

# Fundamentación práctica de la Inversión Basada en Metas para el mercado colombiano

**Carlos Andrés Vásquez Díaz**

[cvasqu32@eafit.edu.co](mailto:cvasqu32@eafit.edu.co)

**Diego Andrés Álvarez Gil**

[dalvar49@eafit.edu.co](mailto:dalvar49@eafit.edu.co)

**Diego Alexander Restrepo Tobón**

[drestr16@eafit.edu.co](mailto:drestr16@eafit.edu.co)

## **Resumen**

En el siguiente trabajo se replican los resultados del análisis realizado por Das, Markowitz, Scheid y Statman (2010) en cuanto a la equivalencia entre la Teoría Moderna de Portafolios y la Inversión Basada en Metas, la cual ofrece una aproximación diferente al proceso de selección de activos. Adicionalmente, se efectúa una comparación teórica de ambas estrategias de selección de activos y se realiza una aplicación al mercado colombiano. En el ejercicio práctico encontramos que, para el periodo analizado, existen determinadas metas matemáticamente imposibles de alcanzar, dados los rendimientos de los activos seleccionados, sin embargo, bajo algunos supuestos la aplicación de la teoría permite alcanzar diferentes niveles de rentabilidad con cierto nivel de confianza.

**Palabras clave:** gestión de patrimonio, teoría de portafolios, Inversión Basada en Metas.

**Clasificaciones JEL:** G11, G15.

## **Abstract**

In this work we replicate the results derived from the analysis made by Das, Markowitz, Scheid, and Statman (2010) in terms of the equivalence between the Modern Portfolio Theory and the Goal Based Investing, which offers a different approach to the asset allocation process. In addition, we carry out a theoretical comparison of both asset allocation strategies and an application to the Colombian market is also carried out. In the practical exercise we found that at least in the analyzed period, there are certain goals which are mathematically impossible to reach given the historical returns of the selected assets, however, under certain assumptions, different levels of profitability with a certain confidence level can be achieved with the application of the theory.

**Keywords:** wealth management, portfolio theory, Goal Based Investing.

**JEL Classifications:** G11, G15.

## 1. Introducción

Siguiendo el planteamiento teórico propuesto por Das, Markowitz, Scheid y Statman (2010) mostramos que el problema original de optimización de un individuo en el mundo de media-varianza puede representarse de manera análoga, bajo los supuestos de las finanzas comportamentales (Behavioral Finance), lo que proporciona una nueva forma de abordar el proceso de selección de activos, redefiniendo el concepto de riesgo, la percepción de rentabilidad y la relación entre asesores e inversionistas.

El enfoque de Inversión Basada en Metas (Goal-Based Investment), en adelante GBI, ofrece una aproximación diferente para el proceso de inversión, asegurando que la construcción del portafolio y los resultados obtenidos están estrechamente ligados a las necesidades específicas de cada inversionista. Este enfoque, al considerar que el verdadero problema que enfrenta el inversionista es la posibilidad de no cumplir sus objetivos, redefine el concepto de riesgo, por lo que el proceso integral de gestión de portafolios sufre una transformación fundamental, en términos de la forma como se mide el éxito de una estrategia de inversión (Cabot-Alletzhauser, 2015).

Vemos entonces que esta aproximación constituye un cambio fundamental respecto a la Teoría Moderna de Portafolios (Modern Portfolio Theory), en adelante MPT, en la cual se pretende obtener un rendimiento superior a determinado *benchmark*, o al de algún fondo de inversión de características similares, por lo que ninguno de los enfoques está alineado con las metas específicas de un individuo, ni con su estilo de vida esperado.

Considerando los elementos anteriores, la estrategia del GBI ha ganado adeptos a nivel internacional, como el Premio Nobel de Economía Robert C. Merton, quien durante el

Foro de Finanzas del MIT, en el año 2014, realizó una exposición sobre los atributos de dicha estrategia (Merton, 2014). El eco que ha generado esta nueva estrategia de selección de activos la ha puesto en el foco de la academia y de los fondos de gestión de patrimonio de las economías más desarrolladas, por lo que resulta importante entender la manera cómo funciona, para determinar si es aplicable para los inversionistas y gestores que participan en el mercado colombiano, más aún, teniendo en cuenta que en nuestra búsqueda no tenemos conocimiento de estudios académicos de este tipo que abarquen el mercado local, y consideramos que para el desarrollo del mercado financiero nacional es importante estudiar e incorporar, sistemáticamente, instrumentos desarrollados en los mercados internacionales.

Para esto se replican los resultados del análisis realizado por Das, Markowitz, Sheid y Statman (2010), y se realiza una aplicación al perfil de un inversionista promedio colombiano, con diferentes objetivos y horizontes temporales de inversión, quien está dispuesto a invertir una cantidad determinada de su patrimonio para alcanzar cada meta. Posteriormente, se analizan los resultados a la luz de la MPT, encontrando las similitudes entre los modelos y determinando la probabilidad que tiene un individuo de alcanzar sus metas, según su nivel implícito de aversión al riesgo.

Encontramos que, con los rendimientos históricos de los activos seleccionados, la estrategia de GBI tiene restricciones para su aplicación en el mercado colombiano, pero con el establecimiento de supuestos para el vector de rendimientos esta puede ser viable.

## **2. Problema de investigación**

Según Janssen, Kramer y Boender (2013), es común, en la industria de gestión de patrimonios, encontrar soluciones de inversión que propongan una combinación de activos única e invariable en el tiempo, excluyendo del análisis los gustos, situaciones y necesidades particulares de cada inversionista. Es importante considerar que cada persona puede tener diferentes objetivos a alcanzar con su riqueza a lo largo de su vida, como comprar una casa, realizar un viaje, asegurar la educación de sus hijos o retirarse con un ingreso mensual aceptable; y en la medida en que estas metas tienen características diferentes, cada una de ellas debería contar con su propia estrategia de inversión, con la intención de diseñar un portafolio que se adecúe a sus particularidades.

Como lo resaltan Nevins (2004) y Brunel (2012), el surgimiento de esta estrategia de inversión (GBI), a pesar de no ser un planteamiento completamente nuevo, comenzó a ganar fuerza a nivel internacional a raíz de los mercados bajistas de principios y finales de la década del 2000, puesto que estos pusieron de manifiesto preocupaciones generalizadas de los inversionistas respecto a la capacidad que tiene el enfoque tradicional de administración de riqueza para alcanzar las metas y satisfacer las necesidades de cada perfil de inversionista, lo que ha dado lugar a aproximaciones basadas en el establecimiento de metas y la evaluación no tradicional de riesgos.

Como consecuencia de lo anterior, la industria de gestión de patrimonio está experimentando una transformación fundamentada en la reevaluación de las estrategias tradicionales de selección de activos, partiendo de una preocupación generalizada de los clientes en cuanto a la probabilidad de alcanzar sus metas de corto y largo plazo.

Considerando estos elementos, y previendo que este será un tema de gran desarrollo para la industria financiera en los próximos años, estudiamos en detalle el funcionamiento de la GBI y realizamos un análisis comparativo para algunos activos disponibles en el mercado colombiano, sentando un precedente para que el sector financiero nacional incorpore este tipo de estrategias en los procesos de administración de riqueza.

### **3. Objetivos**

#### **3.1 Objetivo general**

Identificar las oportunidades y limitaciones que tendría la implementación del GBI en el mercado colombiano.

#### **3.2 Objetivos específicos**

- Entender el proceso de selección de activos y gestión de portafolios propuesto por la estrategia de GBI.
- Comparar los planteamientos de la MPT y el GBI, tanto desde el punto de vista teórico como desde la práctica de los gestores de portafolios.
- Construir portafolios de inversión para un individuo común colombiano.

### **4. Justificación**

El análisis de los nuevos instrumentos y estrategias que se incorporan en los mercados financieros internacionales constituye un elemento primordial para su entendimiento y posterior adopción a nivel local, y a medida que nuestro sistema esté en capacidad de ofrecer estrategias mucho más sofisticadas aumentará el desarrollo de los mercados y esto se verá reflejado en el bienestar de los consumidores financieros.

El desarrollo de los mercados financieros es uno de los doce pilares que considera el Foro Económico Mundial en la medición del Índice de Competitividad Global (s. f.), el cual pretende medir la capacidad de un país para generar un crecimiento económico sostenido en el mediano plazo. Este trabajo utiliza elementos tomados de las materias de renta fija, renta variable y administración financiera de la MAF, para entender el funcionamiento de una nueva tendencia en administración de riqueza y dimensionarla en el marco del mercado colombiano, con lo cual consideramos que aportamos al desarrollo del mismo.

## **5. Marco de referencia teórico y conceptual**

### **5.1 Un vistazo a la Teoría Moderna de Portafolios de Markowitz**

Teniendo en cuenta que la estrategia analizada en este trabajo es una reexpresión de la MPT, resulta pertinente recordar algunas de sus características, principalmente aquellas que han sido objeto de revisión teórica a lo largo de los años, y cuyo análisis ha dado lugar a nuevos planteamientos en este campo.

En 1952, a través de un artículo titulado “Portfolio Selection”, Harry Markowitz introdujo en las finanzas una serie de ideas que, con el paso de los años, se convirtieron en un marco generalmente aceptado para la estructuración de portafolios de inversión. Como bien lo explican Elton y Gruber (1998), en esta teoría se muestra cómo los inversionistas adversos al riesgo construyen sus portafolios de inversión con el objetivo de maximizar el retorno esperado para cada nivel de riesgo, o de minimizar el riesgo para un retorno esperado, dando lugar a una frontera eficiente de portafolios de mínimo riesgo y máxima rentabilidad, de la cual se puede elegir un portafolio según las preferencias del inversionista.

El problema original planteado por Markowitz puede expresarse como:

$$\min_w \frac{1}{2} w' \Sigma w \quad s. a. \quad \begin{aligned} w' \mu &= E(R) \text{ (Ecuación 1)} \\ w' \mathbf{1} &= 1 \end{aligned}$$

Donde  $w$  es el vector de pesos de cada uno de los activos dentro del portafolio y  $\Sigma$  es la matriz de varianzas y covarianzas de los retornos de los activos. En la primera restricción se establece un nivel fijo de retorno esperado, para el cual se desea encontrar la mínima varianza, y en la segunda restricción se garantiza que todo el dinero disponible sea invertido.

Esta forma de abordar el problema de la elección de los activos implica que estos no deben ser seleccionados únicamente con base en sus características particulares, sino que se debe considerar la manera como se correlacionan entre sí; es por esto que un elemento fundamental de dicha teoría es el análisis de media-varianza, el cual ha tenido que soportar un sinnúmero de críticas, y aunque se han encontrado algunos métodos alternativos para el análisis sigue siendo el más utilizado, según Elton y Gruber (1998), porque es el más intuitivo, porque ha concentrado la mayor cantidad de estudios y desarrollos desde la academia y porque no hay evidencia de que, al agregar otros momentos estadísticos, se mejore el atractivo de los portafolios obtenidos.

La teoría de media-varianza es un desarrollo que permite encontrar un portafolio óptimo cuando el inversionista está interesado en un único periodo, y en consecuencia las herramientas utilizadas para el análisis tienen validez únicamente para dicho espacio temporal, lo cual parece presentar inconsistencias con la práctica de los inversores, ya que las decisiones de estos últimos son de naturaleza dinámica y tienen diferentes horizontes temporales (Elton & Gruber, 1998).

Como se explicó anteriormente, por medio de la MPT los inversores pueden construir portafolios que maximicen el retorno para cierto nivel de riesgo, siendo este medido en

términos de desviaciones estándar, una medida de volatilidad de los instrumentos que conforman el portafolio y que se hace de forma discreta, por ejemplo, con periodicidad diaria o mensual (Providence, 2012), lo que le impide adaptarse a las necesidades particulares de cada inversionista.

En general, los elementos de la MPT que han sido más debatidos, y que han dado lugar a planteamientos como los que se analizan en el presente trabajo, se muestran a continuación:

- Se asume que todos los inversores tienen un horizonte temporal único, lo que no refleja la forma como actúan estos en la práctica (NEPC Private wealth, 2017).
- El riesgo se mide en términos de desviaciones estándar, lo que es complejo de interpretar para un inversionista, puesto que no se relaciona, de manera intuitiva, con el riesgo de no cumplir los objetivos que se ha planteado (NEPC Private wealth, 2017).

## **5.2 Una aproximación desde las finanzas comportamentales**

El replanteamiento de las estrategias de inversión tradicionales ha sido impulsado fuertemente por una corriente denominada Behavioral Finance, la cual pretende entender la forma como los individuos toman sus decisiones de inversión, alejándose de algunos de los supuestos que soportan la MPT, la cual ha sido generalmente aceptada como el marco rector de las estrategias de administración de portafolios desde mitad del siglo pasado.

En 1979, Daniel Kahneman y Amos Tversky publican “Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk”, un trabajo que analiza, desde la psicología, el proceso de toma de decisiones de los inversionistas, y cuestiona la validez de algunos de los supuestos en los



que se fundamenta la MPT. A través de diversos experimentos se ha demostrado que los individuos pueden desviarse considerablemente de la forma como la teoría espera que se comporten, por ejemplo, Roszkowski (2002) (citado en Nevins, 2004) muestra que un individuo es más propenso a tomar un riesgo cuando se le informa que tiene 50 % de probabilidad de éxito que cuando se le informa que tiene 50 % de probabilidad de fracasar. Esto es un elemento que se debe considerar en el proceso de perfilamiento de los inversionistas, ya que un cuestionario mal diseñado puede producir respuestas sesgadas.

Otro tipo de sesgo comportamental es el exceso de confianza, pues los inversionistas suelen ser demasiado optimistas cuando se trata de predecir los mercados, lo que puede llevarlos a transar, muy frecuentemente, tomando riesgos excesivos o malas decisiones de inversión. Permitir que un inversionista adopte este tipo de comportamiento puede afectarle tanto en el rendimiento de su portafolio como en la asunción de elevados costos de transacción.

La sobre-reacción es otro de los comportamientos que pueden afectar a un inversionista, pues al estar constantemente en búsqueda de tendencias y reaccionar de manera más enérgica ante los eventos más recientes los individuos suelen comprar caro y vender barato.

Desde el campo de las finanzas comportamentales también se ha realizado un aporte importante a la redefinición de la medición del riesgo, introduciendo el concepto de aversión a la pérdida (*loss aversion*), el cual difiere del concepto tradicional de aversión al riesgo, sugiriendo que las personas, en realidad, tienden a tener más aversión a las pérdidas que al riesgo como tal (Nevins, 2004). Este enfoque facilita la medición del riesgo en función de determinados eventos, por ejemplo, no viajar en periodo de

vacaciones para un individuo puede considerarse una pérdida, mientras que la aversión al riesgo suele medirse a través de la desviación estándar, la cual parece carecer de sentido en este contexto, puesto que resulta poco intuitiva y difícil de entender para el individuo.

A partir del año 2002, cuando el Premio Nobel de Economía fue otorgado a Kahneman, teórico de las finanzas comportamentales, cobró mayor relevancia, en el contexto internacional, la búsqueda de nuevos enfoques para abordar aquellos aspectos más “débiles” de la MPT, fundamentalmente la forma como los individuos piensan y se comportan al tomar sus decisiones de inversión (Nevins, 2004).

Dado que la GBI determina un plan consistente con la obtención de un objetivo en un horizonte temporal, su adecuada aplicación puede reducir o eliminar los sesgos comportamentales que hemos mencionado.

### **5.3 Cuentas mentales y GBI**

Como lo menciona Nevins (2004), la percepción y la tolerancia al riesgo de una persona no se reduce a una única medida, por el contrario, existe una gama de niveles en los cuales cada individuo está dispuesto a exponerse, en función de la importancia que tenga cada objetivo dentro de su esquema mental de priorización; por ejemplo, es menos probable que un inversionista esté dispuesto a asumir riesgos con el capital destinado para su pensión que con el que destinará para caridad y labores sociales. Según esta aproximación, cada individuo lleva una cuenta mental en la cual prioriza cada uno de sus objetivos y les asigna un nivel de tolerancia al riesgo, porque en realidad el proceso de toma de decisiones de inversión es diferente para cada una de las metas.

El concepto de cuentas mentales es el fundamento de lo que se conoce como GBI, puesto que esta es una estrategia que permite a los inversionistas estructurar sus decisiones de

inversión en torno a sus necesidades, deseos y horizontes temporales, con la intención de cumplir cada uno de los objetivos que se proponga (SEI, 2012).

La idea de incluir objetivos dentro del diseño de la estrategia de inversión ha ganado popularidad en la industria durante los últimos años, aunque no es un planteamiento completamente nuevo. En la teoría del ciclo de vida, creada por Franco Modigliani en la década de 1950, se asume, de una manera lógica, que a lo largo de la vida cada individuo optimiza su consumo intertemporalmente, equilibrando sus decisiones de ahorro y de endeudamiento, para intentar garantizar un perfil de consumo constante durante sus diferentes etapas productivas. Para alcanzar dicho objetivo, cada individuo debe estructurar un proceso de toma de decisiones de inversión, basado en sus restricciones de liquidez, y guiado por los objetivos que tenga en el corto, mediano y largo plazo, teniendo en cuenta que su nivel óptimo de exposición al riesgo varía en función de sus objetivos y del tiempo faltante para la meta establecida (Bodie, Treussard & Willen, 2007).

Podemos ver entonces que la GBI es un concepto que integra elementos de diferentes teorías, y que debe su impulso, en los últimos años, al aumento en el nivel de incertidumbre que tienen los individuos a la hora de definir sus expectativas respecto a los ingresos derivados de sus inversiones. La crisis financiera internacional del año 2008 generó grandes pérdidas, y dejó un escenario de bajas tasas de interés que ha dificultado el proceso de gestión de portafolios de los fondos de pensiones y de inversión.

La metodología de GBI considera la situación específica de cada individuo, permitiéndole dividir su inversión en tantos portafolios como objetivos tenga, y definir una estrategia diferenciada para cada uno, en función de sus necesidades de liquidez, el horizonte temporal y la importancia de la meta establecida (Janssen, Kramer & Boender, 2013).

El solo hecho de poner al inversor en el foco de la discusión, en lugar de girar únicamente en torno a la forma como los gestores administran los recursos, constituye un cambio en la visión de la gestión de portafolios. Comenzar a entender el punto de vista del inversionista conduce a reflexionar sobre los conceptos de rentabilidad y eficiencia, los cuales tienen una interpretación diferente cuando se analizan los objetivos del inversionista.

Cada inversionista puede tener diferentes objetivos, orientados a satisfacer, por ejemplo, sus necesidades de consumo, transferencias de riqueza o intereses altruistas, entre otros. Los teóricos de las finanzas comportamentales argumentan que, para cada objetivo, la disposición a asumir riesgos varía, fundamentalmente, en función de la importancia relativa que tenga cada meta respecto a las demás; esto genera que el proceso de toma de decisiones de inversión se desarrolle de múltiples formas, aun cuando se trate de un mismo individuo.

Como veremos más adelante, este elemento provee una nueva aproximación al riesgo de un portafolio o estrategia de inversión, creando una relación entre las metas individuales y la medición del riesgo que, aunque es un poco más compleja de modelar que la tradicional, está más acorde con el comportamiento del inversionista a la hora de tomar sus decisiones (Nevins, 2004).

Cuando se considera que la verdadera intención de incurrir en una actividad de inversión es alcanzar un objetivo específico, es coherente reflexionar sobre la aproximación tradicional a la medición del riesgo; teniendo esto claro, el riesgo no debería ser medido como la desviación estándar de los retornos, sino como la probabilidad de no alcanzar la meta establecida, teniendo así una definición mucho más intuitiva y dicente para el inversionista (Janssen, Kramer & Boender, 2013).

La redefinición del concepto de riesgo, como la probabilidad de no alcanzar una meta definida, se torna más robusta si consideramos que, al establecer la estrategia de selección de activos con base en metas que tienen diferentes horizontes temporales, la desviación estándar del rendimiento deja de ser una medida relevante, teniendo en cuenta que esta es atemporal (Janssen, Kramer & Boender, 2013).

#### **5.4 La industria de gestión de patrimonio, contexto internacional**

Según la Investment Management Consultants Association (2012), la definición de un área de práctica profesional surge cuando una disciplina intelectual experimenta evolución en sus procesos, herramientas y aplicaciones; tal es el caso de las finanzas que, a través de la evolución de sus técnicas, han dado lugar a la creación de un campo de práctica profesional denominado Wealth Management.

Aunque en realidad no existe un consenso sobre los conocimientos, nivel de estudio o tareas específicas que desempeña una persona dedicada a la gestión de patrimonios, sí hay algunos elementos claves que nos acercan a la definición de esta área de conocimiento. Tradicionalmente, la gestión patrimonial ha estado limitada a las inversiones y la administración de activos, pero la evolución de las preferencias y comportamientos de los agentes del mercado la ha hecho evolucionar hacia un servicio altamente calificado que combina asesoría financiera, estrategias de inversión, administración de portafolios, gestión del riesgo, control de gastos y rentas generacionales, con el propósito de abordar todos los aspectos financieros de la vida de los individuos de una forma integral.

Esta evolución de la forma como se aborda la administración de patrimonios desde la práctica ha sido producto de grandes transformaciones gestadas durante los últimos años,

de la mano con la evolución de la tecnología, las herramientas analíticas y las nuevas generaciones de inversionistas.

En primer lugar, es importante comprender que para esta época se está concretando el relevo generacional de los “Baby Boomers”, los cuales están transfiriendo riqueza a las próximas generaciones (la generación X y los millenials), cuya conexión con las herramientas tecnológicas ha planteado retos importantes a la industria en términos de asesoría virtual, servicios en línea y herramientas automatizadas. Este fenómeno ha contribuido a la transformación del esquema de interacción entre los clientes y los gestores, el cual migra hacia la autogestión.

En segundo lugar, y muy de la mano del relevo generacional, cobran importancia los acontecimientos económicos y financieros que han marcado el comienzo del siglo XXI en el panorama internacional. Las nuevas generaciones han crecido en medio de fuertes crisis económicas, gestadas, algunas de ellas, desde el interior del sistema financiero, lo que ha minado la confianza en el sistema y ha dejado grandes interrogantes sobre la transparencia con la que operan determinados actores en el mercado. Esto ha ocasionado que los nuevos inversionistas sean mucho más conscientes de los riesgos que asumen, y que quieran monitorear más de cerca la evolución de sus inversiones, para lo cual exigen que la industria proporcione un nivel alto de personalización, creando un *trade off* entre personalización y estandarización, lo que es, sin duda, un gran reto desde el lado de la oferta (Spellacy & Patel, 2016).

## 6. Metodología

### 6.1 Equivalencia matemática entre la MPT y el GBI

En primer lugar, replicaremos el ejercicio realizado por Das, Markowitz, Scheid y Statman (2010), dado que su aproximación provee elementos importantes de comparación entre el modelo de media varianza y los modelos basados en objetivos. Posteriormente, procedemos a recrear un ejemplo para un inversionista que refleja características de un individuo promedio colombiano.

Con el objetivo de establecer una relación entre la MPT y el planteamiento de la teoría de cuentas mentales, se realiza una formulación alternativa del problema de optimización de Markowitz:

$$\max_w w' \mu - \frac{\gamma}{2} w' \Sigma w \quad s. a. \quad w' \mathbf{1} = 1 \quad (\text{Ecuación 2})$$

Donde  $\gamma$  es el coeficiente de aversión al riesgo. Así, podemos apreciar que este planteamiento no es más que una generalización del problema original, el cual se resuelve para un coeficiente de aversión  $\gamma = 1$ .

La solución de este problema nos permite obtener el vector de pesos  $w$  como una función del coeficiente de aversión al riesgo del individuo:

$$w(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \left[ \mu - \left( \frac{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mu - \gamma}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right) \mathbf{1} \right] \in R^n \quad (\text{Ecuación 3})$$

Este replanteamiento del problema nos permite fijar el nivel de aversión al riesgo, en lugar de fijar el retorno esperado como se hace en el problema original; siendo así, al conocer

el nivel de aversión al riesgo que tiene un individuo, para cada una de sus metas, podemos determinar la combinación de activos recomendada.

Consideremos un individuo que tiene a su disposición tres activos para invertir, con la siguiente información:

$$\mu = \begin{bmatrix} 0,05 \\ 0,10 \\ 0,25 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0,0025 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0400 & 0,0200 \\ 0,0000 & 0,0200 & 0,2500 \end{bmatrix}$$

Sus objetivos consisten en tener un plan de retiro, invertir en educación y dejar una herencia. Si se asumen coeficientes de aversión al riesgo (por ahora de forma arbitraria) para cada una de estas metas  $\gamma_1 = 3,7950$ ,  $\gamma_2 = 2,7063$ ,  $\gamma_3 = 0,8773$ , obtenemos un portafolio de inversión para cada una de ellas:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0,53943 \\ 0,26562 \\ 0,19495 \end{bmatrix} \quad w_2 = \begin{bmatrix} 0,37873 \\ 0,34986 \\ 0,27141 \end{bmatrix} \quad w_3 = \begin{bmatrix} -0,78904 \\ 0,96200 \\ 0,82704 \end{bmatrix}$$

Parece entonces que, para determinar una solución bajo esta forma alternativa, debemos conocer el nivel de aversión al riesgo del inversionista, algo que es sumamente difícil de entender y de aproximar por un individuo; pero el verdadero aporte de Das, Markowitz, Scheid y Statman (2010) es que se logra expresar el coeficiente de aversión al riesgo como una función de los datos conocidos de los activos, y de la actitud del inversionista hacia la obtención de sus metas  $\gamma(\mu, \Sigma; H, \alpha)$ , a través de la utilización de un VaR.

Denotemos por  $H$  el valor mínimo de retorno que está dispuesto a obtener un individuo, y  $\alpha$  la probabilidad máxima de no alcanzar una meta determinada; es decir, que con un nivel de confianza  $(1 - \alpha)$  se podría alcanzar un retorno mínimo  $H$ , lo que es equivalente a  $VaR_\alpha = H$ .

Tenemos entonces que:



$$Prob [r(p) \leq H] \leq \alpha \quad (\text{Ecuación 4})$$

Y asumiendo que los retornos de los activos siguen una distribución normal, tenemos la siguiente desigualdad:

$$H \leq w' \mu + \Phi^{-1}(\alpha)[w' \Sigma w]^{1/2} \quad (\text{Ecuación 5})$$

Donde  $\Phi(\cdot)$  representa la distribución normal estándar acumulada.

Teniendo en cuenta que esta ecuación se convierte en igualdad en el punto óptimo, y utilizando el resultado de la ecuación 3, podemos expresar el nivel mínimo de rentabilidad en función de la aversión al riesgo:

$$H = w(\gamma)' \mu + \Phi^{-1}(\alpha)[w(\gamma)' \Sigma w(\gamma)]^{1/2} \quad (\text{Ecuación 6})$$

Donde

$$w(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \left[ \mu - \left( \frac{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mu - \gamma}{\mathbf{1}' \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \right) \mathbf{1} \right] \in R^n \quad (\text{Ecuación 7})$$

A través de este planteamiento, y resolviendo la ecuación para  $\gamma$ , podemos obtener el nivel implícito de aversión al riesgo del individuo en función de variables más fáciles de entender y de estimar por parte de cualquier inversionista:  $\gamma(\mu, \Sigma; H, \alpha)$ .

Retomando el ejercicio, podemos ver que con los siguientes valores de H y  $\alpha$  se obtienen los coeficientes de aversión al riesgo correspondientes, los cuales coinciden con los que en primera instancia definimos de manera “arbitraria”:

	<i>H</i>	$\alpha$
<i>Pensión</i>	-10 %	5 %
<i>Educación</i>	-5 %	15 %
<i>Herencia</i>	-15 %	20 %

$$\gamma = \begin{bmatrix} 3,7950 \\ 2,7063 \\ 0,873 \end{bmatrix}$$

Finalmente, podemos apreciar que existe una equivalencia entre el problema original de Markowitz y la definición de estrategias de inversión basadas en objetivos, con la ventaja de que en lugar de utilizar el nivel de aversión al riesgo como variable de entrada se determina una aversión implícita en función del nivel mínimo de rentabilidad esperado ( $H$ ), y el nivel de confianza con el que se quiere alcanzar la meta ( $1 - \alpha$ ).

Para cada cuenta mental se puede crear un portafolio, y estos residirán en la frontera eficiente presentada por Markowitz. En la siguiente figura se pueden observar tres cuentas mentales representadas por los puntos sin relleno, el punto relleno es una combinación de estas cuentas mentales, en este caso dicho punto tienen un 60 % del primer punto y un 20 % de cada uno de los otros dos puntos.

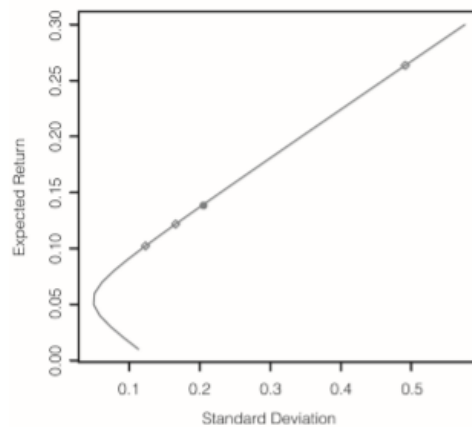


Figura 1. Frontera eficiente. Fuente: Das, Markowitz, Scheid & Statman (2010).

## 6.2 Planteamiento del ejercicio práctico

A continuación, se aplicará este planteamiento al caso de un inversionista promedio colombiano.

Diana es una madre soltera de 28 años que trabaja como asesora inmobiliaria independiente. Hace un par de años, al morir sus padres, le dejaron una herencia de 250.000.000 COP, con los cuales desea lograr los siguientes objetivos:

- Asegurar la educación superior de su hija de 15 años, partiendo de un valor aproximado de 5.500.000 por semestre y con una inflación del 4 % anual. Para ello necesitaría, como mínimo, una base de \$64.500.000 COP. En esta meta Diana estaría dispuesta a tener un límite mínimo de retorno sobre la inversión realizada de -14 % anual, y estaría dispuesta a no alcanzar la meta con un 5 % de probabilidad. Para esta meta destinará 75.000.000 COP.
- Diana quiere invertir 55.000.000 COP con el objetivo de obtener una mensualidad de 1 millón de pesos con un 65 % de confianza, con un retorno mínimo esperado de 1,8182 % mensual.
- Tiene una deuda del apartamento en el cual vive por \$150.000.000 COP. Para esta deuda tiene un periodo de gracia de cuatro años, durante los cuales no se causarán intereses y no deberá hacer abonos a capital; por tanto, pretende invertir \$120.000.000 COP para cancelar totalmente la deuda dentro de cuatro años. Para esta meta tiene entonces un  $H=5,74$  % anual y un  $\alpha=0,15$ .

Los activos que se consideran en el análisis son los siguientes:

- Bonos del Estado colombiano con pago del nominal a julio del año 2024 (TFIT16240724).

- Dólares estadounidenses (TRM COP/USD).
- Unidad de valor real o UVR.
- Equity Residential (EQR): servirá para aproximar el comportamiento del mercado inmobiliario.
- Acciones listadas en la Bolsa de Valores de Colombia: Banco BBVA, ISAGEN, Nutresa, Interconexión Eléctrica S. A. (ISA).

El vector de rendimientos y la matriz de varianzas y covarianzas están dadas por:

$$\mu = \begin{bmatrix} 0,1629 \% \\ 0,1640 \% \\ 0,3095 \% \\ 1,3053 \% \\ 0,5306 \% \\ 0,6825 \% \\ 0,5709 \% \\ 0,5898 \% \end{bmatrix}$$

$\Sigma$

$$= \begin{bmatrix} 0,00061 & -0,00041 & 0,00001 & 0,00036 & 0,00011 & -0,00006 & 0,00040 & 0,00027 \\ -0,00041 & 0,00155 & -0,00003 & -0,00070 & -0,00003 & -0,00023 & -0,00078 & -0,00098 \\ 0,00001 & -0,00003 & 0,00001 & 0,00000 & -0,00001 & 0,00003 & 0,00001 & 0,00003 \\ 0,00036 & -0,00070 & 0,00000 & 0,00337 & 0,00047 & -0,00017 & 0,00036 & 0,00049 \\ 0,00011 & -0,00003 & -0,00001 & 0,00047 & 0,00467 & -0,00020 & 0,00038 & -0,00008 \\ -0,00006 & -0,00023 & 0,00003 & -0,00017 & -0,00020 & 0,00429 & 0,00161 & 0,00127 \\ 0,00040 & -0,00078 & 0,00001 & 0,00036 & 0,00038 & 0,00161 & 0,00334 & 0,00198 \\ 0,00027 & -0,00098 & 0,00003 & 0,00049 & -0,00008 & 0,00127 & 0,00198 & 0,00389 \end{bmatrix}$$

## 6.3 Presentación y análisis de resultados

### 6.3.1 Primera meta

Con el establecimiento de los supuestos para  $H$  y  $\alpha$ , Diana sabe que si invierte 75.000.000 no pone en riesgo la educación de su hija. Según la formulación anterior, el portafolio adecuado para esta meta sería el siguiente:

$$w_1 = \begin{bmatrix} -22,54 \% \\ 1,60 \% \\ 96,14 \% \\ 16,96 \% \\ 1,37 \% \\ 2,89 \% \\ 3,38 \% \\ 0,20 \% \end{bmatrix}$$

El cual tiene un retorno esperado de 6,58 % anual y es compatible con un nivel de aversión al riesgo implícito  $\gamma = 20,48$ . A continuación, mostramos en forma gráfica la relación entre los rendimientos y su respectiva probabilidad.

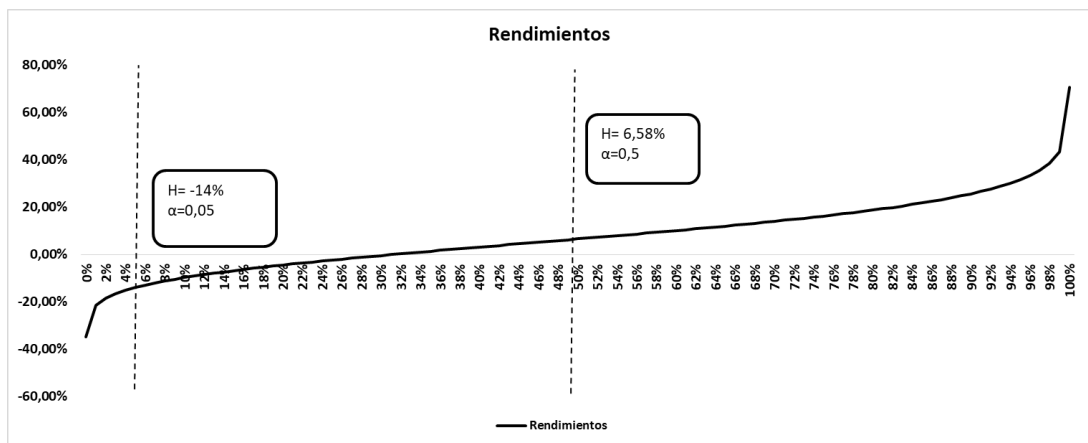


Figura 1. Primera meta, rendimientos históricos. Fuente: elaboración propia.

Podemos observar entonces que Diana tiene aproximadamente un 72 % de probabilidades de que su inversión no pierda valor.

### 6.3.2 Segunda meta

Es importante considerar que el planteamiento de las metas debe ser coherente con las cifras de los mercados en los cuales se está invirtiendo, ya que, en esta meta particular, la combinación planteada de  $H$  y  $\alpha$  no es alcanzable, puesto que el rendimiento más alto dentro de los activos financieros sobre los cuales puede tomar posiciones es de 1,3053 %

mensual, lo que hace que la meta sea incompatible con los rendimientos observados en el mercado.

En este caso, el inversor debe tomar una meta que esté acorde con sus necesidades y que sea realista en términos de las condiciones del mercado, por ejemplo, se le podría sugerir una mensualidad de \$500.000, la cual se alcanzaría con un rendimiento mensual del 0,90909 %, con un 50 % de probabilidades de éxito. Bajo estas condiciones el portafolio estaría conformado de la siguiente manera:

$$w_2 = \begin{bmatrix} -63,05 \% \\ -0,68 \% \\ 98,59 \% \\ 44,59 \% \\ 3,34 \% \\ 8,65 \% \\ 7,76 \% \\ 0,80 \% \end{bmatrix}$$

El cual representaría un nivel implícito de aversión al riesgo  $\gamma = 7,6484$ .

Gráficamente, la relación entre los rendimientos y las probabilidades de no alcanzar la meta ( $\alpha$ ) es la siguiente.

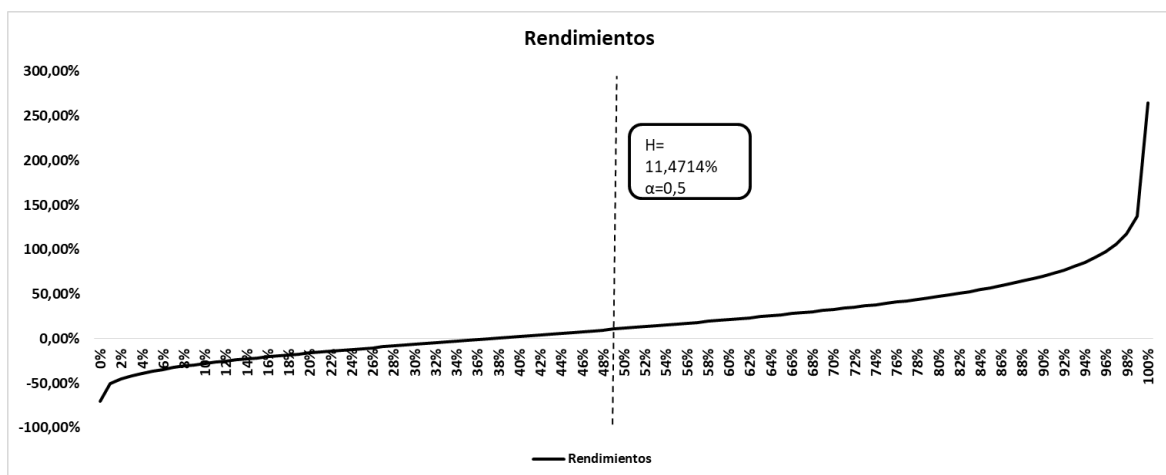


Figura 2. Segunda meta, rendimientos históricos. Fuente: elaboración propia.

Se observa entonces que la esperanza de rendimientos del portafolio es exactamente lo que ella desearía como mensualidad. Dado que esta no es una meta de vital importancia para ella, se puede permitir un poco más de riesgo, por lo cual el rendimiento podría fluctuar a su favor o en su contra.

### 6.3.3 Tercera meta

Con los parámetros establecidos para esta meta encontramos que el nivel de rentabilidad requerido no es alcanzable con los rendimientos de los activos seleccionados; por tanto, se debe replantear la meta, bien sea aumentando  $\alpha$ , disminuyendo  $H$  o aumentando la inversión inicial.

Realizando el replanteamiento de la meta, tenemos que con un  $VaR_{0,5} = 0,0574$  es  $\gamma = 29.069$ , y el vector de pesos obtenidos es el siguiente:

$$w_3 = \begin{bmatrix} -15,40 \% \\ 2,00 \% \\ 95,71 \% \\ 12,10 \% \\ 1,02 \% \\ 1,87 \% \\ 2,61 \% \\ 0,09 \% \end{bmatrix}$$

Con esta combinación de activos el retorno esperado del portafolio es de 5,74 % anual, lo cual es suficiente para alcanzar la meta que tiene Diana de obtener 150.000.000 COP con una inversión de 120.000.000 COP a lo largo de cuatro años. A continuación, mostramos gráficamente la relación entre los rendimientos y su respectiva probabilidad.

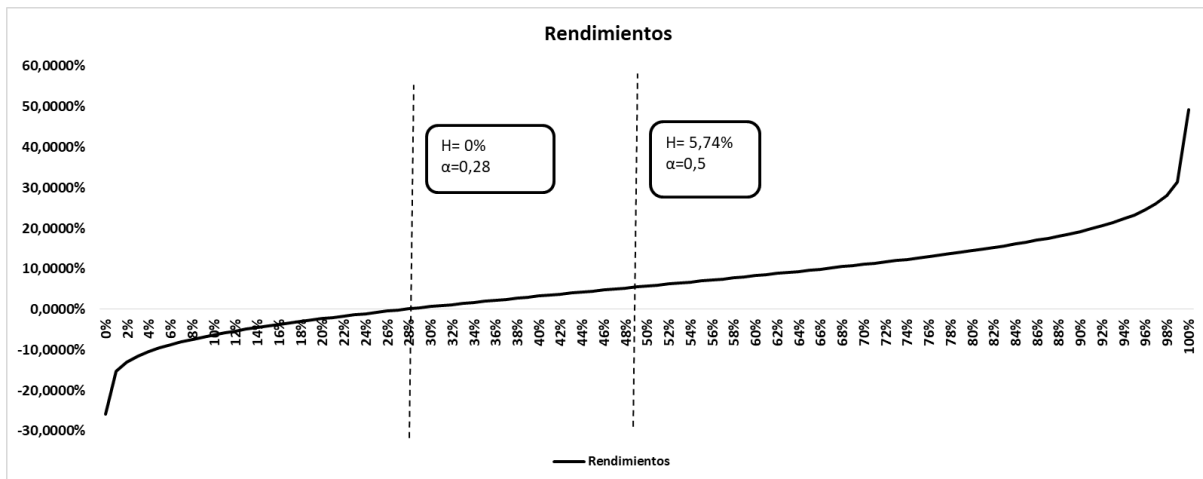


Figura 3. Tercera meta, rendimientos históricos. Fuente: elaboración propia.

Se puede observar entonces que Diana tendrá, con este portafolio, aproximadamente un 72 % de probabilidades de éxito de mantener el valor de su inversión inicial o valorizarla misma.

### 6.4 Ejercicio teórico

Teniendo en cuenta que algunas de las metas planteadas no pudieron ser alcanzadas, dado el nivel de rendimiento histórico de los activos, realizaremos un ejercicio hipotético, donde se definirá un nuevo vector de rendimientos y se mostrará que, bajo este escenario, las metas pueden ser alcanzadas.

Ahora tenemos:

$$\mu = \begin{bmatrix} 0,0000 \% \\ 0,1786 \% \\ 0,3571 \% \\ 0,5357 \% \\ 0,7143 \% \\ 0,8929 \% \\ 1,0714 \% \\ 1,2500 \% \end{bmatrix}$$

Y conservaremos la matriz de varianzas y covarianzas hallada en el ejercicio anterior.



### 6.4.1 Primera meta

Con estos nuevos rendimientos Diana podría alcanzar el mismo nivel H: - 14 % y  $\alpha = 0,05$ , con un portafolio distribuido de la siguiente manera:

$$w_1 = \begin{bmatrix} -50,24 \% \\ -3,21 \% \\ 124,22 \% \\ 4,80 \% \\ 4,78 \% \\ -0,98 \% \\ 11,49 \% \\ 9,15 \% \end{bmatrix}$$

El rendimiento esperado de este portafolio sería de 15,54 %, el cual es bastante superior al hallado con los rendimientos históricos.

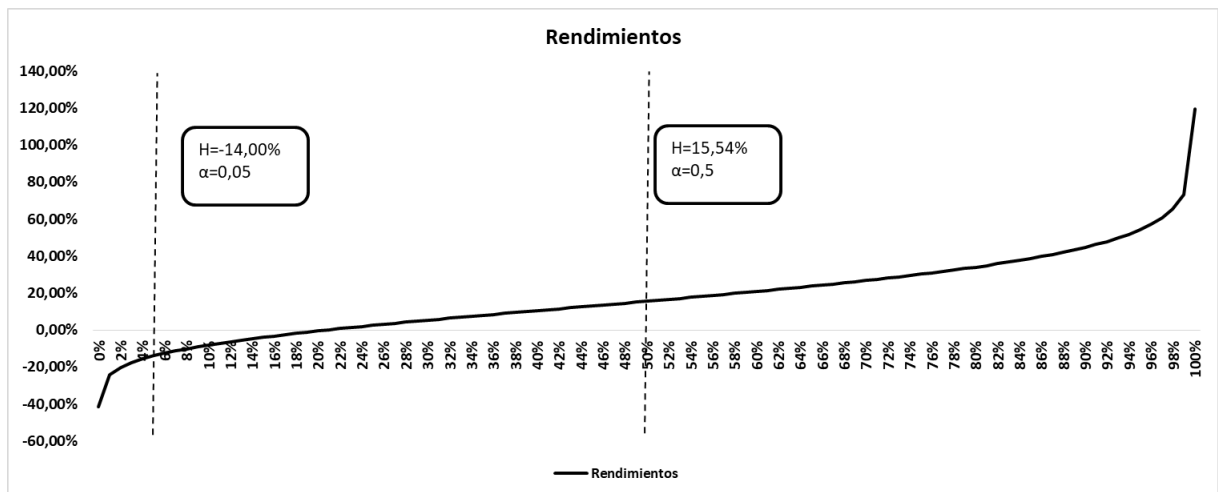


Figura 5. Primera meta, rendimientos teóricos. Fuente: elaboración propia.

Por otro lado, Diana podría esperar no perder valor con un 81 % de confianza, lo cual también supera en desempeño al portafolio anterior. El nivel implícito de aversión al riesgo ahora es de 29,1380; de esta forma, un asesor financiero podría proponerle a Diana un portafolio que con un 5 % de probabilidad de fallo tenga un límite inferior de rendimiento igual a 0 %, es decir, asegurar que con un 95 % de confianza su portafolio

no pierda valor. Este planteamiento no era matemáticamente posible con los rendimientos anteriores, ya que con un nivel de confianza del 95 % se lograrían únicamente rentabilidades mínimas negativas, y la única forma que tendría de alcanzar un  $H = 0\%$  sería subir su alfa muy por encima del 5 %. Después de realizar los cálculos necesarios con el nuevo vector de rendimientos llegamos al siguiente portafolio, donde  $VarR_{0,05} = 0$ .

$$w_1 = \begin{bmatrix} -10,65 \% \\ 1,50 \% \\ 101,66 \% \\ 1,52 \% \\ 1,28 \% \\ -0,65 \% \\ 3,30 \% \\ 2,04 \% \end{bmatrix}$$

El nivel de aversión al riesgo encontrado es  $\gamma = 123,2548$ , lo cual es compatible con el deseo que tiene Diana de no perder valor. A continuación, la figura que relaciona rendimientos mínimos con las probabilidades de no alcanzar las metas.

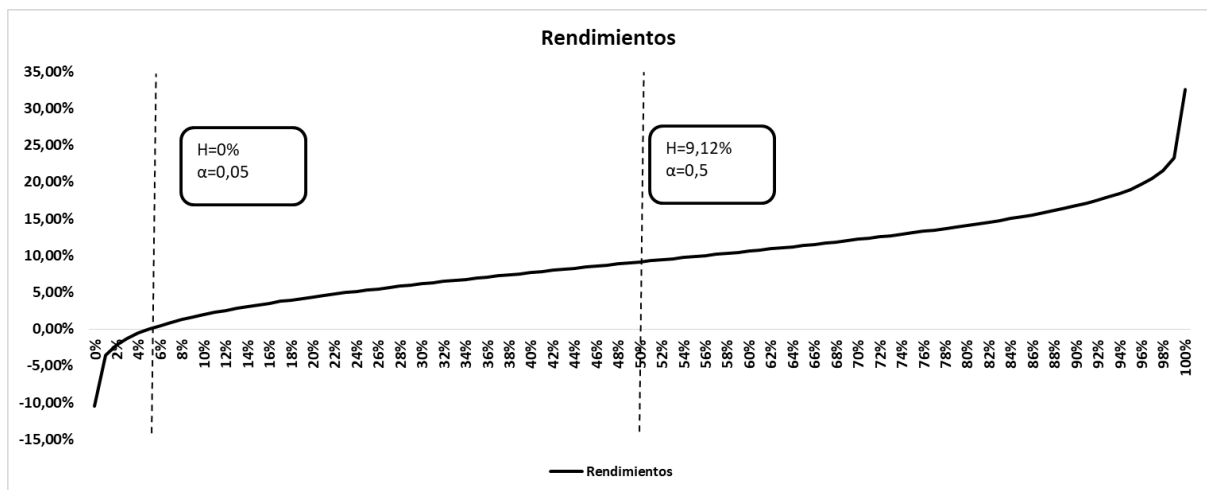


Figura 6. Primera meta modificada, rendimientos teóricos. Fuente: elaboración propia.

## 6.4.2 Segunda meta

A diferencia de lo que pasaba con el vector de rendimientos históricos hallado anteriormente, en este caso la meta es perfectamente alcanzable, por lo cual se podría conformar un portafolio para Diana con un  $VaR_{0,50} = 0,2414$ , invirtiendo su dinero de la siguiente manera:

$$w_2 = \begin{bmatrix} -100,28 \% \\ -9,17 \% \\ 152,73 \% \\ 8,95 \% \\ 9,20 \% \\ -1,40 \% \\ 21,84 \% \\ 18,13 \% \end{bmatrix}$$

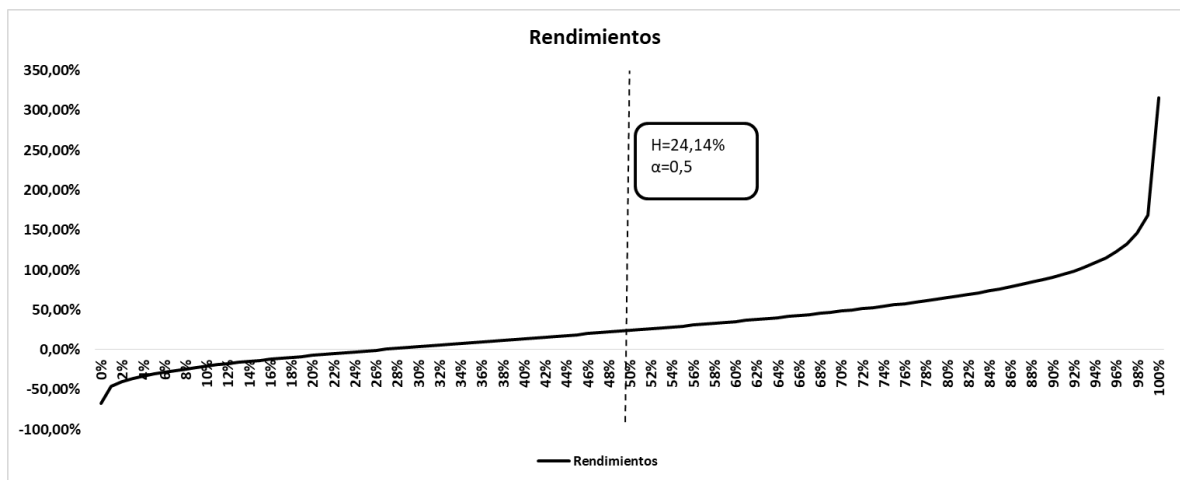


Figura 7. Segunda meta, rendimientos teóricos. Fuente: elaboración propia.

El nivel implícito de aversión al riesgo de Diana sería  $\gamma = 14,8268$ . Considerando que esta meta no es vital, se permite mantener el mismo nivel de aceptación al fracaso, solo que subiendo sus expectativas a lo que ella originalmente consideraba deseable; es decir, a obtener una mensualidad de 1.000.000 COP.

### 6.4.3 Tercera meta

Con los rendimientos históricos no era posible aspirar a un nivel muy alto de probabilidad de éxito que permitiera llegar en cuatro años a 150.000.000 con una inversión de 120.000.000, por lo cual la estrategia utilizada por Diana y el asesor financiero es apelar al rendimiento esperado del portafolio y, de ser posible, asegurar que el portafolio no se desvalore, lo cual se lograría con la siguiente composición:

$$w_3 = \begin{bmatrix} -33,48 \% \\ -1,22 \% \\ 114,67 \% \\ 3,41 \% \\ 3,30 \% \\ -0,84 \% \\ 8,02 \% \\ 6,14 \% \end{bmatrix}$$

Ahora, con el nuevo portafolio podemos ver que Diana puede ser mucho más agresiva y aspirar a obtener la meta propuesta con un menor nivel de probabilidad de fracaso, por lo cual si estableciese  $\alpha = 0,3$ , en vez de un  $\alpha = 0,5$  aun podría obtener el apartamento; siendo así tendría un 70 % de probabilidad de alcanzar su meta, en lugar del 50 % que tenía en el escenario anterior. Todo esto con un nuevo nivel de aversión al riesgo  $\gamma = 43,0526$ , gráficamente podemos ver lo siguiente.

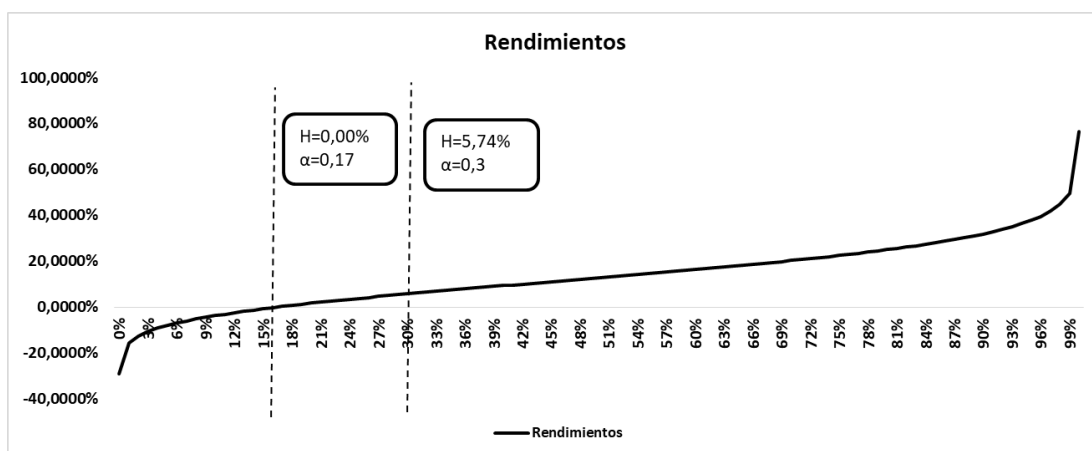


Figura 8. Tercera meta, rendimientos teóricos. Fuente: elaboración propia.

Observamos que Diana ya no aspira solamente a obtener la meta con muchas más probabilidades de lo que hacía con los rendimientos históricos, sino que también su probabilidad de tener un rendimiento mínimo igual o superior a cero pasó del 72 % a un 83 % aproximadamente.

## **7. Conclusiones**

- Mediante la elaboración del ejercicio práctico encontramos que la metodología de inversión basada en objetivos es aplicable en el mercado colombiano; sin embargo, se debe tener en cuenta que las aspiraciones, en términos de rentabilidad, tienen restricciones y éstas dependerán, entre otras cosas, de los rendimientos de los activos en los cuales una persona residente en Colombia puede invertir.
- Aunque las teorías son matemáticamente equivalentes, la forma de abordar el proceso de inversión en GBI representa un cambio en cuanto a la interacción entre los asesores y los inversionistas, y hace mucho más intuitiva la información que requiere conocer el asesor sobre el inversionista para ofrecerle alternativas de inversión.
- El GBI es una forma alternativa a la MPT, la cual facilita la definición de objetivos basados en las necesidades del inversionista y permite realizar un monitoreo de la evolución de la estrategia de cada una de las metas, para definir si es necesario replantear la misma.
- A pesar de que el ejercicio práctico se realizó para un individuo típico colombiano e inicialmente con activos que puedan ser adquiridos por una persona residente en Colombia, esta metodología de GBI podría ser aplicada en otras latitudes.
- Este trabajo es una primera aproximación del GBI para el mercado colombiano; en trabajos posteriores podría complementarse el análisis realizado, con ejercicios

que contemplen restricciones de desinversión, teniendo en cuenta que estas pueden estar restringidas en algunos mercados. También se puede realizar el análisis en términos reales, puesto que los rendimientos establecidos no contemplan la posibilidad de que los inversionistas dejen de alcanzar su meta por la pérdida de poder adquisitivo de la moneda; por último, puede elaborarse un análisis donde la composición del portafolio sea revisada periódicamente, para determinar la evolución respecto a la meta y definir si es necesario recomponerla.

## 8. Referencias

- Bodie, Z., Treussard, J., & Willen, P. (2007). The Theory of Optimal Life-Cycle Saving and Investing. *FRB of Boston Public Policy Discussion Paper*, (7), 19-37.
- Brunel, J. (2012). Goals-Based Wealth Management in Practice. En *CFA Institute Conference Proceedings Quarterly* (págs. 57-65). Calgary: CFA Institute.
- Cabot-Alletzhauer, A. (2015). This time it's personal. *Goals-Based Investing*,(29), 40-41
- Das, S., Markowitz, H., Scheid, J., & Statman, M. (2010). Portfolio Optimization with Mental Accounts. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 45(2), 311-334.
- Eltona, E., & Gruberb, M. (1998). Modern Portfolio Theory, 1950 to Date. *Journal of Banking & Finance*, 21(11-12), 1743-1759.
- Goal-Based Investing, Aligning Life and Wealth (2012). Recuperado de <https://www.seic.com/enCA/amd/15089.htm>
- Índice de Competitividad Global (s. f.). Recuperado de <http://www.colombiacompetitiva.gov.co/sneci/Paginas/indicadores-internacionales-igc.aspx>

- Investment Management Consultants Association (2012). *Defining Wealth Management: Serving High-Net-Worth Clients With a Distinct Body of knowledge*.
- Janssen, R., Kramer, B., & Boender, G. (2013). Life cycle investing: from target-date to Goal-Based Investing. *The Journal of Wealth Management*, 16(1), 23-32.
- Kahneman, D., & Tversky, A. (1979). Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk. *Econometrica*, 47(2), 263-292.
- Merton, R. C. (2014). Foundations of Asset Management Goal-based Investing the Next Trend. Recuperado de <http://mitsloan.mit.edu/uploadedFiles/Alumni/Content/Events/Finance%20Forum%20Bob%20Merton.pdf>
- NEPC Private wealth h (2017). An insight into a Goals-Based Asset Allocation Framework. Recuperado de <http://www.nepc.com/insights/an-insight-into-a-goals-based-asset-allocation-framework>
- Nevins, D. (2004). Goals-Based Investing: Integrating Traditional and Behavioral Finance. *The Journal of Wealth Management*, 34(3), 6-23.
- Objective Based Asset Allocation. (2012). Recuperado de <http://www.miles-capital.com/asset-management/asset-allocation/>
- Spellacy, M., & Patel, A. (2016). 2016 wealth management trends. Recuperado de <https://www.strategyand.pwc.com/media/file/2016-Wealth-Management-Trends.pdf>