

## INTEGRACIÓN DE LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICA Y PROGRAMACIÓN PARA RESIGNIFICAR CONCEPTOS Y REMODELAR SITUACIONES

**Malva Alberto, Fernanda Golobisky, Marta Castellaro, Daniel Ambort**

Facultad Regional Santa Fe, Universidad Tecnológica Nacional (Argentina)  
mtoso@frsf.utn.edu.ar, mfgolo@santafe-conicet.gov.ar, mcastell@frsf.utn.edu.ar  
dambort@gmail.com

**Palabras clave:** Aprendizaje con tecnologías, Estrategias de Enseñanza Integradas.

**Key words:** Learning with technology, Integrated Teaching Strategies.

**RESUMEN:** En este trabajo se describen la metodología utilizada, las actividades más significativas llevadas a cabo desde las cátedras universitarias y los aportes concretos realizados para integrar la enseñanza de temas de matemática con la enseñanza de programación. Los objetos de estudio del cálculo, del álgebra, de la matemática discreta y de la programación requieren abstracción, comprensión, comprobación, validación y resolución de problemas para ser comprendidos y transferidos a nuevas situaciones. Los tiempos de clases son insuficientes para abordar casos completos y significativos. Las actividades de aprendizaje demandan además competencias grupales y computacionales. Por ello, las acciones implementadas en matemática y programación han permitido resignificar conceptos y remodelar situaciones, favoreciendo tempranamente el anclaje de competencias profesionalizantes.

**ABSTRACT:** This paper describes the methodology used; the most significant activities carried out on university-level subjects and specific contributions made to integrating the teaching of math and programming topics. The objects of study of calculus, algebra, discrete mathematics and programming require abstraction, comprehension, testing, validation and troubleshooting in order to be understood and transferred to new situations. Class schedules are inadequate to address comprehensive and significant case studies. Learning activities also demand group and computer skills. Therefore, the actions implemented in mathematics and programming have enabled resignify concepts and remodel situations, favoring early anchoring of professionalizing skills.

## ■ INTRODUCCIÓN

Se pretende que los futuros profesionales comiencen tempranamente a trabajar sobre estas competencias y las renueven constantemente como personas flexibles, capaces de continuar formándose, de actuar en distintos ambientes y de adaptar y aplicar lo aprendido en el aula universitaria en distintos contextos profesionales. Esto exige a los profesores de tecnologías (programación, computación) y de ciencias básicas (matemática), redoblar esfuerzos para poder intervenir e incidir adecuadamente en la educación de estas nuevas juventudes y a diseñar espacios (físicos, en línea) y ambientes (de estudio, de trabajo, de colaboración) donde realmente estas competencias académicas y sociales pueden ejercitarse, desarrollarse y anclarse. La resolución de problemas compartidos en matemática y programación da la posibilidad de brindar un escenario cierto para resignificar conceptos y remodelar buenas situaciones de aprendizaje.

Este trabajo sintetiza experiencias desarrolladas por el equipo de investigación y describe una manera de intervenir en la docencia universitaria, en los cursos de matemática y programación, para que una enseñanza integrada mejore la calidad educativa que se imparte y se recibe. Se hace inicialmente un recorrido de la investigación teórica compartida por el grupo docente que llevó a cabo la lectura bibliográfica y el registro de las observaciones. El camino se completa con el recorrido de las actividades más significativas y los conocimientos ya existentes, mencionando los aportes concretos realizados en distintos momentos y que fueron parte del proyecto. Se integraron contenidos entre distintas cátedras de Matemática, tales como Cálculo y muy especialmente Matemática Discreta, con la cátedra de Algoritmos y Estructuras de Datos (Programación). Todas estas cátedras se dictan en forma paralela durante el primer período lectivo y de inicio, en la carrera Ingeniería en Sistemas de Información de la Facultad Regional Santa Fe de la Universidad Tecnológica Nacional, en Argentina.

## ■ SEGUIMIENTO DE DISTINTAS LÍNEAS METODOLÓGICAS

El trabajo gira en torno de las siguientes líneas metodológicas: por un lado se considera la acción de los profesores de distintas cátedras y el consenso de una metodología de trabajo, al contar con un equipo que lleva a la praxis educativa una enseñanza abierta, con capacidad de reflexión, de diálogo y dispuesto a recibir comentarios y opiniones de otros, con capacidad de cambio y renovación. El marco metodológico elegido, es el de la investigación-acción (Elliott, 2000; Latorre, 2004), ya que ésta implica una acción inmediata y correctiva con el propósito de mejorar la práctica educativa hacia el interior y exterior del aula de clases y atender al perfeccionamiento de quienes están verdaderamente comprometidos con este accionar.

Esta acción metodológica centra la mirada en actividades concretas de reflexión y acción del equipo docente y como síntesis, pone énfasis en la secuencia didáctica y la figura del que aprende.

Respecto de la secuencia didáctica, se conforma una espiral de actividades que comprende como mínimo la observación y el diagnóstico de una situación problemática en la práctica; la formulación de estrategias para resolver el problema; la implementación y evaluación de las acciones y la discusión, aclaración y diagnóstico posteriores de nuevas o más complejas situaciones problemáticas. Trabajar bajo el marco de esta metodología permitió al equipo docente profundizar la comprensión, en el sentido del diagnóstico y discusión del problema y adoptar una postura exploratoria frente a la problemática planteada para encontrar soluciones factibles.

Respecto de la figura del que aprende, se atiende a sus cargas motivacionales, el desarrollo de sus habilidades metacognitivas, el inicio del aprendizaje de habilidades y capacidades para el mejoramiento de los desempeños como futuro profesional de la ingeniería y la ayuda educativa que puede requerir (Serrano y Pons, 2011). El objetivo planteado fue facilitar los escenarios para hacer posible el desarrollo sus competencias académicas (de comprensión, resolución, validación), de investigación (en el sentido de indagación, de búsqueda y averiguación) y sociales (comunicación, respeto por las opiniones diversas, responsabilidad, trabajo en equipo), durante el tránsito por el primer año universitario, a partir de resolución de problemas compartidos en matemática y programación que permitan resignificar conceptos y remodelar buenas situaciones de aprendizaje. Se enumeraron además valores implícitos subyacentes y en continua revisión, para los miembros de la comunidad de aprendizaje. Adherimos a que los alumnos deben tener libertad para:

1. Plantear problemas a investigar que atiendan a la resolución de situaciones.
2. Expresar ideas y desarrollar soluciones.
3. Comprobar sus soluciones frente a pruebas pertinentes y suficientes, es decir, realizar procesos de comprobación y validación.
4. Discutir con los demás sus ideas, asumiendo actitudes colaborativas.

Por su lado, los profesores, respetan estos principios iniciales:

- Procurar no obstruir la acción de los alumnos.
- Intervenir para ayudar a los alumnos a actuar en relación con los puntos anteriores.

Otra línea metodológica considera la necesidad de formación de ingenieros para el desarrollo del país (Morano, 2012) y que, en nuestro caso concreto, opera sobre la necesidad de revisión del currículum de las carreras de ingeniería, comenzando con medidas concretas para la articulación, continuando con la amplitud y selección de los contenidos de ciencias y tecnologías básicas para lograr un equilibrio entre las demandas del campo disciplinar, la construcción de guías de estudio adecuadas, el ofrecimiento de actividades compartidas entre las cátedras, el uso de recursos tecnológicos o aplicaciones para la resolución de problemas y validación de cálculos, el tiempo destinado a los trabajos extracurriculares y la atención a los procesos de evaluación y difusión de las actividades realizadas por docentes y alumnos.

## ■ DISEÑO DE ACTIVIDADES Y PROBLEMAS DE INGENIERÍA COMPARTIDOS EN MATEMÁTICA Y PROGRAMACIÓN

El equipo de investigación está integrado por docentes de las áreas de ciencias (matemática) y tecnologías básicas (programación). La enseñanza de la programación utiliza entre otras estrategias, la resolución de problemas a través del uso de computadoras y la metodología modular descendente. Este proceso se descompone en varias etapas: interpretación del enunciado del problema, modelado de una solución, selección de las estructuras de datos más adecuadas a la situación planteada, indagación de la librería de funciones disponibles, escritura del algoritmo, implementación en un lenguaje de programación de alto nivel y la optimización del uso de los recursos disponibles para el desarrollo de un programa (González y Madoz, 2013). La actividad práctica es fundamental para comprender y adquirir las capacidades deseadas. La intervención

docente, el empleo de técnicas y herramientas adecuadas, el uso de distintas metodologías y de nuevos recursos tecnológicos pueden constituirse en el andamiaje educativo que requiere el estudiante. El aprendizaje basado en problemas es un proceso de indagación que permite resolver preguntas, dudas o incertidumbres, que permite la fragmentación de un problema complejo en otros de menor complejidad y que generalmente se desarrolla en grupos de trabajo pequeños que operan en forma colaborativa (Morales y Fitzgerald, 2004).

Entre las actividades desarrolladas, se cuentan:

- Desarrollo de trabajos prácticos de resolución de problemas de ingeniería, diseñando herramientas de apoyo a la matemática: UTNapprox. La herramienta aproxima cálculos con fracciones, funciones, sumas finitas, integrales, series.
- Propuesta de tareas de desafío extracurriculares, tal es el caso de la participación de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos presentados en sitios en línea (Project Euler, por ejemplo) que requieren para su solución del diseño de algoritmos que incluyen funciones recursivas, números primos, ecuaciones diofánticas, tratamientos de tipos de datos abstractos sobre rectas, conjuntos. Las actividades 1. y 2. son desarrolladas en la siguiente sección.
- Inclusión en los casos de estudio de programación, de problemas matemáticos susceptibles de tratamiento computacional: fracciones, números reales, complejos, puntos, rectas, etc. Por ejemplo, una recta desde el punto de vista de la geometría analítica puede describirse como un conjunto infinito de puntos del plano que verifica una determinada condición que se traduce algebraicamente en una ecuación de primer grado con dos variables y se enseñan conceptos asociados como paralelismo, intersecciones, distancias. Pero el tratamiento computacional requiere primero de una remodelización de la recta que debe ser representada a través de un conjunto finito de parámetros. Por ejemplo, dos puntos del plano como cuatro números reales; pendiente y ordenada al origen como dos números reales; coeficientes de la ecuación implícita de la recta como tres números reales. Una vez definido el modelo de representación de la recta que se usará, los equipos estudiantiles, deben programar las funcionalidades de acuerdo a esa representación.
- Participación en una competencia, TECNOMATE, como parte de un proceso de desafío conjunto y con ambiente restringido, donde los problemas seleccionados se buscan recuperando y resignificando la matemática (Ambort, 2015). Está ideada para que puedan participar alumnos de los distintos niveles de la carrera, así como alumnos de escuelas medias (posibles aspirantes) en una jornada común, con momentos y algunas pautas comunes, buscando los objetivos antes planteados, pero permitiendo que cada alumno pueda hacerlo desde su nivel. La experiencia es opcional y en el caso de las escuelas secundarias se trabaja con los directivos y docentes para que faciliten la participación de los estudiantes, en las etapas de preparación y en la jornada. La preparación de los alumnos se realiza con el cursado de un gabinete extracurricular generado para apoyar este tipo de actividades durante el año, y con tutorías ofrecidas. En el caso de la escuela media, para los alumnos que cursan orientaciones de informática, se los invita a participar de las reuniones semanales del gabinete. Los alumnos de la escuela secundaria pueden optar por sumarse a grupos de alumnos del primer año de la

Facultad, y trabajar en lenguajes como C o C++, o bien participar de la categoría de juegos, trabajando con una herramienta denominada "Alice". La competencia dura 4 horas, durante las cuales los equipos (de 3 integrantes) tienen que resolver un conjunto de problemas. Para los alumnos de la UTN (en cualquier nivel), los mismos deben codificarse en lenguaje C ó C++, y ser subidos a un sitio juez (Spoj), para su evaluación.

### ■ EXPERIENCIAS INTEGRADORAS Y FAVORECEDERAS DE COMPETENCIAS

En carreras de ingeniería es frecuente que la resolución de problemas implique cálculos numéricos complejos. Para ello, los alumnos cuentan con una herramienta muy conocida: la calculadora científica, que brinda resultados exactos cuando éstos existen, o bien, aproximaciones con muchas cifras decimales. En este caso, las calculadoras utilizan un método predefinido y una precisión predeterminada. Sin embargo, existen múltiples formas para obtener tales aproximaciones. Los alumnos no siempre son conscientes de esto y en general no reflexionan sobre la forma en que se obtiene la respuesta. Integrando las áreas de matemática y programación, se gestó la aproximadora "UTNapprox", con el objetivo de hacer visible esta observación.

En la cátedra de Algoritmos y Estructuras de Datos (AED), se solicitó a los alumnos la construcción de una herramienta, denominada UTNapprox, que permita aproximar números irracionales y algunas funciones trigonométricas y del cálculo en general.

La aplicación UTNapprox posibilita al usuario seleccionar y parametrizar el método con el que se entrega el resultado, calculándolo mediante diferentes algoritmos y con una precisión determinada desde diferentes opciones. Como complemento adicional se solicitó a los alumnos una indagación histórica sobre los métodos de aproximación que fueron descubiertos hace varios siglos atrás, por distintos matemáticos. Así por ejemplo, si el usuario (alumno de primer año) deseaba una aproximación del número Pi, se le propuso recoger varios métodos para obtenerla y aparecieron aproximaciones dadas por la Fórmula de Leibniz (1670), o bien el Producto de Wallis (1655), o la Fórmula de Euler (1725), o la Fórmula de Basilea (que fue resuelta por Euler en 1735), entre otros. Esta actividad permitió contextualizar la historia de la matemática. Luego de seleccionar uno de los métodos, el usuario desarrollador debe indicar si quiere obtener el resultado mediante el cálculo de un número fijo de términos o cortar por precisión (en caso de que algún término sea menor que un cierto error), así como también, si quiere ver la aproximación término a término, o sólo visualizar el resultado final. Las aproximaciones disponibles son para números: e, pi; para algunas funciones trigonométricas: seno, coseno; para funciones trigonométricas inversas de seno y coseno; para el cuadrado del seno; para funciones exponenciales y logarítmicas de base e. Estas funciones permitieron la integración con temas de Análisis Matemático I (AMI). Obtenida la aproximación, la aplicación UTNapprox, le sugiere al usuario utilizar una aproximación asociada, la que es obtenida a partir del siguiente digrafo de relaciones, usando conceptos desarrollados en Matemática Discreta (MAD):



La aplicación se realizó mediante un diagrama modular; se accede a la información de los usuarios operando a manera de red social, permitiendo definir amigos, eliminarlos y compartir datos entre ellos. Estos datos se almacenan en un archivo binario. Es posible obtener un listado con las 3 últimas aproximaciones que el usuario utilizó (tomado de un archivo binario de los historiales), además de un listado con las últimas aproximaciones que utilizaron los amigos directos del usuario y los amigos directos de ellos (lista enlazada con la información de las aproximaciones más usadas por los amigos y primeros amigos indirectos del usuario).

AED usó fuertemente las fórmulas matemáticas indagadas. La consigna del trabajo se dividió en dos etapas. Durante la primera fase se solicitó la versión inicial de UTNapprox 1.0 con la implementación del registro de usuario, inicio de sesión, las aproximaciones, un juego y la lista completa de menús, con su correspondiente navegabilidad, donde los datos solicitados se pierden al cerrar el programa y con la mitad de las funcionalidades implementadas. Todo ello desarrollado haciendo uso de las estructuras estáticas y técnicas de programación aprendidas en la cátedra. Para la versión final de UTNapprox 2.0 se solicitó implementar las funcionalidades restantes haciendo uso de estructuras de datos dinámicas y más eficientes con la información organizada en listas enlazadas y una completa implementación de las funcionalidades.

Para atender a la propuesta extracurricular de resolución de problemas de ingeniería intercátedras, se diseñó una actividad didáctica armada utilizando problemas identificados y seleccionados utilizando el sitio Project Euler que proporciona problemas de matemática y de programación y que deja trazabilidad del trabajo de los alumnos en distintas instancias. Se trata de problemas elementales que pueden resolverse con conceptos básicos de matemática, utilizando: (a) lápiz y papel, pero esto podría demandar mucho tiempo; (b) luego, si se piensan de una manera más abstracta se puede encontrar un algoritmo sencillo para resolverlos, con una herramienta simple como Python; y (c) finalmente, pueden hacerse más eficientes si se emplean otros recursos como la recursión o estructuras de datos dinámicas.

Como ejemplo, se indican algunos de los problemas seleccionados, identificados como Problema 1, Problema 2, Problema 3 (Figura 2), correspondientes a la unidad de aprendizaje “Teoría de Números e Inducción” que se desarrolla en MAD y que es la más adecuada para la comprensión de los números primos, propiedades, algoritmo de la división, algoritmo de Euclides, ecuaciones diofánticas, descomposición factorial de un entero positivo, inducción y ternas pitagóricas.

**Figura 2.** Problemas de la propuesta pedagógica intercátedras

**Problema 1: El mayor factor primo**  
Los factores primos de 13195 son 5, 7, 13 y 29. Cuál es el mayor factor primo del número 600851475143?

**Problema 2: Diferencia de la suma de cuadrados**  
La suma de los cuadrados de los primeros diez números naturales es:  
$$1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = 385$$
  
El cuadrado de la suma de los primeros diez números naturales es:  
$$(1 + 2 + \dots + 10)^2 = 55^2 = 3025$$
  
Por lo tanto, la diferencia entre la suma de los cuadrados de los primeros diez números naturales y el cuadrado de la suma es  $3025 - 385 = 2640$ .  
Encontrar la diferencia entre la suma de los cuadrados de los primeros cien números naturales y el cuadrado de la suma.

**Problema 3: La tripleta Pitagoreana**  
Una tripleta Pitagoreana es un conjunto de tres números naturales,  $a < b < c$ , para la cual:  
$$a^2 + b^2 = c^2$$
  
Por ejemplo,  $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$ .  
Existe una única tripleta Pitagoreana para la cual  $a + b + c = 1000$ . Encuentre el producto  $a*b*c$ .

La propuesta generada se trató en distintas asignaturas: En MAD, se presentó la herramienta tecnológica (el sitio juez) viendo la forma de acceder a los problemas, acompañando a los alumnos a trabajar con herramientas adecuadas que son propias (Software MATDIS 2.0), haciendo hincapié en que los problemas matemáticos por más simples que parezcan requieren ser pensados y resueltos adecuadamente en tiempo, cantidad y forma. Una vez lograda la forma de resolverlo, se resaltó el hecho de que se requiere un trabajo manual muy intenso y que un algoritmo que sea procesado por una computadora podría ser de gran ayuda. En paralelo, en AED, se trabajó pensando los algoritmos y escribiéndolos con las herramientas que disponían (estructuras de control básicas: secuencia, selección, repetición), utilizando el lenguaje Python, versión 3.3.2.

Los algoritmos encontrados involucraron diferentes niveles de complejidad, de acuerdo a la naturaleza del problema a resolver. Se trabajó de nuevo con el sitio juez SPOG, pero viendo las soluciones con programas concretos y observando los tiempos empleados. Finalmente, en AED, cuando se avanzó con el estudio de nuevos conceptos de programación, se empleó nuevamente el sitio juez, pero esta vez para evaluar soluciones nuevas y más eficientes, utilizando otros recursos de flujo y de datos.

Los enunciados de los problemas fueron seleccionados por los docentes de las cátedras intervinientes, y publicados en SPOJ, a fin de que los alumnos vayan subiendo sus soluciones y éstas fueran evaluadas por el mismo sitio. Con las aceptadas, se generó un ranking. Las soluciones enviadas pudieron estar escritas en diferentes lenguajes de programación (Python, C, C++, entre otros). Esto resultó de particular importancia para los alumnos, ya que permitió que todos puedan aportar sus soluciones sin limitar su participación con respecto a los conocimientos de programación que poseían. Asimismo, el hecho de contar con un ranking los movilizó a tratar de encontrar la mejor solución en base a los criterios que se evaluaron: corrección en la escritura, tiempos de respuesta y utilización de la memoria.

## ■ CONCLUSIONES

Como síntesis de la evaluación realizada, destacamos:

La importancia de la investigación - acción reside en que no intenta explicar de forma teórica la práctica social y educativa, sino, aportar recursos metodológicos que ayuden a la realización de la práctica docente.

El accionar que los profesores de las diferentes materias intervinientes en esta línea de trabajo vienen desarrollando, demuestra que el equipo se encuentra totalmente involucrado en todo el proceso, que se inicia en la articulación con la escuela secundaria, en un espacio escolar incipiente como es la informática y continúa dentro de la universidad con el desarrollo de propuestas didácticas que dejan huellas enriquecedoras donde se integran una buena selección de contenidos y actividades para el afianzamiento de las habilidades y destrezas más requeridas dentro en áreas de ciencias y tecnologías básicas.

El uso de las diferentes tecnologías empleadas durante el aprendizaje constituyó un medio para despertar el interés, la motivación, y la participación activa de los estudiantes en la solución de los problemas que se les presentaron.

Las aplicaciones y competencias propuestas los predispuso a querer superarse, mejorar sus soluciones, perfeccionarse para destacarse con los demás y de esta manera que se favorezcan mejores desempeños para la futura práctica profesional.

El desarrollo de herramientas tecnológicas propias permitió atender la problemática del conocimiento de los contenidos matemáticos curriculares (para los usuarios), al mismo tiempo que favoreció en los alumnos el ejercicio de la formación experimental y resolución de problemas en ingeniería.

Los problemas planteados permitieron a los estudiantes ejercitar la capacidad de manejo de situaciones bajo incertidumbre; consolidar actitudes para la solución de problemas no tradicionales, estimular la creatividad, la iniciativa personal, el trabajo interdisciplinario y la innovación en el área tecnológica; desarrollar en los estudiantes capacidad de abstracción y de reflexión crítica; ejercitar una lengua extranjera y dar un uso intensivo a las herramientas que le brinda la informática.

## ■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Ambort, D. (2015). Tecnomate 2015. *Revista CIE*. 36, 21-23. Recuperado el 10 de setiembre de 2015 de [http://issuu.com/cie1santafe/docs/cie\\_36\\_2](http://issuu.com/cie1santafe/docs/cie_36_2)

Elliott, J. (2000). *La investigación acción en educación*. Cuarta Edición. Madrid: Ediciones Morata, S.L.

González, A., Madoz, M.C.(2013). *Utilización de TIC para el desarrollo de actividades colaborativas para la enseñanza de la programación*. Red de Universidades con Carreras en Informática - TE & ET 2013. Recuperado el 15 de agosto de 2015 de <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/27525>

Latorre, A. (2004). La investigación acción. En R. Bisquerra Alzina. (Coord). *Metodología de la investigación educativa*, 370-394. Madrid: Editorial La Muralla.

- Morales B. P. , Fitzgerald V. (2004). Aprendizaje Basado en Problemas. *Revista Theoria*, Vol. 13. 145-157. Recuperado el 15 de agosto de 2015 de:[http://campus.usal.es/~ofeees/NUEVAS\\_METODOLOGIAS/ABP/13.pdf](http://campus.usal.es/~ofeees/NUEVAS_METODOLOGIAS/ABP/13.pdf)
- Morano, D.(2012). *Plan Estratégico para la formación de ingenieros 2012 – 2016*. Recuperado el 10 de diciembre de 2014 de <http://portales.educacion.gov.ar/spu/calidad-universitaria/plan-estrategico-de-formacion-de-ingenieros-2012-2016/>.
- Project Euler. Recuperado el 15 de agosto de 2105 de: <http://projecteuler.net/>
- Python. Versión 3.3.2. Recuperado el 15 de agosto de 2105 de:<http://www.python.org>
- Serrano, J. M. ; Pons, R. M. (2011). El constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. En *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 13(1). recuperado el 15 de agosto de 2015 de:<http://redie.uabc.mx/vol13no1/contenido-serranopons.html>
- Spoj. Sitio de juez en línea. Recuperado el 15 de agosto de 2105 de:<http://www.spoj.com/>