Teilbarkeitsregeln in b-adischen Stellenwertsystemen und die Kongruenzrelation

Ein Weg zur Behandlung von Teilbarkeitsregeln in b-adischen Stellenwertsystemen im Unterricht.

Von Friedhelm Padberg

1. Einleitung

Der Behandlung der Gebiete »Teilbarkeitslehre« und »Stellenwertsysteme« wird im Rahmen der KMK-Empfehlungen zur Modernisierung des Mathematikunterrichts eine erhöhte Bedeutung beigemessen. Dies erkennt man schon rein äußerlich an ihrer Heraushebung als eigene Themenkreise bei einer Gesamtzahl von nur sieben Themenkreisen für die ersten sechs Schuljahre. Entsprechend ergeben sich bei diesen Stoffgebieten inhaltliche Vertiefungen gegenüber der traditionellen Behandlung. Dies erkennt man besonders deutlich an der KMK-Formulierung: »Die Teilbarkeit ist eine Zahleigenschaft. Gewisse Teilbarkeitsregeln sind Eigenschaften von Stellenwertsystemen.« Folgerichtig findet man in einigen neueren Schulbüchern für das 5. Schuljahr schon eine Behandlung von Teilbarkeitsregeln für andere Stellenwertsysteme, so z. B. im Mathematikwerk B 5 (Klett Verlag, Stuttgart, 1970) oder auch im Mathematikwerk »Neue Mathematik« (Schroedel Verlag, Hannover 1969).

Dieser Aufsatz will einen übersichtlichen und einfachen Weg aufzeigen, wie man mit Hilfe der Kongruenzrelation Teilbarkeitsregeln für Stellenwertsysteme mit beliebigen Basen $b > 1$ gewinnen kann. Dabei ist der gewählte Ansatz über die Kongruenzrelation selbstverständlich auch im Dezimalsystem brauchbar und – wie mir scheint – dem üblichen Verfahren überlegen, bei dem man zunächst Teilbarkeitsregeln für die Zweier- und Fünferpotenzen ableitet, dann auf eine andere Art und Weise Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 3 und 9 aufstellt und zur eventuellen Ableitung von Teilbarkeitsregeln für 7, 11 und 13 schon wieder einen neuen Ansatz – etwa über die »Märchenzahl« 1001 – wählen muß. Die Aufstellung von Teilbarkeitsregeln in einem nichtdezimalen Stellenwertsystem erfordert gar schon wieder völlig neue Überlegungen. Demgegenüber bietet der im folgenden zu erläuternde Weg über die Kongruenzrelation folgende Vorteile:

1. Die Abhängigkeit der Teilbarkeitsregeln von der Basis des jeweiligen Stellenwertsystems ist auf Grund der Ableitung evident. Damit genügt dieser An-

satz besonders gut der eingangs zitierten KMK-Formulierung.

2. Sämtliche Teilbarkeitsregeln lassen sich – nicht nur im Dezimalsystem, sondern auch in beliebigen Stellenwertsystemen – leicht und übersichtlich aus einer einzigen gemeinsamen Wurzel ableiten. Jeweils neue Ansätze für verschiedene Teilbarkeitsregeln sind also nicht mehr nötig.

3. So kann – gerade auch für Schüler faßbar – die Erkenntnis vermittelt werden, daß es zwar für alle Teiler prinzipiell möglich, aber aus praktischen Erwägungen heraus oft nicht sinnvoll ist, spezielle Teilbarkeitsregeln aufzustellen. Vielmehr muß man immer den Rechenaufwand bei Anwendung einer Teilbarkeitsregel in Relation zu dem erzielten Gewinn sehen. Dieser Einblick in die Konstruktion von Teilbarkeitsregeln verdeutlicht daher besonders gut den Zweckmäßigkeitsgesichtspunkt bei ihrer Aufstellung.

4. Der folgende Weg erlaubt weiterhin die Vereinfachung bekannter Teilbarkeitsregeln (durch Reduzierung des nötigen Rechenaufwandes, wobei die Regeln gleichzeitig aber u. U. etwas weniger »griffig« werden) und ermöglicht auch die Aufdeckung der Zusammenhänge zwischen verschiedenen Teilbarkeitsregeln für einen festen Teiler $d \neq 0$.

5. Der Weg über die Kongruenzrelation gestattet außerdem nicht nur eine Grobklassifizierung der natürlichen Zahlen in »teilbar – nicht teilbar«, sondern im 2. Fall darüber hinaus auch eine genaue Bestimmung des Restes.

Dabei ist der Weg über die Kongruenzrelation im Unterricht gangbar. Die Kongruenzrelation hängt nämlich bekanntlich sehr eng mit dem Restklassenbegriff zusammen: 2 Zahlen sind genau dann kongruent (modulo d), wenn sie in derselben Restklasse (bzgl. d) liegen. Da Restklassen sowie Restklassenaddition und -multiplikation in neueren Schulbüchern schon teils in der Grundschule, teils im 5. Schuljahr behandelt werden und wir beim folgenden Ansatz nicht mehr Kenntnisse über die Kongruenzrelation benötigen als schon (implizit) bei der oben skizzierten Behandlung der Restklassen gebraucht wird, bietet sich diese Art der Ableitung der Teilbarkeitsregeln – auch aus diesem Grund schon – geradezu an.

Im folgenden sollen die mathematischen Grundlagen dieses Weges beschrieben werden. Bei seiner Umsetzung in die Schulpraxis sollten die beiden folgenden Punkte zweckmäßigerweise beachtet werden:

1. Da mehr als vierstellige natürliche Zahlen in den Klassen 5 bzw. 6 nur recht selten vorkommen – außer in einigen Schulbüchern zur Anwendung der Teilbarkeitsregeln! – wird man bei der unterrichtlichen Behandlung der Teilbarkeitsregeln auf das Summationssymbol $\sum$ verzichten und die Regeln für (zunächst) maximal vierstellige Zahlen ableiten, wobei eine Verallgemeinerung auf Zahlen mit beliebig vielen Stellen ohne Änderung des Ansatzes leicht möglich ist. Hierbei wird man die Koeffizienten nicht durch Indizierung unterscheiden – wie im folgenden geschehen –, sondern sinnvollerweise verschiedene Buchstaben gebrauchen.

2. Die Symbolik »$a \equiv b \pmod d$« wird man zweckmäßigerweise im Unterricht nicht »a ist kongruent b modulo d« lesen sondern »a ist restgleich b bezüglich d«.

2. Voraussetzungen

Neben der Definition der Kongruenzrelation werden im folgenden für die Ableitung der Teilbarkeitsregeln nur zwei einfache Sätze über die Addition und Multiplikation von Kongruenzen benötigt, die man schon bei einer sauberen Einführung der Restklassenaddition und -multiplikation gebraucht und die völlig analog auch bei der vertrauten Gleichheitsrelation gelten.

Definition: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{N}$. $a \equiv b \pmod d$ gilt genau dann, wenn a und b bei Division durch d denselben Rest lassen.

Diese Definition läßt den Zusammenhang zwischen Kongruenzrelation und Restklassenbegriff deutlich werden, meist handlicher – so auch für den Beweis der folgenden beiden Sätze – ist jedoch die folgende – leicht als äquivalent nachzuweisende – Kennzeichnung der Kongruenz mod d:

Satz 1: $a \equiv b \pmod d$ *genau dann, wenn* $d \mid (a - b)$.

Durch Rückgriff auf diesen Satz und auf einfache Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation lassen sich bekanntlich die folgenden Sätze über die Addition und Multiplikation von Kongruenzen leicht beweisen:

Satz 2: *Wenn* $a \equiv b \pmod d$ *und* $c \equiv e \pmod d$, *dann gilt*: $a + c \equiv b + e \pmod d$.

Satz 3: *Wenn* $a \equiv b \pmod d$ *und* $c \equiv e \pmod d$, *dann gilt:* $a \cdot c \equiv b \cdot e \pmod d$.

Auf dieser Grundlage läßt sich die im nachstehenden Satz formulierte Kongruenz mod d, die die wesentliche Grundlage für die im folgenden abzuleitenden Teilbarkeitsregeln bildet, unmittelbar zeigen:

Satz 4: *Wenn* $b^i \equiv r_i \pmod d$ *für* $i = 0, 1, \ldots, n$, *dann gilt:* $\sum\limits_{i=0}^{n} q_i b^i \equiv \sum\limits_{i=0}^{n} q_i r_i \pmod d$.

3. Teilbarkeitsregeln

Hat also die Zahl a in einem Stellenwertsystem mit der Basis $b > 1$ die Darstellung

$$a = \sum_{i=0}^{n} q_i b^i \text{ und gilt } b^i \equiv r_i \pmod d,$$

dann folgt nach Satz 4:

$$\sum_{i=0}^{n} q_i b^i \equiv \sum_{i=0}^{n} q_i r_i \pmod{d}.$$

Da $a' := \sum_{i=0}^{n} q_i r_i$

bei geeigneter Wahl von r_i i. a. wesentlich kleiner ist als

$$a = \sum_{i=0}^{n} q_i b^i$$

– a' wird besonders klein, wenn wir als r_i die absolut kleinste Zahl wählen, die die Kongruenz $b^i \equiv r_i \pmod{d}$ erfüllt –, beide aber bei Division durch $d \neq 0$ nach Definition denselben Rest lassen, kann man an a' die Teilbarkeitsfrage i. a. wesentlich leichter entscheiden. Dies ist der Grundgedanke der im folgenden abgeleiteten Teilbarkeitsregeln.

Man erkennt hieran schon, daß dieser Ansatz es erlaubt, für beliebige Teiler $d \neq 0$ Teilbarkeitsregeln herzuleiten, und zwar sogar für einen festen Teiler $d \neq 0$ verschiedene Teilbarkeitsregeln, je nachdem welche Lösungen der Kongruenz $b^i \equiv r_i \pmod{d}$ wir auswählen.

Aus Gründen der Arbeitsökonomie werden wir im folgenden unser Augenmerk auf 3 besonders einfache und übersichtliche Sonderfälle richten:

Fall 1: $b^i \equiv 0 \pmod{d}$ für ein $i \geqq 1$ (3.1. Endstellenregeln)

Fall 2: $b^i \equiv 1 \pmod{d}$ für ein $i \geqq 1$ (3.2. Quersummenregeln)

Fall 3: $b^i \equiv -1 \pmod{d}$ für ein $i \geqq 1$ (3.3. alternierende Quersummenregeln)

3.1. Endstellenregeln

3.1.1. Der einfachste Fall liegt vor, wenn für zu untersuchende Teiler d bezüglich der Basis b unseres Stellenwertsystems $b \equiv 0 \pmod{d}$ gilt. Dann gilt nach Satz 3 auch $b^i \equiv 0 \pmod{d}$ für alle $i \geqq 1$. In diesem Sonderfall ist $a' = q_0$ (denn wegen $b^0 = 1$ kann man hier und im folgenden $r_0 = 1$ setzen), und man kann die Teilbarkeit von a durch d schon an der letzten Stelle von a (nämlich an q_0) ablesen.

$b \equiv 0 \pmod{d}$ gilt genau dann, wenn $d \mid b$, wenn also $d \in T_b$ (T_b sei die Abkürzung für die Menge der Teiler von b). Man erhält als Regel (für alle Zahlen a, dargestellt im Stellenwertsystem mit der Basis $b > 1$; diese Bedingung wird bei den folgenden Regelformulierungen nicht mehr ausdrücklich erwähnt):

Eine Zahl a ist genau dann durch ein d aus T_b teilbar, wenn die letzte Stelle des Zahlwortes durch d teilbar ist.

Beispiele:

1) Für $b = 10$ gilt $T_{10} = \{1, 2, 5, 10\}$. Wir können also obige Teilbarkeitsregel im Dezimalsystem auf die drei Teiler 2, 5 und 10 anwenden.

2) Für $b = 12$ gilt $T_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Im Duodezimalsystem können wir diese Regel sogar bei den fünf Teilern 2, 3, 4, 6 und 12 anwenden.

(Werden Zahlworte hier und im folgenden in Ziffernschreibweise angeschrieben, so wird hierbei durchgängig der Einfachheit halber das Dezimalsystem benutzt.)

3) Für $b = 5$ gilt $T_5 = \{1, 5\}$. Obige sehr einfache Teilbarkeitsregel können wir folglich bei dieser Basis nur für den einen Teiler 5, allgemein bei einer Primzahlbasis p nur für den einen Teiler p anwenden. Man erkennt an diesen Beispielen schon, daß es in der Eignung der verschiedenen Basen für Teilbarkeitsuntersuchungen starke Unterschiede gibt.

3.1.2. Gilt $b^2 \equiv 0 \pmod{d}$, so folgt nach Satz 3:

$$b^i \equiv 0 \pmod{d} \text{ für alle } i \geqq 2.$$

Folglich gilt die Kongruenz:

$$\sum_{i=0}^{n} q_i b^i \equiv q_1 b + q_0 \pmod{d}.$$

$b^2 \equiv 0 \pmod{d}$ gilt genau dann, wenn $d \mid b^2$, wenn also $d \in T_{b^2}$. Wir erhalten als Regel:

Eine Zahl a ist genau dann durch ein d aus T_{b^2} teilbar, wenn $q_1 b + q_0$ durch d teilbar ist.

Da aus $b \equiv 0 \pmod{d}$ folgt $b^2 \equiv 0 \pmod{d}$, bildet T_b eine Teilmenge von T_{b^2}. Wir erhalten so für die Elemente von T_b zwei verschiedene Teilbarkeitsregeln; allerdings ist die in 3.1.1 angegebene Regel für sie wegen ihrer größeren Einfachheit vorzuziehen. Ferner kann man die Regel für einige Teiler d noch weiter vereinfachen, indem man b nicht durch b, sondern durch den absolut kleinsten Rest mod d ersetzt. (Beispiel: $b = 10$, $d = 4$. Es gilt: $10 \equiv 2 \pmod{4}$. Folglich ergibt sich die Vereinfachung obiger Teilbarkeitsregel: »Die (dezimal geschriebene) Zahl a ist genau dann durch 4 teilbar, wenn $q_1 \cdot 2 + q_0$ durch 4 teilbar ist.«)

So liefert 3.1.2 beispielsweise Teilbarkeitsregeln für:

a) im Dezimalsystem ($b = 10$): 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100 oder, wenn wir uns auf Primzahlen und Primzahlpotenzen beschränken, was ja ausreicht, 2, 2^2, 5, 5^2;
b) im Duodezimalsystem ($b = 12$): 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144;
c) in einem Stellenwertsystem mit einer Primzahl p als Basis: p, p^2.

3.1.3. Gilt $b^3 \equiv 0 \pmod{d}$, so ergibt sich nach Satz 3 $b^i \equiv 0 \pmod{d}$ für $i \geqq 3$.

Daher erhalten wir:

$$\sum_{i=0}^{n} q_i b^i \equiv q_2 b^2 + q_1 b + q_0 \pmod{d}.$$

$b^3 \equiv 0 \pmod{d}$ gilt genau dann, wenn $d \mid b^3$, wenn also $d \in T_{b^3}$. Wir erhalten als Regel:

Eine Zahl a ist genau dann durch ein Element d von T_{b^3} teilbar, wenn d teilt $q_2 b^2 + q_1 b + q_0$.

Da aus $b \equiv 0 \pmod{d}$ und $b^2 \equiv 0 \pmod{d}$ folgt $b^3 \equiv 0 \pmod{d}$, bilden T_b und auch T_{b^2} Teilmengen von T_{b^3}. Es ist daher einfacher, bei Teilbarkeitsuntersuchungen für die Elemente von T_b und T_{b^2} die leichteren Regeln 3.1.1 bzw. 3.1.2 zu verwenden und nur für die Elemente von $T_{b^3} \setminus T_{b^2}$ Regel 3.1.3 anzuwenden.

Auch hier läßt sich im Einzelfall – wie bei 3.1.2 erwähnt – der Term $q_2 b^2 + q_1 b + q_0$ noch weiter verkleinern und so die Teilbarkeitsuntersuchung vereinfachen. 3.1.3 liefert beispielsweise Teilbarkeitsregeln für folgende Teiler:

a) im Dezimalsystem für T_{1000}
$T_{1000} = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1000\}$,
b) im Duodezimalsystem für T_{1728}
$T_{1728} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 96, 108, 144, 192, 216, 288, 432, 576, 864, 1728\}$;
c) dagegen in einem Stellenwertsystem mit einer Primzahlbasis p nur für $T_{p^3} = \{1, p, p^2, p^3\}$.

3.1.4 Eine Verallgemeinerung für höhere Potenzen der Basis b ist leicht möglich.

3.2 Quersummenregeln

3.2.1 Gilt $b \equiv 1 \pmod{d}$, so auch $b^i \equiv 1 \pmod{d}$ für $i \geqq 1$. Wir erhalten die Kongruenz:

$$\sum_{i=0}^{n} q_i b^i \equiv \sum_{i=0}^{n} q_i \pmod{d}.$$

$\sum_{i=0}^{n} q_i$ nennt man die b-adische Quersumme von a.

$b \equiv 1 \pmod{d}$ gilt genau dann, wenn $d \mid b - 1$, also $d \in T_{b-1}$. Es ergibt sich als Regel:

Eine Zahl a ist genau dann durch ein Element d der Menge T_{b-1} teilbar, wenn d die b-adische Quersumme von a teilt.

3.2.1 liefert beispielsweise im Dezimalsystem die bekannte Quersummenregel für die Elemente von T_9, speziell für 3 und 9, liefert im Duodezimalsystem nur eine Teilbarkeitsregel für elf, liefert dagegen im Stellenwertsystem mit der Basis 7 – also mit einer Primzahlbasis – Teilbarkeitsregeln für 2, 3 und 6.

3.2.2 Führen wir in Analogie zur b-adischen Quersumme den Begriff »b-adische Quersumme 2. Ordnung« ein, bei der statt der durch die einzelnen Ziffern dargestellten Zahlen die aus der 1. und 2. bzw. 3. und 4. Ziffer usw. dargestellten Zahlen zu addieren sind, so erhalten wir im Fall $b^2 \equiv 1 \pmod{d}$, also für alle $d \in T_{b^2-1}$ die Regel:

Eine Zahl a ist genau dann durch ein Element d der Menge T_{b^2-1} teilbar, wenn d die b-adische Quersumme 2. Ordnung von a teilt.

Da aus $b \equiv 1 \pmod{d}$ $b^2 \equiv 1 \pmod{d}$ folgt, bildet T_{b-1} eine Teilmenge von T_{b^2-1}. Für die Elemente von T_{b-1} wird man die Regel 3.2.1 benutzen und nur für die Elemente von $T_{b^2-1} \setminus T_{b-1}$ die Regel 3.2.2. Für gewisse Teiler d ist auch hier eine weitere Vereinfachung der Regel (wie unter 3.1.3 erwähnt) möglich.

3.2.2. liefert beispielsweise Teilbarkeitsregeln für:

a) (3, 9), 11, 33, 99 im Dezimalsystem,
b) (11), 13, 143 im Duodezimalsystem,
c) (2, 3), 4, (6), 8, 12, 16, 24, 48 im Stellenwertsystem mit der Basis $b = 7$.

3.2.3. Gilt $b^3 \equiv 1 \pmod{d}$, so erhält man in entsprechender Verallgemeinerung der bei 3.2.2 besprochenen Verhältnisse die Regel:

Eine Zahl a ist genau dann durch ein Element d der Menge T_{b^3-1} teilbar, wenn d die b-adische Quersumme 3. Ordnung von a teilt.

Über weitere Vereinfachungsmöglichkeiten gilt das im vorigen Abschnitt besprochene.

3.2.4 Eine Verallgemeinerung für höhere Potenzen der Basis b ist leicht möglich.

3.3 Alternierende Quersummenregeln

Zum Abschluß des Aufsatzes wollen wir uns mit dem 3. Sonderfall $b^i \equiv -1 \pmod{d}$ für ein $i \geq 1$ beschäftigen und so die alternierenden Quersummenregeln ableiten.

3.3.1. Gilt $b \equiv -1 \pmod{d}$, so $b^{2t} \equiv 1 \pmod{d}$, $b^{2t-1} \equiv -1 \pmod{d}$ für $t \geq 1$. Es ergibt sich die Kongruenz:

$$\sum_{i=0}^{n} q_i b^i \equiv \sum_{i=0}^{n} (-1)^i q_i \pmod{d}. \qquad \sum_{i=0}^{n} (-1)^i q_i$$

bezeichnet man als alternierende b-adische Quersumme. $b \equiv -1 \pmod{d}$ gilt genau dann, wenn $d \in T_{b+1}$ Man erhält die Regel:

Eine Zahl a ist genau dann durch ein $d \in T_{b+1}$ teilbar, wenn d die alternierende b-adische Quersumme von a teilt.

3.3.1 liefert beispielsweise Teilbarkeitsregeln für

a) 11 im Dezimalsystem,
b) 13 im Duodezimalsystem,
c) 2, 4, 8 im Stellenwertsystem mit der Basis $b = 7$.

3.3.2 Gilt $b^2 \equiv -1 \pmod{d}$, so erhält man – wenn man den Begriff alternierende b-adische Quersumme 2. Ordnung einführt – die Regel:

Eine Zahl a ist genau dann durch ein $d \in T_{b^2+1}$ teilbar, wenn d die alternierende b-adische Quersumme 2. Ordnung von a teilt.

Im konkreten Einzelfall läßt sich die Regel oft noch weiter vereinfachen (vergl. 3.1.3).

3.3.2 liefert beispielsweise Teilbarkeitsregeln für

a) 101 im Dezimalsystem,
b) 5, 29, 145 im Duodezimalsystem,
c) 2, 5, 10, 25, 50 im Stellenwertsystem mit der Basis $b = 7$.

3.3.3. Gilt $b^3 \equiv -1 \pmod{d}$, so erhält man:

Eine Zahl a ist genau dann durch ein $d \in T_{b^3+1}$ teilbar, wenn d die alternierende b-adische Quersumme 3. Ordnung von a teilt.

3.3.3 liefert beispielsweise Teilbarkeitsregeln für

a) 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001 im Dezimalsystem,
b) 7, 13, 19, 91, 133, 247, 1729 im Duodezimalsystem,
c) 2, 4, 8, 43, 86, 172, 344 im Stellenwertsystem mit der Basis $b = 7$.

3.3.4 Eine Verallgemeinerung für höhere Potenzen der Basis b ist möglich.

4. Tabellarischer Überblick

Ich möchte den Aufsatz beenden mit einer tabellarischen Übersicht über die Teilbarkeitsregeln für die Teiler zwei bis zehn in den Basen zwei bis zehn. Hierbei sind die Endstellenregeln durch die Ziffern 1, 2, 3, die Quersummenregeln durch (1), (2), (3) und die alternierenden Quersummenregeln durch ⟨1⟩, ⟨2⟩, ⟨3⟩ entsprechend der Reihenfolge bei der jeweiligen Behandlung gekennzeichnet.

		Basis								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
Teiler	2	1	(1)	1	(1)	1	(1)	1	(1)	1
	3	(2)	1	(1)	(2)	1	(1)	(2)	1	(1)
	4	2	(2)	1	(1)	2	(2)	1	(1)	2
	5	⟨2⟩	⟨2⟩	(2)	1	(1)	⟨2⟩	⟨2⟩	(2)	1
	6	K	K	K	(2)	1	(1)	K	K	K
	7	(3)	⟨3⟩	(3)	⟨3⟩	(2)	1	(1)	(3)	⟨3⟩
	8	3	(2)	2	(2)	3	(2)	1	(1)	3
	9	⟨3⟩	2	(3)	⟨3⟩	2	(3)	(2)	1	(1)
	10	K	⟨2⟩	K	K	K	⟨2⟩	K	(2)	1

Tab. 1. Endstellenregeln: 1, 2, 3
Quersummenregeln: (1), (2), (3)
Alternierende Quersummenregeln: ⟨1⟩, ⟨2⟩, ⟨3⟩
Kombination dieser Regeln: K

Wir können der Tabelle entnehmen:

1. Obwohl wir nur die 3 Sonderfälle $b^i \equiv 0 \pmod{d}$ für $i = 1$ bzw. 2 bzw. 3 (Endstellenregeln), $b^i \equiv 1 \pmod{d}$ für $i = 1$ bzw. 2 bzw. 3 (Quersummenregeln) und $b^i \equiv -1 \pmod{d}$ für $i = 1$ bzw. 2 bzw. 3 (alternierende Quersummenregeln) betrachtet haben, können wir so schon direkt bzw. durch Kombination von zweien dieser Regeln – dieser Fall ist in der Tabelle durch K gekennzeichnet – sämtliche Teilbarkeitsregeln für die Teiler zwei bis zehn in den Basen zwei bis zehn erhalten. Man wird sich daher in der Schulpraxis im wesentlichen mit diesen 3 Sonderfällen begnügen können. Selbstverständlich liefern die 3 betrachteten Sonderfälle nicht sämtliche Teilbarkeitsregeln für beliebige Teiler bzw. Basen. So erhalten wir durch diesen Ansatz beispielsweise keine Teilbarkeitsregeln für den Teiler elf in den Basen zwei bis neun. In diesen Fällen kann man aber mittels der eingangs als Satz 4 formulierten Kongruenz bei Bedarf Teilbarkeitsregeln ableiten.

2. Man kann der Tabelle – wenn wir sie zeilenweise betrachten – sehr gut entnehmen, daß Teilbarkeitsregeln – im Gegensatz zur Teilbarkeit! – Eigenschaften von Stellenwertsystemen sind, also von der jeweiligen Basis des Stellenwertsystems abhängen. So erhalten wir beispielsweise für den Teiler sieben oder auch für den Teiler neun je nach Basis des Stellenwertsystems Endstellen-, Quersummen- bzw. alternierende Quersummenregeln.

3. Betrachten wir die Teilbarkeitsregeln bezüglich eines festen Teilers $d \neq 0$ in Abhängigkeit von der Basis genauer – gehen wir also noch einmal zeilenweise vor –, so erkennen wir eine deutlich ausgeprägte Periodizität. So erhält man für den Teiler zwei abwechselnd die Endstellenregel 1 bzw. die Quersummenregel (1) oder für den Teiler drei abwechselnd zunächst die Quersummenregel (2), dann die Endstellenregel 1 und schließlich die Quersummenregel (1). Die »Periodenlänge« für den Teiler zwei beträgt also zwei, für den Teiler drei beträgt sie drei, für den Teiler $d \in \mathbb{N}$ beträgt sie (höchstens) d, wie man sich mittels der Kongruenz $d \equiv 0 \pmod{d}$ für alle $d \in \mathbb{N}$ unmittelbar klarmachen kann.

4. Untersucht man schließlich die Tabelle noch spaltenweise, so kann man schon in diesem Rahmen deutliche Unterschiede in der Eignung der verschiedenen Basen für Teilbarkeitsuntersuchungen erkennen. So kann man beispielsweise in den Basen 6 bzw. 10 die besonders einfachen Endstellenregeln innerhalb des betrachteten Ausschnittes jeweils 6- bzw. 5mal anwenden, dagegen in den Primzahlbasen 5 bzw. 7 nur ein einziges Mal.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. F. Padberg, 472 Beckum, Werseweg 51