LA SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER: UN ACERCAMIENTO SOCIOEPISTEMOLÓGICO

Fabián Wilfrido Romero Fonseca, Rosa María Farfán Márquez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
fwromero@cinvestav.mx, rfarfan@cinvestav.mx

Palabras clave: series de fourier, socioepistemología, prácticas sociales.

Key words: fourier series, socioepistemology, social practices.

RESUMEN: Al abordar la Serie Trigonométrica de Fourier (STF) desde una perspectiva Socioepistemológica nos interesa acercarnos al fenómeno didáctico de manera sistémica, tomando en consideración las componentes epistemológicas, didácticas y cognitivas presentes referidas al saber, es así como en este trabajo nos preocupamos específicamente por la naturaleza epistemológica de la STF tomando en consideración su fenomenología intrínseca (determinación del estado estacionario) y buscando vislumbrar aquellas prácticas que provocaron su génesis.

ABSTRACT: Approaching the Trigonometric Fourier Series (STF) from a socioepistemological perspective allows understanding the didactic phenomenon in a systemic way, taking into account the epistemological, educational and cognitive components around the knowledge acquisition. Thus, this work is specifically concerned with the epistemological nature of the STF regarding its intrinsic phenomenology (determination of stationary state) and the display of practices that led to its genesis.

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES

Las Serie Trigonométrica de Fourier (STF) es un tema fundamental en cursos avanzados de ingeniería (Rodríguez, 2009), prueba de ello es la importancia que tuvo en la evolución del Análisis Matemático, pues la STF ha "tenido gran influencia en el desarrollo de la teoría de funciones reales de una variable real, comparable sólo con las series de potencias en la teoría general de funciones" (Farfán, 1986, p. 1).

Además la STF es el estadio más avanzado de las funciones trigonométricas (Montiel, 2005), por lo que para su construcción es necesario que las funciones trigonométricas, en especial las funciones seno y coseno, estén construidas como objeto en los estudiantes, ya que de esta manera serán susceptibles de manipulación.

En el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, diversos estudios se han preocupado por el abordaje de la STF. Estas investigaciones se han fundamentado en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, y han seguido una aproximación sistémica para la construcción social del conocimiento, mediante la articulación de cuatro componentes: la naturaleza epistemológica, la dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y la dimensión didáctica (Cantoral, 1999).

El trabajo que se presenta corresponde a parte del análisis preliminar de una ingeniería didáctica. Específicamente interesa la naturaleza epistemológica de la STF, por lo que se busca dar cuenta de los siguientes aspectos: el problema de la cuerda vibrante como antecedente de la STF (Farfán, 1986; Ulín, 1984), la determinación de la fenomenología intrínseca del objeto matemático «determinación del estado estacionario» (Farfán, 1994; 2012; Marmolejo, 2006); y algunas nociones físicas y matemáticas relacionados con la STF (Morales, 2003, 2010; Rodríguez, 2009; Vásquez, 2006; Moreno, 1999).

Farfán (1986) y Rodríguez (2009) indican que la STF surgen como solución a una ecuación diferencial, con ciertas condiciones iniciales y de frontera dependientes del fenómeno que se esté modelando. En Farfán (1994; 2012) se estudia el problema de la cuerda vibrante y como este fue el primer punto de controversia al representar una función arbitraria como una serie de senos, tema que provocó gran discusión entre la comunidad científica del siglo XVIII. Además Farfán (2012) analiza la obra de Fourier (1822) y concluye que la determinación del estado estacionario es la génesis de la serie trigonométrica de Fourier, pero que esto requiere de una tarea cognitiva de las más complejas (Farfán, 2012).

Por otra parte, Vásquez (2006) se interesa por el rol que desempeña la hipótesis de periodicidad para la STF, por lo que da cuenta de cómo el carácter periódico, presente en el discurso matemático escolar, para el cálculo de una STF no estuvo presente en su génesis histórica.

Rodríguez (2009) se enfoca principalmente, en la visualización matemática presente en el trabajo de Fourier, donde encuentra que este matemático da sentido y significado al análisis de sus resultados, primero en el plano de lo físico, pero luego justifica de manera matemática. Esta visualización que hace Fourier es a partir del estudio de un fenómeno natural: la propagación de calor, Morales (2003) rinde cuenta de cómo Fourier se considera un "modelador experto" y hace un análisis de su obra *Memoire sur les Températures du Globe Terrestre*, para comprender los razonamientos de este científico y las implicaciones físicas y matemáticas que tiene el estudio del calor.

ASPECTOS TEÓRICOS

Partiendo de un acercamiento desde la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), para la cual el conocimiento se construye en sociedad, se parte de la idea de que los saberes matemáticos presentes en el aula no son una copia fiel de las matemáticas tal y como se crearon, pues estos saberes sufrieron un proceso de despersonalización y descontextualización (Cantoral, 2013).

Por tanto es importante saber cómo se transformaron las matemáticas en esos procesos de transposición, para lo cual el estudio de obras originales permite "reconocer el grado de permeabilidad de las construcciones originales en la didáctica de entonces y recíprocamente el nivel de influencia de ésta sobre las estrategias que favorecen la construcción de conocimientos matemáticos" (Cantoral, 2013, pág. 125), esto permite reconocer en el origen de las nociones matemáticas aquellas disparidades entre el saber científico y lo que está presente en el discurso matemático escolar (DME).

Por otra parte, este reconocimiento de las estrategias que se utilizaron en la construcción del conocimiento nos permite identificar, hasta cierto punto, aquellas prácticas de referencia, practicas socialmente compartidas y actividades alrededor del fenómeno didáctico. Las prácticas de referencia orientan la actividad humana a través de diversos mecanismos, estos mecanismos provocan actividades que se organizan, las cuales dan lugar a prácticas socialmente compartidas (para profundizar en el esquema de anidación de prácticas se puede consultar (Cantoral, 2013)).

De esta manera, a través de un análisis epistemológico se puede tener un esquema de prácticas anidadas preliminar alrededor de la STF, sólo que este esquema requiere de las otras dimensiones del saber, cognitivo, didáctico y cultural, para fortalecerse. Es por esto que se hace un estudio epistemológico alrededor de la STF, el cual de forma resumida, se expone a continuación.

LA GÉNESIS DE LA STF

El surgimiento de la STF es un proceso que tardó alrededor de un siglo, desde que Brook Taylor (1685-1731) enunció el famoso problema de la cuerda vibrante en 1715, hasta el trabajo de Dirichlet sobre la convergencia puntual de la STF (1829), durante esa época (principalmente siglo XVIII) se estaban sentando las bases del Análisis Matemático como se conoce hoy en día.

Durante esta época se da el surgimiento de la Escuela Politécnica y de la ingeniería como ciencia, lo que provoca un cambio en la manera de hacer y ver las matemáticas en la época. Por otra parte, es a partir del problema de la cuerda vibrante y del trabajo de Fourier que se cuestionan las bases del Análisis Matemático, por esta razón se inicia con el estudio del problema de la cuerda vibrante, seguidamente se comenta el establecimiento de la ecuación general de calor, para cerrar con el desarrollo de una función en serie trigonométrica y la convergencia de dicha serie.

El problema de la cuerda vibrante

El problema de la cuerda vibrante fue propuesto por Taylor en su obra *Methodus Incrementorum Directa & Inversa* (1715), el problema consistía en una cuerda flexible que está sujeta por los extremos, luego se le aplica una fuerza hasta que tome cierta forma inicial y se deja libre, se debe determinar entonces el movimiento y el tiempo de vibración de la cuerda.

Para 1715, Taylor ya había probado la existencia de soluciones periódicas del problema, pero no disponía de una ecuación que modelara el fenómeno, por lo que no calculó las soluciones. En 1727 Johann Bernoulli (1667-1748) abordó el problema en su forma discreta, considerando un número finito de cuentas de igual masa y colocadas equidistantes sobre una cuerda sin masa (con masa despreciable en comparación con la de las cuentas), pero no concluyó resultados generales. Fue el hijo de J. Bernoulli, Daniel Bernoulli (1700-1782), quien se percató de la existencia de un número infinito de modos fundamentales de vibración, y también de soluciones complejas a las que no se les podía asignar una frecuencia de vibración, esto utilizando el mismo modelo del collar de cuentas de su padre.

Según Farfán (2012), el primer modelo matemático decisivo del problema fue propuesto en 1747 por Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) quien demostró que la función $y = y(x,t)$ debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ y(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial y(x,0)}{\partial x} = 0 \\ y(0,t) = y(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

Donde las condiciones corresponden, respectivamente, a la ecuación de onda unidimensional, la forma inicial de la cuerda, la velocidad inicial de la cuerda y el movimiento de los extremos de la cuerda. D'Alembert probó que la solución general del problema posee la forma $y(x,t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)]$, con $a \in \mathbb{R}$, lo cual representa la suma de dos ondas, una trasladada hacia la derecha y otra hacia la izquierda.

Además D'Alembert indica que la forma inicial de la cuerda debe representarse en toda su extensión por una y la misma ecuación, es decir, debe ser **continua en el sentido de Euler**; además de que la función inicial debe ser impar y periódica (Farfán, 2012).

Euler llega, en 1748, a la misma solución que D'Alembert (Farfán, 2012), sin embargo difería de él respecto de las funciones iniciales que se podían admitir en el problema, para Euler no existía alguna razón física para no admitir como forma inicial de la cuerda aquellas que estuviesen definidas en [0,π] por distintas expresiones analíticas, "estas diferencias pueden considerarse como una de las primeras manifestaciones escritas sobre los problemas que ha llevado consigo la definición de la noción de «función», un concepto que hoy en día presumimos tener muy claro" (Cañada, 2000, pág. 296).

Se puede decir que la discusión radica en el hecho de que para aquel tiempo una función daba lugar a una gráfica, pero no a la inversa, es decir, dada una gráfica no necesariamente una única función podía representarla, pues podía dar lugar a distintas expresiones en distintos intervalos. Por lo tanto, Euler defendía que cualquier gráfica podía considerarse como curva inicial, no así

D'Alembert. D. Bernoulli, en 1755, se basó en sus conocimientos musicales para resolver el problema, llegando a que la solución debe tener la forma $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)\cos(nt)$, $a_n \in \mathbb{R}$.

Donde los coeficientes a_n se deben elegir adecuadamente para que se satisfaga el problema de valores iniciales. Hay otra manera de llegar a esta solución, y esta es de suma importancia en el estudio de Fourier (1768-1830) sobre la propagación de calor, el cual se estudiará más adelante. Note ahora que al utilizar la segunda condición inicial se tiene que $y(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)$.

Es decir, una **función arbitraria** $f(x)$ se puede representar como superposición de ondas simples, lo cual fue punto de controversia entre los matemáticos de la época, pues no se admitía que cualquier función pudiera representarse de esa forma. Por ejemplo, Euler sostenía que al cumplirse esa igualdad la función $f(x)$ debía ser periódica e impar, lo cual era una restricción innecesaria, sin embargo D. Bernoulli se mantuvo firme en su postura pues argumentaba que hay suficientes coeficientes en la suma para seleccionarnos de manera que la igualdad se cumpla, por lo que para él esta era la solución genera del problema de la cuerda vibrante.

Así pues "el meollo de la discusión no radica en la solución en sí misma, sino en cuál de ellas es la solución general, así como en la metodología empleada para encontrarla" (Farfán, 2012, pág. 51). Por tanto, el problema de la cuerda vibrante provoca la revisión de los fundamentos del análisis matemático durante todo el siglo XVIII.

La Teoría Analítica del Calor

Las ideas de D. Bernoulli esperaron por más de cincuenta años para ser tomadas en cuenta, esta vez por Jean Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830), quien en 1807 envió una artículo al *Institute de France* que trataba sobre la transmisión de calor; el artículo fue estudiado por Lagrange (1736-1813) y Laplace (1749-1827), entre otros matemáticos prominentes de la época, pero este fue rechazado por el *Institute*, pues no poseía el rigor matemático necesario, según sus revisores.

Los miembros del Institute de France estaban convencidos de la importancia de los estudios de Fourier y convocaron un concurso sobre el tema de la propagación de calor, el concurso fue ganado por Fourier en 1812 con una versión ampliada de su obra inicial, pero criticado por su falta de rigor no logró publicar su trabajo en las *Mémoires* del *Institute*. No fue sino hasta 1822 que publicó su libro *Théorie Analytique de la Chaleur* (Fourier, 1822), en la cual incorporó su artículo de 1812 sin cambios, dos años más tarde fue nombrado secretario del *Institute de France* y pudo publicar su artículo en las *Mémoires*.

Antes de iniciar su obra Fourier tenía conocimientos del trabajo de Mecánica Celeste de Lagrange y de los planteamientos de D. Bernoulli sobre el problema de la cuerda vibrante. A ciencia cierta no se sabe si Fourier conocía el trabajo de Jean Baptiste Biot (1774-1862) sobre propagación de calor, quien utilizó la ley de enfriamiento de Newton para tratar de modelar la distribución de calor en una barra metálica y muy larga calentada desde uno de sus extremos, sin embargo, su modelo no era correcto, pues Biot asumía el mismo intercambio de calor entre la superficie de la barra metálica y el aire, que en el interior de la barra, en cambio Fourier hace la diferencia entre el comportamiento del flujo del calor dentro de un sólido y en su superficie, lo que le permite obtener la ecuación diferencial parcial que modela el fenómeno.

Fourier estaba interesado por estudiar las leyes matemáticas que gobiernan la propagación de calor en la naturaleza y reconoce que las teoría mecánicas, propias del siglo XVIII, no se aplican a la naturaleza del calor, por lo que este fenómeno no se puede explicar con base en los principios del movimiento y el equilibrio (Farfán, 2012), sino que las explicaciones físico-matemáticas responden a los resultados de la experimentación.

Se puede notar como Fourier busca modelar los fenómenos naturales, en particular la propagación de calor, de la manera más general posible, logrando explicaciones matemáticas congruentes con las ideas físicas, pero separadas, lo cual no era usual en la época, esto marca un cambio en el análisis de los fenómenos estudiados hasta ese momento, es decir, Fourier busca "reducir, con la ayuda del análisis matemático, la investigación física del fenómeno de propagación de calor en cuerpos sólidos a los problemas del cálculo integral" (Farfán, 2012, p. 96), Fourier al respecto expresa: "La Teoría que vamos a exponer tiene por objetivo demostrar estas leyes; el calor, y las cuestiones del cálculo integral cuyos elementos están dados por la experiencia". (Fourier, 1822, p. 1).

Luego de obtener ciertas ecuaciones al estudiar casos particulares, Fourier estudia la trasferencia de calor durante un tiempo dt en un prisma rectangular del sólido, cuyo volumen es $dxdydz$ y llega a la ecuación de propagación de calor.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

En esta, $v(x, y, z, t)$ representa la temperatura del sólido en el punto $(x, y, z,)$ en el tiempo t y K es la constante de transmisión de calor que depende del material del solido.

Después de deducir la ecuación de calor Fourier dedica el resto de su obra al trabajo con casos particulares. En el capítulo III de la *Théorie Analytique de la Chaleur* consideró el problema de la propagación de calor en una lámina infinita, en el cual resuelve el problema de la determinación del estado estacionario, lo que lo lleva al estudio de la convergencia de series trigonométricas infinitas, para lo cual Fourier muestra un gran dominio algebraico (Farfán, 2012).

Fourier en todo su trabajo tiene la necesidad de comprobar que las soluciones obtenidas se adecúan a la situación física, pero a diferencia de la tradición los argumentos físicos no afectan lo matemático, se van dando de manera paralela, pero inicia una separación entre las ideas físicas y las ideas matemáticas. Estos argumentos físicos le permiten validar el trabajo matemático.

Los coeficientes de Fourier

Fourier en *La Théorie* dedica una sección a la expansión de una función dada en serie trigonométrica, dicha sección se titula *Développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques*, en esa sección "se enuncia y demuestra lo que para los matemáticos más prominentes del siglo XVIII era inaceptable: la posibilidad de representar una función arbitraria en serie trigonométrica infinita" (Farfán, 2012, p. 128). Básicamente Fourier sigue el siguiente procedimiento:

1. Demuestra que cualquier función impar se puede desarrollar como una serie infinita de senos.
2. Demuestra que cualquier función par se puede desarrollar como una serie infinita de cosenos.
3. Demuestra que cualquier función se puede escribir como suma de dos funciones una par y la otra impar.

A partir de esto concluye que cualquier función se puede escribir como una serie infinita de senos y cosenos . Reinterpretando los resultados de Fourier, podemos considerar una función $f(x)$, donde $x \in (0,2\pi)$, se puede representar de la manera:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)]$$

Fourier logra deducir cómo se deben calcular los coeficientes a_0, a_n y b_n, hoy en día llamados coeficientes de Fourier, estos son:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx$$

Surge a partir de estas fórmulas otra pregunta en la época, ¿cómo calcular la integral de funciones arbitrarias?, esto pues f(x) no es conocida y en la época la definición de integral es la de antiderivada, pero ¿cómo saber si una función cualquiera tiene o no antiderivada? Fourier interpreta las integrales como el área bajo la curva, y lo necesario es que esta área sea finita, lo que no requiere que la función posea una expresión analítica asociada o ser continua en el sentido de Euler.

Después de hacer esta deducción Fourier reflexiona sobre el problema de la cuerda vibrante, diciendo que aplicando los principios que utilizó para determinar los coeficientes se resuelven las dificultades que tuvo D. Bernoulli.

Para 1829, Dirichlet (1805-1859) determina una fórmula para la suma parcial de orden N de la STF, logrando con esto probar la convergencia puntual de la serie para una amplia gama de funciones, incluso aquellas con discontinuidades de salto finito, Dirichlet determina que la suma parcial es:

$$S_N = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\left(N + \frac{t}{2}\right)}{2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} dt$$

Con $N \in \mathbb{N}$. Una vez que Dirichlet logra este resultado la comunidad acepta que las series de Fourier son un buen instrumento para la representación de funciones muy generales, y además influencia el desarrollo de las matemáticas en diferentes aristas.

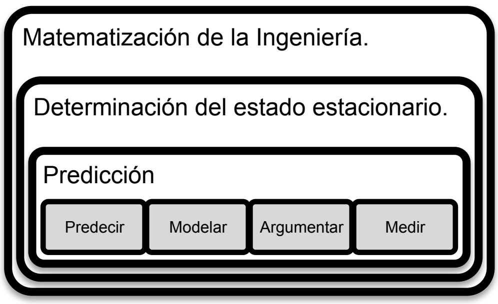
REFLEXIONES FINALES

A partir de las anteriores reflexiones epistemológicas se puede inferir una práctica de referencia asociada a la STF, como lo es la determinación del estado estacionario, un análisis más riguroso del desarrollo de las matemáticas durante los siglos XVIII y XIX, presente en (Farfán, 2012), permite ver como no sólo esta práctica de referencia está relacionada con la STF.

> …la práctica de referencia, ante todo, está *estructurada* y es *estructurante* del quehacer matemático y científico de una época que va de la conformación de la *École Polytechnique* en la Francia napoleónica, hasta el momento del surgimiento de la figura del matemático profesional en el ámbito de la postguerra en el Siglo XX, justo después de la *Primera Guerra Mundial*. (Cantoral, 2013, p. 37)

Es decir, la matematización de la ingeniería es una práctica de referencia que estructura el quehacer matemático de la época, en particular el trabajo de Fourier, quien fue alumno y profesor de la *École Polytechnique*, por lo que podemos decir que afecta, de alguna manera la práctica de referencia de determinación del estado estacionario. Además, se puede notar la preocupación de Fourier por predecir el comportamiento de la naturaleza, a través de la modelación de la propagación del calor, donde las actividades de predecir, medir, modelar y argumentar están siempre presentes en su trabajo. De esta manera se puede tener un esquema de prácticas anidadas preliminar:

Fgura 1. Esquema de anidación de práctica preliminar



Cabe destacar que éste es un esquema preliminar, al profundizar en el análisis epistemológico y las demás componentes (cognitiva, didáctica y social), éste se puede modificar y ampliar. Por ejemplo, la investigación de Farfán (1994), da cuenta de que la determinación del estado estacionario no es el medio ideal para construir la serie de Fourier, pues es cognitivamente más complejo que la serie misma, esto a partir de una experimentación controlada. Por lo tanto falta aún más análisis para poder dar un esquema más completo, pero eso será más adelante en la investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cantoral, R. (1999). Approccio socioepistemologico alla ricerca in Matematica Educativa: un programma emergente. *La Matematica e la Sua Didattica 3*, 258-270.

Cantoral, R. (2012). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Barcelona: Gedisa.

Cañada, A. (2000). Una perspectiva histórica de las series de Fourier: de las ecuaciones de ondas y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(3), 293-320.

Farfán, R. M. (1994). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Farfán, R. M. (1986). *Acerca de la representación de una función "arbitraria" en serie trigonométrica (Ensayo Histórico).* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Farfán, R. M. (2012). *Socioepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización* (Primera ed.). Barcelona: Gedisa.

Fourier, J. (1988). *Théorie analytique de la chaleur*. París: Editions Jacques Gabay (año de publicación del libro original: 1822), “La Théorie que nous allons exposer a pour objet de démontrer ces lois; chaleur, à des questions de calcul intégral dont les élément sont donné par l’expérience”. Traducción del autor.

Marmolejo, R. (2006). *Estudio de la noción de estado estacionario en el ámbito fenomenológico de la transferencia de calor.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, México.

Morales, F. (2010). *Causas y efectos de la ambigüedad en el tratamiento didáctico de la noción de calor. Una caracterización del pensamiento fisicomatemático.* Tesis de Doctorado no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Morales, F. (2003). *Acerca de la actividad de modelación: las temperaturas de la tierra.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Moreno, J. A. (1999). *Estudio de la noción de convergencia de series trigonométricas en un ambiente de simulación.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Rodríguez, M. (2009). *Una matemática funcional para el ingeniero. La serie trigonométrica de Fourier.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Taylor, B. (1715). *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. Londres: Impensis Gulielmi Innys.

Ulín, C. (1984). *Análisis histórico-crítico de la difusión de calor: el trabajo de Fourier.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Vásquez, R. (2006). *Sobre el papel de la hipótesis de periodicidad en las series de Fourier.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.