Friedhelm Padberg

Wege zur Ableitung der Divisionsregel der Bruchrechnung
Bestandsaufnahme – Beurteilung – Folgerungen

Summary: The derivation of the rule for the division of fractional numbers is considered one of the most difficult areas in the classroom instructions of grade 5 and 6. Probably caused by this difficulties the results in division of fractional numbers are very low, still lower than the results in addition, subtraction and multiplication which are not impressive. An analysis of errors shows that the high quota of errors in this area is due to incorrect solution strategies of the pupils. So it is necessary to select carefully the method of instruction. On the basis of a survey of the most frequently used methods in the USA, the Federal Republic of Germany, the German Democratic Republic and Austria the author discusses the different ways of meaningfully deriving the division rule and evaluates them critically on the basis of seven criteria in order to find the "best" ways.

Ü b e r b l i c k

1. Die Division von Bruchzahlen – ein Problemgebiet?

Die Ableitung der Divisionsregel für Bruchzahlen gilt schon seit langem als eines der schwierigsten Gebiete im Unterricht der Orientierungsstufe. Neben entsprechenden Äußerungen in einschlägigen Publikationen, nicht nur bei uns in Deutschland, sondern z.B. auch in den USA, belegen dies auch eindeutig empirische Untersuchungen.

So untersuchten Ginther, Ng und Begle [7] in einer breit angelegten Analyse 95 Klassen des 8. Schuljahres in einigen der besten (!) Schuldistrikte der USA, wo schlechte Leistungen nicht auf ungünstige äußere Bedingungen zurückgeführt werden können, hinsichtlich ihrer Leistungen in der Bruchrechnung und erhielten folgende Ergebnisse:

(JMD 1/82, Seiten 65–86)

	Prozentsatz richtig gelöster Aufgaben	
	zweitleichteste Aufgabe	zweitschwerste Aufgabe
Addition	63	56
Subtraktion	58	53
Multiplikation	65	51
Division	40	35

Hierbei waren die benutzten Aufgaben bei den 4 Grundrechenarten jeweils von vergleichbarem Schwierigkeitsgrad. Während jedoch die Ergebnisse bezüglich der Addition, Subtraktion und Multiplikation von Bruchzahlen schon mäßig sind, fallen sie bei der Division noch einmal deutlich ab.

Weit weniger als die Hälfte der Divisionsaufgaben wurden nur richtig gelöst. Man könnte hiergegen allerdings einwenden, daß die Verhältnisse in Deutschland möglicherweise wesentlich günstiger sind. Eine eigene, kleinere Untersuchung des Verfassers[1)] ergab jedoch ähnlich ungünstige Ergebnisse. Bei der Untersuchung von 243 Schülern aus sieben Klassen des 7. Schuljahres zweier Realschulen wurden bei der Vorlage von 33 Divisionsaufgaben (die aufgrund eines speziellen Rasters gezielt ausgesucht worden waren und nur die 3 Fälle: Bruchzahl durch Bruchzahl, natürliche Zahl durch Bruchzahl sowie Bruchzahl durch natürliche Zahl, nicht jedoch Bruchzahlen in der Schreibweise als "gemischte Zahlen" umfaßte) nur 32% (!) der Aufgaben richtig gelöst. Den niedrigsten Prozentsatz richtiger Lösungen (mit z.T. Werten von unter 20% !) wiesen Aufgaben der Typen Bruchzahl durch natürliche Zahl (Beispiel: $\frac{3}{10} : 5$; 17%) sowie natürliche Zahl durch Bruchzahl (Beispiel: $6 : \frac{27}{4}$; 13%) auf. Unterstellt man, daß im Bereich des Gymnasiums die Leistungen besser, im Bereich der Hauptschule schlechter sind, so dürfte der Wert im Durchschnitt der 7. Schuljahre möglicherweise sogar noch niedriger liegen als 32%[2)].

Die vorgetragenen Befunde belegen also recht deutlich, daß der Bereich der Division von Bruchzahlen ein echtes Problemgebiet ist.

---

1) Der Verfasser ist Herrn Erwin Kieslich für die Hilfestellung bei der Durchführung der Untersuchung zu Dank verpflichtet; eine umfangreichere Untersuchung durch den Verfasser, die durch Forschungsmittel der Universität Bielefeld gefördert wird, ist in Vorbereitung.

2) In den betreffenden Klassen wurde übrigens die Bruchrechnung nach dem Größenkonzept (man vgl. [10]) behandelt.

2. Fehleranalyse

Für die Interpretation der hohen Fehlerquote bei der Division von Bruchzahlen ist eine Aufschlüsselung der Fehler nach ihren Ursachen wichtig. Diese Aufschlüsselung kann gleichzeitig Hinweise geben, auf welche potentiellen, fehlerhaften Strategien man bei der Behandlung der Divisionsregel im Unterricht besonders achten muß. Bei der eigenen Untersuchung ergaben sich:

Fehlerursachen (global)	%	%
Kein Lösungsansatz	12,0	18
Lösungsansatz, jedoch nicht beendet	6,0	
Rechenfehler (in $\mathbb{N}$)	8,4	8,4
Verständnisfehler beim Kürzen (ohne Rechenfehler)	8,8	18,2
Verständnisfehler beim Erweitern (ohne Rechenfehler)	0,6	
Verständnisfehler beim Einrichten/Umwandeln (ohne Rechenfehler)	4,0	
Sonstige Verständnisfehler (z.B. bei der Multiplikation)	4,8	
Fehlerursache unklar	2,0	2,0
Verständnisfehler (bezüglich der Division)	53,3	53,3
	99,9	99,9

Die hohe Fehlerquote bei der Division beruht also nicht überwiegend auf Flüchtigkeitsfehlern oder einem zu umfangreichen Test, sondern sie beruht zu einem hohen Prozentsatz auf falschen Lösungsstrategien bezüglich der Division wie auch schon bezüglich der Teillernziele, die für die Beherrschung des komplexen Divisionsalgorithmus erforderlich sind, wie insbesondere das Kürzen (Fehlerbeispiel: $\frac{3}{7} : 14 = 3 : 2 = 1\frac{1}{2}$), Umwandeln und Multiplizieren. Im folgenden wollen wir an Beispielen die häufigsten fehlerhaften Lösungsstrategien bezüglich der Division erläutern. Die Reihenfolge entspricht der Häufigkeit des Vorkommens

(1) $\frac{3}{10} : 5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

(2) $\frac{5}{6} : \frac{7}{8} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 8} = \frac{35}{48}$

Auf den ersten Blick könnte man glauben, daß hier ein typischer Flüchtigkeitsfehler und keineswegs eine fehlerhafte Lösungsstrategie vorliegt. Eine Analyse der folgenden Divisionsaufgaben ermöglicht jedoch - da im Test alle 4 Grundrechenarten angesprochen wurden und die Abfolge der Aufgaben nach Zufallsgesichtspunkten angeordnet war, die Divisionsaufgaben also nicht blockförmig nacheinander gestellt wurden - eine klare Abgrenzung gegen derartige Verwechslungsfehler. Die betreffenden Schüler hatten von der Divisionsregel offensichtlich nur noch die Komponente "Multiplizieren" behalten, jedoch nicht mehr die Komponente Kehrwertbildung. Es ist übrigens interessant, daß bei der heute noch bemerkenswerten Untersuchung Brueckners [4] von 1928 über typische Fehler in der Bruchrechnung ebenfalls die Anwendung der falschen Rechenoperation der häufigste Fehler war.

Bei den folgenden Fehlern (3), (4) und (5) wird jeweils die Komponente Kehrwertbildung eigenwillig variiert:

(3) $\frac{5}{6} : \frac{7}{8} = \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} = \frac{48}{35} = 1\frac{13}{35}$

(zweimal Kehrwert)

(4) $\frac{5}{6} : \frac{7}{8} = \frac{6}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$

(Kehrwert vom 1. Bruch)

(5) $\frac{3}{10} : 5 = \frac{10}{3} : 5 = \frac{2}{3}$

(Kehrwert vom 1. Bruch, anschließende Division)

(6) $\frac{3}{10} : 5 = \frac{3}{10 : 5} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

Die beiden - häufig formulierten - Teilregeln für den Fall Bruchzahl durch natürliche Zahl wurden hier offensichtlich zu einer neuen Regel vermischt.

(7) $\frac{4}{3} : \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

Hier wird von den Schülern ein naheliegender, jedoch falscher Transfer von der Additions- und Subtraktionsregel her geleistet. Ähnlich wie dort wird hier offensichtlich gerechnet:

$$\frac{4}{3} : \frac{2}{3} = \frac{4 : 2}{3} = \frac{2}{3} .$$

Dieser Fehler ist besonders dann naheliegend, wenn nach der Meßmethode (man vgl. 4.2.1) vorgegangen wird, wie es in einer der beiden Schulen geschah.

3. Regelvorgabe (ohne Ableitung) oder Regelableitung?

Die geschilderten relativ geringen Erfolge bei der Anwendung der Divisionsregel könnten möglicherweise die folgende These provozieren:

Die Ableitung der Divisionsregel ist mühsam und zeitaufwendig. Diese Zeit investiert man besser in das Üben dieser Regel.

Hiergegen wird man zurecht einwenden: eine derartige Vorgehensweise ist völlig unhaltbar, da sie Schülern ein völlig falsches Bild von der Mathematik vermittelt, nämlich als einer Sammlung von Tricks. Gerade die Begründung von Aussagen - gegebenenfalls auf verschiedenen Begründungsniveaus je nach Leistungsvermögen der Klasse (man vgl. auch: [10], [11]) - ist doch ein sehr wichtiges Anliegen eines vernünftigen Mathematikunterrichts. Aber auch empirische Untersuchungen belegen, daß eine sinnvolle Regelableitung mittelfristig bessere Ergebnisse erbringt, wie die folgende zusammenfassende Darstellung von amerikanischen Untersuchungen über die Rechenoperationen mit Bruchzahlen von Payne ([12], S. 149) belegt: "In past research where meaningful approaches to operations on fractions have been compared to mechanical or rule approaches, there appears to have been some advantage for the ones that were meaningful (AlKire, 1949; Brooke, 1954; Capps, 1960; Howard, 1947; Krich, 1964). Furthermore, when there was an advantage favoring meaningful approaches, it was usually most evident on retention tests."

4. Wege zur Ableitung der Divisionsregel/Beurteilung I

Die Unterrichtserfolge sind bei der Division von Bruchzahlen bislang äußerst gering. Deshalb ist eine sorgfältige Auswahl der benutzten Methode unbedingt wichtig.

Auf der Grundlage eines umfassenden Überblicks über die verbreiteteren Methoden in den USA, der BR Deutschland, der DDR und Oesterreichs stellen wir dazu im folgenden verschiedene Wege bei der Regelableitung vor und bewerten diese jeweils kritisch. Neben einer möglichst einprägsamen und gut verständlichen Regelableitung ist selbstverständlich auch die geschickte Durchführung einer permanenten Wiederholung im weiteren Verlauf des Unterrichts wichtig.

4.1. Beurteilungskriterien

Folgende Beurteilungskriterien legen wir hierbei zugrunde:

(1) Gibt es bei der Erarbeitung der Teillernziele, die für das Verständnis der Regelableitung notwendig sind, Problembereiche? Eine Lernzielanalyse im Sinne Gagnés ([6]) ist zur Beantwortung dieser Frage hilfreich. (Bei den folgenden tabellarischen Übersichten je Methode kürzen wir diesen Aspekt mit L ab.)

(2) Besitzt die betreffende Regelableitung eine zentrale Leitidee im Sinne des "advance organizer"-Konzeptes von Ausubel ([1]), die möglichst häufig im Mathematikunterricht vorkommt und dabei möglichst prägnant und "eingängig" ist (und aus all diesen Gründen gut von den Schülern rückerinnert werden kann)? (Abkürzung im folgenden: O). Eine Antwort auf diese Frage hängt natürlich eng mit der Gesamtkonzeption des Mathematikunterrichts zusammen.

(3) Läßt sich die Regelableitung veranschaulichen? (Abkürzung: V) Hierbei reicht die Skala möglicher "Veranschaulichungen" im hier benutzten Sinn von Diagrammen, die einen Ableitungsweg übersichtlicher und einprägsamer aufzuschreiben gestatten, bis hin zum Einsatz von Strecken oder Stäben bei der Deutung der Division von Bruchzahlen im Sinne des Messens.

(4) Wird bei dem betreffenden Weg sofort die endgültige Regel abgeleitet oder zunächst eine vorläufige Zwischenregel? (Abkürzung: Z)

Die Ableitung zweier verschiedener Regeln (Zwischenregel, endgültige Regel) bringt nämlich - wie die Fehleranalyse schon andeutete - die Gefahr mit sich, daß die Schüler beide Regeln durcheinanderwerfen und hieraus eigenwillig neue Regeln "mischen"!

(5) Ermöglicht der Weg eine sinnvolle und naheliegende Erklärung aller "Fälle" oder ist er nur in Spezialfällen brauchbar? (Abkürzung: A)

(6) Wie weit bietet der Weg die Möglichkeit einer gelenkten, dennoch weitgehend selbständigen Entdeckung durch die Schüler? (Abkürzung: E)

(7) Besteht zwischen diesem Weg und der praktischen Anwendung der Division als Messen ein naheliegender Zusammenhang? (Abkürzung: M)

4.2. Wege zur Ableitung der Divisionsregel

4.2.1. Meßmethode

Bei dieser Methode wird die Division von Bruchzahlen eigenständig - also ohne Rückgriff auf die Umkehroperation der Multiplikation - im Sinne des Enthaltenseins oder Messens eingeführt, entsprechend wie dies auch in $\mathbb{N}$ bei Größen mit geeignet ausgewählten natürlichen Zahlen als Maßzahlen möglich ist (Beispiel: 8 m : 2 m wird gedeutet als: wie oft ist eine Strecke von 2 m Länge in einer Strecke von 8 m Länge enthalten)

Weg 1

Bei ausgewählten Aufgaben - insbesondere bei Aufgaben, bei denen der Quotient eine natürliche Zahl oder auch eine einfache "gemischte Zahl" wie z.B. $1\frac{1}{2}$ ist - läßt sich die Division beispielsweise sehr gut mit Hilfe von Strecken veranschaulichen und so das Ergebnis sowie anschließend eine Regel gewinnen.[1]
Beispiele für derartige Aufgaben:

$\frac{4}{5} : \frac{2}{5} = 2$ (mal) , $\frac{1}{2} : \frac{1}{8} = \frac{4}{8} : \frac{1}{8} = 4$ (mal) , $\frac{3}{8} : \frac{1}{4} = \frac{3}{8} : \frac{2}{8} = 1\frac{1}{2}$ (mal).

Diese ausgewählten Aufgabentypen bezeichnen wir in der abschließenden Bewertungstabelle kurz als "Spezialfall". In vielen Fällen jedoch - insbesondere wenn der Quotient keine natürliche Zahl oder keine einfache "gemischte Zahl" wie z.B. $1\frac{1}{2}$ ist und wenn der Dividend kleiner als der Divisor ist - versagt faktisch diese Veranschaulichungsmöglichkeit und läßt sich die dann durchzuführende Division höchstens noch von einer sehr abstrakten Warte aus - aber kaum mehr aus der Sicht der Schüler - als Messen auffassen.

In diesen Fällen geht man insbesondere in den USA - dort ist die Meßmethode sehr stark verbreitet und wird wegen ihrer anschaulichen Komponenten gerade auch für die schwächeren Schüler befürwortet - z.T. aber auch in deutschen Schulbüchern etwa folgendermaßen vor:

Beispiel:

$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8}{20} : \frac{15}{20} \underset{(1)}{=}$ 8 zwanzigstel: 15 zwanzigstel

$\underset{(2)}{=} 8 : 15 \underset{(3)}{=} \frac{8}{15}$

Erläuterung der gekennzeichneten Schritte:

(1) In der Ableitungsphase wird für z.B $\frac{8}{20}$ geschrieben 8 zwanzigstel, um so für die Schüler die im folgenden benutzte Analogie zwischen der Division von Bruchzahlen und dem vertrauten Messen von Größen mit natürlichen Zahlen als Maßzahlen herzustellen.

(2) Beim Messen von Größen mit natürlichen Zahlen als Maßzahlen ist - sofern Dividend und Divisor dieselbe Größeneinheit besitzen! - die Größeneinheit für die Berechnung des Quotienten völlig unerheblich (Beispiel: 8 m : 2 m = 4

1) Wegen eines sorgfältig ausgearbeiteten Einführungsweges mit Hilfe von verschieden gefärbten Kreisausschnitten vergleiche man ggf. [14].

(mal), 8 km : 2 km = 4 (mal)), man kann sie also bei der Berechnung des Quotienten fortlassen. Entsprechend sind auch die Zwanzigstel bei beiden Brüchen überflüssig. (Entscheidend ist bei der Veranschaulichung von $\frac{8}{20}$ bzw. $\frac{15}{20}$ an einer Strecke die Anzahl der Teilstrecken (8 bzw. 15), nicht jedoch der Grad der "Feinheit" der Streckenunterteilung (20).)

(3) $a : b = \frac{a}{b}$ für $a, b \in \mathbb{N}$ wird zuvor an konkreten Beispielen erarbeitet (Beispiel: 3 Pfannkuchen : 4 = $\frac{3}{4}$ Pfannkuchen) und dann verallgemeinert.

Bewertung

	L	O	V	Z	A	E	M
Spezialfall:	+	+	+	–	–	+	+
allgemeiner Fall:	–	–	–	–	–	–	+

Hierbei bedeutet: + gut, o zufriedenstellend / kleinere Mängel, – größere Mängel.

Bemerkungen:

L Die Division wird an der Stelle (2) des Ableitungsweges als Messen[1] und direkt danach an der Stelle (3) als Teilen[1] gedeutet; die Bestimmung des Meßergebnisses ist bei vielen Aufgaben kaum anschaulich möglich.

O Da bei vielen Aufgaben eine anschauliche Vorstellung im Sinne des Messens nicht bzw. kaum möglich ist, bildet die Idee des Messens für diese Aufgaben keine zentrale Leitidee. Die Ergebnisfindung (Brüche zunächst gleichnamig machen, dann die Zähler durcheinander dividieren) ist aufwendiger als bei der Standardregel. Daher muß anschließend ein Übergang zur Standardregel gefunden werden, etwa auf folgende Art (verdeutlicht an dem Einführungsbeispiel):

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{20} : \frac{3 \cdot 5}{20} = (2 \cdot 4) : (3 \cdot 5) = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}.$$

Der Gesamtweg der Regelableitung ist daher recht lang, aus verschiedenen Teil-

1) Statt Messen ist in der didaktischen Literatur auch die Bezeichnung Aufteilen oder auch Einteilen, statt Teilen die Bezeichnung Verteilen verbreitet. Für eine genauere Erläuterung der Begriffe vergleiche man ggf. z.B. Griesel ([8], S. 212 ff.).

ideen "zusammengebastelt", wenig prägnant und daher auf Dauer nur schwer zu behalten.

V Im allgemeinen Fall besteht faktisch keine Veranschaulichungsmöglichkeit.

Z Zunächst muß eine Zwischenregel (Brüche gleichnamig machen, dann die Zähler durcheinander dividieren) abgeleitet werden, anschließend folgt dann noch die übliche Kurzregel.

A Bei $\frac{a}{b} : n$ wie auch bei $n : \frac{a}{b}$ $(a,b,n \in \mathbb{N})$ ist ein - wenig naheliegender - Übergang zu "Scheinbrüchen" erforderlich
(Beispiel: $5 : \frac{3}{4} = \frac{5}{1} : \frac{3}{4} = \frac{20}{4} : \frac{3}{4} = 20 : 3 = \frac{20}{3} = 6\,\frac{2}{3}$)
oder - im Fall $\frac{a}{b} : n$ - eine andere Deutung der Division, und zwar im Sinne des Teilens.

E Insbesondere der Übergang zur Endregel dürfte Schwierigkeiten bereiten.

Variante

In den USA weit verbreitet ist die folgende, noch jüngst in einer amerikanischen Fachzeitschrift propagierte ([5], S. 50 ff.) Variante der Meßmethode:

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8}{20} : \frac{15}{20} = \boxed{\frac{8 : 15}{20 : 20} = \frac{8 : 15}{1}} = 8 : 15 = \frac{8}{15}$$

Die Begründung, daß $\frac{8}{20} : \frac{15}{20} = 8 : 15$ ist, ist hierbei extrem formal, ohne die Möglichkeit einer einleuchtenden inhaltlichen Erklärung. Trotz der formalen Analogie zur Multiplikationsregel (Zähler durch Zähler, Nenner durch Nenner) ist diese Variante deutlich schlechter als die oben vorgestellte Meßmethode.

Weg 2

Vor allem in oesterreichischen Schulbüchern findet man im Prinzip den folgenden Weg:
Beim Messen von Größen mit geeigneten natürlichen Zahlen als Maßzahlen bleibt das Ergebnis unverändert, wenn wir Dividend und Divisor mit derselben natürlichen Zahl multiplizieren. Dies läßt sich gut mit Hilfe von Strecken oder Mengenbildern veranschaulichen. Es erfolgt eine Übertragung dieser Aussage auf den Bereich der Bruchzahlen via Permanenzprinzip, eine Veranschaulichung mit Hilfe von Strecken ist auch hier bei geeignet ausgewählten Beispielen wie z.B. $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ gut möglich. Auf dieser Basis können wir dann für beliebige Bruchzahlen stets ableiten (in einfachen Fällen finden wir das Ergebnis direkt wie in den

Vorbemerkungen zu Weg 1 beschrieben):

Beispiel:

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \left(\frac{2}{5} \cdot 4\right) : \left(\frac{3}{4} \cdot 4\right) = \frac{2 \cdot 4}{5} : 3 \underset{(1)}{=} \frac{2 \cdot 4}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}$$

Bemerkung:

(1) Es wird vorher beispielgebunden abgeklärt, daß in $\mathbb{N}$ bei geeigneten Zahlen die Division durch n und die Multiplikation mit $\frac{1}{n}$ zu demselben Ergebnis führen (Beispiel: $12 : 6 = 12 \cdot \frac{1}{6} = 2$). Diese Aussage wird via Permanenzprinzip auch auf Bruchzahlen als Dividend übertragen. Eine andere Möglichkeit: Man behandelt vorher die Division von Bruchzahlen durch natürliche Zahlen und wendet jetzt hier diese Regel an.

Bewertung:

L	O	V	Z	A	E	M
-	-	-	+	+	0	+

Bemerkungen:

L/O: Es wird zweimal das Permanenzprinzip angewandt (bzw. einmal das Permanenzprinzip und einmal eine vorher für den Sonderfall $\frac{a}{b} : n$ abzuleitende Regel). Wie naheliegend (und damit wieweit später rückerinnerbar) für die Schüler ist die Idee des Multiplizierens des Dividenden und Divisors bei der Ausführung der Division? Ferner kann die Idee des Messens selbst bei ausgesuchten Aufgaben nicht über den ganzen Ableitungsweg hinweg anschaulich durchgehalten werden; sie bildet also keine durchgängige Leitidee zur Rückerinnerung dieses Weges.

A: 1) $\frac{a}{b} : n = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a}{b \cdot n}$

2) $n : \frac{a}{b} = (n \cdot b) : a = n \cdot b \cdot \frac{1}{a} = \frac{n \cdot b}{a}$

Z: Wir erhalten bei der Ableitung sofort die Endregel.

E: Es empfiehlt sich, mit dem Sonderfall zu beginnen, daß der Divisor ein Stammbruch ist. In diesem Fall ist die erforderliche Multiplikation von Dividend und Divisor mit derselben Zahl zur Vereinfachung der Rechnung naheliegender als im allgemeinen Fall.

Ein Vergleich der beiden dargestellten Wege im Rahmen der Meßmethode zeigt, daß der Weg 2 Vorteile gegenüber dem Weg 1 aufweist.

4.2.2. Doppelbruchmethode

Diese Methode ist in den USA schon seit längerem recht verbreitet und ist eine der dortigen Standardwege zur Ableitung der Divisionsregel. Sie wird auch heute noch propagiert ([9], S. 707).

Beispiel:

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}}{1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}$$

Bewertung:

L	O	V	Z	A	E	M
-	-	-	+	+	-	-

Bemerkungen:

L Es fehlt hierbei völlig eine inhaltliche Erläuterung, was der Quotient $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$ bedeuten soll. Der Doppelbruch wird nämlich bei dieser Methode eingeführt, indem man die an Beispielen begründete Beziehung $a : b = \frac{a}{b}$ für $a,b \in \mathbb{N}$ via Permanenzprinzip auf $a,b \in \mathbb{Q}^+$ überträgt. Entsprechendes gilt auch für das inhaltlich nicht sinnvoll vorstellbare "Erweitern" von Doppelbrüchen mit Bruchzahlen.

O Es fehlt völlig eine zentrale, häufig benutzte Leitidee, die den Ableitungsweg strukturiert. Die beiden erforderlichen Ideen (Doppelbruch, "Erweitern" von Doppelbrüchen) spielen im sonstigen Mathematikunterricht kaum eine bzw. keine Rolle.

A 1) $\frac{a}{b} : n = \frac{\frac{a}{b}}{n} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n}}{n \cdot \frac{1}{n}} = \frac{\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n}}{1} = \frac{a}{b \cdot n}$

2) $n : \frac{a}{b} = \frac{n}{\frac{a}{b}} = \frac{n \cdot \frac{b}{a}}{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = \frac{n \cdot \frac{b}{a}}{1} = \frac{n \cdot b}{a}$

4.2.3. Umkehroperationsmethode

Diese Methode findet man mit ihren verschiedenen Varianten sowohl häufiger in deutschen Schulbüchern (BR Deutschland, DDR) wie auch in einigen neueren Schulbüchern der USA. Ausgangspunkt ist hierbei eine beispielgebundene Definition des Quotienten zweier Bruchzahlen analog zu den entsprechenden Verhältnissen in $\mathbb{N}$:

Weg 1

$\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ bezeichnet diejenige Zahl x [1], mit der ich $\frac{4}{5}$ multiplizieren muß, um $\frac{2}{3}$ zu erhalten.

Das folgende Diagramm hilft, diese Definition übersichtlicher und einprägsamer aufzuschreiben[2]:

$$\frac{4}{5} \xrightarrow{\;\cdot\, x\;} \frac{2}{3}$$

Diese Aufgabe ist durch Zerlegung in zwei sehr einfache Teilaufgaben offensichtlich leicht lösbar:

$$\begin{tikzcd}
\frac{4}{5} \arrow[rr, "\cdot\, x"] \arrow[dr, "\cdot\, \frac{5}{4}"'] & & \frac{2}{3} \\
& 1 \arrow[ur, "\cdot\, \frac{2}{3}"'] &
\end{tikzcd}$$

also: $x = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} \left(= \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$

<u>Bemerkung:</u>

Beim Aufschreiben sollte sofort die "richtige" Reihenfolge $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$ betont werden, da andernfalls Fehler bei der Inversenbildung (fehlerhafte Inversenbildung des Dividenden!) hieraus resultieren können.

---

1) Die Frage nach der Existenz, aber auch Eindeutigkeit der Lösung bereitet durch die vereinfachende Zerlegung der gegebenen Aufgaben in die beiden leichten Teilaufgaben und durch ihre mögliche konstruktive Lösung keine Probleme.

2) Bei der multiplikativen Schreibweise der Division mit Rest notiert man Divisor und (ganzzahligen) Quotienten in derselben Reihenfolge wie hier (Beispiele: 17 : 3, 17 = 3 . 5 + 2; 39 : 3, 39 = 3 . 13 + 0).

Durch eine entsprechende konstruktive Lösung weiterer Beispiele läßt sich die allgemeine Regel ableiten (beispielgebundene Beweisstrategie); selbstverständlich ist auch analog ein Beweis unter Variablenbenutzung möglich.

L	O	V	Z	A	E	M
+	+	+	+	+	+	+

Bemerkungen:

L/O Die Rückführung der Division auf die Multiplikation - allgemeiner die Rückführung einer Umkehroperation auf die Ausgangsoperation - ist eine zentrale Idee, die an verschiedenen Stellen des Mathematikunterrichts gebraucht wird und die sich wegen dieser häufigeren Benutzung den Schülern besser einprägt (als nur selten oder gar einmalig benutzte Ideen) und die daher gut rückerinnert werden kann. Gleichzeitig ist diese Idee im Sinne einer Überprüfung des gefundenen Ergebnisses auf seine Richtigkeit - sofern Unsicherheit bezüglich der Divisionsregel besteht - sehr brauchbar. Wurde schon vorher im Unterricht mit Operatordiagrammen gearbeitet - so wie es weithin im Unterricht der Primarstufe und auch im Unterricht der Sekundarstufe nicht nur im Zusammenhang mit der Bruchrechnung, sondern auch bei weiteren Bereichen üblich ist -, so handelt es sich bei dieser Aufgabenstellung um eine der Grundaufgaben. Die Lösung der beiden Teilaufgaben ist sehr leicht.

V Die Diagramme gestalten die Aufgabenstellung und Problemlösung übersichtlich und einprägsam.

A 1) $\frac{a}{b} : n$

$$\begin{tikzcd} n \arrow[rr, "\cdot x"] \arrow[dr, "\cdot \frac{1}{n}"'] & & \frac{a}{b} \\ & 1 \arrow[ur, "\cdot \frac{a}{b}"'] & \end{tikzcd}$$

2) $n : \frac{a}{b}$

$$\begin{tikzcd} \frac{a}{b} \arrow[rr, "\cdot x"] \arrow[dr, "\cdot \frac{b}{a}"'] & & n \\ & 1 \arrow[ur, "\cdot n"'] & \end{tikzcd}$$

E Sinnvollerweise beginnt man mit einfachen Aufgaben wie $1 : \frac{a}{b}$ und geht erst danach zu dem allgemeinen Fall über.

M Zum Aspekt des Messens kann hierbei leicht eine Verbindung hergestellt werden. Dies gilt insbesondere für einfache Aufgaben wie z.B. $\frac{4}{5} : \frac{2}{5}$.

Variante 1

$$\frac{4}{5}\text{ m} \xrightarrow{\cdot\, x} \frac{2}{3}\text{ m}$$

Die Brüche werden zunächst gleichnamig gemacht:

$$\frac{12}{15}\text{ m} \xrightarrow{\cdot\, x} \frac{10}{15}\text{ m}$$

$$12 \cdot \left(\frac{1}{15}\text{ m}\right) \xrightarrow{\cdot\, x} 10 \cdot \left(\frac{1}{15}\text{ m}\right)$$

Fassen wir hier die Fünfzehntelmeter als neue Größeneinheit auf, so haben wir - sofern schon vorher mit Operatordiagrammen gearbeitet wurde - eine vertraute Grundaufgabe (mit natürlichen Zahlen als Maßzahlen) erhalten, die wir direkt lösen können:

$$12 \cdot \left(\frac{1}{15}\text{ m}\right) \xrightarrow{\cdot\, x} 10 \cdot \left(\frac{1}{15}\text{ m}\right)$$

$$x = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}\text{, also } \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$$

Im Unterricht ist folgende Stufenfolge sinnvoll:

(1) $\frac{2}{5}\text{ m} \xrightarrow{\cdot\, x} \frac{4}{5}\text{ m}$

(2) $\frac{2}{5}\text{ m} \xrightarrow{\cdot\, x} \frac{3}{5}\text{ m}$

(3) Aufgaben mit verschiedenen Nennern.
Nach Aufsuchen des Hauptnenners erhalten wir
(a) Typ (1)
(b) Typ (2)

Nachteile (gegenüber dem Weg 1):

Das Verfahren ist durch das erforderliche Gleichnamigmachen der Brüche aufwendiger. Eine andere Regel wird nahegelegt (gleichnamig machen, dann Zähler durcheinander dividieren), die wegen ihres Aufwandes (und der damit verbundenen Fehlermöglichkeiten) nicht als Endregel, sondern sinnvollerweise nur als Zwischenregel benutzt wird.
Ferner sind die beiden Sonderfälle $(\frac{a}{b} : n\ ,\ n : \frac{a}{b})$ so nur durch einen nicht naheliegenden Übergang zu "Scheinbrüchen" lösbar.

Der 1. Weg ist also gegenüber dieser Variante vorzuziehen.

Variante 2 (Weg 1 ohne Operatoren, mit Gleichungen)

$$\frac{4}{5} \cdot x = \frac{2}{3}$$

1. Schritt: Das Einsetzen von $\frac{5}{4}$ für x ergibt auf der linken Seite der Gleichung 1 und damit eine falsche Aussage.

2. Schritt: Die anschließende Multiplikation der linken Seite der Gleichung mit $\frac{2}{3}$ ergibt auch dort $\frac{2}{3}$. Wir erhalten also insgesamt eine wahre Aussage, wenn wir für x einsetzen $\frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$ bzw. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$, also gilt: $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$.

Ein <u>Vergleich dieser Variante mit der Operatorschreibweise</u> bei Weg 1 ergibt: Die Operatorschreibweise ist übersichtlicher, einprägsamer und konkreter. Der Rechenablauf läßt sich durch einfache <u>Handlungen</u> beschreiben, das Nacheinander der Rechenschritte wird so klarer als in der formaleren Gleichungsschreibweise.

Weg 2

Auf die folgende Art läßt sich die Divisionsregel ebenfalls mit Hilfe der Multiplikation <u>schrittweise</u> erarbeiten:

<u>Stufe 1:</u>

Ausgangspunkt sind besonders einfach lösbare Aufgaben wie $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{x}{y}$, also $\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{y} = \frac{8}{9}$.

Dies und weitere entsprechende Beispiele legen für die Schüler die Vermutung nahe, daß man durch die Division von Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner den Quotienten berechnen kann.

Die Frage, ob man so wirklich bei allen Bruchzahlen vorgehen kann, führt schrittweise über Aufgaben des folgenden Types:

<u>Stufe 2:</u>

$\frac{7}{9} : \frac{2}{3} = \frac{x}{y}$, also $\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{y} = \frac{7}{9}$ bzw. $\frac{4}{5} : \frac{2}{3} = \frac{x}{y}$, also $\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{y} = \frac{4}{5}$

(nach einmaligem Erweitern des "rechten" Bruches mit dem Zähler bzw. Nenner des "linken" Bruches läßt sich auch hier obige Regel anwenden)

<u>Stufe 3:</u>

$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{x}{y}$, also $\frac{3}{4} \cdot \frac{x}{y} = \frac{2}{5}$

(zweimaliges Erweitern ist hier erforderlich)

zu der Zwischenregel:

Man dividiert zwei Bruchzahlen durcheinander, indem man - ggf. nach vorherigem Erweitern des "rechten" Bruches - Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner dividiert.

Diese Zwischenregel ist völlig analog zur Multiplikationsregel aufgebaut und kann daher gut behalten werden. Wegen des erforderlichen größeren Rechenaufwandes und der damit verbundenen größeren Fehleranfälligkeit wird man allerdings nicht bei dieser Zwischenregel stehenbleiben, sondern von ihr aus auf dem folgenden – an einem Beispiel skizzierten – Weg zur üblichen Divisionsregel vorstoßen:

$\frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{x}{y}$ $\qquad\qquad$ $\frac{3}{4} \cdot \frac{x}{y} = \frac{2}{5}$

$$\frac{3}{\boxed{4}} \cdot \frac{x}{y} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{5 \cdot \boxed{4} \cdot 3}, \quad \text{also} \quad \frac{x}{y} = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}$$

Beurteilung:

L	O	V	Z	A	E	M
+	O/-	-	-	O	+/O	+

Bemerkungen:

O Der Gesamtweg bis zur (notwendigen!) Endregel ist für Schüler spätestens nach einiger Zeit nur noch schwer rückerinnerbar, da er recht lang sowie wenig prägnant und einprägsam ist.

A Im Fall $n : \frac{a}{b}$ ist der nicht naheliegende Übergang zu "Scheinbrüchen" erforderlich. (Beispiel: $7 : \frac{2}{5} = \frac{x}{y}$, $\frac{2}{5} \cdot \frac{x}{y} = 7$, $\frac{2}{5} \cdot \frac{x}{y} = \frac{7}{1}$ usw.) Im Fall $\frac{a}{b} : n$ ist dies nicht nötig.

E Die Ableitung der Zwischenregel ist unkompliziert, der Übergang zur Endregel bereitet mit Sicherheit vielen Schülern einige Schwierigkeiten.

4.2.4. Gegenoperatormethode

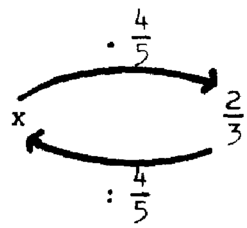
Diesen Ansatz findet man in der folgenden Hauptversion in Schulbüchern, die in Deutschland Ende der 70er Jahre neu auf den Markt gekommen sind, meist allerdings in einer formaleren Darstellungsform als im folgenden dargestellt.

Ausgangspunkt ist eine beispielgebundene Definition des Quotienten zweier

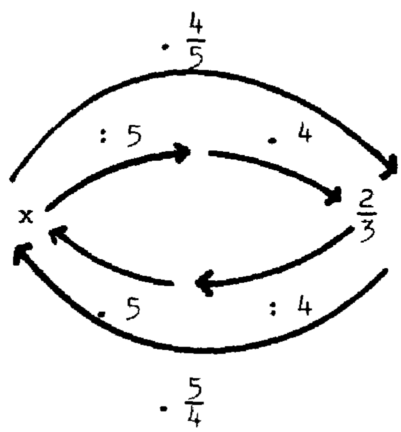
Bruchzahlen in Analogie zu den entsprechenden Verhältnissen in $\mathbb{N}$[1]:

$\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ bezeichnet diejenige Zahl x[2], die mit $\frac{4}{5}$ multipliziert $\frac{2}{3}$ ergibt.

Folgendes Diagramm kann ggf. zur Verdeutlichung herangezogen werden:



Durch Anwendung des Gegenoperators können wir direkt die gesuchte Zahl bestimmen, wobei wir zu Beginn zweckmäßigerweise die folgende ausführliche Schreibweise benutzen:



Die Multiplikation mit 4 bzw. die Division durch 5 können wir rückgängig machen durch die Division durch 4 bzw. durch die Multiplikation mit 5 , insgesamt also durch die Multiplikation mit $\frac{5}{4}$.

Also gilt: $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{6}$.

Durch Variation von Beispielen gewinnt man Einsicht in die allgemeine Regel (beispielgebundene Beweisstrategie).

---

1) In $\mathbb{N}$ unterscheidet man bekanntlich beim Dividieren anfangs zwischen Aufteilen / Messen bzw. Verteilen / Teilen (man vergleiche z.B. Griesel ([8], S. 212 ff.)). $a : b$ erklärt man hierbei mit Hilfe der Lösung der Gleichung $b \cdot x = a$ bzw. $x \cdot b = a$. Dem entspricht bei der Division von Bruchzahlen in den Abschnitten 4.2.3 und 4.2.4 das Vorgehen nach der Umkehroperationsmethode bzw. nach der Gegenoperatormethode.

2) Hierbei können auch bei diesem Weg ggf. die Fragen nach der Existenz und auch Eindeutigkeit einer derartigen Zahl x gut konstruktiv beantwortet werden.

L	O	V	Z	A	E	M
+	+	+	+	+/0	+	-

Bemerkungen:

L/O Voraussetzung für die Benutzung dieses Weges ist, daß vorher im Zusammenhang mit der Bruchrechnung Komponenten des Operatorkonzeptes angesprochen wurden. Dann handelt es sich bei dieser Fragestellung um eine der Grundaufgaben, die häufig in verschiedenen Bereichen angewandt und daher gut behalten werden können. Der Lösungsansatz ist unter diesen Voraussetzungen der prägnanteste und eingängigste von allen vorgestellten Wegen.

A Im Fall $\frac{a}{b} : n$ kann man zur Lösung im Diagramm den wirkungslosen Operator (. 1) einschieben.

Variation:

Der obige Gedankengang läßt sich auch ohne Benutzung von Operatordiagrammen mit Hilfe von Gleichungen formulieren:

$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = x$ $\qquad$ $x \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{3}$

$(x \cdot \frac{4}{5}) \cdot \frac{5}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$ $\qquad$ $x \cdot (\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$

$x \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$ $\qquad$ also: $\qquad$ $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$

Ein Vergleich dieses Weges mit dem vorhergehenden Weg zeigt jedoch klar die Vorteile des ersten Weges für diese Klassenstufe auf: die Darstellung dort ist übersichtlicher und überschaubarer, das Diagramm ermöglicht eine gute Veranschaulichung des Lösungsablaufs. Statt der statischen Lösung mit Hilfe von Gleichungen unter impliziter Benutzung von Äquivalenzumformungen, die zu diesem Zeitpunkt den Schülern noch nicht bekannt sind, wird die Aufgabe konstruktiv und dynamisch unter Rückgriff auf Handlungen gelöst, ein Rückgriff auf das Assoziativgesetz ist nicht nötig.

4.2.5. Reine Operatormethode

Falls die Multiplikation von Bruchzahlen mit Hilfe des Verkettens der zugehörigen Bruchoperatoren eingeführt worden ist, kann auch die Division von Bruchzahlen über die Umkehroperation zur Verkettung von Bruchoperatoren eingeführt werden. Diese Methode soll hier allerdings nur aus Gründen der Vollständigkeit kurz skizziert werden, da sie sehr viel abstrakter und formaler ist als die in

4.2.1, 4.2.3 und 4.2.4 beschriebenen Methoden.

Beispiel: $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$

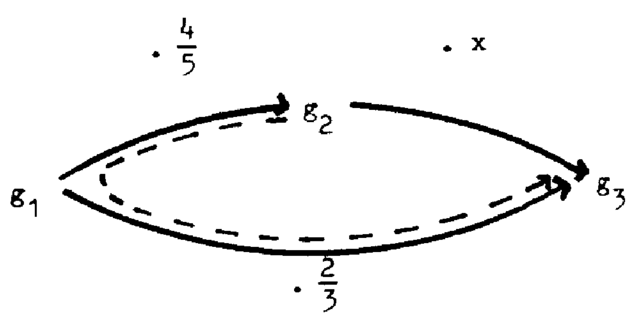
Zur Lösung dieser Aufgabe gehen wir zunächst zur Operatorebene über und erklären dort

$$(\cdot\,\tfrac{2}{3}) \odot (\cdot\,\tfrac{4}{5})$$

als Lösung der Operatorgleichung:

$$(\cdot\,\tfrac{4}{5}) \circ (\cdot\,x) = (\cdot\,\tfrac{2}{3})$$

Das folgende Diagramm kann dabei helfen, die Lösung zu finden:



Hierbei bedeuten g_1, g_2 und g_3 Größen. Gesucht ist also der Operator, der die Größe g_2 in die Größe g_3 überführt. Der Lösungsweg ist gestrichelt eingezeichnet: es muß zunächst der Gegenoperator zu $(\cdot\,\frac{4}{5})$, also $(\cdot\,\frac{5}{4})$, bestimmt und dieser dann mit $(\cdot\,\frac{2}{3})$ verkettet werden. Jetzt können wir die Divisionsaufgabe lösen:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$$

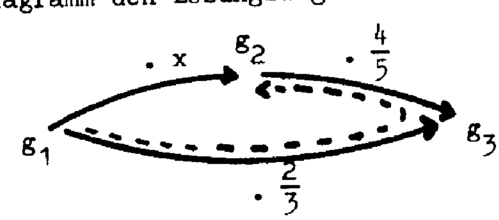
Übergang zur Operatorebene ↓   ↑ Übergang zu den Bruchzahlen

$$(\cdot\,\tfrac{2}{3}) \odot (\cdot\,\tfrac{4}{5}) \rightarrow (\cdot\,\tfrac{4}{5}) \circ (\cdot\,x) = (\cdot\,\tfrac{2}{3}) \rightarrow (\cdot\,x) = (\cdot\,\tfrac{5}{4}) \circ (\cdot\,\tfrac{2}{3}) = (\cdot\,\tfrac{2}{3}) \circ (\cdot\,\tfrac{5}{4})$$

↑ Lösung beispielsweise mit Hilfe von Diagrammen

<u>Bemerkung:</u>

Erklären wir $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$ mit Hilfe der Operatorgleichung $(\cdot\,x) \circ (\cdot\,\frac{4}{5}) = (\cdot\,\frac{2}{3})$, so kann folgendes Diagramm den Lösungsweg verdeutlichen:



5. Beurteilung II (empirische Befunde)

Unter den wenigen empirischen Untersuchungen, die verschiedene Methoden zur Ableitung der Divisionsregel vergleichen (Bergen [2], Bidwell [3], Sluser [13]), die also nicht nur die sogenannte Drillmethode (Regelvorgabe ohne Ableitung) einer Methode mit Regelableitung gegenüberstellen, ist nur die Untersuchung von Bidwell - und zwar vor allem unter methodischen Aspekten, weniger von den Ergebnissen her - für unsere Fragestellung von Bedeutung. Daher sollen die wichtigsten Fragestellungen und Ergebnisse dieser in den USA durchgeführten gründlichen und fundierten Untersuchung im folgenden knapp dargestellt werden. Bidwell testete an insgesamt 21 Klassen des 6. Schuljahres - also im letzten Schuljahr der "elementary school" - an 448 Schülern die Einführung und anschließende Einübung der Division von Bruchzahlen in jeweils 8 Stunden sorgfältig vorgeplanten und jeweils weitgehend standardisierten Unterrichts durch die jeweiligen Fachlehrer nach folgenden drei Methoden:

(1) Doppelbruchmethode (im folgenden abgekürzt durch D)
(2) Meßmethode (im folgenden abgekürzt durch M)
(3) Gegenoperatormethode (im folgenden abgekürzt durch G)

Hierbei entspricht die dort benutzte Doppelbruchmethode dem von uns in 4.2.2 beschriebenen Weg, die Meßmethode dem in 4.2.1 beschriebenen Weg 1 und die Gegenoperatormethode der Variation der in 4.2.4 beschriebenen Gegenoperatormethode und zwar in Gleichungsschreibweise.

Er erhielt folgende Ergebnisse:

(1) Kenntnis der Teillernziele, die für die jeweilige Regelableitung erforderlich sind: bei G weit besser als bei D, bei D besser als bei M.

(2) Integration der in den ersten Stunden getrennt angesprochenen einzelnen Teillernziele in den letzten Stunden der Unterrichtsreihe:
G, D: ja, M: nein

(3) Verständnis der gesamten Regelableitung: bei G und D deutlich besser als bei M.

(4) Beherrschung der Division von Bruchzahlen

Nachtest:	G signifikant besser als D und M
Behaltenstest:	G beste Werte, jedoch nicht signifikant besser als D, beide signifikant besser als M.

(5) Rückwirkungen auf die Multiplikation von Bruchzahlen: bei G waren die Leistungen bei der Multiplikation von Bruchzahlen signifikant besser als bei D, bei D besser als bei M. Bei M trat gehäuft der folgende Fehler als negativer

Transfer von der Addition, Subtraktion und Division von Bruchzahlen her auf:

Beispiel: $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{10}{15} \cdot \frac{12}{15} = \frac{120}{15}$

6. Zusammenfassung

Wegen der hohen Fehlerquote bei der Division von Bruchzahlen und wegen der vielen Verständnisfehler ist eine "optimale" Regelableitung besonders wichtig. Die Anzahl der vorliegenden empirischen Untersuchungen ist noch viel zu gering, ebenso die Anzahl der von ihnen untersuchten verschiedenen methodischen Wege.

Die Ergebnisse von Bidwell favorisieren eindeutig die Gegenoperatormethode, die von vielen Amerikanern befürwortete Meßmethode schneidet deutlich am schlechtesten ab. Das relativ günstige Abschneiden der sehr formalen Doppelbruchmethode ist überraschend. Die Gegenoperatormethode wurde hierbei allerdings nur in der Gleichungsversion untersucht, und nicht in der von uns für geeigneter gehaltenen Operatorversion. Untersuchungen über die Umkehroperationsmethode fehlen völlig. Insgesamt sind hier noch deutliche Forschungsdefizite feststellbar.

Eine Zusammenfassung der bei den einzelnen Methoden genannten Bewertungen aufgrund der theoretischen Überlegungen ergibt folgendes Bild:

Die Umkehroperationsmethode (Weg 1) und die Gegenoperatormethode (Hauptweg) schneiden auf der Basis des vorgestellten Bewertungsrasters deutlich am günstigsten ab. Hierbei bietet die Umkehroperationsmethode den Vorteil, daß bei ihr der Zusammenhang zwischen Division und Messen sehr leicht sichtbar gemacht werden kann. Die Gegenoperatormethode bietet dagegen den Vorteil, daß der Ableitungsweg noch prägnanter, kürzer und eingängiger ist als der schon kurze Ableitungsweg bei der Umkehroperationsmethode. Sie weist allerdings den Nachteil auf, daß die Beziehung der Division zum Messen direkt nicht sichtbar wird. Diesen Aspekt müßte man hier ggf. zusätzlich an einfachen Beispielen - ohne Regelformulierung - behandeln. Beide Wege sind auch bei nur geringen Kenntnissen der Schüler bezüglich der Deutung der Bruchzahlen als Operatoren gut beschreitbar. Eine genauere empirische Abklärung der genannten Ergebnisse wäre allerdings sehr wünschenswert.

Im Text genannte Literatur:

[1] Ausubel, O.P., Educational Psychology, A Cognitive View, New York 1968

[2] Bergen, P.M., Action research on division of fractions, The Arithmetic Teacher, 1966, S. 293-95

[3] Bidwell, J.K., A comparative study of the learning structures of three algorithms for the division of fractional numbers, The University of Michigan, Ph.D., 1968

[4] Brueckner, L.J., Analysis of errors in fractions, Elementary School Journal, 1928, 28, S. 760-770

[5] Feinberg, M.M., Is it necessary to invert? - Arithmetic Teacher, January 1980, S. 50-52

[6] Gagné, R.M., Die Bedingungen des menschlichen Lernens, Hannover 1969

[7] Ginther, J., Ng, K., Begle, E.G., A survey of student achievement with fractions. SMESG Working Paper, No. 20, Stanford University, October 1976, zitiert nach: Steffe, L.P.: Interpretations of Rational Numbers, University of Georgia, Working Paper No. 1, November 1976

[8] Griesel, H., Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten, Band 1, Hannover 1971

[9] Novillis, C.F., Why Teach Elementary School Students The Division Meaning of Fractions, School Science and Mathematics, Dezember 1979, S. 705-708

[10] Padberg, F., Didaktik der Bruchrechnung, Freiburg 1978

[11] Padberg, F., Didaktik der elementaren Zahlentheorie. Stellenwertsysteme - Teilbarkeitslehre - Primzahlen - Restklassen, Freiburg 1981

[12] Payne, J.N., Review of Research on Fractions, in: Number and Measurement, Papers from a Research Workshop, ERIC-Center, The Ohio State University, o.J. (1976), S. 145-187

[13] Sluser, T.F., A comparative study of division of fractions, in which an explanation of the reciprocal principle is the experimental factor, Doctoral dissertation, University of Pittsburgh, 1962, DA, 1963, 23, 4624-4625

[14] Thompson, Ch., Teaching Division of Fractions with Understanding, The Arithmetic Teacher, 1979, S. 24-27

Prof. Dr. Friedhelm Padberg
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Universitätsstraße
4800 Bielefeld 1