

## SOBRE LA VOLATILIDAD DE LA CURVA DE RENDIMIENTOS DEL MERCADO DE DEUDA PÚBLICA COLOMBIANO

José Miguel Sánchez Garrido<sup>1</sup>  
*Jomisag@hotmail.com*

Alfredo Trespalcios Carrasquilla<sup>2</sup>  
*alfredo.trespalcios@gmail.com*

### Resumen

En este trabajo se estima la volatilidad de la estructura temporal de las tasas de interés (ETII) del mercado de deuda pública colombiano y se explica su relación con los fundamentales macroeconómicos. A partir del modelo paramétrico propuesto por Nelson y Siegel (1987) se estima ETII con el fin de capturar el componente de volatilidad condicional, con modelos de heterocedasticidad condicional autorregresiva (ARCH, por sus siglas en inglés *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*). A continuación su relación con variables macroeconómicas como el producto interno bruto ( $y$ ), el nivel general de precios ( $\pi$ ), la tasa de interés de política monetaria ( $i$ ) y el riesgo país ( $r$ ), se evalúa a través de las funciones impulso-respuesta de los modelos de vectores autorregresivos estructurales (SVAR, por sus siglas en inglés *Structural Vector Autoregressive*) y de las pruebas de causalidad de Granger. Los resultados muestran que la volatilidad de la ETII del mercado de deuda pública colombiano tiene características exponenciales y que hay relaciones causales en ambos sentidos con algunas de las variables macroeconómicas; sin embargo, cuando se presentan choques entre ellas solo existen respuestas significativas unidireccionales desde la macroeconomía hacia la volatilidad de la ETII, y no en el sentido contrario.

*Palabras clave:* estructura temporal de las tasas de interés, volatilidad, vectores autorregresivos, componentes principales, causalidad.

### Abstract

This paper estimates the volatility of the Temporary Structure of Interest Rates (ETII) of the Colombian public debt market and explains its relationship with macroeconomics fundamentals. Starting from the parametric model proposed by Nelson and Siegel (1987), the ETII is estimated in order to capture the conditional volatility component with the Autoregressive Conditional Heteroskedasticity models (ARCH). Subsequently the relationship with the macroeconomic variables such as the gross domestic product ( $y$ ), the general price level ( $\pi$ ), the monetary policy interest rate ( $i$ ) and the risk country ( $r$ ) is evaluated through impulse-response function of the Structural Vector Autoregressive models (SVAR) and the Granger causality tests. The results show that the volatility of the ETII of the Colombian public debt market has an exponential characteristic and there are causal relationships in both directions with some of the macroeconomic variables. However, when there are shocks among them, there are only significant unidirectional responses from macroeconomics to ETII volatility and not in the opposite direction.

*Key words:* temporary structure of interest rates, volatility, autoregressive vectors, principal components, causality.

---

<sup>1</sup> Economista de la Universidad de Antioquia y candidato a Magíster en Administración Financiera de la Universidad EAFIT.

<sup>2</sup> Ingeniero Electricista de la Universidad Nacional de Colombia. MSc Finanzas de la Universidad EAFIT. Profesional Mercados EPM, Profesor de la Maestría en Administración Financiera de la Universidad EAFIT, entre otras.

## I. Introducción

La estructura temporal de las tasas de interés (ETII), también conocida como curva de rendimientos, se define como la relación existente entre el rendimiento de títulos públicos con características crediticias similares y sus períodos al vencimiento. Su estimación puede desarrollarse a través de técnicas paramétricas y no paramétricas, utilizando modelos de equilibrio, como Vasicek (1977), Brennan y Schwartz (1979), Cox, Ingersoll y Ross (1985), Fong y Vasicek (1991), y modelos libres de arbitraje, como Ho y Lee (1986) y Hull y White (1990). Debido a que la ETII suele revelar información relacionada con las expectativas del mercado sobre el comportamiento futuro de la economía, se ha convertido en una herramienta para la toma de decisiones de las autoridades monetarias y en un instrumento para los agentes de mercados financieros, que utilizan su volatilidad para establecer modelos que apoyan la administración del riesgo.

La volatilidad de la ETII ha cobrado mayor importancia durante las últimas décadas, tras el desarrollo de los derivados financieros, dado que esta particularmente suele establecerse como un insumo para la valoración de productos financieros como swaps, bonos con opciones incorporadas, bonos corporativos, derivados de tasas de interés, derivados de incumplimiento de crédito, etc. Así mismo, es un *input* para la implementación de modelos como los desarrollados por Black, Derman y Toy (1990) y Hull y White (1987), los cuales han sido populares entre los profesionales en finanzas, para fines de valoración (Díaz, Jareño & Navarro, 2009). Por lo anterior, para los agentes de mercados financieros es una necesidad conocer y entender tanto la volatilidad de las tasas de interés y las variaciones en el rendimiento de los activos financieros como las causas y las relaciones que este tipo de fenómenos tiene con variables macroeconómicas, con el fin de incorporarlo en el análisis de modelos que permitan reducir el riesgo de la toma de decisiones financieras en mercados que operan bajo incertidumbre.

Entre los estudios de la estructura de volatilidad de las tasas de interés se encuentran los desarrollados por Alexander y Chibumba (1997), Alexander (2000; 2001a; 2001b), Heidari y Wu (2003), Ferrer, González y Soto (2008), Novales y Benito (2007), Díaz, Jareño y Navarro (2010) y Jareño y Tolentino (2012), en los cuales se aplican los lineamientos de la metodología de Litterman y Scheinkman (1991), que consiste en caracterizar o descomponer la ETII a través de

una muestra representativa de tasas de interés con diferente tiempo al vencimiento y en estimar su volatilidad empleando modelos de heterocedasticidad condicionada autorregresiva (ARCH) o sus variantes. Posteriormente, para reducir su dimensión, y de paso solucionar los problemas de información abundante y redundante, se transforman las variables en un conjunto de nuevas variables que son combinaciones lineales de las originales, representando de esta manera la volatilidad de las tasa de interés en un pequeño número de factores —componentes principales— que se interpretan como *nivel*, *pendiente* y *curvatura*. Uno de los trabajos que se han llevado a cabo en Colombia relacionados con el tema fue el desarrollado por Cuadros (2015), quien descompone la ETTI para el mercado de Estados Unidos y Colombia utilizando un modelo de cuatro factores, que corresponden al factor de pronóstico de los retornos y los tres componentes principales expuestos por Litterman y Scheinkman (1991).

Los estudios académicos que buscan encontrar el grado de dependencia entre el mercado de deuda pública y las variables macroeconómicas, por su parte, están más orientados a estudiar la relación entre los fundamentales y la ETTI que en estudiar los fundamentales y la volatilidad. Algunos autores como Evans y Marshall (1998), Bernanke y Blinder (1992), Estrella y Hardouvelis (1991), Hardouvelis (1994) y McCallum (2005) estudian la relación que tiene la política monetaria en las tasas de interés de mercado. Entre tanto, otros como Ang y Piazzesi (2003), Evans y Marshall (2001), Diebold, Rudebusch y Aruoba (2006) llevan a cabo una descomposición de la ETTI a través de la representación de los factores *nivel*, *pendiente* y *curvatura* y emplean una gama más amplia de variables macroeconómicas, y encuentran la relación entre la ETTI y los choques en las variables macroeconómicas, a través de modelos de vectores autorregresivos (VAR), o sus variantes, y usando las funciones de impulso-respuesta y la descomposición de varianza.

En Colombia autores como Bautista, Riascos y Suárez (2007), Mayorga (2007) y Melo y Castro (2010), siguiendo a Diebold et al. (2006), estiman la ETTI a través de un modelo que no impone restricciones de no arbitraje y establecen su relación con variables macroeconómicas como la tasa interbancaria, el índice de bonos de mercados emergentes de Colombia (EMBI), el índice de precios al consumidor (IPC), la brecha del producto interno bruto, las expectativas inflacionarias y el índice de producción industrial, empleando para ello un modelo VAR y

siguiendo con la metodología de Ang y Piazzesi (2003) y Evans y Marshall (2001); sin embargo, estos autores dentro de sus estudios no incorporan el análisis de la estructura de volatilidad.

El propósito del presente trabajo es entonces estimar la volatilidad de la estructura temporal de las tasas de interés del mercado de deuda pública colombiano para el período 2003-2016, a través de modelos de heterocedasticidad condicionada autorregresiva de la familia ARCH, donde se identifique cuáles son los componentes principales que la representan y la relación de estos con variables de tipo macroeconómico, con el fin de generar para el mercado colombiano evidencia empírica que les sirva de apoyo a los agentes de mercados financieros en la administración del riesgo y la toma de decisiones de inversión.

Esta investigación se desarrolla en tres etapas: en la primera, se estiman las tasas de interés que representen la ETTI por medio de la metodología paramétrica de libre arbitraje desarrollada por Nelson y Siegel (1987), teniendo en cuenta que este modelo es considerado no solo como uno de los más populares usados por bancos centrales y publicaciones académicas, sino que en Colombia<sup>3</sup>, después de varios estudios hechos, fue autorizado por el Ministerio de Hacienda y Crédito Público y por la Superintendencia de Valores (hoy Superintendencia Financiera de Colombia) como el método para calcular la ETTI del mercado de deuda pública colombiano (Chacón, 2004).

En la segunda etapa se estima la volatilidad de las tasas de interés utilizando los modelos autorregresivos de varianza condicional heterocedástica, dado que, en este sentido, la Academia ha llegado al consenso de que este tipo de especificación permite modelar adecuadamente la volatilidad de las series financieras. Finalmente, en la tercera etapa, luego de identificar los componentes principales que representan la estructura de volatilidad de las tasas de interés se evalúa la relación entre estos y las variables macroeconómicas, a través de los modelos de series de tiempo multivariadas, particularmente los modelos de vectores autorregresivos estructurales (SVAR) y las pruebas de causalidad de Granger.

---

<sup>3</sup> Intervinieron la Bolsa de Valores de Colombia, el Banco de la República, la Superintendencia de Valores y la Bancaria (hoy Superintendencia Financiera de Colombia) y el Ministerio de Hacienda y Crédito Público.

Esta investigación se desarrolla de la siguiente manera: inicia con la presente introducción; luego se aborda la bibliografía previa relacionada con el objeto de esta investigación; después se define la metodología, y se explica el modelo paramétrico de Nelson y Siegel (1987), que estima la ETTI, los modelos de heterocedasticidad condicionada autorregresiva y sus variantes, y los modelos SVAR; a continuación, se presentan los resultados empíricos; después las conclusiones; y finalmente, la lista de las fuentes consultadas.

## II. Estado del arte

### i. Volatilidad de la ETTI

Los trabajos empíricos previos a esta investigación han estado más orientados a explicar el comportamiento de las tasas de interés que la volatilidad de éstas. Inicialmente fueron desarrollados por Litterman y Scheinkman (1991) para el mercado de deuda de Estados Unidos, encontrando que existen tres factores principales que tienen la capacidad de explicar los movimientos de las tasas de interés y el precio histórico de los bonos, los cuales se interpretaron como en el *nivel*, *pendiente* y *curvatura*. Así mismo el trabajo estuvo enfocado en explicar cómo el nivel general de las tasas de interés afecta los precios de los bonos a través de la duración.

Los trabajos posteriores han determinado de manera general que la dinámica de la ETTI puede ser explicada por tres factores principales. Bliss (1997) mostró que los movimientos de la ETTI del mercado de Estados Unidos explicados a través de la descomposición de tres factores principales ha sido consistente desde 1970, y no ha cambiado significativamente; además, discute las implicaciones de los resultados en los modelos de cobertura de tasas de interés y demuestra que las coberturas basadas en los factores de descomposición son superiores a las coberturas basadas en métodos tradicionales. Así mismo, Soto (2004) estimó la ETTI para el mercado de deuda pública español, y se enfocó no solo en explicar los factores principales que la representan sino en probar la estabilidad de estos, encontrando que si bien las tasas de interés pueden caracterizarse por tres factores principales, estos no se mantienen constantes. Finalmente, entre otros trabajos de investigación sobre el comportamiento de la ETTI se encuentran los de Pérignon y Villa (2006), Matzner-løber y Villa (2004), Elton, Gruber y Michaely (1990) y Wu (2003).

Para el caso colombiano, Cuadros (2015) propuso la descomposición la ETTI para el mercado de Estados Unidos y Colombia utilizando un modelo de cuatro factores, que corresponden al factor de pronóstico de los retornos y los tres componentes principales expuestos por Litterman y Scheinkman (1991), con el fin de identificar los efectos que la ETTI del mercado de Estados Unidos pueda tener sobre la estructura a plazos de la economía colombiana.

Si bien las anteriores investigaciones se enfocaron en estudiar la dinámica las tasas de interés, no incluyeron un análisis específico para la estructura de la volatilidad. En este sentido, los trabajos que tienen una mayor aproximación al objeto de la presente investigación son los desarrollados inicialmente por Alexander y Chibumba (1997) y Alexander (2000; 2001a; 2001b), quienes propusieron un método llamado Ortogonal-GARCH, para generar matrices de covarianzas que son usadas en los modelos Value-At-Risk y que están basados en factores principales obtenidos a partir para la ETTI del mercado de deuda de Estados Unidos usando modelos de varianza heterocedástica y de medias móviles ponderadas exponenciales (EWMA). Heidari y Wu (2003) no solo se enfocaron en estudiar la estructura de las tasas interés aplicando la técnica de los componentes y tomando como referencia la Libor y los swaps principales, sino que incorporaron dentro de su análisis la volatilidad implícita de los swaps.

Novales y Benito (2007) estimaron la ETTI a través del modelo de Nelson y Siegel (1987) y mostraron que la volatilidad puede ser explicada también por un número pequeño de factores, pero enfocaron su análisis en dos períodos de estudios, considerando la creación de la Unión Monetaria Europea en 1999 y el cambio en el manejo de la política monetaria que tuvo lugar a partir de ese entonces.

Ferrer et al. (2008) estimaron la volatilidad de la ETTI para el mercado de deuda pública español adoptando la metodología Ortogonal-Garch empleada por Alexander y Chibumba (1997) y por Alexander (2000; 2001a; 2001b). Estos investigadores sugirieron una aproximación de las tasas de interés con tiempo al vencimiento específico, que sirven como mejor aproximación para representar los factores principales de la estructura de volatilidad.

Díaz et al. (2010), por su parte, estimaron la ETTI utilizando no solo dos modelos: el de Nelson y Siegel (1987) y el de Vasicek y Fong (1982), sino que hicieron sus estimaciones adoptando dos supuestos en cuanto al comportamiento de los errores: OLS (asumiendo que hay homocedasticidad) y GLS (asumiendo que hay heterocedasticidad), y modelos de varianza condicional heterocedástica. La investigación encontró que existen significativas diferencias en la volatilidad de la ETTI dependiendo del modelo y del supuesto en la estimación de los errores. A su vez Jareño y Tolentino (2012) aplicaron esta metodología al mercado de Estados Unidos, pero modificando el método de estimación para la ETTI. En esta ocasión emplearon el modelo de Svensson (1994) y las estimaciones obtenidas de Bloomberg, y las bases de datos del Banco Central (Federal Reserve Board y Department of the Treasury). Otros trabajos en los que se estudió la volatilidad de la ETTI son los de Pérignon y Villa (2006), Longstaff y Schwartz (1992), Lekkos (2000), Chirinos y Bolívar (2012) y Strickland (1993).

## **ii. Relación entre macroeconomía y la ETTI**

Existen numerosas investigaciones previas que estudiaron la relación entre la ETTI y sus determinantes macroeconómicos; sin embargo, estas no se enfocaron en analizar los determinantes macroeconómicos de la volatilidad de la ETTI. La estrategia empírica utilizada para identificar los choques exógenos en la ETTI ha sido la metodología de vectores autorregresivos estándar y vectores autorregresivos estructurales, desarrollada inicialmente por Sims (1986).

Se cuentan investigaciones como las de Evans y Marshall (1998), Bernanke y Blinder (1992), McCallum (2005), Haldane y Read (1999; 2000) y Arango, González, León y Melo (2006), en las que se evaluó la relación entre la política monetaria y la ETTI, sustentadas en el argumento de que es el mejor factor que determina sus movimientos. También están aquellas en las que se evaluó un conjunto de variables macroeconómicas más amplias sobre la ETTI. Evans y Marshall (2001) utilizaron para Estados Unidos la producción industrial, el índice de precios al consumidor, el índice de precios al productor y la tasa de interés de los fondos federales, obteniendo resultados que fueron contrastados con la investigación de Ang y Piazzesi (2003). Ang y Piazzesi (2003) describieron la dinámica de la ETTI y las variables macroeconómicas

utilizando modelos de no arbitraje. Las variables macroeconómicas seleccionadas las dividieron en dos subgrupos: el primero, compuesto por el índice de precios al consumidor, el índice de precios al productor, los precios de *commodities* y el desempleo; y el segundo, por la tasa de empleo, el índice de producción industrial y el índice *help*. Posteriormente, aplicaron componentes principales para extraer un factor en cada subgrupo (inflación y actividad económica). Tanto Evans y Marshall (2001) como Ang y Piazzesi (2003) encontraron evidencia de que una parte representativa de las variaciones en los rendimientos de corto y mediano plazo se explican por factores macroeconómicos.

Diebold et al. (2006) estudiaron la dinámica entre variables macroeconómicas y la curva de rendimientos, por medio de un modelo no estructural sin restricciones de no arbitraje diferente al propuesto por Diebold y Li (2006), aplicando el Filtro de Kalman para la estimación simultánea de los parámetros de la curva a través del método de máxima verosimilitud, y luego estimaron un SVAR tomando los componentes principales de las tasas de interés, la utilización de la capacidad instalada, la tasa de reserva federal y la inflación anual.

Bautista et al. (2007), Mayorga (2007) y Melo y Castro (2010), empleando la metodología de estimación de la ETTI no estructural sin restricciones de no arbitraje propuesta por Diebold y Li (2006) —versión dinámica de la metodología de Nelson y Siegel (1987)— obtuvieron evidencia empírica que relaciona la ETTI del mercado de deuda pública colombiano con las variables macroeconómicas. Melo y Castro (2010) encontraron una fuerte relación entre las tasas de largo plazo y las expectativas inflacionarias, y que existe una dependencia más fuerte de la ETTI respecto a las variables macroeconómicas, que en el sentido inverso.

### **III. Modelación y base de datos**

#### **a. Modelación**

- i. Estructura temporal de las tasas de interés y el modelo de Nelson y Siegel (1987)**



El modelo parte de una ecuación diferencial de segundo orden y supone que el mercado se encuentra en equilibrio y que no existen oportunidades de arbitraje para generar ganancias entre dos alternativas de inversión.

El modelo puede expresarse de la siguiente forma:

$$f_t = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \beta_2 \left(\frac{t}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (1)$$

donde:

$f_t$  representa la tasa futura o forward al vencimiento en  $t$ ;  $t$  es el tiempo al vencimiento.

Si el  $\lim_{t \rightarrow \infty} f_t = \beta_0$ , el parámetro  $\beta_0$  esta asociado al comportamiento de  $f_t$  en el largo plazo, por lo que se debe cumplir que  $\beta_0 > 0$ . Así mismo, este parámetro determina el *nivel* de la curva, lo que quiere decir que si el tipo de interés de largo plazo varía, el nivel de la curva también lo hace.

Si el  $\lim_{t \rightarrow 0} f_t = (\beta_0 + \beta_1)$ , quiere decir que  $(\beta_0 + \beta_1)$  se relaciona con el comportamiento de  $f_t$  en el corto plazo. Si  $c = (\beta_0 + \beta_1)$ , entonces  $\beta_1 = c - \beta_0$ , y puede interpretarse como la brecha (*spread*) entre el tipo de interés de corto y largo plazo, y ante variaciones entre estos dos tipos se generan cambios en la *pendiente* de la curva.

Teniendo en cuenta que al encontrar el tipo de interés de corto y largo plazo los términos  $\beta_2$  y  $\tau$  se anulan, estos solo aparecen afectando el tramo medio o los rendimientos de vencimientos intermedios, en donde  $0 < t < \infty$ ; por lo tanto,  $\beta_2$  no se interpreta como tasas de interés de mediano plazo, sino que en conjunto  $\beta_2$  y  $\tau$  influyen en que la *curvatura* se ubique entre los límites  $\beta_0$  y  $(\beta_0 + \beta_1)$ .

De acuerdo con lo anterior, los parámetros  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  son los parámetros de la ETII que determinan respectivamente el *nivel*, la *pendiente* y la *curvatura*, mientras que  $\tau$  es considerado un parámetro de ajuste.

Para analizar la volatilidad de las tasas de interés se utilizan los modelos GARCH/EGARCH, ampliamente aceptados y aplicados especialmente en series de tiempo de tipo financiero en los que se cumple que la varianza no condicionada (después de realizar las transformaciones adecuadas) puede ser constante, pero la condicionada es heterocedástica.

## ii. Modelo de heterocedasticidad condicional autorregresiva generalizada (GARCH)

Bollerslev (1986) propuso una nueva formulación de los modelos de heterocedasticidad condicional autorregresiva (ARCH) desarrollados por Engle (1982), con el fin de evitar las restricciones<sup>4</sup> y la pérdida de precisión en la estimación de series financieras con un número elevado de retardos, los cuales generalmente están correlacionados. La reparametrización denominada heterocedasticidad condicional autorregresiva generalizada (GARCH por sus siglas en inglés *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) depende de un número reducido de parámetros, y además del cuadrado de los errores retardados (como en el modelo ARCH) de la varianza condicional retardada.

$$\begin{aligned}
 r_t &= \mu + \varepsilon_t \\
 \varepsilon_t &\approx N(0, \sigma_t^2) \\
 \varepsilon_t &= a_t \sigma_t \\
 \sigma_t^2 &= \delta_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_p \sigma_{t-p}^2 \\
 \sigma_t^2 &= \delta_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2
 \end{aligned} \tag{3}$$

A pesar de que el modelo logra solucionar el problema de los retardos, no resuelve las limitaciones de los supuestos en los que debe cumplir con la restricción de los parámetros  $\delta_0 > 0$  y  $\alpha_i, \beta_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, q$  y  $j = 1, 2, \dots, p$ .

---

<sup>4</sup> Entre ellas se tiene que la varianza debe ser positiva, y para garantizarlo, todos los regresores, incluido el intercepto, deben ser positivos; es decir, que  $\alpha_0 > 0$  y  $\alpha_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, p$ . Para cumplirse la condición de estacionariedad en media, la suma de todos los parámetros debe ser menor que la unidad:  $a_t \sim iidN(0,1)$ . Para lograr ajustar el modelo, generalmente se requiere de un número elevado de retardos.

### iii. Modelo exponencial GARCH (EGARCH)

Debido a que los modelos ARCH/GARCH establecen restricciones difíciles de lograr, como la no negatividad de los parámetros, además de la inadecuada estimación del efecto apalancamiento, Nelson (1991) determinó una nueva parametrización que contempla de manera diferenciada los efectos de noticias positivas y negativas en los rendimientos; es decir, que la respuesta de la volatilidad no suele ser simétrica en la práctica, como lo plantean los modelos ARCH/GARCH, sino que por el contrario resulta ser de mayor magnitud ante disminuciones en los precios que ante subidas en estos. Los modelos GARCH exponenciales, o EGARCH, consideran los efectos asimétricos de la volatilidad de los rendimientos y no presentan restricción de no negatividad de los parámetros.

$$\begin{aligned}
 r_t &= \mu + \varepsilon_t \\
 \varepsilon_t &\approx N(0, \sigma_t^2) \\
 \varepsilon_t &= a_t \sigma_t \\
 \ln \sigma_t^2 &= \delta_t + \sum_{j=1}^q \alpha_j \ln \sigma_{t-1}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i g(a_{t-i})
 \end{aligned} \tag{4}$$

En el modelo de Nelson (1991), para asegurar que  $\sigma_t^2 > 0$ , se asume que  $\ln \sigma_t^2$  está en función del tiempo y del pasado de  $a_t$ ; es decir, que para una función  $g$  el modelo se puede escribir así:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_t &= a_t \sigma_t \quad a_t \sim iidN(0,1). \\
 \ln \sigma_t^2 &= \delta_t + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k g(a_{t-k}), \beta_1 \equiv 1
 \end{aligned} \tag{5}$$

donde  $\{\delta_t\}_{t=-\infty}^{t=\infty}$  y  $\{\beta_k\}_{k=1}^{k=\infty}$  son secuencias no estocásticas de números reales. Con el objetivo de modelar uno de los mayores aportes del modelo, el cual tiene que ver con la volatilidad asimétrica de la serie financiera, se requiere que  $g(\cdot)$  esté en función del signo y de la magnitud de  $\varepsilon_t$ , por lo que  $g(\cdot)$  se define como una combinación lineal de  $a_t$  y  $|a_t|$  dada por:

$$g(a_t) \equiv \theta a_t + \gamma[|a_t| - E|a_t|], \quad E[g(a_t)] = 0 \tag{6}$$

Expresando  $a_t$  como el error estandarizado  $\frac{\varepsilon_{t-k}}{\sigma^2_{t-k}}$  y reemplazando (6) en (5), el modelo se puede escribir así:

$$\ln \sigma_t^2 = \delta_t + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left\{ \theta \frac{\varepsilon_{t-k}}{\sigma^2_{t-k}} + \gamma \left[ \left| \frac{\varepsilon_{t-k}}{\sigma^2_{t-k}} \right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \right\}, \beta_1 \equiv 1 \quad (7)$$

donde:

$$E|a_t| = E \left| \frac{\varepsilon_{t-k}}{\sigma^2_{t-k}} \right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Dado que  $|a_t| = \begin{cases} a_t & \text{si } 0 < a_t < \infty \\ -a_t & \text{si } -\infty < a_t \leq 0 \end{cases} g(a_t)$ , se puede escribir así:

$$g(a_t) = \begin{cases} (\theta + \gamma)a_t - \gamma \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{si } 0 < a_t < \infty \\ (\theta - \gamma)a_t - \gamma \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{si } -\infty < a_t \leq 0 \end{cases}$$

Por medio de  $g(a_t)$ , el modelo permite explicar que la varianza condicional responde de manera asimétrica a las subidas y bajadas del precio de las acciones. Si  $0 < a_t < \infty$ , entonces  $g(a_t)$  es lineal en  $a_t$  con pendiente o tendencia  $(\theta + \gamma)$ , mientras que si  $-\infty < a_t \leq 0$ , entonces  $g(a_t)$  es lineal en  $a_t$  con pendiente o tendencia  $(\theta - \gamma)$ .

Para representar el efecto magnitud, en el término  $\gamma[|a_t| - E|a_t|]$  se asume que  $\theta = 0$  y que  $\gamma > 0$ . La innovación en  $\ln \sigma_{t+1}^2$  es, entonces: positiva, cuando la magnitud de  $a_t$  es mayor que su valor esperado; y negativa, cuando la magnitud de  $a_t$  es menor que su valor esperado. Si se asume que  $\theta < 0$  y que  $\gamma = 0$ , se tiene que la innovación en la varianza condicional es: positiva, cuando la innovación en los retornos es negativa; y negativa, cuando la innovación en los retornos es positiva (Fernández 2009).

Finalmente, sustituyendo (6) en (4) y expresando  $a_t$  como el error estandarizado, el modelo EGARCH puede escribirse de la siguiente forma:

$$\ln \sigma_t^2 = \delta_t + \sum_{j=1}^q \alpha_j \ln \sigma_{t-1}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \left[ \theta \frac{\varepsilon_{t-k}}{\sigma_{t-k}^2} + \gamma_i \left[ \left| \frac{\varepsilon_{t-k}}{\sigma_{t-k}^2} \right| - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right] \right] \quad (8)$$

#### iv. Funciones impulso-respuesta: Modelo de vectores autorregresivos estructurales (SVAR)

El modelo de vectores autorregresivos estructurales (SVAR) fue propuesto inicialmente por Sims (1986) como una variante de la versión estándar del modelo de vectores autorregresivos (VAR), el cual está conformado por un sistema de ecuaciones simultáneas de variables endógenas. Entre las ventajas de usar un SVAR en lugar de un VAR está el que en estos modelos no se necesita justificar adecuadamente el orden de las variables del sistema y se pueden imponer restricciones económicas de tipo teórico o empírico, ya sean contemporáneas o de largo plazo.

Un VAR( $p$ ) está dado por la siguiente especificación:

$$Y_t = A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_t + \varepsilon_t \quad (9)$$

donde  $Y_t$  son vectores  $k \times 1$  de variables endógenas del sistema,  $Y_{t-i}$  son los vectores de las mismas variables endógenas de forma rezagada en  $i$ ,  $A_i$  con las matrices  $k \times k$  de coeficientes y  $\varepsilon_t$  es un vector  $k \times 1$  homoscedástico y no autocorrelacionado.

Reparametrizando la ecuación 9 y expresándola en términos del operador de rezagos, se tiene que:

$$Y_t - A_1 Y_{t-1} - A_2 Y_{t-2} - \dots - A_p Y_t = \varepsilon_t$$

$$A(L)Y_t = \varepsilon_t$$

En los modelos SVAR, por su parte, se tienen tres especificaciones (modelo A, B y AB), en donde se definen restricciones de corto y largo plazo, dependiendo de los propósitos del investigador.

El modelo SVAR se especifica de la siguiente manera:

$$A_0 Y_t = A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_t + \varepsilon_t \quad (10)$$

$$A_0 A(L) Y_t = \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = A_0 u_t \sim iidN(0, \Sigma_\varepsilon)$$

donde  $A_0$  denota la matriz de restricciones estructurales de las relaciones contemporáneas entre las variables del sistema.

La forma reducida de la ecuación 10 puede escribirse así:

$$y_t = \Phi_1 y_{t-1} + \Phi_2 y_{t-2} + \dots + \Phi_p y_t + e_t$$

donde  $\Phi = A_0^{-1} A_i$ , para  $i = 1, \dots, p$  y  $e_t = A_0^{-1} \varepsilon_t$ .  $y_t$  es  $nx1$  y existen  $pn^2$  elementos en  $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p)$  y  $n(n+1)/2$  elementos en la matriz de covarianzas de las perturbaciones, la cual viene dada por  $\Sigma_e = A_0^{-1} \Sigma_\varepsilon (A_0^{-1})'$ . Además,  $e_t \sim iidN(0, \Sigma_e)$ .

## b. Base de datos

Para representar la ETII y estimar su volatilidad se eligen los nodos de uno, tres, seis y diez meses; y uno, tres, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez años. Las tasas de interés fueron calculadas a partir de los parámetros de la ETII que son estimados diariamente por la Bolsa de Valores de Colombia para la referencia de los TES clase B (los de mayor volumen de negociación), siguiendo la metodología Nelson y Siegel (1987). La muestra comprende 4769 observaciones diarias, desde diciembre de 2003 hasta diciembre de 2016.

Para estimar el modelo SVAR, la base de datos está integrada por los componentes principales<sup>5</sup> de la volatilidad de la ETTI y por las variables macroeconómicas que representan la actividad real, las tasas de interés, el nivel de precios y el riesgo país (tabla 1).

Tabla 1. Componentes principales para las variables macroeconómicas

<u>Actividad real</u>			
<u>Component</u>	<u>Comp. 1</u>	<u>Comp. 2</u>	<u>Comp. 3</u>
PIB	-0,56	-0,69	0,46
Índice de producción indus:	-0,56	0,73	0,40
Desempleo	0,61	0,03	0,79
Eigenvalue	1,97	0,61	0,43
Cumulative Proportion	65,6%	85,8%	100,0%

<u>Tasa de interés</u>			
<u>Component</u>	<u>Comp. 1</u>	<u>Comp. 2</u>	<u>Comp. 3</u>
Tasa de política monetaria	0,58	0,38	0,72
Tasa interbancaria	0,58	0,43	-0,69
DTF	0,57	-0,82	-0,03
Eigenvalue	2,95	0,05	0,00
Cumulative Proportion	98,3%	99,9%	100,0%

<u>Precios</u>		
<u>Component</u>	<u>Comp. 1</u>	<u>Comp. 2</u>
IPC	0,71	-0,71
IPP	0,71	0,71
Eigenvalue	1,69	0,31
Cumulative Proportion	84,5%	100,0%

*Fuente:* cálculos propios.

Para las tres primeras variables macroeconómicas, siguiendo la metodología de Ang y Piazzesi (2003), se seleccionan los primeros componentes principales. El primer componente principal, al que se le llama PIB, representa la actividad real y explica el 65,3 % de la variación anual del PIB, la variación anual del índice de producción industrial y la variación anual del desempleo. El segundo componente principal, al que se le llama tasa de política monetaria ( $i$ ), explica las tasas de interés y representa el 98,3 % de la tasa de política monetaria, la tasa interbancaria y la DTF. El tercer componente principal, al que se le llama inflación ( $\pi$ ), representa los precios y explica el 84,5 % de la variación anual del índice de precios al consumidor (IPC) y la variación anual del

<sup>5</sup> La técnica de los componentes principales fue introducida por Pearson (1901) y posteriormente fue desarrollada por Hotelling (1933).

índice de precios al productor (IPP). El riesgo país ( $r$ ) está representado por el EMBI (*Emerging Markets Bonds Index*). La muestra comprende 157 observaciones mensuales, desde diciembre de 2003 hasta diciembre de 2016.

## IV. Resultados empíricos

### a. Volatilidad de la ETTI

En la figura 1 se ilustra una variedad de formas de la estructura temporal de tasas de interés del mercado de deuda pública colombiano, usando la metodología de Nelson y Siegel (1987), en el último día hábil del mes de diciembre para cada uno de los años que forman parte de la muestra.

La disminución del *spread* entre los rendimientos de corto y largo plazo entre el 2005 y el 2008 generó un aplanamiento de la curva, como consecuencia de un incremento en las tasas de interés de corto plazo, lo que, según la teoría pura de las expectativas,<sup>6</sup> refleja la transición a una política monetaria menos expansiva debido a un aumento en el nivel general de precios que se situó por fuera del rango meta. Según investigaciones empíricas, el incremento de la pendiente en el 2009 podría interpretarse como un aumento en las expectativas de inflación y un menor compromiso de la autoridad monetaria para mantener la inflación estable; sin embargo, el cambio de perfil de política monetaria pudo estar incentivado por la crisis financiera internacional y el menor crecimiento económico. Para el 2006, la ETTI nuevamente mostró una forma más plana, pero esta vez debido a la disminución en las tasas de interés de largo plazo, lo cual podría estar dando una señal de que el mercado estaría esperando tasas de interés futuras de corto plazo más bajas, probablemente ante la coyuntura de la menor dinámica de crecimiento económico, situación que efectivamente se materializó con una serie de recortes a la tasa de intervención que inició en diciembre de 2016 y continuó a lo largo de 2017.

---

<sup>6</sup> La teoría pura de las expectativas establece que la forma depende de las expectativas futuras de las tasas de interés. La teoría de la preferencia por la liquidez supone que los agentes prefieren situarse en cierto tramo de la curva dependiendo de la prima de liquidez ofrecida. La teoría del hábitat preferido sostiene que las primas de riesgo no dependen del plazo sino del equilibrio entre oferta y demanda y, en consecuencia, los agentes ajustan sus posiciones dependiendo del rendimiento adicional ofrecido. La teoría de la segmentación de mercados establece que los mercados de largo y corto plazo están segmentados por las restricciones para cambiar de posición para determinado plazo.



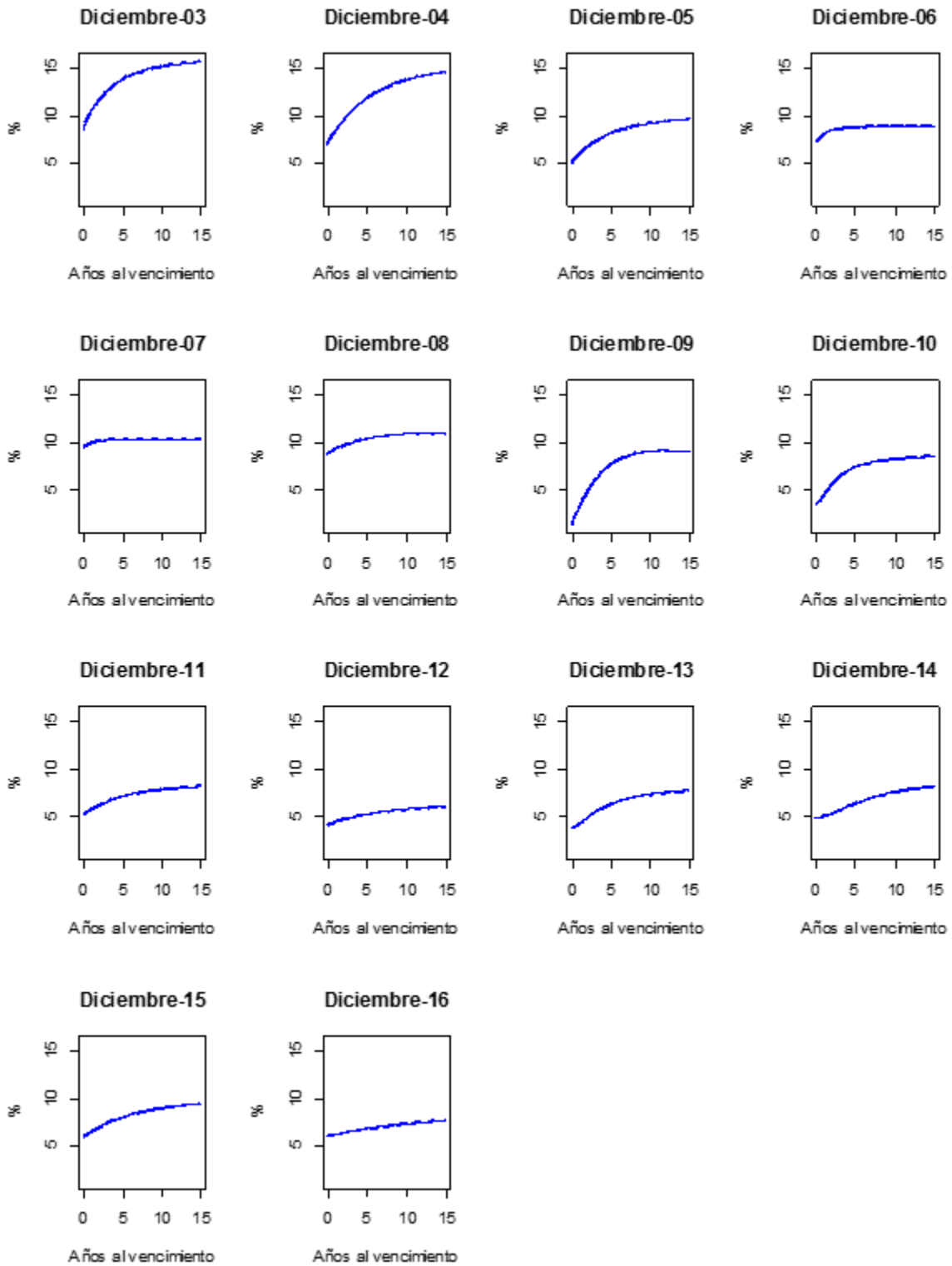


Figura 1. Estructura temporal de tasas de interés al cierre de año.

Fuente: elaboración propia.

En la figura 2, se ilustra el sistema, para 12 períodos de madurez, de tasas de interés que representan la estructura temporal de tasas de interés estimadas con una frecuencia diaria desde 2003 hasta 2016, y usadas como *inputs* para estimar los modelos de volatilidad condicionada y la posterior aplicación del método de componentes principales.

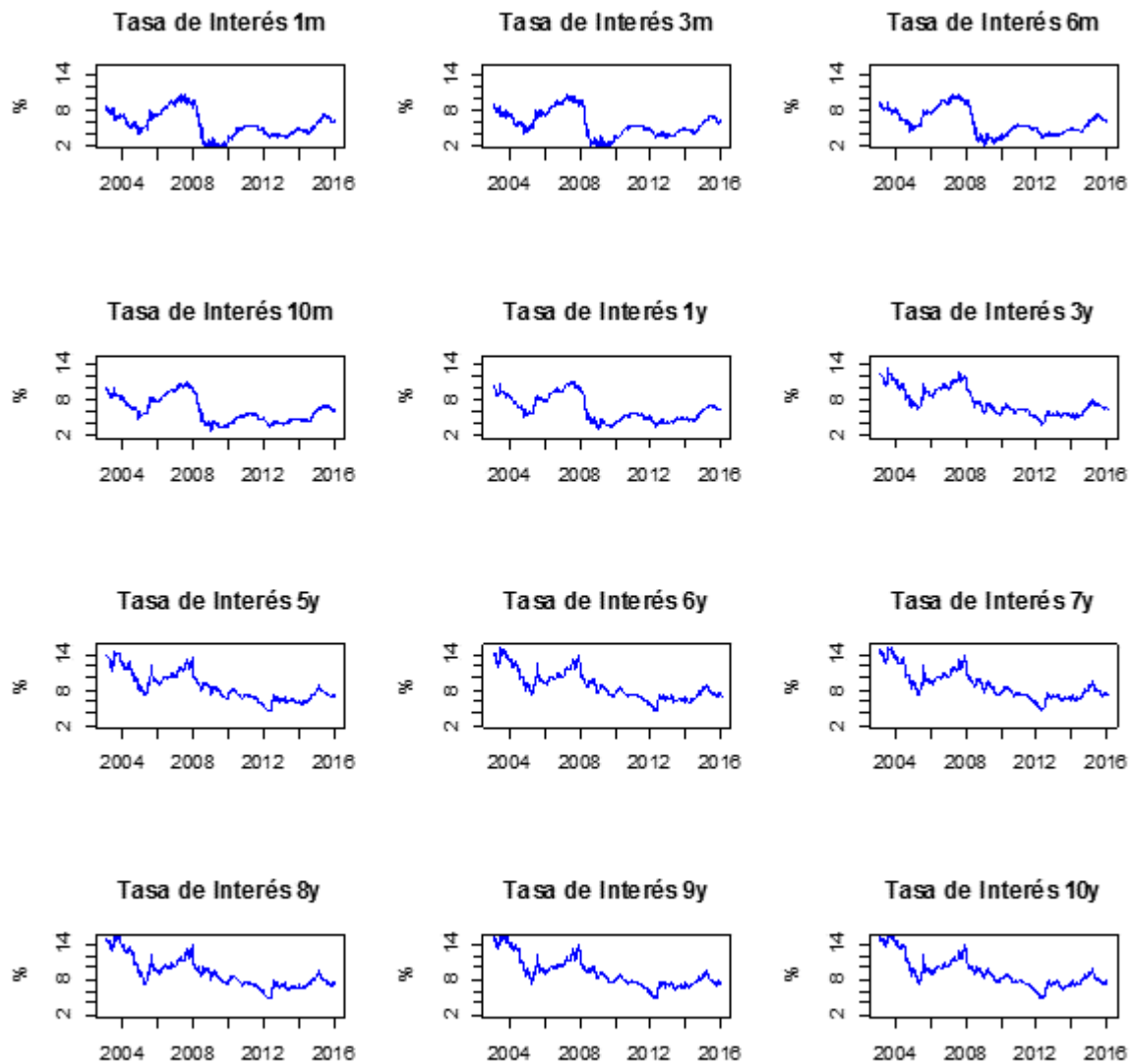


Figura 2. Tasas de interés según período de madurez.

Fuente: elaboración propia.

Se puede observar en la figura anterior que mientras las tasas de interés de corto plazo (hasta un año) reflejan de manera más acentuada la dinámica de las tasas de interés de la política monetaria y los ciclos económicos, las tasas de interés de largo plazo muestran un ciclo menos marcado.

Para la estimación de la volatilidad de la ETII de los diferentes períodos de madurez se eligieron los modelos EGARCH (especificado según la ecuación 8) en 11 de los 12 casos, dado que los resultados de los diferentes test de simetría sugirieron la presencia de asimetría, y teniendo en cuenta que estos son modelos dinámicos más flexibles para la estimación de la ecuación de varianza en comparación con una especificación asimétrica alternativa de un modelo de tipo Threshold ARCH –TARCH- (Díaz et al., 2009).

Los modelos ARIMA, estimados para detectar la presencia de efectos ARCH, se eligieron entre diferentes alternativas, de acuerdo con el criterio de información de Akaike (AIC). Los resultados de los modelos para cada uno de los períodos de madurez se encuentran especificados en la tabla 2, y la estimación de la volatilidad condicionada se encuentra ilustrada en las figuras 3a y 3b. Se puede observar que existen agrupamientos y una fuerte volatilidad en las tasas de interés de corto plazo (hasta un año de madurez), particularmente en los períodos de 1m, 3m, 6m, 10m y 1y, como consecuencia de la crisis financiera.

Tabla 2. Modelos de heterocedasticidad condicionada

	ARIMA				EGARCH					
	$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\delta_1$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\gamma_1$
1 m	0,415 (0,000)		-0,579 (0,000)		0,000 (0,987)*	0,071 (0,000)		0,400 (0,000)	0,521 (0,000)	
3 m	0,382 (0,000)		-0,547 (0,000)		-0,077 (0,000)	0,040 (0,046)	-0,047 (0,020)	0,993 (0,000)		0,299 (0,000)
6 m	0,519 (0,000)		-0,674 (0,000)	0,036 (0,051)	-0,059 (0,000)	0,051 (0,009)	-0,050 (0,012)	0,995 (0,000)		0,290 (0,000)
10 m	-0,054 (0,000)	0,254 (0,000)	-0,071 (0,000)	-0,278 (0,000)	-0,082 (0,000)	0,058 (0,002)	-0,048 (0,014)	0,993 (0,000)		0,253 (0,000)
1 y	0,333 (0,000)		-0,415 (0,000)		-0,102 (0,000)	0,059 (0,002)	-0,047 (0,016)	0,992 (0,000)		0,245 (0,000)
3 y	0,997 (0,000)		-0,972 (0,000)		-0,117 (0,000)	0,120 (0,000)	-0,057 (0,004)	0,991 (0,000)		0,228 (0,000)
5 y	0,976 (0,000)		-0,934 (0,000)		-0,156 (0,000)	0,073 (0,000)	-0,013 (0,257)	0,988 (0,000)		0,284 (0,000)
6 y	-0,054 (0,036)		0,141 (0,000)		-0,169 (0,000)	0,065 (0,000)	-0,033 (0,028)	0,987 (0,000)		0,298 (0,000)
7 y	-0,082 (0,000)		0,181 (0,000)		-0,144 (0,000)	0,066 (0,000)	-0,033 (0,077)*	0,988 (0,000)		0,301 (0,000)
8 y	-0,180 (0,000)		0,277 (0,000)		-0,123 (0,000)	0,073 (0,000)	-0,039 (0,015)	0,990 (0,000)		0,296 (0,000)
9 y	-0,285 (0,000)		0,385 (0,000)		-0,110 (0,000)	0,079 (0,000)	-0,042 (0,020)	0,991 (0,000)		0,290 (0,000)
10 y	1,065 (0,000)	-0,072 (0,000)	-0,971 (0,000)		-0,073 (0,000)	0,083 (0,000)	-0,017 (0,404)*	0,994 (0,000)		0,286 (0,000)

() P-valor

\* No significativo a un nivel del 5 %.

Fuente: cálculos propios.

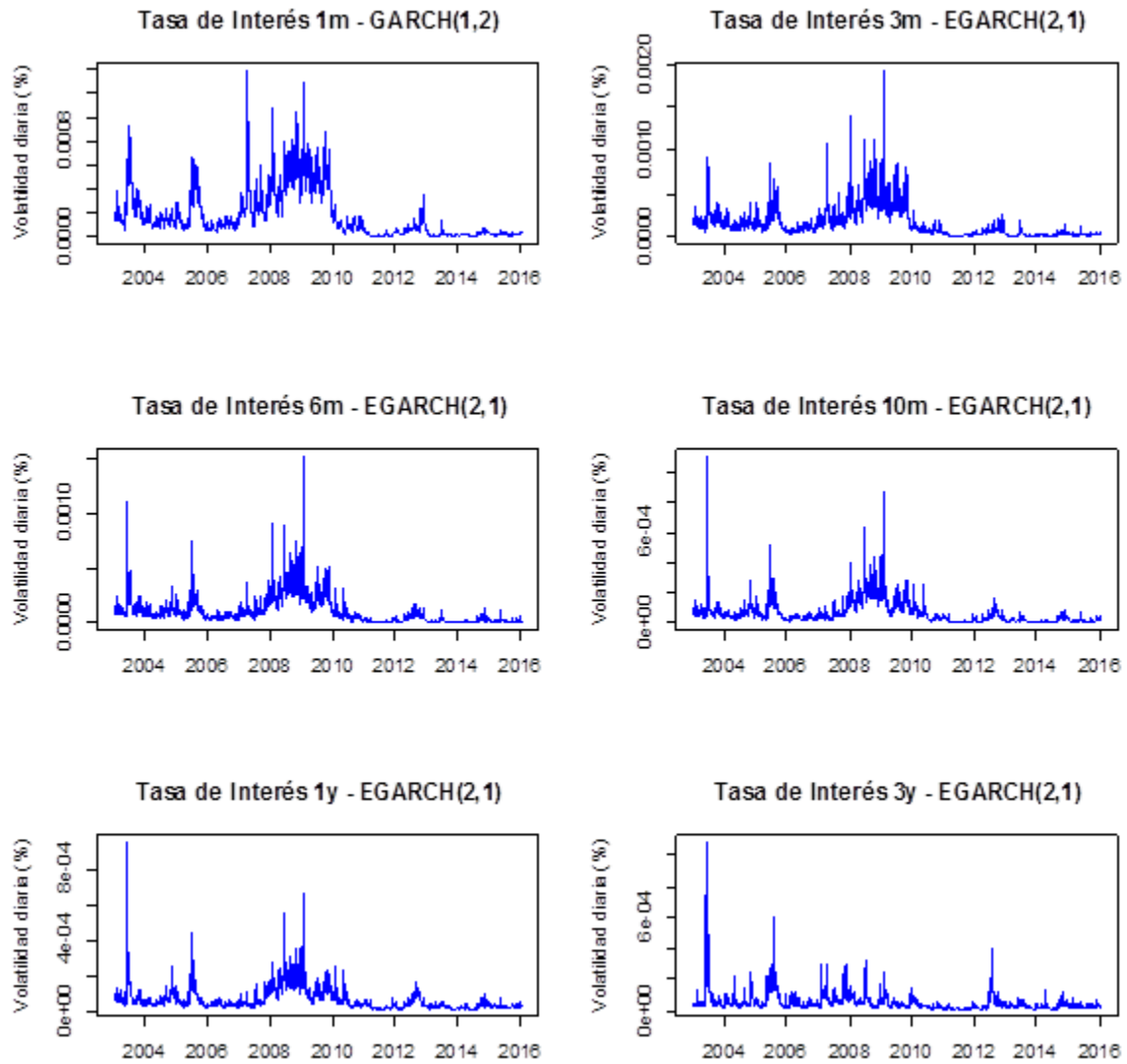


Figura 3a. Volatilidad de las tasas de interés según período de madurez.

Fuente: cálculos propios.

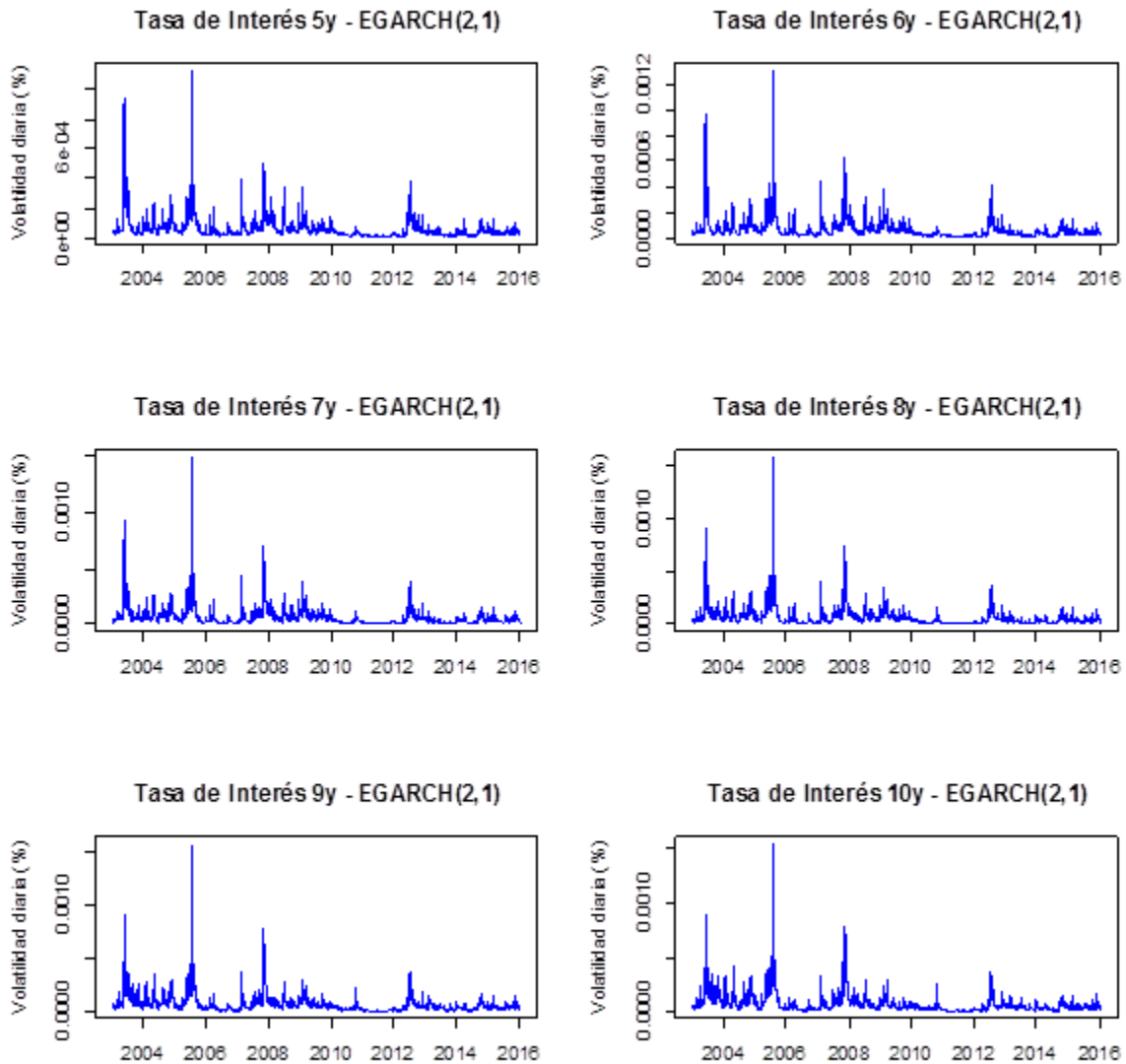


Figura 3b. Volatilidad de las tasas de interés según período de madurez.

Fuente: cálculos propios.

La tabla 3 muestra las correlaciones de la matriz, compuesta por la volatilidad de los diferentes periodos de madurez que representan la ETTI, y sirve como punto de partida para la aplicación de la técnica de componentes principales. En ella se puede observar que la correlación de la volatilidad tiende a disminuir cuando aumenta el *spread* entre los rendimientos de corto y largo plazo.

Tabla 3. Matriz de correlaciones de la volatilidad de la estructura temporal de tasas de interés

	1 m	3 m	6 m	10 m	1 y	3 y	5 y	6 y	7 y	8 y	9 y	10 y
1 m	1,00											
3 m	0,95	1,00										
6 m	0,89	0,97	1,00									
10 m	0,80	0,89	0,96	1,00								
1 y	0,76	0,84	0,92	0,99	1,00							
3 y	0,38	0,37	0,39	0,48	0,54	1,00						
5 y	0,37	0,37	0,39	0,46	0,50	0,93	1,00					
6 y	0,39	0,40	0,42	0,48	0,52	0,87	0,98	1,00				
7 y	0,39	0,41	0,42	0,48	0,51	0,83	0,96	0,99	1,00			
8 y	0,38	0,39	0,41	0,46	0,49	0,80	0,93	0,97	0,99	1,00		
9 y	0,35	0,37	0,38	0,43	0,47	0,79	0,90	0,94	0,97	0,99	1,00	
10 y	0,31	0,33	0,35	0,40	0,43	0,78	0,88	0,90	0,93	0,96	0,99	1,00

Fuente: cálculos propios.

Aplicando la técnica de componentes principales para reducir la dimensión de las doce series de volatilidad condicionada, se obtienen los resultados de la tabla 4, los cuales sugieren que la variación en el sistema para la volatilidad de la ETTI puede ser explicada en un 96 % por los primeros tres componentes principales. El primer componente principal (Comp. 1) es capaz de explicar más de un 68 % de la volatilidad, mientras que el segundo (Comp. 2) y el tercer (Comp. 3) componente principal explican respectivamente un 24 % y un 3 %.

Tabla 4. Componentes principales

Component	Eigenvalue	Cumulative Proportion
Comp. 1	8,22	68,5%
Comp. 2	2,92	92,9%
Comp. 3	0,38	96,0%

Fuente: cálculos propios.

En la tabla 5 se puede observar que todos los coeficientes del primer componente principal (Comp. 1) son positivos a lo largo de todos los períodos madurez. En general este componente puede ser interpretado como el *nivel* de la volatilidad. El segundo componente principal (Comp. 2) muestra que los coeficientes son positivos en el corto plazo, mientras que en el resto de la estructura (mediano y largo plazo) son negativos, por lo que puede ser interpretado como la

diferencia entre la parte corta y larga de la curva; es decir, la *pendiente*. El último componente principal (Comp. 3) muestra cambio de signo en la mitad de la estructura, por lo que puede ser interpretado como la *curvatura*.

Estos resultados, así como la interpretación de los mismos, son consistentes con la explicación dada en investigaciones que estudian la ETTI, como las de Litterman y Scheinkman (1991), Bliss (1997), Alexander y Chibumba (1997) y Alexander (2000; 2001a; 2001b), entre otros, y con investigaciones que estudian la volatilidad de la ETTI, como las de Novales y Benito (2005), Ferrer et al. (2008), Díaz et al. (2011) y Jareño y Tolentino (2012).

Tabla 5. Factor *loadings*

<u>Maturity</u>	<u>Comp. 1</u>	<u>Comp. 2</u>	<u>Comp. 3</u>
1 m	0,2316	0,3721	0,3421
3 m	0,2427	0,3989	0,2540
6 m	0,2504	0,3999	0,0597
10 m	0,2642	0,3537	-0,2507
1 y	0,2709	0,3165	-0,3731
3 y	0,2945	-0,1601	-0,5905
5 y	0,3142	-0,2148	-0,2361
6 y	0,3214	-0,2076	-0,0392
7 y	0,3221	-0,2080	0,1151
8 y	0,3185	-0,2179	0,2182
9 y	0,3117	-0,2302	0,2735
10 y	0,3009	-0,2420	0,2669

*Fuente:* cálculos propios.

Utilizando la metodología aplicada por Ferrer et al. (2008), Alexander y Chibumba (1997) y Alexander (2000; 2001a; 2001b), se estima la volatilidad para cada uno de los componentes principales a través de un GARCH(1,1), cuyos resultados se encuentran ilustrados en la tabla 6.



Tabla 6. Modelos de heterocedasticidad condicionada para los componentes principales

	ARIMA		GARCH		
	$\varphi_1$	$\theta_1$	$\delta_1$	$\alpha_1$	$\beta_1$
Comp. 1	0,9967 (0,0000)	-0,5543 (0,0000)	0,0115 (0,0000)	0,1593 (0,0000)	0,8397 (0,0000)
Comp. 2	1,0000 (0,0000)	-0,6126 (0,0000)	0,0021 (0,0000)	0,0907 (0,0000)	0,9083 (0,0000)
Comp. 3	0,9806 (0,0000)	-0,6406 (0,0000)	0,0008 (0,0000)	0,0793 (0,0000)	0,9197 (0,0000)

() P-valor

Fuente: cálculos propios.

De acuerdo con los resultados, la varianza condicional del nivel de la volatilidad de la ETTI, primer componente principal (Comp. 1), es la variable que cuenta con mayor intensidad de reacción (medida por el parámetro  $\alpha_1$ ) ante un choque en el período previo en  $t - 1$ , así como con un mayor valor medio de la varianza (definida por el parámetro  $\delta_1$ ).

Con el fin de identificar las *proxys* empíricas de la volatilidad de la ETTI, en la tabla 7 se calcula la correlación entre la varianza condicional estimada para cada uno de los rendimientos y cada componente principal. Los resultados sugieren que la varianza de los rendimientos de 7y es la mejor *proxy* asociada al comportamiento del nivel de la volatilidad de la ETTI (figura 4). La diferencia entre la varianza condicionada de los rendimientos de 8y y 6m es la mejor *proxy* asociada a la pendiente. Mientras que la diferencia entre la varianza condicionada de los rendimientos de 7y y 6y es la mejor *proxy* para explicar la curvatura de la volatilidad de la ETTI<sup>7</sup>.

<sup>7</sup> Para encontrar la mejor *proxy* asociada a la pendiente y curvatura se calculó la correlación entre diferentes *spread* de varianza condicionada de los rendimientos de largo y corto plazo.

Tabla 7. Correlación entre la varianza condicional y los componentes principales

	Comp. 1.	Comp. 2. (Spread respecto a 8y.)	Comp. 3. (Spread respecto a 7y.)
1 m	66,4%	84,0%	-20,1%
3 m	69,6%	92,9%	-13,6%
6 m	71,8%	<b>98,6%</b>	1,2%
10 m	75,7%	93,3%	21,9%
1 y	77,7%	86,9%	28,3%
3 y	84,4%	27,8%	63,3%
5 y	90,1%	13,2%	68,8%
6 y	92,1%	17,7%	<b>70,8%</b>
7 y	<b>92,3%</b>	23,1%	N.A.
8 y	91,3%	N.A.	-54,0%
9 y	89,3%	-23,3%	-42,8%
10 y	86,3%	-26,0%	-28,0%

Fuente: cálculos propios.

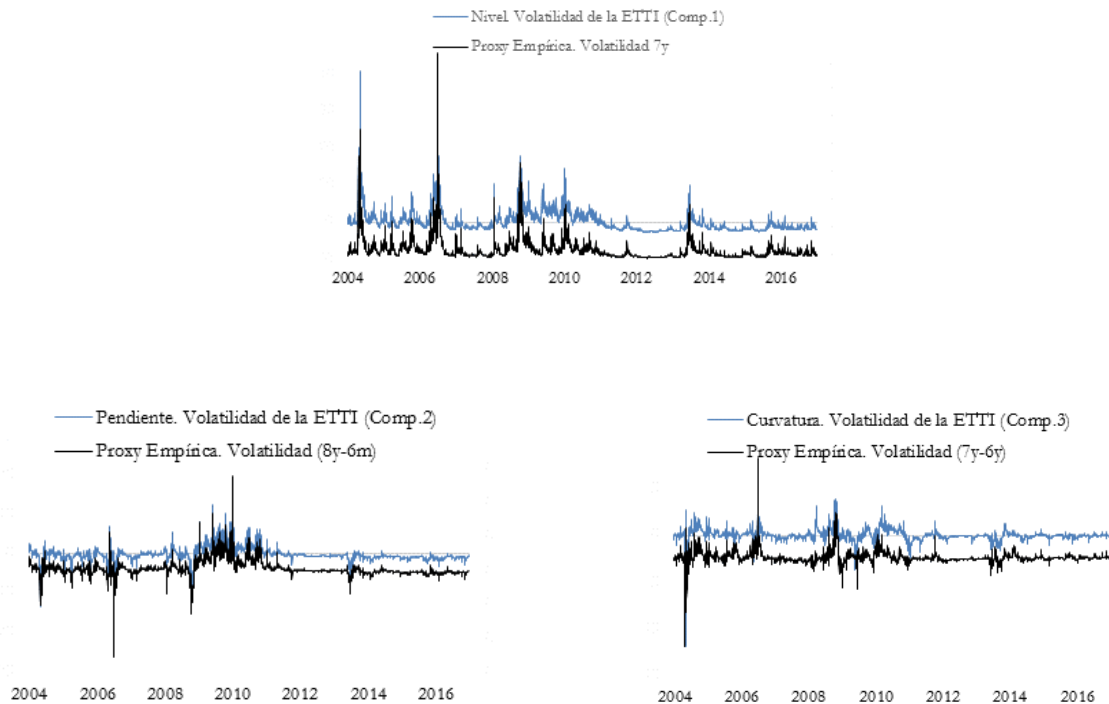


Figura 4. Componentes principales y su proxy empírica.

Fuente: elaboración propia.

## b. Funciones impulso-respuesta

Para estimar las funciones impulso-respuesta, se estimó el modelo SVAR, según la ecuación 10, y se aplicaron las siguientes restricciones contemporáneas a las relaciones entre las variables del sistema compuesto por las variables macroeconómicas y los componentes principales de la volatilidad de la ETTI.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{\pi y} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{i\pi} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{r\pi} & -a_{ri} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{n\pi} & -a_{ni} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm a_{p\pi} & \pm a_{pi} & 0 & +a_{pn} & 1 & 0 \\ 0 & \pm a_{c\pi} & \pm a_{ci} & 0 & +a_{cn} & -a_{cp} & 1 \end{bmatrix} A(L) \begin{bmatrix} y \\ \pi \\ i \\ r \\ n \\ p \\ c \end{bmatrix} = \varepsilon_t \quad (11)$$

donde:

$y = PIB$

$\pi = Inflación$

$i = Tasa de interés de política monetaria$

$r = Riesgo país$

$n = Nivel de la volatilida de la ETTI$

$p = Pendiente de la volatilida de la ETTI$

$c = Curvatura de la volatilida de la ETTI$

Antes de la estimación del sistema se aplicaron las diferentes pruebas de raíz unitaria sobre cada una de las variables y se encontró que no todas las series comparten el mismo grado de integración. Los componentes principales que representan la volatilidad de la ETTI son de orden I(0), mientras que las variables macroeconómicas son de orden I(1), razón por la cual no es procedente la aplicación del modelo alternativo de vector de corrección de errores (VEC), dada la inexistencia de cointegración en el largo plazo. Para establecer el número de rezagos en el

SVAR se usaron los criterios de información de LR FPE, AIC, SC y HQ, los cuales sugieren la selección de dos rezagos (FPE, AIC, HQ)<sup>8</sup>.

Según se encuentra definida la matriz de restricciones  $A_0$  (en 11) con sus respectivos signos<sup>9</sup> para cada uno de los coeficientes, en la fila uno se plantea que el producto depende únicamente de choques en sí mismo y que puede estar determinado por otras variables no incorporadas en el modelo, como política fiscal, capital físico, capital humano y progreso tecnológico. En relación con los choques que podría tener la tasa de política monetaria sobre el producto, se supone que estos son transitorios y no permanentes; es decir, que de manera contemporánea se espera que la política monetaria no presente efectos sobre el producto ( $a_{yi} = 0$ ). En la fila dos se supone que la inflación depende de las fluctuaciones o choques de demanda, por lo que se espera que un choque en el producto genere presiones inflacionarias ( $a_{\pi y} > 0$ ). En la fila tres se supone que un choque en el producto no genera efectos sobre la tasa de interés de política monetaria ( $a_{iy} = 0$ ); pero si el choque se da en la inflación, sí llevaría al emisor a incrementar la tasa ( $a_{i\pi} > 0$ ). En la fila cuatro y cinco también se supone que un choque en la inflación genera incentivos a la autoridad monetaria para aumentar la tasa de intervención, lo que ocasiona aumento tanto en el nivel de volatilidad de la ETII ( $a_{n\pi} > 0, a_{ni} > 0$ ) como en el riesgo país ( $a_{ri} > 0, a_{r\pi} > 0$ ). En la fila seis y siete se supone que tanto un choque en la inflación como en la tasa de política monetaria generen efectos ambiguos en la pendiente ( $\pm a_{p\pi}, \pm a_{pi}$ ) y la curvatura de la volatilidad de la ETII ( $\pm a_{c\pi}, \pm a_{ci}$ ), dado que el cambio en estos parámetros está determinado no solo por la volatilidad de los rendimientos de corto plazo, sino también por el largo plazo; sin embargo, si se presenta un incremento en el nivel, se espera que la pendiente y la curvatura disminuyan ( $a_{pn} < 0, a_{cn} < 0$ ). Finalmente, se espera que si la pendiente aumenta por un aumento en el *spread* de la volatilidad de los rendimientos de corto y largo plazo, entonces la curvatura también lo haga ( $a_{cp} > 0$ ).

Los resultados de los coeficientes estimados son acordes a lo esperado ( $a_{\pi y}, a_{i\pi}, a_{r\pi}, a_{n\pi}, a_{p\pi}, a_{c\pi}, a_{ri}, a_{pi}, a_{ci}, a_{pn}, a_{cp}$ ), exceptuando dos casos ( $a_{ni}, a_{cn}$ ). Las funciones impulso-respuesta se obtuvieron con un intervalo de confianza del 95 %, utilizando

---

<sup>8</sup> LR: *sequential modified LR test statistic*; FPE: *Final Prediction Error*; AIC: Akaike Information Criterion; SC: Schwarz Information Criterion; HQ: Hannan-Quinn Information Criterion.

<sup>9</sup> Al despejar el sistema de ecuaciones, los signos esperados son contrarios a los de la matriz  $A_0$ .

la metodología de análisis asintótico, generando un choque (innovación) de una desviación estándar, y como respuesta la metodología ajustada de Cholesky<sup>10</sup>. En la figura 4a se ilustran las respuestas de cada uno de los componentes principales que representan la volatilidad de la ETTI ante choques en ellos mismos, de lo que se puede inferir que el *nivel*, la *pendiente* y la *curvatura* de la volatilidad de la ETTI responden de manera significativa ante un choque en sí misma. La respuesta positiva en la pendiente de la volatilidad sugiere que la volatilidad de los rendimientos de largo plazo aumenta de manera más rápida que la volatilidad de los rendimientos de corto plazo.

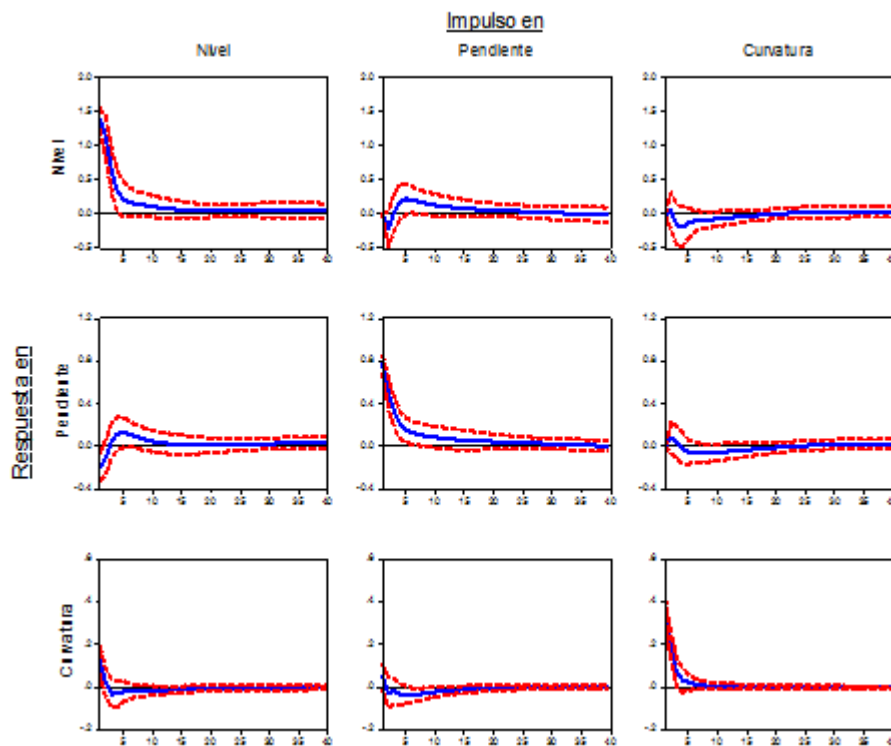


Figura 4a. Respuesta de los factores de volatilidad ante un choque en ellos mismos.

Fuente: elaboración propia.

En la figura 4b se ilustran las respuestas de los componentes principales que representan la volatilidad de la ETTI ante un choque en las variables macroeconómicas. Los resultados sugieren que los componentes principales (*nivel*, *pendiente* y *curvatura*) no tienen una respuesta significativa ante choques en la mayoría de variables macroeconómicas, con excepción de dos casos. En el

<sup>10</sup> Esta metodología transforma el término de error de tal manera que las innovaciones (impulsos) no puedan estar correlacionadas.

primer caso, un choque en la tasa de interés de política monetaria aumenta el nivel de la volatilidad de la ETII en el primer mes, pero posteriormente se produce una disminución significativa. El segundo caso donde se presenta una respuesta significativa tiene que ver con la reacción de la pendiente ante un choque en el crecimiento económico; además se puede observar que, cuando existe un choque en esta variable (PIB), el mercado percibe la noticia de buena manera, dado que se genera una disminución en el nivel y la pendiente de la volatilidad de la ETII, pero posteriormente el proceso se revierte y se produce un aumento en la volatilidad, que posiblemente se puede explicar por un mayor riesgo de inflación, y cambios en el perfil de política monetaria ante un mayor crecimiento económico. Estos resultados son diferentes a los obtenidos por Melo y Castro (2010), en los que las variables de la ETII responden únicamente de manera significativa ante un choque en el EMBI, por lo que se puede decir que la respuesta de la volatilidad de la ETII no necesariamente cumple con el mismo patrón de comportamiento de estructura de tasas.

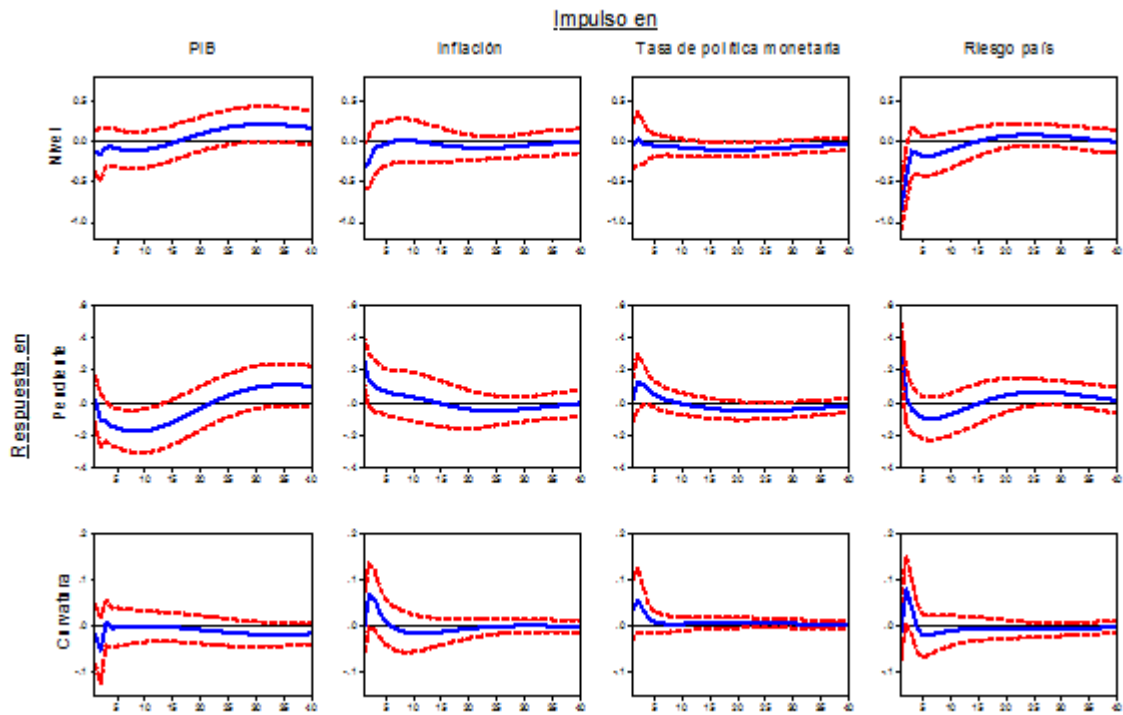


Figura 4b. Respuesta de los factores de volatilidad ante un choque en variables macroeconómicas. Fuente: elaboración propia.

En la figura 4c se encuentran las respuestas de las variables macroeconómicas ante un choque los componentes principales de la volatilidad de la ETII. Las variables macroeconómicas no

responden significativamente ante un choque en los componentes principales que representan de volatilidad de la ETII.

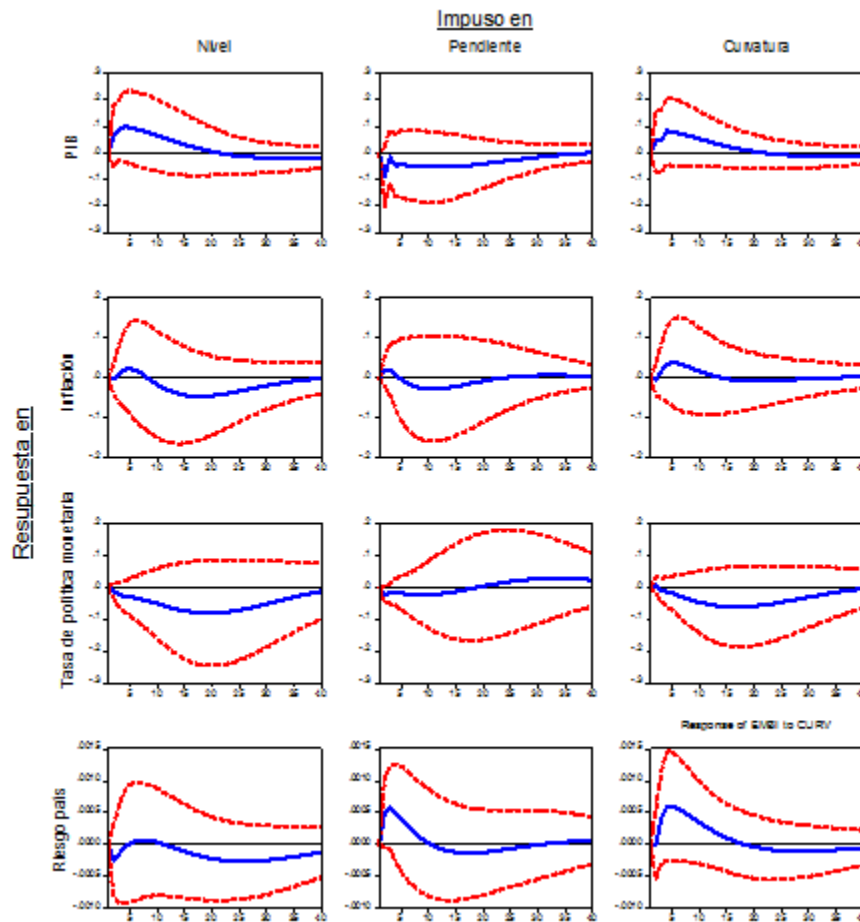


Figura 4c. Respuesta de las variables macroeconómicas ante un choque en factores de volatilidad. Fuente: elaboración propia.

### c. Causalidad de Granger

La causalidad en sentido Granger del sistema fue estimada de acuerdo con la forma estándar de un VAR(2), según la ecuación 9, y los resultados se encuentran en la tabla 8a. Los resultados sugieren que la variable macroeconómica que tiene mayor relevancia en la volatilidad de la ETII es la tasa de interés de política monetaria, al causar el nivel y la curvatura a una significancia del 5 %. Así mismo, la otra variable que determina el comportamiento de la volatilidad es el EMBI, al causar la curvatura a un nivel de significancia del 10 %.

Tabla 8a. Causalidad de Granger. Ho: Variable macroeconómica  $i$  no causan la volatilidad de la ETII

	$n$		$p$		$c$	
	Test. St.	P-Valor	Test. St.	P-Valor	Test. St.	P-Valor
$y$	0,293	0,86	2,406	0,30	3,118	0,21
$i$	7,102	*0,03	4,157	0,13	9,606	*0,01
$\pi$	1,638	0,44	0,881	0,64	0,767	0,68
$r$	1,598	0,45	2,574	0,28	4,555	**0,1

\* Significativo al 5 %; \*\* Significativo al 10 %

*Fuente:* cálculos propios.

De acuerdo con los resultados de la tabla 8b, el único componente que establece una relación causal con las variables macroeconómicas es la pendiente de la volatilidad de la ETII, causando al PIB a un nivel de significancia del 5 % y a la tasa de interés de política monetaria a una significancia del 10 %. El último resultado podría establecer que la autoridad monetaria en Colombia tiene en cuenta dentro de sus herramientas de análisis no solo forma de la estructura de tasas de interés sino la volatilidad generada en los mercados financieros. Además el resultado es similar al obtenido por Melo y Castro (2010), en el que un choque en la pendiente de la ETII genera una respuesta positiva en la tasa interbancaria, el cual puede explicarse por la posible anticipación de los participantes del mercado de bonos a las acciones de la autoridad monetaria (Melo y Castro 2010).

Tabla 8b. Causalidad de Granger. Ho: La volatilidad de la ETII no causan las variables macroeconómicas

	$y$		$\pi$		$i$		$r$	
	Test. St.	P-Valor	Test. St.	P-Valor	Test. St.	P-Valor	Test. St.	P-Valor
$n$	1,894	0,39	1,112	0,57	2,916	0,23	2,483	0,29
$p$	7,395	*0,02	0,402	0,82	4,839	**0,09	0,227	0,89
$c$	3,612	0,16	2,772	0,25	3,765	0,15	3,703	0,16

\* Significativo al 5 %; \*\* Significativo al 10 %

*Fuente:* cálculos propios.



## V. Conclusiones

En esta investigación se estima la volatilidad de la estructura temporal de las tasas de interés del mercado de deuda pública colombiano para el período 2003-2016, a través de modelos de heterocedasticidad condicionada autorregresiva de la familia ARCH. Se identifica cuáles son los componentes principales que la representan y se evalúa la relación de estos con variables de tipo macroeconómico, a través de modelos de vectores autorregresivos estructurales (SVAR) y de causalidad de Granger.

En términos generales, la volatilidad de la curva de rendimientos del mercado de deuda pública colombiano es asimétrica, y modelada a través de un EGARCH (2,1), y puede ser caracterizada a través de tres componentes principales, que son el *nivel*, la *pendiente* y la *curvatura*, siendo el nivel el responsable de explicar casi el 70 % de la volatilidad de toda la estructura y el de mayor intensidad de reacción ante un choque previo de volatilidad. La *proxy* empírica para cada uno de esos componentes principales son la varianza condicionada de los rendimientos de 8y, para el *nivel*; el *spread* entre la varianza condicionada de los rendimientos de 8y y 6m, para la *pendiente*; y el *spread* entre los rendimientos de 7y y 6y, para la *curvatura*.

La evidencia empírica sugiere que existen respuestas significativas de la volatilidad de la ETII ante choques en las variables macroeconómicas. Particularmente, mientras el nivel de la volatilidad de la ETII responde de manera significativa ante un choque en la tasa de interés de política monetaria, la pendiente lo hace en mayor medida ante choques en el crecimiento económico. En el sentido inverso, las variables macroeconómicas no responden significativamente ante choques en los componentes principales de la volatilidad de la ETII.

Aunque un choque en el PIB genera una disminución en la volatilidad de la ETII, esta respuesta no es permanente dado que posteriormente el proceso se revierte, y se produce un aumento en la volatilidad que puede ser explicada posiblemente por un mayor riesgo de inflación y por cambios en el perfil de política monetaria.

Existe relación causal entre las variables macroeconómicas y la volatilidad de la ETTI. El nivel de la volatilidad de la ETTI del mercado de deuda pública colombiano es causado por la tasa de interés de política monetaria, mientras que la curvatura responde causalmente ante la tasa de política monetaria y el riesgo país. En cuanto a las variables de la volatilidad de la ETTI, se evidenció que la pendiente de la volatilidad de la ETTI causa al PIB y a la tasa de interés de política monetaria, situación que podría denotar que la autoridad monetaria tiene en cuenta la volatilidad de los mercados financieros para tomar sus decisiones de política monetaria o que existe una posible anticipación de los agentes de mercados a las acciones de la autoridad monetaria.

## Referencias bibliográficas

- Alexander, C. (2001a). A Primer on the Orthogonal GARCH Model. Disponible en [http://carolalexander.org/publish/download/DiscussionPapers/OrthogonalGARCH\\_Primer.pdf](http://carolalexander.org/publish/download/DiscussionPapers/OrthogonalGARCH_Primer.pdf)
- Alexander, C. (2001b). Principal Component Models for Generating Large GARCH Covariance Matrices. Disponible en [http://www.carolalexander.org/publish/download/JournalArticles/PDFs/Economic%20Notes\\_31\\_2\\_337-359.pdf](http://www.carolalexander.org/publish/download/JournalArticles/PDFs/Economic%20Notes_31_2_337-359.pdf)
- Alexander, C. (2000). Orthogonal Methods for Generating Large Positive Semi-Definite Covariance Matrices. *Discussion Papers in Finance 2000-06*, ICMA Centre, The University of Reading. Disponible en [http://www.academia.edu/29534484/Orthogonal\\_Methods\\_for\\_Generating\\_Large\\_Positive\\_Semi-Definite\\_Covariance\\_Matrices](http://www.academia.edu/29534484/Orthogonal_Methods_for_Generating_Large_Positive_Semi-Definite_Covariance_Matrices)
- Alexander, C., & Chibumba, A. (1997). *Multivariate Orthogonal Factor GARCH*. University of Sussex Discussion Papers in Mathematics.
- Ang, A., & Piazzesi, M. (2003). A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables. *Journal of Monetary Economics*, 50, 745-787. DOI:10.1016/S0304-3932(03)00032-1
- Arango, L., González, A., León, J., y Melo, L. (2006). Cambios en la tasa de intervención y su

- efecto en la estructura a plazo de Colombia. *Borradores de Economía*, 424. Bogotá: Banco de la República. Disponible en <http://www.banrep.gov.co/es/borrador-424>
- Bautista, R., Riascos, Á., y Suárez, N. (marzo, 2007). La aplicación de un modelo de factores a las curvas de rendimiento del mercado de deuda pública colombiano. *Galeras de Administración*. Facultad de Administración, Universidad de los Andes, Bogotá. Disponible en [https://administracion.uniandes.edu.co//images/stories/pdf/06020014\\_Galeras.pdf](https://administracion.uniandes.edu.co//images/stories/pdf/06020014_Galeras.pdf)
- Bernanke, B., & Blinder, A. (1992). The Federal Funds Rate and the Channels of Monetary Transmission. *The American Economic Review*, 82(4), 901-921. Disponible en <http://links.jstor.org/sici?sici=0002-8282%28199209%2982%3A4%3C901%3ATFFRAT%3E2.0.CO%3B2-1&origin=repec>
- Black, F., Derman, E., & Toy, W. (1990). A One-Factor Model Of Interest Rates And Its Application To Treasury Bond Options. *Financial Analyst Journal*, 46(1), 33-39. Disponible en <https://pdfs.semanticscholar.org/6ecb/f463899fdf6a71e272a13153899e3da7ff88.pdf>
- Bliss, R. (1997). Movements in the Term Structure of Interest Rates. *Federal Reserve Bank of Atlanta. Economic Review*, 82(4), 16-33. Disponible en [https://www.frbatlanta.org/-/media/documents/research/publications/economic-review/1997/vol82no4\\_bliss.pdf](https://www.frbatlanta.org/-/media/documents/research/publications/economic-review/1997/vol82no4_bliss.pdf)
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-327. [https://doi.org/10.1016/0304-4076\(86\)90063-1](https://doi.org/10.1016/0304-4076(86)90063-1)
- Brennan, M., & Schwartz, E. (1979). A continuous time approach to pricing. *Journal of Banking & Finance*, 3(2), 133-155. [https://doi.org/10.1016/0378-4266\(79\)90011-6](https://doi.org/10.1016/0378-4266(79)90011-6)
- Chacón, R. (2004). Construcción de La Curva Cupón Cero. Caso Colombiano. *I Simposio de Docentes de Finanzas*. Disponible en <https://core.ac.uk/download/pdf/7074843.pdf>
- Chirinos, A., & Bolívar, M. (2012). *Volatility term structure and estimation of yield curve: Inferring their connections and movements*. Disponible en <http://www.cemla.org/red/papers2006/2012-red-xvii-54.pdf>
- Cox, J., Ingersoll, J., & Ross, S. (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rate. *Econometrica*, 53(2), 385-407. Disponible en <http://www.jstor.org/stable/1911242>
- Cuadros, C. (2015). Descomposición de la estructura a términos de las tasas de interés de los bonos soberanos de Estados Unidos y Colombia. *Revista de Economía del Rosario*, 18(02). DOI: <http://dx.doi.org/10.12804/rev.econ.rosario.18.02.2015.05>
- Díaz, A., Jareño, F., & Navarro, E. (2010). Term Structure of Volatilities and Yield Curve Estimation Methodology. *Quantitative Finance*, 11, 573-568.

<https://doi.org/10.1080/14697680903473286>

- Díaz, A., Jareño, F., & Navarro, E. (2009). Estimating the Volatility Term Structure. En M. Corazza & C. Pizzi (eds.). *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance*, pp. 123-131. Milano: Springer Verlag. DOI: 10.1007/978-88-470-1481-7\_13
- Diebold, F., & Li, C. (2006). Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields. *Journal of Econometrics*, 130(2), 337-364. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2005.03.005>
- Diebold, F., Rudebusch, G., & Aruoba, B. (2006). The macroeconomy and the yield curve: A dynamic latent factor approach. *Journal of Econometrics*, 131(1-2), 309-338. <https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2005.01.011>
- Elton, E., Gruber, M., & Michaely, R. (1990). The Structure of Spot Rates and Immunization. *The Journal of Finance*, 45(2), 629-643. DOI: 10.2307/2328675
- Engle, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom. *Econometrica*, 50(4), 987-1007. DOI: 10.2307/1912773
- Estrella, A., & Hardouvelis, G. (1991). The Term Structure as a Predictor of Real Economic Activity. *The Journal of Finance*, 46(2), 555-576. DOI: 10.2307/2328836
- Evans, C., & Marshall, D. (2001). *Economic Determinants of the Nominal Treasury Yield Curve*. Disponible en [http://www.chicagofed.org/digital\\_assets/publications/2001/Wp2001-16.pdf](http://www.chicagofed.org/digital_assets/publications/2001/Wp2001-16.pdf)
- Evans, C., & Marshall, D. (1998). Monetary policy and the term structure of nominal interest rates: Evidence and theory. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 49, 53-111. [https://doi.org/10.1016/S0167-2231\(99\)00004-4](https://doi.org/10.1016/S0167-2231(99)00004-4)
- Fernández, H. (2009). EGARCH: un modelo asimétrico para estimar la volatilidad de las series financieras. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín*, 9(16), 49-60. Disponible en <http://revistas.udem.edu.co/index.php/ingenierias/article/view/240>
- Ferrer, R., González, C., & Soto, G. (2008). Key Factors in the Term Structure of Volatility of Interest Rates [conferencias]. *XI Encuentro de Economía Aplicada*. Disponible en <http://encuentros.alde.es/antiores/xieea/trabajos/pdf/126.pdf>
- Fong, H. G., & Vasicek, O. (1991). Interest Rate Volatility as a Stochastic Factor. Gifford Fong Associates Working Paper.
- Haldane, A., & Read, V. (2000). Monetary Policy Surprises and the Yield Curve. *Bank of England, Working Paper Series*, 106. Recuperado de <http://www.ssrn.com/abstract=228869>
- Haldane, A., & Read, V. (1999). Monetary Policy and Yield Curve. *Bank of England, Quarterly*

- Bulletin*, 39(2), 171-176.
- Hardouvelis, G. (1994). The Term Structure and Future Changes in the Long and Short Rates in the G7 Countries. *Journal of Monetary Economics*, 33(2), 255-283. [https://doi.org/10.1016/0304-3932\(94\)90003-5](https://doi.org/10.1016/0304-3932(94)90003-5)
- Heidari, M., & Wu, L. (2003). Are Interest Rate Derivatives Spanned by the Term Structure of Interest Rates? *The Journal of Fixed Income*, 75-86. Disponible en [http://faculty.baruch.cuny.edu/lwu/papers/span\\_jfi2003.pdf](http://faculty.baruch.cuny.edu/lwu/papers/span_jfi2003.pdf)
- Ho, T., & Lee, S-B. (1986). Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims. *The Journal of Finance*, 41(5), 1011-1029. DOI: 10.2307/2328161
- Hull, J., & White, A. (1990). Pricing Interest-Rate-Derivatives Securities. *The Review of Financial Studies*, 3(4), 573-592.
- Hull, J., & White, A. (1987). The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *The Journal of Finance*, 42(2), 281-300. DOI: 10.2307/2328253
- Jareño, F., & Tolentino, M. (2012). The US volatility term structure: A principal component analysis. *African Journal of Business Management*, 6(2), 615-626. DOI: 10.5897/AJBM11.2100
- Lekkos, I. (2000). A Critique of Factor Analysis of Interest Rates. *The Journal of Derivatives*, 8(1), 72-83. DOI: <https://doi.org/10.3905/jod.2000.319111>
- Litterman, R., & Scheinkman, J. (1991). Common Factors Affecting Bond Returns. *The Journal of Fixed Income*, 1, 54-61. <http://dx.doi.org/10.3905/jfi.1991.692347>
- Longstaff, F., & Schwartz, E. (1992). Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two-Factor General Equilibrium Model. *The Journal of Finance*, 47(4), 1259-1282. Disponible en <http://www.anderson.ucla.edu/faculty/eduardo.schwartz/articles/45.pdf>
- Matzner-løber, E., & Villa, C. (2004). Functional Principal Component Analysis of the Yield Curve. En *21th International Conference AFFI. Association Française de Finance*. Disponible en [https://www.researchgate.net/publication/255660098\\_Functional\\_Principal\\_Component\\_Analysis\\_of\\_the\\_Yield\\_Curve](https://www.researchgate.net/publication/255660098_Functional_Principal_Component_Analysis_of_the_Yield_Curve)
- Mayorga, W. (2007). *The Yield Curve and Macroeconomics Factors in Emerging Economics: The Colombian Case* [tesis de maestría]. Universidad de York.
- McCallum, B. (2005). Monetary Policy and the Term Structure of Interest Rates. *Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly*, 91(4), 1-21. Disponible en <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.475.6186&rep=rep1&type=pdf>

- Melo, L., y Castro, G. (2010). Relación entre variables macro y la curva de rendimientos. *Borradores de Economía*, 605. Bogotá: Banco de la República. Disponible en <http://www.banrep.gov.co/sites/default/files/publicaciones/pdfs/borra605.pdf>
- Nelson, C., & Siegel, A. (1987). Parsimonious Modeling of Yield Curves. *The Journal of Business*, 60(4), 473-489. Disponible en [http://cepr.org/sites/default/files/events/1854\\_NS\\_1987.pdf](http://cepr.org/sites/default/files/events/1854_NS_1987.pdf)
- Nelson, D. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach. *Econometrica*, 59(2), 347-370. DOI: 10.2307/2938260
- Novales, A., & Benito, S. (2005). A factor analysis of volatility across the term structure: the Spanish case. *Documentos de trabajo del Instituto Complutense de Análisis Económico (ICAE)*, 2. Disponible en <http://eprints.ucm.es/7872/>
- Périgon, C., & Villa, C. (2006). Sources of Time Variation in the Covariance Matrix of Interest Rates. *The Journal of Business*, 79(3), 1235-1549. DOI: 10.1086/500684
- Sims, C. (1986). Are Forecasting Models Usable for Policy Analysis? *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 10(1), 2-17. Disponible en <https://www.minneapolisfed.org/research/qr/qr1011.pdf>
- Soto, G. (2004). Using Principal Component Analysis to Explain Term Structure Movements Performance and Stability. En A. Tavidzem (ed.) *Progress in Economics Research*, 8. Nueva York: Nova Science Publishers.
- Strickland, C. (1993). *Interest Rate Volatility and the Term Structure of Interest Rates*. ESRC Research Fellow, University of Warwick. Disponible en <https://www2.warwick.ac.uk/fac/soc/wbs/subjects/finance/research/wpaperseries/1993/93-37.pdf>
- Svensson, L. (1994). *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994*. Working Paper 4871. National Bureau of Economic Research, Massachusetts. Recuperado de <http://www.nber.org/papers/w4871.pdf>
- Vasicek, O. (1977). An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2), 177-188. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(77\)90016-2](https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2)
- Vasicek, O., & Fong, H. G. (1982). Term Structure Modeling Using Exponential Splines. *The Journal of Finance*, 37(2), 339-348. DOI: 10.2307/2327333
- Wu, T. (octubre, 2003). What Makes the Yield Curve Move. *Risks and Rewards Newsletter*, 43, 24-26.