Friedhelm Padberg

Zum Einsatz des Taschenrechners bei der Entdeckung einfacher Sätze – ein zahlentheoretisches Beispiel

Vielfach wird der Taschenrechner nur als reines Hilfsmittel zur Lösung numerischer Probleme angesehen und sein Einsatz im Unterricht faktisch hierauf beschränkt. Dabei kann der Taschenrechner durchaus auch in anderen Zusammenhängen sehr sinnvoll eingesetzt werden, so etwa bei der Erarbeitung und Entdeckung von einfachen Sätzen. Durch das rasche und mühelose Durcharbeiten von umfangreichem Zahlenmaterial kann man nämlich mit seiner Hilfe gut zu Satzvermutungen vorstoßen, kann dann den Gewißheitsgrad dieser Satzvermutung durch die Untersuchung weiterer Beispiele erhöhen bzw. – durch die Angabe von Gegenbeispielen – widerlegen und kann schließlich durch die schnelle und leichte Ausschöpfung *aller* möglichen Fälle die Satzvermutung sogar bei geeigneten Beispielen vollständig „beweisen". Hierbei wird man bei leistungsschwachen Schülergruppen möglicherweise auf diesem Begründungsniveau stehenbleiben, während man mit leistungsstärkeren Schülergruppen von hieraus zu eleganteren Beweisen mit algebraischen Hilfsmitteln vorstößt.

Vorstehende Überlegungen werden im vorliegenden Aufsatz anhand zahlentheoretischer Beispiele konkretisiert, und zwar anhand der Untersuchungen:

a) der fortlaufend gebildeten Differenzen von Zahl und Spiegelzahl beliebiger dreiziffriger Zahlen,
b) der fortlaufend gebildeten Differenzen von Maximal- und Minimalzahl jeweils beliebig ausgewählter dreiziffriger Ausgangszahlen,
c) entsprechender Fragestellungen bei zwei- und vor allem vierziffrigen Zahlen.

Vielfach wird der Taschenrechner nur als reines Hilfsmittel zur Lösung numerischer Probleme angesehen und sein Einsatz im Unterricht faktisch hierauf beschränkt, so etwa in dem NRW-Runderlaß über „Taschenrechner im Unterricht"[1]. Dabei kann der Taschenrechner durchaus auch in anderen Zusammenhängen sehr sinnvoll eingesetzt werden, so etwa bei der Erarbeitung und Entdeckung von einfachen Sätzen. Durch das rasche und mühelose Durcharbeiten von umfangreichem Zahlenmaterial kann man nämlich mit seiner Hilfe gut zu Satzvermutungen vorstoßen, kann dann den Gewißheitsgrad dieser Satzvermutungen durch die Untersuchung weiterer Beispiele erhöhen bzw. – durch die Angabe von Gegenbeispielen – widerlegen und kann schließlich durch die schnelle und leichte Ausschöpfung *aller* möglichen Fälle die Satzvermutung sogar bei geeigneten Beispielen vollständig „beweisen". Hierbei wird man bei leistungsschwachen Schülergruppen möglicherweise auf diesem Begründungsniveau stehenbleiben, während man mit leistungsstärkeren Schülergruppen von hieraus zu eleganteren Beweisen mit algebraischen Hilfsmitteln vorstößt. Dabei dürfte gerade für diese Schüler der Kontrast zwischen dem Beweis durch vollständige Ausschöpfung aller möglichen Fälle und der eleganteren algebraischen Methode – die zudem bei Aussagen mit sehr vielen oder gar überendlich vielen Fällen in diesem Zusammenhang allein nur weiterführt – sehr eindrucksvoll sein.

Vorstehende Überlegungen wollen wir im folgenden anhand eines zahlentheoretischen Beispiels konkretisieren:

Gehen wir hierzu von den dreiziffrigen Zahlen 762 bzw. 896 aus, bilden die zugehörigen Spiegelzahlen, also 267 bzw. 698, und subtrahieren jeweils – je nachdem, welche Zahl die

1 Taschenrechner im Unterricht, RdErl. d. Kultusministers vom 29. 9. 1977.

größere ist – die Ausgangszahl von der Spiegelzahl oder umgekehrt die Spiegelzahl von der Ausgangszahl und setzen dieses Verfahren entsprechend so lange wie möglich fort, so erhalten wir:

Beispiel 1:

$$\begin{array}{r} 762 \\ -267 \\ \hline 495 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 594 \\ -495 \\ \hline 99 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 99 \\ -\ 99 \\ \hline 0 \end{array}$$

Beispiel 2:

$$\begin{array}{r} 896 \\ -698 \\ \hline 198 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 891 \\ -198 \\ \hline 693 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 693 \\ -396 \\ \hline 297 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 792 \\ -297 \\ \hline 495 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 594 \\ -495 \\ \hline 99 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 99 \\ -\ 99 \\ \hline 0 \end{array}$$

Bei beiden Beispielen bricht also diese Differenzenfolge schon nach nur wenigen Schritten ab, und zwar bei Null.

Die Frage liegt nahe: Passiert dies nur rein zufällig bei den beiden ausgewählten Zahlen oder enden gar *alle* derartigen Differenzenfolgen dreiziffriger Zahlen stets bei Null? Falls ja:

Wie viele Schritte braucht man mindestens, wie viele höchstens, bis das Verfahren so zwangsläufig endet?

Umfangreiches Zahlenmaterial zur Beantwortung dieser Fragen erhält man im Unterricht sehr rasch, wenn man arbeitsteilig jeden Schüler etwa 10 derartige Zahlen nach eigener Wahl mit dem Taschenrechner untersuchen (und die Ergebnisse notieren) läßt. Hält man die untersuchten Zahlen – bzw. eine Auswahl von ihnen – gegliedert nach der Anzahl der Schritte (bis zur Null) in einer Tabelle fest, so hat man eine sehr breite Zahlenbasis zur Verfügung, die folgende Vermutung nahelegt:

a) Alle derartigen Differenzenfolgen enden nach nur wenigen Schritten bei Null.

b) Man erreicht Null frühestens nach einem Schritt (Beispiel: 121 oder 999), spätestens jedoch nach 6 Schritten (Beispiel: 785). Es gibt aber auch dreiziffrige Zahlen, bei denen man nach 2, 3, 4 bzw. 5 Schritten Null erreicht.

Die Frage, ob man schon direkt der Ausgangszahl ansehen kann, wie viele Schritte man bis zum Abbruch der Differenzenfolge (bei Null) gebraucht und damit auch den Wunsch nach einem Beweis obiger Satzvermutungen, kann man auf folgende Art provozieren:
Man läßt sich von den Schülern eine beliebige dreiziffrige Zahl nennen und sagt dann direkt – also ohne umständliche Rechnung – die Anzahl der Schritte bis zum Abbruch (bei Null) voraus. Die Schüler überprüfen und bestätigen anschließend mit dem Taschenrechner die gemachte Aussage. Aufgrund der –nach der Anzahl der Schritte bis Null – gegliederten Tabelle kann man jetzt die Schüler leicht Vermutungen aufstellen lassen, wie man den gegebenen Zahlen direkt schon die Anzahl der Schritte bis Null entnehmen kann.

Unmittelbar einsichtig ist, daß wir die Null nur genau dann nach einem Schritt erhalten, wenn bei der Zahl mindestens die Hunderter- und Einerziffern übereinstimmen.

Es empfiehlt sich, die eigentliche Untersuchung mit der Frage nach den Zahlen zu beginnen, die die „Schrittanzahl" 2 haben, d. h. bei denen wir durch die 2. Differenzbildung Null erhalten.

Die Untersuchung des Beispielmaterials ergibt: die Zehnerziffer hat keinerlei Einfluß auf die Schrittanzahl, entscheidend ist nur die Differenz h−e, wenn wir im folgenden die Hunderterziffer mit h, die Zehnerziffer mit z und die Einerziffer mit e bezeichnen.
Folgende Aussage kann man so erarbeiten und an Beispielen weiter abklären:
Wir erhalten bei dreiziffrigen Zahlen Null genau dann schon nach 2 Schritten, wenn gilt

$$h - e = 1 .$$

Hierbei können wir die Richtung „wenn $h - e = 1$, dann erhalten wir Null schon nach 2 Schritten" bei einer arbeitsteiligen Unterrichtsform recht rasch und mühelos durch vollständige Fallausschöpfung „beweisen". Die Rückrichtung ergibt sich automatisch als Nebenprodukt, wenn wir entsprechend alle 10 möglichen Differenzen $h - e$ analysiert haben. Eleganter ist jedoch zweifelsohne ein Beweis mit algebraischen Hilfsmitteln, der uns die vollständige Untersuchung aller Einzelfälle erspart. Dies läßt sich hier gut und handfest demonstrieren, und so werden hier die (leistungsstärkeren) Schüler ganz natürlich an derartige Beweise herangeführt. Man kann nämlich in diesem Fall einfach folgendermaßen argumentieren:

Wenn $h - e = 1$, dann gilt:
$e - h = -1$, also $(10 + e) - h = 9$.

Ferner gilt: $(z - 1) - z = -1$, also $(10 + z - 1) - z = 9$.

Folglich erhalten wir in diesem Fall stets als 1. Ergebnis:

$$\begin{array}{r} hze \\ -ezh \\ \hline 99 \end{array}$$

Wegen $99 - 99 = 0$ endet also die Differenzenfolge im Fall von $h - e = 1$ stets schon nach 2 Schritten.
Folgende weitere Aussagen lassen sich völlig analog aufgrund des – in der Tabelle vorsortierten – Zahlenmaterials zunächst vermuten, mit dem Taschenrechner weiter abklären und schließlich durch vollständige Fallausschöpfung mit dem Taschenrechner oder eleganter mit algebraischen Methoden entsprechend wie im Fall $h - e = 1$ beweisen[1]:

Wir erhalten bei dreiziffrigen Zahlen Null

(a) nach 3 Schritten genau dann, wenn gilt: etweder

$$h - e = 5 \quad \text{oder} \quad h - e = 6$$

1 Auch diese Aussagen wird man zunächst nur in der „wenn–dann" Form gewinnen und beweisen und erst nach der vollständigen Ausschöpfung aller Möglichkeiten in der „genau dann, wenn"-Form formulieren.

(b) nach 4 Schritten genau dann, wenn gilt: entweder

$$h - e = 3 \quad \text{oder} \quad h - e = 8$$

(c) nach 5 Schritten genau dann, wenn gilt: entweder

$$h - e = 4 \quad \text{oder} \quad h - e = 7$$

(d) nach 6 Schritten genau dann, wenn gilt: entweder

$$h - e = 2 \quad \text{oder} \quad h - e = 9$$

Bei der Untersuchung des Zahlenmaterials fällt auf, daß überhaupt nur folgende Zahlen bei der 1. Differenzbildung auftreten, nämlich 0, 99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 und 891, also Vielfache von 99. Genauer ergeben die durchgeführten Untersuchungen folgende Aussage:

(e) Bei der Differenzbildung erhalten wir stets als

1. Ergebnis

$$(h - e) \cdot 99\,.$$

Als durchaus erwünschten *Nebeneffekt* können diese Untersuchungen – speziell die Beweisführungen – eine vertiefende Wiederholung des Rechenalgorithmus der Subtraktion und des Prinzips unserer Stellenwertschreibweise bewirken. Läßt man die *Anzahl* der dreiziffrigen Zahlen bestimmen, die jeweils nach n Schritten ($n = 0$, bzw. 1, bzw. 2, bzw. 3, bzw. 4, bzw. 5, bzw. 6) Null ergeben, so wird kombinatorisches Denken gefördert und gefordert[1]. Auf der gewonnenen Zahlengrundlage kann man anschließend auch leicht die Frage beantworten lassen, wie wahrscheinlich es ist, daß eine beliebig gegebene dreiziffrige Zahl die Schrittanzahl n besitzt ($n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$).

Der gesamte untersuchte Fragenkomplex gestattet auch gut die folgende *Variation* in der Fragestellung:

Statt aus Zahl und Spiegelzahl die Differenz zu berechnen, bildet man aus den Ziffern einer beliebigen dreiziffrigen Zahl die maximale und die minimale Zahl und zieht diese voneinander ab. Dieses Verfahren setzt man anschließend so lange wie möglich fort.

Beispiel: 573

maximale Zahl: 753
minimale Zahl: 357, also:

$$\begin{array}{r} 753 \\ -357 \\ \hline 396 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 963 \\ -369 \\ \hline 594 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 954 \\ -459 \\ \hline 495 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 954 \\ -459 \\ \hline 495 \end{array} \quad \text{usw.}$$

1 Man beachte bei der Anzahlbestimmung folgende Fallunterscheidungen: alle 3 Ziffern sind verschieden und ungleich 0; genau 2 Ziffern sind gleich und alle ungleich 0; alle 3 Ziffern sind gleich und ungleich 0; genau 1 Ziffer ist 0 und die beiden übrigen sind verschieden; genau 1 Ziffer ist 0 und die beiden übrigen Ziffern sind gleich; 2 Ziffern sind 0.

Als Ergebnis dieser Untersuchungen erhält man: fast alle derartigen Differenzen dreiziffriger Zahlen enden nach wenigen – spätestens nach 5 – Schritten bei 495. Eine Ausnahme bilden lediglich die maximalen dreiziffrigen Zahlen der Form hze, für die gilt: entweder $h - e = 0$ oder $h - e = 1$. Auch bei dieser Fragestellung läßt sich gut mit Hilfe des Taschenrechners ein vollständiger Überblick über die „Schrittanzahl" aller dreiziffrigen Zahlen bis zur Zahl 495 gewinnen. Die obige Differenzbildung endet bei den maximalen dreiziffrigen Zahlen der Form hze bei 495 stets nach

(a) 1 Schritt genau dann, wenn gilt: $h - e = 5$

(b) 2 Schritten genau dann, wenn gilt: $h - e = 6$

(c) 3 Schritten genau dann, wenn gilt: entweder

$$h - e = 4 \quad \text{oder} \quad h - e = 7$$

(d) 4 Schritten genau dann, wenn gilt: entweder

$$h - e = 3 \quad \text{oder} \quad h - e = 8$$

(e) 5 Schritten genau dann, wenn gilt: entweder

$$h - e = 2 \quad \text{oder} \quad h - e = 9$$

Der untersuchte Problemkreis weist den Vorteil auf, daß er weiter *ausbaufähig* ist. So kann man gut von den Schülern die leichtere Fragestellung sebständig erarbeiten lassen, ob entsprechende Aussagen auch für alle *zwei*ziffrigen Zahlen gelten[1].

Wir verzichten darauf, die entsprechenden leichten Aussagen hier zu formulieren. Interessanter und anspruchsvoller ist dagegen die Frage, ob eine entsprechende Aussage auch für alle *vier*ziffrigen Zahlen gilt. Hier ist der Taschenrechner zur Aufstellung von Hypothesen und zu ihrer Bestätigung bzw. Widerlegung wiederum sehr hilfreich bzw. fast unentbehrlich. Um die Zahl der zu untersuchenden Fälle zu beschränken, wird man sich hier auf die 2. Form der Differenzbildung – maximale Zahl minus minimale Zahl – beschränken. Sehr rasch stellt man auch hier fest, daß die Differenzbildung in fast allen Fällen nach nur wenigen Schritten – spätestens nach 7 Schritten – bei der Zahl 6174 abbricht. Im Unterschied zu den dreiziffrigen Zahlen müssen wir hier allerdings 2 Kennzahlen berücksichtigen. Bezeichnen wir die Tausender durch t und wiederum die Hunderter durch h, die Zehner durch z und die Einer durch e, so müssen wir die Differenzen $t - e$ und $h - z$ beachten. Hierbei beziehen sich diese beiden Kennzahlen immer auf die aus der gegebenen Zahl gebildete maximale Zahl. So können wir beispielsweise ableiten:

Die obige Differenzenfolge endet schon nach 1 Schritt bei 6174 genau dann, wenn für die maximale Zahl gilt: $t - e = 6$ und $h - z = 2$.

Während bei dieser und den entsprechenden folgenden Aussagen die Beweisrichtung „wenn für die maximale Zahl gilt: $t - e = 6$ und $h - z = 2$, dann endet die obige Differenzenfolge schon nach 1 Schritt bei 6174" gut mit dem Taschenrechner durch vollständige Fallausschöpfung „beweisen" läßt, scheidet dieser Ansatz für die umgekehrte Beweisrichtung wegen der relativ großen Zahl der zu unterscheidenden Fälle faktisch aus. Daher

1 Man beachte, daß bei *zwei*ziffrigen Zahlen die Zahl-Spiegelzahl-Differenz und die Differenz aus minimaler und maximaler Zahl identisch sind.

wird sich bei den vierziffrigen Zahlen hier an die Phase der Aufstellung von Satzvermutungen mit Hilfe des Taschenrechners die Phase des Beweises mit algebraischen Methoden anschließen.

So kann man bei diesem Beispiel sehr leicht allgemein argumentieren:

$$\begin{array}{r} \mathrm{thze} \\ -\mathrm{ezht} \\ \hline 6174 \end{array} \quad \text{gilt genau dann, wenn } t - e = 6 \text{ und } h - z = 2.$$

Kürzen wir durch (6,2) ab, daß die 1. Kennzahl $t - e = 6$ und die 2. Kennzahl $h - z = 2$ ist, so können wir bei entsprechender Benutzung dieser Kennzahlen die folgenden Aussagen kürzer formulieren:

Die Differenzenfolge vierziffriger Zahlen endet genau dann *nicht* bei 6174, wenn für die beiden Kennzahlen der maximalen Zahl jeweils gilt: entweder (0,0) oder (1,0). Einen vollständigen Überblick – und damit eine Fülle möglicher Sätze, die mit Hilfe des Taschenrechners vermutet und „bewiesen" werden können – vermittelt die folgende Tabelle (man vergleiche: [1, S. 24]), die wir hier daher zum Abschluß angeben wollen:

Tab. 1 Das Verfahren bricht bei 6174 nach x Schritten genau dann ab, wenn folgende Kennziffernpaare vorliegen: Anzahl x der Schritte.

1	2	3	4	5	6	7
(6,2)	(4,2)	(2,1)	(1,1)	(3,2)	(2,2)	(4,1)
	(8,4)	(3,1)	(2,0)		(3,0)	(5,1)
	(8,6)			(5,3)	(3,3)	(5,2)
		(4,3)	(4,0)	(5,4)		(6,1)
			(4,4)	(5,5)	(5,0)	
		(6,3)				(8,5)
			(6,4)	(6,5)	(6,0)	
		(7,1)	(6,6)			(9,4)
		(7,4)		(7,2)	(7,3)	(9,5)
		(7,6)	(7,0)	(7,5)	(7,7)	(9,6)
		(8,1)	(9,0)	(8,3)	(8,0)	
			(9,1)	(8,7)	(8,2)	
		(9,2)	(9,9)		(8,8)	
		(9,3)				
		(9,7)				
		(9,8)				

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. Friedhelm Padberg, Bretonische Straße 242, 4800 Bielefeld 12.

Eingangsdatum: 24. 9. 1979.

Literatur

[1] The Number 6174 – An Arithmetical Curiosity. In: The Arithmetic Teacher, April 1979, S. 24.