EL DESARROLLO DE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA, SU EPISTEMOLOGÍA Y CARACTERÍSTICAS

Roberto Byas, Ramón Blanco Sánchez
Universidad Autónoma de Santo Domingo (República Dominicana), Universidad de Camagüey (Cuba)
robertobyas@hotmail.com, ramón.blanco@reduc.edu.cu

Palabras clave: geometría, enseñanza, epistemología

Key words: geometry, education, epistemology

RESUMEN: El presente trabajo es un estudio histórico lógico de las diferentes teorías o enfoques fundamentales en la enseñanza de la geometría a partir de 1980, aunque algunos de estos tuvieron sus orígenes antes de esta fecha. En el referido estudio, el proceso enseñanza aprendizaje de la Geometría Euclidiana se analiza como parte de este proceso en la Matemática, dado que en la geometría como rama de la Matemática, son aplicables los métodos y enfoques generales del proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática.

ABSTRACT: The present work is a logical historical study of the different theories or fundamental focuses in the teaching of the geometry since 1980, although some of these approaches had its origins before this date. In the referred study, the teaching learning process of the Euclidian Geometry is analyzed as part of this process in the Mathematics, since in the geometry like branch of the Mathematics, the methods and general focuses of the Mathematics' teaching learning process, are applicable.

INTRODUCCIÓN

Como es conocido en el año 1959, se celebró el coloquio de Royaumont, convocado por la Organización Europea de Cooperación Económica (OECE) con el objeto de promover una reforma de los contenidos y de los métodos de enseñanza de la Matemática. Finalizado dicho coloquio la OECE convocó a unos expertos para que elaboraran el denominado Programa Moderno de Matemática para la Enseñanza Secundaria, manifiesto ideológico de los defensores de la Matemática Moderna, guiados por el lema atribuido a J. Dieudonné de "Abajo Euclides", citado por Bombar (2011) +que proponía la inclusión de la teoría de Conjuntos y el Álgebra en la enseñanza elemental en detrimento de la Geometría Axiomática (Euclídea).

A principio de los años 70 se comprendió por la comunidad internacional que el lenguaje geométrico desempeña una función intermedia entre la del lenguaje coloquial y la del lenguaje matemático formalizado en el ámbito de la elaboración conceptual (simulación) de los procesos del mudo externo. Se llegó a consenso en que la Geometría Euclidiana representa una fase insustituible en el desarrollo de la racionalidad humana. Por fin a principio de los 80 la Matemática Moderna en las escuelas era historia en prácticamente todo el mundo y se retomaba la Geometría Euclidiana (Barrantes y Balletbo, 2011, 2012, González, 2011).

La situación señalada en los párrafos anteriores, ha sido referida en un número considerable de trabajos sobre el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, por lo cual se considera pertinente analizar el estado del arte a partir de 1980, dado que en esta fecha se había retomado la enseñanza de la Geometría Euclidiana, de manera general en prácticamente todos los países.

DESARROLLO

Es menester contextualizar el proceso enseñanza aprendizaje de la Geometría Euclidiana dentro del proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, ya que por ser la primera una rama de la segunda, ambas presentan una ontología y epistemología análogas, además de que la estructura sistémica de la matemática implica que su metodología también presente un carácter sistémico.

A partir de los años 80 se aprecia cierta variedad de enfoques para llevar a cabo el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, y aunque algunos de los mismos se originaron antes de esta fecha es menester tenerlos en cuenta, dado que en algunos casos se mantienen vigentes y en otros presentan fundamentos teóricos que no deben ser ignorados en la práctica pedagógica.

Entre estos métodos es notorio el método basado en la resolución de problemas, el cual es anterior a los años 80 y tuvo como principal promotor a Polya ( ), este método se ha mantenido hasta la actualidad aunque ha perdido esplendor a pesar de que existen muchos trabajos al respecto, y se continúa trabajando sobre el tema (Blanco Nieto y Cárdenas Lizarazo, 2013, Artigue y Houdement, 2007, Castro, 2008, Díaz y Poblete, 2013), pero sin lograr los resultados esperados, aunque de un modo u otro la resolución de problemas es parte integrante de la Matemática en sí misma, Se puede decir sin lugar a dudas que la resolución de problemas es un método clásico del trabajo con la Matemática y con mayor o menor énfasis aparece como parte de la mayoría de los diferentes enfoques existentes y en cualquiera de las ramas de la Matemática, en particular en la Geometría.

En los 80 también se aplicó, aunque su uso no fue muy extendido, el método problémico, que aplicado correctamente difería del método por problemas, pues lo que se trataba era de encontrar situaciones donde los conocimientos de los estudiantes no fueran suficientes para resolver la tarea planteada y así introducir el nuevo contenido. Este método buscaba fundamentalmente la motivación de los estudiantes.

También es necesario mencionar en esta etapa el llamado aprendizaje significativo debido a D. Ausubel (1983), en el cual se destacaba la necesidad de que el nuevo contenido se enlazara con el precedente, de modo que fueran comprendidos por el estudiante tanto la necesidad de dicho enlace como el enlace en sí mismo (Ausubel y Novak, 1983).

La esencia del aprendizaje significativo radica en que las ideas simbólicamente expresadas sean relacionadas de manera sustantiva y no arbitraria con lo que el aprendiz ya sabe, por lo que resulta de especial interés en la geometría. Los primeros trabajos de Ausubel aparecieron en 1978, pero tuvieron su etapa de mayor aceptación en los 80.

Se debe mencionar también la Teoría de Situaciones Didácticas, la cual se fundamenta en que el conocimiento puede ser determinado por una situación, producto de las interacciones que se dan en el proceso de formación del conocimiento matemático.

Según Brousseau (1986) existen dos tipos de interacciones: la interacción entre el alumno y un medio resistente, y la interacción entre el alumno y el docente. Esto se manifiesta también en el proceso enseñanza aprendizaje de la Geometría.

En geometría en particular es notorio el trabajo de los esposos Van Hiele, que tuvo sus inicios en la disertación de sus tesis doctorales en 1957 en la Universidad de Utrecht, Holanda.

El modelo de los Van Hiele se caracteriza por definir cuatro etapas en el proceso enseñanza aprendizaje de la geometría, estas son: Visualización, Análisis, Deducción informal, Deducción formal. (Mayberry, 1987). Aunque su trabajo estuvo fuertemente influido por la teoría piagetiana, que plantea la necesidad de esperar por el desarrollo biológico del estudiante.

Es necesaria la referencia a Chevallard (2006), dado que este estudioso de la materia, argumentó y fundamentó teóricamente el proceso de ajustar un contenido de la ciencia para convertirlo en contenido de una asignatura.

Los trabajos de este autor dieron lugar al concepto de transposición didáctica, se argumenta el paso del saber sabio (contenido de la ciencia) al saber enseñado (contenido de la asignatura) (Chevallard, 1985). Indica que un contenido del saber sabio que haya sido designado como saber a enseñar sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para tomar lugar entre los objetos de enseñanza.

El trabajo que en un objeto del saber se hace para transformarlo en un objeto de enseñanza, se llama transposición didáctica. Es requerido también en el proceso enseñanza aprendizaje de la Geometría.

La Teoría antropológica de lo didáctico (TAD) es otro enfoque a tener en cuenta. Esta teoría plantea modelar toda actividad humana mediante una herramienta fundamental llamada praxeología (praxis + logos), y considera a la Matemática como una actividad humana que puede describirse en términos de praxeologías u Organizaciones Matemáticas (OM) y los vínculos entre ellas (García y Ruiz, 2006).

En aras de proteger culturas específicas se desarrolló lo que se conoce como Etnomatemática.

Según D'Ambrosio (1999) se entiende como cuerpos de conocimiento establecidos como sistemas de explicaciones y como maneras de hacer, que han sido acumulados a través de las generaciones en ambientes naturales y culturales distintos.

Se propone como una práctica escolar válida que refuerza la creatividad, los esfuerzos, el auto-respeto cultural, y ofrece una visión amplia de la humanidad que tiende de forma creciente hacia el multiculturalismo. Se considera como un sistema de conocimientos que ofrece la posibilidad de crear una relación más favorable y armoniosa, tanto en la conducta humana como entre los humanos y la naturaleza.

Una referencia obligada aquí es la teoría APOE, en la cual Dubinsky (1996) y sus seguidores plantean que el proceso de apropiación del contenido comienza con acciones sobre objetos físicos o mentales, con un carácter algorítmico que termina por convertirse en un proceso, en el cual el estudiante debe llegar a identificar el objeto matemático y por último, este objeto debe ser incorporado por el estudiante en su esquema mental (Dubinsky, 1996). Objeto matemático que puede ser tanto algebraico como geométrico o de otro tipo.

Estas teorías o enfoques tienen como elemento común que todas buscan lograr la actividad del estudiante, procuran ponerlo como sujeto de su propio aprendizaje, aunque esta intención sea expresada en diferentes formas.

También se manifiesta en dichas teorías o enfoques el carácter social del proceso enseñanza aprendizaje, lo cual no resulta notable ya que teorías pedagógicas de relevancia como el constructivismo y el cognitivismo asumen el carácter social de dicho proceso. Aunque no se considera aquí necesario destacarlo, no se debe pasar por alto que el carácter social del proceso enseñanza aprendizaje es uno de los presupuestos básicos de la escuela Histórico-Cultural.

A partir de 1990, aunque varias de las teorías o enfoques anteriores se retoman por diferentes autores con mayor o menor frecuencia, en esta etapa una de las propuestas más relevantes resulta la Teoría de la Mediación Semiótica, propuesta por R. Duval, la cual debido a su fundamentación teórica ha encontrado respaldo en la comunidad científica que estudia el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática y en particular en el caso de la Geometría, dada la variedad de representación de los objetos geométricos.

Esta teoría articula dos elementos esenciales en el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, por una parte el carácter no ostensivo de los objetos matemáticos y por otra el carácter mediatizado de la psiquis humana. (Vygotsky, 1993).

Uno de los elementos de esta teoría retomado con frecuencia en la literatura especializada es la siguiente: “por una parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser más que un aprendizaje conceptual y, por otra, es sólo por medio de representaciones semióticas que es posible un actividad sobre los objetos matemáticos…” (Duval, 2006b, p.38)

Esta paradoja puede constituir un verdadero círculo vicioso para el aprendizaje. ¿Cómo sujetos en fase de aprendizaje no podrían confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas si ellos no pueden más que tener relación solo con dichas representaciones? La imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica, vuelve la confusión casi inevitable, solo la actividad del estudiante con diferentes registros de representación puede salvar la situación.

Para este autor “ver” en matemáticas implica la identificación de las relaciones o la organización de relaciones entre las unidades representacionales que constituyen a una representación semiótica.

En la misma línea de trabajo aparece el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de Godino (1994) y sus seguidores el cual tiene muchos puntos de contactos con la Teoría de la Mediación Semiótica (TMS), no obstante no se produce ningún tipo de acercamiento entre ambas escuelas que pudiera conducir a una teoría consistente sobre la cual desarrollar el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática.

En el EOS la noción de significado y sentido dejan de ser entidades etéreas y misteriosas. El significado de un objeto matemático es el contenido de cualquier función semiótica y el sentido se puede interpretar como un significado parcial, esto es, se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinado (Godino y Batanero, 1994).

Aunque lo que caracteriza esta etapa es la materialización semiótica de los objetos matemáticos, las teorías al respecto no llegan a prevalecer en la comunidad científica, pues otros enfoques siguen siendo retomados, un ejemplo concreto es el enfoque Acción-Proceso-Objeto-Esquema (APOE) de E. Duvinsky.

Ya en la etapa posterior al 2000, aunque no de manera exclusiva, pero con un gran peso en la bibliografía especializada, está la materialización semiótica de los objetos matemáticos. En esta etapa se incrementa el predominio de los trabajos de R. Duval y J. Godino y se trabaja además por otros autores.

Es de destacar que en esta etapa tanto el Enfoque Ontosemiótico como la Teoría de la Mediación Semiótica se consolidan, no solo con trabajos de sus fundadores principales, sino porque, como se señala en el párrafo anterior, otros autores también desarrollan trabajos al respecto.

Todo lo cual conduce a que sea aceptado por muchos especialistas en la materia, que no puede haber comprensión en Matemática si no se distingue un objeto de su representación. No se deben confundir nunca los objetos matemáticos (números, funciones, rectas, etc.) con sus representaciones (escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de figuras, etc.), dado que un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes.

Es de interés destacar la interrelación que se produce cuando Duval (2006a) plantea que la pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y, por tanto, de sus representaciones mentales. A esto se agrega lo planteado por Vigotsky al expresar que el uso de los símbolos no es para producir cambios en el objeto que el signo representa, sino en el sujeto que lo utiliza.

En esta etapa los trabajos de Radford (2002), entre otros, argumentan científicamente la importancia de la transferencia de registros semióticos, además en sus trabajos vincula la representación semiótica al carácter mediatizado de la psiquis humana, con lo cual convienen los autores del presente trabajo (Radford, 2002, 2003).

El estudio realizado permite asegurar que existe suficiente aval en la teoría sobre el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática, para poder apreciar que la apropiación conceptual resulta de la actividad del estudiante con el objeto matemático, actividad que no puede ser de otra forma que a través de la materialización semiótica de estos objetos y los correspondientes cambios de registros, dado que como expresa la máxima de Vigotsky (1993), que el concepto en forma acabada no puede ser puesto en la mente del estudiante.

Incluso autores importantes, como lo es Sfard, (2008), aunque no habla de registros de representación, su enfoque asume que las herramientas simbólicas y otros medios de representación usados en el proceso de aprendizaje no solo operan como elementos externos de representación, que pueden ser desechados una vez que su función representacional ha sido completada, sino que el uso de esas herramientas tiene efecto a largo término en el pensamiento matemático del estudiante.

CONCLUSIONES

El presente estudio no pretende restar importancia a aquellas teorías o enfoques que no tienen en cuenta la transferencia de registros semióticos, dado que todas ellas son utilizables en situaciones específicas. En particular la resolución de problemas y las transposiciones didácticas siempre están, o deben estar, presentes en la clase de Matemática.

Pero dado el carácter no ostensivo de los objetos matemáticos y el carácter mediatizado de la psiquis humana, el proceso enseñanza aprendizaje de la Matemática en general y de la geometría en particular, no debe ser desarrollado usando solo un registro de representación para cada objeto estudiado, dado que cada representación semiótica pone de manifiesto solo determinadas características del objeto estudiado.

Se afirma, por último, que la apropiación conceptual de los estudiantes, depende de las posibilidades de estos de expresar el concepto en diferentes registros de representación, e incluso que sean capaces de usar la representación más adecuada al problema que se resuelve.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. y Houdement, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives. ZDM *Mathematics Education* 39: 365–382. 27.

Ausubel, D. y Novak, J. (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. 2° Ed. TRILLAS México.

Barrantes, M. y Balletbo, I. (2011). La enseñanza – aprendizaje de la geometría en revistas científicas españolas de mayor impacto de la última década. Gobernación de Misiones – Universidad Nacional de Pilar. Asunciòn, Paraguay: Litocolor S.R.L.

Barrantes, M. y Balletbo, I. (2012). Referentes principales sobre la enseñanza de la geometría en Educación Secundaria. *Campo Abierto*, vol. 31 nº 2, pp. 139-153.

Blanco, L. y Cárdenas, J. (2013). La Resolución de Problemas como contenido en el Currículo de Matemáticas de Primaria y Secundaria. *Campo Abierto*, vol. 32 nº 1, pp. 137-156.

Bombal Gordón, F. (2011). *Nicolás Bourbaki: El Matemático Que Nunca Existió*. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Vol. 105, Nº. 1, pp 77-98.

Brousseau, G. (1986): Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, *Trabajos de*

Matemática, No. 19.

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII. Actas del Duodécimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 113-140).

Chevallard Y. (1985). La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné, Grenoble, La pensée sauvage. 1985.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En Bosch, M. (Ed.) *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4). (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

D'Ambrosio (1999): La Transferencia del Conocimiento Matemático a las Colonias: Factores Sociales. *Políticos y Culturales*. *Llull,* vol. 22.

Díaz V. y Poblete A. (2013). Resolución de Problemas en Matemática y su Integración con la Enseñanza de Valores Éticos: el caso de Chile*. Bolema, Rio Claro* (SP), 27(4), 117-141.

Dubinsky, E. (1996). A framework for research and curriculum development in Undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education* (pp.1-32).

Duval, R. (2006a). Les conditions cognitive de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* 10, pp.5-53. 36.

Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

García, B. y Ruiz, G. (2006). La modelización matemática y el problema de La articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, 18(2), 57 – 69. 120. 74.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.

González León, J. L. (2011). Estrategia didáctica para el desarrollo de habilidades geométricas en el primer ciclo de la educación primaria. Tesis doctoral. Cienfuegos. Cuba.

Mayberry, J. (1987). The Van Hiele levels of geometric thought in undergraduate pre service teachers. *Journal for Research in Mathematics Educatio*n, 14(1), 58-69. 145.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning,* 5(1), 37-70. 171.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge: Cambridge University Press.

Vygotsky, L. (1993). *Pensamiento y lenguaje* (J. M. Bravo, Tras.) Obras escogidas II (Vol. 2). Madrid: Visor.