und $B' \backslash B \neq \emptyset$ ist diese Konstante gleich Null. Für jedes $y \in \pi(G)x$ ist also $0 = \varphi(y) = f_1(y)^2 + \ldots + f_n(y)^2$, daher $f_i(y) = 0$ und mithin $f(y) = 0$. Folglich ist auch $f(B') = 0$ im Widerspruch zu $f \notin I$.

Nun wird (iv) bewiesen, zunächst für triviales T, der allgemeine Fall wird danach auf den Spezialfall zurückgeführt. Bei unipotenten Gruppen kann man leicht mit Induktion argumentieren. Sei dazu W ein eindimensionaler $\pi(G) = \pi(N)$-invarianter Unterraum von V. Ist $y \in Kx \cap V = Mx \cap V$, so gibt es $a \in N$ mit $y \equiv \pi(a)x \bmod W$, also $y = \pi(a)x + w$ mit $w \in W$. Ist $w = 0$, so ist nichts mehr zu zeigen. Wir können daher $w \neq 0$ annehmen. Nach Voraussetzung gibt es $b \in M$ mit $bx = y = \pi(a)x + w$. Dann liegt $b^{-1}\pi(a)$ in $M' := \{c \in M; cx \equiv x \bmod W_{\mathbb{C}}\}$. M' ist eine zusammenhängende, unter komplexer Konjugation invariante Untergruppe von M. Daher ist ihre Liesche Algebra $\mathfrak{m}'$ von der Form $\mathfrak{m}' = d\pi(\mathfrak{n}') + id\pi(\mathfrak{n}')$ mit einer passenden Unteralgebra $\mathfrak{n}'$ von $\mathfrak{n}$. Definieren wir $\varphi: M' \to W_{\mathbb{C}}$ durch $\varphi(c) = cx - x$, so ist φ ein Homomorphismus. Wegen $-w \in \operatorname{Bild}\varphi$ ist φ nicht-trivial und folglich surjektiv. Des weiteren ist $\varphi(\pi(N')) = W$, insbesondere gibt es $c \in N'$ mit $\pi(c)x - x = w$. Dann ist aber $y = \pi(a)\pi(c)x \in \pi(N)x$.

Im allgemeinen Fall können wir wegen (ii) annehmen, daß $G_x = T_x N_x$. Die Liesche Algebra $\mathfrak{k}_x$ von K_x ist die Komplexifizierung von $d\pi(\mathfrak{g}_x)$, also $\mathfrak{k}_x = d\pi(\mathfrak{t}_x) + id\pi(\mathfrak{t}_x) + d\pi(\mathfrak{n}_x) + id\pi(\mathfrak{n}_x)$, und es gilt $(K_x)_0 = \pi(T_x)_0 \exp(id\pi(\mathfrak{t}_x)) M_x$. Sei nun $y \in Kx \cap V$, also $y = \pi(a)tmx \in V$ mit $a \in T$, $t \in \exp(id\pi(\mathfrak{t}))$ und $m \in M$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $a = 1$ annehmen. Nun ist $tmx = y = \bar{y} = \bar{t}\bar{m}x = t^{-1}\bar{m}x$, folglich $x = \bar{m}^{-1}t^2 mx$ oder $\bar{m}^{-1}t^2 m \in K_x$. Da K_x eine lineare algebraische Gruppe ist, ist $(K_x)_0$ von endlichem Index in K_x. Insbesondere gibt es eine natürliche Zahl j mit $(\bar{m}^{-1}t^2 m)^j \in (K_x)_0$. Nun ist $(\bar{m}^{-1}t^2 m)^j = t^{2j} n$ mit $n \in M$, und wegen der oben hingeschriebenen Zerlegung von $(K_x)_0$ gilt $t^{2j} \in K_x$, d. h. $t^{2j}x = x$. Da t eine halbeinfache lineare Transformation mit positiven Eigenwerten ist, gilt dann auch $tx = x$. Man erhält $y = tmx = tmt^{-1}x \in V \cap Mx$, und folglich $y \in \pi(N)x$ auf Grund des Spezialfalles.

Als eine Anwendung von Satz 1 stellen wir den im Abschn. 3 benötigten Satz 2 bereit. Die Formulierung ist ganz den dortigen Bedürfnissen angepaßt und dem Inhalt des Satzes nicht ganz angemessen, denn der Satz hat zunächst mit der Lieschen Gruppe N und ihrer Faltungsalgebra nichts zu tun, sondern ist eigentlich eine Aussage über die Idealtheorie in der universellen Einhüllenden einer reellen nilpotenten Lieschen Algebra.

Satz 2. *Seien N eine einfachzusammenhängende, zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe mit Liescher Algebra $\mathfrak{n}$ und T eine kompakte abelsche Liesche Gruppe. T operiere stetig und homomorph durch Automorphismen auf N, $(t, x) \to x^t$, und damit auch auf $\mathfrak{n}$ und $\mathscr{U}\mathfrak{n}$. Ω sei ein primitives Ideal in $L^1(N)$, mit Ω_∞ sei das entsprechende (selbstadjungierte) primitive Ideal in $\mathscr{U}\mathfrak{n}$ bezeichnet. Weiter sei $\mathfrak{w}$ ein* *zweidimensionales zentrales Ideal in* $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{w}$ *sei T-invariant und ein irreduzibler T-Modul. Ist* T' *der Stabilisator von* $\Omega_\infty \cap \mathscr{U}\mathfrak{w}$ *im Raum der maximalen Ideale von* $\mathscr{U}\mathfrak{w}$, *d.h. in* $\mathfrak{w}_{\mathbb{C}}^*$, *so gilt*

$$\bigcap_{t\in T} \Omega_\infty^t + (\mathscr{U}\mathfrak{w} \cap \Omega_\infty)\mathscr{U}\mathfrak{n} = \bigcap_{t\in T'} \Omega_\infty^t .$$

Bemerkung. Ist $\mathscr{U}\mathfrak{w} \cap \Omega_\infty$ gerade das von $\mathfrak{w}$ erzeugte Ideal in $\mathscr{U}\mathfrak{w}$, so ist $T' = T$, und der Satz is trivialerweise richtig. Wir werden also im folgenden stets annehmen, daß $\mathfrak{w}$ nicht in $\mathscr{U}\mathfrak{w} \cap \Omega_\infty$ enthalten ist. Dann ist, wegen der Irreduzibilität von $\mathfrak{w}$, $T' = \{t \in T;\ w^t = w$ für alle $w \in \mathfrak{w}\}$.

Beweis. Es ist klar, daß das auf der linken Seite der Gleichung stehende Ideal in dem auf der rechten Seite stehenden enthalten ist. Man braucht also nur die andere Inklusion zu beweisen.

Abkürzend setzen wir $\mathfrak{p} = \bigcap_{t\in T} \Omega_\infty^t = k(T\Omega_\infty)$. Die Hülle $h(\mathfrak{p})$ von $\mathfrak{p}$ in $\mathrm{Priv}\,\mathscr{U}\mathfrak{n} = \mathrm{Max}\,\mathscr{U}\mathfrak{n}$ stimmt natürlich im allgemeinen nicht mit $\mathscr{X} := \{\Omega_\infty^t;\ t \in T\}$ überein, sondern ist gleich dem Abschluß $\bar{\mathscr{X}}$ von $\mathscr{X}$ in der Jacobson-Topologie von $\mathrm{Priv}\,\mathscr{U}\mathfrak{n}$. Nun induziert die Dixmier-Abbildung $\mathrm{Dix}\colon \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^* \to \mathrm{Priv}\,\mathscr{U}\mathfrak{n}$ eine Bijektion vom Raum $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^*/N_{\mathbb{C}}$ der Bahnen in $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^*$ unter der coadjungierten Darstellung auf $\mathrm{Priv}\,\mathscr{U}\mathfrak{n}$, und nach [7] ist diese Abbildung sogar ein Homöomorphismus (für die Zariski- bzw. die Jacobson-Topologie). Zu Ω_∞ existiert ein reelles $g \in \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^*$ mit $\mathrm{Dix}(g) = \Omega_\infty$; man kann nämlich für g irgendeinen Punkt in derjenigen N-Bahn in $\mathfrak{n}^*$ nehmen, die unter der Kirillowschen Korrespondenz dem Ideal Ω entspricht, vgl. [11]. Bildet man in $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^*$ den Zariski-Abschluß $\mathscr{Y}$ der $T \ltimes N$-Bahn von g, so ist wegen der oben genannten Sätze $\bar{\mathscr{X}}$ gerade gleich $\mathrm{Dix}(\mathscr{Y})$. Wir wählen nun ein Repräsentantensystem $s_1, \ldots, s_m$ für die T_0-Nebenklassen in T, mit K bezeichnen wir die zu $T_0 \ltimes N$ gehörige lineare algebraische Gruppe auf $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^*$. Dann ist $\mathscr{Y}$ wegen Satz 1 gerade gleich $\bigcup_{j=1}^{m} K s_j g$. Läßt man die übereinstimmenden K-Bahnen fort, so erhält man eine disjunkte Zerlegung $\mathscr{Y} = \bigcup_{j=1}^{n} K t_j g$. Setzt man weiter $\bar{\mathscr{X}}_j = \mathrm{Dix}(K t_j g)$, so ist auch $\bar{\mathscr{X}} = \bigcup_{j=1}^{n} \bar{\mathscr{X}}_j$ eine disjunkte Zerlegung in abgeschlossene irreduzible Mengen. $\bar{\mathscr{X}}_j$ kann man auch beschreiben als den Abschluß von

$$\mathscr{X}_j := \{\Omega_\infty^{t_j^{-1}t};\ t \in T_0\} \subsetneqq \mathrm{Priv}\,\mathscr{U}\mathfrak{n} .$$

Wegen der Irreduzibilität von $\bar{\mathscr{X}}_j$ sind die Ideale $\mathfrak{p}_j := k(\bar{\mathscr{X}}_j) = k(\mathscr{X}_j)$prim. Es ist $\mathfrak{p} = \bigcap_{j=1}^{n} \mathfrak{p}_j$, und für $1 \leqq j < r \leqq n$ gilt $\mathfrak{p}_j + \mathfrak{p}_r = \mathscr{U}\mathfrak{n}$ wegen der Disjunktheit der $\bar{\mathscr{X}}_i$. Aus dem Chinesischen Restsatz folgt dann, daß $\mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{p}$ isomorph zur direkten Summe $\bigoplus_{j=1}^{n} \mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{p}_j$ ist. Unter Verwendung eines Satzes von Borho, siehe [3, 6.8], wollen wir nun die Struktur der Algebren $B_j := \mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{p}_j$ bestimmen. Dazu bilden wir die komplexe auflösbare Liesche Algebra $\mathfrak{h} := \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \ltimes \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$. $\mathfrak{p}_j$ ist natürlich $\mathfrak{h}$-invariant, und auch alle übrigen Voraussetzungen des oben zitierten Satzes sind erfüllt. Es gibt daher einen zentralen $\mathfrak{h}$-Eigenvektor e in B_j mit $(B_j)_e \cong Z(B_j)_e \otimes A_m$, wobei mit $(B_j)_e$ die Lokalisierung von B_j nach e, mit $Z(B_j)_e$, die Lokalisierung des Zentrums $Z(B_j)$

nach e und mit A_m die Weylsche Algebra in m Erzeugenden bezeichnet ist. e ist dann auch ein Eigenvektor für die Wirkung von T_0 auf B_j, es gibt also ein $\chi \in \hat{T}_0$ mit $e^t = \chi(t)e$ für $t \in T_0$. Nun ist $\mathfrak{p}_j = k(\mathscr{X}_j)$ ein selbstadjungiertes Ideal in $\mathscr{U}\mathfrak{n}$, also $\mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{p}_j$ eine involutive Algebra, und für $u := e^*e \neq 0$ gilt

$$u^t = e^{*t}e^t = e^{t*}e^t = (\chi(t)e)^*\chi(t)e = \bar{\chi}(t)e^*\chi(t)e = u \quad \text{für alle} \quad t \in T_0 .$$

Bezeichnet man mit $q_j : B_j \to \mathscr{U}\mathfrak{n}/\Omega_\infty^{t_j^{-1}}$ die Quotientenabbildung, so ist $q_j(u)$ ein Vielfaches des Einselementes, sagen wir $q_j(u) = \lambda$. Folglich liegt $u - \lambda$ in $\operatorname{Kern} q_j$, und wegen der obigen Beziehung liegt auch $u^t - \lambda = (u - \lambda)^t$ in $\operatorname{Kern} q_j$, also $u - \lambda$ in $\bigcap_{t \in T_0} (\operatorname{Kern} q_j)^t$, woraus man wegen $\mathfrak{p}_j = k(\mathscr{X}_j)$ erhält, daß $u - \lambda = 0$ oder $u = \lambda$. Mithin ist e invertierbar und $Z(B_j)_e = Z(B_j)$ sowie $(B_j)_e = B_j$, also $B_j \cong Z(B_j) \otimes A_m$. Im übrigen ist m unabhängig von j, denn A_m ist isomorph zu $\mathscr{U}\mathfrak{n}/\Omega_\infty^{t_j^{-1}} \cong \mathscr{U}\mathfrak{n}/\Omega_\infty$.

Zusammen mit der oben festgestellten Isomorphie zwischen $\mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{p}$ und $\bigoplus_{j=1}^{n} \mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{p}_j$ ergibt sich nun, daß $B := \mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{p}$ isomorph zu $Z(B) \otimes A_m$ ist. Wir haben zu zeigen, daß $I := \bigcap_{t \in T'} \Omega_\infty^t/\mathfrak{p}$ in $J := \mathfrak{p} + (\mathscr{U}\mathfrak{w} \cap \Omega_\infty)\mathscr{U}(\mathfrak{n})/\mathfrak{p}$ enthalten ist. Bei der obigen Isomorphie entspricht jedes maximale (primitive) Ideal Λ in B dem Ideal $\Lambda \cap Z(B) \otimes A_m$. Daraus folgt, daß I von $I \cap Z(B)$ erzeugt wird. Es genügt also zu zeigen, daß $I \cap Z(B)$ in J enthalten ist. Weiter zerfällt $Z(B)$ in T-Eigenräume, für $\gamma \in \hat{T}$ sei $Z(B)_\gamma = \{v \in Z(B);\ v^t = \gamma(t)v\}$. Wie oben kann man sich überlegen, daß der Raum $Z(B)^T$ der T-Fixpunkte nur aus den Vielfachen von Eins besteht. Daraus folgt nun leicht, daß jedes $Z(B)_\gamma$ höchstens eindimensional ist (in der Tat ist $Z(B)_\gamma$ genau dann eindimensional, wenn $\gamma = 1$ auf dem Stabilisator T_Ω von Ω ist, und $Z(B)$ ist der $\mathbb{C}$-Gruppenring der Gruppe $(T/T_\Omega)\hat{}$; aber das benötigen wir im folgenden nicht). Ist nämlich $u \in Z(B)_\gamma$, $u \neq 0$, so ist $u^*u \in Z(B)^T$, siehe oben. Also ist $u^*u = \lambda 1$ mit passendem $\lambda \in \mathbb{C}$. Nun ist $u^*u \neq 0$, denn zu u existiert wenigstens ein $t \in T$ mit $q_t(u) \neq 0$, wobei mit $q_t : B \to \mathscr{U}\mathfrak{n}/\Omega_\infty^t$ die Quotientenabbildung bezeichnet ist; $q_t(u)$ ist ein von Null verschiedener Skalar μ, und es gilt $q_t(u^*u) = q_t(u)^*q_t(u) = \bar{\mu}\mu \neq 0$. Ist nun v ein beliebiges weiteres Element in $Z(B)_\gamma$, so liegt u^*v in $Z(B)^T$, also $u^*v = \nu 1$ mit $\nu \in \mathbb{C}$ und folglich $uu^*v = \nu u$ oder $v = \lambda^{-1}\nu u$.

Sei nun $u \in I \cap Z(B)$. Wir wollen zeigen, daß u in J liegt. O.B.d.A. können wir annehmen, daß u ein T'-Eigenvektor ist, also $u^t = \alpha(t)u$ für $t \in T'$ mit einem $\alpha \in (T')\hat{}$. u läßt sich eindeutig in T-Eigenvektoren entwickeln, $u = \sum_{\gamma \in \hat{T}} u_\gamma$ mit $u_\gamma \in Z(B)_\gamma$, wobei natürlich nur endlich viele u_γ von Null verschieden sind. Da u ein α-Eigenvektor ist, ist $u_\gamma = 0$, falls $\gamma|_{T'} \neq \alpha$. Wir können annehmen, daß wenigstens ein u_γ von Null verschieden ist. Indem man für ein solches u_γ das invertierbare Element u_γ^* heranmultipliziert, sieht man, daß man zusätzlich o.B.d.A. $\alpha = 1$ annehmen darf, also $u = \sum_{\gamma \in (T/T')\hat{}} u_\gamma \in I \cap Z(B)$.

Wie wir oben gesehen haben, brauchen wir nur den Fall $g(\mathfrak{w}) \neq 0$ zu behandeln. Dann gibt es eine Basis e_1, e_2 von $\mathfrak{w}$ und einen Homomorphismus $\delta : T \to \mathbb{T}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\operatorname{Kern} \delta = T'$.

(2) $g(e_1) = 0$, $g(e_2) = 1$.

(3) Für $f_1 := e_1 + ie_2$ und $f_2 := e_1 - ie_2$ gelten $f_1^t = \delta(t)^{-1} f_1$ und $f_2^t = \delta(t) f_2$.

Das Ideal $\Omega_\infty \cap \mathscr{U}\mathfrak{w}$ wird erzeugt von $w - ig(w)$, $w \in \mathfrak{w}$ oder $w \in \mathfrak{w}_{\mathbb{C}}$; insbesondere liegt $1-f_2$ in diesem Ideal. Bezeichnet man mit f das Bild von f_2 unter $\mathscr{U}\mathfrak{n} \to B$, so liegt also $1-f$ in J, sogar in $J \cap Z(B)$. Nach Konstruktion ist f ein (von Null verschiedenes) Element in $Z(B)_\delta$. Die Charaktergruppe $(T/T')^\wedge$ wird von δ erzeugt, daher ist jedes u_γ von der Form $\lambda_k f^k$ mit passenden $k \in \mathbb{Z}$ und $\lambda_k \in \mathbb{C}$, also $u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k f^k$. Eine solche Darstellung ist i.a. nicht eindeutig, nämlich dann, wenn T/T' endlich ist. Offenbar ist $f \equiv 1$ modulo I und damit $u \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k$ modulo I, also $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k = 0$ wegen $u \in I$. Wir wollen zeigen, daß u in der Form $u = (1-f)v$ mit $v \in B$ geschrieben werden kann. Damit ist dann der Satz bewiesen, denn $(1-f)v$ liegt in J. Dazu bildet man, zunächst formal,

$$\begin{aligned} v = (1-f)^{-1} u &= \sum_{j \geqq 0} f^j u = \sum_{j \geqq 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k f^{j+k} \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{k \leqq i} \lambda_k \Big) f^i . \end{aligned}$$

Durch $v := \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{k \leqq i} \lambda_k \Big) f^i$ ist aber tatsächlich ein Element in B definiert; denn für genügend große i ist $\sum_{k \leqq i} \lambda_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k = 0$, und für genügend kleine i ist $\lambda_k = 0$ für alle $k \leqq i$. Mit diesem v verifiziert man mühelos, daß $u = (1-f)v$ gilt.

Zur späteren Verwendung im Abschn. 4 notieren wir die folgende Bemerkung, die sich leicht aus Satz 1 (sogar nur auf triviales T angewendet) und den im Laufe des Beweises von Satz 2 zitierten Sätzen über die Idealtheorie in universellen Einhüllenden nilpotenter Liescher Algebren ergibt. Wir benutzten dabei die oben eingeführten Bezeichnungen.

Bemerkung. Seien $\mathfrak{n}$, Ω und Ω_∞ wie oben. Weiter sei L eine einfachzusammenhängende, zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe, welche stetig und homomorph durch unipotente Automorphismen auf $\mathfrak{n}$ operieren möge, $\gamma: L \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{n})$. Dann ist die Hülle $h(\mathfrak{q})$ von $\mathfrak{q} := \bigcap_{a \in L} \gamma(a)\Omega_\infty$ in $\mathrm{Priv}\,\mathscr{U}\mathfrak{n}$ gerade die $\gamma(L)_{\mathbb{C}}$-Bahn von Ω_∞.

Beweis. Es sei g ein reelles lineares Funktional auf $\mathfrak{n}$ mit $\mathrm{Dix}(g) = \Omega_\infty$. Dann ist $\mathrm{h}(\mathfrak{q})$ nichts anderes als das Bild des Zariski-Abschlusses von $\gamma(L)^*_{\mathbb{C}} \mathrm{Ad}(N)^*_{\mathbb{C}} g$ in $\mathfrak{n}^*_{\mathbb{C}}$ unter Dix. Nun ist aber $\gamma(L)^*_{\mathbb{C}} \mathrm{Ad}(N)^*_{\mathbb{C}} g$ nach Satz 1 Zariski-abgeschlossen, also $h(\mathfrak{q}) = \{a\Omega_\infty;\ a \in \gamma(L)_{\mathbb{C}}\}$ wie behauptet.

2. Die topologische Algebra $\mathscr{S}(N)/\mathscr{S}(N) \cap k(T\Omega)$

Wir übernehmen hier die folgende Notation aus [14]. Seien H eine einfachzusammenhängende, zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe, U eine zusammenhängende Untergruppe von H und γ ein unitärer Charakter von U. Weiter sei $x_1, \ldots, x_r$ eine Basis in einem (passenden) linearen Komplement von $\mathfrak{u}$ in $\mathfrak{h}$ derart, daß $\mathfrak{u}_j := \mathfrak{u} + \mathbb{R}x_1 + \ldots + \mathbb{R}x_j$ eine Liesche Unteralgebra von $\mathfrak{h}$ und ein Ideal in $\mathfrak{u}_{j+1}$ ist. Dann läßt sich jedes $h \in H$ eindeutig in der Form

$h=\exp(t_r x_s)\cdot\ldots\cdot\exp(t_1 x_1)u$ mit $t_j\in\mathbb{R}$ und $u\in U$ schreiben. Mit $\mathcal{S}(H,U,\gamma)$ bezeichnen wir den Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $\varphi: H\to\mathbb{C}$ mit $\varphi(hu)=\gamma(u)^{-1}\varphi(h)$ für $u\in U$ und $h\in H$ und mit der Eigenschaft, daß φ, mittels obiger Zerlegung von H aufgefaßt als eine Funktion in den Variablen $t_1,\ldots,t_s$, eine Schwartzsche Funktion auf $\mathbb{R}^r$ ist. Durch Strukturübertragung können wir $\mathcal{S}(H,U,\gamma)$ auch zu einem topologischen Vektorraum machen. Es ist leicht zu sehen, vgl. [14], daß dieser topologische Vektorraum von der Auswahl der Basis $x_1,\ldots,x_s$ unabhängig ist. Ist zusätzlich T eine kompakte abelsche Liesche Gruppe, so kann man analog den Raum $\mathcal{S}(T\times H,U,\gamma)$ bilden; $\mathcal{S}(T\times H,U,\gamma)$ ist als topologischer Vektorraum isomorph zu $\mathcal{S}(T\times\mathbb{R}^r)$.

Satz 3. *Seien N eine einfachzusammenhängende, zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe mit Liescher Algebra $\mathfrak{n}$ und T eine kompakte abelsche Liesche Gruppe. T operiere stetig und homomorph durch Automorphismen auf N, $(t,x)\to x^t$ für $x\in N$, $t\in T$. Weiter sei Ω ein primitives (=maximales) Ideal in $L^1(N)$, der Stabilisator T_Ω von Ω in T sei endlich. Dann gibt es Unteralgebren $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{n}$ und ein $g\in\mathfrak{n}^*$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) $T_\Omega g=g$.

(ii) $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *und* $\mathfrak{c}$ *sind invariant unter* T_Ω.

(iii) $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{c}\subset\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{c}$ *sind Ideale in* $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}=\mathfrak{c}\cap\operatorname{Kern} g$, $\mathfrak{c}=\{X\in\mathfrak{n};\, g([X,\mathfrak{b}])=0\}$, $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ *ist eine Heisenbergsche Algebra mit Zentrum* $\mathfrak{c}/\mathfrak{a}$.

Mit A, B, C seien die $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ entsprechenden Untergruppen von N bezeichnet. $\chi_g: C\to\mathbb{T}$ sei definiert durch $\chi_g(\exp X)=e^{ig(X)}$. Weiter sei mit U die Untergruppe $U:=\{(b,bc);\ b\in B,\ c\in C\}$ von $N\times N$ bezeichnet; $\gamma: U\to\mathbb{T}$ sei definiert durch $\gamma(b,bc)=\chi_g(c)^{-1}$.

(iv) $\Omega=\operatorname{Kern}\operatorname{ind}_C^N\chi_g$.

(v) *Für $\varphi\in\mathcal{S}(N)$ sei $R\varphi: T\times N\times N\to\mathbb{C}$ definiert durch*

$$(R\varphi)(t,x,y)=\int_C\varphi^t(xcy^{-1})\chi_g(c)dc=\int_C\varphi((xcy^{-1})^{t^{-1}})\chi_g(c)dc.$$

Für jedes $\varphi\in\mathcal{S}(N)$ liegt $R\varphi$ in $\mathcal{S}(T\times N\times N,U,\gamma)$, und R ist eine stetige Surjektion von $\mathcal{S}(N)$ auf die T_Ω-Fixpunkte in $\mathcal{S}(T\times N\times N,U,\gamma)$, d.h. auf den Raum derjenigen $\psi\in\mathcal{S}(T\times N\times N,U,\gamma)$, für welche $\psi(tt_0,x,y)=\psi(t,x^{t_0^{-1}},y^{t_0^{-1}})$ gilt, wobei $t\in T$, $t_0\in T_\Omega$ und $x,y\in N$.

(vi) *Zu der surjektiven stetigen linearen Abbildung R gibt es eine stetige lineare Umkehrabbildung, d.h. R ist ein Retrakt.*

Bemerkung 1. Die Existenz von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zu gegebenem g wurde, sogar viel allgemeiner, bereits von Howe bewiesen, [13].

Bemerkung 2. Im allgemeinen ist $\operatorname{ind}_C^N\chi_g$ nicht irreduzibel, aber $\operatorname{ind}_C^N\chi_g$ ist ein Faktor, und zwar ein Vielfaches der im Kirillowschen Bild zu g gehörigen irreduziblen Darstellung.

Bemerkung 3. Die Funktion $(x,y)\to(R\varphi)(t,x,y)$ ist natürlich nichts anderes als der Kern zum Operator $\left(\operatorname{ind}_C^N\chi_g\right)(\varphi^t)$. Daher ist $\operatorname{Kern} R=\mathcal{S}(N)\cap\bigcap_{t\in T}\Omega^t$, und aus (v) und (vi) folgt, daß $\mathcal{S}(N)/\mathcal{S}(N)\cap\bigcap_{t\in T}\Omega^t$ zu $\mathcal{S}(T\times N\times N,U,\gamma)^{T_\Omega}$ isomorph ist.

Beweis. Unabhängig von allem Übrigen ist es klar, daß die Funktion $R\varphi$ die angegebenen Transformationseigenschaften besitzt. Man nutzt dabei aus, daß C/A zentral in B/A ist. Die anderen Eigenschaften von R (also z.B., daß $R\varphi$ überhaupt eine Schwartzsche Funktion ist) ergeben sich aus einem Induktionsbeweis mit den üblichen Fallunterscheidungen.

Es sei $\mathfrak{z}(Z)$ das Zentrum von $\mathfrak{n}(N)$. Zu dem Ideal Ω gehört ein eindeutig bestimmter Charakter $\eta: Z \to \mathbb{T}$ mit

$$\{f \in L^1(Z); f * L^1(N) \subseteq \Omega\} = \left\{f \in L^1(Z); \int_Z f(z)\eta(z)dz = 0\right\}.$$

1. Fall. Es gibt eine nicht-triviale, zusammenhängende T-invariante Untergruppe W von Z mit $\eta(W) = 1$.

Die Existenz von g, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ mit den Eigenschaften (i)–(v) folgt sofort aus der Existenz der entsprechenden Größen für N/W mit der induzierten T-Wirkung; als maximales Ideal in $L^1(N/W)$ nimmt man natürlich das Bild von Ω unter der kanonischen Surjektion $L^1(N) \to L^1(N/W)$. Um (vi) zu beweisen, hat man sich noch zu überlegen, daß $\mathscr{S}(N) \to \mathscr{S}(N/W)$ eine stetige lineare Umkehrabbildung zuläßt. Dazu wähle man ein Komplement $\mathfrak{v}$ zu $\mathfrak{w}$ (= Liesche Algebra von W) in $\mathfrak{n}$. Dann definiert die Multiplikation in N einen Diffeomorphismus von $\exp(\mathfrak{v}) \times W$ auf N, und die Einschränkung der Quotientenabbildung $N \to N/W$ auf $\exp(\mathfrak{v})$ etabliert einen Diffeomorphismus $\exp(\mathfrak{v}) \to N/W$; mit $s: N/W \to \exp(\mathfrak{v})$ sei die Umkehrabbildung bezeichnet. Wählt man noch eine Funktion f_0 in $\mathscr{S}(W)$ mit $\int_W f_0(x)dx = 1$, so ist durch $\varphi \to \tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}(s(y)w) = \varphi(y)f_0(w)$ für $\varphi \in \mathscr{S}(N/W)$, $y \in N/W$, $w \in W$ eine Umkehrabbildung zu $\mathscr{S}(N) \to \mathscr{S}(N/W)$ angegeben.

2. Fall. Es gibt eine zweidimensionale zusammenhängende Untergruppe W von Z mit $\eta(W) = \mathbb{T}$, auf welcher T als eindimensionale Automorphismengruppe operiert.

Man kann also W mit $\mathbb{C}$ identifizieren, so daß sich die Wirkung von T auf W in der Form $w^t = \delta(t)w$ mit einem surjektiven Charakter $\delta: T \to \mathbb{T}$ schreiben läßt. Offenbar liegt T_Ω in $T' := \operatorname{Kern}\delta$. Weiter gibt es eine zu $\mathbb{T}$ isomorphe Untergruppe T_c von T mit $T = T'T_c$; und der Durchschnitt $F := T' \cap T_c$ ist endlich.

Für $\varphi \in \mathscr{S}(N)$ definieren wir $J\varphi: T_c \times N \to \mathbb{C}$ durch $(J\varphi)(t, x) = \int_W \varphi^t(xw)\eta(w)dw$. Man überzeugt sich, daß $J\varphi$ in $\mathscr{S}(T_c \times N, W, \eta)$ liegt, in der Tat liegt $J\varphi$ in $\mathscr{S}(T_c \times N, W, \eta)^F := \{\psi \in \mathscr{S}(T_c \times N, W, \eta); \psi(tt_0, x) = \psi(t, x^{t_0^{-1}})$ für alle $t_0 \in F$, $t \in T_c$, $x \in N\}$. Wir behaupten, daß J ein Retrakt von $\mathscr{S}(N)$ auf $\mathscr{S}(T_c \times N, W, \eta)^F$ ist. Um eine Umkehrabbildung zu konstruieren (und damit gleichzeitig die Surjektivität zu beweisen), gehe man wie folgt vor. Man wähle ein T-invariantes Komplement $\mathfrak{v}$ zu $\mathfrak{w}$ in $\mathfrak{n}$ und definiere $\mathscr{S}(T_c \times \mathfrak{v}) \to \mathscr{S}(T_c \times N, W, \eta)$, $f \to f'$, durch $f'(t, \exp(X)w) = \bar{\eta}(w)f(t, X^{t^{-1}})$ für $t \in T_c$, $w \in W$ und $X \in \mathfrak{v}$. Diese Abbildung ist ein Isomorphismus (da die Variablentransformation $(t, X) \to (t, X^{t^{-1}})$ von $T_c \times \mathfrak{v}$ auf sich selbst ein Diffeomorphismus ist, dessen sämtliche Ableitungen nur polynomial wachsen) mit Umkehrabbildung $f \to \tilde{f}$, $\tilde{f}(t, X) = f(t, \exp(X^t))$. Der Isomorphismus $f \to \tilde{f}$ induziert einen Isomorphismus von $\mathscr{S}(T_c \times N, W, \eta)^F$ auf $\mathscr{S}(T_c/F \times \mathfrak{v})$. Es genügt daher zu zeigen, daß es zu der Abbildung

$I: \mathscr{S}(N) \to \mathscr{S}(T_c/F \times \mathfrak{v})$, definiert durch $I\varphi = (J\varphi)^{\check{}}$, d. h. $(I\varphi)(t, X) = \int\limits_W \varphi(\exp(X) w^{t^{-1}}) \eta(w) dw$, eine stetige lineare Umkehrabbildung gibt. Dies folgt aber, mittels der Fourierschen Transformation auf der Gruppe W, leicht aus der Tatsache, daß die Restriktion $\mathscr{S}(\mathbb{C}) \to \mathscr{S}(\mathbb{T}) = \mathscr{D}(\mathbb{T})$ eine stetige lineare Umkehrung besitzt.

Wir wenden nun die Induktionsvoraussetzung auf die Gruppe $N' = N/(\operatorname{Kern} \eta)_0$ mit operierender Gruppe $T' = \operatorname{Kern} \delta$ und auf das maximale Ideal Ω' in $L^1(N')$ an, welches gegeben ist als Bild von Ω unter der kanonischen Surjektion $L^1(N) \to L^1(N')$. Man findet also Unteralgebren $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ von $\mathfrak{n}'$ und ein lineares Funktional g' auf $\mathfrak{n}'$ mit den Eigenschaften (i)–(vi). Insbesondere ist die Abbildung $R': \mathscr{S}(N') \to \mathscr{S}(T' \times N' \times N', U', \gamma')^{T_{\Omega'}}$, gegeben durch

$$R'\varphi(t, x, y) = \int\limits_{C'} \varphi^t(xcy^{-1}) \chi_{g'}(c) dc,$$

ein Retrakt. Den Größen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ und g' entsprechen durch Zurückziehen die Unteralgebren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{n}$ und das Funktional g. Es ist leicht zu sehen, daß mit dieser Setzung die Eigenschaften (i)–(iv) erfüllt sind; man beachte, daß $T'_{\Omega'} = T_\Omega$. $\mathscr{S}(T' \times N' \times N', U', \gamma')$ ist kanonisch isomorph zu $\mathscr{S}(T' \times N \times N, U, \gamma)$, und die T_Ω-Fixpunkte entsprechen bei diesem Isomorphismus einander. Man kann also R' auffassen als Surjektion von $\mathscr{S}(N')$ auf $\mathscr{S}(T' \times N \times N, U, \gamma)^{T_\Omega}$. Weiter hat man eine kanonische Surjektion $\mathscr{S}(N') \to \mathscr{S}(N, W, \eta)$, gegeben durch

$$(L\varphi)(x) = \int\limits_{W/(\operatorname{Kern} \eta)_0} \varphi(xw) \eta(w) dw$$

für $\varphi \in \mathscr{S}(N')$, und R' faktorisiert durch L, d. h. es gibt $R'': \mathscr{S}(N, W, \eta) \to \mathscr{S}(T' \times N \times N, U, \gamma)^{T_\Omega}$ mit $R''L = R'$, nämlich

$$(R''\psi)(t, x, y) = \int\limits_{C/W} \psi^t(xcy^{-1}) \chi_g(c) dc$$

für $\psi \in \mathscr{S}(N, W, \eta)$, x, $y \in N$ und $t \in T'$; man beachte, daß der Integrand auf Nebenklassen modulo W konstant ist, da $\chi_g|_W = \eta$ und T' auf W trivial operiert. Mit R' besitzt offenbar auch R'' eine stetige lineare Umkehrung. Dann ist aber auch $\mathrm{id} \otimes R'': \mathscr{S}(T_c \times N, W, \eta) \to \mathscr{S}(T_c \times T' \times N \times N, U, \gamma)^{T_\Omega}$ ein Retrakt. Schließlich definieren wir noch $M: \mathscr{S}(T \times N \times N, U, \gamma)^{T_\Omega} \to \mathscr{S}(T_c \times T' \times N \times N, U, \gamma)^{T_\Omega}$ durch $(M\psi)(t, t', x, y) = \psi(tt', x, y)$. M ist ein stetiger Isomorphismus von $\mathscr{S}(T \times N \times N, U, \gamma)^{T_\Omega}$ auf den Raum $\mathscr{S}(T_c \times T' \times N \times N, U, \gamma)^{T_\Omega, F}$ derjenigen $\psi \in \mathscr{S}(T_c \times T' \times N \times N, U, \gamma)^{T_\Omega}$ mit $\psi(tt_0, t't_0^{-1}, x, y) = \psi(t, t', x, y)$ für x, $y \in N$, $t \in T_c$, $t' \in T'$, $t_0 \in F$. Man überzeugt sich nun, daß $R = M^{-1}(id \otimes \mathbb{R}'')J$ gilt, insbesondere besteht das Bild von R aus Schwartzschen Funktionen. Indem man einen beliebigen linearen stetigen Schnitt $\mathscr{S}(T_c \times T' \times N \times N, U, \gamma)^{T_\Omega} \to \mathscr{S}(T_c \times N, W, \eta)$ zu $id \otimes R''$ über die endliche Gruppe F mittelt, erhält man einen F-verkettenden Schnitt, insbesondere einen solchen, welcher $\mathscr{S}(T_c \times T' \times N \times N, U, \gamma)^{T_\Omega, F}$ in $\mathscr{S}(T_c \times N, W, \eta)^F$ überführt. Zusammen mit der Tatsache, daß J eine stetige lineare Umkehrung zuläßt, folgt nun, daß R surjektiv ist und eine stetige lineare Umkehrung besitzt.

Wenn weder der erste noch der zweite Fall vorliegt, so operiert T als endliche Automorphismengruppe auf $\mathfrak{z}$ und Z. Im nächsten Schritt wollen wir zeigen, daß man dann auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen kann, daß T

trivial auf z operiert. Sei dazu $\mathfrak{w}$ ein T-irreduzibler Teilraum von z mit zugehöriger Gruppe W, und T' sei der gemeinsame Stabilisator in T der Elemente von $\mathfrak{w}$. Wir können annehmen, daß $\eta(W)=\mathbb{T}$. Es soll gezeigt werden, daß aus der Gültigkeit des Satzes für T', N, Ω die Richtigkeit für T, N, Ω folgt. Da T_Ω in T' liegt, haben die zu T', N, Ω existierenden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, g natürlich auch die Eigenschaften (i)–(iv) bezüglich T, N, Ω. Es sind noch (v) und (vi) zu zeigen. Sei dazu $T=\bigcup_{j=1}^{n} t_j T'$ eine disjunkte Zerlegung von T in T'-Nebenklassen, $t_1=1$. Die Charaktere η_j, $1\leqq j\leqq n$, von W seien definiert durch $\eta_j(w)=\eta(w^{t_j})$. Aus der Gültigkeit des Satzes für T', N, Ω folgt, daß die Abbildung $P_1:\mathscr{S}(N,W,\eta)\to\mathscr{S}(T'\times N\times N,U,\gamma)^{T_\Omega}$, definiert durch

$$(P_1\varphi)(t,x,y)=\int_{C/W}\varphi^t(xcy^{-1})\chi_g(c)d\dot{c},$$

ein Retrakt ist. Wir definieren nun Isomorphismen $V_j:\mathscr{S}(N,W,\eta_j)\to\mathscr{S}(N,W,\eta)$ durch $(V_j\psi)(x)=\psi(x^{t_j^{-1}})$ und setzen $P_j=P_1V_j$ für $1\leqq j\leqq n$. Definiert man noch den Isomorphismus

$$D:\mathscr{S}(T\times N\times N,U,\gamma)^{T_\Omega}\to\bigoplus_{j=1}^{n}\mathscr{S}(T'\times N\times N,U,\gamma)^{T_\Omega}$$

durch $Df=(f|_{t_jT'\times N\times N})_{1\leqq j\leqq n}$ sowie $Q:\mathscr{S}(N)\to\bigoplus_{j=1}^{n}\mathscr{S}(N,W,\eta_j)$ durch $(Q\varphi)_j(x)=\int_W\varphi(xw)\eta_j(w)dw$, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{S}(N) & \xrightarrow{Q} & \bigoplus_{j=1}^{n}\mathscr{S}(N,W,\eta_j)\\
{\scriptstyle R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \oplus P_j}\\
\mathscr{S}(T\times N\times N,U,\gamma)^{T_\Omega} & \xrightarrow{D} & \bigoplus_{j=1}^{n}\mathscr{S}(T'\times N\times N,U,\gamma)^{T_\Omega}
\end{array}$$

kommutativ. Aus der Tatsache, daß die Charaktere $\eta_1,\dots,\eta_n$ paarweise verschieden sind, folgt leicht, daß Q surjektiv ist und eine stetige Umkehrung zuläßt. Damit ist klar, daß R die entsprechenden Eigenschaften besitzt.

Also können wir nunmehr annehmen, daß $\dim\mathfrak{z}=1$, $\eta(Z)=\mathbb{T}$ und daß T trivial auf $\mathfrak{z}$ operiert.

3. Fall. $\dim\mathfrak{z}=1$, $\eta(Z)=\mathbb{T}$, T operiert trivial auf $\mathfrak{z}$. Es gibt ein abelsches T-invariantes Ideal $\mathfrak{w}$, welches $\mathfrak{z}$ echt umfaßt.

Dann gibt es auch ein abelsches Ideal $\mathfrak{w}$, für welches zusätzlich gilt, daß $\mathfrak{w}/\mathfrak{z}$ zentral in $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{w}/\mathfrak{z}$ ein irreduzibler T-Modul ist. Insbesondere ist $\mathfrak{w}$ zwei- oder dreidimensional. Mit $\mathfrak{h}$ sei der Zentralisator von $\mathfrak{w}$ bezeichnet. Wir wählen T-invariante Komplemente $\mathfrak{v}$ zu $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{y}$ zu $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{w}$, also $\mathfrak{n}=\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{w}=\mathfrak{y}\oplus\mathfrak{z}$. Es ist leicht zu sehen, daß die Liesche Klammer eine nicht-ausgeartete Bilinearform $\mathfrak{v}\times\mathfrak{y}\to\mathfrak{z}$ induziert. Schließlich sei noch $\mathfrak{h}'=\mathfrak{h}/\mathfrak{y}$ gesetzt. Nach Konstruktion operiert T auf $\mathfrak{h}'$.

Wie man aus der wohlbekannten Darstellungstheorie nilpotenter Liescher Gruppen, vgl. etwa [17] oder [28], weiß, gibt es zu dem maximalen Ideal Ω (und ebenso zu jedem Ω^t) genau ein maximales Ideal Λ' in $L^1(H')$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist Λ das volle Urbild von Λ' unter der kanonischen Abbildung $L^1(H)$

$\to L^1(H')$, so gilt

$$\Omega = \left\{\left(\bigcap_{x\in N} A^x\right) * L^1(N)\right\}^- .$$

Daraus ergibt sich insbesondere, daß der Stabilisator von A' in T mit T_Ω übereinstimmt.

Auf Grund der Induktionsvoraussetzung existieren zu A' Unteralgebren $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{c}'$ von $\mathfrak{h}'$ sowie ein reelles Funktional g' auf $\mathfrak{h}'$ mit (i)–(vi). Mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, und $\mathfrak{c}$ seien die Urbilder von $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, und $\mathfrak{c}'$ unter $\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}'$ bezeichnet. Das Funktional g auf $\mathfrak{n}=\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{h}$ ist, nach Definition, auf $\mathfrak{v}$ identisch Null und auf $\mathfrak{h}$ die Zusammensetzung aus g' und $\mathfrak{h}\to\mathfrak{h}'$.

Es ist leicht zu sehen, daß das Quadrupel $(g, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ die Eigenschaften (i)–(iv) besitzt.

Zum Nachweis von (v) und (vi) zeigen wir zunächst, daß durch

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}\varphi)(a,b,h) &= \int_Y dr\varphi(\exp(a)hr\exp(-b))\\ &= \int_{\mathfrak{y}} dr\varphi(\exp(a)h\exp(r)\exp(-b))\end{aligned}$$

ein Isomorphismus $\mathscr{F}:\mathscr{S}(N,Z,\eta)\to\mathscr{S}(\mathfrak{v}\times\mathfrak{v}\times H', Z, \eta)$ gegeben ist; Z können wir ja ebensogut als Teil von H' auffassen. Zur Konstruktion der Umkehrabbildung wählen wir ein Komplement $\mathfrak{k}$ zu $\mathfrak{w}=\mathfrak{y}\oplus\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{y}\oplus\mathfrak{z}$. Es existieren dann eindeutig bestimmte Funktionen K, β und ξ auf $\mathfrak{v}\times\mathfrak{v}\times\mathfrak{k}$ mit Werten in $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{y}$ bzw. $\mathfrak{z}$ derart, daß

$$\begin{aligned}&\exp a\exp k\exp b\\ &\quad=\exp(a+b)\exp K(a,b,k)\exp\beta(a,b,k)\exp\xi(a,b,k)\end{aligned}$$

für alle a, $b\in\mathfrak{v}$ und $k\in\mathfrak{k}$ gilt. Nun wird

$$\mathscr{G}:\mathscr{S}(\mathfrak{v}\times\mathfrak{v}\times H', Z, \eta)\to\mathscr{S}(N,Z,\eta)$$

definiert durch

$$\begin{aligned}&(\mathscr{G}\psi)(\exp a\exp\mu\exp s)\\ &\quad=\int_{\mathfrak{v}} db\, e^{ig[b,s]}e^{-ig\xi(a,b,\mu)}\psi(a+b,b,\exp K(a,b,\mu))\end{aligned}$$

für $a\in\mathfrak{v}$, $\mu\in\mathfrak{k}$ und $s\in\mathfrak{y}$. Wir behaupten, daß $\mathscr{G}$ ein zu $\mathscr{F}$ inverser Isomorphismus ist.

Um einzusehen, daß $\mathscr{G}$ tatsächlich ein Isomorphismus ist, geht man folgendermaßen vor. Da die (teilweise) Fourier-Transformation ja bekanntlich ein Isomorphismus der Schwartzschen Räume ist, hat man lediglich zu zeigen, daß durch

$$\varphi\to\tilde\varphi, \qquad \tilde\varphi(a,b,\mu)=e^{-ig\xi(a,b,\mu)}\varphi(a+b,b,K(a,b,\mu)),$$

ein Automorphismus von $\mathscr{S}(\mathfrak{v}\times\mathfrak{v}\times\mathfrak{k})$ definiert ist. Nun sind ξ und K polynomiale Funktionen, und für feste a, b ist $K_{a,b}:\mathfrak{k}\to\mathfrak{k}$, definiert durch $K_{a,b}(\mu)=K(a,b,\mu)$ eine bireguläre Abbildung im Sinne der algebraischen Geometrie. Es gilt nämlich, wie man leicht bestätigt (vgl. auch die weiter unten stehende Rechnung), $K_{a,b}^{-1}(\mu) = K(a+b, -b, \mu)$; insbesondere hängt auch die Umkehrung $K_{a,b}^{-1}$ nicht nur von μ, sondern auch von a und b in polynomialer Weise ab. Daher ist die Variablen-Transformation $(a, b, \mu) \to (a+b,\ b,\ K(a, b, \mu))$ insgesamt biregulär, woraus man schließen kann, daß $\varphi \to \tilde{\varphi}$ in der Tat ein Automorphismus ist.

Der Beweis für die Behauptung, daß $\mathscr{F}$ ein Isomorphismus ist (insbesondere dafür, daß die Werte von $\mathscr{F}$ überhaupt in $\mathscr{S}(\mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \times H', Z, \eta)$ liegen), ist erbracht, wenn wir zeigen können, daß $\mathscr{F} \circ \mathscr{G} = id$ ist, jedenfalls bis auf eine positive Konstante. Sei also $\psi \in \mathscr{S}(\mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \times H', Z, \eta)$, $\varphi = \mathscr{G}\psi$ und $f = \mathscr{F}\varphi$. Für $a, b \in \mathfrak{v}$ und $k \in \mathfrak{k}$ ist

$$\begin{aligned} f(a, b, \exp k) &= (\mathscr{F}\varphi)(a, b, \exp k) \\ &= \int_{\mathfrak{y}} dr \varphi(\exp a \exp k \exp r \exp(-b)) . \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &\exp a \exp k \exp r \exp(-b) \\ &\quad = \exp a \exp k \exp(-b) \exp b \exp r \exp(-b) \\ &\quad = \exp(a-b) \exp K(a, -b, k) \exp \beta(a, -b, k) \\ &\qquad \cdot \exp \xi(a, -b, k) \exp r \exp[b, r] , \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} &\varphi(\exp a \exp k \exp r \exp(-b)) \\ &\quad = e^{-ig\{\xi(a, -b, k) + [b, r]\}} \varphi(\exp(a-b) \exp K(a, -b, k) \\ &\qquad \cdot \exp(r + \beta(a, -b, k))) . \end{aligned}$$

Setzen wir abkürzend $\xi_0 = \xi(a, -b, k)$, $\beta_0 = \beta(a, -b, k)$ und $K_0 = K(a, -b, k)$, so ergibt die Variablentransformation $r' = r + \beta_0$, daß

$$\begin{aligned} &f(a, b, \exp k) \\ &\quad = \int_{\mathfrak{y}} dr\, e^{-ig\{\xi_0 + [b, r - \beta_0]\}} \varphi(\exp(a-b) \exp K_0 \exp r) \\ &\quad = \int_{\mathfrak{y}} dr\, e^{-ig\{\xi_0 + [b, r - \beta_0]\}} \int_{\mathfrak{v}} dc\, e^{ig\{[c, r] - \xi(a-b, c, K_0)\}} \\ &\qquad \cdot \psi(a-b+c, c, \exp K(a-b, c, K_0)) . \end{aligned}$$

Da die Zusammensetzung aus $[\,,\,] : \mathfrak{v} \times \mathfrak{y} \to \mathfrak{z}$ und g eine Dualität zwischen $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{y}$ etabliert, liefert die Fouriersche Inversions-Formel, angewandt auf die Funktion

$$\begin{aligned} h(c) = e^{-ig\xi(a-b, c, K_0)} \psi(a-b+c, c, \exp K(a-b, c, K_0)) ,\ & f(a, b, \exp k) \\ = E\, e^{-ig\{\xi_0 - [b, \beta_0]\}} e^{-ig\xi(a-b, b, K_0)} \psi(a, b, \exp K(a-b, b, K_0)) & \end{aligned}$$

mit einer gewissen positiven Konstanten E.

$\xi(a-b, b, K_0)$ und $K(a-b, b, K_0)$ sind definiert durch die Gleichung

$$\begin{aligned} &\exp(a-b) \exp K_0 \exp(b) \\ &\quad = \exp a \exp K(a-b, b, K_0) \exp \beta(a-b, b, K_0) \exp \xi(a-b, b, K_0) . \end{aligned}$$

Aus der Definition von K_0, β_0 und ξ_0 ergibt sich

$$\exp a \exp k \exp(-b) = \exp(a-b) \exp K_0 \exp \beta_0 \exp \xi_0 ,$$

also

$$\exp(a-b)\exp K_0$$
$$=\exp a \exp k \exp(-b)\exp(-\beta_0)\exp(-\xi_0).$$

Durch Multiplikation mit $\exp b$ und Vergleich mit der obigen Beziehung erhält man

$$\begin{aligned}&\exp(a)\exp k\exp(-b)\exp(-\beta_0)\exp(-\xi_0)\exp b\\&=\exp a\exp K(a-b,b,K_0)\exp\beta(a-b,b,K_0)\\&\quad\cdot\exp\xi(a-b,b,K_0),\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}&\exp k\exp(-\beta_0)\exp(-\xi_0+[b,\beta_0])\\&=\exp K(a-b,b,K_0)\exp\beta(a-b,b,K_0)\exp\xi(a-b,b,K_0)\end{aligned}$$

und damit $k=K(a-b,b,K_0)$ und $\xi(a-b,b,K_0)=-\xi_0+[b,\beta_0]$. Trägt man das in den gewonnenen Ausdruck für $f(a,b,\exp k)$ ein, so folgt $f(a,b,\exp k)=E\psi(a,b,\exp k)$, wie behauptet.

Nach Induktionsvoraussetzung ist die Abbildung

$$R':\mathscr{S}(H',Z,\eta)\to\mathscr{S}(T\times H'\times H',U',\gamma')^{T_\Omega},$$

gegeben durch

$$(R'f)(t,h',k')=\int_{C'/Z}d\dot{c}\,\chi_{g'}(c)f((h'ck'^{-1}),$$

ein Retrakt. Dabei ist natürlich $U'=\{(b',b'c');\ b'\in B',\ c'\in C'\}$, und $\gamma':U'\to\mathbb{T}$ ist gegeben durch $\gamma'(b',b'c')=\chi_{g'}(c')^{-1}$. Dann hat auch

$$id\otimes R':\mathscr{S}(\mathfrak{v}\times\mathfrak{v}\times H',Z,\eta)\to\mathscr{S}(\mathfrak{v}\times\mathfrak{v}\times T\times H'\times H',U',\gamma')^{T_\Omega}$$

die entsprechenden Eigenschaften.

Der Raum $\mathscr{S}(T\times N\times N,U,\gamma)$ ist wegen der Zerlegung $N=\exp(\mathfrak{v})H$ isomorph zu $\mathscr{S}(T\times\mathfrak{v}\times H\times\mathfrak{v}\times H,U,\gamma)$. Die Funktionen in $\mathscr{S}(T\times\mathfrak{v}\times H\times\mathfrak{v}\times H,U,\gamma)$ sind aber konstant auf den Nebenklassen modulo $Y\times Y$ und lassen sich daher als Elemente von $\mathscr{S}(T\times\mathfrak{v}\times H'\times\mathfrak{v}\times H',U',\gamma')$ auffassen. Mit anderen Worten, durch $\psi\to\tilde{\psi}$, $\tilde{\psi}(t,a,h',b,k')=\psi(t,\ \exp(a)h,\ \exp(b)k)$ – wobei h und k irgendwelche Urbilder von h' bzw. k' unter $H\to H'$ sind – ist ein Isomorphismus von $\mathscr{S}(T\times N\times N,U,\gamma)$ auf $\mathscr{S}(T\times\mathfrak{v}\times H'\times\mathfrak{v}\times H',U',\gamma')$ definiert. Unter diesem Isomorphismus wird $\mathscr{S}(T\times N\times N,U,\gamma)^{T_\Omega}$ auf den Teilraum

$$\mathscr{S}(T\times\mathfrak{v}\times H'\times\mathfrak{v}\times H',U',\gamma')^{T_\Omega},$$

bestehend aus allen f mit

$$f(tt_0^{-1},a,h',b,k')=f(t,a^{t_0},h'^{t_0},b^{t_0},k'^{t_0})$$

für $a,\ b\in\mathfrak{v}$, $t\in T$, $t_0\in T_\Omega$ und $h',\ k'\in H'$, abgebildet. Weiter ist

$$\mathscr{K}:\mathscr{S}(T\times\mathfrak{v}\times H'\times\mathfrak{v}\times H',U',\gamma')\to\mathscr{S}(\mathfrak{v}\times\mathfrak{v}\times T\times H'\times H',U',\gamma'),$$

gegeben durch

$$(\mathscr{K} f)(a,b,t,h',k') = f(t,a^t,h',b^t,k'),$$

ein Isomorphismus, da die zugrundeliegende Variablen-Transformation wiederum ein Diffeomorphismus mit höchstens polynomial wachsenden Ableitungen ist. Unter $\mathscr{K}$ geht

$$\mathscr{S}(T\times\mathfrak{v}\times H'\times\mathfrak{v}\times H', U',\gamma')^{T_\Omega}$$

in

$$\mathscr{S}(\mathfrak{v}\times\mathfrak{v}\times T\times H'\times H', U',\gamma')^{T_\Omega}$$

über. Also ist durch $\mathscr{L}\psi := \mathscr{K}\tilde{\psi}$ ein Isomorphismus $\mathscr{L}$ von $\mathscr{S}(T\times N\times N, U,\gamma)^{T_\Omega}$ auf $\mathscr{S}(\mathfrak{v}\times\mathfrak{v}\times T\times H'\times H', U',\gamma')^{T_\Omega}$ definiert.

Die Definitionen sind gerade so eingerichtet, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{S}N,Z,\eta) \arrow[r, "\mathscr{F}"] \arrow[d, "\hat{R}"] & \mathscr{S}(\mathfrak{v}\times\mathfrak{v}\times H',Z,\eta) \arrow[d, "id\otimes R'"] \\ \mathscr{S}(N) \arrow[ur] \arrow[r, "R"'] & \mathscr{S}(T\times N\times N,U,\gamma)^{T_\Omega} \arrow[r, "\mathscr{L}"] & \mathscr{S}(\mathfrak{v}\times\mathfrak{v}\times T\times H'\times H',U',\gamma')^{T_\Omega} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dabei ist mit $\mathscr{S}(N)\to\mathscr{S}(N,Z,\eta)$ natürlich die kanonische Abbildung $\varphi\to\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}(x)=\int_Z \varphi(xz)\eta(z)dz$, gemeint, und $\hat{R}$ ist gegeben durch $\hat{R}\hat{\varphi}=R\varphi$. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt erst einmal, daß das Bild von R aus Schwartzschen Funktionen besteht (genauer müßte man eigentlich die Kommutativität des Diagramms als $\hat{R}=\mathscr{L}^{-1}(id\otimes R')\mathscr{F}$ formulieren). Weiter ist mit R' auch $\hat{R}$ ein Retrakt. Da $\mathscr{S}(N)\to\mathscr{S}(N,Z,\eta)$ eine stetige lineare Umkehrung zuläßt, ist dann R ebenfalls ein Retrakt.

4. Fall. $\mathfrak{n}$ ist isomorph zu einer Heisenbergschen Algebra, $\eta(Z)=\mathbb{T}$, und T operiert trivial auf $\mathfrak{z}$.

Dann ist $T=T_\Omega$ endlich. Man wähle $\mathfrak{a}=0$, $\mathfrak{b}=\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{c}=\mathfrak{z}$. Ist ferner $\mathfrak{v}$ ein T-invariantes Komplement zu $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{n}$, so setze man $g=0$ auf $\mathfrak{v}$ und definiere g auf $\mathfrak{z}$ durch $\eta(\exp X)=e^{ig(x)}$ für $X\in\mathfrak{z}$. Es ist leicht zu sehen, daß damit (i)–(vi) erfüllt sind.

3. $\left(\bigcap_{t\in T}\Omega^t_\infty\right)*\mathscr{S}(N)$ ist total in $\mathscr{S}(N)\cap\bigcap_{t\in T}\Omega^t$.

Wir behalten die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen weitestgehend bei, auch bei den analog zu dort zu diskutierenden möglichen Fällen. Insbesondere seien g und R wie im Abschn. 2 konstruiert. $\mathscr{S}(N)\cap\bigcap_{t\in T}\Omega^t$ ist nichts anderes als der Kern von R.

Satz 4. *Seien N eine einfachzusammenhängende zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe mit Liescher Algebra $\mathfrak{n}$ und T eine kompakte abelsche Liesche Gruppe. T operiere stetig und homomorph durch Automorphismen auf N, $(t,x)\to x^t$. Ω sei ein primitives Ideal in $L^1(N)$, der Stabilisator T_Ω von Ω in T sei endlich. Weiter sei Ω_∞ das Ω entsprechende primitive Ideal in $\mathscr{U}\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{p}=\bigcap_{t\in T}\Omega^t_\infty$. Dann liegt $\mathfrak{p}*\mathscr{S}(N)$ total in $\mathscr{S}(N)\cap\bigcap_{t\in T}\Omega^t$.*

Bemerkung. Die Voraussetzung der Endlichkeit von T_Ω ist offenbar überflüssig: Man kann den Fall eines beliebigen T_Ω sofort auf endliches T_Ω reduzieren (durch Verkleinern von T). Sie ist nur gemacht worden, um die Ergebnisse vom Abschn. 2 unmittelbar anwenden zu können.

Beweis. Der Beweis erfolgt natürlich wieder durch vollständige Induktion über die Dimension von N. Wiederum sei η der zu Ω gehörige Charakter auf dem Zentrum Z von N.

1. Fall. Es gibt eine nicht-triviale, zusammenhängende, T-invariante Untergruppe W von Z mit $\eta(W)=1$.

Es sei $\mathfrak{n}'=\mathfrak{n}/\mathfrak{w}$, Ω' sei das Bild von Ω unter der kanonischen Surjektion $L^1(N) \to L^1(N/W)$ und $\mathfrak{p}'$ sei das Bild von $\mathfrak{p}$ unter der Surjektion $\mathscr{U}\mathfrak{n}\to\mathscr{U}(\mathfrak{n}')$. Dann ist offensichtlich Ω'_∞ das Bild von Ω_∞ unter $\mathscr{U}\mathfrak{n}\to\mathscr{U}(\mathfrak{n}')$ und $\mathfrak{p}'$ ist gleich $\bigcap_{t\in T}\Omega'^{t}_\infty$. Die Behauptung des Satzes folgt aus der entsprechenden Aussage für $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{n}'$ und Ω', wenn wir zeigen, daß der Kern der Surjektion $Q:\mathscr{S}(N)\to\mathscr{S}(N/W)$ im Abschluß des linearen Erzeugnisses von $\mathfrak{p}*\mathscr{S}(N)$ liegt. Nun ist $\mathfrak{p}\cap\mathscr{U}\mathfrak{w}=\mathfrak{w}\mathscr{U}\mathfrak{w}$, und in der Tat liegt $\operatorname{Kern} Q$ in dem vom $\mathfrak{w}*\mathscr{S}(N)$ aufgespannten abgeschlossenen Unterraum von $\mathscr{S}(N)$. Um dieses einzusehen, wähle man ein lineares Komplement $\mathfrak{v}$ zu $\mathfrak{w}$ in $\mathfrak{n}$. Identifiziert man $\mathscr{S}(N)$ mit $\mathscr{S}(\mathfrak{n})=\mathscr{S}(\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{w})$, so geht $\operatorname{Kern} Q$ in

$$E:=\left\{f\in\mathscr{S}(\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{w});\ \int_{\mathfrak{w}} f(X,Y)\,dY=0 \text{ für alle } X\in\mathfrak{v}\right\}$$

über. Und $\mathfrak{w}*\mathscr{S}(N)$ geht in $\mathfrak{w}*\mathscr{S}(\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{w})$ über, wobei die Operatoren aus $\mathfrak{w}$ natürlich nur auf das zweite Argument wirken. Es ist leicht zu sehen, daß E als abgeschlossener Unterraum von $\mathscr{S}(\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{w})$ von Tensoren $f=f_1\otimes f_2\in\mathscr{S}(\mathfrak{v})\otimes\mathscr{S}(\mathfrak{w})$ mit $\int_{\mathfrak{w}} f_2(Y)\,dY=0$ erzeugt wird. Nun läßt sich jede Schwartzsche Funktion φ auf $\mathbb{R}^n$ mit $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx=0$ in der Form $\varphi=\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\varphi_n$ mit passenden $\varphi_j\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ schreiben. Daraus folgt sofort, daß E in dem Abschluß des linearen Erzeugnisses von $\mathfrak{w}*\mathscr{S}(\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{w})$ enthalten ist.

2. Fall. Es gibt eine zweidimensionale zusammenhängende Untergruppe W von Z mit $\eta(W)=\mathbb{T}$, auf welcher T als eindimensionale Automorphismengruppe wirkt.

Wir verwenden dieselben Bezeichnungen wie im entsprechenden Fall beim Beweis von Satz 3 im Abschn. 2, insbesondere zerlegen wir T in $T=T'T_c$ mit endlichem Durchschnitt $F=T'\cap T_c$. Zur Abkürzung sei $\mathscr{S}=\mathscr{S}(T_c\times N, W,\eta)$, und man hat die Abbildung $J:\mathscr{S}(N)\to\mathscr{S}$ mit Bild $J=\mathscr{S}^F$. In einem ersten Schritt zeigen wir:

(1) Kern J ist enthalten im Abschluß des von $\mathfrak{p}*\mathscr{S}(N)$ erzeugten abgeschlossenen Unterraumes von $\mathscr{S}(N)$.

Genauer zeigen wir, daß $\operatorname{Kern} J$ im Abschluß des von $(\mathscr{U}\mathfrak{w}\cap\mathfrak{p})*\mathscr{S}(N)$ erzeugten abgeschlossenen Unterraumes enthalten ist. $\mathfrak{w}$ besitzt eine Basis W_1, W_2 derart, daß mit $D=W_1+iW_2\in\mathscr{U}\mathfrak{w}$ gilt: $D^t=\delta(t)D$, $\bar{D}^t=\overline{\delta(t)}\bar{D}$ für $t\in T$. Das Ideal $\Omega_\infty\cap\mathscr{U}\mathfrak{w}$ in $\mathscr{U}\mathfrak{w}$ wird von $\{X-ig(X);\ X\in\mathfrak{w}\}$ erzeugt. Setzt man $\lambda=g(W_1)^2$

$+g(W_2)^2$, so wird $\mathfrak{p}\cap\mathscr{U}\mathfrak{w}=\bigcap_{t\in T}\{\Omega_\infty\cap\mathscr{U}\mathfrak{w}\}^t$ von $D\bar{D}+\lambda$ erzeugt. Nun ist Kern$J$ nichts anderes als Kern$I$, I wie im Abschn. 2, d.h.

$$I:\mathscr{S}(N)\to\mathscr{S}(T_c/F\times\mathfrak{v}),\qquad (I\varphi)(t,X)=\int_W\varphi(\exp(X)w^{t^{-1}})\eta(w)dw,$$

mit einem T-invarianten Komplement $\mathfrak{v}$ zu $\mathfrak{w}$ in $\mathfrak{n}$. Identifiziert man $\mathscr{S}(N)$ mit $\mathscr{S}(\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{w})$, so geht $(\mathfrak{p}\cap\mathscr{U}\mathfrak{w})*\mathscr{S}(N)$ in $(\mathfrak{p}\cap\mathscr{U}\mathfrak{w})*\mathscr{S}(\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{w})$ über, wobei die Operatoren in $\mathfrak{p}\cap\mathscr{U}\mathfrak{w}$ natürlich nur auf die zweite Variable wirken; explizit: für $P\in\mathfrak{w}$ und $f\in\mathscr{S}(\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{w})$ ist

$$(P*f)(X,Y)=-\partial_P f(X,Y)=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}f(X,Y-sP).$$

Bei dieser Identifikation geht Kern$I$ = Kern$J$ in

$$E:=\left\{f\in\mathscr{S}(\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{w});\ \int_{\mathfrak{w}}f(X+Y^{t^{-1}})e^{ig(Y)}dY=0 \text{ für } X\in\mathfrak{v},\ t\in T_c\right\}$$

über. Da I ein Retrakt ist, wird E als topologischer Vektorraum erzeugt von Tensoren $f_1\otimes f_2$ mit $f_1\in\mathscr{S}(\mathfrak{v})$, $f_2\in\mathscr{S}(\mathfrak{w})$ und

$$\int_{\mathfrak{w}}f_2(Y^{t^{-1}})e^{ig(Y)}dY=0\quad\text{für alle}\quad t\in T_c.$$

Es genügt daher zu zeigen, daß

$$\left\{f\in\mathscr{S}(\mathfrak{w});\ \int_{\mathfrak{w}}f(Y^{t^{-1}})e^{ig(Y)}dY=0 \text{ für alle } t\in T_c\right\}$$

in $(D\bar{D}+\lambda)*\mathscr{S}(\mathfrak{w})$ enthalten ist. Diese Inklusion beweist man leicht mittels Fourierscher Transformation auf $\mathfrak{w}$; in der Tat stimmen die beiden Räume überein.

Wegen (1) und der im Abschn. 2 hergestellten Beziehung zwischen $R:\mathscr{S}(N)\to\mathscr{S}(T\times N\times N,U,\gamma)$ und $R'':\mathscr{S}\to\mathscr{S}(T'\times N\times N,U,\gamma)$ genügt es, das Folgende zu beweisen:

(2) $J(\mathfrak{p}*\mathscr{S}(N))$ ist total in $\mathscr{S}^F\cap\mathrm{Kern}(id\otimes R'')$.

Dazu definieren wir zunächst eine $\mathscr{U}\mathfrak{n}$-Wirkung auf $\mathscr{S}$ derart, daß $J:\mathscr{S}(N)\to\mathscr{S}$ eine $\mathscr{U}\mathfrak{n}$-lineare Abbildung wird. Natürlich operiert $\mathscr{U}\mathfrak{n}$ auf dem Quotienten $\mathscr{S}(N,W,\eta)$ von $\mathscr{S}(N)$; diese Wirkung ist nicht treu, sondern hat gerade das von $\Omega_\infty\cap\mathscr{U}\mathfrak{w}$ erzeugte Ideal als Kern. Für $u\in\mathscr{U}\mathfrak{n}$ und $\psi\in\mathscr{S}$ erklären wir nun

$$(u\psi)(t,x)=[u^t*\psi(t,-)](x).$$

Es ist leicht zu sehen, daß J damit $\mathscr{U}\mathfrak{n}$-linear wird. Daher ist die Behauptung (2) äquivalent zu: $\mathfrak{p}(\mathscr{S}^F)$ ist total in $\mathscr{S}^F\cap\mathrm{Kern}(id\otimes R'')$. Dazu beweisen wir erst einmal

(3) $\mathfrak{p}\mathscr{S}$ ist total in $\mathrm{Kern}(id\otimes R'')$.

Zu (3): Da R'' ein Retrakt ist, wird $\mathrm{Kern}(id\otimes R'')$ als topologischer Vektorraum von Tensoren $\psi_1\otimes\psi_2$ mit $\psi_1\in\mathscr{S}(T_c)$ und $\psi_2\in\mathrm{Kern}\,R''\subset\mathscr{S}(N,W,\eta)$ erzeugt. Nun ist $\mathscr{S}(N,W,\eta)$ ein Quotient von $\mathscr{S}(N/(\mathrm{Kern}\,\eta)_0)$. Setzt man $\mathfrak{p}':=\bigcap_{t\in T'}\Omega_\infty^t$, so ist laut

Induktionsannahme $\mathfrak{p}' * \mathscr{S}(N, W, \eta)$ total in Kern R''. Es reicht also zu zeigen, daß $\psi \otimes v * f$ für jedes $\psi \in \mathscr{S}(T_c)$, jedes $v \in \mathfrak{p}'$ und jedes $f \in \mathscr{S}(N, W, \eta)$ im Abschluß des von $\mathfrak{p}\mathscr{S}$ erzeugten Unterraumes liegt.

Nach Satz 2 läßt sich v in der Form $v = u + q$ mit $u \in \mathfrak{p}$ und $q \in (\mathscr{U}\mathfrak{w} \cap \Omega_\infty)\mathscr{U}\mathfrak{n}$ schreiben. Da $\mathfrak{p}$ in T_c-Eigenräume zerfällt, gibt es eine Darstellung $u = \sum_{j=1}^{n} u_j$ mit $u_j \in \mathfrak{p}$ und $u_j^t = \chi_j(t) u_j$ für gewisse Charaktere χ_j von T_c. Für jedes j liegt $u_j(x_j^{-1} \psi \otimes f)$ in $\mathfrak{p}\mathscr{S}$, und es gilt

$$\{u_j(\chi_j^{-1} \psi \otimes f)\}(t, x) = \psi(t)(u_j * f)(x),$$

also

$$\sum_{j=1}^{n} \{u_j(\chi_j^{-1} \psi \otimes f)\} = \psi \otimes u * f = \psi \otimes v * f.$$

(3) → (2): Für $\psi \in \mathscr{S}$ sei $\psi^{\#} \in \mathscr{S}$ durch $\psi^{\#}(t, x) = \frac{1}{|F|} \sum_{s \in F} \psi(ts, x^s)$ definiert; $\psi \to \psi^{\#}$ ist eine stetige Projektion von $\mathscr{S}$ auf $\mathscr{S}^F$. Man rechnet leicht nach, daß $\#$ mit der $\mathscr{U}\mathfrak{n}$-Modulstruktur auf $\mathscr{S}$ verträglich ist: $(u\psi)^{\#} = u(\psi^{\#})$. Wir haben zu zeigen, daß jedes f aus $\mathscr{S}^F \cap \mathrm{Kern}(id \otimes R'')$ durch Linearkombinationen von Elementen aus $\mathfrak{p}(\mathscr{S}^F)$ approximiert werden kann. Nun läßt sich f nach (3) durch $\sum_{j=1}^{n} u_j \psi_j$ mit $u_j \in \mathfrak{p}$, $\psi_j \in \mathscr{S}$ approximieren. Dann wird $f = f^{\#}$ durch

$$\left(\sum_{j=1}^{n} u_j \psi_j\right)^{\#} = \sum_{j=1}^{n} u_j(\psi_j^{\#}) \in \mathfrak{p}(\mathscr{S}^F)$$

approximiert.

Wie im Abschn. 2 können wir nun annehmen, daß T als endliche Automorphismengruppe auf $\mathfrak{z}$ und Z operiert. Auch hier wollen wir uns als nächstes überlegen, daß man dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen darf, daß T trivial auf Z operiert. Dazu sei wieder $\mathfrak{w}$ ein T-irreduzibler Teilraum von $\mathfrak{z}$ mit $\eta(W) = \mathbb{T}$ und T' der gemeinsame Stabilisator in T der Elemente von $\mathfrak{w}$. Es sei $T = \bigcup_{j=1}^{n} t_j T'$ eine Zerlegung in Nebenklassen, $\eta_j(w) = \eta(w^{t_j})$ für $w \in W$. Auch $Q: \mathscr{S}(N) \to \bigoplus_{j=1}^{n} \mathscr{S}(N, W, \eta_j)$ und $V_j: \mathscr{S}(N, W, \eta_j) \to \mathscr{S}(N, W, \eta)$ seien wie im Abschn. 2. Des weiteren sei $\mathfrak{p}' = \bigcap_{t \in T'} \Omega_\infty^t$. Man überlegt sich leicht, daß Kern Q im Abschluß der linearen Hülle von $\mathfrak{p} * \mathscr{S}(N)$ enthalten ist, offenbar sogar im Abschluß der linearen Hülle von $(\mathscr{U}\mathfrak{w} \cap \mathfrak{p}) * \mathscr{S}(N)$. Es ist daher der von

$$\mathfrak{p} * Q(\mathscr{S}(N)) = \mathfrak{p} * \bigoplus_{j=1}^{n} \mathscr{S}(N, , W, \eta_j)$$

aufgespannte abgeschlossene Unterraum zu bestimmen. Transformiert man $\mathfrak{p} * \bigoplus_{j=1}^{n} \mathscr{S}(N, W, \eta_j)$ mittels $\bigoplus_{j=1}^{n} V_j$ in $\bigoplus_{j=1}^{n} \mathscr{S}(N, W, \eta)$, so erhält man

$$E := \{(u^{t_1} * f_1, \ldots, u^{t_n} * f_n);\ u \in \mathfrak{p},\ f_j \in \mathscr{S}(N, W, \eta)\}.$$

Nun wird aber $\mathscr{S}(N,W,\eta)$ von $(\mathscr{U}\mathfrak{w}\cap\Omega_\infty)\mathscr{U}\mathfrak{n}$ annulliert. Da die Charaktere $\eta_1,\ldots,\eta_n$ paarweise verschieden sind, folgt aus dem chinesischen Restsatz, daß die Abbildung

$$\mathscr{U}\mathfrak{w}\to\bigoplus_{j=1}^{n}\mathscr{U}\mathfrak{w}/\mathscr{U}\mathfrak{w}\cap\Omega_\infty(\cong\mathbb{C}^n),\qquad u\to(u^{t_1},\ldots,u^{t_n})$$

surjektiv ist. Das gilt dann auch für die entsprechende Abbildung $\mathscr{U}\mathfrak{n}\to\bigoplus_{j=1}^{n}\mathscr{U}\mathfrak{n}/(\mathscr{U}\mathfrak{w}\cap\Omega_\infty)\mathscr{U}\mathfrak{n}$. Man weist leicht nach, daß das Bild von $\mathfrak{p}$ unter dieser Abbildung gerade $\bigoplus_{j=1}^{n}\mathfrak{p}'/(\mathscr{U}\mathfrak{w}\cap\Omega_\infty)\mathscr{U}\mathfrak{n}$ ist. Also ist

$$E=\{(u_1*f_1,\ldots,u_n*f_n);\ u_j\in\mathfrak{p}',\ f_j\in\mathscr{S}(N,W,\eta)\}.$$

Nimmt man an, daß $\mathfrak{p}'*\mathscr{S}(N)$ total in $\Omega'=\bigcap_{t\in T'}\Omega^t$ ist, so folgt leicht, daß $\mathfrak{p}*\mathscr{S}(N)$ in Ω total ist.

3. Fall. $\dim\mathfrak{z}=1$, $\eta(Z)=\mathbb{T}$, T operiert trivial auf $\mathfrak{z}$. Es gibt ein abelsches T-invariantes Ideal $\mathfrak{w}$, welches $\mathfrak{z}$ echt umfaßt.

Genauso wie im entsprechenden Fall im Abschn. 2 gibt es dann ein abelsches Ideal $\mathfrak{w}$, für welches zusätzlich gilt, daß $\mathfrak{w}/\mathfrak{z}$ zentral in $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{w}/\mathfrak{z}$ ein irreduzibler T-Modul ist. Wie dort sei $\mathfrak{h}$ der Zentralisator von $\mathfrak{w}$ in $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{w}=\mathfrak{y}\oplus\mathfrak{z}$, $\mathfrak{n}=\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}'=\mathfrak{h}/\mathfrak{y}$.

Wir wollen im folgenden annehmen, daß $\mathfrak{y}$ (und dann auch $\mathfrak{v}$) zweidimensional ist, da in diesem Falle gewisse Komplikationen auftreten. Wenn man den zweidimensionalen Fall beherrscht, ist klar, wie der eindimensionale zu behandeln ist.

Die Komplikationen rühren daher, daß $\mathfrak{v}$ im allgemeinen keine (abelsche) Algebra zu sein braucht, was dazu führt, daß der Transport der $\mathscr{U}\mathfrak{n}$-Modulstruktur von $\mathscr{S}(N,Z,\eta)$ auf $\mathscr{S}(\mathfrak{v}\times\mathfrak{v}\times H',Z,\eta)$ längs $\mathscr{F}$ zu unnötig komplizierten Formeln führt. Wir betrachten stattdessen zwei entsprechende „eindimensionale Transformationen" und zeigen, daß sich deren Kompositum in genau angebbarer Weise von $\mathscr{F}$ unterscheidet.

Dazu wählen wir irgendeine Zerlegung $\mathfrak{y}=\mathfrak{y}_1\oplus\mathfrak{y}_2$ von $\mathfrak{y}$ in eindimensionale Unterräume. Dieser entspricht einer Zerlegung $\mathfrak{v}=\mathfrak{v}_1\oplus\mathfrak{v}_2$ mit $[\mathfrak{v}_i,\mathfrak{y}_j]=\delta_{ij}\mathfrak{z}$. Dann sei $\mathfrak{h}_2=\mathfrak{h}+\mathfrak{v}_2$ und $\mathfrak{h}_2'=\mathfrak{h}_2/\mathfrak{y}_1$. Wie im Abschn. 2 ist durch

$$(\mathscr{F}_1\varphi)(a_1,b_1,h_2')=\int_{\mathfrak{y}_1}dr\,\varphi(\exp(a_1)h_2\exp r\exp(-b_1))$$

ein Isomorphismus $\mathscr{F}_1:\mathscr{S}(N,Z,\eta)\to\mathscr{S}(\mathfrak{v}_1\times\mathfrak{v}_1\times H_2',Z,\eta)$ definiert. Entsprechend ist $\mathscr{S}(H_2',Z,\eta)$ zu $\mathscr{S}(\mathfrak{v}_2\times\mathfrak{v}_2\times H',Z,\eta)$ isomorph und dann, durch Tensorieren mit der Identität, $\mathscr{S}(\mathfrak{v}_1\times\mathfrak{v}_1\times H_2',Z,\eta)$ zu $\mathscr{S}(\mathfrak{v}_1\times\mathfrak{v}_1\times\mathfrak{v}_2\times\mathfrak{v}_2\times H',Z,\eta)$ isomorph. Explizit ist ein solcher Isomorphismus $\mathscr{F}_2$ durch

$$(\mathscr{F}_2\psi)(a_1,b_1,a_2,b_2,h')=\int_{\mathfrak{y}_2}dr\,\psi(a_1,b_1,\exp(a_2)h\exp r\exp(-b_2))$$

für $\psi\in\mathscr{S}(\mathfrak{v}_1\times\mathfrak{v}_1\times H_2',Z,\eta)$ gegeben (dabei ist natürlich h irgendein Urbild von h' unter $H/Y_1\to H'=H/Y$).

Für $a_1\in\mathfrak{v}_1$ und $a_2\in\mathfrak{v}_2$ sei $s(a_1,a_2)\in H$ durch

$$\exp(a_1)\exp(a_2)=\exp(a_1+a_2)s(a_1,a_2)$$

definiert; mit $s'(a_1, a_2)$ bezeichnen wir das Bild von $s(a_1, a_2)$ in H'. Damit erklären wir

$$S : \mathscr{S}(\mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \times H', Z, \eta) \to \mathscr{S}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2 \times \mathfrak{v}_2 \times H', Z, \eta)$$

durch

$$(Sf)(a_1, b_1, a_2, b_2, h') = f(a_1 + a_2, b_1 + b_2, s'(a_1, a_2)h's'(b_1, b_2)^{-1})$$

und behaupten, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{S}(N, Z, \eta) & \xrightarrow{\mathscr{F}_1} & \mathscr{S}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1 \times H_2', Z, \eta) & \xrightarrow{\mathscr{F}_2} & \mathscr{S}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2 \times \mathfrak{v}_2 \times H', Z, \eta) \\ & \searrow^{\mathscr{F}} & & \nearrow_{S} & \\ & & \mathscr{S}(\mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \times H', Z, \eta) & & \end{array}$$

kommutiert.

Für $\varphi \in \mathscr{S}(N, Z, \eta)$ ist

$$\begin{aligned} &((\mathscr{F}_2 \circ \mathscr{F}_1)\varphi)(a_1, b_1, a_2, b_2, h') \\ &= \int_{\mathfrak{y}_2} dr_2 (\mathscr{F}_1 \varphi)(a_1, b_1, \exp(a_2) h \exp r_2 \exp(-b_2)) \\ &= \int_{\mathfrak{y}_2} dr_2 \int_{\mathfrak{y}_1} dr_1 \, \varphi(\exp(a_1) \exp(a_2) h \exp r_2 \\ &\quad \cdot \exp(-b_2) \exp r_1 \exp(-b_1)) \\ &= \int_{\mathfrak{y}_2} \int_{\mathfrak{y}_1} dr_1 dr_2 \, \varphi(\exp(a_1) \exp(a_2) h \exp(r_1 + r_2) \\ &\quad \cdot \exp(-b_2) \exp(-b_1)), \end{aligned}$$

da $\exp(-b_2)$ und $\exp r_1$ kommutieren, und andererseits

$$\begin{aligned} &\{(\mathscr{S} \circ \mathscr{F})\varphi\}(a_1, b_1, a_2, b_2, h') \\ &= (\mathscr{F}\varphi)(a_1 + a_2, b_1 + b_2, s'(a_1, a_2) h' s'(b_1, b_2)^{-1}) \\ &= \int_{\mathfrak{y}_1} \int_{\mathfrak{y}_2} dr_1 dr_2 \, \varphi(\exp(a_1 + a_2) s(a_1, a_2) h s(b_1, b_2)^{-1} \\ &\quad \cdot \exp(r_1 + r_2) \exp(-b_1 - b_2)). \end{aligned}$$

Da $\exp(r_1 + r_2)$ mit $s(b_1, b_2) \in H$ vertauscht und

$$\exp(a_1 + a_2) s(a_1, a_2) = \exp(a_1) \exp(a_2)$$

sowie

$$s(b_1, b_2)^{-1} \exp(-b_1 - b_2) = \exp(-b_2) \exp(-b_1)$$

gelten, folgt $\mathscr{F}_2 \circ \mathscr{F}_1 = S \circ \mathscr{F}$ wie behauptet.

Zu dem Tripel (N, T, Ω) gehören Unteralgebren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{n}$ sowie ein Funktional g auf $\mathfrak{n}$, wie im Abschn. 2 konstruiert. Insbesondere können wir annehmen, daß $\mathfrak{y}$ in $\mathfrak{a}$ gelegen ist, so daß g auf $\mathfrak{y}$ verschwindet und daher ein Funktional g' auf $\mathfrak{h}'$ definiert. Zu dem Paar (g, C) bilden wir die Abbildung R, ebenso R' zu (g', C') mit $C' = C/Y$. Kern R ist nichts anderes als $\mathscr{S}(N) \cap \bigcap_{t \in T} \Omega^t$, und Kern R' ist gleich $\mathscr{S}(H') \cap \bigcap_{t \in T} \Lambda'^t$ wobei Λ' das zu g' gehörige maximale Ideal in $L^1(H')$ bezeichnet. Wir fassen nun R und R' als Abbildungen auf den Quotienten $\mathscr{S}(N, Z, \eta)$ und $\mathscr{S}(H', Z, \eta)$ von $\mathscr{S}(N)$ bzw. $\mathscr{S}(H')$ auf. Auf Grund der Untersuchungen im Abschn. 2 ist $\mathscr{F}(\operatorname{Kern} R) = \operatorname{Kern}(id \otimes R')$. Da R' ein Retrakt ist, ist $\operatorname{Kern}(id \otimes R')$ der Abschluß von $\mathscr{S}(\mathfrak{v} \times \mathfrak{v}) \otimes \operatorname{Kern} R'$. Nun ist $\operatorname{Kern}(id \otimes R')$ invariant unter dem Automorphismus $f \to \tilde{f}$ von $\mathscr{S}(\mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \times H', Z, \eta)$, welcher durch

$$\tilde{f}(a_1 + a_2, b_1 + b_2, h') = f(a_1 + a_2, b_1 + b_2, s'(a_1, a_2)^{-1} h' s'(b_1, b_2)^{-1})$$

mit $a_1, b_1 \in \mathfrak{v}_1$, $a_2, b_2 \in \mathfrak{v}_2$ und $h' \in H'$ gegeben ist; denn $\operatorname{Kern} R'$ ist invariant unter Links- und Rechtstranslationen. Also ist $\operatorname{Kern}(id \otimes R')$ auch der Abschluß von

$$\{\tilde{f};\, f \in \mathscr{S}(\mathfrak{v} \times \mathfrak{v}) \otimes \operatorname{Kern} R'\}.$$

Dann ist aber

$$S\mathscr{F}(\operatorname{Kern} R) = S(\operatorname{Kern} id \otimes R')$$

der Abschluß von

$$\{S\tilde{f};\, f \in \mathscr{S}(\mathfrak{v} \times \mathfrak{v}) \otimes \operatorname{Kern} R'\} = \mathscr{S}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2 \times \mathfrak{v}_2) \otimes \operatorname{Kern} R'.$$

Um zu zeigen, daß $\mathfrak{p} * \mathscr{S}(N)$ total in $\bigcap_{t \in T} \Omega^t \cap \mathscr{S}(N)$ ist, reicht es also zu beweisen, daß die Elemente aus dem dichten Teil $\mathscr{S}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2 \times \mathfrak{v}_2) \otimes \operatorname{Kern} R'$ von $S\,\mathscr{F}(\operatorname{Kern} R) = \mathscr{F}_2 \mathscr{F}_1(\operatorname{Kern} R)$ durch Linearkombinationen von Elementen aus $\mathscr{F}_2 \mathscr{F}_1(\mathfrak{p} * \mathscr{S}(N, Z, \tilde{\eta}))$ approximiert werden können. Da auf Grund der Induktionsannahme $\mathfrak{p}' * \mathscr{S}(H', Z, \eta)$ total in $\operatorname{Kern} R'$ ist $\left(\text{mit } \mathfrak{p}' = \bigcap_{t \in T} \Lambda_\infty^{\prime t}\right)$, braucht man sich nur davon zu überzeugen, daß $\mathscr{S}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2 \times \mathfrak{v}_2) \otimes \mathfrak{p}' * \mathscr{S}(H', Z, \eta)$ in $\mathscr{F}_2 \mathscr{F}_1(\mathfrak{p} * \mathscr{S}(N, Z, \eta))$ enthalten ist.

Dazu zeigen wir zunächst, daß zu jedem $u' \in \mathscr{U}\mathfrak{h}'$ ein $u \in \mathscr{U}\mathfrak{h}$ existiert mit $(\mathscr{F}_1 \mathscr{F}_2)(u * \varphi) = u' * (\mathscr{F}_2 \mathscr{F}_1)\varphi$ für $\varphi \in \mathscr{S}(N, Z, \tilde{\eta})$, wobei $u' * \psi$ für $\psi \in \mathscr{S}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2 \times \mathfrak{v}_2 \times H', Z, \eta)$ natürlich die Anwendung von u' auf die letzte Variable bedeutet. Im übrigen ist u modulo dem von $\{z - ig(z);\, z \in \mathfrak{z}\}$ erzeugten Ideal eindeutig bestimmt. All das wird leicht aus den Eigenschaften der „reduzierenden Quadrupel“, siehe [9, 4.7.7], folgen. Die Konstruktion von u erfolgt in zwei Schritten. Man zeigt zunächst, daß zu u' ein $u_2 \in \mathscr{U}(\mathfrak{h}/\mathfrak{y}_1)$ mit $\mathscr{F}_2(u_2 * \psi) = u' * \mathscr{F}_2\psi$ für alle $\psi \in \mathscr{S}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1 \times H'_2, Z, \eta)$ existiert und dann, daß zu (jedem) $u_2 \in \mathscr{U}(\mathfrak{h}/\mathfrak{y}_1)$ ein $u \in \mathscr{U}\mathfrak{h}$ mit $\mathscr{F}_1(u * \varphi) = u_2 * \mathscr{F}_1\varphi$ für alle $\varphi \in \mathscr{S}(N, Z, \eta)$ existiert.

Es wird nur die Konstruktion von u_2 vorgeführt; die Konstruktion von u zu gegebenem u_2 verläuft völlig analog. Dazu sei $z \in \mathfrak{z}$ mit $g(z) = 1$ gewählt, weiter seien $x_2 \in \mathfrak{v}_2 \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{v}_2/\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{h}'_2$ und $y_2 \in \mathfrak{y}/\mathfrak{y}_1 \cong \mathfrak{y}_2 \subset \mathfrak{h}'_2$ mit $[x_2, y_2] = z$ gewählt. Der Zentralisator von y_2 in $\mathfrak{h}'_2$ ist gerade $\mathfrak{h}/\mathfrak{y}_1$, und $(x_2, y_2, z, \mathfrak{h}/\mathfrak{y}_1)$ ist ein reduzierendes Quadrupel für $\mathfrak{h}'_2$. Die Ergebnisse aus [9] werden später auf das reduzierende Quadrupel $(-x_2, iy_2, -iz, \mathfrak{h}/\mathfrak{y}_1 \otimes \mathbb{C})$ von $\mathfrak{h}'_2 \otimes \mathbb{C}$ angewendet. Für $v \in \mathfrak{h}'_2$ läßt sich $\mathscr{F}_2(v * \psi)$ leicht direkt durch v und $\mathscr{F}_2\psi$ ausdrücken. Ist $v = x_2$, so gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}_2(x_2 * \psi)(a_1, b_1, a_2, b_2, h') \\
&\quad = \int_{\mathfrak{v}_2} dr_2 (x_2 * \psi)(a_1, b_1, \exp(a_2) h \exp r_2 \exp(-b_2)) \\
&\quad = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \int_{\mathfrak{v}_2} dr_2 \psi(a_1, b_1, \exp(-t x_2) \exp(a_2) h \exp r_2 \exp(-b_2)) \\
&\quad = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathscr{F}_2 \psi(a_1, b_1, a_2 - t x_2, b_2, h'),
\end{aligned}$$

d. h.

$$\mathscr{F}_2(x_2 * \psi) = -\frac{\partial}{\partial x_2}\mathscr{F}_2\psi .$$

Ist $v \in \mathfrak{h}/\mathfrak{y}_1 \subsetneqq \mathfrak{h}'_2$, so ist

$$\mathscr{F}_2(v * \psi)(a_1, b_1, a_2, b_2, h')$$
$$= \int_{\mathfrak{y}_2} dr_2 \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \psi(a_1, b_1, \exp(-tv)\exp(a_2)h\exp r_2 \exp(-b_2)) .$$

Nun ist

$$\exp(-tv)\exp(a_2) = \exp(a_2)\exp\left(-t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}ad(-a_2)^n(v)\right).$$

Mit den Setzungen $a_2 = \alpha x_2$ und

$$v_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}ad(-a_2)^n(v) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}ad(-x_2)^n(v) \in \mathfrak{h}/\mathfrak{y}_1$$

erhält man

$$\mathscr{F}_2(v * \psi)(a_1, b_1, a_2, b_2, h')$$
$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int_{\mathfrak{y}_2} dr_2 \psi(a_1, b_1, \exp(a_2)\exp(-tv_\alpha)h\exp r_2 \exp(-b_2))$$
$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\mathscr{F}_2\psi)(a_1, b_1, a_2, b_2, \exp(-tv_\alpha)'h')$$
$$= \{v'_\alpha * \mathscr{F}_2\psi(a_1, b_1, a_2, b_2, -)\}(h') ,$$

d. h. v_α wirkt nur auf die letzte Variable, die Wirkung hängt aber von der dritten Variablen ab; mit v'_α ist natürlich das Bild von v_α unter $\mathfrak{h}/\mathfrak{y}_1 \to h/\mathfrak{y}$ bezeichnet. Wegen $g(z) = 1$ ist $z * \psi = i\psi$. Durch Spezialisieren auf $v = y_2$ ergibt die obige Formel (wegen $y'_2 = 0$)

$$\mathscr{F}_2(y_2 * \psi)(a_1, b_1, a_2, b_2, h') = -i\alpha\mathscr{F}_2\psi(a_1, b_1, a_2, b_2, h') .$$

Bezeichnet man, analog zu [9, 4.7.8], die durch $-x_2$ induzierte Derivation auf $\mathscr{U}(\mathfrak{h}/\mathfrak{y}_1)$ mit δ, so lehren die dortigen Rechnungen zusammen mit den obigen Formeln: Ist $v \in \mathscr{U}(\mathfrak{h}/\mathfrak{y}_1)$ irgendein Urbild von u' unter der kanonischen Abbildung $\mathscr{U}(\mathfrak{h}/\mathfrak{y}_1) \to \mathscr{U}(\mathfrak{h}/\mathfrak{y})$, so ist durch

$$u_2 := \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!}\delta^m v(iy_2)^m$$

ein Element in $\mathscr{U}(\mathfrak{h}/\mathfrak{y}_1)$ mit $\mathscr{F}_2(u_2 * \psi) = u' * \mathscr{F}_2\psi$ definiert.

Folglich gibt es zu jedem $u' \in \mathfrak{p}' = \bigcap_{t \in T} \Lambda^t_\infty \lhd \mathscr{U}(\mathfrak{h}/\mathfrak{y})$ ein $u \in \mathscr{U}\mathfrak{h}$ mit $(\mathscr{F}_2\mathscr{F}_1)(u * \varphi) = u' * (\mathscr{F}_2\mathscr{F}_1)\varphi$ für alle $\varphi \in \mathscr{S}(N, Z, \eta)$. Ein solches u liegt dann notwendigerweise in $\mathfrak{p}$; denn $u \in \mathfrak{p}$ ist äquivalent zu

$$u * \mathscr{S}(N, Z, \eta) \subsetneqq \operatorname{Kern} R$$

und zu

$$(\mathscr{F}_2\mathscr{F}_1)(u * \mathscr{S}(N, Z, \eta))$$
$$= u' * \mathscr{S}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2 \times \mathfrak{v}_2, H', Z, \eta) \subseteq \mathscr{F}_2\mathscr{F}_1(\operatorname{Kern} R),$$

was wegen $u' \in \mathfrak{p}'$ wahr ist. Daher ist

$$\mathscr{S}(\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2 \times \mathfrak{v}_2) \otimes \mathfrak{p}' * \mathscr{S}(H', Z, \eta)$$

in

$$\mathscr{F}_2\mathscr{F}_1(\mathfrak{p} * \mathscr{S}(N, Z, \eta))$$

enthalten. Wie wir oben gesehen haben, folgt daraus die Behauptung des Satzes auch in diesem Fall.

4. Fall. $\mathfrak{n}$ ist isomorph zu einer Heisenbergschen Algebra, $\eta(Z) = \mathbb{T}$, und T operiert trivial auf $\mathfrak{z}$.

Dann ist $\mathfrak{p} = \Omega_\infty$ und $\mathscr{S}(N) \cap \bigcap_{t \in T} \Omega^t = \Omega \cap \mathscr{S}(N)$, d. h., die Wirkung der Gruppe T ist für die Aussage des Satzes irrelevant. Man kann also $T = \{1\}$ annehmen. Dann befindet man sich aber wieder im 3. Fall, wenn man von dem trivialen Fall eines eindimensionalen $\mathfrak{n}$ absieht.

4. Kerne von $T \ltimes M$-Bahnen sind infinitesimal bestimmt

Als erstes wird gezeigt, daß jedenfalls die Kerne von T-Bahnen infinitesimal bestimmt sind. Der folgende Beweis basiert auf derselben Idee wie der Beweis für den entsprechenden Satz in [21].

Satz 5. *Seien N eine einfachzusammenhängende zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe mit Liescher Algebra $\mathfrak{n}$ und T eine kompakte abelsche Liesche Gruppe. T operiere stetig und homomorph durch Automorphismen auf N, $(t, x) \to x^t$. Ω sei ein maximales Ideal in $L^1(N)$, Ω_∞ sei das entsprechende Ideal in $\mathscr{U}\mathfrak{n}$. Weiter sei $\mathfrak{p} = \bigcap_{t \in T} \Omega_\infty^t$. Dann ist $\mathfrak{p} * \mathscr{D}(N)$ total in $\bigcap_{t \in T} \Omega^t$ (in der L^1-Norm).*

Bemerkung. Der Beweis wird zeigen, daß ein entsprechender Satz auch für Beurlingsche Algebren $L^1_w(N)$ richtig ist, d. h. $\mathfrak{p} * \mathscr{D}(N)$ liegt dicht in $L^1_w(N) \cap \bigcap_{t \in T} \Omega^t$, sofern man voraussetzt, daß das Gewicht w höchstens polynomial wächst. Diese Voraussetzung stellt sicher, daß $\mathscr{S}(N)$ in $L^1_w(N)$ enthalten ist.

Beweis. Durch Übergang zu einer Untergruppe von T, falls erforderlich, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß der Stabilisator T_Ω von Ω in T endlich ist. Da $\mathscr{D}(N)$ approximierende Einsen für $L^1(N)$ enthält und da $\mathfrak{p}$ unter $Ad(N)$, ausgedehnt auf $\mathscr{U}\mathfrak{n}$, invariant ist, ist

$$\langle \mathfrak{p} * \mathscr{D}(N) \rangle^- = \langle \mathscr{D}(N) * \mathfrak{p} \rangle^- = \langle \mathscr{D}(N) * \mathfrak{p} * \mathscr{D}(N) \rangle^- = \langle \mathfrak{p} * \mathscr{S}(N) \rangle^-$$
$$= \langle \mathscr{S}(N) * \mathfrak{p} \rangle^- = \langle \mathscr{S}(N) * \mathfrak{p} * \mathscr{S}(N) \rangle^- .$$

Es genügt also zu zeigen, daß $\mathfrak{p} * \mathscr{S}(N)$ total in $\bigcap_{t \in T} \Omega^t$ ist.

Zu den Daten T, N, Ω seien $g \in \mathfrak{n}^*$ sowie Unteralgebren $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ von $\mathfrak{n}$ gemäß Satz 3 gewählt. Dann haben wir den Retrakt $R: \mathscr{S}(N) \to \mathscr{S}(T \times N \times N, U, \gamma)^{T_\Omega}$ mit $\operatorname{Kern} R = \mathscr{S}(N) \cap \bigcap_{t \in T} \Omega^t$. Sei nun ξ ein beschränktes lineares Funktional auf $L^1(N)$ mit $\xi(\mathfrak{p} * \mathscr{S}(N)) = 0$. Wir haben zu zeigen, daß auch $\xi\left(\bigcap_{t \in T} \Omega^t\right) = 0$ ist. Für jeden Charakter μ von T sei

$$L^1(N)^\mu = \{f \in L^1(N);\ f^t = \mu(t) f \text{ für alle } t \in T\}$$

und $\mathscr{S}(N)^\mu = \mathscr{S}(N) \cap L^1(N)^\mu$; $\mathscr{S}(N)^\mu$ liegt offensichtlich dicht in $L^1(N)^\mu$. Wir fixieren nun erst einmal $\mu \in \hat{T}$ sowie $p, q \in \mathscr{S}(N)^T = \mathscr{S}(N)^1$ und zeigen, daß das regularisierte Funktional $\varphi \to \xi(p * \varphi * q)$ sogar C^*-stetig auf $L^1(N)^\mu$ ist. Durch Einschränkung definiert ξ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathscr{S}(N)$, und nach Satz 4 faktorisiert ξ durch R, es gibt also ein stetiges lineares Funktional $\tilde{\xi}$ auf $\mathscr{S}(T \times N \times N, U, \gamma)^{T_\Omega}$ mit $\xi(\varphi) = \tilde{\xi}(R\varphi)$. Insbesondere interessieren uns die Werte von $\tilde{\xi}$ auf $R(\mathscr{S}(N)^\mu)$; man beachte, daß mit φ auch $p * \varphi * q$ in $\mathscr{S}(N)^\mu$ liegt. $R(\mathscr{S}(N)^\mu)$ ist offenbar nichts anderes als

$$\begin{aligned} \mathscr{S}(T \times N \times N, U, \gamma)^\mu := \{\psi \in \mathscr{S}(T \times N \times N, U, \gamma);\ & \psi(t, x, y) = \mu(t) \psi(1, x, y) \\ & \text{sowie } \psi(1, x^{t_0}, y^{t_0}) = \mu(t_0)^{-1} \psi(1, x, y) \\ & \text{für alle } x, y \in N,\ t \in T,\ t_0 \in T_\Omega\}\,. \end{aligned}$$

Definieren wir, für späteren Gebrauch gleich etwas allgemeiner,

$$\mathscr{S}(T \times N \times N, U, \gamma) \to \mathscr{S}(N \times N, U, \gamma)\,, \qquad \psi \to \psi_1\,,$$

durch $\psi_1(x, y) = \psi(1, x, y)$, so liefert diese Abbildung einen Isomorphismus von $\mathscr{S}(T \times N \times N, U, \gamma)^\mu$ auf einen abgeschlossenen Teilraum von $\mathscr{S}(N \times N, U, \gamma)$.

Nun wählen wir eine Polarisierung $\mathfrak{h}$ für g mit $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$; es gilt natürlich $\dim \mathfrak{h}/\mathfrak{c} = \dim \mathfrak{b}/\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ ist im wesentlichen eine Polarisierung für g auf der Heisenbergschen Algebra $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$. Mit H sei die entsprechende Untergruppe von N bezeichnet, $\chi_g: H \to \mathbb{T}$ sei definiert durch $\chi_g(\exp X) = e^{ig(X)}$ für $X \in \mathfrak{h}$ (dies ist eine Fortsetzung des ursprünglichen $\chi_g: C \to \mathbb{T}$). $\mathscr{S}(N \times N, U, \gamma)$ ist isomorph zu $\mathscr{S}(N \times N, H \times H, \chi_g \times \bar{\chi}_g)$ via

$$(\mathscr{F}\psi)(x, y) := \int_{H/C} d\dot{a}\, \chi_g(a) \psi(xa, y)$$

für $\psi \in \mathscr{S}(N \times N, U, \gamma)$. Die Umkehrabbildung ist, bis auf eine Konstante (die von der Normalisierung der invarianten Maße abhängt), gegeben durch

$$(\mathscr{G}\varphi)(x, y) = \int_{B/H} d\dot{b}\, \varphi(xb, yb)\,.$$

Diese Isomorphismen stellen, nebenbei bemerkt, den Zusammenhang zwischen der hier behandelten Beschreibung von $\mathscr{S}(N)/\mathscr{S}(N) \cap \Omega$ und der früher von Howe in [14] gegebenen her.

Wir beweisen exemplarisch, daß $(\mathscr{F} \circ \mathscr{G})\varphi = \varphi$ für $\varphi \in \mathscr{S}(N \times N, H \times H, \chi_g \times \bar{\chi}_g)$ ist. Der Beweis für $\mathscr{G} \circ \mathscr{F} = id$ verläuft ähnlich (in der Tat ist er sogar etwas einfacher) und beruht ebenso auf der Fourierschen Inversionsformel für Vektorgruppen.

Nach Definition ist

$$\{(\mathscr{F} \circ \mathscr{G})\varphi\}(x, y) = \int_{H/C} d\dot{a}\, \chi_g(a) \int_{B/H} d\dot{b}\, \varphi(xab, yb)\,.$$

Nun ist

$$\varphi(xab, yb) = \varphi(xbb^{-1}ab, yb) = \chi_g(b^{-1}a^{-1}b)\varphi(xb, yb).$$

Definieren wir bei festen x, y die Funktion f auf $\dot{B} := B/H$ durch $f(\dot{b}) = \varphi(xb, yb)$, so ist also

$$\{(\mathscr{F} \circ \mathscr{G})\varphi\}(x, y) = \int_{H/C} d\dot{a} \int_{\dot{B}} d\dot{b}\, \chi_g(a)\chi_g(\dot{b}^{-1}a^{-1}\dot{b}) f(\dot{b}).$$

Erklärt man für $\dot{a} \in H/C$ die Funktion $\tau_{\dot{a}} : \dot{B} \to \mathbb{T}$ durch $\tau_{\dot{a}}(\dot{b}) = \chi_g(a)\chi_g(\dot{b}^{-1}a^{-1}\dot{b})$, so ist $\tau_{\dot{a}}$ ein Charakter von $\dot{B}$ und $\dot{a} \to \tau_{\dot{a}}$ ist ein Isomorphismus von H/C auf die Charaktergruppe von $\dot{B}$. Die Homomorphie von $\tau_a : \dot{B} \to \mathbb{T}$ ist gleichbedeutend mit

$$\chi_g(a)\chi_g(b^{-1}a^{-1}b)\chi_g(a)\chi_g(d^{-1}a^{-1}d) = \chi_g(a)\chi_g(d^{-1}b^{-1}a^{-1}bd)$$

für alle b, $d \in B$ und $a \in H$ und mit

$$\chi_g(b^{-1}a^{-1}b)\chi_g(a) = \chi_g(d^{-1}b^{-1}a^{-1}bd)\chi_g(d^{-1}ad).$$

Nun ist

$$\chi_g(d^{-1}b^{-1}a^{-1}bd)\chi_g(d^{-1}ad) = \chi_g(d^{-1}b^{-1}a^{-1}bad).$$

Aber $b^{-1}a^{-1}ba$ ist zentral in B/A. Also gilt

$$\chi_g(d^{-1}b^{-1}a^{-1}bad) = \chi_g(b^{-1}a^{-1}ba) = \chi_g(b^{-1}a^{-1}b)\chi_g(a),$$

wie behauptet. Es ist nicht schwer zu sehen, daß $\dot{a} \to \tau_{\dot{a}}$ homomorph in $\dot{a}$ und daß $\dot{a} \to \tau_{\dot{a}}$ injektiv ist. Aus Dimensionsgründen ist dann $\dot{a} \to \tau_{\dot{a}}$ ein Isomorphismus. Die Fouriersche Inversionsformel für die Vektorgruppe $\dot{B} = B/H$ liefert

$$\{(\mathscr{F} \circ \mathscr{G})\varphi\}(x, y) = \int_{H/C} d\dot{a} \int_{\dot{B}} d\dot{b}\, \tau_{\dot{a}}(\dot{b}) = f(\dot{e}) = \varphi(x, y).$$

Weiter ist $\mathscr{S}(N \times N, H \times H, \chi_g \times \bar{\chi}_g)$ isomorph zu $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ mit $n = \dim N/H$. Einen solchen, sehr willkürlichen Isomorphismus kann man wie folgt konstruieren, vgl. [14] und den Anfang vom Abschn. 2. Für eine passende Basis $X_1, \ldots, X_n$ in einem passenden linearen Komplement von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{n}$ ist die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \times H \to N, \qquad (s_1, \ldots, s_n, h) \to \exp(s_n X_n) \cdot \ldots \cdot \exp(s_1 X_1) h$$

ein Diffeomorphismus und für integrierbare Funktionen ψ auf N/H gilt

$$\int_{N/H} \psi(\dot{\alpha}) d\dot{\alpha} = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\exp(s_n X_n) \cdot \ldots \cdot \exp(s_1 X_1)) ds_1 \cdot \ldots \cdot ds_n$$

bis auf eine feste positive Konstante. Man definiert dann

$$\mathscr{K} : \mathscr{S}(N \times N, H \times H, \chi_g \times \bar{\chi}_g) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$$

durch

$$\begin{aligned}(\mathscr{K}\varphi)(r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_n)\\ = \varphi(\exp(r_n X_n) \cdot \ldots \cdot \exp(r_1 X_1), \exp(s_n X_n) \cdot \ldots \cdot \exp(s_1 X_1)).\end{aligned}$$

Durch Zusammensetzen erhält man schließlich eine Einbettung von $S(T \times N \times N, U, \gamma)^\mu$ auf einen abgeschlossenen Unterraum von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$

$$\begin{aligned}&\mathscr{S}(T \times N \times N, U, \gamma)^\mu\\ &\longrightarrow \mathscr{S}(N \times N, U, \gamma) \xrightarrow{\mathscr{F}} \mathscr{S}(N \times N, H \times H, \chi_g \times \bar{\chi}_g) \xrightarrow{\mathscr{K}} \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n}).\end{aligned}$$

Das gegebene stetige lineare Funktional $\tilde{\xi}$ auf $\mathscr{S}(T\times N\times N, U,\gamma)^{\mu}$ kann man mittels dieser Einbettung als ein stetiges Funktional auf einem abgeschlossenen Teilraum von $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ auffassen. Dort erlaubt es eine stetige lineare Fortsetzung, es gibt also eine temperierte Distribution ξ' auf $\mathbb{R}^{2n}$ mit

$$\tilde{\xi}(\psi)=(\xi'\circ\mathscr{K}\circ\mathscr{F})(\psi_1)$$

für $\psi\in\mathscr{S}(T\times N\times N, U,\gamma)^{\mu}$.

Zu ξ' existieren, vgl. [31], p. 239, ein stetiges $\zeta\in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ und ein Differentialoperator D auf $\mathbb{R}^{2n}$ mit polynomialen Koeffizienten derart, daß

$$\xi'(v)=\int_{\mathbb{R}^{2n}}\zeta(a)(Dv)(a)da$$

für alle $v\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2n})$ gilt.

Wir drücken nun das Funktional $\varphi\to\xi(p*\varphi*q)$, $\varphi\in\mathscr{S}(N)^{\mu}$, durch ξ' und damit durch ζ und D aus. Sei $f=p*\varphi*q$ mit einem $\varphi\in\mathscr{S}(N)^{\mu}$. Es ist

$$\xi(f)=\tilde{\xi}(Rf)=(\xi'\circ\mathscr{K}\circ\mathscr{F})((Rf)_1).$$

Und für $(Rf)_1$ findet man durch einige Variablen-Transformationen (hinter denen natürlich nichts anderes als die Tatsache steckt, daß die $(Rf)_1, (R\varphi)_1, \ldots$ die Kerne zu gewissen Operatoren im Darstellungsraum von $\operatorname{ind}_C^N \chi_g$ sind):

$$(Rf)_1(x,y)=\int_{N/C}d\dot{\alpha}\int_{N/C}d\dot{\beta}(Rp)_1(x,\beta)(R\varphi)_1(\beta,\alpha)(Rq)_1(\alpha,y).$$

Aus dem gleichen Grunde gilt

$$\begin{aligned}[\mathscr{F}((Rf)_1)](x,y)=\int_{N/H}d\dot{\alpha}\int_{N/H}d\dot{\beta}[\mathscr{F}((Rp)_1)](x,y)[\mathscr{F}((R\varphi)_1)](\beta,\alpha)\\ \cdot[\mathscr{F}((Rq)_1)](\alpha,y)\end{aligned}$$

oder, indem man $\tilde{f}:=\mathscr{F}((Rf)_1)$ setzt und entsprechend $\tilde{\varphi}$, $\tilde{p}$ und $\tilde{q}$ erklärt,

$$\tilde{f}(x,y)=\int_{N/H}d\dot{\alpha}\int_{N/H}d\dot{\beta}\,\tilde{p}(x,\beta)\tilde{\varphi}(\beta,\alpha)\tilde{q}(\alpha,y).$$

Setzt man weiter $f'=\mathscr{K}\tilde{f}$ und erklärt φ', p' und q' entsprechend, so erhält man durch Ausnutzen der Beziehung zwischen dem invarianten Maß auf N/H und dem Lebesgueschen Maß auf $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}&f'(r_1,\ldots,r_n,s_1,\ldots,s_n)\\ &=\int_{\mathbb{R}^n}d\alpha_1,\ldots,d\alpha_n\int_{\mathbb{R}^n}d\beta_1,\ldots,d\beta_n p'(r_1,\ldots,r_n,\beta_1,\ldots,\beta_n)\\ &\quad\cdot\varphi'(\beta_1,\ldots,\beta_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)q'(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,s_1,\ldots,s_n),\end{aligned}$$

bis auf eine feste positive Konstante, welche allein von der Normalisierung der jeweiligen invarianten Maße abhängt und für die folgende Argumentation unerheblich ist.

Also ist

$$\begin{aligned}\xi(p*\varphi*q)&=\xi(f)=(\xi'\circ\mathscr{K}\circ\mathscr{F})((Rf)_1)=\xi'(f')\\ &=\int_{\mathbb{R}^n}dr\int_{\mathbb{R}^n}ds\,\zeta(r,s)(Df')(r,s)\end{aligned}$$

mit

$$r=(r_1,\ldots,r_n)\,,\qquad s=(s_1,\ldots,s_n)$$

und daher

$$|\xi(p*\varphi*q)|\leqq\|\zeta\|_2\,\|Df'\|_2\,.$$

Nun läßt sich Df' in der Form

$$(Df')(r,s)=\sum_{j=1}^{k}\int_{\mathbb{R}^n}d\alpha\int_{\mathbb{R}^n}d\beta\,P_j(r,\beta)\varphi'(\beta,\alpha)Q_j(\alpha,s)$$

mit gewissen Schwartzschen Funktionen $P_1,\ldots,P_k$, $Q_1,\ldots,Q_k$ schreiben, die sich durch Anwendung von D auf p' und q' ergeben. Deutet man P_j und φ' als Kerne von Integraloperatoren K_j bzw. Φ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$(\Phi\psi)(\beta)=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi'(\beta,\alpha)\psi(a)d\alpha$$

und

$$(K_j\psi)(\beta)=\int_{\mathbb{R}^n}P_j(\beta,\alpha)\psi(a)d\alpha\,,$$

so erhält man

$$(Df')(r,s)=\sum_{j=1}^{k}\left[(K_j\circ\Phi)(Q_j(-,s))\right](r)$$

und damit

$$\|Df'\|_2\leqq\sum_{j=1}^{k}\|K_j\|\,\|\Phi\|\,\|Q_j\|_2\,.$$

Also gilt

$$|\xi(p*\varphi*q)|\leqq\|\zeta\|_2\sum_{j=1}^{k}\|K_j\|\,\|\Phi\|\,\|Q_j\|_2=E\|\Phi\|$$

mit einer Konstanten E, die natürlich von p und q abhängt. Bildet man die induzierte Darstellung $\pi=\operatorname*{ind}_H^N\chi_g$ und realisiert diese in $L^2(\mathbb{R}^n)$ mittels des oben angegebenen Diffeomorphismus $\mathbb{R}^n\times H\to N$, so ist Φ nichts anderes als $\pi(\varphi)$. Damit ergibt sich

$$|\xi(p*\varphi*q)|\leqq E\|\pi(\varphi)\|\quad\text{für alle}\quad\varphi\in\mathscr{S}(N)^\mu\,.$$

Diese Ungleichung gilt dann auch für alle $\varphi\in L^1(N)^\mu$. Liegt nun φ in $L^1(N)^\mu\cap\bigcap_{t\in T}\Omega_t$ und damit insbesondere in $\Omega=\operatorname{Kern}\pi$, so ist $\xi(p*\varphi*q)=0$ für alle $p,q\in\mathscr{S}(N)^T$. Läßt man p und q eine approximierende Eins von $L^1(N)$ durchlaufen, so ergibt sich $\xi\left(L^1(N)^\mu\cap\bigcap_{t\in T}\Omega^t\right)=0$ für jedes $\mu\in\hat{T}$. Da aber $\sum_{\mu\in T}L^1(N)^\mu\cap\bigcap_{t\in T}\Omega^t$ dicht in $\bigcap_{t\in T}\Omega^t$ liegt, folgt $\xi\left(\bigcap_{t\in T}\Omega^t\right)=0$ wie behauptet.

Mit einem ähnlichen Trick wie in [27] kann man Satz 5 wesentlich verschärfen.

Satz 6. *Seien N einfachzusammenhängende, zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe mit Liescher Algebra* $\mathfrak{n}$ *und* A *ein primitives Ideal in* $L^1(N)$, A_γ *sei das entsprechende Ideal in* $\mathscr{U}\mathfrak{n}$. *G sei ein semidirektes Produkt* $T \ltimes M$ *aus einer kompakten abelschen Lieschen Gruppe T und einer einfachzusammenhängenden, zusammenhängenden nilpotenten Lieschen Gruppe M. G operiere stetig und homomorph durch Automorphismen auf N und dann auch auf* $\mathfrak{n}$, *dabei operiere M durch unipotente Automorphismen auf* $\mathfrak{n}$. *Es sei* $\mathscr{X} = \{A^x;\ x \in G\}$, $k(\mathscr{X}) = \bigcap_{x\in G} A^x \lhd L^1(N)$ *und* $\mathfrak{q} = \bigcap_{x\in G} A^x_\gamma \lhd \mathscr{U}\mathfrak{n}$. *Dann ist* $\mathfrak{q} * \mathscr{S}(N)$ *total in* $k(\mathscr{X})$.

Bemerkung. Vermutlich ist ein entsprechender Satz auch für Beurlingsche Algebren $L^1_w(N)$ mit einem polynomial wachsenden Gewicht w richtig, vgl. auch die Bemerkung im Anschluß an Satz 5. Allerdings läßt sich der unten stehende Beweis nicht ohne weiteres auf die allgemeinere Situation übertragen, da die dort konstruierte Darstellung ϱ von H in $L^1(N)$ den Unterraum $L^1_w(N)$ nicht immer invariant läßt.

Beweis. G ist als Menge das kartesische Produkt $T \times M$, und die Multiplikation in G ist gegeben durch

$$(t,a)(s,b) = (ts, \alpha(s)^{-1}(a)b)$$

mit einem stetigen Homomorphismus $\alpha: T \to \mathrm{Aut}(M)$. Die Tatsache, daß G auf N operiert, bedeutet, daß man zwei stetige Homomorphismen $\beta: T \to \mathrm{Aut}(N)$ und $\gamma: M \to \mathrm{Aut}(N)$ mit

$$\gamma(\alpha(s)(a)) = \beta(s)\gamma(a)\beta(s)^{-1}$$

für alle $a \in M$, $s \in T$ gegeben hat.

Wir bilden die Hilfsgruppe H. H ist als Menge gleich $M \times N \times N$, und die Multiplikation ist definiert durch:

$$(a', x', y')(a, x, y) = (a'a, \gamma(a)^{-1}(x')x, x^{-1}\gamma(a)^{-1}(y')xy).$$

Auf Grund der Voraussetzungen ist H eine einfachzusammenhängende, zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe. Wir werden bei den folgenden Rechnungen H vornehmlich als das semidirekte Produkt aus der Untergruppe $K = M \times N \times \{e\}$ und dem Normalteiler $\{e\} \times \{e\} \times N \cong N$ ansehen, $H = K \ltimes N$. Es ist leicht nachzurechnen, daß durch

$$\delta(t)(a,x,y) = (\alpha(t)(a), \beta(t)(x), \beta(t)(y)) \quad \text{für} \quad t \in T, \quad (a,x,y) \in H,$$

ein stetiger Homomorphismus $\delta: T \to \mathrm{Aut}(H)$ definiert ist.

H wirkt auf Funktionen $f: N \to \mathbb{C}$ durch

$$\{\varrho(a,x,y)f\}(z) = f(y^{-1}x^{-1}\gamma(a)^{-1}(z)x) \quad \text{für} \quad z \in N, \quad (a,x,y) \in H.$$

Im besonderen ist hierdurch eine stark stetige Darstellung von H in dem Banachschen Raum $L^1(N)$ erklärt. Jedes $\varrho(a,x,y)$ ist eine lineare Isometrie auf $L^1(N)$; daher kann ϱ zu einer Darstellung von $L^1(H)$ integriert werden, die ebenfalls mit ϱ bezeichnet wird. Es sei I der Abschluß der linearen Hülle von $\mathfrak{q} * \mathscr{D}(N)$ in $L^1(N)$. Da I und $k(\mathscr{X})$ unter der Darstellung ϱ invariant sind, liefert diese auch Darstellungen ϱ_I und ϱ_k von H (und von $L^1(H)$) in $E:=L^1(N)/I$ bzw. in $L^1(N)/k(\mathscr{X})$. Mit Hilfe von Satz 5 werden wir beweisen, daß $\operatorname{Kern}_{L^1(H)}\varrho_I = \operatorname{Kern}_{L^1(H)}\varrho_k$ ist. Daraus folgt Satz 6, denn dann stimmen auch $\operatorname{Kern}_{L^1(N)}\varrho_I = I$ und $\operatorname{Kern}_{L^1(N)}\varrho_k = k(\mathscr{X})$ überein. Mit $\operatorname{Ann}_{\mathscr{U}\mathfrak{h}}(E)$ bezeichnen wir den infinitesimalen Annullator von E in der universellen Einhüllenden $\mathscr{U}\mathfrak{h}$ der Lieschen Algebra $\mathfrak{h}$ von H, d.h.

$$\begin{aligned}\operatorname{Ann}_{\mathscr{U}\mathfrak{h}}(E) &= \{w \in \mathscr{U}\mathfrak{h};\, w * \mathscr{D}(H) \subseteqq \operatorname{Ann}_{L^1(H)}(E)\}\\ &= \{w \in \mathscr{U}\mathfrak{h};\, \varrho(w * \mathscr{D}(H)) \subseteqq I\}.\end{aligned}$$

Korrekterweise sollte man wohl $\operatorname{Ann}_{\mathscr{U}\mathfrak{h}}(E_\infty)$ schreiben, doch die Bezeichnung $\operatorname{Ann}_{\mathscr{U}\mathfrak{h}}(E)$ ist unmißverständlich.

Die nächsten Betrachtungen werden zeigen, daß man das Ideal $\operatorname{Ann}_{\mathscr{U}\mathfrak{h}}(E)$ auch direkt aus $\mathfrak{q}$ gewinnen kann. Für die folgende Konstruktion vergleiche man auch [9, 2.5.3]. $\mathscr{U}\mathfrak{n}$ operiert durch Linksmultiplikation auf $\mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{q}$, $\sigma_\mathfrak{q}: \mathscr{U}\mathfrak{n} \to \operatorname{End}(\mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{q})$. Die Liesche Algebra $\mathfrak{k}$ von K operiert auf $\mathfrak{n}$ durch Derivationen, die sich eindeutig zu Derivationen von $\mathscr{U}\mathfrak{n}$ fortsetzen lassen. Diese Derivationen lassen $\mathfrak{q}$ invariant (da $\mathfrak{q}$ invariant unter Konjugation mit Elementen aus K ist), und man erhält eine lineare Abbildung $\sigma_\mathfrak{q}: \mathfrak{k} \to \operatorname{End}(\mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{q})$. Zusammen ergibt sich eine lineare Abbildung $\sigma_\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} + \mathfrak{n}$ in $\operatorname{End}(\mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{q})$, und man rechnet leicht nach, daß $\sigma_\mathfrak{q}$ eine Darstellung der Lieschen Algebra $\mathfrak{h}$ und damit auch von $\mathfrak{U}\mathfrak{h}$ ist. Es wird sich erweisen, daß $\operatorname{Ann}_{\mathscr{U}\mathfrak{h}}(E)$ gerade gleich $\operatorname{Kern}\sigma_\mathfrak{q} = \operatorname{Ann}_{\mathscr{U}\mathfrak{h}}(\mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{q})$ ist.

Zur Bestimmung von $\operatorname{Kern}\sigma_\mathfrak{q}$ berechnen wir den Annullator der Nebenklasse $[1] \in \mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{q}$. Jedes Element in $\mathscr{U}\mathfrak{h}$ läßt sich in der Form $\sum_{j=1}^m u_j v_j$ mit $u_j \in \mathscr{U}\mathfrak{n}$, $v_j \in \mathscr{U}\mathfrak{k}$ schreiben, [9, 2.2.10]. Für $v \in \mathscr{U}\mathfrak{k}$ gilt $v[1] = \chi(v)[1]$, wobei mit $\chi(v)$ der konstante Term in v bezeichnet ist, oder auch: χ ist derjenige Algebrenhomomorphismus $\mathscr{U}\mathfrak{k} \to \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Kern}\chi = \mathfrak{k}\mathscr{U}\mathfrak{k}$. Also ist

$$\begin{aligned}\sigma_\mathfrak{q}\left(\sum_{j=1}^m u_j v_j\right)[1] &= \sum_{j=1}^m \sigma_\mathfrak{q}(u_j)(\chi(v_j)[1])\\ &= \sum_{j=1}^m \chi(v_j)[u_j] = \left[\sum_{j=1}^m \chi(v_j) u_j\right].\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\operatorname{Ann}_{\mathscr{U}\mathfrak{h}}([1]) = \Delta_\mathfrak{q} \quad \text{mit}$$

$$\Delta_\mathfrak{q} := \left\{\sum_{j=1}^m u_j v_j;\; u_j \in \mathscr{U}\mathfrak{n},\; v_j \in \mathscr{U}\mathfrak{k},\; \sum_{j=1}^m \chi(v_j) u_j \in \mathfrak{q}\right\}. \tag{1}$$

Da $\mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{q}$ offensichtlich ein zyklischer $\mathscr{U}\mathfrak{h}$-Modul ist, ist $\operatorname{Kern}\sigma_\mathfrak{q}$ gleich dem größten in $\Delta_\mathfrak{q}$ enthaltenen zweiseitigen Ideal. Die obige Konstruktion läßt sich natürlich für jedes K-invariante Linksideal in $\mathscr{U}\mathfrak{n}$ oder, was dasselbe ist, jedes M-invariante zweiseitige Ideal in $\mathscr{U}\mathfrak{n}$ durchführen. Nun ist $\mathfrak{c} = \bigcap_{a \in M} \gamma(a)(\Delta_\infty)$ ein solches Ideal, und man findet eine Darstellung $\sigma_\mathfrak{c}$ von $\mathscr{U}\mathfrak{h}$ in $\mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{c}$. $\sigma_\mathfrak{c}$ ist sogar eine irreduzible Darstellung von $\mathscr{U}\mathfrak{h}$. Denn ein $\sigma_\mathfrak{c}(\mathscr{U}\mathfrak{h})$-invarianter Unterraum von $\mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{c}$ entspricht einem M-invarianten, zweiseitigen Ideal $\mathfrak{d}$ in $\mathcal{U}\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{d} \subset \mathcal{U}\mathfrak{n}$. Ist $\mathfrak{d}$ ein echtes Ideal, so gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{b}$ mit $\mathfrak{d} \subset \mathfrak{b}$. Insbesondere liegt $\mathfrak{b}$ in der Hülle $h(\mathfrak{c})$ von $\mathfrak{c}$. Diese ist aber nach der Bemerkung am Ende des Abschn. 1 nichts anderes als die $M_{\mathbb{C}}$-Bahn von Λ_{σ}. Da $\mathfrak{d}$ nicht nur unter M, sondern auch unter $M_{\mathbb{C}}$ invariant ist, ergibt sich daraus, daß $\mathfrak{d}$ in $\mathfrak{c}$ enthalten ist. Also ist $\operatorname{Kern} \sigma_{\mathfrak{c}}$ ein primitives Ideal in $\mathcal{U}\mathfrak{h}$ und folglich sogar maximal.

Der Dualraum von $L^1(N)$ läßt sich mit $L^\infty(N)$ via $\langle \varphi, f \rangle = \int\limits_N \varphi(x) f(x) dx$ für $\varphi \in L^\infty(N)$, $f \in L^1(N)$ identifizieren, und der Dualraum von $E = L^1(N)/I$ ist identifizierbar mit

$$I^\perp = \left\{ \varphi \in L^\infty(N) ; \int\limits_N \varphi(x) f(x) dx = 0 \text{ für alle } f \in I \right\}.$$

Sei $E' \subseteqq I^\perp$ der Raum der Gårdingschen Vektoren für die zu ϱ_I kontragradiente Darstellung von H. Es gibt dann, vgl. [32, p. 256], eine Anti-Darstellung ϱ_I' von $\mathcal{U}\mathfrak{h}$ in E' mit $\langle \varrho_I'(w)\varphi, f \rangle = \langle \varphi, \varrho_{I,\infty}(w) f \rangle$ für $\varphi \in E'$, $f \in E$, und $w \in \mathcal{U}\mathfrak{h}$. Da E' schwach dicht in $I^\perp$ liegt, ist $\operatorname{Ann}_{\mathcal{U}\mathfrak{h}}(E) = \operatorname{Kern} \varrho_I'$.

Setzt man wie üblich $\check{\varphi}(x) = \varphi(x^{-1})$ für Funktionen φ auf N und bezeichnet mit $u \to \check{u}$, $u \in \mathcal{U}\mathfrak{n}$, den entsprechenden Anti-Isomorphismus von $\mathcal{U}\mathfrak{n}$, so rechnet man ohne Mühe nach, daß

$$\varrho_I'(u)\varphi = (\check{\varphi} * u)\check{} = \check{u} * \varphi \quad \text{für} \quad u \in \mathcal{U}\mathfrak{n} \quad \text{und} \quad \varphi \in E' \quad \text{gilt}. \tag{2}$$

Insbesondere ist $\check{\mathfrak{q}} * E' = 0$. (2) folgt übrigens auch aus der allgemeineren Formel

$$\{\varrho_I'(X)\varphi\}(y) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \{\varrho(\exp(-sX))\varphi\}(y) \quad \text{für} \quad X \in \mathfrak{h}, y \in N$$

und $\quad \varphi \in E'$. (3)

Zu (3): Sei $f \in \mathcal{D}(N)$, und $f' \in \mathcal{D}(N)$ sei definiert durch

$$f'(y) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} [\varrho(\exp(sX))f\}(y).$$

Mit $[f]$ bzw. $[f']$ bezeichnen wir die entsprechenden Nebenklassen in $E = L^1(N)/I$. Damit ist $\varrho_{I,\infty}([f]) = [f']$. Da die $[f]$, $f \in \mathcal{D}(N)$, in E dicht liegen, ist die Funktion $\psi := \varrho_I'(X)\varphi \in E'$ durch die Gleichung $\langle \psi, [f] \rangle = \langle \varphi, [f'] \rangle$ oder $\langle \psi, f \rangle = \langle \varphi, f' \rangle$ eindeutig festgelegt. Es ist daher lediglich nachzuprüfen, daß die Funktion $\tilde{\varphi}$,

$$\tilde{\varphi}(y) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \{\varrho(\exp(-sX))\varphi\}(y),$$

der Beziehung $\langle \tilde{\varphi}, f \rangle = \langle \varphi, f' \rangle$ genügt. Letzteres folgt aber leicht aus der Identität $\langle \varrho(h^{-1})\varphi, f \rangle = \langle \varphi, \varrho(h) f \rangle$ für alle $h \in H$, $f \in \mathcal{D}(N)$ und $\varphi \in E'$.

Aus (3) zieht man die für das Folgende wichtige Konsequenz, daß $\{\varrho_I'(X)\varphi\}(e) = 0$ für $X \in \mathfrak{k}$ und $\varphi \in E'$ und mithin $\{\varrho_I'(v)\varphi\}(e) = \chi(v)\varphi(e)$ für $v \in \mathcal{U}\mathfrak{k}$. Ist weiter w ein beliebiges Element in $\mathcal{U}\mathfrak{h}$, $w = \sum_{j=1}^m u_j v_j$ mit $u_j \in \mathcal{U}\mathfrak{n}$ und $v_j \in \mathcal{U}\mathfrak{k}$, so gilt

$$\varrho_I'(w)\varphi = \sum_{j=1}^m \varrho_I'(v_j)(\check{u}_j * \varphi)$$

und also

$$(\varrho'_I(w)\varphi)(e) = \sum_{j=1}^{m} \chi(v_j)(\check{u}_j * \varphi)(e).$$

Nun können wir zeigen, daß

$$\operatorname{Kern}\sigma_{\mathfrak{q}} \subseteqq \operatorname{Kern}\varrho'_I = \operatorname{Kern}\varrho_{I,\alpha} \subseteqq \operatorname{Kern}\varrho_{k,\alpha}. \tag{4}$$

Die mittlere Gleichung und die letzte Inklusion sind klar. Es bleibt also die erste Inklusion zu zeigen. Ist $w \in \operatorname{Kern}\sigma_{\mathfrak{q}}$, so ist für $\varphi \in E'$ und $y \in N$:

$$\begin{aligned}(\varrho'_I(w)\varphi)(y) &= \{\varrho(e,e,y^{-1})\varrho'(w)\varphi\}(e)\\ &= \{\varrho(e,e,y^{-1})\varrho'_I(w)\varrho(e,e,y)\varrho(e,e,y^{-1})\varphi\}(e)\\ &= (\varrho'_I(\tilde{w})\psi)(e) \quad \text{mit} \quad \psi = \varrho(e,e,y^{-1})\varphi \in E'\\ &\quad \text{und} \quad \tilde{w} = (e,e,y^{-1})(w),\end{aligned}$$

womit natürlich die Anwendung (= Konjugation) von $(e,e,y^{-1}) \in H$ auf $w \in \mathscr{U}\mathfrak{h}$ gemeint ist. Mit w liegt auch $\tilde{w}$ in $\operatorname{Kern}\sigma_{\mathfrak{q}}$, also insbesondere in $\Lambda_{\mathfrak{q}}$. Es gibt folglich eine Darstellung $\tilde{w} = \sum_{j=1}^{m} u_j v_j$ mit $u_j \in \mathscr{U}\mathfrak{n}$, $v_j \in \mathscr{U}\mathfrak{k}$ und $u := \sum_{j=1}^{m} \chi(v_j)u_j \in \mathfrak{q}$. Man erhält

$$\begin{aligned}(\varrho'_I(w)\varphi)(y) &= (\varrho'_I(\tilde{w})\psi)(e)\\ &= \sum_{j=1}^{m} \chi(v_j)(\check{u} * \psi)(e) = (\check{u} * \psi)(e) = 0,\end{aligned}$$

da $u \in \mathfrak{q}$ und $\psi \in E'$. Damit ist der Beweis für (4) erbracht.

Wir wollen Satz 5 auf ein passendes maximales Ideal Ω in $L^1(H)$ anwenden. Dieses wird wie folgt konstruiert. Man bilde $F := L^1(N) \bigcap_{a \in M} \gamma(a)\Lambda$. Die Wirkung ϱ von H auf $L^1(N)$ macht auch F zu einem H- und $L^1(H)$-Modul, und man nimmt als Ω den Annullator von F in $L^1(H)$.

Man kann auf verschiedene Weisen einsehen, daß Ω maximal ist, z. B. kann man, von einer irreduziblen involutiven Darstellung τ von $L^1(N)$ mit $\operatorname{Kern}\tau = \Lambda$ ausgehend, ohne Schwierigkeiten eine irreduzible involutive Darstellung π von $L^1(H)$ mit $\operatorname{Kern}\pi = \Omega$ angeben (dies wurde in [27] getan). Eine andere Möglichkeit ist die folgende. Wendet man die obigen Betrachtungen auf den Fall $T = \{1\}$ an $\left(\text{dann geht } k(\mathscr{T}) \text{ in } \bigcap_{a \in M} \gamma(a)\Lambda \text{ und } \mathfrak{q} \text{ in } \mathfrak{c} = \bigcap_{a \in M} \gamma(a)\Lambda_{\alpha} \text{ über}\right)$, so liefert (4) speziell, daß $\operatorname{Kern}\sigma_{\mathfrak{c}}$ in $\Omega_\alpha := \operatorname{Ann}_{\mathscr{U}\mathfrak{h}}(F)$ enthalten ist. Nun ist aber $\operatorname{Kern}\sigma_{\mathfrak{c}}$ maximal, also gilt

$$\operatorname{Kern}\sigma_{\mathfrak{c}} = \Omega_\infty. \tag{5}$$

Nach [19] („Wienersche Eigenschaft" nilpotenter Liescher Gruppen) gibt es zu Ω eine irreduzible involutive Darstellung π von $L^1(H)$ mit $\Omega \subseteqq \operatorname{Kern}\pi$. Dann ist aber auch Ω_∞ in $\operatorname{Kern}\pi_\alpha$ enthalten. Wegen der Maximalität von $\operatorname{Kern}\sigma_{\mathfrak{c}}$ ist $\operatorname{Kern}\pi_\alpha = \Omega_\infty$. Also gilt $\operatorname{Kern}\pi_\infty * \mathscr{D}(H) \subseteqq \Omega$ und dann auch $\operatorname{Kern}\pi \subseteqq \Omega$ nach Satz 5; folglich ist $\Omega = \operatorname{Kern}\pi$ maximal.

Wie im Satz 5 setzen wir $\mathfrak{p} := \bigcap_{t \in T} \delta(t)(\Omega_\infty)$. Es gilt zunächst

$$\operatorname{Kern} \varrho_{k,\infty} = \operatorname{Ann}_{\mathscr{U}\mathfrak{h}}(L^1(N)/k(\mathscr{X})) \subseteqq \mathfrak{p}. \tag{6}$$

Da $\operatorname{Kern} \varrho_{k,\infty}$ invariant unter T ist, genügt es zu zeigen, daß $\operatorname{Kern} \varrho_{k,\infty}$ in Ω_∞ gelegen ist. Das ist aber klar, da $k(\mathscr{X})$ in $\bigcap_{a \in M} \gamma(a)\Lambda$ enthalten ist.

Weiter gilt

$$\mathfrak{p} \subseteqq \operatorname{Ann}_{\mathscr{U}\mathfrak{h}}(\mathscr{U}\mathfrak{n}/\mathfrak{q}) = \operatorname{Kern} \sigma_{\mathfrak{q}}. \tag{7}$$

Da $\operatorname{Kern} \sigma_{\mathfrak{q}}$ das größte in $\Delta_{\mathfrak{q}}$ gelegene zweiseitige Ideal ist, genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{p}$ in $\Delta_{\mathfrak{q}}$ enthalten ist. Nun liegt aber $\bigcap_{t \in T} \delta(t)(\Delta_{\mathfrak{c}})$ in $\Delta_{\mathfrak{q}}$ denn: Ist

$$\sum_{j=1}^{m} u_j v_j \in \bigcap_{t \in T} \delta(t)(\Delta_{\mathfrak{c}})$$

mit $u_j \in \mathscr{U}\mathfrak{n}$ und $v_j \in \mathscr{U}\mathfrak{n}$ und $v_j \in \mathscr{U}\mathfrak{k}$, so ist

$$\delta(t)\left(\sum_{j=1}^{m} u_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \delta(t)(u_j)\delta(t)(v_j) \in \Delta_{\mathfrak{c}} \quad \text{für alle} \quad t \in T,$$

also

$$\sum_{j=1}^{m} \chi(\delta(t)v_j)\delta(t)(u_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \chi(v_j)\delta(t)(u_j) = \sum_{j=1}^{m} \chi(v_j)\beta(t)(u_j) \in \mathfrak{c}$$

und folglich

$$\sum_{j=1}^{m} \chi(v_j)u_j \in \beta(t^{-1})\mathfrak{c} \quad \text{für alle} \quad t \in T.$$

Mithin liegt $\sum_{j=1}^{m} \chi(v_j)u_j$ in $\bigcap_{t \in T} \beta(t)\mathfrak{c} = \mathfrak{q}$, also $\sum_{j=1}^{m} u_j v_j$ in $\Delta_{\mathfrak{q}}$. Es reicht daher zu zeigen, daß $\mathfrak{p} = \bigcap_{t \in T} \delta(t)(\Omega_\infty)$ in $\bigcap_{t \in T} \delta(t)(\Delta_{\mathfrak{c}})$ enthalten ist. Das ist aber klar wegen (5).

(4), (6) und (7) ergeben zusammen

$$\mathfrak{p} = \operatorname{Kern} \sigma_{\mathfrak{q}} = \operatorname{Kern} \varrho_{I,\infty} = \operatorname{Kern} \varrho_{k,\infty}. \tag{8}$$

Mithin gilt

$$\{\mathfrak{p} * \mathscr{D}(H)\}^- \subseteqq \operatorname{Ann}_{L^1(H)}(E) \subseteqq \operatorname{Ann}_{L^1(H)}(L^1(N)/k(\mathscr{X})) \subseteqq \bigcap_{t \in T} \delta(t)\Omega,$$

wobei die beiden letzteren Inklusionen offensichtlich sind. Nach Satz 5 ist aber $\{\mathfrak{p} * \mathscr{D}(H)\}^- = \bigcap_{t \in T} \delta(t)\Omega$ und folglich

$$\operatorname{Ann}_{L^1(H)}(E) = \operatorname{Ann}_{L^1(H)}(L^1(N)/k(\mathscr{X})),$$

woraus sich, wie oben festgestellt,

$$I = \{\mathfrak{q} * \mathscr{D}(N)\}^- = k(\mathscr{X})$$

ergibt.

Sei nun zunächst $\mathscr{X}$ eine beliebige abgeschlossene Menge im unitären Dual $\hat{N}$ von N. $\hat{N}$ läßt sich mit dem Raum der maximalen Ideale in $L^1(N)$ identifizieren. Zu $\mathscr{X}$ existiert allemal ein größtes Ideal in $L^1(N)$, nämlich der Kern $k(\mathscr{X})$, dessen Hülle gerade wieder $\mathscr{X}$ ist. Aber es gibt auch, wie im Falle abelscher Gruppen, ein kleinstes abgeschlossenes Ideal mit $\mathscr{X}$ als Hülle. Die Existenz eines solchen Ideals wurde in [20] bewiesen; dieses Ideal bezeichnen wir wie dort mit $j(\mathscr{X})$. Mit ähnlichen Mitteln wie in [22], vgl. auch [27], kann man nun aus Satz 6 herleiten, daß für gewisse $\mathscr{X}$ der Quotient $k(\mathscr{X})/j(\mathscr{X})$ nicht nur eine Radikalalgebra ist – das ist er stets –, sondern sogar eine nilpotente Algebra ist. Bekanntlich, vgl. etwa [8], ist N eine Gruppe mit polynomial wachsendem Haarschen Maß: es gibt eine natürliche Zahl d derart, daß zu jeder kompakten Menge K in N eine Konstante $C=C_K$ existiert mit Maß $(K^n) \leqq Cn^d$ für alle natürlichen Zahlen n. Mit $d(N)$ sei die kleinste derartige Zahl bezeichnet.

Satz 7. *Die Voraussetzungen seien dieselben wie im Satz 6, insbesondere sei also N eine zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe und $\mathscr{X} \subseteqq \hat{N}$ sei eine Bahn unter einer Gruppe der Form $T \ltimes M$. Dann ist $\{k(\mathscr{X})/j(\mathscr{X})\}^m = 0$ mit $m = 2^{d(N)+4} - 1$.*

Beweis. Der Vollständigkeit halber wollen wir Satz 7 hier beweisen, obwohl man sämtliche Argumente in [27] und [22] nachlesen kann. Aus Satz 6 folgt, daß $k(\mathscr{X}) \cap \mathscr{D}(N)$ dicht in $k(\mathscr{X})$ liegt – und das ist in der Tat die einzige Eigenschaft von $\mathscr{X}$, die man für die folgende Argumentation benötigt. Grundlegend für die Konstruktion von $j(\mathscr{X})$ (und viele andere idealtheoretische Eigenschaften von $L^1(N)$) ist der Dixmiersche Funktionalkalkül, siehe [8]:

Ist $f = f^* \in \mathscr{D}(N)$ und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine r-mal, wobei $r := d(N) + 4$, stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger und $\varphi(0) = 0$, so gibt es (eindeutig) $\varphi\{f\} \in L^1(N)$ mit $\pi(\varphi\{f\}) = \varphi(\pi(f))$ für alle involutiven Darstellungen π; dabei ist $\varphi(\pi(f))$ im Sinne des gewöhnlichen Funktionalkalküls in C^*-Algebren zu verstehen. Weiter wurde dort gezeigt, daß zu $f = f^* \in \mathscr{D}(N)$ eine Familie von r-mal stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger existiert, so daß jedes φ sogar in einer ganzen Umgebung von 0 verschwindet, und daß man die r-te Faltungspotenz f^r beliebig gut durch diese $\varphi\{f\}$ approximieren kann.

Ist nun speziell $f = f^* \in k(\mathscr{X}) \cap \mathscr{D}(N)$, so liegen die mit solchen φ gebildeten $\varphi\{f\}$ in $j(\mathscr{X})$ – das folgt aus der Konstruktion von $j(\mathscr{X})$, [20]. Nebenbei bemerkt, man kann sehr schnell einsehen (unter Verwendung der Symmetrie der involutiven Banachschen Algebra $L^1(N)$), daß solche $\varphi\{f\}$ in jedem abgeschlossenen Ideal liegen müssen, welches $\mathscr{X}$ als Hülle hat, vgl. das entsprechende Argument in [20]. Also liegt f^r in $j(\mathscr{X})$ für jedes $f = f^* \in k(\mathscr{X}) \cap \mathscr{D}(N)$. Das ist dann aber auch richtig für jedes $f \in k(\mathscr{X}) \cap \mathscr{D}(N)$; denn: Zerlegt man f in $f = f_1 + if_2$ mit $f_j = f_j^*$, so liegen f_1 und f_2 in $k(\mathscr{X}) \cap \mathscr{D}(N)$. Bildet man das Polynom $Q(z) = (f_1 + zf_2)^r$, $z \in \mathbb{C}$, so ist $Q(z)$ kongruent zu Null modulo $j(\mathscr{X})$ für alle reellen z, folglich für alle z. Insbesondere liegt $Q(i) = f^r$ in $j(\mathscr{X})$. Da nun $k(\mathscr{X}) \cap \mathscr{D}(N)$ dicht in $k(\mathscr{X})$ ist, gilt $f^r \in j(\mathscr{X})$ für jedes $f \in k(\mathscr{X})$.

Wendet man den Satz von Nagata–Higman, vgl. etwa [16], Appendix C, auf die Algebra $k(\mathscr{X})/j(\mathscr{X})$ an, so sieht man, daß $\{k(\mathscr{X})/j(\mathscr{X})\}^m = 0$ mit $m = 2^r - 1$, d. h. $f_1 * \ldots * f_m \in j(\mathscr{X})$ für $f_1, \ldots, f_m \in k(\mathscr{X})$.

Schlußbemerkung

Es besteht eine gewisse Aussicht, daß man die Ergebnisse dieses Artikels auf nichtabelsche kompakte Liesche Gruppen T übertragen kann, die zusammen mit einer unipotenten Gruppe M auf einer nilpotenten Lieschen Gruppe N operieren – das ist jedenfalls der sich anbietende nächste Schritt im Sinne des in der Einleitung vorgestellten Problemkreises. Noch etwas allgemeiner kann man die Kerne von Bahnen solcher Gruppen, $T \ltimes M$ im unitären Dual von Gruppen desselben Typs auf ihre infinitesimale Bestimmtheit untersuchen. – Wie in der Einleitung angedeutet, kann man Ergebnisse dieser Art beispielsweise zur Bestimmung von Annullatoren topologisch irreduzibler Darstellungen verwenden. In einer folgenden Arbeit werde ich eine Beschreibung aller primitiven Idelae in der L^1-Algebra einer auflösbaren Lieschen Gruppe geben. Dabei werden die Ergebnisse dieses Artikels eine wesentliche Rolle spielen.

Literatur

1. Boidol, J., Leptin, H., Schürmann, J., Vahle, D.: Räume primitiver Ideale von Gruppenalgebren. Math. Ann. **236**, 1–13 (1978)
2. Borel, A.: Linear algebraic groups. Amsterdam, New York: Benjamin 1969
3. Borho, W., Gabriel, P., Rentschler, R.: Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie-Algebren. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 357. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973
4. Brown, I.D.: Dual topology of a nilpotent Lie group. Ann. Sci. École. Norm. Sup. **6**, 407–411 (1973)
5. Chevalley, C.: A new kind of relationship between matrices. Am. J. Math. **65**, 521–531 (1943)
6. Chevalley, C., Tuan, H.F.: On algebraic Lie algebras. Proc. Nat. Acad. Sci. **31**, 195–196 (1945)
7. Conze-Berline, N.: Espace des idéaux primitifs de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente, J. Algebra **34**, 444–450 (1975)
8. Dixmier, J.: Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires. Publ. math. I. H. E. S. **6**, 305–317 (1960)
9. Dixmier, J.: Algèbres enveloppantes. Paris: Gauthier-Villars 1974
10. Dixmier, J.: Idéaux primitifs dans les algèbres enveloppantes. J. Algebra **48**, 96–112 (1977)
11. Duflo, M.: Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents. Ann. Sci. École Norm. Sup. **5**, 71–120 (1972)
12. Gurevich, D.I.: Counterexamples to a problem of L. Schwartz. Funct. Anal. Appl. **9**, 116–120 (1975)
13. Howe, R.E.: On the character of Weil's representation. Trans. Am. Math. Soc. **177**, 287–298 (1973)
14. Howe, R.E.: On a connection between nilpotent groups and oscillatory integrals associated to singularities. Pac. J. Math. **73**, 329–363 (1977)
15. Humphreys, J.E.: Linear algebraic groups. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1975
16. Jacobson, N.: Structure of rings, third edition. Am. Math. Soc. Coll. Publ. **37** (1968)
17. Kirillov, A.A.: Unitary representations of nilpotent Lie groups. Usp. Mat. Nauk **17**, 57–110 (1962)
18. Kirsch, W., Müller, D.: On the synthesis problem for orbits of Lie groups in $\mathbb{R}^n$. Ark. Mat. **18**, 145–155 (1980)
19. Leptin, H.: Ideal theory in group algebras of locally compact groups. Invent. math. **31**, 259–278 (1976)
20. Ludwig, J.: Polynomial growth and ideals in group algebras. Manuscripta Math. **30**, 215–221 (1980)
21. Ludwig, J.: On the spectral synthesis problem for points in the dual of a nilpotent Lie group. Ark. Mat. **21**, 127–144 (1983)

22. Ludwig, J.: On primary ideals in the group algebra of a nilpotent Lie group. Math. Ann. **262**, 287–304 (1983)
23. Malgrange, B.: Existence et approximation de solutions des équations aux dérivées partielles et équations de convolutions. Ann. Inst. Fourier **6**, 271–355 (1956)
24. Matsushima, Y.: On algebraic Lie groups and algebras. J. Math. Soc. Japan **1**, 46–57 (1948)
25. Müller, D.: On the spectral synthesis problem for hypersurfaces of $\mathbb{R}^n$. J. Funct. Anal. **47**, 247–280 (1982)
26. Poguntke, D.: Nilpotente Liesche Gruppen haben symmetrische Gruppenalgebren. Math. Ann. **227**, 51–59 (1977)
27. Poguntke, D.: Algebraically irreducible representations of exponential Lie groups. Duke Math. J. **50**, 1077–1106 (1983)
28. Pukanszky, L.: Leçons sur les représentations des groupes. Paris: Dunod 1967
29. Schwartz, L.: Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques. Ann. Math. **48**, 857–929 (1947)
30. Schwartz, L.: Analyse et synthése harmonique dans les espaces de distributions. Canad. J. Math. **3**, 503–512 (1951)
31. Schwartz, L.: Théorie des distributions. 3ème édit. Paris: Hermann 1973
32. Warner, G.: Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. Vol. I. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1972

Eingegangen am 29. Juli 1983