AZ ANALÍZIS EGYES FOGALMAI ÉS MÓDSZEREI A HASONLÓSÁGBAN

DR. PERGE IMRE

Az alábbiakban néhány olyan geometriai problémával foglalkozunk, amelyeknek megoldásához analízisbeli fogalmak és módszerek szükségesek, illetve ezek segítségével könnyen megoldhatók. A probléma felvetése azért is indokolt, mert ezek megoldása a geometriában nem teljes, az analízis pedig külön nem foglalkozik velük.

A geometriából ismeretesek az alábbi definíciók:

1. Hasonlóságnak nevezünk egy ponttranszformációt, ha bármely két pont képének a távolsága a pontok távolságával osztva, mindig ugyanazt a (0-tól különböző) számot adja. Ezt a pozitív számot nevezzük a hasonlóság arányának.

2. Két alakzat hasonló, ha van olyan hasonlóság, amely az egyikhez a másikat rendeli.

Tekintsük a következő ponttranszformációt

$$x_i = \lambda\ x_i;\ i = 1{,}2$$
$$y = \lambda\ \bar{y},$$

ahol $\bar{x}_1$, x_2, $\bar{y}$ egy P pont koordinátái és x_1, x_2, y pedig a P képpontjának, P-nek a koordinátái.

Tekintettel arra, hogy

$$\frac{\partial\,(x_1, x_2, y)}{\partial\,(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3$$

Jacobi-féle függvénydetermináns valamennyi x_1, x_2, y pontban nullától különböző, ezért a leképezés folytonos és kölcsönösen egyértelmű.

1. TÉTEL. Az

$$x_i = \lambda\bar{x}_i;\ i = 1{,}2$$

(1) $$y = \lambda\bar{y}$$

ponttranszformáció hasonlóság.

Bizonyítás. Legyen $\bar{P}_1$ *és* $\bar{P}_2$ tetszőleges különböző pont, P_1 és P_2 pedig a megfelelő képpontok. A távolságok aránya

$$\frac{\overline{P_1 P_2}}{\overline{\bar{P}_1 \bar{P}_2}} = +\sqrt{\frac{(y_2 - y_1)^2 + (x_{12} - x_{11})^2 + (x_{22} - x_{21})^2}{(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{x}_{12} - \bar{x}_{11})^2 + (\bar{x}_{22} - \bar{x}_{21})^2}} =$$

$$= +\sqrt{\frac{\lambda^2\,[(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{x}_{12} - \bar{x}_{11})^2 + (\bar{x}_{22} - \bar{x}_{21})^2]}{(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{x}_{12} - \bar{x}_{11})^2 + (\bar{x}_{22} - \bar{x}_{21})^2}} = +\sqrt{\lambda^2} = \lambda .$$

A továbbiakban mi az (1) transzformációt nevezzük hasonlóságnak.

Definíció: Tekintettel arra, hogy az (1) hasonlósági transzformáció az

$$\bar{y} = f\ (\bar{x}_1,\ \bar{x}_2)$$

függvényhez az

$$y = \lambda f\left(\frac{x_1}{\lambda},\ \frac{x_2}{\lambda}\right),$$

vagyis a

$$g\ (x_1,\ x_2) = \lambda f\left(\frac{x_1}{\lambda},\ \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

függvényt rendeli, ezért az $f\ (x_1,\ x_2)$ és $g\ (x_1,\ x_2)$ függvényekről azt mondjuk, hogy hasonlók, vagy röviden

$$f\ (x_1,\ x_2) \sim g\ (x_1,\ x_2).$$

A szokásos jelölések mellett tehát a hasonlóság és az (1) transzformáció fennállása esetén a $g\ (x,\ y)$ kétváltozós függvény

$$g\ (x,\ y) = \lambda f\left(\frac{x}{\lambda},\ \frac{y}{\lambda}\right) \tag{2}$$

alakú. Speciálisan egyváltozós függvények esetén pedig

$$g\ (x) = \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \tag{3}$$

alakú.

Megjegyzés:

1. A hasonlóság fogalma természetesen kiterjeszthető n változós függvények esetére is. A felhasznált geometriai fogalmak miatt itt azonban megelégszünk kétváltozós függvények hasonlóságával is.

2. A definícióból következik, hogy amennyiben $f(x, y)$ folytonos és differenciálható az ω tartományban, úgy $g(x, y)$ is folytonos és differenciálható az ω-nak megfelelő ω' tartományban.

3. A bizonyított tételek nemcsak explicit alakban adott függvényekre érvényesek, hanem átvihetők paraméteres egyenletrendszerrel, vagy polárkoordinátás alakban adott függvényekre is.

2. TÉTEL. A hasonlóság egyenestartó, egyenest párhuzamos egyenesbe visz át.

Bizonyítás. Legyen az egyenes

$$f(x) = mx + b$$

alakú. Mivel

$$g(x) = \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

ezért

$$g(x) = \lambda\left[m\frac{x}{\lambda} + b\right],$$

vagyis

$$g(x) = mx + \lambda b.$$

Következmény:

1. Ha $b = 0$, akkor a két egyenes azonos, vagyis

$$f(x) \equiv g(x).$$

2. A hasonlóság szögtartó.

3. TÉTEL. A hasonlóság körhöz kört rendel és a sugarak aránya megegyezik a hasonlóság arányával.

Bizonyítás:

Tekintsünk egy középponti kört.

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Explicit alakban

$$f(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Mivel

$$g(x) \quad \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

ezért

$$g(x) = \pm\lambda\sqrt{r^2 - \frac{x^2}{\lambda^2}}.$$

Tehát az $f(x)$-hez hasonló $g(x)$ kör egyenlete

$$g(x) = \pm \sqrt{(\lambda r)^2 - x^2}$$

és sugara

$$R = \lambda r,$$

ahonnan

$$\frac{R}{r} = \lambda$$

4. TÉTEL. Bármely két másodfokú parabola hasonló, és a hasonlósági arányuk megegyezik a paraméterek arányával.

Bizonyítás:

Az egyszerűség kedvéért tekintsük a csúcsponti parabolákat. Mivel

$$f(x) = \frac{1}{2p} x^2 \qquad (p \neq 0)$$

így

$$g(x) = \lambda \frac{1}{2p} \frac{x^2}{\lambda^2},$$

vagyis

$$g(x) = \frac{1}{2p\lambda} x^2$$

és paramétere

$$p' = \lambda p,$$

ahonnan

$$\frac{p'}{p} = \lambda .$$

5. TÉTEL. A hasonlóság gömbhöz gömböt rendel, és a sugarak aránya megegyezik a hasonlóság arányával.

Bizonyítás:

Az r sugarú gömb egyenlete

$$f(x, y) = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} .$$

(2)-ből következik, hogy

$$g(x, y) = \pm \lambda \sqrt{r^2 - \frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{\lambda^2}},$$

vagyis a hasonló gömb egyenlete

$$g(x, y) = \pm\sqrt{(\lambda r)^2 - x^2 - y^2}$$

és sugara

$$R = \lambda r,$$

ahonnan

$$\frac{R}{r} = \lambda$$

adódik.

6. TÉTEL. Rektifikálható, hasonló függvények ívhosszának aránya megegyezik a hasonlóság arányával.

Bizonyítás:

Jelölje L' az $f(x)$ függvény ívhosszát az (a, b) intervallumban és L a $g(x) \sim f(x)$ függvény ívhosszát a megfelelő $(\lambda a, \lambda b)$ intervallumban. Vagyis

$$L' = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx \tag{4}$$

és

$$L = \int_{\lambda a}^{\lambda b} \sqrt{1 + g'^2(x)}\, dx .$$

Mivel

$$g'(x) = f'\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

ezért

$$L = \int_{\lambda a}^{\lambda b} \sqrt{1 + f'^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)}\, dx ,$$

ahonnan az

$$\frac{x}{\lambda} = t; \; dx = \lambda\, dt$$

helyettesítéssel nyerjük, hogy

$$L = \lambda \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt = \lambda L' ,$$

vagyis

$$\frac{L}{L'} = \lambda \tag{5}$$

7. TÉTEL. Egy u adattól függő hasonló alakzatok kerülete, az illető adat konstansszorosa, vagyis

$$L = c\, u$$

Bizonyítás:

Tekintsünk két olyan hasonló ívet, amelynek hasonlósága egy adat alapján eldönthető. (Pl. körök, szabályos sokszögek stb.)
Legyen az u adathoz tartozó ívhossz $f\ (u)$,
a $v = \lambda u$ adathoz tartozó ívhossz $f\ (v)$.
Mivel a két ívhossz hasonló, ezért a 6. tétel miatt

$$f\ (v) = \lambda\ f\ (u).$$

Tekintettel arra, hogy az $u + v = u + \lambda u = (1 + \lambda)\ u$, ezért az eredeti alakzathoz hasonló f $(u + v)$ ívhossz

$$f\ (u + v) = (1 + \lambda)\ f\ (u),$$

ahonnan

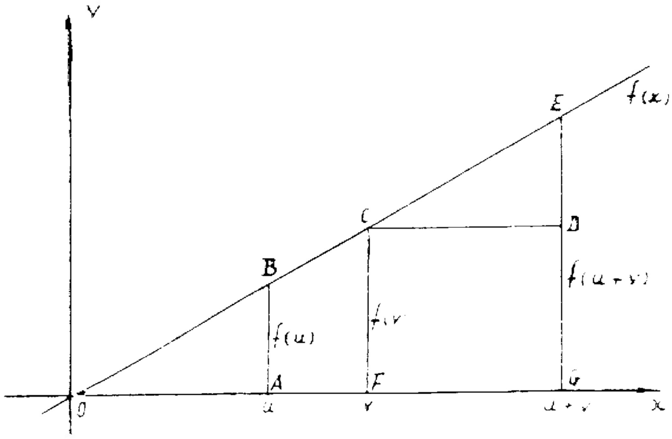
$$f\ (u + v) = f\ (u) + \lambda\ f\ (u),$$

vagyis az

(6) $$f\ (u + v) = f\ (u) + f\ (v)$$

Cauchy-féle függvényegyenlethez jutunk, amelynek megoldására itt egy egyszerű szemléletes bizonyítást adunk.

Legyen $f\ (x)$ egy, az origón áthaladó egyenes.



Könnyen belátható, hogy az

$$f\ (u + v) = f\ (u) + f\ (v)$$

tekintettel arra, hogy $ED = AB$ és $FC = GD$.

Tehát az $f\ (x)$ függvény kielégíti a Cauchy-féle függvényegyenletet és így annak megoldása, tekintettel az ívhossz pozitív voltára,

$$f\ (x) = cx,$$

illetve $x = u$-ra

(7) $$f(u) = cu,$$

ahol $f(1) = c$.

Következmény:

Ha a szabályos sokszögek kerületét a beírható kör sugarának a függvényeként vizsgáljuk, akkor azok kerülete

$$k = c\,r$$

Szabályos háromszög esetén	$k = 6\sqrt{3}\,r$, ahol $f_3(1) = 6\sqrt{3}$,
négyzet esetén	$k = 8r$, ahol $f_4(1) = 8$,
szabályos hatszög esetén	$k = 4\sqrt{3}\,r$, ahol $f_6(1) = 4\sqrt{3}$,
kör esetén	$k = 2\pi r$, ahol $f(1) = 2\pi$.

Megjegyezzük, hogy az így értelmezett

(8) $$f_3(1),\ f_4(1),\ f_5(1), \ldots f_{n+3}(1), \ldots$$

sorozat konvergens és szigorúan monoton növekedően tart a 2π-hez.

8. TÉTEL. Hasonló függvények által bezárt területek aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő.

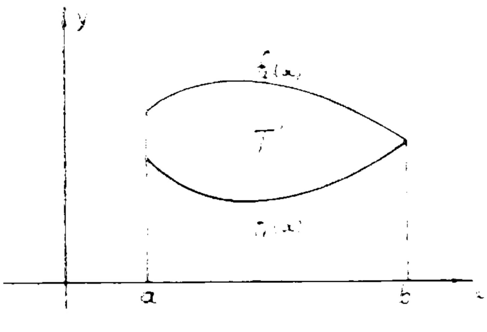
Bizonyítás:

Ismeretes, hogy annak a normáltartománynak a területe, amely megadható az

$$a \leqq x \leqq b$$
$$f_1(x) \leqq y \leqq f_2(x)$$

egyenlőtlenségekkel,

$$T' = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy\,dx,$$



illetve

(9) $$T' = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx,$$

ahol $f_1(x)$ és $f_2(x)$ az (a, b) zárt intervallumban folytonos függvények.

A $T \sim T'$ normáltartomány területe a $(\lambda a, \lambda b)$ intervallumban

$$T = \int_{\lambda a}^{\lambda b} \left[\lambda f_2\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \lambda f_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right] dx,$$

ahol λ a hasonlóság aránya. A $t = x/\lambda$, $dx = \lambda\, dt$ helyettesítés után nyerjük, hogy

$$T = \lambda^2 \int_a^b [f_2(t) - f_1(t)]\, dt = \lambda^2 T',$$

vagyis

$$\text{(10)} \qquad \frac{T}{T'} = \lambda^2.$$

Következmény:

Ha $f_1(x) = 0$, akkor (9)-ből T'-re az $f_2(x)$ függvény alatti területet kapjuk, amelyre ugyancsak igaz a (10)-es állítás.

Nem könnyű geometriai módszerekkel igazolni, még kevésbé szemléletesen belátni, hogy a 8-as tétel hasonló felületekre is igaz.

9. TÉTEL. Hasonló felületek felszínének aránya a hasonlóság négyzetének arányával egyenlő, vagyis

$$F = \lambda^2 F'.$$

Bizonyítás:

Ismeretes, hogy a $z = f(x, y)$ felület, (x, y) sík T tartománya felett fekvő darabjának felszíne

$$F' = \iint_{T'} \sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + 1}\, dx\, dy.$$

Tekintettel arra, hogy $f(x, y) \sim g(x, y)$, azért

$$g(x, y) = \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right)$$

és

$$g_x' = f_x'\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right),$$

$$g_y' = f_y'\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right),$$

vagyis

$$F = \iint\limits_{\lambda^2 T} \sqrt{g_x'^2 + g_y'^2 + 1}\, dx\, dy = \iint\limits_{\lambda^2 T} \sqrt{f_x'^2\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) + f_y'^2\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right) + 1}\, dx\, dy .$$

Alkalmazva az $u = x/\lambda$; $v = y/\lambda$ helyettesítést, a Jacobi-féle függvénydeterminánsra kapjuk, hogy

$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$$

és így a felszín

$$F = \lambda^2 \iint\limits_{T} \sqrt{f_u'^2 + f_v'^2 + 1}\, du\, dv = \lambda^2 F',$$

vagyis

(11) $$\frac{F}{F'} = \lambda^2 .$$

Megjegyzés:

Forgástestek felszíne esetén

$$F' = 2\pi \int\limits_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

és

$$F = 2\pi \int\limits_{\lambda a}^{\lambda b} g(x) \sqrt{1 + g'^2(x)}\, dx = 2\pi \int\limits_{\lambda a}^{\lambda b} \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \sqrt{1 + f'^2\left(\frac{x}{\lambda}\right)}\, dx ,$$

ahonnan $t = x/\lambda$ helyettesítés után nyerjük, hogy

$$F = 2\pi \lambda^2 \int\limits_a^b f(t) \sqrt{1 + f'^2(t)}\, dt = \lambda^2 F' ,$$

vagyis

$$\frac{F}{F'} = \lambda^2 .$$

10. TÉTEL. Egy u adattól függő hasonló alakzatok területe, illetve felszíne az illető adat négyzetének konstansszorosa, vagyis

$$T = c\, u^2 .$$

Bizonyítás:

A 9, 10 tételekből következik, hogy ha

az u adattól függő felszínt, illetve területet $f(u)$-val,
a $v = \lambda u$ adattól függő felszínt, illetve területet $f(v)$-vel,
az $u + v = (1 + \lambda) u$ adattól függőt pedig $f(u + v)$-vel

jelöljük, hogy

$$f(v) = \lambda^2 f(u) \tag{12}$$

$$f(u + v) = (1 + \lambda)^2 f(u) \tag{13}$$

ahonnan (tekintettel a felszín, illetve terület pozitív értékére) kapjuk, hogy

$$\sqrt{f(u + v)} = (1 + \lambda) \sqrt{f(u)},$$

illetve

$$\sqrt{f(u + v)} = \sqrt{f(u)} + \lambda \sqrt{f(u)},$$

vagyis (12) figyelembevételével kapjuk, hogy

$$\sqrt{f(u + v)} = \sqrt{f(u)} + \sqrt{f(v)}. \tag{14}$$

Ez a függvényegyenlet pedig Cauchy-típusú, tekintettel arra, hogy

$$F(u + v) = F(u) + F(v)$$

alakú és így a megoldása, tekintettel a felszín, illetve terület pozitív voltára

$$F(u) = c' u,$$

vagyis

$$F(u) = \sqrt{f(u)} = c' u,$$

ahonnan

$$f(u) = c\, u^2, \tag{15}$$

ahol $c = f(1)$.

Következmény:

Ha a szabályos sokszögek területét a beírható kör sugarának a függvényeként vizsgáljuk, akkor azok területe

$$t = c\, r^2$$

Szabályos háromszög esetén $t = 3\sqrt{3}\, r^2$, ahol $f_3(1) = 3\sqrt{3}$,
négyzet esetén $t = 4 r^2$, ahol $f_4(1) = 4$
szabályos hatszög esetén $t = 2\sqrt{3}\, r^2$, ahol $f_6(1) = 2\sqrt{3}$.

Az itt szereplő konstansok a kerületnél szereplő konstansoknak csak a fele. Így feltételezve, hogy (8), vagyis

$$f_3(1),\, f_4(1),\, f_5(1),\, \ldots \to 2\pi,$$

azért

(16) $$\bar{f}_3(1),\, \bar{f}_4(1),\, \bar{f}_5(1),\, \ldots \to \pi$$

vagyis a kör területe $t = \pi\, r^2$, ahol $\bar{f}\,(1) = \pi$.

A gömb felszíne $F = 4\,\pi\, r^2$, ahol $f\,(1) = 4\pi$.

11. TÉTEL. Hasonló alakzatok térfogatának aránya a hasonlósági arány köbe, vagyis

$$\frac{V}{V'} = \lambda^3 .$$

Bizonyítás:

Ismeretes, hogy ha V' az $(x,\, y)$ síkra nézve normáltartomány, amely az

$$a \leqq x \leqq b$$

$$\varphi_1\,(x) \leqq y \leqq \varphi_2\,(x)$$

$$f_1\,(x,\, y) \leqq z \leqq f_2\,(x,\, y)$$

egyenlőtlenségekkel adott

$$V' = \iiint_{V'} dx\, dy\, dz\,,$$

illetve

(17) $$V' = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} [f_2\,(x\,,\, y) - f_1\,(x\,,\, y)]\; dy\, dx\,.$$

A $V \sim V'$ térfogat pedig a

$$\lambda a \leqq x \leqq \lambda b$$

$$\lambda\, \varphi_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leqq y \leqq \lambda\, \varphi_2\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$\lambda\, f_1\left(\frac{x}{\lambda},\, \frac{y}{\lambda}\right) \leqq z \leqq \lambda\, f_2\left(\frac{x}{\lambda},\, \frac{y}{\lambda}\right)$$

tartományban

$$V = \int_{\lambda a}^{\lambda b} \int_{\lambda \varphi_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)}^{\lambda \varphi_2\left(\frac{x}{\lambda}\right)} \left[\lambda\, f_2\left(\frac{x}{\lambda},\, \frac{y}{\lambda}\right) - \lambda\, f_1\left(\frac{x}{\lambda},\, \frac{y}{\lambda}\right)\right] dy\, dx\,,$$

ahonnan $u = x/\lambda$ és $v = y/\lambda$ helyettesítéssel a Jacobi-féle függvénydeterminánsra nyerjük, hogy

$$\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2,$$

vagyis

$$V = \lambda^3 \int_a^b \int_{\varphi_1(u)}^{\varphi_2(u)} [f_2(u, v) - f_1(u, v)]\, dv\, du = \lambda^3 V',$$

illetve

$$\frac{V}{V'} = \lambda^3. \tag{18}$$

Megjegyzés:

1. Ha $f_1(x, y) = 0$, akkor a (17)-ből a hengerszerű test térfogata adódik és így erre ugyancsak igaz a (18) összefüggés.

2. Forgástestek térfogata az (a, b) intervallumban

$$V' = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx,$$

A $g(x) \sim f(x)$ függvény forgatásával keletkezett test térfogata pedig

$$V = \pi \int_{\lambda a}^{\lambda b} \lambda^2 f^2\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx,$$

ahonnan $t = x/\lambda$ helyettesítéssel nyerjük, hogy

$$V = \lambda^3 \pi \int_a^b f^2(t)\, dt = \lambda^3 V',$$

vagyis

$$\frac{V}{V'} = \lambda^3.$$

12. TÉTEL. Egy u adattól függő hasonló alakzatok térfogata az illető adat köbének konstansszorosa, vagyis

$$V = c\, u^3$$

Bizonyítás:

A 11. tételből következik, hogy ha

az u adathoz tartozó térfogatot $f(u)$-val,

a $v = \lambda u$ adathoz tartozó térfogatot $f(v)$-vel,
az $u + v = (1 + \lambda) u$ adathoz tartozó térfogatot $f(u + v)$-vel jelöljük, hogy

$$f(v) = \lambda^3 f(u) \tag{19}$$

$$f(u + v) = (1 + \lambda)^3 f(u), \tag{20}$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\sqrt[3]{f(u+v)} = (1 + \lambda) \sqrt[3]{f(u)}.$$

illetve

$$\sqrt[3]{f(u+v)} = \sqrt[3]{f(u)} + \lambda \sqrt[3]{f(u)},$$

vagyis (19) figyelembevételével

$$\sqrt[3]{f(u+v)} = \sqrt[3]{f(u)} + \sqrt[3]{f(v)}. \tag{21}$$

Ez a függvényegyenlet pedig Cauchy-típusú, tekintettel arra, hogy

$$F(u + v) = F(u) + F(v)$$

alakú és így megoldása, tekintettel a térfogat pozitív voltára

$$F(u) = \sqrt[3]{f(u)} = c' u,$$

vagyis

$$f(u) = c\, u^3, \text{ ahol } c = f(1). \tag{22}$$

Megjegyzés:

1. A gömb térfogata $V = c\, r^3$. Mint ismeretes $c = \frac{4}{3}\pi$.
2. A kocka térfogata $V = c\, a^3$, ahol a kocka oldaléle és $c = 1$.

Következmény:

A közöltek általánosíthatók n változós függvényekre is.

Az $$f(P) \sim g(P)$$

n változós függvények $\omega \sim \omega'$ tartományon vett integráljainak az aránya λ^{n+1}. A megfelelő függvényegyenlet pedig

$$\sqrt[n]{f(u+v)} = \sqrt[n]{f(u)} + \sqrt[n]{f(v)}$$

Cauchy-típusú, amelynek megoldása, ha $u>0$-ra $f(u)>0$ is teljesül

$$\sqrt[n]{f(u)} = c'\,u,$$

illetve

$$f(u) = c\,u^n,$$

amelynek az $n = 1, 2, 3$ esetben geometriai jelentést is tulajdonítottunk.

Tetszőleges geometriai hasonlóság egy ortogonális és a (1) transzformáció szorzata. Mivel ortogonális transzformáció esetén a hossz, terület és köbtartalom változatlan, ezért valamennyi tétel igaz tetszőleges hasonlósági transzformáció esetén.

DIE EINZELNEN BEGRIFFE UND METHODEN DER ANALYSIS IN DER ÄHNLICHKEIT

E. PERGE

Der Aufsatz beschäftigt sich mit einigen geometrischen Problemen, zur Lösung deren man analytische Begriffe und Methoden braucht, d. h. mit Hilfe deren sie leicht gelöst werden.

Durch Einführung ähnlicher Funktionen

$$g(x) = \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

und

$$g(x, y) = \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda}\right)$$

werden alle wichtigen Ähnlichkeitssätze leicht bewiesen.

Und mit Hilfe der Verhältniszahl der Ähnlichkeit kann man beim Rechnen des Umkreises, der Fläche, der Oberfläche und des Kubikinhalts eine Verbindung mit der Funktionalgleichung von Cauchy schaffen

$$\sqrt[n]{f(u+v)} = \sqrt[n]{f(u)} + \sqrt[n]{f(v)};\quad n = 1, 2, 3,$$

die nichtnegative Lösung deren ist, wie folgt

$$f(u) = c\,u^n;\quad n = 1, 2, 3.$$

IRODALOM

[1] Hajós György: Bevezetés a geometriába. Budapest 1960.

[2] Stefan Banach: Differenciál- és integrálszámítás. Budapest, 1965.

[3] Aczél János: Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen. Basel, 1961.