

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y LA ENSEÑANZA DE TENSIONES EN EL LABORATORIO DE FÍSICA EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Pedro Javier Ubaldo Salinas, Liliana Flores Jiménez, Ana María Ojeda Salazar

CECyT No 4 "LC", DME Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional (México)

pubaldos@ipn.mx, lflores@ipn.mx, amojeda@cinvestav.mx

Palabras clave: ecuaciones lineales, tensiones, equilibrio.

Key words: linear equations, tensions, equilibrium

RESUMEN: En el marco de un proyecto interinstitucional sobre docencia e investigación en matemática educativa, se indagó con estudiantes de tercer semestre en el laboratorio de física su comprensión de las tensiones en un cuerpo suspendido en equilibrio y de la resolución del sistema de ecuaciones que lo modela. Aunque los estudiantes comprendieron el fenómeno físico, no dieron sentido al modelo matemático. Los resultados obtenidos apuntan a la necesidad de investigar acerca de la forma en que la enseñanza pueda hacer efectiva para el estudiante la interrelación entre las distintas Unidades de Aprendizaje de las diferentes disciplinas, con miras al logro de los objetivos de los Programas de Estudios del bachillerato tecnológico.

ABSTRACT: In the framework of an inter-institutional project in high school mathematics education, a research was carried out about third semester students' understanding of the tensions in a body suspended in equilibrium and the resolution of the corresponding modeling system of linear equations. Although these students understood the physical phenomenon, they did not understand the meaning of the mathematical model. The results obtained point to the need of searching a way in which the teaching becomes effective for the students to grasp the interrelationship between the different subjects from distinct disciplines, in order to achieve the aims of the technical high school syllabus.

■ INTRODUCCIÓN

En el marco de un proyecto interinstitucional sobre docencia e investigación en matemática educativa, se indaga acerca de la comprensión de conceptos de matemáticas de los estudiantes, revelada cuando los aplican para describir fenómenos físicos que se estudian como tal, de forma tradicional, en el laboratorio de Física. Informamos aquí de la comprensión de los estudiantes de tercer semestre de bachillerato tecnológico del fenómeno de un cuerpo suspendido en equilibrio mediante dos fuerzas de tensión y de su descripción matemática mediante un sistema de ecuaciones lineales, luego de la enseñanza del tema en el curso de Física I (DEMS, 2009).

■ MARCO DE REFERENCIA

El tema de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas se incluye en el programa de estudios del bachillerato tecnológico en la unidad de aprendizaje de *Álgebra* para el primer semestre (DEMS, 2009). Le siguen las unidades *Geometría y Trigonometría* para el segundo semestre y *Geometría Analítica* para el tercero. Esta secuencia lleva a suponer que el estudiante del tercer semestre ha alcanzado un cierto dominio de las expresiones simbólicas matemáticas. También para el tercer semestre se prescribe en el curso de Física I la impartición del tema de tensiones, antecedida por la del tema de descomposición de fuerzas en sus componentes rectangulares; la enseñanza teórica se complementa con la experimental respectiva en el laboratorio mediante el experimento “mesa de fuerzas”. Con los antecedentes en Álgebra, se espera que en Física I el estudiante utilice el sistema de ecuaciones lineales para el cálculo de las tensiones de las fuerzas que soportan al peso suspendido en equilibrio estático. La resolución del sistema de ecuaciones lineales permite obtener el valor de cada tensión aplicada a las cuerdas que mantienen al cuerpo suspendido en equilibrio. No obstante, ya Barojas, Covarrubias, Gallegos, López y Vega han señalado que los estudiantes utilizan una representación *escolarizada* de los conceptos científicos “para dar respuesta a las demandas escolares y que sólo forman parte de su memoria y que manifiestan sólo en procesos declarativos y operacionales” (1997, p. 217).

El orden mismo de las asignaturas transgrede el de la evolución del conocimiento, señalada por Born (1956) con su origen en la experiencia con problemas o preguntas referidas a situaciones concretas, para culminar con su formulación matemática abstracta, no al revés. En la misma línea, en su propuesta psicogenética de la evolución del pensamiento del individuo, Piaget e Inhelder (1985) han señalado que los esquemas formales se construyen progresivamente a partir de los anteriores, en el mismo orden y sin que pueda omitirse alguno de ellos, y subrayaron la importancia de la acción del individuo en situaciones concretas del entorno para dar lugar a la abstracción. No obstante, misma la enseñanza tradicional de la Física incluye primero la descripción matemática del fenómeno y luego su confirmación experimental (DEMS, 2009).

■ MÉTODOS E INSTRUMENTOS

La Tabla 1 muestra la correspondencia de los contenidos, de interés aquí, de la asignatura de Matemáticas (M) con el tema de Física (LF) y sus semestres respectivos en números romanos. Si bien en el segundo semestre también se incluye el tema de funciones trigonométricas en la unidad de aprendizaje de *Geometría y Trigonometría*, su estudio es anterior al tema de tensiones en Física, por lo que se puede suponer un dominio de estos temas por parte de los estudiantes.

Tabla 1. Articulación de contenidos

Matemáticas (M)	Competencia Contenido	Particular:	Semestre		Laboratorio de Física (LF) Practicario
			M	LF	
Álgebra	CP2: Sistema de ecuaciones lineales	de ecuaciones	I	III	Física I (4): 4-Fuerzas concurrentes Física I (5):5-Resultante de Varias Fuerzas concurrentes
Geometría y Trigonometría	CP3: Emplea funciones trigonométricas para la resolución de triángulos	funciones para la resolución de triángulos	II	III	Física I (6): 6-Fuerzas concurrentes Tensiones

Durante los primeros 30 minutos previos al comienzo de la enseñanza de tensiones, a un grupo de 24 alumnos se le aplicó el cuestionario C_1 , con el fin de obtener datos de sus conocimientos previos del tema por enseñar. C_1 planteó cinco preguntas: cuatro con preguntas abiertas y un problema de resolución de sistema de ecuaciones lineales. La estrategia de enseñanza fue la prescrita por el programa de estudios respectivo (DEMS, 2009); se basó en el libro de texto recomendado (Pérez, 2011) y consistió en tres sesiones de aula de una hora cada una y otra de laboratorio de dos horas, videograbada, con guión (Práctica propuesta) y hoja de control para el registro de los cálculos de las magnitudes de las tensiones, así como de las conclusiones de la experimentación. Luego se aplicó el cuestionario C_2 , impreso, que planteó seis reactivos, de los cuales uno fue de resolución de un sistema de ecuaciones y cinco fueron preguntas abiertas; la contestación duró 50 minutos. El objetivo de C_2 fue obtener datos de la comprensión de los estudiantes del fenómeno de tensiones y de su descripción matemática al término de la enseñanza del tema.

Para el cuestionario C_1 , los reactivos (en segundo renglón de la Tabla 2) fueron:

1. *¿Qué entiendes por equilibrio?* ,
2. *¿Cuándo está un cuerpo en equilibrio?*,
3. *¿Cuáles son las condiciones de equilibrio?*,
4. *Explica qué es una fuerza de tensión,*
5. *Resolución del sistema de ecuaciones lineales.*

Para el cuestionario C_2 , los reactivos (en primera columna de la Tabla 2) fueron:

1. *¿Qué condiciones requiere el sistema mostrado en la figura para estar en equilibrio?*,
2. *¿Cómo determinas el valor de las tensiones?*,
3. *Si los ángulos de la figura mostrada fueran iguales ¿Cómo serían las tensiones? Explica por qué,*
4. *Plantea el modelo matemático que describe la situación de equilibrio del sistema en la figura,*
5. *Resuelve el modelo planteado en tu respuesta anterior,*
6. *Traza el diagrama de cuerpo libre correspondiente al siguiente sistema.*

Durante el desarrollo de las sesiones del estudio de tensiones se reforzaron los conceptos de descomposición de vectores en sus componentes rectangulares y obtención de la resultante a partir de dos vectores ortogonales. A través de la resolución de un problema de tensiones, se planteó la necesidad de replantear un sistema de ecuaciones lineales, para la obtención de la tensión en cada cuerda.

Para desarrollar la práctica el grupo se organizó en equipos de seis estudiantes; uno de ellos colocó el transportador metálico en la intersección de las cuerdas y el peso suspendido, después hizo la lectura de los ángulos; otro revisó que las cuerdas estuvieran en las poleas; otro leyó el valor del peso del cuerpo suspendido; los demás estudiantes registraban los datos en sus hojas de control. Con esos datos efectuaron el planteamiento del sistema de ecuaciones lineales para su resolución. En la realización de las operaciones se utilizó calculadora (véanse las Figuras 1 y 2).

Luego, en sesión de aula se aplicó el cuestionario C₂, impreso, que planteó seis reactivos, de los cuales uno fue de resolución de un sistema de ecuaciones, cuatro fueron preguntas abiertas y otro para la realización de un diagrama a partir de un sistema lineal de dos ecuaciones (véase cuadro dos, renglón siete); la contestación duró 50 minutos. El objetivo de C₂ fue obtener datos de la comprensión de los estudiantes del fenómeno de tensiones y de su descripción matemática al término de la enseñanza del tema.

Figura 1. Resolución del sistema planteado

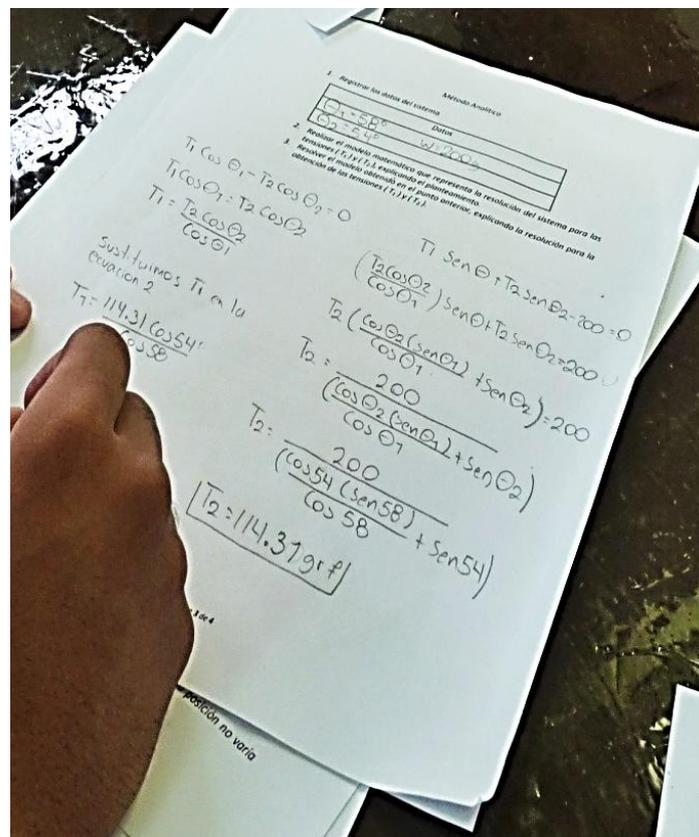


Figura 2. Resultados de mediciones y conclusiones en la hoja de control

Tabla de resultados

Valores de las tensiones

<u>Método</u>	<u>Resultados</u>	
Analítico	$T_1 = 198.06N$	$T_2 = 206.36N$
Gráfico	$T_1 = 120N$	$T_2 = 205.N$
Práctico	$T_1 = 118.8N$	$T_2 = 209.1N$

❖ Cuestionario.

¿Los resultados obtenidos son correctos?

No son aproximados pero estamos dentro del margen de error de que me falló escribir los grados en cada una de las tensiones.

Dependiendo del método, ¿Existe diferencia entre valores? En caso de ser afirmativo, qué se debe?

Sí, depende de cada método utilizado ya que en el método analítico existe menos margen de error para la exactitud de cada uno de los pesos de los objetos a medir.

En el método gráfico existe un poco más de margen de error según por los grados utilizados y de nuestra escala utilizada.

■ La Tabla 2 resume los reactivos de cada cuestionario, su correspondencia por contenido común y las frecuencias de respuestas correctas proporcionadas a cada reactivo, para C_1 en el primer renglón y para C_2 en la celda que corresponde al contenido común con el reactivo en C_1 .

Tabla 2. Frecuencias de respuestas correctas a los reactivos de C_1 y de C_2 .

Reactivos						
C ₁ \ C ₂	1	2	3	4	5	%C ₂
1	19	19	10	14	2	92%
2		22				83%
3			20		22	92%
4			14			58%
5					12	50%
6				10		42%
%C ₁	79%	79%	42%	58%	8%	

Antes de la enseñanza, en C_1 , los alumnos expresaron una noción general de las condiciones de equilibrio y desconocimiento de la resolución de un sistema de ecuaciones lineales (véase primer renglón de la Tabla 2).

Después de la enseñanza, los resultados de C_2 indican que los estudiantes comprendieron las condiciones de equilibrio (véanse segundo y tercer renglones, Tabla 2) y supusieron tensiones iguales para ángulos iguales a partir del diagrama de cuerpo libre (véase cuarto renglón, Tabla 2), pero tuvieron dificultad al plantear el sistema de ecuaciones que lo modela, así como para solucionarlo (véanse quinto y sexto renglones, Tabla 2). Los datos obtenidos en el laboratorio muestran la comprensión de valores experimentales y su planteamiento en un sistema de ecuaciones; los resultados de C_1 (véase la Figura 3) y C_2 (véase sexto renglón, Tabla 2) muestran la inhabilidad en la solución del modelo matemático.

Figura 3. Respuestas comunes al cuestionario C1.

✓ 1. ¿Qué entiendes por equilibrio?
Es cuando un cuerpo está sujeto por tensiones proporcionales que impiden que se vaya de lado

✗ 2. ¿Cuándo está en equilibrio un cuerpo?
Cuando no es disparada la tensión con que es soportada si no que sea proporcional

✓ 3. ¿Cuáles son las condiciones de equilibrio?
Si el cuerpo está equilibrado la suma de fuerzas será igual a cero ($\sum F = 0$)

✓ 4. Explica qué es una fuerza de tensión.
Lo que jala el cuerpo para que no se caiga y esté en equilibrio

✗ 5. Resuelve el siguiente sistema:
 $T_1 \cdot 0.6428 - T_2 \cdot 0.7660 = 0$
 $T_1 \cdot 0.7660 - T_2 \cdot 0.6428 - 490 = 0$

$T_1 \cdot (-0.6428) = T_2 \cdot 0.7660$
 $490.32 \cdot (-0.6428) = T_2 \cdot 0.7660$
 $T_2 = 537.50 \text{ N}$

$T_1 \cdot 0.6428 = T_2 \cdot 0.7660$
 $T_1 \cdot 0.7660 = T_2 \cdot 0.6428 + 490$
 $T_1 = \frac{(T_2 \cdot 0.6428 + 490)}{0.7660}$
 $T_1 = 640.32 \text{ N}$

Después de la enseñanza, los resultados de C_2 indican que los estudiantes comprendieron el fenómeno de tensiones (véase cuarto renglón, Tabla 2), pero no como la suma de fuerzas en los ejes x e y , para cuya resolución se requiere plantear un sistema de ecuaciones lineales (véase quinto renglón, Tabla 2).

Contribuyó a este resultado la centración en la operatividad (véase la Figura 4).

Figura 4. Cuestionario C2: planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales

4. Plantea el modelo matemático que describe la situación de equilibrio del sistema en la figura.

$$-t_2 \cos 20 + t_1 \sin 30^\circ$$

$$t_2 \sin 20 + t_1 \cos 30^\circ + 30N$$

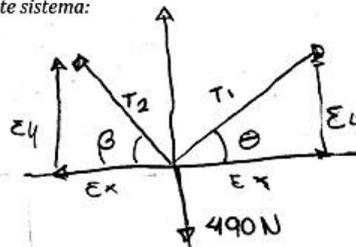
Otra causa del bajo desempeño en la descripción matemática del fenómeno fue la desatención al sistema de referencia para la asignación de signos (véase la Figura 5).

Figura 5. Cuestionario C2: Obtención del diagrama a partir de las ecuaciones

6. Traza el diagrama de cuerpo libre correspondiente al siguiente sistema:

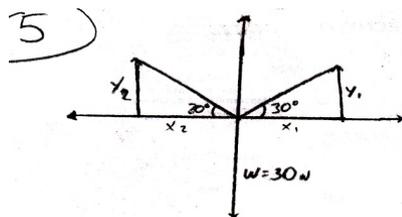
$$T_1 \cos \theta - T_2 \cos \beta = 0$$

$$T_1 \sin \theta - T_2 \sin \beta - 490 = 0$$



Fue también frecuente la omisión de pasos en la secuencia para la resolución del sistema de ecuaciones lineales, los errores en la realización del despeje de una incógnita, así como la omisión de unidades (véase la Figura 6).

Figura 6. Planteamiento y resolución de un sistema de ecuaciones lineales



$$\sum F = 0$$

$$\sum F_{x1} + \sum F_{x2} = 0$$

$$\text{Sen } \theta = \frac{C.O}{H.P} \quad \text{Sen } \theta = \frac{C.O}{H.P}$$

$$\text{Hip } \text{sen } \theta = C.O \quad \text{Hip } \text{sen } \theta = C.O$$

$$T_1 \text{ sen } 30^\circ = y_1 \quad T_2 \text{ sen } 20^\circ = y_2$$

$$T_1 = (.68)$$

$$T_1 \text{ sen } 30^\circ + T_2 \text{ sen } 20^\circ - W = 0$$

$$T_1 (0.5) + T_2 (0.34) - 30 = 0$$

$$T_1 (0.5) - 30 = -T_2 (0.34)$$

$$T_1 - 30 = \frac{T_2 (0.34)}{(0.5)}$$

$$T_1 = \frac{T_2 (0.34)}{0.5} + 30$$

$$T_1 = T_2 (.68) + 30$$

$$T_2 (.68) + 30 + T_2 (0.34) - 30 = 0$$

$$T_2 (.68) + T_2 (.34) = 0$$

$$T_2 (.68) = T_2 (.34)$$

$$T_2 = \frac{T_2 (.34)}{(.68)}$$

$$T_2 = T_2 (0.5)$$

Las hojas de control de la práctica (para un ejemplo véase la Figura 7) evidencian la primacía de la operatividad, pero sin la dotación aparente de sentido a los signos implicados, ya que mismo en la tabla de resultados de la hoja de control o bien se omitieron las unidades correspondientes, o bien se les cambió. Además, en las conclusiones se anotó que el error fue mínimo por algunos gramos, cuando en la tabla de resultados ningún registro de las tensiones estuvo en gramos.

Figura 7. Resultados y conclusiones de la práctica

Tabla de resultados

Valores de las tensiones

<i>Método</i>	<i>Resultados</i>	
<i>Analítico</i>	$T_1 = 97.036 \text{ N}$	$T_2 = 71.549 \text{ N}$
<i>Gráfico</i>	$T_1 = 97 \text{ cm}$	$T_2 = 7.7 \text{ cm}$
<i>Práctico</i>	$T_1 = 99.5$	$T_2 = 69.5$

❖ *Cuestionario.*

¿Los resultados obtenidos son correctos?

Se puede decir que NO, porque me equivoqué al medir los ángulos.

Dependiendo del método, ¿Existe diferencia entre valores? En caso de ser afirmativo, ¿a qué se debe?

Si, a que uno fue con escala y no siempre es preciso, otro fue pesando los objetos.

se debe a que me quedo pasado por gramos 2º 3g.

Por los resultados de los cuestionarios C_1 y C_2 considerados respecto a la correspondencia de conceptos mostrada en la Tabla 2, los estudiantes comprendieron el concepto de equilibrio y las condiciones para que un cuerpo esté en equilibrio, pero no así el concepto de tensión ni el planteamiento del modelo matemático de un sistema de ecuaciones lineales y su resolución (reactivos 1 y 2 de C_1 y reactivos 1 y 3 de C_2).

■ CONCLUSIONES

La memorización escolarizada de formas de representación en el ámbito matemático y el énfasis en la operatividad (véase la Figura 6), son algunas de las principales causas de una interpretación inconveniente para el análisis del fenómeno físico en estudio. La insuficiencia en la adquisición de los conocimientos previos requeridos para el estudio de temas nuevos, tales como las reglas de transposición, los sistemas de medidas y la sintaxis algebraica, obstaculizaron la identificación de las ecuaciones lineales como descriptores de sumas de fuerzas proyectadas en los ejes.

El tema de equilibrio, un caso particular tensiones, como cualquier nuevo tema a estudiar en el Programa de Estudios de Física I, es en un inicio difícil para el alumno. Sin embargo, las ecuaciones que modelan este movimiento y su resolución son otras causas del bajo desempeño de nuestros educandos. Por otra parte, surge la interrogante de la conveniencia de que la experimentación efectiva en el laboratorio de Física anteceda al estudio en el aula de la descripción matemática de las tensiones.

Los resultados obtenidos apuntan a la necesidad de investigar acerca de la forma en que la enseñanza pueda hacer efectiva para el estudiante la interrelación entre las distintas Unidades de Aprendizaje de las diferentes disciplinas, con miras al logro de los objetivos de los Programas de Estudios del bachillerato tecnológico.

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barojas, H., Covarrubias, F., Gallegos, L., López, A., Vega, E. (1997). Transformación de concepciones epistemológicas y de aprendizaje en procesos de física en el nivel medio superior. *Memorias del IV Congreso Nacional de Investigación Educativa* (Waldegg, G., ed.) pp. 216-229. México: COMIE.

Born, M. (1956). *Experiment and Theory in Physics*. USA: Dover.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Álgebra*. México, D. F.: IPN

Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2009). *Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Física I*. México, D. F.: IPN

Pérez, H. (2011). *Física General*. México: Patria.

Piaget, J., Inhelder, B. (1985). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. 6ª. ed. España: Paidós Ibérica.