UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TESIS DE MAESTRÍA

LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE UNA VARIABLE REAL EN UN AMBIENTE DE LÁPIZ/PAPEL (L/P) Y ÁLGEBRA COMPUTACIONAL (CAS)

MARÍA FERNANDA MEJÍA PALOMINO

SANTIAGO DE CALI, 18 DE OCTUBRE DE 201

LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE UNA VARIABLE REAL EN UN AMBIENTE DE LÁPIZ/PAPEL (L/P) Y ÁLGEBRA COMPUTACIONAL (CAS)

MARÍA FERNANDA MEJÍA PALOMINO

Trabajo de investigación presentado como requisito para la obtención del grado de Magister en Educación con énfasis en Educación Matemática

Directores:
MG. DIEGO GARZÓN CASTRO
MG. JORGE HERNANDO ARCE CHAVES

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN,
ÉNFASIS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2011

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
ÉNFASIS EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DEL VALLE INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
2011 OCT. 2 1
COORDINACIÓN ACADÉMICA
RECIBIDO

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN DE MAESTRÍA

FECHA DE LA SUSTENTACION: Santiago de Cali, 18 de Octubre de 2011

ESTUDIANTE: MARIA FERNANDA MEJÍA PALOMINO - CODIGO: 0608229

TÍTULO DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN:

"LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS DE UNA VARIABLE REAL EN UN AMBIENTE DE LÁPIZ/PAPEL (L/P) Y ÁLGEBRA COMPUTACIONAL (CAS)"

DIRECTOR DE TESIS: Profesor DIEGO GARZON CASTRO

EVALUADORES: Profesora GLORIA GARCÍA DE GARCÍA
Profesor GILBERTO OBANDO ZAPATA

COMENTARIOS DE LOS JURADOS

El jurado decide recomendar unánimemente la calificación de MERITORIA a la tesis de la estudiante por el rigor y coherencia entre marco teórico e instrumentos de análisis. Además constituye un importante e innovador aporte para la enseñanza del algebra, al ~~proponer integrar distintos ambientes e instrumentos en los~~ procesos de enseñanza del algebra. El jurado considera que el trabajo constituye un aporte importante a la educación matemática y al mismo referente teórico tanto a nivel nacional como internacional.

APROBADO X
APLAZADO ___
RECHAZADO ___

Profesor ERIC RODRIGUEZ WORONIUK
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

DIEGO GARZON CASTRO
Prof. DIEGO GARZON CASTRO
Director de Tesis

Prof. GLORIA GARCÍA DE GARCÍA.
Jurado - Evaluador

Prof. GILBERTO OBANDO ZAPATA
Jurado - Evaluador

Prof JORGE H. ARCE CHAVES
Director de Tesis

Prof. RVELIO BEDOYA MORENO
En reemplazo del
Subdirector de Investigaciones y Posgrados

A Dios
y a mi madre por darme
la vida y hacer
de mí lo que soy.
A mi hermano Milton,
por su confianza depositada en mí.
A mi abuelo Fernando
por sus enseñanzas de vida.
A mis tías Adela y Sara
por las alegrías dadas en
mi infancia
A toda mi familia,
por su amor y respaldo.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de investigación es el fruto de la formación que he recibido de mis profesores y compañeros de la maestría en Educación Matemática de la Universidad del Valle y del apoyo de mis compañeras de trabajo de la institución educativa Escuela Normal Superior Farallones de Cali (***ENSFC***).

En especial quiero mencionar la ardua labor de mis directores, los profesores *Diego Garzón Castro* y *Jorge Hernando Arce Chaves*, quienes leyeron cuidadosamente cada una de las líneas escritas en este trabajo muchas veces y lo nutrieron de su experiencia y conocimiento.

Al profesor *Octavio Pabón*, por sus oportunos consejos.

Al profesor *Edinsson Fernández* por las jornadas de trabajo compartidas, sus sugerencias, su generosidad y porque sé que mis alegrías son también suyas.

A mis compañeros de la maestría, *Maritza Pedreros*, *Marisol Santacruz*, *Gustavo Quintero* y *Fernando Angulo*, por sus aportes en las jornadas de trabajo en el seminario de la línea Tecnologías de la Información y Comunicación y Educación Matemática (**TICEM**) y porque durante este camino académico construimos una amistad.

A mis compañeras y amigas de trabajo, en especial a la profesora *Alcira Valencia* por su ayuda generosa.

A los estudiantes participantes de esta investigación por su colaboración y persistencia.

A los profesores evaluadores de este informe final, *Gloria García* y *Gilberto Obando*, por sus comentarios, sugerencias y preguntas que enriquecieron mi experiencia académica.

A todos mil gracias.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

RESUMEN

Este trabajo pretende la integración de las Calculadoras Simbólicas en el estudio de la factorización de polinomios de una variable real, por medio de un conjunto de tareas para estudiantes de noveno grado de la Educación Básica Secundaria en Colombia cuando integran un ambiente de Lápiz/Papel (*L/P*) y Álgebra Computacional (*CAS*[1]) y constituyen las praxeologías locales, matemática y didáctica, relativamente completas. Uno de los ejes centrales de esta investigación gira en la complementariedad entre las técnicas habituales y novedosas en la generación de técnicas instrumentadas, y su papel en la relación entre las tareas y la teoría.

***Palabras Claves*:** Teoría Antropológica de lo Didáctico, técnicas instrumentadas, factorización de polinomios, calculadoras simbólicas, praxeología matemática, praxeología didáctica.

ABSTRACT

This work purpose the integration of the Symbolic Calculators in the study of the factorization of polynomials of a real variable, by means of a set of tasks for students of ninth grade of the Secondary Basic Education in Colombia that integrate an environment of Paper and Pencil (*P/P*) and Computer Algebra System (*CAS*) and constitute the locals praxeologies, mathematical and didactical, relatively completes. One of the essential parts turns in the complementarity between the habitual and new techniques in the generation of instrumented techniques, his role into the relation between the tasks and the theory.

Keywords: Anthropological Theory of the Didactics, instrumented techniques, Factorization of Polynomials, Symbolic Calculators, mathematical praxeologie, didactical praxeologie

[1]Su sigla en español es SAC, pero a lo largo de todo el documento se utilizará la sigla CAS por su expresión en inglés, Computer Algebra System.

INTRODUCCIÓN

Desde el año 2000, el Ministerio de Educación Nacional (*MEN*) realizó un proyecto de incorporación de tecnologías al currículo de matemáticas y entregó a varias instituciones educativas públicas de Colombia Calculadoras Simbólicas (TI-92 PLUS) y otros implementos como graphlink, viewscreen, CBR (Calculator-Based Ranger) y CBL (Calculator-Based Laboratory) (MEN, 2004). Bajo este proyecto se formaron varios profesores en el uso de estas Tecnologías de la Información y Comunicación (*TIC*), algunos de ellos aún se encuentran vinculados a las universidades, participando en proyectos, realizando pasantías o postgrados. El impacto no sólo se dio en la Educación Básica Secundaria y Media, también se generaron modificaciones en la malla curricular de los programas de las licenciaturas en el Área de Educación Matemática en las universidades del país.

A mediados de esa misma época y como una consecuencia de la necesidad de integrar TIC en el currículo de matemáticas, se constituye una línea nueva de investigación en el área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, denominada TICEM, por la unión de las siglas TIC (Tecnologías de Información y Comunicación) y EM (Educación Matemática). En esta línea de investigación se indagan problemáticas alrededor de la enseñanza y aprendizaje del álgebra, del cálculo, la geometría transformacional, euclidiana y analítica. La tesis presentada en este documento es un ejemplo de los trabajos vinculados a la enseñanza y aprendizaje del álgebra.

Las indagaciones sobre la enseñanza de la factorización de polinomios con CAS han sido tema de interés para la investigadora. Su trabajo de pregrado es una unidad didáctica con el uso de las calculadoras simbólicas bajo la teoría del Análisis Didáctico (Gómez & Rico, 2002), dicho trabajo de grado se titula *Análisis Didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas* (Mejía, 2004). Los intereses actuales giran hacían dos aproximaciones diferentes: lo institucional e instrumental (Artigue, Laborde, Lagrange & Trouche, 2003).

Otro aspecto para resaltar de la línea de TICEM, es la vinculación y desarrollo de diferentes proyectos de pregrado a los intereses de los trabajos de la maestría en Educación

Matemática. Este hecho genera la constitución de grupos alrededor de temáticas particulares para indagar sobre las problemáticas de investigación desde perspectivas diferentes. Respecto a la enseñanza de la factorización de polinomios, actualmente un grupo de estudiantes de la licenciatura en Matemática y Física están en el proceso de elaboración de su trabajo de grado y esperan realizar una Unidad Didáctica al integrar GeoGebra.

Más de diez años después del inicio del proyecto de incorporación de TIC al currículo de matemáticas promovido por el MEN, se esperan resultados cuantiosos de las experiencias de aula o investigaciones con el uso de las calculadoras simbólicas. Actualmente no existe un seguimiento, ni un documento reciente sobre los desarrollos de este proyecto en cada una de las instituciones educativas participantes. Es ésta una investigación fruto del grupo de cualificación organizado por la Universidad del Valle, creado para apoyar a los profesores en ejercicio y en formación en el uso de TIC en el aula de matemáticas.

En relación al desarrollo y organización de este informe final, se ha decidido presentar y organizar la información en cinco capítulos. En el primer capítulo, titulado *aspectos generales de la investigación*, se presentan algunos planteamientos del proyecto de investigación con el fin de dar a conocer a los lectores la propuesta de investigación, en particular a los evaluadores. Los proyectos son aprobados por el grupo de profesores de la maestría en Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle y no siempre los evaluadores pertenecen a este grupo.

Los cuatro capítulos siguientes se organizan con las pautas de la metodología de investigación: la *micro-ingeniería didáctica*. En el segundo capítulo se presentan los *análisis preliminares*. Se inicia este capítulo con la explicación de cada una de las fases de una ingeniería didáctica, la distinción entre micro y macro-ingeniería y una breve descripción de cómo se desarrollan las fases de la micro- ingeniería en este trabajo.

De esta presentación se desprende la fase de planeación cuyo referente es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (*TAD*), ésta permite estructurar la dimensión didáctica de los análisis preliminares y da cuenta de la aproximación institucional. En cuanto a la dimensión cognitiva se presenta lo referente a la aproximación instrumental mirándose algunos aspectos de la génesis instrumental. Finalmente el capítulo cierra con la indagación de la dimensión histórica – epistemológica, aquí se presenta una revisión de algunos problemas que permitieron constituir un lenguaje algebraico y la teoría de ecuaciones, con el fin de determinar la organización de algunas praxeologías matemáticas alrededor de la factorización de polinomios.

Una de las particularidades de este trabajo se centra en la indagación de las *técnicas instrumentadas*[2] usadas y generadas en el desarrollo de las tareas propuestas, como resultado de la complementariedad de las técnicas L/P y CAS. La determinación de las técnicas instrumentadas lleva a vincular la aproximación instrumental e institucional, considerándose en este trabajo conjuntamente las dimensiones preliminares: la didáctica y la cognitiva.

El tercer capítulo se titula *diseño de tareas y análisis a priori*, en este se presenta la fase de diseño, constituyéndose las praxeologías matemática y didáctica alrededor de la factorización de polinomios en un ambiente de Lápiz/Papel y CAS. Un referente teórico necesario son los indicadores de una praxeología local relativamente completa. Por tanto cada una de las situaciones se acompaña de un análisis detallado de estos indicadores, de los posibles momentos de estudio de la praxeología didáctica y de algunas orientaciones en relación a la instrumentalización y los fenómenos didácticos.

En el cuarto capítulo, titulado *análisis de los resultados*, se da desarrollo a la fase de experimentación de la micro-ingeniería didáctica. En éste se confrontan los análisis *a priori* con los análisis *a posteriori* (fase de validación). También se presentan las características de la población participante en el marco contextual y las fuentes de información de la investigación.

El quinto capítulo son las *conclusiones generales*, allí se retoman las consideraciones finales de los anteriores capítulos y se confrontan los resultados de la experimentación con los objetivos, las hipótesis y la pregunta de investigación. Para culminar este trabajo se presentan la *bibliografía* y los *Anexos*.

[2] Las técnicas instrumentadas se determinan como la parte observable de un esquema de acción instrumentada. En el esquema confluye un lado técnico y otro conceptual.

1. ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

Este primer capítulo tiene como propósito ubicar al lector en los aspectos relacionados a la problemática de investigación, justificación, antecedentes y objetivos. Estos planteamientos fueron presentados en el proyecto de investigación, cuya aprobación permitió la realización de este trabajo de investigación para optar el título de maestría en Educación con énfasis en Educación Matemática de la Universidad del Valle.

La elaboración de estos aspectos generales fueron enriquecidos con las discusiones realizadas en los seminarios de Evaluación e Integración y los seminarios de la línea de Tecnologías de la Comunicación y Educación Matemática (TICEM), cursos adjuntos al plan de estudios de la maestría. Sin embargo a lo largo de la elaboración de este trabajo, algunos aspectos han sido modificados en coherencia con las indagaciones vinculadas a los análisis preliminares.

1.1. Planteamiento y contextualización del problema de investigación

En los textos escolares suele ser la factorización de expresiones polinómicas uno de los contenidos para el grado de octavo o noveno de la Educación Básica Secundaría en Colombia. En los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias vigentes, la factorización de polinomios es considerada como una manera de construir expresiones algebraicas o generar expresiones equivalentes dentro de contextos de variación y cambio (MEN, 1998; MEN, 2006).

Cuando los estudiantes logran convertir un polinomio a su expresión factorizada en ambientes de Lápiz/Papel (L/P) generalmente se recurre a algunas reglas aplicadas a un determinado conjunto de polinomios con características comunes. En este proceso es necesario el tratamiento sintáctico de las expresiones algebraicas, éste es extraño y de difícil adquisición para la mayoría de los estudiantes.

En algunos casos antes de conocer o construir la regla para factorizar polinomios, se manipulan algunos “rectángulos" en cartulina cuyas áreas se escriben como expresiones polinómicas cuadráticas. Con estas piezas se arman otros “rectángulos” de mayor área para obtener una expresión polinómica factorizada o desarrollada correspondiente al área del "rectángulo", posteriormente el estudiante podría deducir las reglas para factorizar un polinomio cuadrático con L/P.

En la enseñanza del álgebra se sobrevaloran las representaciones simbólicas y su tratamiento en las *tareas*, como en el caso de la factorización de polinomios ligada a la manipulación de expresiones algebraicas, olvidándose otras representaciones y conexiones con otros conceptos y procedimientos. Por tanto la enseñanza del álgebra se convierte en un conjunto fragmentado de saberes (Gascón, 1999).

En relación al aprendizaje de las *técnicas*[3] para factorizar polinomios con L/P, el profesor debe darle al estudiante un tiempo para saber cuándo y para qué utilizarla. Pero a veces se cree que basta con unos pocos ejemplos aislados para aprenderlas. Al ignorar lo anterior, "se generan prácticas en las que se da por hecho que las matemáticas deben aprenderse al mismo tiempo que se enseñan" (Gascón, 1999, p.85).

En cuanto a los CAS, algunos de estos son aplicaciones de las calculadoras simbólicas o calculadoras graficadoras algebraicas, cuya característica principal es la portabilidad y la posibilidad de conexión entre sus diversas aplicaciones. En estas calculadoras (o CAS) la factorización de cualquier expresión algebraica se obtiene al ejecutar uno de sus comandos y determinar el conjunto numérico (racional, real o complejo). En la Figura 1 se presenta un ejemplo de factorización con el CAS de la calculadora TI-92 PLUS.

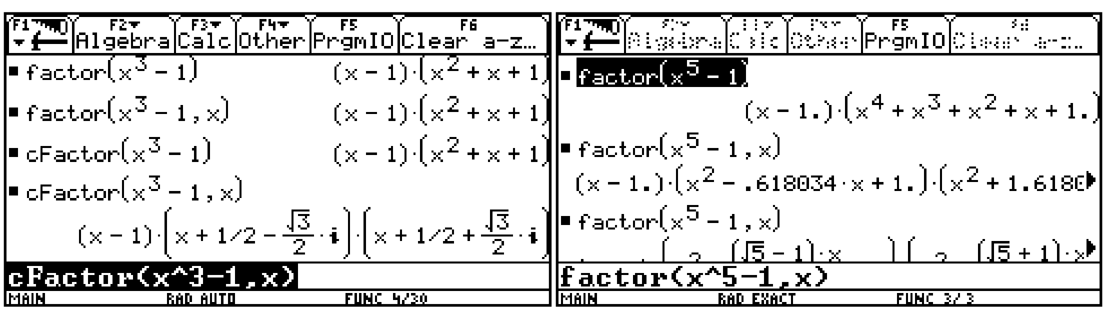


Figura 1. Diferentes factorizaciones de polinomios en una TI-92 PLUS.

[3] Dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, las técnicas son consideradas como los diferentes modos de hacer o resolver un problema o tarea.

Al igual que con la aparición de las calculadoras aritméticas, su uso se cree inadecuado en los grados de escolaridad en donde los estudiantes están aprendiendo los procesos algorítmicos de operaciones con números racionales con Lápiz/Papel (Ralston, 1999). Algunos dicen que el uso de los CAS llevará al desuso de las técnicas Lápiz/Papel e inclusive se afirma que los contenidos matemáticos encasillados a procesos de difícil aprendizaje como la factorización de polinomios tenderá a su extinción en los currículos de matemáticas (Demana & Waits, 2000a).

Sin embargo las investigaciones recientes muestran diferentes posibilidades para el aprendizaje de la factorización de polinomios en ambientes Lápiz/Papel (L/P) y CAS (Kieran, 2005; Lagrange, 2000a). Aunque el L/P y el CAS parecen difíciles de conciliar, se ha considerado su *complementariedad*[4] como la manera de lograr la integración de los CAS, problemática poco investigada[5].

Estas investigaciones evidencian como las técnicas Lápiz/Papel, denominadas *técnicas habituales*, son necesarias para una adecuada interpretación de las técnicas CAS, también llamadas *técnicas novedosas*, y de esa manera el ambiente L/P y CAS permitiría el enriquecimiento de las *praxeologías matemáticas*, éstas se entienden como un modelo de la actividad matemática que surge alrededor de una cuestión o conjunto de cuestiones en busca de respuestas (Bosch, Chevallard & Gascón, 2000).

Cada praxeología matemática se vincula a una praxeología didáctica. Respecto a esta relación, Acosta (2005) afirma que "toda praxeología didáctica depende de una praxeología matemática que pretende construir, y a su vez toda praxeología matemática implica una praxeología didáctica que permita su nacimiento en la práctica" (p. 122). De igual manera, la definición de una *praxeología didáctica* ratifica esta relación:

> Una praxeología didáctica es la utilizada por una persona cada vez que estudia una praxeología matemática (*PM*) (posición del alumno), o cuando ayuda a estudiar a otra dicha praxeología matemática (posición del profesor). La praxeología didáctica (*PD*) –se distingue en cierto sentido de las PM– por estar formadas por tareas y técnicas

[4]Se refiere a la relación o dialéctica que se puede establecer entre diferentes saberes, tecnologías, modalidades de educación entre otros aspectos, para beneficiarse mutuamente de su coexistencia y acción. Son modos diferentes y adicionales de una misma realidad. (Muñoz & Serrano, 2008).

[5] En el artículo de Artigue et al. (2003), se muestra que sólo el 5% de las publicaciones respecto al uso de CAS en la Educación Matemática se interesa en su integración en el aula de matemáticas.

forzosamente cooperativas puesto que la utilización efectiva de una PD requiere la cooperación, aunque sea virtual, de distintos actores que ocupan dos posiciones claramente diferenciadas: la del profesor y la del alumno (Sierra, 2006, p. 36).

Otra diferencia de las praxeologías es el rango de acción en los diversos problemas, se distinguen cuatro tipos: las puntuales, locales, regionales y globales. La unidad mínima para los procesos de análisis didácticos es la praxeología matemática local (*PML*), en ella se puede relacionar diferentes tipos de tareas que giran alrededor de una tecnología en común. En una PML se puede determinar su completitud respecto a la vinculación y las relaciones de los diferentes elementos constitutivos. Por tanto en este trabajo se tendrá la siguiente pregunta de investigación*: ¿Cuáles son las praxeologías locales, matemática y didáctica, relativamente completas para integrar un ambiente de L/P y CAS en relación a la factorización de polinomios de una variable real?*

El centro de esta investigación es la praxeología matemática, pero como su puesta en estudio requiere de la praxeología didáctica se habla de ambas como una dualidad. El estudio de la praxeología didáctica implica una mirada en relación a sus componentes y en este trabajo no se presenta. En los siguientes capítulos solo se detallan algunas de las características de la prexeología didáctica de la profesora en relación a los momentos de estudio desde lo *a priori* y lo *a posteriori*.

Para abordar la pregunta de investigación se pretende dar cuenta de la complementariedad entre las técnicas novedosas y habituales al considerar la integración del ambiente de L/P y CAS y generar las *técnicas instrumentadas*. Se parte de los referentes de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y de la génesis instrumental, estas dos aproximaciones determinan: lo institucional e instrumental.

Al considerar los diversos resultados del uso de las TIC con el uso del Lápiz/Papel, se abren las posibilidades de poner a dialogar las técnicas habituales y novedosas, por tanto se plantean las siguientes *hipótesis de la investigación*:

- La complementariedad entre las *técnicas novedosas* (CAS) con las *técnicas habituales* (L/P) posibilitan la configuración de una estrategia didáctica para la integración de CAS, fundamentada en la noción de *técnica instrumentada*.

- La coordinación de diferentes *objetos ostensivos de traza u orales*[6] en relación a la factorización de polinomios en el ambiente de L/P y CAS, le permiten a los estudiantes usar técnicas variadas y novedosas.

1.2. Justificación y antecedentes

Algunos investigadores como Demana y Waits (2000b) y Peschek (2005) afirman que no es necesario enseñar los métodos tradicionales del álgebra simbólica (métodos manuales de Lápiz/Papel) porque los CAS permiten la manipulación algebraica más rápida y con mayor exactitud de lo que era posible con los métodos "tradicionales" y de esa manera generar posibilidades para el estudio de la teoría subyacente, como el Teorema Fundamental del Álgebra (*TFA*). En concordancia con lo anterior, se dice "que en un futuro el interés girará en torno a las estructuras conceptuales del álgebra como medio de representación y de los métodos algebraicos como la resolución de problemas" (Vizmanos, 2000, p. 191). Es pertinente para esta propuesta "el planteamiento de ecuaciones que se deducen de la lectura de enunciados diversos aplicados a contextos cercanos e interesantes a los estudiantes" (Vizmanos, 2000, p. 192).

Para mirar un poco las características de las manipulaciones algebraicas de los estudiantes en los ambientes de Lápiz/Papel, se han reportado algunos errores, ejemplificados en los trabajos de Sánchez (1997), Palarea y Socas (1997) y Camacho, Hernández, Palarea y Socas (1996) como el uso inadecuado del igual, las generalizaciones falsas, la extensión de propiedades y la tendencia de una enseñanza centrada en algunos ejemplos típicos, con pocas representaciones semióticas y técnicas específicas. Los errores muestran que no es fácil aprender los algoritmos de Lápiz/Papel para factorizar expresiones algebraicas por su escasa significación para los estudiantes.

Por otra parte las manipulaciones de las expresiones algébricas propuestas en la secundaria le dejan poca autonomía al estudiante en la elección de las expresiones equivalentes de un polinomio. "El procedimiento de transformación de una expresión a otra, se ve sin ninguna

[6] Los objetos ostensivos son percibidos y gozan de materialidad. Los objetos ostensivos de traza son los relacionados con los gráficos y las producciones escritas, mientras que los objetos ostensivos orales están vinculados con los sonidos. Las representaciones matemáticas son objetos ostensivos, pero no todos los objetos ostensivos son representaciones matemáticas, por ejemplo los gestos. En este trabajo sólo se han tomado los objetos ostensivos que son representaciones matemáticas y por lo que se toman algunos elementos teóricos desde Duval (2001; 1992).

intencionalidad o análisis de la información que dicha expresión puede brindar en la resolución de un problema" (Artigue, 2002a, p. 284).

En cuanto a los ambientes CAS es necesario tener en cuenta la *transposición computacional*, ésta se entiende como las transformaciones que sufre un objeto matemático debido a las decisiones tomadas al diseñar un software, tales como la selección de una representación, un conocimiento estructurado o de los algoritmos a aplicar (Balacheff & Kaput, 1996). Por lo que es importante considerar los *fenómenos didácticos*[7] ligados a la transposición computacional subyacentes en estos ambientes.

En relación a la escasa integración de los CAS en la enseñanza de las matemáticas, la investigación realizada por Lagrange (2000a) reporta que generalmente los estudiantes perciben a los CAS como una herramienta para efectuar cálculos penosos y comprobar los resultados obtenidos con L/P. Pocos estudiantes ven los CAS como una herramienta de comprensión o de aprendizaje, el cual es el objetivo propuesto por los profesores. Una fracción importante de estudiantes considera que los CAS complican notablemente su trabajo matemático. Esto hace que los profesores vean como los CAS no suprimen las dificultades calculatorias.

Esta revisión de las investigaciones da cuenta de los problemas y restricciones que generan los ambientes CAS y de los cuidados para una integración adecuada en el diseño de situaciones de enseñanza. Algunos fenómenos didácticos con algunas condiciones predeterminadas pueden generar un contexto enriquecedor para el aprendizaje de la factorización de polinomios, como en el caso del *fenómeno de doble referencia*[8] expuesto en las tareas elaboradas por Mounier y Aldon en *A problem story: factorisations of* $x^n - 1$ (citado por Lagrange, 2000a), también reportadas por Kieran (2005) como un ejemplo que ratifica la necesidad de interpretar las respuestas dadas por un CAS en ambientes de L/P.

El desarrollo de las situaciones determinó que las expresiones arrojadas por la calculadora no coincidían con la expresión general de estos polinomios bajo las técnicas Lápiz/Papel. Esto genera en

---

[7] "Son los fenómenos que surgen en el ámbito de un sistema didáctico a partir de la problematización y cuestionamiento de un conocimiento matemático enseñado" (Bosch, Chevallard & Gascón, 2000, p. 213).
[8] Interpretación de un problema en dos ambientes, por ejemplo L/P y CAS.

los estudiantes la necesidad de realizar la "reconciliación"[9]de los resultados de Lápiz/Papel y CAS, conjeturar y probar una regla para factorizar. De esa manera el uso de CAS en las tareas generó la necesidad de entender ciertos aspectos relacionados con la factorización. Se promovieron los conocimientos y habilidades operativas y otros procesos como la argumentación, la conjeturación, la obtención de reglas de manipulación de expresiones algebraicas y la comunicación.

Lo novedoso de las situaciones es el uso de otras funcionalidades de las calculadoras simbólicas con relación a las manipulaciones algebraicas. En las investigaciones reportadas por Kieran (2003) las actividades transformacionales como la factorización poco utilizan TIC y sólo en algunos casos se presentan el uso del software de graficación de funciones. Las tareas de factorización con el uso de HOME[10] de una calculadora TI-92 PLUS son una alternativa diferente para el desarrollo de las actividades transformacionales y el uso de CAS.

Kieran (2003) determina tres tipos de actividades en el álgebra escolar, descritos en la Figura 2. Generalmente las investigaciones que hacen uso de las TIC tienden a privilegiar los software de graficación más que los CAS, es la propuesta de Mounier y Aldon en *A problem story: factorisations of* $x^n - 1$ (citado por Lagrange, 2000a) una manera diferente de integración de CAS para generar la necesidad de las habilidades operativas de Lápiz/Papel.

[9] Esta expresión es la traducción de la palabra reconciling, que en el texto se entiende como la manipulación de la expresión algebraica en Lápiz/Papel o CAS para lograr mostrar la equivalencia entre la expresión arrojada por la calculadora o la obtenida con técnicas L/P.
[10] Este es el nombre en inglés del CAS de esta calculadora simbólica. En español el nombre es PRINCIPAL.

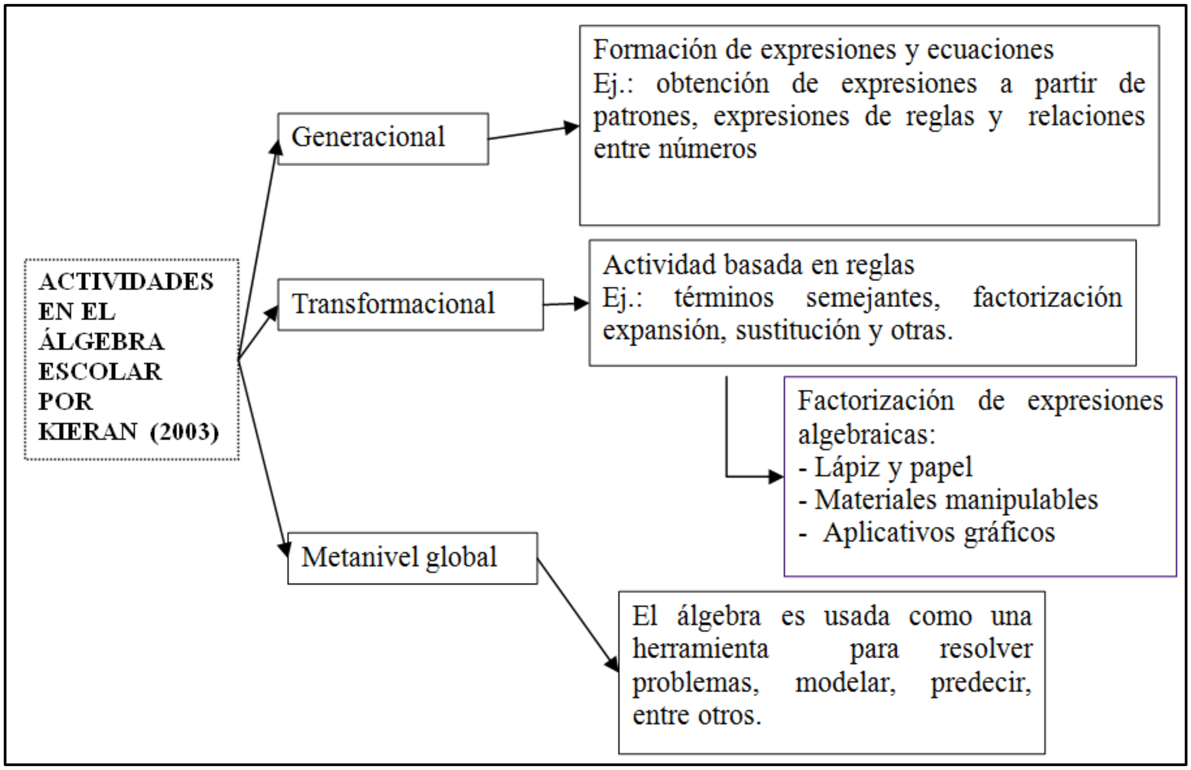


Figura 2. Actividades en el álgebra escolar.

Es importante rescatar que las posibilidades de tratamiento[11] y conversión[12] de representaciones es mucho más rápida con el uso de CAS que con L/P. Lagrange (2000a) menciona que con el uso de las CAS se generan unas técnicas nuevas, denominadas como novedosas, son inmediatas y de menos tiempo que las técnicas habituales (en ambientes de L/P). Por lo cual es necesario aprovechar el sentido y los alcances de estas actividades en el álgebra escolar.

Por otra parte al considerarse innecesarios los conocimientos y habilidades operativas se incurre en un peligro para usar CAS, porque el estudiante no se encuentra en condiciones de interpretar los resultados que éste arroja. Por lo que las técnicas habituales (Lápiz/Papel) no desaparecen de la actividad de los estudiantes y pueden ser un soporte para una reflexión teórica sobre los objetos que manipulan. Se da la oportunidad para el desarrollo de praxeologías nuevas (Lagrange, 2000a).

[11] "Un tratamiento es la transformación de una representación en otra representación en un mismo registro de representación" (Duval, 2001, p. 44).
[12] "Una conversión es una transformación de la representación de un objeto en un registro P en otra representación del mismo objeto en un registro L" (Duval, 2001, p.45).

A diferencia de lo planteado por Demana y Waits (2000b), se busca rescatar las técnicas de L/P consideradas "innecesarias" en ambientes de CAS, además de promover el uso de diversos objetos ostensivos. Se dice que el trabajo sobre la sintaxis de las expresiones algebraicas en CAS es necesaria para lograr la comunicación eficaz con la máquina y para hacer conscientes a los estudiantes de la responsabilidad de su trabajo, ya que el CAS no da el rango de validez de las transformaciones que realizan (Artigue, 2002a). Las respuestas dadas por el CAS no siempre son iguales al ambiente de L/P, las simplificaciones que se efectúa automáticamente en los CAS sobre las expresiones algebraicas ingresadas y la forma bajo la cual se realizan estos cálculos no son necesariamente las que se esperarían en L/P (Artigue, 2002b).

En cuanto a experiencias relacionadas con la integración de TIC, se presenta el trabajo Assude y Gelis (2002) donde examinan las condiciones y restricciones de integración de Cabri Geometry en la escuela primaria en las clases regulares de geometría con estudiantes de 10 años de edad, desde la dialéctica entre lo tradicional (los hábitos de trabajo en clase o ciertas reglas del contrato didáctico) y lo nuevo (relacionado con el trabajo con Cabri Geometry, área de observación de poco conocimiento) a partir de las diferentes tareas y técnicas propuestas a los estudiantes. La problemática de indagación presentada en el artículo es un reporte, de una investigación no culminada, cuya pregunta de investigación es: "¿cuáles son las restricciones en la integración de Cabri Geometry en las prácticas geométricas en la escuela primaria?"(Assude & Gelis, 2002, p. 262).

Otros investigadores como Kieran, Boileau, Saldanha, Hitt, Tanguay y Guzmán (2006) presentan el estudio de cinco grupos de secundaria con estudiantes entre los 14 y 15 años en un curso normal de matemáticas y con conocimientos respecto a las técnicas de factorización y resolución de ecuaciones en L/P. Las tareas fueron organizadas en tres tipos: en CAS, L/P y un trabajo de reflexión. Esta investigación no pretende reemplazar las técnicas de L/P por técnicas CAS, se miraba su utilización conjunta en el estudio del álgebra. La utilización del CAS provocó discusiones que no aparecen en las clases tradicionales de matemáticas.

Este artículo da cuenta de algunos resultados del proyecto de investigación llamado *"El desarrollo entrelazado de la técnica y de la teoría en el aprendizaje del álgebra con la ayuda de la tecnología"* realizado entre del 2003 al 2007 con estudiantes de México, Canadá, Estados Unidos, Francia y los países bajos (APTE, s.f.).

Lo interesante de esta perspectiva de investigación es la vinculación de dos ambientes que parecen antagónicos, el L/P y CAS, el primero el de mayor tradición y de amplio reconocimiento en las prácticas de enseñanza del álgebra, mientras que el segundo es aún desconocido por muchos profesores y de uso incipiente en la enseñanza secundaria. Sin embargo su vinculación en diferentes tareas refuta la creencia que los CAS van a acabar con los algoritmos de L/P y plantean un panorama de integración y complementariedad para la constitución de praxeologías matemáticas y didácticas nuevas.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

- Constituir praxeologías locales, matemática y didáctica, relativamente completas en el estudio de la factorización de polinomios al integrar un ambiente de L/P y CAS.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Establecer los referentes históricos-epistemológicos, didácticos y cognitivos para determinar las praxeologías locales, matemática y didáctica, relativamente completas en el estudio de la factorización de polinomios de una variable real en un ambiente de L/P y CAS.
- Caracterizar algunas de las técnicas instrumentadas usadas por los estudiantes.

1.4. Consideraciones Finales

Uno de los aspectos resaltados en este primer capítulo es la necesidad de integración de CAS en el aula de clase de matemáticas, se toma como vía para este propósito la complementariedad con el ambiente de L/P. La selección de esta problemática lleva a reconocer los resultados de diferentes reportes de investigación, en particular el grupo APTE muestra una variedad de situaciones de aprendizaje en los que se resalta la actividad transformacional del álgebra (Ver Figura 2) en ambientes de L/P y CAS. Estos trabajos se vinculan a la aproximación institucional, se delimita una vertiente de investigación reciente respecto al uso de CAS en clase de matemáticas, en la que se adscribe este trabajo, considerándose además la aproximación instrumental.

En la Figura 3 se presentan algunos aspectos relacionados con el planteamiento y contextualización del problema de investigación. Estos aspectos resaltan la actividad transformacional, que lleva a mirar las diferentes maneras de factorizar polinomios en relación a diversos artefactos. Es necesaria la mirada desde la génesis instrumental y la TAD, porque ambas permiten determinar las técnicas instrumentadas generadas en la complementariedad de las técnicas L/P y CAS.

En la Figura 3 sólo se presentan algunos comandos del CAS de la calculadora simbólica relacionados directamente con la factorización de un polinomio. Sin embargo en este trabajo teniendo en cuenta la complementariedad de las técnicas L/P y CAS se exploran otros comandos.

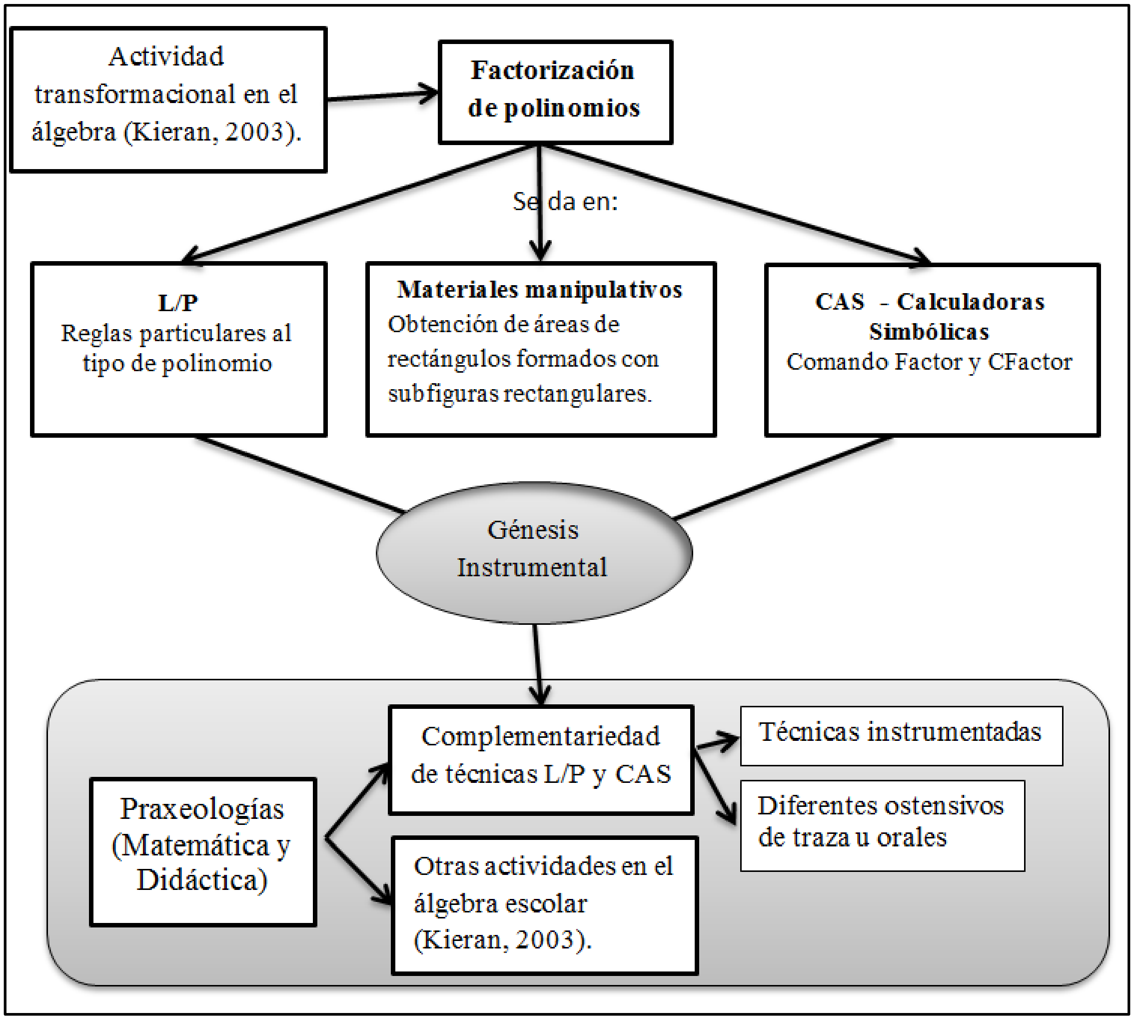


Figura 3. Planteamiento y contextualización del problema de investigación.

Es importante mencionar que la perspectiva adoptada, si bien no plantea una reorganización cognitiva a partir de la integración de los CAS como lo expresa Moreno (2002), posibilita un camino en la estructuración de un ambiente de aprendizaje para la enseñanza del álgebra, dándose un paso más para la integración de TIC en el currículo de matemáticas.

2. ANÁLISIS PRELIMINARES

En este capítulo se presentan los análisis preliminares que hacen parte del desarrollo de una *micro-ingeniería didáctica*. Por lo cual se consideró necesario determinar qué es un micro-ingeniería didáctica desde el referente general, la ingeniería didáctica. Otro de los aspectos centrales es la indagación de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), ésta es el eje articulador de los análisis preliminares. Mientras que la técnica instrumentada es la unidad de análisis articuladora de la dimensión didáctica con la cognitiva. A diferencia de los otros capítulos, se realizan dos consideraciones finales, una al final de las dimensiones didáctica y cognitiva y otra al final de la dimensión histórica – epistemológica.

2.1. Ingeniería didáctica

Como metodología de investigación y diseño de situaciones de enseñanza este trabajo toma algunos de los referentes de la *ingeniería didáctica*. Esta metodología la define Douady (1995) como el conjunto de secuencias de clase, diseñadas, organizadas y articuladas por el profesor "ingeniero", para lograr que sus estudiantes aprendan.

Desde esta definición, la ingeniería didáctica es vista como un "producto" de los análisis preliminares y análisis *a priori* que determinan las *variables didácticas*[13] sobre las que se actuará, y es vista como un "proceso" en el cual el profesor experimenta el producto y realiza las adaptaciones y ajustes necesarios a la dinámica de la clase.

Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se caracteriza porque sus productos son construidos a partir de un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. A diferencia de otras metodologías basadas en la experimentación, en ésta se recurre al registro de estudios de caso y su validación es en esencia interna, basada en la confrontación entre los análisis *a priori* y *a posteriori* (Artigue, 1995).

[13]Son aquellos valores de una tarea que pueden ser manipulados (fijados o cambiados) por el profesor y que al modificarse pueden generar nuevos problemas a los que corresponden diferentes técnicas (Bosch, Chevallard & Gascón, 2000).

Según la mirada de investigación, una ingeniería didáctica puede ser una *micro-ingeniería* o una *macro-ingeniería*, la diferencia entre éstas es:

> La micro – ingeniería hace referencia a estudios de tipo local, de amplitud limitada en tanto que la macro-ingeniería se refiere a procesos de varios años de duración, que puede englobar varios conceptos relacionados entre sí, que se interesan por ejemplo en la articulación de distintos conocimientos o estrategias globales de aprendizaje (Chamorro, 2003, p. 82).

Respecto a la anterior cita, Brousseau (2002) afirma que la *micro-ingeniería* estudia o produce una situación única débilmente evolutiva, es una secuencia corta, relativa a la utilización y aprendizaje de un conocimiento bien determinado y limitado. Este trabajo se ciñe al desarrollo de una *micro-ingeniería*, en relación a las cuatro las fases que la estructuran:

1. Los análisis preliminares,
2. El diseño de las situaciones de enseñanza y sus análisis *a priori*,
3. La experimentación
4. Los análisis *a posteriori* y la validación.

En los análisis preliminares se toman en cuenta tres dimensiones: la didáctica, la cognitiva y la histórica-epistemológica, en relación a los saberes sobre la factorización de polinomios. La *dimensión didáctica* trata sobre el estado de la enseñanza, la *dimensión cognitiva* está asociada a las características cognitivas de los estudiantes a los que se dirige la enseñanza y la *dimensión epistemológica* da explicación del devenir del contenido matemático en juego, así como su funcionamiento y diversas formulaciones (Farfán, 1997).

En cuanto a las dimensiones didáctica y cognitiva, se ha considerado necesario presentarlas conjuntamente dado que la técnica instrumentada es el concepto articulador entre la Teoría Antropológica de lo Didáctico (dimensión didáctica) con la génesis instrumental y los objetos ostensivos y no ostensivos (dimensión cognitiva).

En relación a la dimensión histórica- epistemológica se reconoce el papel de los métodos de solución de ecuaciones en el desarrollo de la factorización, en el teorema fundamental del álgebra y el teorema del factor. Este análisis se estructura bajo las tres etapas de la evolución del lenguaje algebraico y se esclarece como la factorización de polinomios nace en la solución de ecuaciones. El vínculo de la factorización con los ceros de un polinomio permite constituir una teoría. Estas tres dimensiones de los análisis preliminares se presentan en este capítulo.

Respecto a los *análisis a priori* de las situaciones de enseñanza diseñadas, se dice que permiten controlar el proceso y las variables didácticas puestas en juego, conjeturando con sustento los efectos esperados. En éstos también se establecen las hipótesis del diseño y las expectativas del investigador. Son por consecuencia, una fase tanto prescriptiva como predictiva (Ferrari, 2001). En este trabajo el diseño de las tareas y sus análisis *a priori* se presentan en el tercer capítulo.

La fase de *experimentación* se da en la puesta en escena de las situaciones de enseñanza diseñadas, bajo condiciones controladas por el investigador. La toma de datos y el control son importantes para la siguiente fase, los *análisis a posteriori y la validación*, porque se hace una revisión de los sucesos ocurridos en la experimentación y los resultados se confrontan con los del análisis *a priori*, de esa manera se validan o refutan las hipótesis formuladas (Ferrari, 2001). En este trabajo estas fases se presentan en el cuarto capítulo bajo el nombre de *análisis de los resultados*.

En la Figura 4 se resumen las fases de una ingeniería didáctica o micro-ingeniería, ésta es tomada de Lezama y Farfán en RELIME (como se cita en Navarro, 2004) con algunas adaptaciones para el desarrollo de este trabajo, porque la teoría didáctica es la TAD y en la fase de experimentación no se dice la puesta en escena de las situaciones didácticas sino la puesta en escena de la praxeología didáctica. Las flechas en el diagrama indican un posible camino a seguir para el desarrollo de la ingeniería didáctica, las dos primeras se consideran previas a la experimentación y validación.

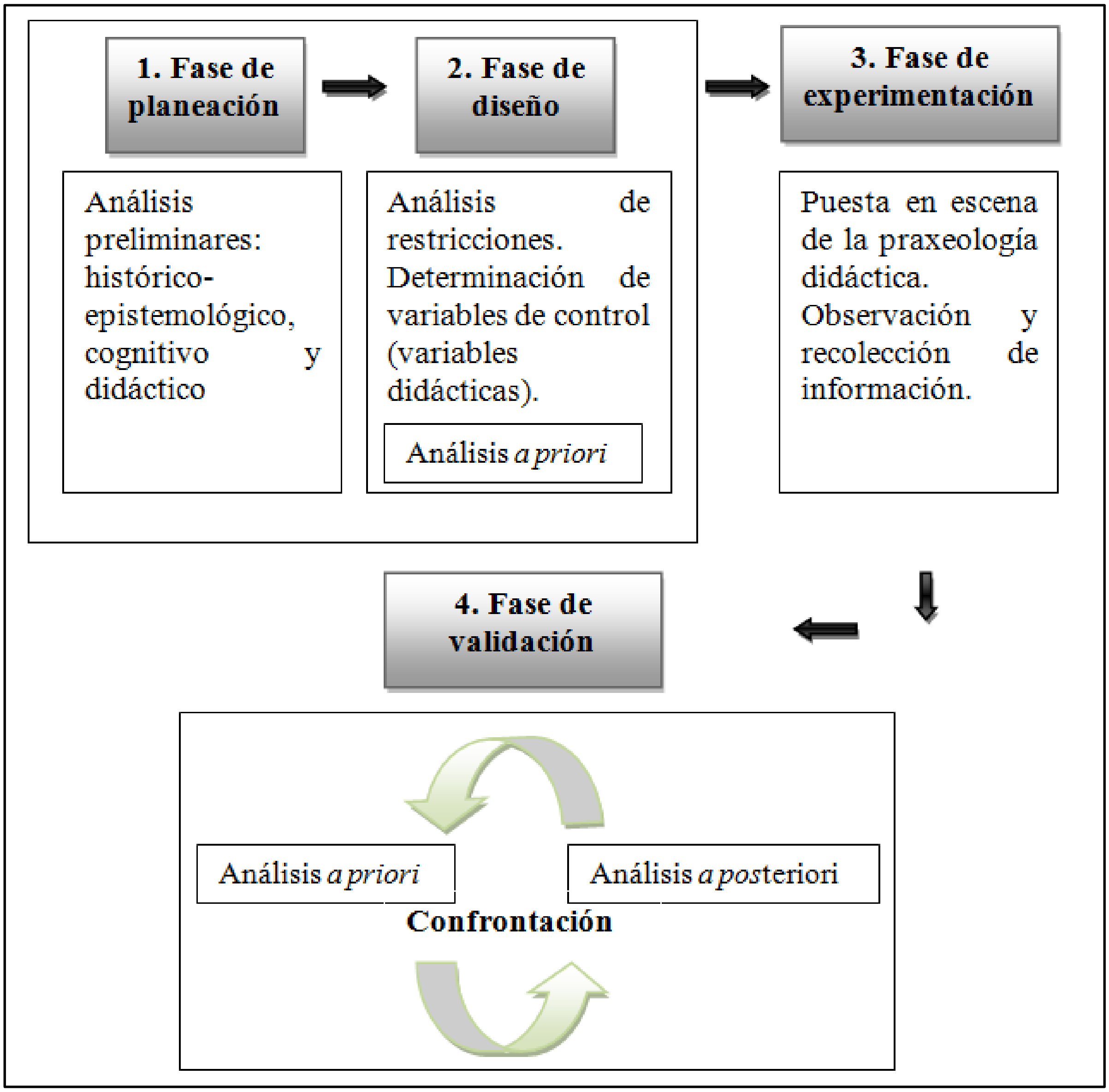


Figura 4. Fases de la ingeniería didáctica de Lezama y Farfán en RELIME (como se cita en Navarro, 2004).

En cuanto a los alcances o limitaciones de la ingeniería didáctica y sus vínculos con TAD, Bartolini Bussi (2005) presenta algunas investigaciones en donde las unidades de análisis son las situaciones de clase bajo dos herramientas teóricas: la teoría antropológica de lo didáctico (TDA) y la teoría de situaciones didácticas (TSD). Bartolini Bussi (2005) determina que la ingeniería didáctica es apropiada para los diseños de situaciones de clase porque las observaciones naturalistas no permiten ver su funcionamiento.

Reafirma la utilidad de la ingeniería didáctica al decir que lo importante en los estudios de aula particulares no son los resultados sino los métodos que permiten obtener los resultados.

Pero crítica la sofisticación teórica en la producción de estos métodos porque hacen difícil la difusión de los resultados de la investigación. Sin embargo aclara que a pesar de la sofisticación teórica de la TAD y TSD en una ingeniería didáctica siguen siendo adoptadas por diversos investigadores a nivel mundial (no solamente en Francia donde es la cuna de estas dos teorías).

Por otra parte Bartolini Bussi (2005) menciona que además ha surgido la necesidad de adoptar otra perspectiva teórica en la integración de TIC, la génesis instrumental, adicionándose un componente más de sofisticación a estas investigaciones. Da como ejemplos de la integración de la génesis instrumental a la TSD o la TAD, los trabajos con el uso de calculadoras simbólicas de Lagrange (2002) y Trouche (2005b). Lo anterior muestra que una ingeniería didáctica puede ser de largo aliento y no fácilmente culminada. Esto lleva a que se generen las siguientes preguntas:

¿Es necesario este grado de sofisticación teórica para la interpretación y diseño de actividades de aula? ¿Es posible destilar los rasgos esenciales de estas construcciones teóricas, relacionarlos con otras teorías o enfoques y comparar los resultados de utilización de estos en la interpretación y diseño de actividades de aula? (Bartolini Busi, 2005, p. 309-310).

En palabras concretas Bartolini Busi (2005) está invitando a la comunidad de educación matemática a lograr disminuir las dificultades de la sofisticación de las teorías en los diseños de aula.

2.2. Dimensiones didáctica y cognitiva

Se inicia este apartado con la revisión del panorama internacional en relación a las investigaciones y trabajos sobre el uso de CAS en la enseñanza de las matemáticas, este informe muestra las tendencias actuales de indagación sobre la integración de TIC en el aula. También se presentan algunos elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) en relación a las praxeologías locales relativamente completas, objetos ostensivos y no ostensivos. La TAD junto con la teoría de la génesis instrumental constituyen las técnicas instrumentadas que son el eje articulador entre las dos dimensiones.

2.2.1. Panorama Internacional del uso de TIC

En el *Second International Handbook of Mathematics Education* se encuentra el artículo de Artigue et al. (2003), allí se muestran los resultados de un estudio de publicaciones respecto al uso de TIC en el período de 1994 a 1998, en donde existe una literatura madura, que rompe con las ingenuas e iniciales aproximaciones de uso de TIC.

El estudio se realizó en dos etapas, la primera mira un *corpus* compuesto por 662 publicaciones internacionales, algunas de ellas halladas en la base de datos *Zentralblattfür Didaktik der Mathematik*. La segunda etapa toma un sub-corpus de 79 artículos provisto por el análisis estadístico y en el que se posteriormente se escogen 10 artículos paradigmáticos y representativos de las dimensiones para el análisis de integración de tecnología, producto del estudio cualitativo. Este estudio escoge como línea específica el uso educacional de CAS porque corresponde al más alto porcentaje de las clasificaciones de la primera respecto al tipo de TIC. De estos documentos el 70% de los artículos fueron hallados en *Internacional Journal Computer Algebra Mathematics Education*. Este estudio resalta que los CAS son de interés para la Educación Matemática, aunque sea incipiente su uso en el aula (Artigue et al., 2003).

Las publicaciones del sub-corpus de CAS están clasificadas en cinco tipos de problemáticas resumidas a continuación:

1. *Descripción técnica* (53%): estos artículos refuerzan las capacidades del CAS que se consideran pertinentes para el uso en la educación. Generalmente se enfatiza en las potencialidades educacionales de las TIC como la visualización, la modelación y la programación.
2. *Actividades de innovación en clase* (9%): estos artículos reportan el uso actual de CAS en clase. Se describen proyectos donde se experimentan e integran los CAS (realizados en Francia y Australia) al currículo de matemáticas. Una de las razones del por qué los CAS puede ser beneficiosos se da al decir que logran una mejor conceptualización en los estudiantes como resultado de las potencialidades y del ahorro del tiempo en la ejecución de procedimientos y algoritmos. Bajo esta mirada las TIC ofrecen soluciones a los problemas de aprendizaje. Algunas veces las fuentes de información de estos artículos provienen de la experiencia de los autores en la enseñanza, pero no muestran una discusión profunda de sus planteamientos.

3. *Presunciones acerca del mejoramiento* (12%): estos artículos son producto de investigaciones, presentan hipótesis, experimentaciones y conclusiones. Las hipótesis provienen desde perspectivas generales de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, relacionadas con las TIC, y a menudo consolidadas por una teoría cognitiva. Estos artículos afirman que el mejoramiento de la comprensión y de las habilidades para resolver problemas de los estudiantes son resultado del uso de TIC. Por lo que se realizan experimentaciones para mirar esas presunciones.
4. *Preguntas acerca del uso de tecnología* (21%): en contraste con los anteriores artículos, éstos no presumen las ventajas del uso de CAS, presentan innovaciones, experimentos o ejemplos de cómo los CAS son herramientas para direccionar preguntas. Estas preguntas pueden ser generales o teóricas y consideran los límites y las restricciones de los CAS, además de las tareas, los procedimientos y los tipos de entendimiento promovidos.
5. *Integración* (5%): esos artículos miran las condiciones para que los CAS sean usados como el Lápiz/Papel en las prácticas diarias de enseñanza y aprendizaje existentes en las instituciones escolares. Esas condiciones pueden determinar el tipo de conocimiento a ser enseñado, así como también las estrategias de solución y procedimientos en problemas usuales o problemas modificados. En estos artículos se da cuenta de las condiciones "*ecológicas*"[14] para el uso de CAS. Son interesantes porque abren líneas nuevas de indagación (Artigue et al., 2003, pp. 244-245).

Artigue et al. (2003) determinan que las publicaciones correspondientes al tipo 5 (integración) se organizan en dos aproximaciones:

1. La *aproximación instrumental* de TIC en donde se distingue un artefacto tecnológico y el instrumento que un ser humano construye a partir del artefacto (génesis instrumental) (se recomienda ver el artículo *la parabole du gaucher et de la casserolê bec verseur: Etude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices complexes* de Trouche, citado por Artigue et al., 2003).

[14]"La ecología de una praxeología, se refiere a las restricciones y las condiciones de posibilidad de la reconstrucción escolar de las mismas. Se recomienda que para abordar cualquier problema didáctico es necesario empezar por la ecología de las praxeologías locales" (Bosch & Gascón, 2004, p.22).

2. La *aproximación institucional* que investiga en qué medida los contenidos que se enseñan, así como las tareas y las técnicas (la manera de hacer las tareas) son afectados por la institución en el cual se enseñan. El interés de las TIC en la educación estaría en las técnicas nuevas, relacionadas con los CAS, en integración con las técnicas tradicionales, relacionados con el Lápiz/Papel (Ver Lagrange, 2000a).

Dado que la problemática abordada en este trabajo de investigación es la tipo 5, los referentes teóricos que se presentan en las dimensiones didáctica y cognitiva dan cuenta de las dos aproximaciones anteriores.

Respecto al bajo porcentaje de investigaciones referentes a la problemática de integración, se podría considerar oportuno ahondar un poco más en estos aspectos y por tanto lo que se reporta en este trabajo aporta a ello.

Otro punto crucial e importante en el artículo de Artigue et al. (2003) es la propuesta de relacionar la práctica habitual de Lápiz/Papel con el uso de las TIC, ésta es una cuestión emergente que posibilita la integración de las TIC en la escuela. Además se menciona que la recopilación realizada hasta esa fecha, no se encontró una verdadera elaboración teórica que diera cuenta de esta cuestión, a pesar de que las técnicas se consideran en un nivel importante entre las tareas y la conceptualización. Actualmente se conocen los aportes de APTE (s.f.) en relación a esta problemática.

Por cual la dimensión didáctica presenta los referentes de la Teoría Antropológica de lo Didáctico vinculada a la aproximación institucional, mientras que la dimensión cognitiva presenta los referentes de la génesis instrumental que da cuenta de la aproximación instrumental. La conciliación de dichas aproximaciones, como ya se mencionó, permiten determinar las técnicas instrumentadas.

2.2.2. Aportes de la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Al considerar la actividad matemática escolar dentro de una problemática más amplia, la de las actividades matemáticas institucionales, se genera un objeto primario de investigación que determina la evolución de la Teoría de la Transposición Didáctica al Enfoque Antropológico y, posteriormente, a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), en donde se amplía el enfoque a todas las instituciones en donde tiene lugar un saber matemático (Sierra, 2006).

La TAD propone un modelo de actividad matemática institucional, que incluye la actividad matemática escolar. En esta teoría lo didáctico se identifica con todo lo relativo al estudio, tomando la palabra "estudio" o proceso didáctico en un sentido muy amplio que engloba las nociones de enseñanza y aprendizaje comúnmente utilizadas en la cultura pedagógica (Sierra, 2006, p. 35).

"Se hablará de proceso didáctico cada vez que alguien se vea llevado a estudiar algo, en este caso las matemáticas, solo o con la ayuda de otra(s) persona(s). El aprendizaje es el efecto perseguido por el estudio y la enseñanza es un medio para el estudio, pero no el único" (Bosch et al., 2000, p. 59). "Por tanto la didáctica de las matemáticas se define, como la ciencia del estudio de las matemáticas" (Bosch et al., 2000, p. 47).

En cuanto a la actividad matemática "real" (esto es, efectivamente desarrollada en una institución humana en algún período histórico) es una actividad que, en mayor o menor medida:

(a) *Construye* el conocimiento matemático.

(b) Lo *difunde* en dicha institución.

(c) Lo *utiliza* en una situación determinada.

(d) Lo *transpone* a otras instituciones.

Esta inseparabilidad entre las diferentes formas de manipular los conocimientos matemáticos (construir, difundir, utilizar y transponer), constituye uno de los postulados de la Teoría Antropológica de lo Didáctico como se presenta en l*a transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado* de Chevallard (citado por Sierra, 2006). Considerándose que "dichas manipulaciones son necesarias e inseparables para que puedan satisfacerse las crecientes necesidades matemáticas de la sociedad" (Sierra, 2006, p. 34).

Por tanto, se considera que:

> Una *Obra Matemática* surge como respuesta a una cuestión o conjunto de cuestiones. En la respuesta matemática se cristaliza un conjunto organizado de objetos ligados entre sí por diversas interrelaciones, esto es una *Organización Matemática*. Dicha organización es el resultado final de una actividad matemática, que presenta una praxis que consta de tareas y técnicas y el discurso razonado logos sobre dicha práctica constituida por tecnologías y teorías. Pero como no hay praxis sin logos, al unir las dos caras de la actividad matemática se obtiene la noción de *praxeología* (Bosch et al., 2000, p. 274).

Desde de la TAD hacer matemáticas consiste en activar una praxeología matemática, esto quiere decir que se pueden construir praxeologías matemáticas nuevas o se pueden reproducir las existentes y previamente construidas. En la enseñanza la actividad consiste en construir praxeologías matemáticas ya existentes en relación a situaciones nuevas y bajo condiciones distintas, donde el papel del docente es la de dirigir esta reconstrucción (generando en particular las condiciones que mejor la permitan reconstruirla), es el aprendizaje el fruto de la reconstrucción (Bosch, 2003).

Todas estas praxeologías matemáticas se constituyen de un componente práctico y de otro teórico. Como ya se había mencionado, en el componente práctico se encuentran las tareas y las técnicas y en el componente teórico se encuentra la tecnología y la teoría. Al resolver los problemas o las tareas problemáticas son necesarias las técnicas consideradas como los modos de hacer o resolver la tarea. Las técnicas disponibles determinan las tareas o problemas de una institución y entre más amplias y complejas sean las tareas se logrará la necesidad de tecnologías nuevas, que darán lugar a técnicas nuevas capaces de resolver problemas nuevos. Así, "el trabajo de la técnica se manifiesta como un trabajo creativo, esto es, productor de técnicas nuevas que permiten resolver cuestiones planteadas a nivel tecnológico respecto de la técnica inicial" (Fonseca & Gascón, 2000, p. 4).

Las técnicas vivientes en una institución, son una manera de hacer correcta, comprensible y justificada la tarea. Por tanto se requiere de un discurso interpretativo y justificativo así como de un ámbito de aplicabilidad o validez, al que se le llama una tecnología. Además de justificar y hacer inteligible la técnica, la tecnología tiene la función importante de aportar elementos para modificar la técnica con el fin de ampliar su alcance, superando así sus limitaciones y posibilitando la producción de técnicas nuevas. (Gascón, 1998).

> De esta manera, alrededor de un tipo de tareas, T, se encuentra así, en principio, una tripleta formada por una técnica, por una tecnología y por una teoría, constituyéndose una praxeología u organización puntual, donde este último calificativo significa que se trata de una praxeología relativa a un único tipo de tareas, T. Las organizaciones puntuales pueden combinarse, en primer lugar, en organizaciones locales, centradas sobre una tecnología determinada, y después en organizaciones regionales, formadas alrededor de una teoría. Más allá, se denominará organización global el complejo praxeológico obtenido, en una institución dada, por la agregación de varias organizaciones regionales correspondientes a varias teorías (Chevallard, 2002, p. 6).

En este estudio, se considera como unidad de análisis en los procesos didácticos una PM local relativamente completa. En efecto, ésta puede reconstruirse “artificialmente” en la institución escolar como el resultado final de un proceso de ampliaciones y completaciones progresivas que parte de una praxeología puntual, éstas pasan por una serie de praxeologías intermedias generadas sucesivamente por un determinado desarrollo evolutivo de las cuestiones problemáticas y los tipos de tareas (Sierra, 2006).

En una PM local se plantean y resuelven problemas que en las PM puntuales no podían ni formularse. Por tanto estas cuestiones problemáticas nuevas deberían constituir la “razón de ser” de la PM local. Pero en determinadas instituciones matemáticas se produce el siguiente fenómeno:

> A medida que las praxeologías se integran para constituir organizaciones más complejas (locales, regionales y globales), la relación entre la cuestión y la respuesta tiende a invertirse hasta el punto que las razones de ser de la organización matemática (o conjunto de cuestiones problemáticas que le dan sentido) tienen la tendencia a desaparecer (Chevallard, 2002, p. 8).

En cuanto a las PM estudiadas en secundaria se han determinado que son puntuales, rígidas y poco articuladas entre sí. Esta rigidez está relacionada con la incompletitud de las PM locales que viven en la enseñanza secundaria y dicha incompletitud es la base de muchas de las discontinuidades entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004).

La noción de *completitud relativa* de una PM local puede precisarse en términos de los componentes de esta organización. En una primera aproximación, se podría decir que una PM será tanto más completa cuantos “más elementos”, técnicos tecnológicos y teóricos, contenga y cuanto “más ricos” sean estos elementos. Para concretar esta idea se presentan los indicadores, estos permiten “medir” el grado de completitud de la PM:

1. *Integración de los tipos de tareas*: en una PM local conviven necesariamente varios tipos de tareas problemáticas relacionadas entre sí, ya sea por un discurso tecnológico, o bien mediante sucesivos desarrollos de las técnicas. El grado de completitud depende entonces de la integración entre los distintos tipos de tareas y de los vínculos existentes entre ellas. Una PM local será menos completa cuanto más aisladas (esto es, realizables mediante técnicas que no estén relacionadas mediante ningún elemento tecnológico) sean los tipos de tareas que la componen.
2. *Diferentes técnicas y criterios para elegirlas:* una PM local será más completa en la medida que puedan existir técnicas alternativas para realizar algunos de sus tipos de tareas, sin que haya entonces una identificación absoluta entre cada tipo de tarea con su técnica asociada. Este indicador de la completitud comporta que en la PM local existan, además, los elementos tecnológicos que permiten cuestionar las distintas técnicas alternativas, analizar sus equivalencias o diferencias y discernir cuál es la más fiable o económica.
3. *Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas:* la flexibilidad de las técnicas de una PM local comporta, en particular, que éstas no se identifiquen rígidamente con los objetos ostensivos (*la dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad* en Bosch; citado por Bosch, Fonseca & Gascón, 2004, p. 219) que se utilizan para describirlas y para aplicarlas sino que, por el contrario, acepten diferentes representaciones ostensivas dependiendo de la actividad matemática en la que están inmersas y hasta de la tarea específica abordada dentro de un tipo de tareas.
4. *Existencia de tareas y de técnicas “inversas”*: otro indicador de la flexibilidad de las técnicas y, por lo tanto, del grado de completitud de la PM local lo proporciona el

hecho que existan en PM local técnicas "reversibles", es decir que permiten resolver un tipo de tarea y también la tarea inversa, entendiendo por "inversa" aquella que se define, por ejemplo, intercambiando datos e incógnitas o cuestionando las condiciones de realización de la tarea o de aplicación de una determinada técnica. Está claro que la tarea inversa de una tarea dada no está definida unívocamente.

5. *Interpretación del resultado de aplicar las técnicas*: en la medida que una PM local sea más completa, su discurso tecnológico deberá adquirir mayor funcionalidad, especialmente en la interpretación del funcionamiento de las técnicas y de su resultado. Este aspecto de la completitud implica que en PM local existen los elementos tecnológicos necesarios para llevar a cabo esta tarea de interpretación de las técnicas, que deberá hacerse en referencia a la PM local en su conjunto, en términos de todos sus componentes.
6. *Existencia de tareas matemáticas* "*abiertas*": una PM local será más completa en la medida en que permita abordar cuestiones "abiertas", esto es, tipos de tareas en los que se estudian situaciones donde los datos y las incógnitas no estén determinadas de antemano. En un primer nivel, las cuestiones abiertas son aquellas en las que los datos son valores conocidos que se tratan como si fuesen desconocidos (parámetros) y las incógnitas no son objetos matemáticos concretos (como, por ejemplo, valores numéricos) sino las relaciones que se establecen entre ellos en determinadas condiciones explicitadas en el enunciado de la tarea. Existe un segundo nivel de tareas abiertas en las que el estudiante ha de decidir, ante una situación determinada, qué datos debe utilizar y cuáles son las incógnitas más pertinentes. En este segundo nivel se incluyen las tareas de modelización matemática. Parece evidente que una PM local que permita abordar –y por lo tanto integre, en cierta medida– este tipo de cuestiones, también cumplirá los indicadores anteriores relativos a la flexibilidad de las técnicas, el desarrollo de los tipos de tareas y la existencia de un cuestionamiento tecnológico funcional.
7. *Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica:* el último indicador hace referencia explícita al hecho que cada PM local viene caracterizada por su tecnología. Por ello, consideramos que el grado de completitud de la PM local depende también de las relaciones que se establezcan entre estos elementos

> tecnológicos y de su incidencia efectiva sobre la práctica matemática que se lleva a cabo en PM local. En particular, un indicador importante del grado de completitud de una PM local lo constituye la medida en que la tecnología permita construir técnicas nuevas (para la comunidad de estudio) capaces de ampliar los tipos de tareas de PM local. Esta construcción progresiva de los tipos de tareas que se estudian es también una condición necesaria para poder plantear y abordar en PM local cuestiones problemáticas cada vez más abiertas (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004, pp. 219-221).

Para que se determine una PM local completa también es necesario precisar las características de un proceso didáctico. Estas características surgen de la consideración de los momentos didácticos como dimensiones del proceso de estudio (Chevallard, 2002), relacionando así la completitud de una PM con el modo de realización de los distintos momentos. Puede entonces considerarse que el grado de completitud de una PM local también depende de la medida en que, a lo largo de su proceso de construcción, se desarrollen seis momentos: "el momento del primer encuentro, el momento exploratorio, el momento tecnológico-teórico, el momento del trabajo de la técnica, el momento de institucionalización, y el momento de evaluación" (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004, p. 219). Sin embargo, el hecho de que se den los seis momentos no es la única razón para determinar que la PM local sea relativamente completa, se necesita de la medición de los siete indicadores anteriormente presentados. Toda praxeología matemática independiente de sus características puede desarrollar los seis momentos de estudio.

> Esta estructura del proceso de estudio no es lineal. Cada momento puede ser vivido con distintas intensidades, en diversos tiempos, tantas veces como se necesite a lo largo del proceso de estudio e incluso es habitual que algunos de ellos aparezcan simultáneamente. Lo que sí es importante destacar es que cada uno de los seis momentos del estudio desempeña una función específica necesaria para llevar a buen término el proceso y que existe una dinámica interna global que se manifiesta en la invariancia (o presencia necesaria) de ciertas relaciones entre dichos momentos (Sierra, 2006, p. 40).

Para determinar una praxeología didáctica es necesario precisar los siguientes momentos:

1. El *primer momento* del estudio es el del primer encuentro con la organización O que está en juego. Tal encuentro puede tener lugar de varias maneras, pero un modo de encuentro de "reencuentro"- inevitable, a menos que uno se quede en la superficie de la obra, es el

que consiste en encontrar O a través de al menos uno de los tipos de tareas Ti constitutivas de O. Este “primer encuentro” con el tipo de tareas Ti puede ocurrir varias veces, en función sobre todo de los entornos matemáticos y didácticos en los que se produce el redescubrimiento de un tipo de tareas como se vuelve a descubrir una persona que se creía conocer. [...]

2. El *segundo momento* es el de la exploración del tipo de tareas Ti y de la elaboración de una técnica τi relativa a este tipo de tareas… En realidad, el estudio y la resolución de un problema de un tipo determinado va siempre a la par con la constitución de al menos un embrión de técnica, a partir del cual una técnica más desarrollada podrá eventualmente emerger: el estudio de un problema particular, espécimen de un tipo estudiado, aparecería así, no como un fin en sí mismo, sino como un medio para la constitución de una técnica de resolución. Se trama así una dialéctica fundamental: estudiar problemas es un medio que permite crear y poner en marcha una técnica relativa a los problemas de un mismo tipo, técnica que será a continuación el medio para resolver de manera casi rutinaria los problemas de ese tipo. [...]
3. El *tercer momento* del estudio es el de la constitución del entorno tecnológico-teórico relativo a τi. De una manera general, este momento está en interrelación estrecha con cada uno de los otros momentos. Así, desde el primer encuentro con el tipo de tareas, se establece generalmente una relación con el entorno tecnológico-teórico anteriormente elaborado, o con gérmenes de un entorno por crear que se precisará mediante una relación dialéctica con la emergencia de la técnica. Sin embargo, por razones de economía didáctica global, a veces las estrategias de dirección de estudio tradicionales hacen en general de este tercer momento la primera etapa del estudio. [...]
4. El *cuarto momento* es el del trabajo de la técnica, que debe a la vez mejorar la técnica volviéndola más eficaz y más fiable (lo que exige generalmente retocar la tecnología elaborada hasta entonces), y acrecentar la maestría que se tiene de ella: este momento de puesta a prueba de la técnica supone en particular uno o uno, corpus de tareas adecuados tanto cualitativamente como cuantitativamente. […]
5. El *quinto momento* es el de institucionalización, que tiene por objeto precisar lo que es “exactamente” la praxeología matemática elaborada, distinguiendo claramente, por una parte, los elementos que, habiendo concurrido a su construcción, no le hayan sido

integrados y, por otra parte, los elementos que entrarán de manera definitiva en la praxeología matemática considerada –distinción que buscan precisar los alumnos cuando le preguntan al profesor, a propósito de tal resultado o tal procedimiento, si hay o no "que saberlo". […]

6. El *sexto momento* es el de evaluación, que se articula con el momento de la institucionalización […]. En la práctica, llega siempre un momento en el que se debe "hacer balance": porque este momento de reflexión donde, cualquiera que sea el criterio y el juez, se examina el valor de lo que se ha aprendido, este momento de verificación que, a pesar de los recuerdos de infancia, no es en absoluto invención de la escuela, participa de hecho de la "respiración" misma de toda actividad humana (Chevallard, 2002, pp. 22-25).

En todo tipo de enseñanza existen praxeologías didácticas y los momentos de estudio. El énfasis en uno de los momentos de estudio genera diferentes tipos de praxeologías u organizaciones didácticas ideales:

> Tenemos, en primer lugar, las organizaciones didácticas clásicas, que combinan los momentos tecnológico-teórico y del trabajo de la técnica y se caracterizan, entre otras cosas, por la trivialización de la actividad de resolución de problemas y por considerar que la enseñanza de las matemáticas es un proceso mecánico totalmente controlable por el profesor. En segundo lugar tenemos las organizaciones didácticas empiristas que pretenden integrar los momentos exploratorio y del trabajo de la técnica. Se caracterizan por la preeminencia que otorgan a la actividad de resolución de problemas dentro del proceso didáctico global y por considerar que el aprender matemáticas (al igual que aprender a nadar o a tocar el piano) es un proceso inductivo basado en la imitación y en la práctica. Tenemos, por último, las organizaciones didácticas constructivistas que toman simultáneamente en consideración los momentos tecnológico-teórico y exploratorio. Se caracterizan por contextualizar la actividad de resolución de problemas situándola en una actividad más amplia y por considerar que el aprendizaje es un proceso activo de construcción de conocimientos que se lleva a cabo siguiendo unas fases determinadas y que depende esencialmente de los conocimientos adquiridos con anterioridad (Bosch & Gascón, 2001, p. 15).

Por otra parte en el estudio de una praxeología matemática es necesario considerar las transformaciones que la volverán apta para ser estudiada por los sujetos de una institución. Una de las razones es el tipo de cuestiones dadas históricamente en el origen de la praxeología matemática y que no necesariamente son las más adecuadas para reconstruirla en el contexto escolar actual. Esta transformación de la praxeología matemática para ser estudiada se denomina transposición didáctica (Bosch et al., 2000).

2.2.2.1. Los objetos ostensivos y no ostensivos

Cada praxeología matemática y didáctica se constituye de diferentes objetos ostensivos y no ostensivos, que afectan todos sus componentes (tareas, técnicas, tecnologías y teoría). Para Bosch (2003) los objetos de representación son los *objetos ostensivos*[15], caracterizados por ser percibidos y de gozar de materialidad. Los objetos ostensivos son “manipulables” por el sujeto humano (ej. un sonido puede ser emitido y recibido). Dicha manipulación designa los diferentes usos de los objetos ostensivos (Bosch, 1994).

Los objetos ostensivos cumplen dos funciones: la *valencia semiótica* que es la posibilidad de ser los signos de otros objetos, generalmente objetos no ostensivos, a los cuales representan y la *valencia instrumental* que es la capacidad de integrarse en manipulaciones técnicas, tecnológicas y teóricas.

Bosch y Chevallard (1999) consideran que la función semiótica de los objetos ostensivos y su capacidad de producir sentido, no puede ser separada en efecto de su función instrumental. Ambas valencias de los objetos ostensivos dependen de las prácticas del sistema institucional donde son activados.

En cuanto a *los objetos no ostensivos*[16], se dice que no se pueden percibir ni tocar, pero se pueden evocar o invocar mediante la manipulación de ciertos objetos ostensivos.

Ambos objetos se encuentran relacionados en lo que se le llama la dialéctica del objeto ostensivo y no ostensivo: “se dice que los objetos no ostensivos emergen de la manipulación de objetos ostensivos, pero la manipulación está guiada y controlada por los objetos no ostensivos” (Bosch, 2003, p.19).

[15] Como los gestos, escrituras, los gráficos, discursos, sonidos, entre otros.
[16] Como las ideas, los conceptos y las creencias.

En las actividades matemáticas se pueden presentar varios registros de objetos ostensivos, como:

> Los registros orales, registros de traza (en los que se incluyen las gráficas y las producciones escritas), los registros gestuales y finalmente los registros que se pueden llamar de materialidad genérica, por falta de una mejor palabra, es decir donde el registro de ese objeto ostensivo no pertenece a ninguno de los registros de arriba. Estos registros no funcionan desligados unos de otros. (Bosch & Chevallard, 1999, p. 96).

Respecto a las relaciones de los objetos ostensivos y no ostensivos, Bosch y Chevallard (1999) determinan que la puesta en marcha de una técnica implica la manipulación de objetos ostensivos que a su vez son determinados por un objeto no ostensivo. Los objetos ostensivos se constituyen en la parte perceptible de la actividad, es decir lo que en la realización de la tarea se puede ver. Por ejemplo, la técnica que lleva a escribir $(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x - 2) = -1 + 5x + x^2(1 + x)$, conduce a una manipulación del objeto ostensivo escrito (paréntesis, letras, cifras, etc.), orales (pequeños discursos del tipo "x más $4x$, $5x$…") y gestuales (por ejemplo para agrupar los términos del mismo grado y verificar que no se olvidó ninguno). Esta manipulación es guiada por objetos no ostensivos, entre los cuales se encuentra el orden decreciente de los exponentes de los términos, los términos y grado de los polinomios, la factorización por x^2, la de adición de polinomios, etcétera.

En cuanto a los objetos ostensivos y no ostensivos en ambientes de L/P y CAS se han caracterizado en relación a la factorización de polinomios, tomando como ejemplo la situación de factorización de los polinomios de la forma $x^n - 1$ (Lagrange, 2000b).

En relación a los objetos ostensivos y no ostensivos en CAS (Ver Figura 5), se dice lo siguiente:

> En comparación con la factorización habitual, la factorización en CAS es vista desde dos niveles: en los objetos ostensivos están los comandos y sus resultados, en los objetos no ostensivos hay una cierta conciencia de las restricciones determinadas por las características efectivas y funcionales del sistema. En el caso de la factorización, son las restricciones de los algoritmos y la unicidad del resultado. La informática como la ciencia de los algoritmos imprime su marca a los objetos no ostensivos, y por medio de otras

entidades, las matemáticas, son evocadas en las prácticas habituales. Es por eso que se apela a la "informática" de estos objetos no ostensivos (Lagrange, 2000b, p. 71).

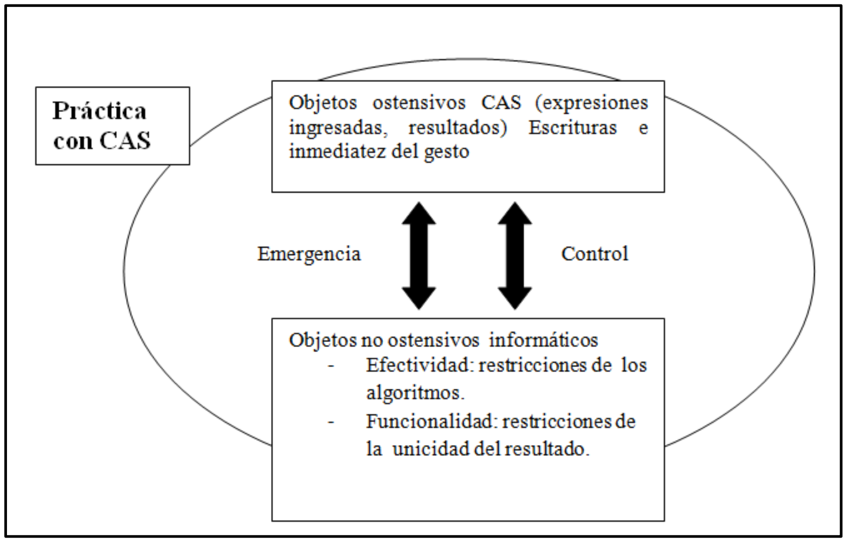


Figura 5. Prácticas con CAS. Objetos ostensivos y no ostensivos (Lagrange, 2000b, p. 71).

En las Figuras 5, 6 y 7 las flechas en doble dirección dan cuenta de la dialéctica entre los objetos ostensivos y no ostensivos. Mutuamente existe una emergencia y control, qué quiere decir esto, son los objetos ostensivos los que hacen emerger los objetos no ostensivos y viceversa, y a su vez cada uno ejerce un control sobre el otro.

Sobre lo factorización en L/P o habitual se presentan en la Figura 6 las relaciones entre sus objetos ostensivos y no ostensivos.

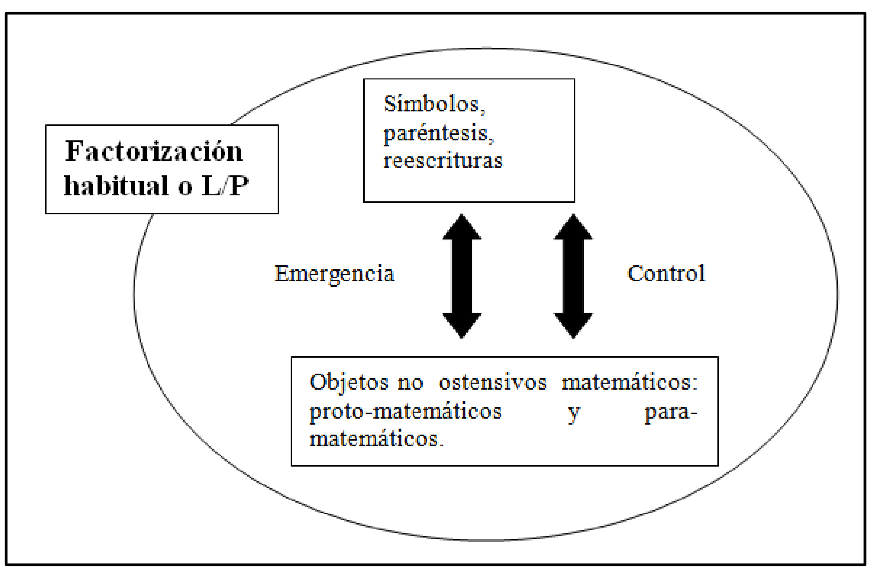


Figura 6. Objetos ostensivos y no ostensivos en L/P (Lagrange, 2000b, p. 61).

En cuanto a la diferenciación de los objetos ostensivos y no ostensivos en ambientes de L/P y CAS, Lagrange (2000b) los resume en la Tabla 1.

Tabla 1. Objetos ostensivos y no ostensivos en ambientes de L/P y CAS (Lagrange, 2000b, p.72).

A. TIPO DE OBJETOS	B. PRÁCTICA CON L/P	C. PRÁCTICA CON CAS
1. OSTENSIVOS	- Expresiones "habituales". (símbolos, paréntesis) - Reescrituras	- Expresiones CAS (símbolos, paréntesis, comandos, argumentos…) - Inmediatez del gesto.
2. NO OSTENSIVOS	- Proto-matemáticos[17] - Para-matemáticos[18]	- Restricciones de los algoritmos - Restricciones de unicidad del resultado.

Lagrange (2000b), resume en la Figura 7 las relaciones entre los objetos ostensivos y no –ostensivos en ambientes L/P y CAS. Muestra la emergencia - control entre los ostensivos CAS y los no ostensivos L/P; y de los nuevos ostensivos y no ostensivos computacionales (transposición computacional). Esto quiere decir que los objetos ostensivos CAS tienen relaciones con los objetos no ostensivos de L/P y a su vez los objetos ostensivos CAS están en emergencia y control con los no ostensivos computacionales. Los objetos ostensivos CAS se sitúan en una "doble referencia", por una parte a los objetos no ostensivos matemáticos y por otra a los objetos no ostensivos computacionales.

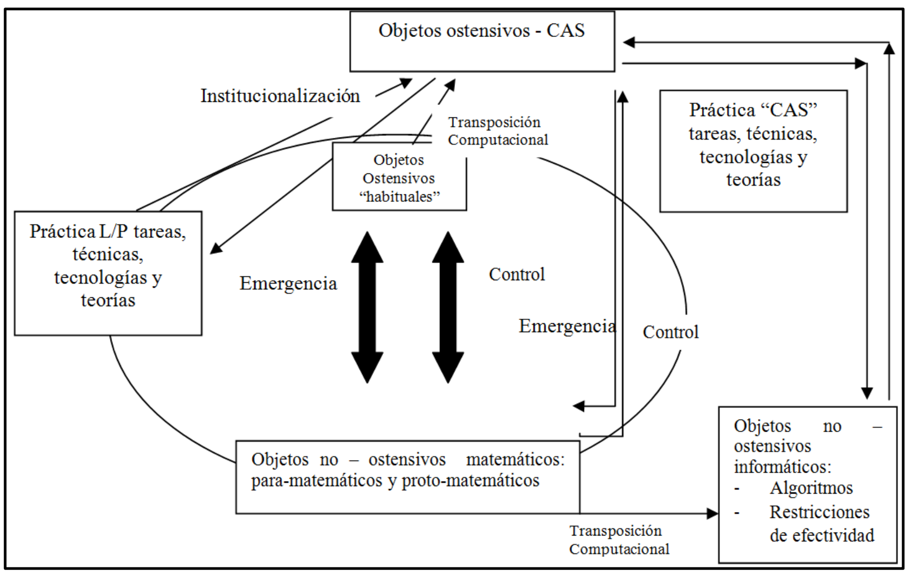


Figura 7.Objetos ostensivos y no ostensivos en un ambiente de L/P y CAS (Lagrange, 2000b, p. 80).

[17]Las nociones proto-matemáticas son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas a partir de sus propiedades, pero de forma que la noción misma no es reconocida ni como objeto de estudio y ni siquiera como instrumento útil para el estudio de otros objetos.

[18]Las nociones para-matemáticas se utilizan conscientemente (son reconocidas y designadas) como instrumentos que sirven para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera como objetos de estudio en sí mismas. La noción es relativa a la institución. Por ejemplo, la noción de demostración puede ser una noción matemática en un curso de lógica, pero puede ser una noción para-matemática en secundaria.

Respecto a la propuesta de Lagrange (2000b), Bosch (2003) y Acosta (2008), afirman que el uso de TIC generan nuevos tipos de objetos ostensivos y articulaciones entre registros. Y en relación a ambientes de L/P y CAS se lograrían otro tipo de relaciones complementarias de los objetos ostensivos que irían en pro de la construcción de los objetos no ostensivos.

En cuanto al tipo de objetos ostensivos considerados en el desarrollo de este trabajo, se miran los orales y de traza, omitiéndose los gestuales y de materialidad genérica. Esta restricción delimita los análisis a *priori* y de experimentación a los objetos ostensivos vinculados a las expresiones algebraicas, los gráficos, lo numérico y de la lengua natural alrededor de la factorización de polinomios.

2.2.2.2. Praxeologías matemáticas en textos escolares

Este análisis de textos da cuenta del saber a enseñar alrededor de la factorización de polinomios y ofrece una mirada a las posibles praxeologías matemáticas que posiblemente circulan en la institución educativa participante de esta investigación. Este análisis podría dar algunas pautas para la organización de las praxeologías locales, matemática y didáctica, relativamente completas con el uso de L/P y CAS en la factorización de polinomios.

Para ello se tienen en cuenta los componentes de una praxeología (tareas, técnicas, tecnologías y teoría) y también se sigue la rejilla elaborada por Guacaneme (2001) que da cuenta de tres aspectos: la estructura temática general del texto escolar, la estructura temática de las unidades y una mirada a algunos temas centrales, para este caso la factorización y los ceros de los polinomios.

Una de las razones para seleccionar los textos escolares se debe a que los estudiantes participantes de esta investigación utilizaron el texto Conexiones Matemáticas 9 de Serrano (2006), en este texto escolar se presenta la temática de funciones y ecuaciones cuadráticas (Ver Figura 8). Sin embargo no se explica la factorización de polinomios, simplemente se usa, así que también se revisa el texto escolar Conexiones Matemáticas 8 elaborado por Samper (2006) (Ver Figura 8), en donde la factorización de polinomios es el contenido de una unidad.

Otra de las razones de la selección de la serie Conexiones Matemáticas en los grados octavo y noveno es su presencia en el catálogo de textos escolares del MEN[19], allí se presentan las reseñas de cada los textos escolares que se encuentran en el mercado[20]. La serie de Conexiones Matemáticas incorpora los estándares básicos de competencias en matemáticas del año 2006.

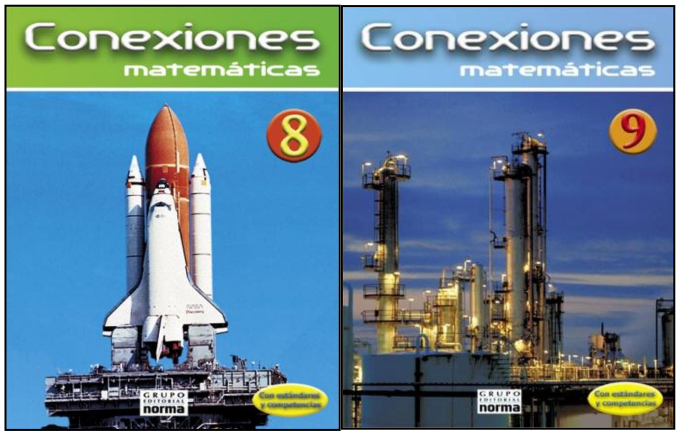


Figura 8. Carátula de los textos escolares Conexiones Matemáticas 8 y 9.

Estructura temática general de los textos escolares

En los siguientes recuadros se presentan las unidades de cada uno de los textos escolares Conexiones Matemáticas 8 y 9, las unidades subrayadas son las de interés para este trabajo.

Conexiones Matemáticas 8

8 - 1. Los números irracionales
8 - 2. Los números reales
8 - 3. Desigualdades y ecuaciones lineales
8 - 4. <u>Polinomios</u>
8 - 5. <u>Factorización y aplicaciones</u>
8 - 6. Modelos de Función
8 - 7. Geometría
8 - 8. Triángulos y cuadriláteros
8 - 9. Estudio de sólidos
8 -10. Estadística y probabilidad

[19] La página es www.textosescolares.gov.co

[20] Las reseñas escolares de los textos de Conexiones Matemáticas 8 y 9 fueron obtenidas el 30 de mayo de 2009 en el catálogo de textos escolares disponible del portal de Colombia Aprende, específicamente en: http://64.76.190.172/textos_escolares/contenidos/resultado_busqueda.php

Conexiones Matemáticas 9

9 - 1. Números reales
9 - 2. Función Lineal y Afín. Sistemas de ecuaciones lineales
9 - 3. Función cuadrática. Ecuación cuadrática
9 - 4. Números complejos
9 - 5. Métodos de demostración
9 - 6. Sucesiones y progresiones
9 - 7. Semejanza
9 - 8. Circunferencias
9 - 9. Probabilidad
9-10. Matrices y determinantes

Cada una de las unidades de la serie Conexiones Matemáticas tiene la siguiente organización:

- *Apertura de la unidad:* además de presentarse algunos referentes curriculares, se les propone a los estudiantes efectuar un taller nombrado "prepárate" que es una actividad introductoria que requiere de los conocimientos previos y útiles en el desarrollo de las próximas tareas (Ver Figura 9).
- *Temas:* las explicaciones inician con un ejemplo. La información más importante se escribe dentro de un cuadro en azul y generalmente se presenta en una sola página (Ver Figura 9).
- *Taller de competencias*: finalizado cada tema se propone un taller llamado de competencias. En algunas preguntas se presentan definiciones o teoremas que complementan los temas (Ver Figura 9).

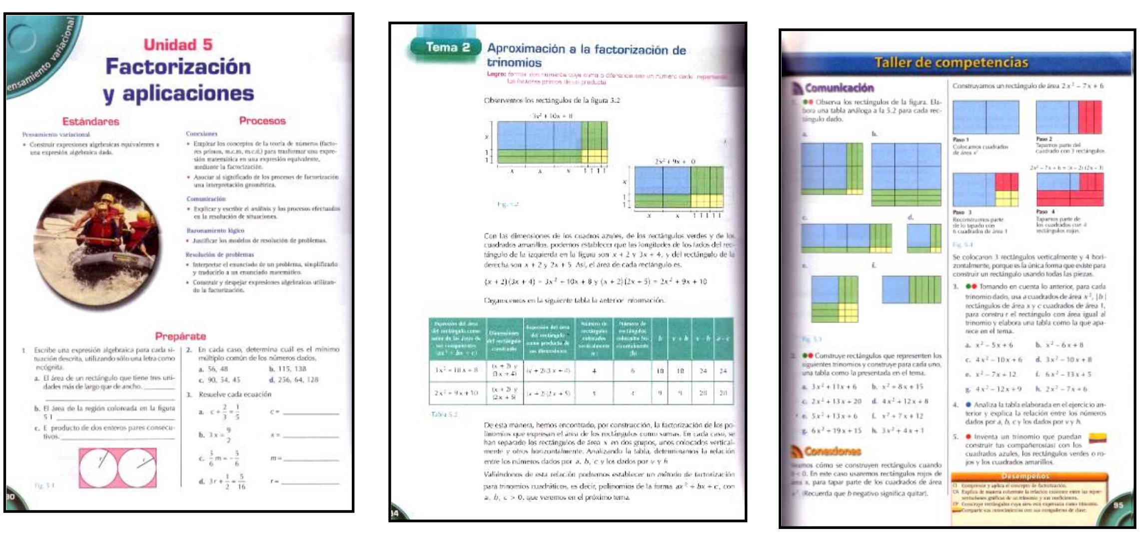


Figura 9. Imágenes de apertura de la unidad, temas y taller de competencias.

- *Para avanzar más*: son preguntas para reforzar los conceptos trabajados y en ocasiones introducir algunos nuevos.
- *Evaluación de competencias*: al finalizar la unidad se presentan algunas preguntas y una autoevaluación con algunos criterios que deben responder con un sí o un no.
- *Prueba Saber*: a partir de una situación en contexto se desglosan preguntas de opción múltiple bajo el modelo de las Pruebas Saber[21].

El texto inicia con la información de la editorial, autora entre otros datos de producción. Sigue la presentación de las unidades y de su organización general. Luego desarrolla cada una de las unidades y finaliza con un glosario y bibliografía del texto escolar. En la contraportada se presenta una descripción de la organización del texto, igual a la que aparece en el catálogo de textos escolares del MEN.

Estructura temática de las unidades

La estructura general de la unidad 8-4: polinomios se resume en la Figura 10, en donde se establecen las conexiones entre los diferentes contenidos; mientras que en la Tabla 2, se da el nombre y el orden de cada uno de los temas. La determinación de una expresión algebraica inicia desde la definición de monomio y polinomio, posteriormente se determinan las operaciones entre los polinomios, en la operación de multiplicación se presentan los productos notables.

[21]Los estudiantes de los grados quinto y noveno presentan cada tres años una prueba externa a nivel nacional llamada Saber, efectuada por el Instituto Colombiano para la evaluación de la Educación (ICFES).

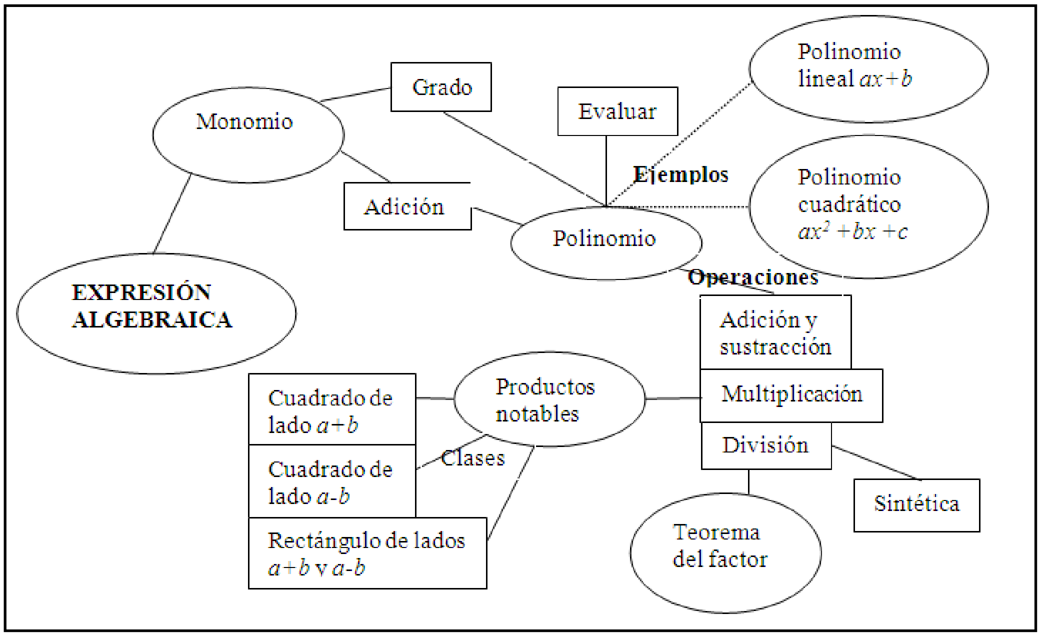


Figura 10. Estructura temática de la unidad 8-4 de Polinomios.

Tabla 2. Temas de la unidad 8-4 de polinomios.

A. #	B. NOMBRE DEL TEMA
8-4-1	Expresiones algebraicas
8-4-2	Polinomios
8-4-3	Adición y sustracción de polinomios
8-4-4	Multiplicación de polinomios
8-4-5	Productos notables
8-4-6	División de polinomios
8-4-7	División sintética

En el tema 8-4-1 se presenta la definición y ejemplos de las expresiones algebraicas, en contextos de compras y dinero. La tarea inicial es hallar la expresión algebraica dado un enunciado en lengua natural, por lo que realizan una tabla en donde se organiza la situación, la expresión verbal y la expresión matemática.

En el tema 8-4-2 se determinan los monomios y los términos semejantes. En la explicación se muestra el procedimiento de reducción a partir de la suma algebraica. En relación a los monomios se define un polinomio.

En el tema 8-4-3 se presentan las técnicas para la suma de polinomios. La situación inicial propone hallar el área de rectángulos cuyos lados son expresiones algebraicas en el contexto de una fábrica de baldosas. Se presenta el procedimiento para efectuar adiciones y sustracciones de polinomios, que se basa en la reducción de términos semejantes en un recuadro azul.

En el tema 8-4-4 se explica la técnica para realizar la multiplicación de polinomios a partir de tres ejemplos: producto de dos monomios, producto de un monomio con un polinomio y producto de dos polinomios. En la temática no se explicita la propiedad distributiva, pero si la ley de exponentes para potencias de igual base.

En el tema 8-4-5 sobre productos notables se utilizan cuatro piezas "rectangulares" de diferente área en relación a una expresión algebraica. Las piezas se distinguen además de la expresión algebraica por el color. Se muestra el proceso para obtener un "cuadrado" de lado $a+b$, un "cuadrado" de lado $a-b$ y un "rectángulo" de lados $a+b$ y $a-b$. Con la construcción de estas figuras se llega a la equivalencia de expresiones algebraicas cuando se encuentran en la forma desarrollada (suma de monomios de diferente grado sin términos semejantes) y en la forma factorizada.

En la división de polinomios (tema 8-4-6) se determinan las técnicas para dividir un polinomio y un monomio y dos polinomios. La explicación de las técnicas se acompaña con ejemplos.

Adicional a la división de polinomios, se presenta la técnica de la división sintética (tema 8-4-7) entre un polinomio por otro de la forma $x-r$, a medida que se explica el procedimiento se presenta un ejemplo con un polinomio de grado tres.

No solo las técnicas y tecnologías están en las temáticas, en algunos casos se dan en los talleres para avanzar más en recuadros azules o en el enunciado de una tarea. Una vez las tecnologías son enunciadas se solicita su uso.

Son frecuentes en las temáticas de esta unidad los ejemplos que muestran las técnicas. Las tecnologías suelen estar en recuadros azules o en las explicaciones de los ejemplos. En la Tabla 3, se resumen algunos tipos de tareas, técnicas y tecnologías en relación a la unidad de polinomios. Algunos tipos de tareas se han asociado según las técnicas y tecnologías (Ver Anexo A, Tabla 1).

Tabla 3. Praxeología matemática de la unidad 8-4 de polinomios.

<table>
<tr><th colspan="2">A. TIPOS DE TAREAS[22]</th><th>B. TÉCNICAS</th><th>C. TECNOLOGÍAS</th><th>D. TEORÍA</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Evaluar una expresión algebraica en relación a una letra, del cual se conoce su valor.</td><td>Sustitución de una letra por un valor dado y realización de las operaciones indicadas.</td><td>Propiedades y operaciones de los números reales.</td><td rowspan="15">Anillo de polinomios</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.</td><td rowspan="2">Hallar la expresión algebraica correspondiente a un enunciado, el área o el volumen de una figura geométrica.</td><td rowspan="2">Se divide el enunciado y/o figura geométrica en situación, expresión verbal y expresión matemática. La letra representa cantidades desconocidas combinadas con números a partir de operaciones.</td><td>Propiedades y operaciones de expresiones algebraicas.</td></tr>
<tr><td>Definición de expresión algebraica.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Realizar la figura geométrica que se relaciona con una expresión algebraica dada.</td><td>Construcción de figuras geométricas.</td><td>Distinción entre las definiciones de perímetro, área y volumen, y su relación con las medidas de los lados de las figuras geométricas enunciadas como expresiones algebraicas.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Determinar y resolver una ecuación a partir de los datos de un enunciado.</td><td>Dado un enunciado se discriminan las oraciones relacionadas con un valor desconocido y se expresan como una letra que se opera con números y se relaciona (igualdad). Posteriormente se hallan los valores que hacen verdadera la igualdad.</td><td>Propiedades algebraicas de los números reales.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5.</td><td rowspan="2">Determinar si dos expresiones algebraicas son equivalentes.</td><td rowspan="2">Sustitución de una letra por un valor dado y realización de las operaciones indicadas.</td><td>Noción de equivalencia de expresiones algebraicas y sus propiedades algebraicas.</td></tr>
<tr><td>Propiedades y operaciones de los números reales.</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Simplificar los términos de un polinomio.</td><td>Reducción de términos semejantes</td><td>Propiedades de la suma de polinomios.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">7.</td><td rowspan="4">Hallar el grado de un polinomio o monomio.</td><td rowspan="4">Para hallar el grado de un monomio o polinomio, es necesario distinguir los exponentes de las variables. En monomios de una variable el grado lo determina el exponente, en monomios de varias variables el grado lo determina la suma de sus exponentes y en un polinomio el grado lo determina el término de mayor grado.</td><td>Definición de un polinomio o monomio.</td></tr>
<tr><td>Orden de un polinomio.</td></tr>
<tr><td>Definición de grado de un monomio y polinomio.</td></tr>
<tr><td>Propiedades y operaciones de números naturales.</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>Realizar adiciones y sustracciones de polinomios.</td><td>Reducción de términos semejantes.</td><td>Propiedades de la suma de polinomios.</td></tr>
</table>

[22] En cada una de las praxeologías matemáticas se presentan una agrupación de tareas, en ocasiones desligadas de un contexto o valores particulares, por lo que se denominan tipos de tareas.

A. TIPOS DE TAREAS[22]	B. TÉCNICAS	C. TECNOLOGÍAS	D. TEORÍA
9. Hallar el resultado de multiplicar dos polinomios.	Multiplicación de cada término de un polinomio por los términos del otro y reducción de términos semejantes.	Propiedades de la multiplicación de polinomios.	
10. Efectuar las divisiones de dos polinomios. Hallar el factor para completar la igualdad.	División de polinomios. División sintética.	Propiedades de la división de polinomios	

En la Figura 11, se presenta la estructura de la unidad 8-5 correspondiente a la factorización y aplicaciones del libro Conexiones Matemáticas 8 y en la Tabla 4, se presentan el nombre y orden de los temas. La organización de la unidad de factorización se divide entre tres temáticas principales: números naturales, polinomios y fracciones algebraicas. Inicialmente se define la factorización desde los números naturales, posteriormente se determina algunas técnicas L/P para factorizar polinomios, finalmente las técnicas de factorización son usadas para realizar operaciones entre fracciones algebraicas.

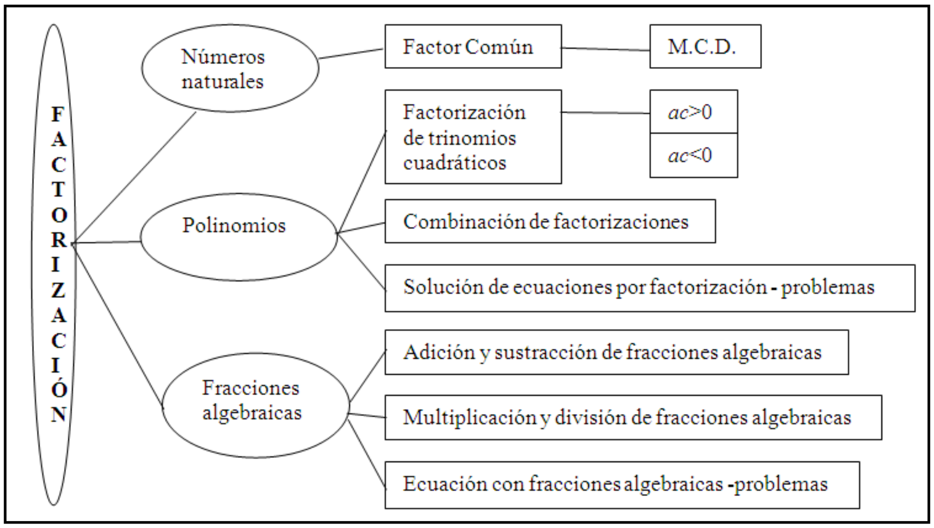


Figura 11. Estructura temática de la unidad 8-5 de factorización y aplicaciones.

Tabla 4. Temas de la unidad 8-5 de factorización y aplicaciones.

A. #	B. NOMBRE DEL TEMA
8-5-1	Factor común
8-5-2	Aproximación a la factorización de trinomios
8-5-3	Factorización de trinomios cuadráticos ($ac > 0$)
8-5-4	Factorización de trinomios cuadráticos ($ac < 0$)
8-5-5	Combinación de factorizaciones

A. #	B. NOMBRE DEL TEMA
8-5-6	Ecuaciones y resolución de problemas
8-5-7	Fracciones algebraicas y despeje de variables
8-5-8	Multiplicación y división de fracciones algebraicas
8-5-9	Adición y sustracción de fracciones algebraicas
8-5-10	Ecuaciones con fracciones algebraicas y problemas

El tema 8-5-1 inicia con la factorización de los números enteros. Luego pasan a relacionar la factorización de los números enteros con la factorización de los polinomios. Finalmente se introduce el máximo común divisor para hallar el factor común entre los coeficientes de un polinomio.

En el tema 8-5-2 de aproximación a la factorización de trinomios se utilizan rectángulos de diferentes tamaños y colores a los que se les asocian valores a sus áreas usando expresiones algebraicas. La tarea propuesta es construir un rectángulo dada la expresión de la forma $ax^2 + bx + c$, hallar sus dimensiones y el área como el producto de sus dimensiones. En los ejemplos de la temática se muestran los casos donde los coeficientes a, b y c son positivos, sólo en el taller de competencias se muestra un caso donde $b < 0$ y se proponen construir las áreas para algunos polinomios de este tipo. No se presentan los casos para a y c negativos.

En las siguientes dos temáticas (8-5-3 y 8-5-4) se diferencian los trinomios $ax^2 + bx + c$ en aquellos que $ac > 0$ y $ac < 0$. En el caso $ac > 0$ se presenta un trinomio que cumple esa condición y se realiza el procedimiento descrito en el recuadro azul. La técnica de la factorización esta acompañada de la construcción de un “rectángulo” cuya área se expresa con un trinomio cuadrático. Para el caso de $ac < 0$ se dan dos ejemplos, pero no se presenta el caso de un “rectángulo” cuya área sea igual al trinomio cuadrático. Sin embargo la técnica de factorización es similar al caso de $ac > 0$, con algunas modificaciones. Esta técnica de factorización de polinomios cuadráticos de una variable deja de lado algunos polinomios cuyos ceros no son enteros.

La quinta temática 8-5-5 se titula combinación de factorizaciones. Presenta en un recuadro azul una serie de pasos para lograr factorizar completamente el polinomio. Se sugiere: ordenar el polinomio de manera descendente, obtener el monomio factor común o el número factor racional necesario para hallar un polinomio con coeficientes enteros. Una vez se tiene el polinomio expresado de esa manera se mira si el otro factor es un trinomio o una diferencia de cuadrados y se realiza la factorización, si hay cuatro términos hay que agruparlos para lograr la factorización, y por último es necesario comprobar que los factores resultantes sean primos.

El tema 8-5-6 presenta un problema babilónico solucionado a partir de una ecuación cuadrática, para hallar la solución se plantea la propiedad de los productos nulos, ésta sería una tecnología para justificar el uso de la factorización en la solución de la ecuación cuadrática. No se presenta la vinculación de la factorización con los ceros o raíces de un polinomio.

En la Tabla 5 se resumen algunos tipos de tareas, técnicas y tecnologías en relación a las seis primeras temáticas de la unidad de factorización y aplicaciones. Las tareas se han asociado según las técnicas y tecnologías (Ver Anexo A, Tabla 2).

Tabla 5. Praxeología matemática en la unidad 8-5 de factorización y aplicaciones.

A. TIPOS DE TAREAS	B. TÉCNICAS	C. TECNOLOGÍAS	D. TEORÍA
1. Hallar el factor común de dos o más monomios.	Descomposición del coeficiente de un monomio como el producto de números primos y de las potencias de las variables como productos. Comparación entre los coeficientes y variables de los monomios para hallar el máximo común divisor de ambos, estos dos valores determinan un monomio que es el máximo común divisor de los monomios.	Propiedad distributiva Definición de máximo común divisor de un monomio y un número entero. Propiedades de la multiplicación y la adición en números enteros y expresiones algebraicas.	**Anillo de polinomios**
2. Obtener la expresión factorizada o desarrollada[23] de los polinomios correspondientes al área de un rectángulo. Construir rectángulos que representen algunos trinomios.	En estas tareas el área de un rectángulo se halla a partir del producto de la base y la altura (forma factorizada) o la suma de las áreas de las subfiguras que lo componen (forma desarrollada). Construcción de rectángulos dado el polinomio en su forma factorizada o desarrollada.	Propiedades de la suma de monomios y la multiplicación de polinomios. Definición de área. Definición de la forma factorizada de un polinomio. Expresiones algebraicas equivalentes.	
3. Factorizar polinomios. Determinar si un polinomio es irreductible o primo	Factorización de la forma Trinomio $ac > 0$ ó $ac < 0$ (Ver Figura 13). Factorización por agrupación y factor común.	Definición de factorización de polinomios. Definición de polinomio irreductible Definición de polinomio primo.	

[23] En el texto escolar no se determina el término forma desarrollada, ésta corresponde a la forma de escritura algebraica de la definición de un polinomio.

A. TIPOS DE TAREAS	B. TÉCNICAS	C. TECNOLOGÍAS	D. TEORÍA
4. Resolver ecuaciones cuadráticas	Factorización de la ecuación cuadrática y uso de la propiedad de los productos nulos para hallar las raíces.	Propiedad de los productos nulos. Definición de factorización de polinomios.	

Los últimos temas, del 8-5-7 al 8-5-10, tratan sobre fracciones algebraicas, donde la factorización completa de polinomios se utiliza en los procedimientos para simplificar, sumar, restar, dividir y multiplicar. Estas temáticas no se consideraron en el análisis de la unidad.

En la Figura 12 se presentan las relaciones de los temas de la unidad 9-3: función cuadrática, ecuaciones cuadráticas del libro Conexiones Matemáticas 9. En la Tabla 6, se muestra la organización y nombres de los temas. La organización de la función cuadrática presenta cinco grandes temáticas, la parábola, la ecuación cuadrática, su función inversa, las desigualdades cuadráticas y las ecuaciones con radicales. El centro del análisis de la unidad se da en relación a la parábola y la ecuación cuadrática.

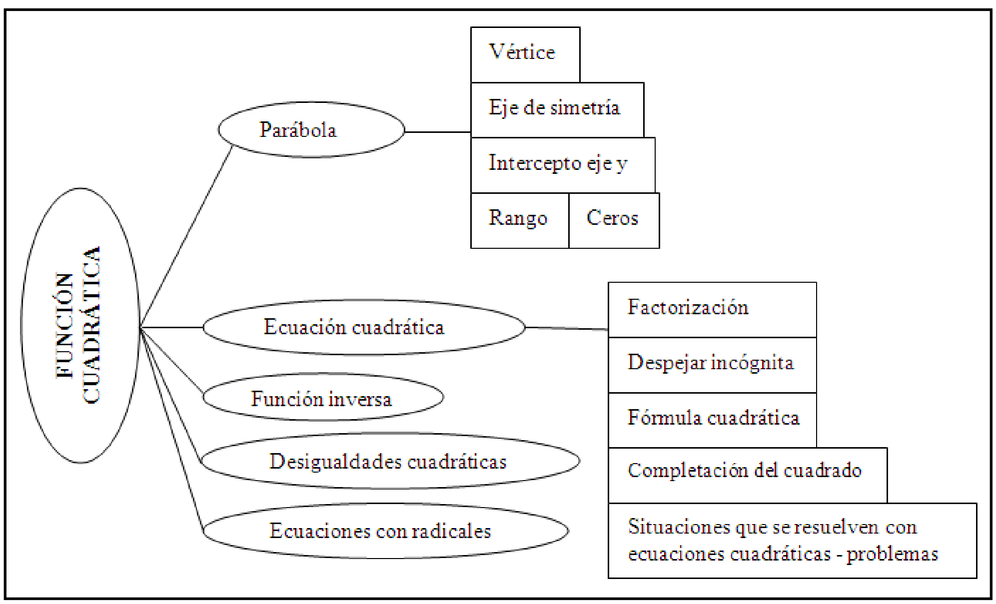


Figura 12. Estructura temática de la unidad 9-3 de función cuadrática, ecuación cuadrática..

Tabla 6. Temas de la unidad 9-3 de función cuadrática, ecuación cuadrática.

A. #	B. NOMBRE DEL TEMA
9-3-1	La función cuadrática, su gráfica y características
9-3-2	La función inversa de la función cuadrática
9-3-3	Solución de ecuaciones cuadráticas

A. #	B. NOMBRE DEL TEMA
9-3-4	Fórmula cuadrática
9-3-5	Gráfica de la función cuadrática
9-3-6	Problemas con ecuaciones cuadráticas
9-3-7	Desigualdades cuadráticas
9-3-8	Ecuaciones con radicales simples

El tema 9-3-1 es sobre las características de la gráfica de la función cuadrática. Se analiza la gráfica de la expresión $y = f(x) = x^2$, se determina que es simétrica y se compara con la línea recta; esta curva se llama parábola con vértice en $(0,0)$. El ejemplo muestra la gráfica de $y = x^2 - 6x + 5$, el eje de simetría y el vértice. Para realizar la gráfica, el eje de simetría y el vértice se escribe la expresión de la forma $y - k = a(x - h)^2$ (conocida como la forma canónica).

En el tema 9-3-2 de la función inversa se analizan las funciones inversas de $f(x) = y = 3x^2$ y $g(x) = y = x^2 - 2x - 3$. Se determina la simetría de las gráficas con respecto a la recta $y = x$ y se restringen los valores del dominio de la función inversa. En el caso de la función $g(x) = y = x^2 - 2x - 3$ se escribe de la forma $y - k = a(x - h)^2$. No se explícita como obtener la expresión algebraica de la función inversa.

El tema 9-3-3 de solución de ecuaciones cuadráticas se dicen que son aquellas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, su solución es hallar los valores de x para los cuales $y = 0$, esto equivale a encontrar los interceptos con el eje x de la función cuadrática (ceros). Se presentan diferentes técnicas, entre las que se incluyen la factorización y el método de completación de cuadrados que lleva a la fórmula cuadrática.

En el tema 9-3-4 se determina la fórmula cuadrática, aunque ya se había presentado sin ser nombrada. En esta fórmula se distingue el discriminante y a partir de sus valores se halla el número de soluciones de la ecuación cuadrática.

Nuevamente se retoma la gráfica de función cuadrática en el tema 9-3-5. En este caso además de hallarse el vértice y eje de simetría, se determina el rango, el dominio y los ceros. Posteriormente se realiza la gráfica de la función $f(x) = y = x^2 - 4x + 3$ y se generalizan los resultados para hallar el vértice, los interceptos con los ejes, el eje de simetría y el rango de la función.

En el tema 9-3-6, se plantean situaciones involucradas con las ecuaciones cuadráticas. El ejemplo presentado se relaciona con una excursión de estudiantes de 11°, los datos se han organizado en una tabla, entre ellos las ecuaciones del problema. Cada uno de los procedimientos lleva a resolver la ecuación cuadrática.

El tema 9-3-7 trata sobre desigualdades cuadráticas. Allí se muestran las regiones correspondientes a la desigualdad cuadrática en un recuadro azul. Uno de los ejemplos presenta una región del plano determinada por un sistema de desigualdades, cuya solución es la región de intersección de las dos regiones.

En el tema 9-3-8 se presentan las ecuaciones con radicales simples, la técnica de solución consiste en eliminar los radicales, la ecuación resultante tiene un conjunto de solución más amplio, es necesario asegurarse que tales soluciones satisfagan la original. Se presentan dos ejemplos de este tipo de ecuaciones.

En la Tabla 7 se resumen algunos tipos de tareas, técnicas y tecnologías en relación a la unidad de función cuadrática, ecuación cuadrática. Se excluyen los temas 9-3-7 y 9-3-8, porque no se vinculan con los intereses de este trabajo. Algunos tipos de tareas se han asociado según las técnicas y tecnologías (Ver Anexo A, Tabla 3).

Tabla 7. Praxeología matemática en la unidad 9-3 de función cuadrática, ecuación cuadrática.

A. TIPOS DE TAREAS	B. TÉCNICAS	C. TECNOLOGÍAS	D. TEORÍA
1. Escribir las funciones cuadráticas en la forma $y = ax^2 + bx + c$ ó $y - k = a(x-h)^2$.	Completación de cuadrados y factorización.	Equivalencia de expresiones algebraicas Propiedades uniforme y distributiva.	**Funciones polinómicas**
2. Realizar la gráfica de funciones cuadráticas y hallar sus interceptos con los ejes, el vértice, el eje de simetría y el rango.	Dar algunos valores a x (variable independiente) y sustituirlos en la expresión de la función cuadrática para hallar y (variable dependiente). Designar algunas parejas ordenadas (x, y) y ubicarlas en el plano cartesiano, los valores de x hacen referencia al eje horizontal y los de y al eje vertical. Distinguir algunos de estos puntos	Características de la parábola en relación a la expresión algebraica de la función cuadrática Una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ se puede escribir de la forma $y - k = a(x-h)^2$, donde las coordenadas del vértice serían (h, k) y el eje de simetría es $y = h$.	

A. TIPOS DE TAREAS	B. TÉCNICAS	C. TECNOLOGÍAS	D. TEORÍA
	como los ceros (cortes con el eje x) y el vértice (Punto máximo o mínimo de la parábola). Otra manera es dada la forma desarrollada de la función cuadrática encontrar la canónica (manipulaciones algebraicas), de esta manera se encuentran las coordenadas del vértice y el eje de simetría. Se sustituyen en la expresión algebraica dos valores de x se obtienen dos puntos que junto el vértice permiten realizar la curva.	Definición de simetría. Propiedades y operaciones de polinomios.	Funciones polinómicas
3. Encontrar la función inversa de una función cuadrática.	Para hallar la expresión de una función inversa, basta con hacer un cambio de las variables de la función cuadrática dada: la variable independiente será la variable dependiente de la inversa y la variable dependiente será la variable independiente de la inversa. Es necesario restringir el dominio de la función inversa.	Definición de función inversa. Existencia de la función inversa.	
4. Representar en el mismo plano una función y su función inversa.	Procedimiento en L/P para hacer gráficas de funciones cuadráticas explicado en la segunda fila de esta tabla.	Las gráficas de la función y su inversa son simétricas a $y = x$.	
5. Hallar la solución de ecuaciones cuadráticas	Fórmula cuadrática, completación de cuadrados, factorización, despeje de incógnita.	Propiedades y operaciones de polinomios.	
6. Calcular el valor del discriminante y establecer cuántas raíces reales tiene la ecuación cuadrática.	Sustituir los valores a, b y c en $b^2 - 4ac$, al considerar que $ax^2 + bx + c = 0$	Análisis de las raíces según el discriminante. Teorema del factor.	
7. Hallar y resolver la ecuación cuadrática correspondiente a una situación o enunciado.	Escritura de notación algebraica. Fórmula cuadrática, completación de cuadrados.	Propiedades uniforme y distributiva.	

Una mirada a algunos temas centrales

Dado que en este trabajo son importantes las técnicas en relación a la factorización de polinomios, se han analizado algunas unidades de los textos escolares Conexiones Matemáticas 8 y 9. A continuación se amplía un poco más lo relacionado con la factorización de polinomios.

También se consideró necesario revisar la relación de los ceros con la factorización, ya que permiten el trabajo con las representaciones gráficas y además vincula la factorización con una teoría, el teorema de factor y el teorema fundamental del álgebra. La conexión de diferentes representaciones (gráfica, algebraica, numérica, lengua natural) da elementos para construir otras técnicas de factorización de polinomios que no necesariamente se relacionan con el tratamiento de las expresiones algebraicas.

Factorización de polinomios

En el libro de Conexiones Matemáticas 8 en la unidad 8-5 de factorización y sus aplicaciones, se define que un polinomio es factorizado cuando se expresa como el producto de otros polinomios y se aclara que una factorización es completa cuando los polinomios son primos.

Se dice que un polinomio es irreductible cuando no puede expresarse como producto de polinomios de menor grado y un polinomio es primo cuando sus coeficientes enteros son relativamente primos y es irreductible. Estas dos definiciones aparecen como parte de la explicación de una tarea en un taller de competencias.

En el caso de la factorización de trinomios se inicia con el trabajo de rectángulos cuyas áreas son expresiones algebraicas, varios conformarían un rectángulo de mayor área, al que se le asocia una expresión factorizada y desarrollada. El tratamiento de la factorización con área sólo se explica en el caso de que todos los términos del trinomio se adicionen.

En relación a las técnicas para factorizar trinomios sólo se plantean dos casos, cuando $ac > 0$ y $ac < 0$ respecto a la expresión $ax^2 - bx - c$. Estas técnicas para factorizar son similares y recurren a la técnica de factor común por agrupación, que no se hace explícita en esta unidad (Ver Figura 13).

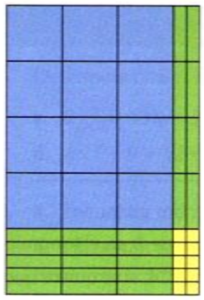


Fig. 5 9

Área: $12x^2 + 23x + 10 = (3x+2)(4x+5)$

Factoricemos el trinomio cuadrático $12x^2 + 23x + 10$, como producto de factores. Dado que el trinomio es de la forma $ax^2 + bx + c$, con $a = 12$, $b = 23$ y $c = 10$ tenemos:

$12x^2 + 23x + 10$

$= 12x^2 + (15x + 8x) + 10$

$= 3 \quad 4x^2 + (3 \quad 5x + 2 \quad 4x) + 2 \quad 5$ Descomponemos el producto $a \quad c = 120$ como producto de sus factores primos y reorganizamos estos factores en dos números tales que su suma sea $b = 23$

$= (3 \quad 4x^2 + 3 \quad 5x) + (2 \quad 4x + 2 \quad 5)$ Aplicamos propiedad asociativa.

$= 3x(4x + 5) + 2(4x + 5)$ Aplicamos propiedad distributiva.

$= (3x + 2)(4x + 5)$ Factorizamos el factor común binomio.

Figura 13. Factorización de un trinomio de una variable.

Aunque existen otras técnicas de factorización de menos pasos, solo se mencionan la diferencia de cuadrados y trinomio cuadrado perfecto. Al parecer la autora trata de evitar introducir muchas técnicas.

Como se había mencionado en líneas anteriores, en algunos talleres para avanzar más se introducen técnicas ó tecnologías. En el caso del taller del tema combinación de factorizaciones se presenta una tarea que permite deducir las técnicas para factorizar una diferencia o una suma de cubos (Ver Figura 14).

2. Efectúa cada producto y encuentra una generalización para factorizar una **diferencia de cubos** $(x^3 - y^3)$ ına **suma de cubos** $(x^3 + y^3)$

- **a.** $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$
- **b.** $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

3. Factoriza cada binomio usando tu respuesta del ejercicio anterior

- **a.** $125x^3 + y^9 =$ ____________________
- **b.** $64x^6 - y^6 =$ ____________________
- **c.** $x^9y^3 + 8z^6 =$ ____________________
- **d.** $t^3 + 8 =$ ____________________
- **e.** $a^6b^3 - 27c^3 =$ ____________________
- **f.** $a^3 + 27b^3 =$ ____________________
- **g.** $g^6 + 64h^3k^9 =$ ____________________
- **h.** $(x - 1)^3 - (x + 1)^3 =$ ____________________
- **i.** $512w^9 - 1 =$ ____________________
- **j.** $\frac{1}{8}a^3 + \frac{27}{64}b^3 =$ ____________________

Figura 14. Técnica para factorizar una suma o diferencia de cubos.

En la unidad 8-4 de polinomios en el tema de productos notables se presenta la equivalencia entre la expresión factorizada correspondiente a un trinomio cuadrado perfecto ó una diferencia de cuadrados. Sin embargo, en ninguno de los casos se distingue o se nombra el trinomio y no se vincula explícitamente en la unidad 8-5 de factorización y aplicaciones.

En la temática de división sintética no se muestra cómo hallar los posibles divisores de la forma $x - r$ de un polinomio de manera que el residuo sea cero. A pesar de la técnica permite hallar los posibles factores lineales de un polinomio de grado cualesquiera, no se establece una relación con el teorema del factor.

Otra técnica no presentada en la unidad 8-5 de factorización y aplicaciones es la de completación de cuadrados, ésta que permite factorizar un trinomio y es utilizada para hallar la fórmula cuadrática o escribir un trinomio cuadrático de la forma $y - k = a(x - h)^2$. Técnica utilizada en la unidad 9-3 de funciones cuadráticas, ecuaciones cuadráticas.

En cuanto a los coeficientes de los términos de los polinomios a factorizar, se proponen algunos casos donde son números racionales en su forma fraccionaria y decimal en los talleres para avanzar más y aunque la técnica se aplica para este tipo de expresiones, en las explicaciones o ejemplos se usan polinomio con coeficientes enteros.

Ceros

En el taller para avanzar más, el tema 8-4-7 de división sintética de la unidad 8-4 de polinomios se define un cero o raíz de la siguiente manera: "Si cero es el residuo cuando $x - a$ divida a $p(x)$, entonces a es una raíz de un polinomio" (Samper, 2006, p. 85). Implícitamente la definición se vincula con el teorema del factor. La tarea propuesta a partir este enunciado es: dado un valor de a hallar si es la raíz del polinomio. Se espera que los estudiantes realicen la división del polinomio por $x - a$ y apliquen la división sintética. Sin embargo podrían verificar que es una raíz al sustituir el valor de la incógnita por a y si el resultado es cero.

En la solución de algunas situaciones en la unidad 8-5 factorización y aplicaciones, se recurre a la propiedad de los productos nulos para hallar la solución de una ecuación cuadrática. Esta propiedad se utiliza para justificar la factorización en la solución de ecuaciones cuadráticas que permiten resolver algunas situaciones. En esta unidad la propiedad no se vincula explícitamente con los ceros de la función cuadrática.

En las ecuaciones cuadráticas de la unidad 9-3 se determina que la solución son los ceros de la función cuadrática vinculada con los interceptos con el eje x. También se presentan otros métodos para hallar la solución a estas ecuaciones como eliminar el exponente 2 y despejar la incógnita, factorizar, completar el cuadrado y utilizar la fórmula cuadrática (Ver Figura 15). Con la fórmula cuadrática se obtiene el discriminante que permite el análisis de las raíces (existencia en los números reales, número de raíces en los reales y tipo de real) antes de hallarlas.

Estudiaremos las diferentes maneras de solucionar una ecuación cuadrática abordando diversas formas de expresiones cuadráticas.

1 Si $a(x+b)^2 = k$ con $a \neq 0$ es una ecuación cuadrática, será equivalente a $(x+b)^2 = c$ y tendrá solución si $c \geq 0$.
Los ceros o raíces de la ecuación son $x_1 = -b + \sqrt{c}$, y, $x_2 = -b - \sqrt{c}$
En particular, si $c = 0$ hay una raíz que es $x = -b$.

2. Si $ax^2 + bx = 0$, entonces factorizando x en la expresión se tiene $x(ax+b) = 0$ Aplicando la propiedad de los reales que asegura que si el producto de dos números es 0 entonces el primero, el segundo o ambos factores son 0, se obtiene $x = 0$ y $ax + b = 0$
Luego, las raíces de la ecuación son $x_1 = 0$, y, $x_2 = -\dfrac{b}{a}$

3. Si $ax^2 + bx + c = 0$ y existen m, n números enteros tales que $m\ n = a\ c$ y $m \pm n = b$, entonces es posible factorizar el trinomio y obtener las dos raíces.

4. Si $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$ el método de completar del cuadrado nos permite calcular las raíces:

Paso 1: expresamos la ecuación como

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

Paso 2: hallamos la mitad del coeficiente de x: $\dfrac{b}{2a}$ y su cuadrado: $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$

Paso 3: adicionamos en ambos miembros de la ecuación el cuadrado calculado:

$$x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Paso 4: como el primer término es un cuadrado perfecto, factorizamos:

$$\left(x + \left(\frac{b}{2a}\right)\right)^2 = \left(-\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Paso 5: despejamos:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{c}{a}\right)}$$

Figura 15. Métodos para solucionar una ecuación cuadrática.

En términos generales, se puede decir que el texto se caracteriza por presentar las técnicas y tecnologías necesarias para lograr resolver las diversas tareas propuestas. Pero, aunque existen diferentes maneras de resolver una tarea generalmente se privilegia una sola técnica.

Características generales de los textos escolares revisados

Al revisar los dos textos escolares de la serie Conexiones Matemáticas, se encuentran algunas características comunes y sugerencias, que valen la pena mencionar:

- Las explicaciones generalmente se presentan en compañía de los ejemplos. Cuando los temas tienen más de dos ejemplos muestran distintas técnicas. Usualmente la extensión de los temas no excede una página, esto hace que las explicaciones sean cortas y poco profundas.
- Algunos casos se introducen técnicas y tecnologías en los talleres, necesarias para resolver algunas de las tareas propuestas. Presentarlas en este espacio puede no dar garantía de ser trabajadas en clase, ya que no siempre los estudiantes realizan todos los talleres del libro.
- Algunos temas relacionados no se vinculan. Por ejemplo, no se utiliza la división sintética para hallar los factores lineales de un polinomio de grado mayor que dos. Una de las tareas es hallar los ceros de un polinomio a partir de la factorización, pero no se da el caso contrario, cómo a partir de los ceros obtener la factorización de un polinomio. Lo mismo se presenta con los productos notables y las técnicas de factorización, no hay una relación directa. Tampoco se presenta una vinculación de la factorización con la gráfica del polinomio. Es trabajo del profesor establecer estos vínculos.
- Todas las técnicas trabajadas en los textos son para ambientes de Lápiz/Papel, no se plantea el uso de TIC.
- De la revisión anterior, quedaron para el desarrollo de este trabajo la necesidad de vincular diferentes tareas que amplíen las técnicas de factorización de polinomios y la utilización de artefactos como los CAS. En las tareas de los textos escolares es necesario hacer explícita la relación con los ceros y la factorización de un polinomimo, ya que como se ha presentado en el desarrollo histórico de la teoría de ecuaciones, es en este vínculo donde nace la teoría (teorema fundamental del álgebra y teorema del factor).

2.2.2.3. La oposición de las técnicas y la conceptualización

La acción experimental no es en ella misma suficiente para lograr progresos en la estructuración de los conocimientos, es necesario estudiar el rol de las técnicas al acompañar las tareas, porque su articulación es fundamental para la enseñanza, es decir, se necesita establecer las relaciones entre la acción y la conceptualización. “Es tradicional ocultar en la reflexión de la enseñanza de las matemáticas la importancia de las técnicas y su rol en la conceptualización” (Lagrange, 2002, p. 153).

Al integrar las calculadoras o los CAS se requiere de un análisis más fino y notable de las técnicas, no son simples habilidades, sino que están ligadas a las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y juegan un rol en la conceptualización. Como lo menciona Lagrange (2002): “Es de interés mirar en los artefactos novedosos los cambios en la actividad matemática cotidiana de los alumnos, desde la utilización de las técnicas más inmediatas como *presionar botón*” (p. 155). Es preciso señalar que las técnicas del tipo *presionar botón*[24] tienden a imponerse por ser simples y eficaces. Su efecto es que los estudiantes asocian un concepto a su comando correspondiente. “Esto genera un impacto negativo para la conceptualización que puede ser evitado si los estudiantes se reencuentran cotidianamente con situaciones que utilicen otras técnicas de la calculadora, asociadas a otras representaciones” (Lagrange, 2002, p. 156).

Para retardar la utilización de las técnicas *presionar botón*, más no del tratamiento simbólico, se pueden cambiar las situaciones para que los estudiantes las puedan revestir de conocimiento *enactive*[25]. Este tipo de relación del conocimiento se sitúa en un nivel del conocimiento cotidiano o de construcción anterior, en donde el estudiante lo hace funcionalmente “en acto” como un saber de análisis, que determina sus modos de expresión y razonamiento (Lagrange, 2002).

En comparación con las técnicas Lápiz/Papel (L/P), que presentan varios gestos y necesitan del análisis de la expresión; algunas técnicas CAS se efectúan con un sólo comando, se

---

[24] Es la técnica CAS asociada con una botón o comando de la calculadora como por ejemplo la raíz cuadrada (]) de un número o el seno de un ángulo (Ω). Se dice que son simples porque basta con ingresar el número y oprimir el botón para ver el resultado. Es necesario tener presente que la tecnología y la teoría de las técnicas CAS es la misma de las técnicas L/P pero con algunas diferencias ligadas al lenguaje de programación (universo interno de la calculadora).

[25] Esta palabra, escrita en inglés, significa de inmediato

reducen los gestos. "Tanto así que la conceptualización y la manera que esta toma, no es la misma en los dos ambientes" (Lagrange, 2002, p. 164). Se dice que "las interacciones de las técnicas novedosas (CAS) y las habituales (L/P) generan potencialidades en las praxeologías con artefactos informáticos. Las funciones de las diferentes técnicas no son fijas y las situaciones construidas pueden ayudar a la emergencia de comprensiones nuevas" (Lagrange, 2002, p. 170).

Generalmente todas las técnicas abordan un hecho *pragmático*, como algo que permite un hacer para cumplir con una tarea, mientras que la función *epistémica* se desarrolla cuando los elementos manipulados se constituyen en objetos de un ambiente teórico (Lagrange, 2002).

Usualmente se reconoce el valor pragmático de todas las técnicas, pero la inmediatez de los resultados de las técnicas CAS se opone al valor epistémico. El hecho de presionar un botón no implica que se entienda la respuesta del CAS, se requiere de un trabajo posterior. Caso contrario a las técnicas L/P porque en los detalles de la manipulación de la técnica es donde se hace evidente el valor epistémico (Artigue, 2002b).

Para traer el valor epistémico es necesario interpretar los resultados de una técnica CAS. Por otra parte el uso de una técnica CAS no implica veracidad en la respuesta, en algunos casos el universo interno de la máquina genera restricciones en los resultados y solo una interpretación de la respuesta la hace admisible.

Para Artigue (2002b) las técnicas L/P tienen unos discursos matemáticos ampliamente difundidos y conocidos pero para las técnicas CAS existen elementos del discurso por construir: "Una vez más las dificultades son obvias, pues este discurso reclamará por un conocimiento que va más allá de la cultura matemática promedio. Necesariamente entrelazará el conocimiento matemático estándar, el conocimiento sobre el artefacto, y el conocimiento sobre la transposición a la computadora del conocimiento matemático" (p. 261). Conocer este discurso permitiría hacer un control razonable de las técnicas CAS y generar cambios en la génesis instrumental.

Por otra parte el uso de los CAS en el aula implica cambios en el trabajo del profesor, las técnicas nuevas que se generan producen la necesidad de tener en cuenta su función en la enseñanza y de interpretarla, justificarla y relacionarla con las técnicas ya existentes. En relación a lo anterior Bosch et al. (2000) dicen lo siguiente: "con la emergencia de una técnica nueva surge la necesidad de analizar su alcance (el tipo de problemas a los que se puede aplicar) y sus limitaciones (los subtipos de problemas que plantean dificultades a la utilización de la técnica)" (p. 280).

Por lo que la introducción de un CAS en una praxeología matemática produce técnicas nuevas y por tanto otras tareas. Estas técnicas pueden convivir con las habituales para generar técnicas instrumentadas y constituir las praxeologías locales, matemática y didáctica, relativamente completas. De igual manera que en otros ambientes, los CAS además de brindar nuevas posibilidades también tienen restricciones y generan fenómenos didácticos nuevos.

2.2.3. Algunos fenómenos didácticos y restricciones en los ambientes CAS

La introducción de los ambientes informáticos conduce al estudio de las restricciones y fenómenos didácticos ligados a los saberes matemáticos (transposición computacional). Estas restricciones tienen dos niveles: la representación y tratamiento interno de los saberes en la máquina y la representación y el tratamiento en la interfaz. Este trabajo analítico de identificación de las restricciones es fundamental para comprender las funcionalidades del saber puesto en juego en el software (Artigue, 1997). Por otra parte el conocimiento y prevención de los fenómenos didácticos, como el de la doble referencia, que puede generar situaciones que promuevan las actividades transformacionales como las presentadas por Mounier y Aldon en *A problem story: factorisations of* $x^n - 1$(citado por Lagrange, 2000a).

En cuanto a las restricciones se distinguen tres tipos:

- restricciones internas ligadas al hardware;
- restricciones de comando ligadas a la existencia y la forma (que se puede decir de la sintaxis) de los diversos comandos;
- y por último, las restricciones ligadas a la organización del teclado y de la ventana (Guin & Trouche, 2002, p. 205).

Algunos de estos problemas están dentro de los términos de la ergonomía del software y es necesaria la familiaridad con el ambiente para que las preguntas de los estudiantes no apunten hacia el manejo del software sino al trabajo matemático. Por lo que se reagrupan algunos fenómenos identificados en dos grandes categorías: los fenómenos ligados a la transposición de los saberes y los fenómenos ligados a los procesos de adaptación de los estudiantes (Ver Figura 16).

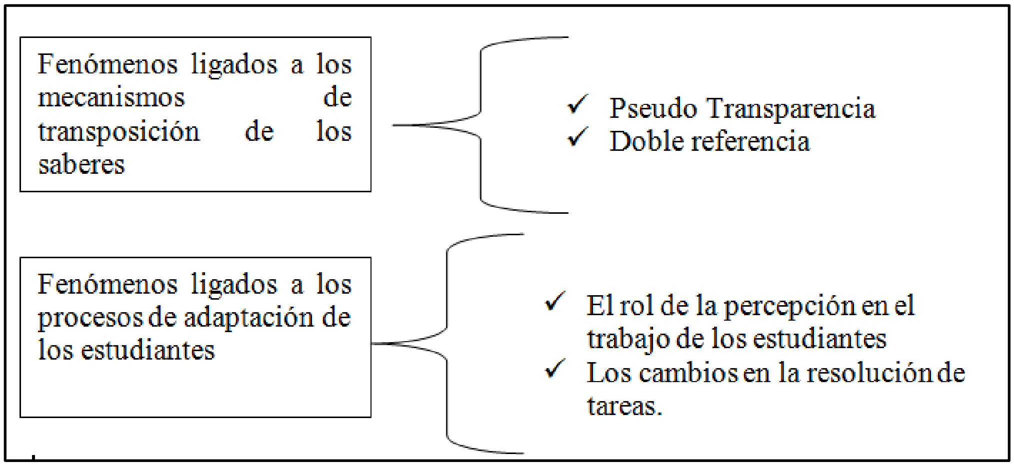


Figura 16. Fenómenos didácticos ligados a un CAS.

Estos fenómenos han sido identificados por Artigue (1997) desde un ambiente computacional con DERIVE[26] y por Trouche (2005b) con el uso de calculadoras simbólicas. Teniendo en cuenta esas dos categorías, a continuación se explican cada uno los fenómenos didácticos:

- *El fenómeno de pseudo transparencia*: es el conflicto generado entre lo que se ingresa y se ve en la interfaz del software. Son los cambios ocurridos en las maneras de representar los objetos (desde lo interno y la interfaz). Contrariamente a lo se podría pensar, estos desfases perturban más el funcionamiento didáctico de lo que parece.

- *El fenómeno de doble referencia*: se relaciona con la doble interpretación de un problema, dependiente del ambiente de trabajo, por ejemplo el tratamiento en Lápiz/Papel y CAS de las actividades de factorización de los polinomios $x^n - 1$ propuestas por Monier y Aldon en *A problem story: factorisations of* $x^n - 1$(citado por Lagrange, 2000a). Para factorizar $x^n - 1$, en L/P se tiene en cuenta la siguiente equivalencia $(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)$, sin embargo al factorizar $x^n - 1$ en un CAS el resultado no siempre coincide con este tipo de factorización, en algunos casos se obtienen una mayor cantidad de factores.

[26] DERIVE es un CAS. Algunas calculadoras simbólicas como las Texas Instruments tienen en sus aplicaciones una de las versiones de DERIVE.

- *El fenómeno de adaptación perceptiva*: ligada a las potencialidades de la calculadora en cuanto a la visualización y animación, en términos de las gráficas así como de las expresiones algebraicas.
- *Los fenómenos ligados a los cambios en la resolución de tareas*: como en otros ambientes informáticos utilizados para la enseñanza de las matemáticas, a los CAS se les acredita ampliamente sus potencialidades. En estos ambientes se puede generar una economía en las acciones que permite centrar más la atención en la reflexión, la estrategia, lo conceptual, para aportar a un aprendizaje matemático más real.

Dentro de la categoría de los cambios en la resolución de tareas, Guin y Trouche (2002) y Artigue (1997) identifican algunos fenómenos en un ambiente de calculadoras simbólicas:

- un fenómeno de *transporte automático* se da al creer que generan en el estudiante una respuesta inmediata frente a la solución de un problema.
- un fenómeno de *determinación localizada* ligado a las dificultades generadas en el movimiento de un registro a otro y en el cambio de una aplicación en una calculadora simbólica. En algunos casos consiste en repetir el mismo tipo de técnica en la aplicación de la calculadora, con algunos ajustes, aún si el tipo de técnica no es relevante.
- El *fenómeno de pesca*, es cuando el estudiante hace ensayos, sin preocuparse de su organización o de su control y espera obtener algo interesante.

Defouad en *Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation de calculatrices symboliques en classe de première S* (citado por Trouche, 2005b) incluye en esta categoría algunos fenómenos como: el de *saltar*, el cual consiste en cambiar rápidamente de ventana, sin al menos tener un tiempo para analizar cada una de las representaciones obtenidas, de *oscilación* en donde los estudiantes divagan entre varias técnicas y estrategias y el de *sobre chequear*, donde los estudiantes realizan múltiples comprobaciones usando todos medios provistos por la calculadora.

Esos fenómenos generalmente han surgido en experimentos de bastante tiempo, donde los estudiantes tienen calculadoras a su disposición (tanto en la escuela y en casa). Este parámetro es importante porque los estudiantes se apropian del manejo de la calculadora y logran obtener un dominio de las técnicas que requieren para realizar las tareas (Trouche, 2005b).

En cuanto a la integración de CAS es imposible eludir los fenómenos didácticos ligados a los procesos mencionados. Sin embargo es necesario que el docente los conozca y determine las condiciones favorables para volverlos productivos.

2.2.4. La génesis instrumental

La génesis instrumental es un proceso de construcción de un instrumento por un sujeto, va desde la utilización de un artefacto a la construcción de *esquemas*[27] para realizar un tipo de tarea. Un *artefacto* puede ser material o simbólico, ayuda o sustenta toda actividad humana al hacer un tipo de tarea (las calculadoras o un algoritmo para hallar la solución de una ecuación cuadrática son artefactos), mientras que el *instrumento* es lo que el sujeto construye desde el artefacto a partir de una actividad (Trouche, 2005b).

Rabardel en *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instrument contemporains* (citado por Trouche, 2005b) le designa a un esquema tres funciones: "una pragmática, porque permite hacer algo; una heurística, porque permite anticipar un plan de acciones y una epistémica, porque permite entender algo". Al introducir Trouche (2005b) la noción de *gesto* como aquellos comportamientos observables, hace que un esquema sea un campo psicológico con una dialéctica entre los gestos y las *invariantes operatorias*[28].

Es necesario aclarar que los instrumentos no le están dados al sujeto desde un primer momento, él los elabora a través de la génesis instrumental con los procesos de instrumentalización y de instrumentación.

> Los esquemas de utilización del artefacto se enriquecen y se diversifican en relación con la evolución del campo funcional del instrumento. Ellos evolucionan en función de la multiplicidad de artefactos a los cuales están asociados para formar un instrumento,..., y a la diversidad de status que pueden tomar en esta asociación. La actividad constructiva

[27] Un esquema se considera como una organización invariante de la conducta humana para una clase de situaciones dadas (Vergnaud, 1990).

[28] Las invariantes operatorias son de dos clases: teoremas en acto (es una proposición tenida por cierta sobre lo real) y conceptos en acto (son predicados construidos pragmáticamente por los estudiantes). Las invariantes operatorias se les considera como los conocimientos contenidos en los esquemas (Vergnaud, 1990).

juega un papel importante sobre la transformación, el desarrollo y la puesta a punto de esos organizadores de la actividad que son los esquemas. Este movimiento, dirigido por el sujeto hacia sí mismo, es lo que nosotros llamamos instrumentación.

El segundo movimiento, de instrumentalización, es aquel por el cual un sujeto pone a punto, podría decirse conforme a su persona, lo que le es dado externamente para hacerlo su propio instrumento. Esta inserción a sí mismo supone, de una parte, una inserción del sujeto en las formas del artefacto tales como ellas le son dadas o propuestas pero, de otra parte, una subversión de esas formas o de sus sentidos. Este segundo aspecto se traduce en un cambio en las funciones, el desarrollo de nuevas funciones o, al contrario, el abandono de las funciones previstas. Puede llegar a presentarse una transformación de la estructura. (En *instrument subjectif et développement du pouvoir d'agi*r de Rabardel, citado por Jaramillo & Obando, 2009, p. 12).

En otras palabras el proceso de instrumentalización está dirigido hacia el artefacto en relación a las siguientes actividades: selección, agrupación, descubrimiento, producción e institución de funciones, usos desviados, atribución de propiedades, personalización, transformaciones del artefacto, de su estructura, de su funcionamiento.

Mientras que el proceso de instrumentación está relacionado con el sujeto, en donde se da la emergencia y la evolución de los esquemas de utilización: su constitución, su evolución por acomodación, coordinación, y asimilación recíproca, la asimilación de artefactos nuevos a los esquemas ya constituidos (Rabardel, s.f.).

Rabardel en *les hommes et les technologies, Approche cognitive des instruments contemporains* (citado por Henriques, 2006) introduce la noción de *esquema de utilización* de un artefacto para describir un esquema operativo dentro de una actividad mediada por un artefacto, se distinguen tres tipos:

- Los esquemas de uso, orientados hacia las tareas secundarias correspondientes a las acciones y actividades específicas directamente ligadas al artefacto.
- Los esquemas de acción instrumentadas, cuyo significado está dado por la actividad global permitiendo llevar a cabo transformaciones en el objeto de la actividad.

- Los esquemas de actividades colectivamente instrumentadas: correspondiente respectivamente a los usos simultáneos o conjuntos de instrumentos en el contexto de actividades que hay que compartir o son colectivas.

Para Trouche (2005b) los esquemas de utilización tienen una dimensión “particular” en el sentido que los esquemas se deben a un sujeto singular. Pero también tienen una dimensión “social” esencial, ya que pueden tener un desarrollo colectivo, al cual contribuyen los usuarios pero también los diseñadores de los artefactos. Los esquemas tienen el objeto de desarrollo de transmisión social (desde lo registrado hasta su constitución), esto es porque los esquemas de utilización deben ser considerados no sólo en sus dimensiones particulares, sino igualmente como esquemas sociales de utilización, esta dimensión es particularmente importante en una perspectiva educativa. Por lo que para Trouche (2005b) los esquemas de utilización sólo serían los de uso y los de acción instrumentada, agregándoles a éstos últimos su dimensión social y colectiva. Por tanto se asume que el tercer tipo esquema de utilización propuesto por Rabardel en *les hommes et les technologies, Approche cognitive des instruments contemporains* (citado por Henriques, 2006) se subsume en los dos primeros.

Respecto al artefacto y los esquemas, Rabardel en *les hommes et les technologies, Approche cognitive des instruments contemporains* (citado por Henriques, 2006) afirma que estas dos dimensiones del instrumento, están asociadas pero tienen una relación de independencia relativa:

- un mismo esquema de utilización puede de esta manera aplicarse a una múltiple cantidad de artefactos pertenecientes a la misma clase pero también a otras clases vecinas o diferentes;
- inversamente, un artefacto se puede insertar en una cantidad variada de esquemas de utilización que van a asignarle significados y funciones diferentes.

Dentro de esta teoría se resalta el papel de la mediación instrumental y por tanto sus implicaciones cognitivas en el ser humano. Su vinculación con la TAD permite considerar las técnicas instrumentadas.

2.2.5. Las técnicas instrumentadas

Las *técnicas instrumentadas* son un conjunto de gestos[29] realizados por un sujeto para hacer una tarea que integra uno o varios artefactos. En este sentido pueden ser consideradas como una secuencia estable de interacciones entre el usuario y el artefacto (o artefactos) con un objetivo particular (Drijvers, Kieran & Mariotti, 2007).

Para generar una técnica instrumentada el sujeto debe haber realizado el proceso de instrumentación, por tanto no toda técnica es instrumentada. Eso quiere decir que deben surgir esquemas de acción instrumentada. Por lo cual Trouche (2005b) dice que la técnica instrumentada es la parte observable de un esquema de acción instrumentada.

Trouche (2003) diferencia los esquemas de utilización en relación a sus funciones, para él un esquema de uso es el corresponsal psicológico de un gesto elemental de la actividad, mientras un esquema de acción instrumentada es el corresponsal psicológico de una técnica instrumentada. La relación de los esquemas de utilización y la técnica instrumentada se presenta en la Figura 17, allí se observa como varios esquemas de uso dirigen diferentes gestos que determinan una técnica instrumentada, que a su vez constituye un esquema de acción instrumentada. Las técnicas instrumentadas es la parte visible de los esquemas.

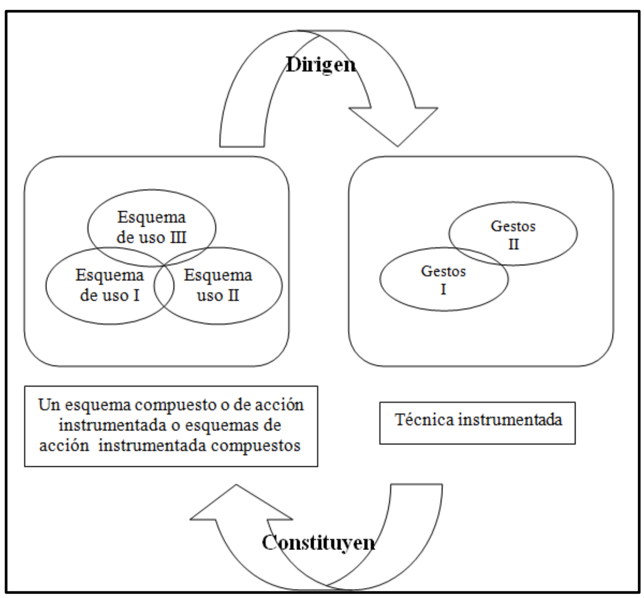


Figura 17. Esquemas de acción instrumentada y técnicas instrumentadas (Drijvers, 2003).

[29] El término "gesto" tiene un sentido figurativo y no se limita a movimientos físicos, son la parte observable de la actividad.

Para distinguir las diferencias entre un esquema de uso y un esquema de acción instrumentada, se presenta un ejemplo de Cedillo (2006) en relación al esquema de acción instrumentada, quien además determina que los esquemas de uso son necesarios para la construcción de esquemas de acción instrumentada, haciéndolos más complejos (Ver Tabla 8).

Tabla 8. Ejemplos de esquemas de utilización.

A. ESQUEMA DE USO	B. ESQUEMA DE ACCIÓN INSTRUMENTADA
El acceso a la aplicación de gráficos en la calculadora TI-92 plus por medio de Oo las teclas diamante ∞y la letra [R].	La determinación de la escala para observar una gráfica de una calculadora (destrezas técnicas y conceptuales).

Por lo que una técnica instrumentada se le asocia un lado técnico, que consiste en una serie integrada de acciones sobre la máquina realizadas rutinariamente para tratar con un tipo específico de tareas, y un lado conceptual, concerniente al desarrollo de los objetos matemáticos involucrados (Drijvers, 2003).

Pero no solamente las técnicas CAS son instrumentadas, también lo son las técnicas L/P u otras. Sin embargo la literatura existente nombra como técnicas instrumentadas solamente a las CAS y no las L/P (Artigue, 2002b; Artigue, 2007; Lagrange, 2002). En esta tesis las técnicas instrumentadas son las generadas en la complementariedad de las técnicas CAS y L/P.

2.2.6. Consideraciones finales de las dimensiones didáctica y cognitiva.

El panorama internacional delimita un área de investigación en relación a los CAS en la enseñanza de las matemáticas interesada por la integración de TIC y que toma como hipótesis que son las técnicas L/P las que favorecen este proceso. También mencionan que hasta la fecha no hay estudios o teorías que sustente esta cuestión, sólo determinan como referentes la aproximación institucional (la TAD) o la dimensión instrumental (Génesis Instrumental).

Los antecedentes muestran dos posturas en relación a la integración de CAS, una de ellas sólo mira la aproximación institucional como la del grupo APTE (s.f.) y otros como los trabajos de Artigue (1996, 2002b) y Lagrange (2000a) muestran la articulación entre la aproximación institucional con la dimensión instrumental. Este trabajo se inclina hacia la última propuesta porque la génesis instrumental permite una revisión más detalla de los efectos del uso de TIC en el proceso de aprendizaje, mientras que la TAD permite constituir una organización del proceso de enseñanza. Cada una de estas teorías aporta elementos diferentes y necesarios, articulados en la unidad de análisis de técnica instrumentada.

Desde la TAD hacer matemáticas consiste en activar praxeologías, matemática y didáctica, que en este caso son locales y relativamente completas. Una praxeología local es la unidad mínima de análisis de los procesos didácticos porque en ellas se reconoce la problemática que le dio origen, mientras que en las praxeologías regionales o globales las razones de su existencia se diluyen en la generalidad o como en el caso de las praxeologías puntuales no se reconocen por ser demasiado particulares.

En una praxeología local el grado de completitud depende de la cantidad de elementos[30] que contenga y cuanto más ricos sean. Para medir el grado de completitud se siguen siete indicadores y se revisan los seis momentos de estudio. Uno de estos indicadores mira la puesta en juego de los objetos ostensivos, dicho reconocimiento lleva a ver las calculadoras simbólicas o a los CAS como generadores de objetos ostensivos, que permitirían algunas tareas y técnicas que constituirían praxeologías matemáticas diferentes a las de L/P. En estas praxeologías una técnica evocaría objetos ostensivos que a su vez son determinados por los objetos no ostensivos (valencia semiótica e instrumental).

Por otra parte, previamente a la constitución de estas praxeologías locales relativamente completas (matemática y didáctica), se realizó la revisión de dos textos escolares, con el fin de caracterizar y conocer las praxeologías matemáticas existentes en las instituciones escolares. De esta indagación se determina que las praxeologías matemáticas existentes hacen uso de técnicas L/P o con materiales manipulativos para factorizar polinomios, estas técnicas no presentan vínculos con el teorema del factor, el teorema fundamental del álgebra u otros. En cuanto a las tareas, una de ellas es factorizar para hallar los ceros de un polinomio pero no se plantea la tarea inversa, los polinomios privilegiados para factorizarlos son los cuadráticos, entre los elementos tecnológicos se hace la diferenciación entre factorización y factorización completa.

Retomando el papel de las técnicas, uno de los puntos claves a los que se llega en la indagación y reflexión didáctica y cognitiva es que las técnicas son necesarias para la conceptualización. Es propicio mirar las características de las técnicas en ambientes CAS,

[30] Se refieren a los componentes de una praxeología: las tareas, las técnicas, las tecnologías y la teoría.

considerándose además sus potencialidades, sus restricciones y fenómenos didácticos. A partir de estos análisis se prevén acciones de los estudiantes y se establecen tareas que pueden ser ricas en la integración de técnicas habituales (L/P) y novedosas (CAS) como las nombra y diferencia Lagrange (2000a).

En la aproximación instrumental se reconoce el proceso de constitución del instrumento, sus procesos y sus implicaciones en la actividad del sujeto. En ella se miran las técnicas instrumentadas, definidas como la parte observable de un esquema de acción instrumentada, en el que confluye un lado técnico y otro conceptual. Estas técnicas tienen como fin realizar una tarea, considerándose el conjunto de acciones o gestos entre un sujeto y un artefacto.

Una de las hipótesis de este trabajo es que la complementariedad de las técnicas CAS y L/P son las que desarrollan las técnicas instrumentadas. Dado que las técnicas L/P ya han sido rutinizadas, los estudiantes las van a usar para dar explicación o poder usar las técnicas CAS. Ambas llevan a mirar la parte conceptual encerrada en lo práctico, por lo que disolverlas o considerar sólo las técnicas CAS como las instrumentadas no es pertinente.

Las aproximaciones institucional e instrumental, caracterizan las praxeologías locales, matemática y didáctica de este trabajo. A cerca de la relación de la TAD y la génesis instrumental se presenta un resumen en la Figura 18. Allí se determinan los componentes de la TAD y la génesis instrumental y se establece la conexión de ambas teorías en la técnica instrumentada.

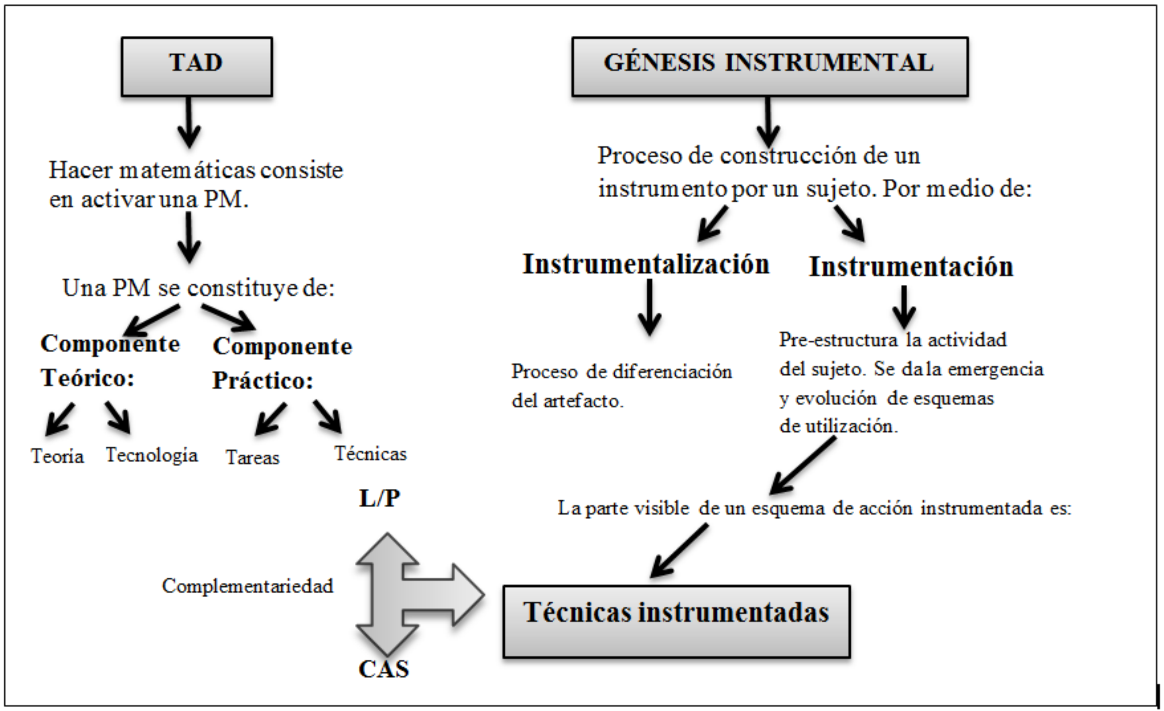


Figura 18. Vínculos y características de la TAD y la Génesis Instrumental.

A continuación se presenta la dimensión histórica – epistemológica de la factorización de polinomios cuyos resultados dan elementos en la constitución de una praxeología matemática local relativamente completa.

2.3. Dimensión Histórica - Epistemológica de la factorización de polinomios

Este análisis parte de un recorrido alrededor de la constitución de algunos objetos matemáticos propios del álgebra, en particular la teoría de ecuaciones, ya que a partir de la búsqueda de métodos para hallar las soluciones a ecuaciones de diferentes grados es cuando se determina la factorización de polinomios. En este camino, se parte desde los babilónicos (1800 a.C. a 1500 a. C.) hasta los aportes de Galois (1811 – 1832).

Además no solo se presenta este camino histórico, también se dan algunas reflexiones acerca de los aportes de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), en particular sobre el papel de los CAS en el desarrollo del saber matemático.

2.3.1. Surgimiento del álgebra

El desarrollo del álgebra se presenta en tres etapas en la consolidación del sistema simbólico: álgebra retórica, álgebra sincopada y álgebra simbólica. Mirarla desde ese punto, permite resaltar las ventajas de la constitución de un lenguaje algebraico. En dichas etapas se determinan los aportes de diversos matemáticos, en la Figura 19 se desglosan con detalles las épocas, los matemáticos y el tipo de lenguaje algebraico presentado en este documento. En esta división en el tiempo, el único matemático que no concuerda con dichas etapas, es al-Khowārizmī, que siendo retórico se ubica posterior al trabajo de Diofanto, quien daría inicio al álgebra sincopada.

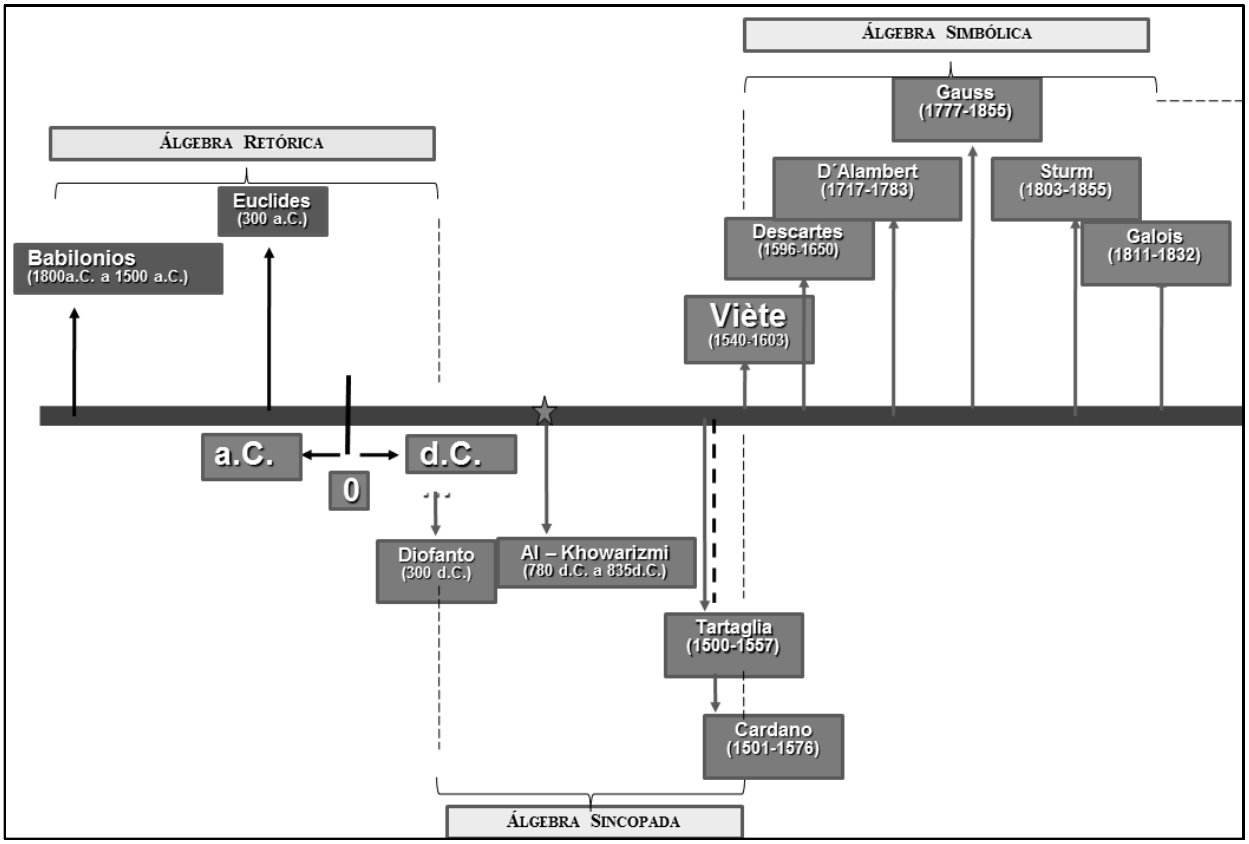


Figura 19. Línea del tiempo del desarrollo del álgebra en relación a la factorización de polinomios.

Las etapas del desarrollo histórico del álgebra fueron establecidas por Nesselmann a mediados del siglo XIX en su libro *Die Algebra der Griechen* (citado por Casalderrey, 2000, p. 125). En esta clasificación se determina al *álgebra retórica* como aquella que utiliza palabras para la resolución y planteamiento de los problemas, al *álgebra sincopada* como la caracterizada por utilizar abreviaturas de las palabras en los cálculos, aún discursiva y el *álgebra simbólica* como aquella en que todas las formas y operaciones posibles se representan en un sistema de signos, “independiente de la expresión oral, lo que torna inútil cualquier discurso retórico” (Puig, 2003).

Estas etapas de la evolución del simbolismo algebraico se marcan en el tiempo. La etapa retórica se determina antes de Diofanto (III d. C), la etapa sincopada desde Diofanto hasta el siglo XVI y la etapa simbólica que comienza desde Viète (1540-1603) (Malisani, 1999).

A pesar de que esta clasificación es “occidental y deja de lado los aportes de las culturas orientales” (Arce, Ramírez, Malagón, Arboleda, Torres & Valoyes, 2004, p. 99), en este trabajo se considera necesaria dado que la factorización de polinomios nace de los desarrollos simbólicos de la solución de ecuaciones. Esta distinción en la evolución del álgebra permitirá desarrollar los análisis presentados en este apartado, con la salvedad que no se tendrá en cuenta la división en el tiempo, por las inconsistencias en relación a los aportes de los matemáticos orientales.

2.3.1.1. Álgebra retórica

Al revisar el trabajo de Collette (2002) se presenta el desarrollo histórico del álgebra desde culturas antiguas, este es el punto de partida la solución de ecuaciones. En esta época los problemas algebraicos se resuelven con métodos aritméticos o geométricos. Cada cultura utilizaba diferentes maneras de resolver problemas algebraicos, en donde no se utilizan expresiones algebraicas para su solución.

Es el caso de los babilonios (1800 -1530 a. C) usaban un álgebra retórica para resolver ecuaciones cuadráticas (por completación de cuadrados o por sustitución) y algunas ecuaciones bicuadráticas y cúbicas. Estos métodos de solución de ecuaciones se caracterizaron por su carácter aritmético y por manejar tácitamente las propiedades conmutativa y distributiva. Se obtienen las siguientes identidades escritas en notación actual: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (Collette, 2000).

Uno de los problemas que resolvían los babilonios era hallar un número tal que sumado a su inverso dé un número dado, este problema lleva a considerar la ecuación $x^2 - bx + 1 = 0$, para su solución se seguían algunos procedimientos aritméticos en relación a las expresiones:

$\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1}$ y $\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1}$ (Kline, 1994).

Otro ejemplo es el trabajo presentado en el libro II de Euclides (300 a. C), en donde se resuelven ecuaciones cuadráticas se usan principalmente dos métodos: “el de proporciones y el de la aplicación de las áreas” (Collette, 2000, p. 80). En este libro las primeras 10 proposiciones entre 14 pueden ser vistas como identidades algebraicas demostradas geométricamente.

En notación actual las primeras proposiciones se escribirían de la siguiente manera:

1. $a(b + c + d + \cdots) = ab + ac + ad + \cdots$

2. $(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2$

3. $(a + b)a = ab + a^2$

4. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (Charbonneau, 1996, pp. 17-18)

La posibilidad de pasar de una representación matemática a otra (conversión) es lo que permite interpretar las proposiciones de Euclides en términos algebraicos y presentar la noción de equivalencia.

Para Charbonneau (1996) "el tratamiento de estas ecuaciones se caracteriza por un ambiente no numérico. Las magnitudes se comparan pero no sus medidas y existen operaciones entre esas magnitudes" (p. 19).

Lo interesante de los trabajos de los babilonios y los griegos es que sin el álgebra actual daban solución a algunos problemas que se considerarían imposibles sin la herramienta de las expresiones simbólicas.

En relación a lo anterior Sesa (2005) menciona que para algunos historiadores los desarrollos matemáticos de las antiguas culturas no serían considerados algebraicos porque carecen de un lenguaje simbólico y las soluciones tienen un fuerte apoyo en la geometría o la aritmética. En este sentido los problemas actuales ubicados en el álgebra fueron tratados por culturas antiguas desde lo geométrico o aritmético. Esto lleva a considerar que el surgimiento del álgebra se da cuando constituye un lenguaje simbólico (álgebra simbólica). Y se considera que de la misma manera como la geometría necesita de las figuras así mismo el álgebra requiere de las expresiones simbólicas.

En contraposición a lo anterior postura, Heeffer (2007) determina que el surgimiento del álgebra es independiente de la representación simbólica y menciona como ejemplo que un valor desconocido (incógnita) es representado por una entidad abstracta que puede ser un símbolo, una figura y hasta un color[31].

En relación a lo anterior se podría decir que el álgebra se fortaleció con el desarrollo de lo simbólico, pero los trabajos de los babilonios, los griegos, los árabes y otras culturas o matemáticos, presentados en este recorrido histórico son álgebras. Por lo cual en la estructura de esta dimensión histórica – epistemológica se determinó que algunas álgebras no son simbólicas (álgebras retóricas o sincopadas).

En cuanto al trabajo de los árabes se destaca el álgebra de Al-Khowārizmī (c 780 – c.835), quien resuelve seis tipos de ecuaciones, llamadas formas canónicas: $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 = bx + c$, $ax^2 = c$, $bx = c$ y $ax^2 = bx$, constituidas por raíces (x), cuadrados o tesoros (x^2) y números (a, b, c). En su trabajo también se muestran las reglas de operaciones concernientes de la forma $(a + b)(a - b)$, $(a + b)(a - c)$ y otras identidades. Su obra principal es *al-jabr w'al-muqābala* que significa “ciencia de la transposición y la reducción”, donde el término *al-yabr* se convierte en “álgebra”, sinónima de las ciencias de las ecuaciones (Collete, 2002).

Para Sesa (2005) Al-Khowārizmī estudiaba la ecuación como objeto y lo hacía exclusivamente para todos los tipos de ecuaciones cuadráticas con coeficientes positivos. Reducir (al-jabr) y completar (al-muqabala) serían las operaciones parar transformar cualquier relación obtenida del enunciado del problema en una de las formas canónicas. Estas operaciones se presentan como válidas, contribuyen a la constitución de un algoritmo estandarizado para la resolución de las ecuaciones cuadráticas. En el trabajo de Al-Khowārizmī se reconocen el tipo de tratamiento babilónico de las ecuaciones, así como la tradición demostrativa en la geometría de Euclides.

Son los árabes quienes sintetizan y unifican la matemática griega, árabe e hindú, en el caso de Al-Khowārizmī es quien vincula los conocimientos respecto a la resolución de ecuaciones, el sistema de notación decimal y quien le otorgaría al álgebra sincopada un carácter diferente al considerar dos técnicas: reducir (al-jabr) y completar (al-muqabala) que serían aplicadas a las diferentes expresiones para generalizar los métodos de solución de ecuaciones.

[31] “Prthudakasvami (860), Śrīpati (1039) y después Bhaskara (1150), resuelven problemas lineales con el uso de varios colores que representarían incógnitas” (Heeffer, 2007, p. 96). Ellos fueron matemáticos hindúes.

2.3.1.2. Álgebra sincopada

Algunos de los trabajos de los griegos se encuentran en la *Aritmética* de Diofanto (Siglo III a. C), en ella aparecen la formulación y validación de identidades como $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ con abreviaturas para las potencias y las operaciones, escritas en un lenguaje coloquial. En este trabajo se introduce un símbolo para designar una cantidad indeterminada o desconocida llamada Aritmo, que permite operarse como un número y genera un trabajo específico en las ecuaciones. Por este tratamiento, es Diofanto quien permite el paso de un lenguaje natural a un *lenguaje sincopado*, es decir, cuando empiezan aparecer símbolos que abrevian la escritura de los cálculos (Sesa, 2005).

Diofanto ejecuta las operaciones desde la aritmética, en contraste al trabajo de Euclides, e interpreta $(x-1)(x-2)$ con la siguiente identidad:

$$\left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = pq$$

Donde p es $(x-2)$ y q es $(x-1)$. Una de las características del trabajo de Diofanto es la solución de ecuaciones indeterminadas (Kline, 1994).

Algunos de los problemas presentados en la *Aritmética* se encuentran en la Tabla 9.

Tabla 9. Algunos problemas de la Aritmética de Diofanto (Kline, 1994).

A. LIBRO DE LA *ARITMÉTICA*	B. PROBLEMA
I	**Problema 8:** dividir un número cuadrado dado en dos cuadrados
II	**Problema 9:** dividir un número dado que es la suma de dos cuadrados en la suma de otros cuadrados distintos de los anteriores.
III	**Problema 6:** encontrar tres números tal que su suma y la suma de dos cualquiera de ellos sea un cuadrado perfecto
IV	**Problema 1:** dividir un número dado en dos cubos tales que la suma de sus lados es un número dado
	Problema 29: expresar un número dado como la suma de cuatro cuadrados más la suma de sus lados

En la *Aritmétic*a no se dieron métodos generales, cada uno de los 189 problemas es resuelto por un método diferente. Aunque estos problemas se pueden clasificar en 50 tipos, en esta obra matemática no se generó ningún intento de agrupación (Kline, 1994).

En cuanto a las ecuaciones de tercero y cuarto grado los métodos de solución por radicales surgen en el siglo XVI, algunos de estos métodos fueron desarrollados por Cardano, Ferrari, Ferro y Tartaglia (Piaget & García, 1982).

Casalderrey (2000) presenta algunos de los problemas que resolvía Tartaglia (1500-1557) en las que se involucraban ecuaciones de tercer grado. Aunque el enunciado de cada problema es distinto, todos ellos se reducen al capítulo del cubo y la cosa[32] igual a un número ($x^3 + px = q$). Algunos de estos problemas son:

- Determina por dónde debe ser cortado un árbol de 12 varas de altura de tal manera que la parte que quede en la tierra sea la raíz cúbica de la parte superior.
- Encuentra un número que se convierte en 6 cuando se le suma su raíz cúbica.
- Un hombre vende un zafiro por 500 ducados, obteniendo así un beneficio de la raíz cúbica del precio que pagó por él. ¿A cuánto asciende el beneficio? (Casalderrey, 2000, p. 86)

La solución dada por Tartaglia al resolver problemas cuya ecuación era de la forma $x^3 + px = q$, se da a partir de un verso:

Cuando está al cubo con las cosas preso

Y se iguala a algún número discreto

Busca otros dos que difieran de eso.

Después tu harás esto te espeto

Que su producto siempre sea igual

Al tercio cubo de la cosa neto

Después el resultado general

De sus lados cúbicos bien retados

Te dará a ti la cosa principal

(Casalderrey, 2000, p. 117).

[32] La cosa en símbolos actuales se refiere a x, a la incógnita lineal. Mientras que censo es x^2 y censo de censo es x^4 (Meavilla, s.f.).

La explicación del verso en términos modernos es la siguiente:

Cuando está al cubo con las cosas preso, es decir cuando en el mismo término están al cubo, x^3, con las cosas (con un número de veces la cosa o, lo que es lo mismo, px), luego $x^3 + px$. Y se iguala a algún número discreto, es decir, entero. Tenemos, por tanto, $x^3 + px = q$, nuestra ecuación. Busca otros dos que difieran en eso, es decir en q; propone, por tanto, encontrar dos números, llamémosles nosotros t y s que verifiquen

$$t - s = q$$

Después tú harás esto que te espeto/ que su producto siempre sea igual/ al tercio cubo de la cosa neto, es decir, un tercio del coeficiente de la x elevado al cubo:

$$t.s = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Entonces la cosa principal, es decir, la solución, será la diferencia de sus lados cúbicos, o lo que es lo mismo, de sus raíces cúbicas. Tendremos por tanto

$$x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{s}$$

Recapitulando, para resolver la ecuación $x^3 + px = q$ se deben encontrar dos términos t y s que verifiquen

$$t - s = q$$

$$t.s = \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

La solución entonces será con la fórmula de Tartaglia

$$x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{s}$$

Para hallar t y s despejamos t de la primera y la sustituimos en la segunda. La expresión es una fórmula cuadrática en s ya que p y q son conocidos.

Por tanto la solución es:

$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ (Casalderrey, 2000, p. 119).

Los pasos anteriores reflejan el trabajo arduo realizado por Tartaglia para llegar al procedimiento necesario para resolver las ecuaciones de la forma $x^3 + px = q$ y más el hecho de convertir el algoritmo en un verso y utilizarlo como mnemotécnica.

La demostración del procedimiento de Tartaglia se presenta en el capítulo XI de Ars Magna de Cardano (1501- 1576). Usan un ejemplo concreto, con valores numéricos en los lugares de las letras p y q. Su explicación utiliza la ecuación $x^3 + 6x = 20$ (Casalderrey, 2000).

Para Casalderrey (2000) la demostración de Cardano se caracteriza por:

- Algebra sincopada: utilización de letras para referirse a las figuras. Todos los pasos de razonamientos están narrados con palabras.
- No se parte de una ecuación general, sino de un ejemplo.
- Esta demostración se presenta en términos geométricos porque para la época de Cardano las demostraciones basadas en razonamientos geométricos eran las consideradas como verdaderas demostraciones.

La publicación hecha Cardano de la solución de Tartaglia, se realiza sin el consentimiento y reconocimiento de Tartaglia. De este hecho surge un enfrentamiento de autoría entre Tartaglia y Cardano, sin embargo en dicha disputa es Ferrari (1522-1565) discípulo de Cardano quien se enfrenta a Tartaglia. En el duelo intelectual, cada uno debía resolver los problemas de su opositor y así mostraban quien era el autor. Sin embargo Cardano y Ferrari al conocer la solución de la ecuación $x^3 + px = q$ encuentran la solución completa de $x^3 + px^2 + qx = r$. Por lo que los problemas propuestos a Tartaglia incluyen la solución de esta ecuación cúbica y no logra resolverlos. Fueron Cardano y Ferrari los ganadores del enfrentamiento (Casalderrey, 2000).

A Ferrari también se le reconoce por resolver con radicales las ecuaciones de cuarto grado y así rompe con la interpretación geométrica. Este procedimiento también es publicado en la *Ars Magna* de Cardano. Según dice Cardano, todo empezó con un problema de un matemático contemporáneo a él, Zuanne di Tonini da Coi: “Divide en 10 partes proporcionales, de modo que el producto de la primera por la segunda haga 6” (Casalderrey, 2000, p. 144).

En el capítulo 17 de la *Ars Magna* se resuelve y plantea el problema de dividir 10 en dos partes cuyo producto sea 40 y cuya ecuación es $x(10 - x) = 40$. En donde se obtienen las raíces complejas $5 + \sqrt{-15}$ y $5 - \sqrt{-15}$, para dejar de lado las "torturas mentales" con estos números, como lo menciona Cardano en su libro, multiplica las raíces y el producto es $25 - (-15)$, es decir 40. En este tipo de problemas se observa que las raíces complejas se dan por pares y que también se presentan para las ecuaciones de tercer grado (Kline, 1994).

2.3.1.3. Álgebra simbólica

La búsqueda de la solución de la ecuación algebraica general de grado superior al cuarto por medio de radicales fue el tema dominante del álgebra hasta finales del siglo XVIII y principios del XIX.

Algunos de los trabajos que corroboran lo anterior, es el de Ruffini (1765-1822), quien en 1799 demuestra la imposibilidad de solución de ecuaciones de grado quinto por radicales sirviéndose de la teoría de permutaciones; sin embargo la demostración para ecuaciones de grado sexto y superior no logró completarlas.

Igualmente Abel (1802-1829) sin conocer los resultados de Ruffini, en 1824 publicó una demostración del teorema sobre la no resolubilidad de las ecuaciones de grado superior a cuatro. En 1828, logra determinar las ecuaciones algebraicas resolubles por radicales entre ellas las ecuaciones de la forma $x^n - 1 = 0$ (Wuzzing, 1998).

Piaget y García (1982) y Charbonneau (1996) afirman que uno de los iniciadores del álgebra simbólica es Viète (1540 -1603). En la obra de Viète se retoma la metodología característica del pensamiento griego con una extensión y profundidad que le permitirán organizar la obra de Diofanto en un nivel muy diferente para generar el simbolismo algebraico (Piaget & García, 1982).

Viète (1540 -1603)

En el trabajo que presenta Viète se distingue del cálculo numérico, *logística númerosa*, del cálculo que razona sobre "especies", *logística speciosa*, es este último del álgebra simbólica (Díaz, 1995, p. 29). En su obra *Isagoge* (1571) se producen fórmulas simbólicas que permitirían delimitar la aritmética del álgebra (Kline, 1992).

En la *logística speciosa* se establece de manera explícita las reglas del libro I, II y V de Euclides. Con esta obra se trazan los linderos entre la aritmética y el álgebra simbólica y se establecen las conexiones entre el álgebra simbólica y la geometría (Álvarez, 2000).

Otros de los aportes del trabajo de Viète es la generación de una simbología que no existía, al parecer no había modo de distinguir la cantidad desconocida de las otras cantidades. La solución elegida es sencilla y eficaz: "las vocales representan cantidades desconocidas mientras que las consonantes simbolizan cantidades conocidas" (Collette, 2002, p. 294).

Al usar vocales para representar variables y consonantes para representar constantes, se logran representar cualquier clase de ecuaciones cuadráticas y esto hace posible discutir técnicas generales para resolver algunas clases de ecuaciones. De hecho fue Viète quien interpretó la cúbica general como una ecuación de todos los casos que consideraba Cardano como ocurrencias particulares. Además creó un sólo método de solución que podía aplicarse a todos los casos (Dávila, 2003a).

Una de las características en el trabajo de Viète, se da:

> Al suponer que el valor de la incógnita está y se debe establecer una relación de igualdad al expresar de dos maneras distintas una misma cantidad que involucre la incógnita (método de análisis). Tal igualdad sólo se da para el (los) valor (es) adecuado (s) de la incógnita. Luego de este análisis procedía la síntesis, la comprobación como hacían los egipcios. […] En este tratamiento algebraico de las expresiones, la interpretación geométrica seguía vigente en el trabajo de Viète, que representaba números como segmentos y sus potencias (cuadradas) como cuadrados, respetando rigurosamente el principio de homogeneidad (Sesa, 2005, pp. 59-60).

La característica principal del trabajo de Viète es el paso del álgebra sincopada al álgebra simbólica, porque le otorga a la incógnita un status aritmético, lo hace un símbolo con el cual se opera. En la Tabla 10 se presenta algunas notaciones de Viète.

Tabla 10. La notación de Viète (Fernández, 1997, p. 83).

A. ESCALARES	B. NOTACIÓN ACTUAL	C. MAGNITUDES
1. Lado o raíz A	x	Longitud B
2. Cuadrado Aq	x^2	Plano Bq
3. Cubo Ac	x^3	Solido Bs
4. …	…	…
5. Cuadrado-cuadrado		Plano-plano-sólido
6. Cubo Aqqc	x^7	Bpps

Un ejemplo de la notación que utilizó Viète es el siguiente:

$$\frac{BA}{D} - \frac{BA - HF}{F} = B \text{ En esta forma } \frac{BinA}{D} + \left\{\frac{BinA - BinH}{F}\right\} aequale\ B$$

(Wuzzing, 1998, p. 114)

En esta expresión utiliza $+$ y $-$ como símbolos para las operaciones, usa la raya para los quebrados y la palabra in como abreviatura para la multiplicación. Sin embargo no utilizó el signo para la igualdad, sino que expresó la igualdad entre dos términos verbalmente por medio de $aequibitur$ o $aequale$. Los términos se escribían uno debajo del otro y los encerraba en llaves (Wuzzing, 1998). En estas ecuaciones Viète "no admite coeficientes y raíces negativas" (Díaz, 1995, p. 44). Esta escritura no podía ser de otra forma, pues lo que Viète representaba en la ecuación eran relaciones de proporción entre las magnitudes del problema.

Otra de las características de este trabajo es la conservación del principio de homogeneidad al escribir la adición, la sustracción, el producto de dos magnitudes y la división de una magnitud y otras, es decir que sólo los términos homogéneos podrían ser comparados entre sí.

> La extensión de la regla a los productos entre potencias de la incógnita, junto con la suma de potencias homogéneas da lugar a expresiones polinomiales, lo que, de algún modo puede considerarse ya como las primeras manifestaciones sintácticas del álgebra, puesto que son el resultado de poner en práctica reglas de composición y escritura de frases algebraicas válidas (Fernández, 1997, p. 84).

Este *arte analítico* de Viète se presenta en tres partes. La primera parte es la *zetética*, que es un conjunto de reglas para manipular reglas. Las ecuaciones simbólicas se dan en el sentido de la equivalencia a una proporción[33]. El uso de proporciones da cuenta de que el proceso analítico y simbólico se puede trasladar a la geometría de tal forma que el resultado es puramente geométrico. La segunda parte es la *purística*, que permite asegurar que el proceso de la *zetética* conduce a una traducción concluyente y la última parte es la *exegética*, que es la traducción del análisis *zetético* a términos geométricos o aritméticos (Charbonneau, 1996).

En relación a los ceros, Viète fórmula algunas reglas. Para comprenderlas es necesario enunciar en términos moderno el teorema fundamental del álgebra:

Toda ecuación $F(x) = 0$

Donde $F(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$

Es un polinomio en x de grado n y los coeficientes $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales o complejos dados, tienen al menos una raíz real o compleja, se tiene en cuenta que todos los cálculos con números complejos siguen las mismas reglas que con los números reales, entonces es fácil demostrar que el polinomio $F(x)$ puede representarse (y de manera única) como producto de factores de primer grado.

$F(x) = (x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$, donde $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ son números reales o complejos.

Todo polinomio $F(x)$ de grado n tiene, pues, n y solo n raíces $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$. Estas raíces pueden ser distintas o puede suceder que algunas de ellas sean iguales. En este segundo caso se dice que la raíz correspondiente del polinomio $F(x)$ es una raíz múltiple.

Desarrollando la expresión:

$$(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

Y comparando los coeficientes de iguales potencias de x, vemos inmediatamente que:

$$-a_1 = r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n$$

[33] En ese sentido el recurso a la proporción no es una restricción, sino la técnica disponible en el momento.

$$a_2 = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n$$

$$-a_3 = r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n$$

$$\pm a_n = r_1 r_2 r_3 \ldots r_{n-2} r_{n-1} r_n$$

(Aleksandrov, Kolmogorov, & Laurentiev, 1994, p. 327).

Las anteriores son las conocidas fórmulas de Viète. Este teorema fue probado por Viète solamente para raíces positivas (Vieta's fórmula, s.f.).

En relación a la escritura factorizada de expresiones algebraicas, ésta fue un método de solución de algunas soluciones cuadráticas en la obra de Harriot (1560-1621) titulada la *Artis Analytica e Praxis ad Aequations Algebraicas Resolvendas*[34] y publicada en 1631 (Acevedo & Falk, 1997; Dávila, 2003b). La multiplicación del producto $(a + b)(a + d)$ en la obra de Harriot y en otros manuscritos aparece como en la Figura 20.

$$\begin{array}{c|}a + b \\ \underline{a + d}\end{array}$$

Figura 20. Multiplicación de dos binomios en Harriot.

Harriot, al igual que Viète utiliza las vocales para las incógnitas y las consonantes para las constantes. "Harriot es el primero en establecer la relación de las raíces de una cúbica, sean a, b, c dichas raíces, con la ecuación $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$" (escrita en notación moderna) (Dávila, 2003b, p. 41).

Klein (1994) menciona que Viète también exploró el método de factorizar un polinomio en binomios de primer grado, pero no fue satisfactorio porque descartó todas las raíces negativas y carecía de una teoría como el teorema del factor. Igualmente Harriot al carecer de un sustento teórico también abandona esta idea.

[34] En español traduce Práctica del Arte Analítico para la Resolución de Ecuaciones Algebraicas.

Descartes (1596 – 1650)

Otro de los matemáticos que contribuyen al desarrollo de la notación simbólica del álgebra es Descartes (1596 – 1650) (Aleksandrov et al., 1994). En su escritura asigna a las incógnitas o las variables con las últimas letras del alfabeto. Usó con constancia los signos $+$ y $-$, la notación de potencias y el signo de la raíz cuadrada $\sqrt{\ }$. Uso del signo $\propto$ (ligadura de las letras iniciales ae de aequetur) en lugar del signo de igualdad (Wuzzing, 1998).

Descartes denota una línea con una letra y cuando opera con líneas no realiza su gráfica, opera con letras y cuando efectúa el producto de $a \cdot b$ el resultado no es rectángulo de lados a y b sino una línea c (Recalde, 2002) y de esa manera es posible formular a^4. Para realizar lo anterior, Descartes alude la homogeneidad de las magnitudes "suponiendo que multiplicando o dividiendo por la unidad, tantas veces como fuese necesario se logra el equilibrio" (Recalde, 2002, p. 176).

Para Descartes la solución algebraica a un problema geométrico no tenía que ser escrito en términos puramente geométricos como en Viète. Por lo que no necesita de la compleja teoría de proporciones. Para él, el álgebra es una herramienta superior para resolver problemas.

Sin embargo Descartes permanecía vinculado a la geometría, fue Wallis (1616- 1703) quien "va más allá y libera la aritmética y el álgebra de la representación geométrica" (Kline, 1994, p. 376).

En el libro I de la *Geometría* de Descartes se resuelven algunas ecuaciones cuadráticas con construcciones por medio de magnitudes geométricas representadas por segmentos. A partir de este método sólo se pueden encontrar las raíces positivas, dada la imposibilidad de representar por segmentos cantidades negativas. Para suplir este inconveniente recurre a algunas reglas que presenta en el capítulo III de este mismo libro (Álvarez, 2000).

> En éste se establecen los aportes de Descartes a la teoría de ecuaciones: se encuentran reglas para combinar, factorizar, transformar y resolver ecuaciones. También se muestra cómo descubrir las raíces racionales cuando existen, disminuir el grado de una ecuación cuando se conoce una raíz, aumentar y disminuir las raíces, cambiar su signo o determinar el número de posibles raíces positivas y negativas, mediante la célebre *regla de los signos* (Álvarez, 2000, p. 16).

El título del libro III es: *Sobre la construcción de los problemas sólidos y supersólidos*, y se divide en tres partes. Se inicia con el planteamiento de algunas consideraciones generales de las ecuaciones, en donde se explican las reglas que permiten conocer y modificar las raíces de una ecuación. Posteriormente se trata la correspondencia de las ecuaciones y los *problemas planos*[35] y se finaliza con el estudio de las ecuaciones referentes a los problemas sólidos.

En la primera parte de este libro se presenta la regla de los signos, también se realizan diversas transformaciones con las ecuaciones y algunos procedimientos como los siguientes: se propone convertir las raíces positivas a negativas y las negativas a falsas, por lo que se cambian los signos de los términos de las posiciones pares de la ecuación; para aumentar o disminuir una raíz se propone sustituir la x por el valor $(y \pm a)$, donde a es el incremento o decremento de la raíz, en relación a la anterior regla se establece como quitar el segundo término de una ecuación (Descartes, s.f.).

Cada uno de estos planteamientos se presenta a partir de un caso particular de ecuación y existen algunos procedimientos y notaciones que vale la pena mencionar: para escribir una ecuación donde falta uno de los términos coloca un asterisco en la posición correspondiente ($xx * +2$ equivalente a $x^2 + 2$); para dividir una ecuación por un binomio se realiza un procedimiento distinto al actual que se efectúa de derecha a izquierda y para realizar cualquier procedimiento se procura reducir a enteros o racionales los coeficientes de una ecuación que sean fraccionarios o irracionales. En cuanto a denominaciones nombra las raíces positivas como verdaderas y las negativas falsas y llama sordos a los números racionales (Descartes, s.f.).

En los procedimientos que realiza para hallar las raíces de una ecuación, admite que puede haber raíces imaginarias (complejas). Estas cantidades imaginarias no las puede representar geométricamente. ¨Por lo que todas las longitudes de líneas que utiliza son exclusivas para representar cantidades reales (Álvarez, 2000).

En la segunda parte del libro III, Descartes determina que la solución de una ecuación de tres dimensiones se obtiene al dividir por un binomio, en este caso se considera que la ecuación cúbica resuelve un problema plano. Pero cuando a la ecuación no se le encuentra un binomio que

[35] Los problemas que pueden resolverse con líneas rectas y circulares son los llamados planos y aquellos problemas que pueden resolverse por el uso de una o más secciones de un cono son los llamados problemas "sólidos" (Pappus de Alejandría, s.f.)

la puede dividir, el problema que de ella depende es sólido. De igual manera se establece la diferencia con las ecuaciones de cuatro dimensiones (grado cuatro).

También asegura que cuando el problema propuesto es sólido se puede reducir a una ecuación de tercer o cuarto grado y para resolver la ecuación se presenta una construcción utilizando una parábola (Descartes, s.f., p. 480). En esta construcción se pueden determinar todas las raíces de la ecuación, tanto las verdaderas o las falsas, o detectar cuando las raíces son imaginarias (Descartes, s.f., p. 483).

En la tercera parte del libro III se presenta “la solución como consecuencia de las anteriores construcciones de los problemas no resueltos de la geometría euclidiana: la trisección del ángulo y la duplicación del cubo” (Álvarez, 1990, p. 59).

Retornando a la primera parte del libro III de la *Geometría*, Descartes explica basándose en un ejemplo concreto que una ecuación puede tener a lo sumo n raíces, es n el grado de la ecuación, para ello construye una ecuación de cuarto grado a partir de un binomio de primer grado, al que multiplicaba por binomios $x - r$, donde r es una raíz de la ecuación. En la solución hace uso implícitamente del conocido teorema del factor; que establece que si un polinomio tiene como raíz $x = k$, el polinomio $p(x)$ es divisible entre $x - k$, o lo es igual, que puede escribirse en la forma $p(x) = (x - k)c(x)$, es $c(x)$ un polinomio de un grado menos que $p(x)$. (Chica, 2001)

En cuanto a la regla de los signos se afirma que el máximo número de raíces positivas de $f(x) = 0$, donde f es un polinomio, es el número de variaciones del signo de los coeficientes y que el máximo número de raíces negativas es el número de apariciones de dos signos “$+$”o dos signos “$-$” consecutivamente. Este regla se presenta sin demostración en el libro de la *Geometría* de Descartes (Mora, Torres & Luque, 2004, p. 252). Una de las características de la *Geometría* es que “el énfasis se dedica a la resolución y construcción de problemas más que a la demostración, las reglas o teoremas solo se ejemplifican” (Álvarez, 2000, p. 17).

La regla de los signos fue demostrada por varios matemáticos del siglo XVIII, la demostración que usualmente se conoce es la Abbé Jean – Paul de Gua de Malves (1712- 1785) (Kline, 1994). A partir de este resultado Newton (1643 – 1727) en la *Arihmetica Universalis* muestra otro método más complicado pero con mejores resultados para determinar el número de raíces positivas y negativas y el mínimo número de raíces complejas. En esta obra también presenta la relación entre las raíces y el discriminante de la ecuación (Kline, 1994).

> La primera parte de la regla de los signos de Descartes es particularmente importante, puesto que en muchos problemas prácticos se sabe de modo automático, si todas las raíces de una ecuación dada son reales. En este caso puede deducirse rápidamente cuantas son raíces positivas y negativas, y cuántas raíces nulas tienen la ecuación (Aleksandrov et al., 1994, p. 357).

De este teorema se deducen otros teoremas, por ejemplo en 1807 el matemático francés Budan (1761 - 1840) determina que:

> Si un polinomio $f(x)$, $x = y + a$, donde a es un número real arbitrario dado, es decir, formamos el polinomio $f(y + a)$, entonces las raíces positivas y de este polinomio serán aquellas obtenidas a partir de las raíces del polinomio dado $f(x)$ que sean mayores que a. Por tanto el número de raíces del polinomio $f(x)$ (cuyas raíces son todas reales), comprendidas entre los límites a y b (donde $b > a$), es igual al número de cambios de signo del polinomio $f(y + a)$ menos el número de cambios de signo del polinomio $f(z + b)$. Sin embargo si no son reales todas las raíces de $f(x)$, puede entonces demostrarse que este número es igual a dicha diferencia, o a dicha diferencia menos cierto número par (Aleksandrov et al., 1994, p. 357).

Sin embargo ni la ley de Descartes ni el Teorema de Budan resuelven el siguiente problema: si una ecuación de coeficientes reales tiene al menos una raíz real ¿Cuántas raíces reales tiene en total y cuántas raíces reales en el intervalo cuyos extremos son a y b? Sólo en 1835, el matemático francés Sturm (1803- 1855) sugirió un método que resolvía los tres problemas. Este método se presenta a continuación:

> Sea $f(z)$ un polinomio con coeficientes reales y $f_1(z)$ la derivada de $f'(z)$. Dividamos el polinomio $f(z)$ por $f_1(z)$ y notemos que $f_2(z)$ el resto de la división, tomándolo con signo opuesto. Luego, dividimos $f_1(z)$ por $f_2(z)$ y notemos el resto, tomando con signo opuesto, por $f_3(z)$, etcétera.
>
> Puede demostrarse que este polinomio $f_s(z)$ de la sucesión así construida será una constante c.

El teorema de Sturn dice lo siguiente: si $a < b$ son dos números reales que no sean raíces del polinomio $f(z)$, al sustituir en los polinomios.

$$f(z), f_1(z), \ldots, f_{s-1}\,(z), c$$

$z = a$ y $z = b$ obtenemos dos sucesiones de números reales.

$$f(a), f_1(a), \ldots, f_{s-1}(a), c\ (I)$$

$f(b), f_1(b), \ldots, f_{s-1}(b), c(II)$ (Aleksandrov et al., 1994, p. 358).

Tales que el número de cambios de signo en la sucesión (I) es mayor o igual al número de cambios de signo en la sucesión (II), y la diferencia entre estos números es exactamente igual al número de raíces reales de $f(z)$ comprendidas entre a y b; o dicho con otras palabras, el número de estas raíces es igual a la pérdida de cambios de signo en la sucesión (I) al pasar de a a b (Aleksandrov et al., 1994).

En relación a lo anterior se muestra que es el trabajo de Viète y Descartes el detonador del álgebra como la ciencia de los cálculos simbólicos, de las transformaciones literales y de las ecuaciones algebraicas. “El álgebra se convirtió no sólo en un método efectivo para sus fines, sino también en un enfoque superior para la solución de problemas geométricos” (Kline, 1994, p. 516).

Teorema fundamental del álgebra

En lo referente a la resolución práctica de ecuaciones, el resultado fue lo siguiente: quedó claro que no era posible la solución por radicales de la mayoría de ecuaciones algebraicas, e incluso siéndolo, era poco el valor práctico debido a su complejidad, excepto en el caso de la ecuación de segundo grado. En vista de esto los matemáticos empezaron a trabajar sobre la teoría de ecuaciones algebraicas en tres direcciones a saber: 1) sobre el problema de la existencia de una raíz, 2) sobre el problema de cómo deducir a partir de los coeficientes de una ecuación, ciertas propiedades de las raíces sin resolverla (por ejemplo, si tiene raíces reales y cuántas son); finalmente 3) sobre el cálculo aproximado de las raíces de una ecuación. En primer lugar, fue necesario demostrar que toda ecuación algebraica de grado n con coeficientes reales o complejos tiene al menos una raíz real o compleja (teorema fundamental del álgebra (*TFA*)) (Aleksandrov et al., 1994).

Uno de los motivos para plantear y demostrar el TFA fue el uso del método de integración por descomposición de fracciones, porque generó la pregunta: ¿es posible que cualquier polinomio con coeficientes reales poeda ser descompuesto en producto de factores lineales o producto de un factor lineal y cuadrático con coeficientes reales?. Ante este problema Leibniz (1646 - 1716) no creía que cualquier polinomio se pudiera descomponer en factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales, sin embargo Euler (1707 - 1783) afirma sin demostración que si es posible expresar un polinomio de esa manera. Nicolás Bernoulli (1687 - 1759) opina en contraposición a Euler y de igual manera Goldbach (1690 - 1764). Ante los ejemplos planteados sus opositores, Euler les muestra su error, generando una demostración para polinomios hasta grado seis. Sólo la generalidad a esta pregunta se responde a través del teorema fundamental del álgebra (Kline, 1992).

"Es hacia finales del siglo XVIII que Gauss (1777 – 1785) demuestra el TFA al presentar su tesis de doctorado en la Universidad de Helmsted (más adelante presenta otras demostraciones del mismo teorema)" (Collette, 2000, p. 286). En su primera demostración se requiere del gráfico de las curvas y era difícil demostrar que debían tener al menos una intersección no vacía. En la segunda demostración Gauss abandona las consideraciones geométricas y presenta unas demostraciones enteramente algebraicas, pero conserva los coeficientes reales. En la tercera demostración se basa en lo conocido actualmente como el teorema de la integral de Cauchy. Finalmente la cuarta demostración (1849) es una variación de la primera, en lo que respecta al método de presentación. Es Gauss quien extiende el campo de variación de los coeficientes al cuerpo de los números complejos (Collette, 2000).

El teorema fundamental del álgebra fue enunciado mucho antes que se demostrara por Girad en 1626 (Wussing, 1998, p. 113). El primer intento por demostrar el teorema lo hizo D'Alambert (1717- 1783) quien aceptó como trivial la proposición del análisis de que una función continua, definida sobre un conjunto de puntos cerrado y acotado, alcanza en algunos de los puntos el mínimo. En general se admite que la primera demostración rigurosa del teorema fundamental del álgebra la dio Gauss. Hoy se conocen varias demostraciones diferentes, y completamente rigurosas de este teorema (Aleksandrov et al., 1994).

Las primeras demostraciones del teorema fundamental del álgebra suponen que los coeficientes (literales) representaban números reales, sólo en la cuarta demostración que Gauss presenta se genera una demostración completa. Para la primera y cuarta demostración de Gauss fue importante el reconocimiento de los números complejos. Una de los trabajos que favoreció el tratamiento y el reconocimiento de estos números fue el de Wallis en su libro *Álgebra (1685)* al mostrar las representaciones geométricas de las raíces complejas de una ecuación cuadrática con coeficientes reales (Kline, 1992).

En esta búsqueda de soluciones de la ecuación de grado n-esímo, hubo un momento donde el trabajo se centró en $x^n - 1 = 0$, llamada la ecuación binomial. Algunos de los resultados fueron realizados por Cotes y De Moivre, Theophile Vandermonde y Gauss (Kline, 1992). Posteriormente se trabajó en relación a la ecuación general y en particular en funciones simétricas. El interés por la funciones simétricas surge con las demostraciones de Newton en relación a las sumas de los productos de las raíces de una ecuación polinomial pueden ser expresadas en términos de los coeficientes (fórmulas de Viète).

Álgebra abstracta

En la segunda mitad del siglo XIX el álgebra es considerada como el estudio de los diferentes sistemas algebraicos. Ésta es la llamada álgebra axiomática o abstracta. Se llama abstracta porque en una etapa del cálculo no importa en absoluto las representaciones con las letras en el sistema algebraico; lo único que interesa son los axiomas o leyes verificados por las operaciones; y se llama axiomática porque el álgebra ésta construida exclusivamente a partir de los axiomas establecidos previamente. Es como si hubiese vuelto, aunque a nivel superior, al primer punto de vista (el de Viète) sobre el álgebra, que considera a ésta como la teoría de los cálculos simbólicos (Aleksandrov et al., 1994, p. 319).

Durante el siglo XIX se introducen los conceptos principales del álgebra, tales como los de grupo, anillo, ideal, cuerpo, así como las nociones subordinadas, como las de subgrupo, subgrupo invariante, con el fin de identificar los conjuntos de propiedades (Collette, 2000). De esta manera el objeto de estudio del álgebra trasciende de la solución de ecuaciones, al estudio de estructuras como la de grupo y posteriormente, la de campo (Mora et al., 2004). Con Galois (1811-1832) “se termina el álgebra clásica, es decir el resolver ecuaciones en términos de radicales, e inicia un álgebra que se convierte en la teoría de estructuras” (Díaz, 1995, p. 35).

En este contexto crece el interés por encontrar mejores métodos por resolver ecuaciones algebraicas de cualquier grado; la búsqueda de la solución de ecuaciones de grado mayor que cuatro, lleva a encontrar los teoremas de factorización en el dominio de integridad de los polinomios y en general, para cualquier dominio de integridad. Al determinar la solución de una ecuación algebraica general se alcanza su sustento teórico en el estudio de dominios de factorización única (DFU) (Mora et al., 2004).

> Dado que el anillo de los polinomios es un dominio euclidiano, el comportamiento algebraico del dominio de integridad de los polinomios es idéntico al del dominio de integridad de los enteros, por tanto el *Teorema Fundamental del Álgebra* tiene su equivalente en los números enteros, el *Teorema Fundamental de la Aritmética*. La única diferencia, es que en la aritmética existe un procedimiento sistemático para llegar a la factorización, basada en divisiones sucesivas, mientras que en los polinomios no existe procedimiento alguno (Mora et al., 2004, p. 184).

Galois introduce el concepto de irreductibilidad de un polinomio dentro un cuerpo dado de números:

> Si tenemos un polinomio en x cuyos coeficientes son racionales, el polinomio se dirá reducible en el cuerpo de los números racionales si se puede representar en forma de producto de polinomios de grados inferiores con coeficientes racionales. En caso contrario se dirá que el polinomio es irreducible en el cuerpo de los números racionales (Aleksandrov et al., 1994, p. 334).

Según Piaget y García (1982) "el álgebra comienza con una definición muy restringida y adquiere paso a paso su propia identidad, hasta convertirse en el estudio de estructuras, varios siglos después de su nacimiento" (p. 156). Aunque el surgimiento del álgebra tiene una fuerte vinculación con la aritmética al tratar de resolver problemas mercantiles y con la geometría al resolver problemas geométricos. Es la geometría analítica la que determina la independencia del álgebra y el comienzo de su progreso de manera autónoma (Fernández, 1997).

2.3.1.4. Las Matemáticas experimentales y los CAS

La capacidad del ser humano para lograr idear y construir artefactos que realicen actividades peligrosas, engorrosas o hasta imposibles es una manera de llegar a nuevos alcances. Entre estos artefactos se encuentran los CAS, que realizan actividades matemáticas como manipulaciones de expresiones algebraicas y los programas de *Demostración Automática* (DA) que realizan demostraciones.

Los CAS fueron inicialmente introducidos para suplir las necesidades de los matemáticos. Éstos han modificado las prácticas matemáticas. Se identifican tres cambios principales unidos al desarrollo de ciencias informáticas en matemáticas:

- el ordenador ha permitido, por su poder del cálculo, el tratamiento de ciertos objetos en una manera nueva (…);
- el procesamiento automatizado genera preguntas nuevas y permite que ciertas esferas sean reexaminadas (…);
- [el ordenador induce] la extensión de matemáticas distintas, lógica aplicada y algorítmica (en *Mathématiques et informatique, informatique et enseignement des mathématiques* de Merle; citado por Trouche, 2005a, p. 11)

En general estos programas permiten la posibilidad de rápidamente probar hipótesis, facilitar la aparición de conjeturas; hacer los cálculos que modifican la construcción de algunas pruebas. Estos avances han modificado la dimensión experimental de las matemáticas que ha dejado de ser exclusiva del trabajo de los matemáticos, porque los resultados de los CAS pueden ser considerados como un trabajo matemáticamente válido. Sin embargo su legitimidad es aun problemática (Trouche, 2005a).

El desarrollo de estos programas responde al ingenio de ser humano de suplir algunas actividades que sólo ellos podían realizar. Sin embargo estas utilidades no disminuyen las capacidades cognitivas del hombre, si no que al contrario permiten mirar hacia nuevos horizontes que antes no se podían concebir o eran difícilmente obtenidos. Las matemáticas como toda actividad humana cambian a medida que las TIC llegan a integrarse a las tareas, le dan otra naturaleza al conocimiento matemático.

En cuanto a la *matemática experimental* y los CAS se considera que "la introducción de las tecnologías disminuye la parte rutinaria que constituye la manipulación de técnicas, permite un estudio en profundidad de los conceptos y determina cambios en la enseñanza de las matemáticas que generarían una enseñanza experimental de las mismas" (Lagrange, 2000a, p.5).

Esta afirmación justifica la creación de los CAS, ya que su principal objetivo fue el de ayudar a los científicos, matemáticos o ingenieros a realizar cálculos que a L/P podían ser difíciles y de poca exactitud. Dado que en la producción de conocimiento científico, los cálculos demasiados engorrosos eran un impedimento. Por lo que los CAS nacen en ámbitos ajenos al de la educación.

No obstante inmersos en el aula de clase una de las características principales es la inmediatez que no existe en la práctica habitual. Esto hace que en las prácticas con CAS se observe que en situaciones usualmente difíciles, los estudiantes permanecen activos en un espacio propicio para hacer matemáticas. Sin embargo la inmediatez de los CAS no garantiza la productividad matemática que se da en una actividad de carácter experimental se requiere de un diseño de situaciones de enseñanza.

Por otra parte los CAS ponen al usuario en un fenómeno de doble referencia[36], ya que se espera que la respuesta dada por el sistema concuerde con los significados de las matemáticas "habituales" sin considerar los significados específicos de las coacciones de un sistema informático. Para que la lógica algorítmica del CAS no produzca un efecto negativo, es necesario considerar un espacio para la conjeturación y la determinación de las estructuras de los fenómenos simbólicos presentes.

Esta visibilidad de las matemáticas experimentales participa en un clima válido para la introducción de artefactos informáticos en la enseñanza de esta disciplina. Además se considera como hipótesis que los CAS permitirán hacer un vínculo experimental entre las manifestaciones de una propiedad en diferentes representaciones, en ocasiones infravalorada en la enseñanza.

De esa manera generar una verdadera actividad experimental sobre los fenómenos simbólicos al utilizar los CAS requiere de ciertas condiciones. Lo primero es que los estudiantes tengan un conocimiento matemático para interpretar lo que los CAS arrojan y lo que ellos

[36]Interpretación de una tarea en dos ambientes, por ejemplo Lápiz/Papel y CAS.

ingresan. De esa manera el fenómeno de doble referencia funciona productivamente, ya que se puede trabajar sobre los resultados. La segunda condición es plantear una verdadera pregunta. En ocasiones muchos fenómenos simbólicos no son problemáticos para los estudiantes y esto demanda del profesor una elaboración de preguntas que involucren las expectativas de los estudiantes para lograr que realicen anticipaciones sobre los resultados de los CAS o que logren concebir estructuras generales.

2.3.2. Consideraciones finales de la dimensión histórica - epistemológica

El recorrido histórico muestra la evolución de una escritura algebraica que a su vez genera la teoría las ecuaciones (Ver Figura 21). El surgimiento de la factorización de polinomios se da como un método de solución de ecuaciones que se reconoce a medida que se construye una teoría.

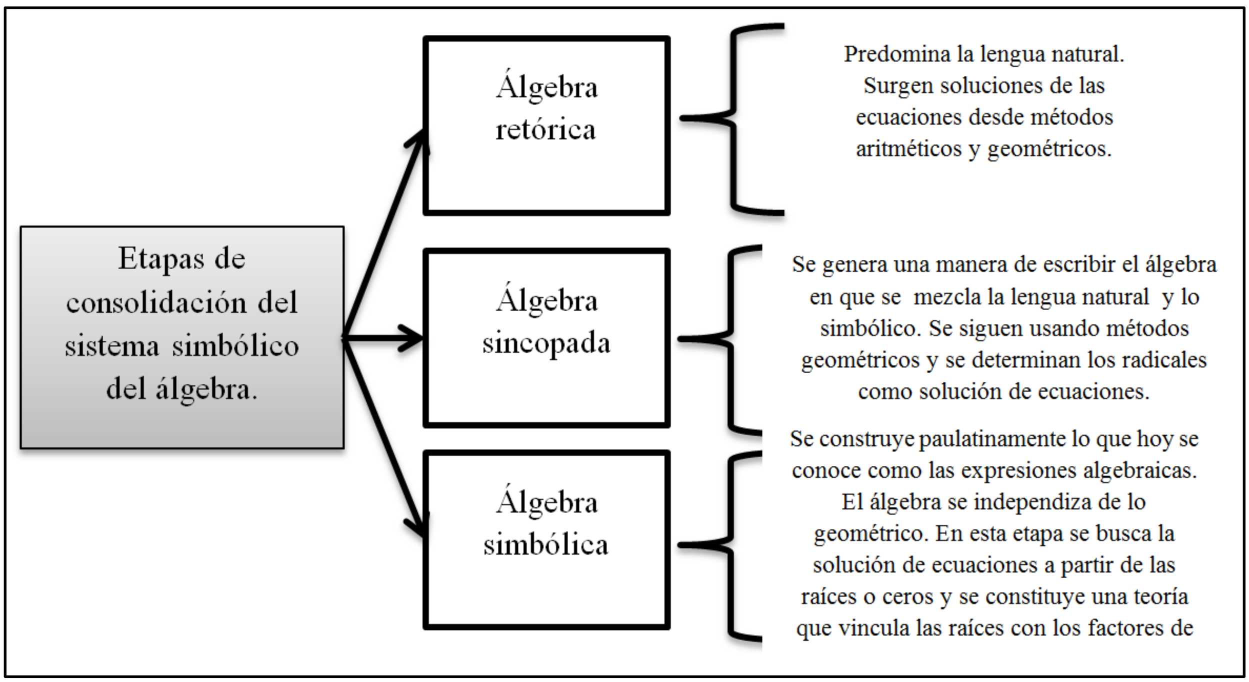


Figura 21. Etapas de consolidación del sistema simbólico del álgebra.

Es importante recordar que los métodos de Harriot y Viète en relación a la factorización de ecuaciones no fueron exitosos porque carecían del teorema del factor. Este hecho ratifica la necesidad de la constitución de una teoría para hacer surgir la factorización de polinomios como un método de solución de ecuaciones (Klein, 1994).

En la revisión de los diversos desarrollos alrededor de los métodos de solución de ecuaciones se encuentran conexiones con la aritmética y la geometría. Algunos de estos métodos en sus inicios eran casos particulares, sin interés de clasificación y agrupación. En el recorrido histórico algunos matemáticos logran darle al álgebra su carácter actual, el trabajo de Viète es uno de los primeros en la etapa del álgebra simbólica y su trabajo le permite a otros matemáticos constituir el álgebra como el estudio de estructuras.

En la historia se encuentran algunos métodos de solución de ecuaciones distintos a los usados actualmente, por ejemplo, el verso de Tartaglia da cuenta del ingenio literario y matemático para recordar un procedimiento. Para esa época el interés de los matemáticos era hallar por radicales la solución de ecuaciones de grado superior a cinco. Sin embargo la imposibilidad de encontrar tales soluciones los lleva a buscar otros métodos y a considerar las raíces de los polinomios.

Es la factorización uno de los métodos para la generalización de la solución de las ecuaciones, además permite una escritura simbólica diferente y equivalente de un polinomio, en donde se hace evidente la relación de los ceros con los factores lineales de un polinomio. Dicho procedimiento se vincula con diversos teoremas y corolarios, es el teorema fundamental del álgebra el que permite generalizar las soluciones de cualquier ecuación y posibilita una vía alterna, en comparación al infructuoso método por radicales.

Es necesario resaltar que para dar una demostración general del TFA fue importante el reconocimiento de los números complejos. Estos números al igual que los negativos y los irracionales fueron ignorados por mucho tiempo debido a la persistente cosmovisión griega del número. Sólo hasta la edad media cuando se construyen unos elementos metodológicos y teóricos se da paso a una nueva cosmovisión del número y por ende a la aceptación de los números negativos, irracionales y complejos.

Para Gauss fue importante la representación gráfica de los números complejos para la determinación del TFA e igualmente Descartes mostró la relación de las raíces con las gráficas. Esto muestra que en la evolución del saber matemático hay momentos donde es necesario constituir objetos nuevos y dotarlos de una teoría que los ratifique para lograr avanzar.

Actualmente las TIC dotan de un nuevo significado a la construcción del saber matemático. Permiten verificar las conjeturas y pueden ser parte de los argumentos que conlleven a una demostración y aunque algunos matemáticos o docentes sean renuentes al uso de las TIC, son cada vez más los avances en relación a diversas tareas matemáticas.

En cuanto a los aportes de la dimensión histórica-epistemológica para el diseño de las tareas, una de ellas es el reconocimiento de las TIC como artefactos generadores de experimentación matemática y porque permiten otras relaciones del estudiante con el saber matemático. En cuanto a las etapas de construcción del lenguaje algebraico, éstas delimitan unas posibles fases de aprendizaje en los estudiantes, porque ellos pueden pasar por esas mismas etapas de construcción del simbolismo actual en su aprendizaje algebraico. Respecto a la factorización como método de solución de ecuaciones, éste se consolida en la medida que se crea una teoría alrededor de las raíces o ceros de los polinomios, por lo que restablecer estos vínculos entre la factorización y los ceros posibilita una praxeología matemática con mayores elementos teóricos y prácticos.

3. DISEÑO DE TAREAS Y ANÁLISIS *A PRIORI*

Este capítulo presenta y justifica el diseño de las tareas o de las praxeología locales, se sigue el modelo de la micro-ingeniería didáctica y se tiene en cuenta los referentes teóricos de la TAD y la génesis instrumental. Se muestran las hipótesis de diseño, las variables didácticas y los análisis *a priori* de cada una de las situaciones. Además para cada situación se describen los momentos de estudio (se vislumbra la praxeología didáctica de la profesora), se analizan las funcionalidades de la calculadora y las posibles soluciones de las tareas. La palabra situación es el conjunto de tareas que tienen un mismo fin o intencionalidad, vinculada a un mismo componente tecnológico de la praxeología y cuyos nombres reflejan dicha intencionalidad.

En el desarrollo de cada una de las situaciones se resaltan algunas de las posibles restricciones, potencialidades y fenómenos didácticos del ambiente de L/P y CAS, necesarias para prever algunos resultados durante la experimentación y tener en cuenta algunas estrategias para solventar las dificultades y sacar provecho de las potencialidades.

3.1. Diseño de las tareas

Como parte del diseño de las tareas bajo la TAD es necesario determinar las praxeologías locales, que pretende ser relativamente completas; para ello se requiere dar cuenta de siete indicadores, éstos fueron desglosados en el capítulo anterior y presentados nuevamente a continuación:

1.A. Integración de los tipos de tareas.

2.1. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegirlas.

3.2. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas.

4.3. Existencia de tareas y de técnicas "inversas":

5.4. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas.

6.5. Existencia de tareas matemáticas "abiertas".

7.B. Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica.

El primer número de las viñetas de los indicadores guarda relación con el orden dado por Bosch, Fonseca y Gascón (2004), la letra de la viñeta distingue los indicadores descritos de manera general. Los indicadores del 2.1 al 6.5 se presentan en cada una de las situaciones como unidades de análisis, mientras que los indicadores 1.A y 7.B. son indicadores transversales descritos de manera general en relación a las praxeologías construidas. Los indicadores de completitud de la praxeología matemática local se consideran como parte del diseño de las situaciones.

En cuanto al indicador 1.A, se puede decir que las situaciones no son aisladas y tampoco las tareas que integran cada una de las situaciones. Las tareas tienen una intencionalidad que apunta al desarrollo del propósito de cada situación y las situaciones anteriores se convierten en prerrequisitos para las siguientes.

Para dar razón de la integración de las distintas tareas (indicador 1.A) y de la incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica (indicador 7.B), se presenta una breve descripción de la praxeología local relativamente completa propuesta en este trabajo.

La situación 1 (Ver Tabla 11) apunta al trabajo inicial con CAS, porque a lo largo de toda la praxeología será necesario el ingreso de expresiones algebraicas. Por tal razón, la primera tarea enfatiza en este aspecto y las otras tareas de esta situación llevan al estudiante a una reflexión de lo ocurre al ejecutar el comando [ENTER][37] en la aplicación[38] HOME[39]. Se hace necesario el reconocimiento de las diferentes formas de escritura de un polinomio, como son la forma factorizada o desarrollada en el estudio de la equivalencia de los polinomios.

En la situación 2 (Ver Tabla 11), una vez los estudiantes tienen claro cuando un polinomio se encuentra en su forma desarrollada se lleva a que lo completen y lo ordenen. Esto se hace para utilizar el [POLYEVAL ( )] que evalúa el polinomio dado un valor concreto. La sintaxis de entrada del comando puede ser compleja, pero su uso lleva a una reflexión de la definición de polinomio y genera una técnica instrumentada. Una vez se tengan los datos de la evaluación, los estudiantes deben analizarlos y reconocer las equivalencias de los polinomios.

[37] Cada vez que se observe un nombre entre corchetes y en versales corresponde a un comando de una aplicación de la calculadora simbólica.
[38] Las aplicaciones son software o programas de las calculadoras, en ellos se encuentran los comandos, que son instrucciones u órdenes que el usuario proporciona.
[39] Todos los nombres en versales corresponden a una aplicación de la calculadora.

Estos datos dan la entrada al reconocimiento de los ceros de un polinomio, porque se analiza el resultado y la evaluación del polinomio en sus ceros en relación a la expresión factorizada.

En la situación 3 (Ver Tabla 11) se solicita observar, describir y reconstruir la gráfica vista de su calculadora con L/P. Este proceso de dibujar y describir la gráfica observada, requiere que el estudiante reconozca algunos elementos como los puntos de intersección con los ejes, los intervalos de crecimiento, la concavidad y los puntos donde hay cambios de crecimiento. Una vez se analiza la gráfica, se solicita hallar los ceros por métodos de L/P, con este valor se utiliza el comando [VALUE], que ubica los ceros en la gráfica y da el valor de su ordenada. Con los métodos algebraicos y con el [VALUE], los estudiantes pueden ver que las ordenadas de los ceros o raíces son nulas.

En la situación 4 (Ver Tabla 11) se pretende determinar los cambios paramétricos de familias de funciones escritas en la forma desarrollada ó factorizada. El CAS ofrece la posibilidad de ver simultáneamente las gráficas de cada una de las familias, que se construyen según el orden de escritura y que además en poco tiempo permite observar las variaciones. Finalmente se lleva a la detección de diferencias y semejanzas en relación a los valores que toma el parámetro, se espera que gráficamente determinen cuando un polinomio es factorizable en los reales. Esta vinculación de los ceros desde lo gráfico con la factorización de un polinomio provee otras técnicas para llevar a un polinomio a la forma factorizada o al menos para determinar si el polinomio es factorizable en los reales. En esta situación se utilizan dos programas generadores de gráficas al azar, uno de estos programas muestra parábolas cuyas expresiones algebraicas son factorizables, el otro programa da parábolas cuyas expresiones son factorizables o no factorizables. Los estudiantes al ejecutar los programas deben descubrir la expresión algebraica de la gráfica en su forma factorizada o canónica, la cual pueden corroborar al realizar la gráfica de esta expresión simultáneamente con la obtenida en el programa[40].

Las situaciones llevan a que inicialmente se estudien las equivalencias de los polinomios desde lo algebraico, luego desde lo numérico y desde allí se hace la entrada al reconocimiento de los ceros, al estudio de las gráficas de los polinomios y la vinculación de la forma factorizada con los ceros. En resumen este estudio de la factorización parte desde lo algebraico, pasa a lo numérico y su conexión con los ceros permite mirarla desde lo gráfico. Estos diferentes tipos de

[40] La gráfica del programa cambia sólo si se ejecuta nuevamente en la aplicación HOME O PRINCIPAL.

objetos ostensivos, le dan al estudiante la posibilidad de tener a su disposición diferentes técnicas y tecnologías.

En la enseñanza tradicional el énfasis de la factorización de polinomios recae en la manipulación de expresiones algebraicas a partir de reglas. Así que las tareas buscan generar la experticia en la manipulación algebraica y el paso a develar el componente tecnológico que sustenta la técnica en algunos casos queda implícito. Es necesario constituir una praxeología matemática que postule algunas tareas que incidan en el cuestionamiento tecnológico de las técnicas.

Otra de las características de las situaciones es que han sido diseñadas de manera que las técnicas L/P y CAS tengan la posibilidad de utilizarse de manera complementaria, eso quiere decir que en algunos casos las técnicas L/P permiten ampliar o justificar los resultados dados por la calculadora y en otros momentos son necesarias para el uso de un comando de la calculadora.

En la mayoría de las tareas vinculadas con el uso de L/P o CAS se han utilizado tablas con el fin de organizar los datos y posibilitar su confrontación. En las tablas se diferencian las columnas con íconos para indicar que deben ser realizadas con Lápiz/Papel () ó calculadora () (éstas son tareas cerradas). Con los datos de las tablas se formulan algunas preguntas que pueden generar conjeturaciones, generalizaciones, clasificaciones o diferencias de los polinomios estudiados (tareas abiertas).

En la Tabla 11 se presenta la praxeología matemática local propuesta en este trabajo.

Tabla 11. Praxeología matemática local relativamente completa propuesta en el desarrollo de este trabajo.

	A. TAREAS	B. TÉCNICAS INSTRUMENTADAS[41]	C. TECNOLOGÍA	D. TEORÍA
1. SITUACIÓN: Explorando los Polinomios	- Dar una explicación de los efectos del [ENTER] sobre el polinomio ingresado en la aplicación HOME. - Clasificar los polinomios dados y los obtenidos al dar [ENTER] en la forma factorizada o desarrollada. - Expresar todos los polinomios (los dados y los obtenidos al dar [ENTER]) en la forma factorizada ó desarrollada.	Inicialmente se ingresan los polinomios a HOME y s oprime [ENTER]. Luego usan factorizaciones en L/P como factor común, diferencia de cuadrados, factor común por agrupamiento, entre otros. También pueden desarrollar productos, reducir términos semejantes y ordenar el polinomio.	- Definición de expresiones equivalentes. - Definición de polinomio. - Definición de forma factorizada y desarrollada de un polinomio. - Propiedades de los exponentes, números reales y polinomios. - Definición de factorización completa. - Definición de polinomios primos o irreductibles en los R.	**Anillo de polinomios**
2. SITUACIÓN: Evaluando los Polinomios	- Expresar los polinomios en la forma desarrollada. - Escribir el polinomio en su forma desarrollada, completa y en orden decreciente. - Evaluar el polinomio. - Comparar los resultados de la evaluación de los polinomios. - Escribir el polinomio en su forma factorizada. - Evaluar los polinomios en cada uno de sus ceros.	Antes de usar el [POLYEVAL( )] se requiere escribir el polinomio en su forma desarrollada, completa y en orden decreciente con técnicas L/P, quizás efectúen productos y se reduzcan términos semejantes. También se solicita factorizar los polinomios, por lo que pueden utilizar técnicas como factor común, trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, diferencia de cuadrados entre otros.	- Definición de expresiones equivalentes. - Definición de un polinomio. - Definición de forma factorizada y desarrollada de un polinomio. - Definición de evaluación de un polinomio. - Propiedades de los exponentes, números reales y polinomios. - *Teorema del factor:* un número c es una raíz o cero de un polinomio $f(x)$ si y sólo si $x - c$ es un factor de $f(x)$.	

[41] Es posible que en la experimentación de las situaciones surjan otras técnicas instrumentadas, esta es una de las posibles y que se esperaría en el desarrollo de las tareas.

	A. TAREAS	B. TÉCNICAS INSTRUMENTADAS[41]	C. TECNOLOGÍA	D. TEORÍA
3. SITUACIÓN: Hallando los Ceros de los Polinomios	- Describir y dibujar en L/P los gráficos de polinomios obtenidos en la calculadora. - Reconocer las características de las gráficas según el grado de un polinomio. - Obtener los ceros de un polinomio. - Determinar la ubicación de los ceros en la gráfica del polinomio y escribirlos en coordenadas cartesianas. - Determinar la relación de la cantidad de ceros con el grado de polinomio.	Ingresar las expresiones algebraicas de los polinomios en Y=EDITOR para realizar su gráfica en GRAPH. Reproducir el gráfico con L/P y determinar en él sus ceros, para ello se pueden fijar en algunos puntos relevantes como los cortes con los ejes, cambios de crecimiento y concavidad. Para obtener los ceros con técnicas de L/P del polinomio se utiliza la técnica de factorización o la fórmula cuadrática. Con el dato del valor de la abscisa del punto cero, se utiliza el comando [VALUE] que muestra la posición del punto en el gráfico y arroja el valor de la ordenada del cero o raíz del polinomio.	– *Teorema fundamental del álgebra:* todo polinomio en el dominio de los números complejos de grado $n \geq 1$ tiene por lo menos un cero real o complejo. – Definición de la gráfica de una función. – *Teorema 1:* si $f(x)$ un polinomio de grado $n \geq 1$ en los Complejos (C) entonces $f(x)$ se factoriza en n factores lineales en $C[x]$. – *Teorema del factor.* – *Teorema 2:* cualquier polinomio cuadrático $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c números reales, para los cuales $b^2 - 4ac \geq 0$ puede factorizarse como $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ donde $r_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ y $r_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.	**Anillo de polinomios**
4. SITUACIÓN: Parábolas	– Describir los cambios al variar a en una familia de funciones de la forma $a(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+1)$ y $a\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 6$. – Encontrar la expresión algebraica de la forma factorizada y canónica de un polinomio cuadrático a partir de la parábola.	Ingresar las expresiones algebraicas de los polinomios en Y=EDITOR para realizar su gráfica en GRAPH. Activar los programas que generan parábolas al azar y establecer la forma factorizada o canónica de la gráfica. Tener presente la concavidad, ceros y vértices de la parábola.	– Definición de parábola y sus componentes. – Definición de forma factorizada de un polinomio. – Teorema del factor.	

En cuanto a la constitución de la posible praxeología didáctica, se requiere presentar cada uno de los momentos de estudios, esto se describen en los análisis *a priori* de cada situación.

En el diseño de las situaciones se han tenido en cuenta las variables didácticas presentadas en la Tabla 12, discriminadas en matemáticas ó instrumentales. Las variables didácticas particulares a cada una de las situaciones se presentan al inicio de sus análisis a priori.

Tabla 12. Variables didácticas.

A. VARIABLES DIDÁCTICAS MATEMÁTICAS	B. VARIABLES DIDÁCTICAS INSTRUMENTALES[42]
- *V1. El tipo de polinomio*: se seleccionaron de una variable, con coeficientes racionales (inicialmente los coeficientes son enteros) y de grado uno, dos ó tres. En una de las situaciones, se consideró pertinente el estudio de las variaciones de los coeficientes en una familia de parábolas (parámetros). - *V2. Expresiones equivalentes*: se consideró necesario expresar un polinomio sus formas canónica, desarrollada y factorizada. En algunos casos los polinomios en su forma desarrollada debían de ser ordenados decrecientemente y completados. - *V3. Gráficos cartesianos:* gráficos como rectas, parábolas y curvas, con diferente crecimiento, concavidad, cortes con el eje x, valores máximos o mínimos y otros elementos. - *V4. Objetos ostensivos escritos*: se utilizaron expresiones algebraicas, gráficos cartesianos, números y enunciados verbales o en lengua natural.	- V5. *El tipo de artefacto*: la calculadora TI-92 es indispensable para el uso de los comandos [ENTER] y [POLYEVAL ( )] en la aplicación HOME, del comando [VALUE] de la aplicación GRAPH y de los programas [PARABOL1 ( )] y [PARABOL2 ( )] activados en HOME. Para el uso de los comandos es necesario conocer la sintaxis de entrada de expresiones algebraicas en la calculadora. El L/P es indispensable para la escritura de expresiones algebraicas, enunciados verbales y en la ejecución de técnicas para factorizar, desarrollar, dibujar gráficos o evaluar un polinomio en sus hojas de trabajo, entre otros.

La enseñanza de la factorización de polinomios presentada en los textos escolares se da a partir de un conjunto de técnicas de L/P mediante las cuales se factoriza un polinomio que cumple la condición que sus raíces o ceros son números enteros (Ver 2.2.2.2. Praxeologías matemáticas en textos escolares). Y aunque se enseñan técnicas para hallar los ceros de los polinomios, la vinculación con la factorización sólo se presenta en el estudio de la función cuadrática. Esto quiere decir que se enseña la factorización para hallar los ceros de un polinomio, pero queda implícito el proceso contrario, hallar los ceros para obtener la forma factorizada de un polinomio.

La dimensión histórica – epistemológica muestra que cuando se estudian los ceros o raíces para hallar las soluciones de las ecuaciones, se da le un valor a la forma factorizada de un polinomio. Por tanto es importante rescatar los vínculos entre los ceros y la forma factorizada de

[42] Son los vinculados a la parte práctica de las técnicas instrumentadas.

un polinomio, porque es allí donde diferentes tecnologías pueden emerger en el estudio de la factorización de polinomios.

Antes de la factorización los métodos para solucionar ecuaciones tenían limitaciones porque no se extendieron a ecuaciones de grado mayor a cuatro, solo con el estudio de los ceros o raíces surge un método de solución independiente del grado del polinomio a partir de la forma factorizada y se da inicio a una teoría alrededor de las ecuaciones y los polinomios.

Este resultado de la dimensión histórica - epistemológica da algunas pautas para la constitución de la praxeología matemática propuesta en este trabajo, por un lado se rescatan los vínculos entre la factorización y los ceros de un polinomio. Esta relación provee un conjunto de técnicas nuevas para factorizar porque cualquier método de solución de ecuaciones pretende hallar los ceros y una vez se tienen los ceros se puede determinar los factores de un polinomio (por el teorema del factor). Estos métodos pueden ser aritméticos, geométricos, por radicales (conocida como la fórmula cuadrática para polinomios cuadráticos de una variable), gráficos entre otros.

Ahora bien, los problemas o tareas de esta praxeología matemática pueden aproximarse a los problemas que enfrentaron los matemáticos cuando descubrieron que las soluciones de las ecuaciones por radicales no podían extenderse a ecuaciones de grado mayor a cuatro:

1. Hallar la existencia de una raíz.
2. Deducir las propiedades de las raíces a partir de los coeficientes del polinomio, antes de hallar las raíces.
3. Encontrar el valor aproximado de una raíz.

Para esta praxeología matemática, estos tres problemas se abordan desde diferentes técnicas instrumentadas y objetos ostensivos.

Por otra parte el reconocimiento de las diferentes álgebras en relación a la evolución del lenguaje simbólico determina diferentes posibles respuestas de los estudiantes frente las tareas. Se podría considerar que los estudiantes también viven este proceso de construcción simbólica, por lo que algunos estarían en un álgebra retórica, sincopada o simbólica. Aunque se espera que los estudiantes de noveno grado se encuentren en un álgebra simbólica, porque han transcurrido un año escolar en donde se ha trabajado para construirla. Pero quizás el uso de este tipo de álgebra no sea tan significativo como los otros tipos, porque previamente se requiere de un trabajo que signifique estos objetos ostensivos.

Al considerarse que es más frecuente la lengua natural que el uso de las expresiones algebraicas, se deduce que los estudiantes con menos habilidades en el manejo sintáctico de las expresiones algebraicas recurran frecuentemente a la lengua natural, así que según las destrezas de los estudiantes en cada uno de éstas álgebras, se infiere su uso en el desarrollo de las tareas.

Para culminar lo referente al diseño de tareas y dar inicio a los análisis *a priori* de cada una de las situaciones, se presenta a continuación *la hipótesis del diseño*:

- La vinculación de los ceros con la expresión algebraica factorizada de un polinomio posibilitan la articulación de diferentes objetos ostensivos como los gráficos, escritos y orales en la constitución de dos praxeologías locales, matemática y didáctica, relativamente completas que rescatan la complementariedad de las técnicas de L/P y CAS en la generación de técnicas instrumentadas.

3.2. Análisis *a priori* de la situación 1: *Explorando los polinomios*

Antes de iniciar los análisis *a priori* se presentan las variables didácticas específicas de cada situación.

Variables didácticas de la situación 1.

V1: polinomios con coeficientes enteros[43] y de grado dos ó tres.
V2: polinomios en la forma desarrollada o factorizada.
V4: en las tareas se usan o se solicitan objetos ostensivos escritos como expresiones algebraicas y enunciados verbales.
V5: en las tareas se sugiere usar el L/P o la calculadora simbólica en la aplicación HOME, específicamente en lo relacionado con la digitación de expresiones algebraicas y el comando [ENTER].

En relación al desarrollo de la situación 1, inicialmente se espera que los estudiantes conozcan la sintaxis de entrada de las expresiones algebraicas de las calculadoras TI-92 PLUS, ya que es la primera vez que utilizan la aplicación HOME. En particular necesitan conocer que para escribir monomios de grado mayor a dos, se digita la potencia anteponiendo entre la $[x]$ y el número que es exponente la tecla caret [^], es decir, se digita $[x\text{^}2]$, al dar [ENTER] se verá en la

[43] En otras situaciones los coeficientes se extienden al conjunto de los números racionales.

pantalla de la calculadora [x^2] (fenómeno de pseudo transparencia). En el caso de que lo digitado no corresponda a lo solicitado, requerirán del comando borrar [DEL] en la línea de entrada o en el historial de la pantalla.

Desde el inicio de la escritura de las expresiones algebraicas es necesario hacer explícito la multiplicación, esta aparece en una tecla con una marca [×], similar a la letra equis y al digitarla aparece otra diferente [*], posteriormente al dar [ENTER] se convierta en otra marca (un punto, [.]). Lo que sucede suele ser de atención por parte de los estudiantes, haciéndose presente el fenómeno de pseudo trasparencia.

En algunos casos al no colocar el signo de multiplicación entre dos letras, la expresión se entiende como un solo término, esto sucede cuando las letras tienen grado uno. En la Figura 22, la expresión $8m^2n^2 + 12mn$ produce dos factorizaciones diferentes porque la expresión se escribe con y sin el signo de multiplicación. En la pantalla de la izquierda se observa que sólo se factoriza los coeficientes de los dos monomios, mientras que en la pantalla de la derecha se obtiene también factor común tanto de la parte literal como de los coeficientes. La diferencia radica en la digitación de los dos polinomios, en la pantalla de la izquierda no se digita el signo de multiplicación, mientras que en la pantalla de la derecha la digitación de la multiplicación se hace explícita. Aunque la multiplicación no se escriba entre potencias de grado mayor que dos, ésta se reconoce. Este caso muestra que para la calculadora una incógnita no es exclusivamente una letra, también puede serlo una combinación de letras (palabras), de manera similar al desarrollo simbólico del álgebra.

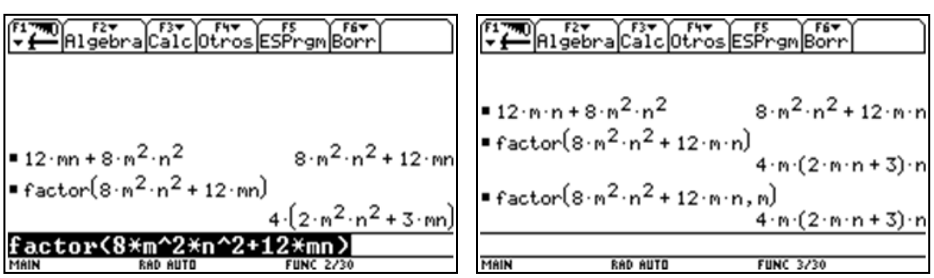


Figura 22. Multiplicación implícita y explícita.

También es importante aclarar las diferencias entre varias teclas cuyo signo es similar pero su funcionalidad es diferente, como en el caso de la letra equis y la multiplicación, que frecuentemente se confunden.

En la situación 1 se han seleccionado polinomios de grado dos y tres, cuyos resultados al dar [ENTER] pueden cambiar la expresión ingresada. Este comando en algunos casos factoriza o expande una expresión, reduce a elementos más simples una fracción, simplifica un cociente por sus factores y desaparece los radicales (Ver Figura 23). Los efectos de este comando han sido reportados en diferentes diseños de situaciones de enseñanza, en los que espera que los estudiantes den una explicación de lo que la calculadora ha realizado (Artigue, 2002a; Drijvers & Kieran, 2006; APTE, s.f.).

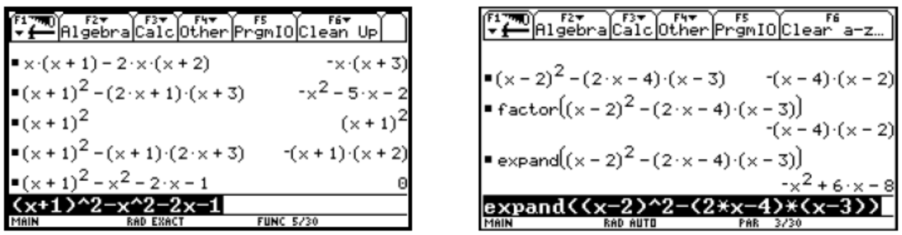


Figura 23. Diferentes efectos de la tecla [ENTER] (Artigue, 2002a, p. 238).

En esta situación se privilegia un álgebra simbólica, se da una mirada fuerte al tratamiento sintáctico de las expresiones algebraicas de los polinomios. En el uso del CAS y del L/P se dan algunas diferencias en la escritura simbólica, la sintaxis de entrada de la calculadora exige hacer explícita la operación de la multiplicación y el uso del caret. La expresión algebraica digitada en la entrada de la aplicación HOME no es igual a lo que se digita. Finalmente lo que se ve en la pantalla luego de dar [ENTER] es muy similar a lo escrito en L/P.

En cuanto al desarrollo de cada una de las situaciones los estudiantes realizaran el trabajo en parejas, aunque en cada una de las mesas de trabajo[44] pueden surgir discusiones colectivas. Cada pareja recibe dos hojas de trabajo, una para entregar al finalizar cada sesión y otra para conservar y usar en el momento de la institucionalización y evaluación. Respecto al tiempo se determina que la situación sea desarrollada por los estudiantes en tres horas de clase[45], aunque el tiempo real puede variar en relación al estimado porque los estudiantes no conocen el manejo de la calculadora.

[44] El salón de clase se divide en 7 mesas, en cada una pueden trabajar hasta 6 estudiantes.
[45] Un día de estudio o jornada tiene seis horas de clase. En una semana los estudiantes reciben 5 horas de clase para matemáticas. En una jornada no más de dos horas de clase de matemáticas.

Lo propuesto para cada momento de estudio[46] se describe a continuación:

- *El momento del primer encuentro:* los estudiantes se enfrentan a la tarea de digitar polinomios en la aplicación PRINCIPAL o HOME de una calculadora TI-92 PLUS y ver e interpretar los resultados obtenidos luego de dar [ENTER]. Hasta el momento no han tenido experiencias anteriores con este tipo de calculadoras o CAS que les sugiera la manera de ingresar una expresión algebraica en la entrada, así que frente a la situación y el manejo de la calculadora pueden surgir dudas. Por lo que la profesora[47] antes de iniciar la situación puede intervenir para presentar los propósitos de las tareas, aclarar dudas, hacer preguntas y familiarizarlos con la calculadora.
- *El momento exploratorio:* en esta primera situación se ha considerado que la profesora sea quien presente la técnica para escribir los polinomios en la entrada de la aplicación PRINCIPAL o HOME de la calculadora (CAS), ya que los estudiantes no han tenido experiencias anteriores con este programa y pueden tener inconvenientes al encontrar la aplicación adecuada. Para mostrar las indicaciones se puede utilizar un viewscreen y el proyector. Respecto a este momento se sugiere:

  > Desde el marco de la institución de enseñanza, es el momento en que el profesor hace vivir unos objetos, recientemente introducidos dentro de la problemática anunciada, en manos de los estudiantes hasta que la técnica para realizar el estudio resulte visible. La técnica puede emerger en manos de los alumnos o ser presentada directamente por el profesor (Azcarate & Espinoza, 2000, p. 358).

  Es posible que los estudiantes no asuman la técnica presentada y una manera de que los estudiantes la descubran es a partir de un mensaje de error de sintaxis, que por configuración aparece en inglés[48] o al revisar lo que aparece en la pantalla. Es

[46] En los análisis *a priori* se consideró primero el momento del trabajo de la técnica antes del momento tecnológico-teórico, porque es la indagación y justificación de las técnicas las que suscitan el momento tecnológico-teórico. Sin embargo es necesario recordar que el orden de los momentos es arbitrario, porque son una realidad funcional y no una realidad cronológica (Chevallard, 1999).

[47] Durante toda la fase de diseño y experimentación, se habla de la profesora porque son mujeres quienes realizan la intervención en el aula, la profesora del grupo de estudiantes y la investigadora; sin excluir la posible intervención de hombres.

[48] Aunque las calculadoras tienen la opción para cambiar el idioma al español, durante el desarrollo de las situaciones se decidió trabajar con el idioma inglés debido a que el comando [POLYEVAL( )] y los programas [PARABOL1( )] y [PARABOL2( )] se han realizado para que se ejecuten bajo este idioma y no se encontró la manera de utilizarlos o hacerlos en el idioma español.

necesario que los estudiantes interpreten la información dada por la calculadora, lean lo ingresado en la línea de la pantalla y lo que finalmente se ve al dar [ENTER].

- *El momento del trabajo de la técnica*: una vez los estudiantes conocen la sintaxis de entrada de sus calculadoras proceden a ingresar cada uno los polinomios que aparecen en la columna A en la aplicación HOME de sus calculadoras, cuando está escrito el polinomio dan [ENTER]. Los datos obtenidos son escritos en la columna B. Posteriormente clasifican los polinomios de las columnas A y B de la Tabla 14, en factorizados y desarrollados. Algunas de las tareas solicitan determinar la técnica L/P para expresar dichos polinomios en la forma factorizada o desarrollada. Cuando las expresiones dadas o encontradas al dar [ENTER] no estén en una de esas dos formas de escritura, los estudiantes deberán mostrar por L/P si es posible lograr factorizarlos o desarrollarlos. Estas técnicas para expresar un polinomio en la forma desarrollada y factorizada han sido enseñadas en los grados octavos y recordadas unas clases antes de esta intervención. Una vez los estudiantes efectúan las técnicas L/P se identifican las dificultades o habilidades en su uso. Por otra parte esta primera situación pretende familiarizar a los estudiantes con el CAS de la calculadora y generar técnicas instrumentadas.
- *El momento tecnológico - teórico:* dado que ellos tienen un estado inicial del polinomio (columna A de la Tabla 14) y un estado final, luego de escribir el polinomio en la entrada de HOME y dar [ENTER] (columna B de la Tabla 14), en la columna C de la Tabla 14 deben justificar el procedimiento que ellos deducen o creen que la calculadora efectuó y en este caso pueden recurrir a una tecnología. Posteriormente se les solicita clasificar los polinomios de la columna A de la Tabla 14 en: factorizados, desarrollados y no factorizados ni desarrollados. Esta clasificación pretende identificar si los estudiantes reconocen las diferentes formas como se puede expresar un polinomio (expresiones equivalentes), ya que usualmente la más reconocida es la forma estándar o desarrollada[49].

[49] La forma desarrollada usualmente se conoce como la forma estándar. En las tareas con el uso de la calculadora se suele llamar forma desarrollada o expandida, ya que se le asocia al comando [DESARROLLAR ( )] o [EXPAND ( )] (en inglés) de la aplicación HOME. El comando [EXPAND ( )] reduce términos, efectúa productos de polinomios y ordena los términos para hallar la forma estándar o desarrollada de un polinomio.

También se les solicita realizar la misma clasificación con los resultados de la columna B de la Tabla 14. Finalmente las dos últimas preguntas pretenden determinar si los estudiantes pueden afirmar o negar que los polinomios de la columna A de la Tabla 14 puedan ser expresados de la forma desarrollada o factorizada. En estas tareas los estudiantes involucran las técnicas L/P que hasta el momento conocen, por lo que uno de los fines de estas tareas es determinar las habilidades de los estudiantes en la utilización de técnicas L/P[50].

- *El momento de la institucionalización*: en la medida que los estudiantes resuelvan la situación pueden solicitar explicaciones de la profesora o revisar documentos como guías, textos escolares o apuntes en el cuaderno para ratificar el saber matemático necesitado. Sin embargo, no siempre la profesora u otros medios serán quienes les den las respuestas, sino que al contrario son necesarias preguntas nuevas alrededor de la tarea problemática. En la realización de la situación pueden surgir dificultades alrededor de las definiciones de polinomio o la distinción, definición y equivalencia de la forma factorizada y desarrollada de un polinomio, por lo que la profesora puede orientar su intervención con preguntas como: ¿por qué no todas las expresiones algebraicas son polinomios? ¿qué entiendes por factorización? ¿podrías darme un ejemplo de un número expresado en forma factorizada? En el caso de los polinomios, ¿cómo se factorizan? ¿por qué no siempre la suma o diferencia de varios términos no corresponde a la forma desarrollada de un polinomio? ¿cuándo un polinomio no se encuentra escrito ni en su forma desarrollada ni factorizada? ¿siempre se puede factorizar o desarrollar un polinomio? Preguntas como las anteriores pueden avivar las discusiones en el grupo de trabajo (6 estudiantes) o en el grupo de clase (35 estudiantes). Cuando la profesora considere pertinente puede hacer pequeñas intervenciones para escuchar las respuestas de los estudiantes o puede dejar al final la socialización de la situación. En algunos casos la intervención de la profesora resaltaría algunas de las respuestas de los estudiantes, no necesariamente la respuesta acertada, de manera que ellos den explicaciones para mostrar su razonamiento y permita que los otros estudiantes puedan intervenir, ya sea para refutar o apoyar el

[50] Los estudiantes participantes no habían utilizado las calculadoras TI-92 PLUS para estudiar álgebra, habían trabajado solo con la aplicación Cabri en clases de geometría.

argumento de sus otros compañeros. Finalmente debe ser clara la respuesta esperada, se descartan errores o dudas, con el fin de llegar al reconocimiento de las formas desarrolladas o factorizadas de un polinomio como expresiones equivalentes. “En este momento se le otorga un “nombre” y un estatuto al conocimiento matemático que ha ido apareciendo de manera informal, legitimándolo como conocimiento matemático que pertenece a la organización matemática que se construye” (Azcárate & Espinoza, 2000, p. 358).

- El *momento de la evaluación*: en el momento de socialización de los resultados de la situación, los estudiantes que participan y dan a conocer sus respuestas permiten que los demás puedan aclarar dudas y reconocer lo que no han realizado adecuadamente, bajo la guía y orientaciones de la profesora. Finalizada cada sesión, los estudiantes entregan sus hojas de trabajo y las reciben nuevamente en la siguiente sesión hasta que la culminen. Lo realizado por escrito es una muestra del desempeño de cada estudiante frente a las praxeologías, matemática y didáctica, construidas.

> De esta forma, se pone de relieve la articulación que existe entre el momento de la evaluación y el de la institucionalización. Hay una dialéctica entre ambos, puesto que, por un lado, se evalúa lo que se ha hecho visible o institucionalizado y, por otro, se institucionaliza para, entre otras cosas poder evaluar (Azcárate & Espinoza, 2000, p. 359).

Respecto a lo anterior, se ha considerado pertinente considerar simultáneamente el momento de institucionalización y de evaluación para las explicaciones de los momentos de las siguientes situaciones.

En cuanto a los indicadores de una praxeología local relativamente completa, se presenta para cada situación los indicadores del 2.1 al 6.5. La descripción de los indicadores de la situación se encuentra en la Tabla 13. En todas las situaciones se consideran como referentes del diseño de la praxeología matemática.

Tabla 13. Descripción de los indicadores de completitud de una praxeología matemática local en la situación 1: *Explorando los polinomios*.

A. INDICADOR	B. DESCRIPCIÓN
2.1. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas.	Puede ser que la expresión sea dada en la forma factorizada o desarrollada con el comando [ENTER]. En el caso de que no ocurra esto, para desarrollar o factorizar un polinomio puede recurrir al [ENTER] y posteriormente utilizar técnicas L/P. Es decir, tomar la expresión reducida al dar [ENTER] y a partir de ella transformarla a la forma solicitada. O simplemente iniciar con técnicas L/P.
3.2. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas.	En las tareas de esta situación se utilizan varios objetos ostensivos: las expresiones algebraicas, los enunciados verbales o en lengua natural. En este caso las técnicas L/P o CAS llevan a expresar a un polinomio en dos formas: factorizada o desarrollada (uso de expresiones algebraicas). La lengua natural sirve para dar justificaciones de los resultados arrojados por la calculadora o hechos en L/P.
4.3. Existencia de tareas y de técnicas “inversas”:	Una de las tareas es identificar en qué forma se encuentra expresado el polinomio, si está en su forma desarrollada se solicita expresarla en su forma factorizada y viceversa. Si no se encuentra en ninguna de las dos formas se le solicita que lo exprese tanto en la forma factorizada y desarrollada. Esto hace que un polinomio se escriba de diferentes formas equivalentes.
5.4. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas	La lengua natural sirve para justificar los resultados arrojados por la calculadora, para determinar en qué forma se encuentra escrito un polinomio y para corroborar o refutar un enunciado.
6.5. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”.	Las preguntas 1.2.d y 1.2.e, llevan a los estudiantes a cuestionarse sobre la forma de expresión de los polinomios y de la posibilidad de que todos los de la columna A de la Tabla 14 se puedan expresar en la forma factorizada y desarrollada. Aunque todos los polinomios seleccionados se puedan expresar en ambas formas, es posible que los estudiantes generen la expectativa de que todos los polinomios se pueden factorizar y si extendemos esta pregunta surge un problema, ¿cuáles son los polinomios que no son factorizables en los reales? Este tipo de cuestionamientos debe ser direccionado por la profesora.

A continuación se presentan las posibles soluciones a las tareas, las respuestas se distinguen con letra cursiva. Las hojas de trabajo, en blanco, tal como fueron presentadas a los estudiantes en la fase de experimentación se encuentran en el Anexo B. Las hojas presentadas en el cuerpo de este trabajo tienen algunas modificaciones como la numeración de las Tablas, la nomenclatura de las filas y las columnas y la distinción en la escritura de las aplicaciones y comandos de la calculadora, los cambios se han realizado porque se facilita la descripción y análisis de los resultados de la experimentación.

3.2.1. Situación 1: *Explorando los polinomios*

Para cada una de las situaciones se presentan las respuestas en letra cursiva esperadas de los estudiantes, sin descartar otras.

1.1. En la Tabla 14 se muestran algunos polinomios, ingréselos en la aplicación HOME de su calculadora. En la columna B escriba el resultado generado al dar [ENTER] y en la columna C explique lo que le sucede a la expresión.

Tabla 14. Explorando los polinomios.

A. POLINOMIO	B. RESULTADO AL DAR [ENTER]	C. EXPLICACIÓN
1. $x^2 + 4x - 1 - 4x$	$x^2 - 1$	*Reducción de términos semejantes.*
2. $4x - 88 - 40x + 4x^2$	$4x^2 - 36x - 88$	*Reducción de términos semejantes. Orden decreciente del polinomio.*
3. $(2x+4)(x-3)$	$2(x-3)(x+2)$	*Factor común del primer binomio. Propiedad conmutativa de la multiplicación.*
4. $(2x+4)(3x-9)$	$6(x-3)(x+2)$	*Factor común del primer y segundo binomio. Propiedad conmutativa de la multiplicación.*
5. $(x^2 - 4)x + x^2 - 4$	$x^3 + x^2 - 4x - 4$	*Propiedad distributiva. Orden decreciente del polinomio.*
6. $x^2 + x^3 - 4x - 4$	$x^3 + x^2 - 4x - 4$	*Orden decreciente del polinomio.*
7. $2x(x-1) + 3x(1-x)$	$-x(x-1)$	*Se cambiaron los signos del binomio $(1-x)$ para sacar el factor común por agrupación.*

1.2. Observe los resultados dados por la calculadora y responda:

a) Clasifique los polinomios de la columna A, en la forma factorizada o en la forma desarrollada. Para aquellos que no sean de la forma desarrollada o factorizada, justifique por qué no lo son.

Los polinomios de la forma factorizada son el 3 y el 4. El polinomio de la forma desarrollada es el 6. Los demás no están en la forma desarrollada, ni factorizada porque *algunos tienen términos semejantes (polinomios 1 y 2) y otros son combinaciones de sumas y productos (polinomios 5 y 7).*

b) ¿Cuáles son los polinomios que luego de dar [ENTER] fueron expresados en forma factorizada? Explique el procedimiento que realizó la calculadora para llegar a dar esa respuesta.

Los polinomios factorizados luego de dar [ENTER] *son el 3, 4 y el 7. El posible procedimiento que realizó la calculadora es el siguiente:*

Polinomio 3: se obtuvo factor común del primer binomio y luego se cambió el orden del segundo y tercer factor.

$$(2x+4)(x-3)=2(x+2)(x-3)=2(x-3)(x+2)$$

Polinomio 4: se obtuvo factor común del primer y segundo binomio, se cambió el orden de los factores y se multiplicaron los números 2 y 3.

$$(2x+4)(3x-9)=2(x+2)3(x-3)=6(x-3)(x+2)$$

Polinomio 7: para factorizarlo se puede expresar $(1-x)$ *como* $-(x-1)$, *luego se obtiene el factor común, se reducen los términos semejantes del primer factor.*

$$2x(x-1)+\ 3x(1-x)=2x(x-1)-3x(x-1)=(2x-3x)(x-1)=-x(x-1)$$

También se puede realizar los productos indicados, reducir términos semejantes y sacar $-x$ *como factor común.*

$$2x(x-1)+\ 3x(1-x)=2x^2-2x+3x-3x^2=-x^2+x=-x(x-1)$$

c) ¿Cuáles son los polinomios que luego de dar [ENTER] fueron expresados en forma desarrollada? Explique el procedimiento que realizó la calculadora para llegar a dar esa respuesta.

Los polinomios desarrollados luego de dar [ENTER] *son el 1, 2, 5 y 6. El posible procedimiento que realizó la calculadora es el siguiente:*

Polinomio 1: se ordena el polinomio y se reducen los términos semejantes.

$$x^2+4x-1-4x=x^2+4x-4x-1=x^2-1$$

Polinomio 2: se ordenan los términos del polinomio y se reducen los términos semejantes.

$$4x\ -\ 88\ -\ 40x\ +\ 4x^2=4x^2-40x+4x-88=4x^2-36x-88$$

Polinomio 5: se realiza el producto y se ordena el polinomio.

$$(x^2\ -\ 4)x+x^2-\ 4=x^3-4x+x^2-\ 4=x^3+x^2-4x-\ 4$$

Polinomio 6: se ordena el polinomio en forma decreciente

$$x^2 + x^3 - 4x - 4 = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

d) ¿Es posible expresar los polinomios de la columna A en la forma desarrollada? Realice el procedimiento para escribirlos en la forma desarrollada, en el caso de que sea posible.

Todos los polinomios pueden ser expresados en la forma desarrollada. El procedimiento de los polinomios 1, 2, 5 y 6 ya se explicó en la pregunta 1.2.c.

A continuación se presenta el procedimiento para desarrollar los polinomios 3, 4 y 7.

Polinomio 3:

$$(2x+4)(x-3) = 2x(x-3) + 4(x-3) = 2x^2 - 6x + 4x - 12 = 2x^2 - 2x - 12$$

Polinomio 4:

$$(2x+4)(3x-9) = 2x(3x-9) + 4(3x-9) = 6x^2 - 18x + 12x - 36 = 6x^2 - 6x - 36$$

Polinomio 7:

$$2x(x-1) + 3x(1-x) = 2x^2 - 2x + 3x - 3x^2 = -x^2 + x$$

e) ¿Es posible expresar los polinomios de la columna A en la forma factorizada? Realice el procedimiento para escribirlos en la forma factorizada, en el caso de que sea posible.

Los polinomios 3, 4 y 7 se pueden expresar en forma factorizada y el procedimiento se realizó en la respuesta de la pregunta 1.2.b.

Aunque no todos los polinomios se pueden factorizar en el dominio de los números reales, los polinomios presentes en la Tabla 14 se pueden factorizar:

Polinomio 1:

$$x^2 + 4x - 1 - 4x = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

Polinomio 2:

$$4x - 88 - 40x + 4 = 4x^2 - 36x - 88 = 4(x^2 - 9x - 22) = 4(x - 11)(x + 2)$$

Polinomio 5 y 6:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x^2-4)$$
$$= (x+1)(x-2)(x+2)$$

3.3. Análisis *a priori* de la situación 2: *Evaluando los polinomios*

Variables didácticas de la situación 2. *V1:* polinomios con coeficientes racionales y de grado uno, dos ó tres. *V2:* polinomios en la forma desarrollada en orden, desarrollada completa en orden y factorizada. *V4:* En las tareas se usan o se solicitan objetos ostensivos escritos relacionados con las expresiones algebraicas, enunciados verbales y números. *V5:* El tareas se solicita usar el L/P o la calculadora en la aplicación HOME y el comando [POLYEVAL ( )]

Una de las característica de esta situación es la complementariedad de las técnicas L/P y CAS, ya que para la función [POLYEVAL ( )] se requiere de la previa manipulación algebraica en L/P del polinomio, para expresarlo en su forma desarrollada, organizarlo decrecientemente y completarlo. Esta es una condición que tiene el comando para ser usado. Por lo que la manipulación del polinomio es la tarea inicial para los estudiantes, necesaria antes de utilizar el [POLYEVAL ( )]. Aunque las calculadoras simbólicas tienen la opción de desarrollar un polinomio, los estudiantes desconocen esta funcionalidad, además deben completar el polinomio y ordenarlo. Completar el polinomio es una tarea exclusiva con L/P. Sin embargo, algunos estudiantes pueden probar si el comando [ENTER] realiza el desarrollo del polinomio o quizás pueden tomar la expresión obtenida luego de dar [ENTER] antes de realizar un procedimiento a L/P, en esta exploración puede surgir el fenómeno de pesca.

Lo interesante del [POLYEVAL ( )] es que los estudiantes deben reconocer cuando un polinomio está desarrollado y completo, porque de lo contrario los resultados de la evaluación del polinomio no serían los correctos. Para verificar los resultados del [POLYEVAL ( )], el estudiante puede evaluar el polinomio a L/P o en vez de evaluar en [POLYEVAL ( )] por un valor numérico, puede realizarlo con respecto a x, cuyo resultado es el polinomio en su forma desarrollada (Ver la Figura 24).

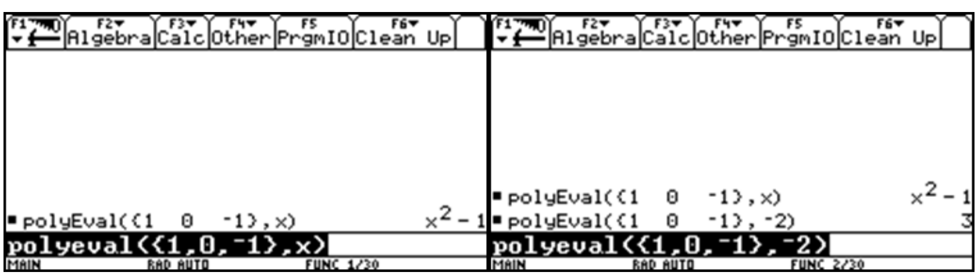


Figura 24. Utilización del [POLYEVAL ( )] en la situación Evaluando los polinomios.

Una de las dificultades que enfrentan los estudiantes al momento de completar el polinomio, es que no es una tarea usual. Ésta a veces se efectúa al realizarse una división de polinomios, en el que se hacen presentes los términos con coeficiente cero. Además esta tarea no la realiza el CAS de la calculadora, aunque el polinomio lo pueda desarrollar y ordenar, no lo completa.

En otras investigaciones como las del grupo APTE (s.f.), se ha utilizado otro comando para evaluar polinomios en la aplicación PRINCIPAL O HOME, el comando que llaman “tal que[51]” [|]. Los estudiantes una vez digitada la expresión algebraica agregan este operador y el valor de x a sustituir. La aplicación del operador “tal que” se observa en la Figura 25.

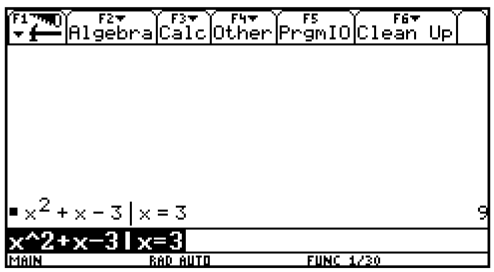


Figura 25. Operador "tal que" [|] para evaluar polinomios.

Sin embargo en el diseño de la situación evaluando los polinomios se consideró que el comando [POLYEVAL( )] dada mayores posibilidades para la complementariedad de L/P y CAS, además que suscita la tecnología (definición de un polinomio), ya que al completarse el polinomio la técnica remite a mirar ¿qué es un polinomio?¿cuántos términos tiene un polinomio como $x^n - 1$?

En cuanto al uso del [POLYEVAL ( )] en relación al operador “tal que” se esperan mayores dificultades en la digitación y activación del comando [POLYEVAL ( )], porque se requiere utilizar signos de agrupación, de reconocer la lógica de qué es lo que se agrupa y las razones de utilizar comas para separar términos. La confrontación de las representaciones algebraicas de L/P con las representaciones algebraicas digitadas en la pantalla de la calculadora conlleva a separar los coeficientes de las expresiones literales de un polinomio y esto genera diferencias entre ambas representaciones. Es posible que estas tareas, donde se cambian a diferentes representaciones, ocurra el fenómeno de determinación localizada.

[51] En el manual de la calculadora TI- 92 PLUS se le conoce como el operador *with* que puede sustituir un valor numérico o una expresión. Sus funcionalidades se resumen así: realiza sustituciones, restricciones de intervalos y exclusiones (Texas Instruments, 1999, p. 541).

En la Figura 26, se muestran las funcionalidades del [POLYEVAL ( )], en la primera línea (de arriba hacia abajo) se observa cómo los valores de los coeficiente no necesariamente tienen que ser números, en este caso se han insertado los coeficientes a, b y c de un polinomio cuadrático de una variable, x. Antes de digitar los coeficientes a, b *y* c es necesario cerciorarse si estos valores tiene algún valor concreto. En la segunda línea se observan los coeficientes de un polinomio cúbico evaluado en x, al dar [ENTER] se encuentra la expresión desarrollada del polinomio en orden. En la tercera línea de la Figura 26, se observa que el anterior polinomio cúbico es evaluado en $x = 5$. En la cuarta y última línea se colocó un conjunto de números a evaluar el polinomio, en estos casos agrupados entre llaves y separados con comas. Los resultados de estas evaluaciones se presentan en el mismo orden y entre llaves.

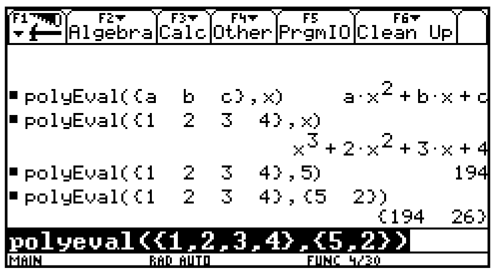


Figura 26. Diferentes funcionalidades del [POLYEVAL ( )].

En el comando [POLYEVAL ( )] las llaves que agrupan los coeficientes de un polinomio en orden decreciente denotan un vector. En el universo interno de la calculadora se representa al polinomio como un vector determinado por sus coeficientes y esto genera un objeto ostensivo del polinomio. Mientras que los paréntesis agrupan los elementos necesarios para el funcionamiento del comando.

Para las tareas de la situación evaluando los polinomios, se ha previsto la opción de evaluación con un solo valor y no un conjunto de números, ya que puede ser difícil la distinción entre los dos conjuntos de valores, a la izquierda se escribe el conjunto de coeficientes en orden del polinomio en su forma desarrollada y completa y a la derecha el conjunto de números a evaluar en el polinomio.

Al digitar los coeficientes, que han sido agrupados entre llaves, estos se separan con comas, pero una vez se da [ENTER] las comas desaparecen y se convierten en espacios entre estos números (fenómeno de pseudo transparencia). Algo importante en el uso del comando [POLYEVAL ( )] es que solo se activa cuando la calculadora está en el idioma inglés, por lo que se sugiere que antes de que los estudiantes tengan acceso a la calculadoras, todas deben estar bajo este idioma[52]. En las siguientes actividades, en particular con la utilización de los programas [PARABOL1 ( )] y [PARABOL2 ( )], también es necesario esta configuración.

En cuanto a las preguntas planteadas por los matemáticos al resolver ecuaciones a partir de las raíces, en esta situación se toma en cuenta la primera: hallar la existencia de una raíz, porque a partir de las evaluaciones se determina la existencia de un cero cuando el resultado es nulo. Por otra parte al mirar las características de aquellos polinomios que comparten los mismos ceros se pueden establecer relaciones con la forma factorizada. En esta tarea se da una aproximación al segundo problema: deducir las propiedades de las raíces a partir de los coeficientes del polinomio.

Respecto a los momentos de estudio se espera que sean desarrollados en dos horas de clase, a continuación se describe cada uno de ellos:

- *El momento del primer encuentro:* los estudiantes reciben en papel las tareas de la situación y leen las indicaciones. Se requiere que inicialmente den respuesta a cada una de las casillas de la Tabla 16 para continuar con las otras tareas. Para lograrlo necesitan conocer qué es un polinomio completo y cómo se usa el comando [POLYEVAL ( )]. Lo primero que pueden hacer es completar la columna B de la Tabla 16 referente a un polinomio desarrollado en orden. Respecto al orden de un polinomio pueden surgir preguntas, la profesora puede recordarles el grado de un polinomio para orientar la organización de los términos del polinomio. Para aclarar un poco más, la profesora puede dar algunos ejemplos de polinomios en su forma desarrollada y preguntarles a los estudiantes: ¿por qué los polinomios están o no están en orden?
- *El momento exploratorio:* los estudiantes puedan sin ningún problema realizar la columna B de la Tabla 16, polinomio desarrollado, porque en la anterior situación se ha determinado que la forma estándar de un polinomio se le va a llamar forma desarrollada. Algunos polinomios ya se encuentran bajo esa forma o solamente requieren realizar algunas operaciones como un producto o reducción de términos semejantes. En algunos

[52] Es posible que este comando se encuentre también en el idioma español, sin embargo en la indagación realizada no se encontraron resultados. En la búsqueda en el manual en español, se encuentra como dato curioso que los comandos son utilizados y presentados en el idioma inglés.

de estos casos, los polinomios ya han sido desarrollados en la situación 1, así que puede que no existan dificultades en el manejo de las técnicas L/P. En cuanto a completar el polinomio pueden surgir algunas ideas, porque es poco habitual realizar este proceso, así que la profesora puede con un ejemplo mostrar que es lo solicitado o puede explicar a medida que los estudiantes dan ideas de lo que ellos creen es completar un polinomio. En cuanto al comando [POLYEVAL ( )] la sintaxis de entrada no es tan fácil de descubrir, aunque los estudiantes pueden intentar dar ideas de cómo funciona, ya que la calculadora inmediatamente responde: si lo que ingresan es correcto aparece en la pantalla, de lo contrario se genera un mensaje de error de sintaxis (en inglés, quizás al comienzo puede ser complicado leerlos, pero con las indicaciones de la profesora pueden reconocer lo que dice[53]).

- *El momento del trabajo de la técnica*: para expresar en forma desarrollada los polinomios por medio de técnicas de L/P, pueden realizarse operaciones como productos o reducción de términos semejantes. Para hacer los productos se requiere de la aplicación de la propiedad distributiva y en cuanto a la reducción de términos semejantes son necesarias la aplicación de la propiedad conmutativa y asociativa de la adición de polinomios. Una vez los estudiantes tengan los polinomios en su forma desarrollada, tendrán que organizarlos en orden decreciente. En la tarea no se especifica el tipo de orden, pueden surgir respuestas en donde el polinomio se organice en orden creciente. Para el funcionamiento de [POLYEVAL ( )] es necesario hacer la aclaración verbal que el orden solicitado es decreciente.

  Es posible que los estudiantes recurran al [ENTER] antes de aplicar una técnica L/P para encontrar la expresión en su forma desarrolla y en orden porque el comando los expresa de esta forma, a excepción de los polinomios tercero, cuarto y noveno. Para estos polinomios pueden ejecutar el [ENTER] y tomar la expresión reducida resultante, antes de usar alguna técnica L/P.

  Aunque la calculadora realiza el desarrollo de un polinomio, los estudiantes desconocen esta funcionalidad, pero no se descarta que en su exploración la descubran y omitan la técnica L/P. Sin embargo completar el polinomio es una tarea para realizar en L/P, por lo

[53] Algunos de los estudiantes pueden leer el mensaje de error emitido en inglés, pero es importante tener en cuenta que no todos lo interpretarán de la misma manera. Para superar el impase del idioma, la profesora puede mostrarles un ejemplo de error y traducirlo al español.

que se hace necesario el reconocimiento de coeficientes nulos y el acercamiento a definiciones de polinomio de grado *n*, polinomio nulo y polinomio constante.

Dado que algunos de los polinomios ya han sido trabajados en la situación 1, se deduce que las dificultades para llegar a expresar los polinomios en su forma desarrollada o factorizada sean mínimas y por tanto la situación requiera de menos tiempo. En términos generales, se podría decir que la situación no se centra en cómo obtener la expresión desarrollada o factorizada de un polinomio, si no que dada la forma desarrollada o factorizada el estudiante evalúe el polinomio según los valores de la Tabla 16 y a partir de los datos logre encontrar similitudes y diferencias entre los polinomios.

En cuanto al último polinomio, dado que hasta el momento no han trabajado con uno similar, puede ser difícil el reconocimiento de la propiedad distributiva del divisor, más aún cuando los coeficientes resultantes no son enteros[54]. Hecho que les impediría determinar los coeficientes de los términos de la expresión desarrollada. En este caso la profesora puede orientar el desarrollo de este proceso con preguntas como: ¿cuáles son los coeficientes de cada uno de los términos del polinomio $x^2 + x - 6$? Si este polinomio se divide por 4, ¿qué sucede con los coeficientes del polinomio?

En relación a las tareas posteriores a la Tabla 16, la tercera tarea solicita la factorización de los polinomios. Al igual que la forma desarrollada, el CAS de la calculadora tiene un comando que factoriza un polinomio y los estudiantes en la exploración del programa pueden encontrarlo y utilizarlo, porque es implícito si la técnica va a ser L/P o CAS. Sin embargo lo más probable es que recurran a técnicas L/P, además algunos de estos polinomios ya han sido factorizados en la situación 1. Como necesitan las respuestas de la situación 1 los estudiantes deben de conservar la hoja de respuestas.

- *El momento tecnológico - teórico:* como ya se mencionó, en la aplicación de las técnicas L/P para buscar la forma desarrollada, son necesarias el reconocimiento de algunas propiedades como la distributiva, la conmutativa y asociativa de los polinomios. Posterior al desarrollo de la Tabla 16, se plantean algunas tareas que solicitan la interpretación de los resultados (tareas 2.2). Esto quiere decir que ellos a partir de la forma desarrollada, completa y en orden de un polinomio, pueden reconocer los términos con coeficientes

[54] Es usual que los estudiantes trabajen con polinomios con coeficientes enteros, hasta el momento los polinomios propuestos en la situación 1 tienen esa característica.

nulos, definir un polinomio, reconocer los polinomios equivalentes a partir de su expresión algebraica y los resultados de evaluación, determinar qué sucede cuando se evalúa un polinomio en su cero y reconocer las características comunes de los polinomios que comparten los mismos factores lineales.

Es posible que algunos estudiantes tengan problemas con la evaluación del polinomio con [POLYEVAL ( )] y que los resultados de la Tabla 16 no sean favorables para el reconocimiento de la equivalencia de las expresiones, esto llevaría a respuestas inadecuadas y por tanto es necesaria la intervención de la profesora antes de la socialización, con preguntas como:¿existe en la Tabla 16 polinomios con la misma forma desarrollada?¿cómo son los resultados de evaluación de los polinomios que tienen la misma forma desarrollada? También puede realizarle algunas sugerencias como: utiliza el [POLYEVAL ( )] al evaluar por x, si la expresión es la misma que la forma desarrollada escrita en la columna B de Tabla 16, se espera que los datos de evaluación sean los correctos. De lo contrario es necesario que digite la expresión completa y en orden, dé [ENTER] y observe si esta forma coincide con la forma desarrollada. Si no coinciden, es necesario revisar el proceso para completar el polinomio o el de la forma desarrollada. Para cerciorarse de los resultados puede evaluar el polinomio con técnicas L/P.

- *El momento de la institucionalización y evaluación*: se sugiere que la institucionalización y evaluación se realice en dos partes. La primera durante la elaboración de la Tabla 16 y la segunda parte para mirar las respuestas posteriores a la Tabla 16. Un estudiante puede realizar la primera fila de la Tabla 16. Si aún persisten las dudas sobre lo que hay que hacer, otro estudiantes puede mostrar sus procedimientos para el segundo polinomio. En relación a las técnicas CAS se puede utilizar el viewscreen y el proyector. Cada vez que los estudiantes expresen sus resultados se confrontan con el resto del grupo al utilizar preguntas como: ¿quiénes obtuvieron la misma respuesta? ¿es esta la respuesta correcta? ¿alguien tiene otro resultado? ¿hay algún error en la respuesta? Una vez los estudiantes verifiquen las respuestas de los primeros polinomios, cada grupo de trabajo continúa con los siguientes polinomios de la columna A de Tabla 16.

  La segunda parte es la socialización de las respuestas a las preguntas en relación a la Tabla 16. Antes de verificar los datos de la Tabla 16, la profesora puede indagar sobre las dos primeras tareas (2.2.a y 2.2.b) y hacer una lista de respuestas en el tablero. Se sugiere dejar las respuestas de la Tabla 16 en el tablero para confrontarlas con las respuestas de las tareas de la sección 2.2 y en relación a ellas los estudiantes den argumentos del por qué las respuestas son incorrectas o correctas. En cuanto a la tercera y cuarta tarea (2.2.c y 2.2.d), la respuesta de la tercera tarea predetermina la respuesta de la cuarta tarea.

Dado que algunos de los polinomios ya han sido factorizados en la situación 1, se deduce que la factorización no es una tarea difícil. Expresados en su forma factorizada y al evaluar el polinomio en su cero[55], se introduce la técnica L/P de factorización y el producto nulo para hallar y definir los ceros de un polinomio. La profesora en las discusiones puede hacer las siguientes preguntas: los polinomios factorizados en polinomios lineales $(x - r)$ y evaluados en r, ¿arrojan un mismo valor numérico? ¿aquellos que han sido evaluados en el mismo valor numérico y cuyos resultados son iguales determinan polinomios equivalentes? ¿por qué si o por qué no son los polinomios equivalentes?

En la Tabla 15 se presentan los indicadores del 2.1 al 6.5 de una praxeología matemática local relativamente completa en relación a la situación 2.

Tabla 15. Descripción de los indicadores de completitud de una praxeología matemática local en la situación 2: *Evaluando los polinomios.*

A. INDICADOR	B. DESCRIPCIÓN
2.1. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas.	Para efectuar el desarrollo de un polinomio puede utilizarse técnicas CAS o L/P, aunque se espera las técnicas L/P ya que desconocen las técnicas CAS. Cuando utilizan el CAS puede utilizar el comando [ENTER] o [EXPAND ( )], aunque es más probable que utilicen el comando [ENTER] porque fue usado en la situación 1, mientras que [EXPAND ( )] nunca ha sido usado, pero pueden hallarla en su exploración. [ENTER] no necesariamente lleva a expresar el polinomio en su forma desarrollada, en algunos casos puede arrojar la forma factorizada, así que no sería el comando más apropiado. En cuanto a completar el polinomio sólo se esperan técnicas L/P, ya que en el CAS no existe un comando para esta tarea.
3.2. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas.	En el uso del comando [POLYEVAL ( )] la sintaxis de entrada hace que el estudiante sólo reconozca los coeficientes de un polinomio completo en orden y el valor a sustituir. Esta representación nueva del polinomio, omite la letra (la variable[56]) y sólo requiere de los coeficientes y valores a sustituir, esto implica que sea necesario

[55] Hasta el momento no se le ha dado el nombre de cero.

[56] Sólo se hace presente cuando evaluamos con respecto a ella. Esta técnica permite verificar si los valores se han ingresado correctamente, ya que en la pantalla aparece el polinomio desarrollado en orden.

A. INDICADOR	B. DESCRIPCIÓN
	tener los polinomios en su forma desarrollada, completa y en orden. De manera que el estudiante diferencie los objetos ostensivos de un polinomio, al tener en cuenta las representaciones generadas por L/P y CAS. Para determinar la equivalencia de los polinomios se puede mirar desde las expresiones algebraicas o desde los datos numéricos arrojados por el [POLYEVAL ( )]. El punto crucial para el análisis numérico se da a partir del estudio de los ceros, ya que los polinomios que comparten los mismos ceros no necesariamente son equivalentes y esto lleva a analizar la equivalencia de los polinomios a partir de otros resultados como la comparación de su forma desarrollada o factorizada. Hasta el momento se han presentado los objetos ostensivos relacionados a lo numérico y algebraico, pero también se encuentra la lengua natural, que hace parte de las explicaciones orales y escritas que da el estudiante al analizar los resultados de la Tabla 16.
4.3. Existencia de tareas y de técnicas "inversas":	Con la utilización del [POLYEVAL ( )] se puede verificar si la expresión ingresada corresponde al polinomio dado porque al evaluar respecto a la variable (x) aparece el polinomio desarrollado en orden. Las tareas y técnicas inversas también se hacen presentes en la manipulación de las expresiones algebraicas al ser escritas en la forma desarrolla, forma desarrollada completa, forma factorizada u otra forma que no corresponda a las anteriores. Cada una de las formas algebraicas arroja una información diferente y pasar de una a otra es parte de la solución de las tareas propuestas.
5.4. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas.	Una vez los estudiantes utilicen el [POLYEVAL ( )] requieren saber que su funcionalidad es evaluar un polinomio dado un valor. En el ingreso de los datos a la calculadora se necesitan los coeficientes de un polinomio en orden y se incluyen los que son nulos. Si los estudiantes analizan los polinomios con la misma forma desarrollada se darán cuenta que la evaluación para un mismo valor es igual. En algunos casos los polinomios pueden tener el mismo resultado de evaluación, pero sólo los equivalentes son los que comparten los mismos resultados para cualquier valor a sustituir. Al expresar los polinomios en su forma factorizada, se encuentran que algunos polinomios tienen los mismos factores lineales $(x-r)$ y al evaluar por r todos los resultados de la evaluación dan cero, esto se puede explicar a partir del producto nulo, que a su vez lleva a la ejecución de una técnica L/P que muestra la generalidad del resultado. Las factorizaciones solicitadas para las tareas de la situación 2 son completas, aunque en ningún momento se hace explícita esta definición. Sin embargo la profesora puede resaltar la diferencia entre las factorizaciones completas y no completas de un polinomio.
6.5. Existencia de tareas matemáticas "abiertas".	Las preguntas 2.2.b. y 2.2.d. son abiertas, indagan sobre generalizaciones del comportamiento de los polinomios de la Tabla 16. La pregunta 2.2.b. pretende determinar la equivalencia de las expresiones desde lo numérico o algebraico. La pregunta 2.2.d. lleva a la definición de un cero, la relación de los factores con la solución de un ecuación y a factorizaciones completas.

3.3.1. Situación 2: *Evaluando los polinomios*

2.1. Dados los polinomios de la Tabla 16, encuentre su forma desarrollada en orden y escríbala en la columna B. Complete el polinomio y escríbalo en la columna C. Culmine las columnas B y C, antes de continuar. Luego evalúe los polinomios para los valores de x determinados en la columna D, utilizando la calculadora y el comando [POLYEVAL ( )]. Anote el resultado de la evaluación en cada fila, es importante que no pase al siguiente polinomio hasta que lo haya evaluado en cada uno de los valores de x determinado

Tabla 16. Evaluando los polinomios.

A. POLINOMIO 			 **D. EVALUANDO**			
	B. FORMA DESARROLLADA EN ORDEN	**C. FORMA DESARROLLADA COMPLETA EN ORDEN**	$x=-2$	$x=-1$	$x=11$	$x=1$
1. $x^2+4x-1-4$	x^2-1	x^2+0x-1	3	0	120	0
2. $14x-24-10x+4x$	$4x^2+4x-24$	$4x^2+4x-24$	-16	-24	504	-16
3. $x(x-2)+3(x-2)$	x^2+x-6	x^2+x-6	-4	-6	126	-4
4. $(x-1)(x+1)$	x^2-1	x^2+0x-1	3	0	120	0
5. x^2+x-6	x^2+x-6	x^2+x-6	-4	-6	126	-4
6. x^2+x^3-4x-4	x^3+x^2-4x-4	x^3+x^2-4x-4	0	0	1404	-6
7. $x+2$	$x+2$	$x+2$	*0*	*1*	*13*	3
8. $(x^2-4)x+x^2-4$	x^3+x^2-4x-4	x^3+x^2-4x-4	0	0	1404	-6
9. $\frac{x^2+x-6}{4}$	$\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}-\frac{3}{2}$	$\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}-\frac{3}{2}$	-1	$\frac{-3}{2}$	$\frac{63}{2}$	-1

2.2.Observe los resultados dados por la calculadora:

a) En relación a la Tabla 16, ¿Qué se puede decir de los polinomios?

En algunos polinomios se obtienen los mismos resultados para todos los valores de evaluación, es el caso de las siguientes parejas de polinomios de: 1 y 4, 3 y 5, 6 y 8. Estos polinomios se les llaman equivalentes y además tienen la misma forma desarrollada. Los resultados de evaluar el polinomio 9 corresponden a la cuarta parte de los valores del polinomio 5 o 3 y a su vez los resultados de evaluación del polinomio 5 o 3 corresponden a la cuarta parte de los valores del polinomio 2. Todos los resultados de la evaluación son números racionales.

b) Si se continúan dando valores a x, ¿qué se puede conjeturar?

En el caso de las parejas polinomios 1 y 4, 3 y 5, 6 y 8, estas tendrán el mismo valor para todas las evaluaciones y los polinomios 9, 5, 3 y 2 seguirán con resultados que son múltiplos.

c) Re-escriba los polinomios de la Tabla 16 de la forma factorizada y compárelos.

Polinomio 1:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

Polinomio 2:

$$4x^2 + 4x - 24 = 4(x^2 + x - 6) = 4(x+3)(x-2)$$

Polinomio 3:

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

Polinomio 4: ya se encuentra factorizado

Polinomio 5 es equivalente al polinomio 3 y tiene la misma forma factorizada

Polinomio 6:

$$x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x^3 + x^2) - (4x + 4) = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)(x^2-4)$$
$$= (x+1)(x+2)(x-2)$$

Polinomio 7: no se puede factorizar, los polinomios lineales son primos o irreductibles.

Polinomio 8: la misma factorización del polinomio 6

Polinomio 9:

$$\frac{x^2 + x - 6}{4} = \frac{(x+3)(x-2)}{4}$$

Si comparamos los polinomios se observan que los polinomios 2, 3, 5 y 9 tienen los mismos factores, son polinomios de la familia $a(x+3)(x-2)$. *Además los polinomios 6 y 8, tienen algunos factores comunes con los otros polinomios,* $(x-2)$ *es factor de los polinomios 2, 3, 5 y 9, y* $(x+1)$ *es factor de los polinomios 1 y 4,* $(x+2)$ *es factor del polinomio 7.*

d) ¿Qué se puede decir de cada uno de los factores lineales $(x - r)$ siendo r un número, de los polinomios y la evaluación de dicho polinomio en $x = r$?

Los polinomios evaluados en el valor de r *correspondiente a los factores lineales* $(x-r)$ *dan cero. Por ejemplo si evaluamos el polinomio 9 en* $r = -3$ *tenemos:*

$$\frac{(-3+3)(3-2)}{4} = \frac{0 \cdot 1}{4} = 0$$

O en r=2 tenemos:

$$\frac{(2+3)(2-2)}{4} = \frac{5 \cdot 0}{4} = 0$$

3.4. Análisis *a priori* de la situación 3: *Hallando los ceros de los polinomios*

Variables didácticas de la situación 3.

V1: polinomios con coeficientes enteros y de grado uno, dos ó tres.
V2: polinomios en la forma desarrollada o factorizada.
V3: gráficos como rectas, parábolas o curvas. Parábolas con diferente concavidad y cortes con los ejes.
V4: en las tareas se usan o se solicitan objetos ostensivos escritos relacionados con las expresiones algebraicas, enunciados verbales, números y gráficos en el plano cartesiano.
V5: en las tareas se solicita usar el L/P o la calculadora en la aplicación Y=EDITOR y GRAPH y de esta última aplicación se usa el comando [VALUE].

En cuanto al desarrollo de las dos situaciones anteriores, se habían trabajado los objetos ostensivos relacionados con la lengua natural o enunciados verbales, las expresiones algebraicas y lo numérico. Sin embargo la vinculación de los ceros con factores lineales de un polinomio da apertura al estudio de los gráficos cartesianos. Es por ello que esta situación se centra en algunas técnicas para hallar los ceros de un polinomio, algunas de ellas son: la factorización, la fórmula cuadrática y el comando [VALUE] el cual requiere de los resultados de L/P o de la observación de la gráfica para dar los valores de las abscisas de los ceros.

Para realizar las gráficas en la calculadora los estudiantes deben abandonar HOME y utilizar las aplicaciones Y= EDITOR y GRAPH. Una tercera aplicación es WINDOW EDITOR, donde se establecen los valores de la ventana del gráfico cartesiano. En el desarrollo de la situación se consideraron los datos presentados en la Figura 27 y no fue necesaria su modificación durante la elaboración de las tareas ya que previamente las calculadoras se configuraron con estos datos. En otros trabajos se ha establecido que las variaciones de los datos de la aplicación WINDOWS EDITOR se constituye en una técnica instrumentada (Cedillo, 2006).

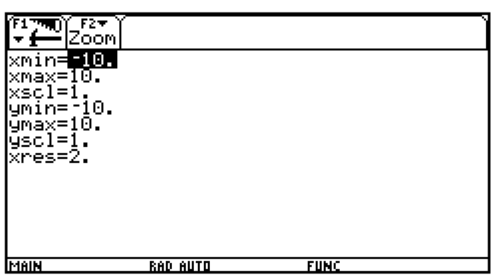


Figura 27. Aplicación WINDOW EDITOR.

El manejo de los gráficos puede ser engorroso, no es fácil el paso de GRAPH a Y=EDITOR. Para acceder a cada aplicación el estudiante puede recurrir a la tecla [APPS], seleccionar la aplicación y dar [ENTER] (Ver la Figura 28) o pueden usar algunas teclas que permiten acceder a estas aplicaciones, para GRAPH se oprime diamante [◊] y [R] y para Y= EDITOR se oprime la tecla diamante [◊] y luego [W].

Figura 28. Acceso a las aplicaciones por medio de la tecla [APPS].

En el desarrollo de las tareas también es posible la utilización de la doble ventana para ver simultáneamente las dos aplicaciones. Esta opción se encuentra en [MODE], se elige la división de ventana izquierda-derecha y se selecciona la aplicación deseada en cada ventana. En [MODE] también se da la opción del tamaño (Ver Figura 29). Para pasar de una aplicación a otra se utiliza la tecla [2ND] y [APPS]. Aunque con la división de pantalla se tiene la posibilidad de observar simultáneamente los objetos ostensivos gráficos y algebraicos, en el desarrollo de la situación se consideró solamente una ventana, porque se requiere de menos comandos y porque al dividirla se disminuye el tamaño de los objetos ostensivos.

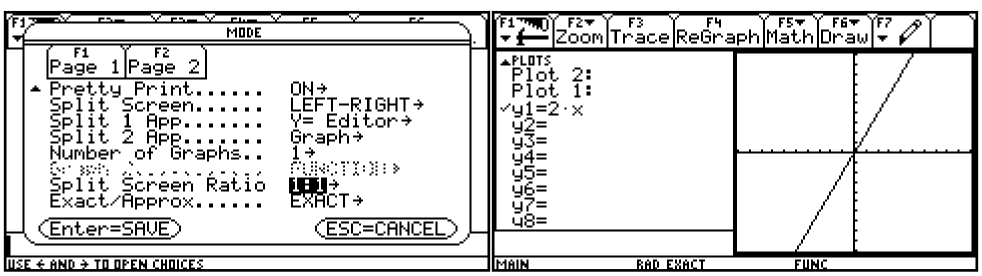


Figura 29. División de pantalla con la tecla [MODE].

Las expresiones se han seleccionado de manera que las líneas muestren sus cambios de crecimiento y los puntos de intersección con el plano cartesiano, de modo que no se requiera modificar los valores de la ventana graficación para verlos, pero no se descarta que sea necesario esta posibilidad. Algunos problemas en la graficación se dan en la poca suavidad de las líneas, parecen hechas por pequeños segmentos y no por un solo trazo.

En las descripciones de la gráfica se quiere que identifiquen cortes con los ejes cartesianos, cambios de crecimiento y valores máximos o mínimos. Esto lleva a mirar los cambios de la forma de la gráfica respecto al grado del polinomio.

Antes de usar el comando [VALUE] los estudiantes deberán obtener los ceros del polinomio por medio de técnicas L/P. Una vez obtengan el valor del cero, que corresponde a la abscisa de un punto del plano cartesiano utilizan el [VALUE], el cual obtiene su ordenada y lo ubica en el gráfico. [VALUE] muestra que las ordenadas de los ceros son nulas y por tanto se ubican en el eje x (Ver Figura 30). Se espera que los estudiantes detecten esta regularidad en todos los casos realizados. Es probable que en el desarrollo de las anteriores situaciones los estudiantes hayan determinado que el resultado de la evaluación por su cero es nulo, pero en esta situación se hace explícita la relación del valor evaluado (abscisa) con el resultado de la evaluación (ordenada) como un punto en el plano cartesiano ubicado sobre el eje x. De allí que puedan relacionar los ceros de un polinomio con los cortes con el eje x y puedan usar la gráfica para hallar los ceros de un polinomio.

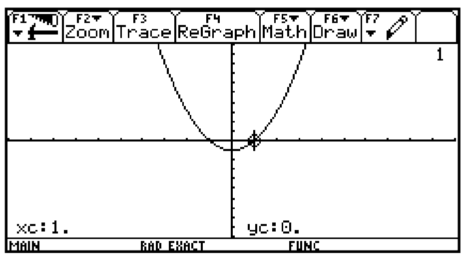


Figura 30. Utilización del comando [VALUE].

Es importante tener en cuenta que en este tipo tareas se parte de la expresión algebraica para llegar a la gráfica y que el uso de la calculadora brinda la posibilidad de ver las gráficas de manera global y rápidamente. Para realizar una gráfica con técnicas L/P se puede hacer una lista de valores numéricos hallados a partir de la evaluación de la expresión algebraica, estos valores corresponden a un conjunto de puntos de la gráfica, que una vez ubicados en el plano cartesiano generan una curva o línea que resulta de unir dichos puntos. Estas técnicas L/P requieren de más tiempo y son más complicadas en las gráficas curvas[57].

Por la posibilidad de obtener diversas gráficas en menos tiempo que en L/P se podría decir que las calculadoras simbólicas propician un acercamiento a una aprehensión global cualitativa, en el sentido que se favorece la comparación y discriminación de las características de las gráficas, la coordinación con la expresión algebraica y el desarrollo de la visualización

[57] Para trazar una línea recta basta con dos puntos, mientras que para una línea curva es necesario más de un punto, en el caso de la parábola es necesario el reconocimiento de la simetría y del valor máximo o mínimo (el vértice).

(Duval, 2001)[58]. Lo anterior no descarta la aprehensión global cualitativa en L/P y tampoco la aprehensión local por punteo[59] con el uso de las calculadoras simbólicas, el desarrollo de cada una de estas aprehensiones depende del tipo de tareas. Por ejemplo: las tareas con el comando [VALUE] favorecen una aprehensión local por punteo.

En cuanto a los problemas matemáticos que surgieron cuando se miran las raíces como solución de las ecuaciones, se encuentra que en esta situación y en la cuarta, se dan los tres problemas en las tareas que vinculan lo gráfico con las expresiones algebraicas. Aunque los estudiantes no hayan realizado alguna técnica para determinar la raíz o cero, el solo ver la gráfica y tener en cuenta que la ordenada es nula puede determinar la existencia y el valor aproximado de las raíz. Por otra parte las tareas relacionadas con los gráficos y las expresiones algebraicas posibilitan establecer las relaciones de los coeficientes del polinomio y los ceros en el proceso de aprehensión global cualitativa.

Respecto a la técnica con radicales para hallar los ceros, esta se involucra en una de las tareas de esta situación con la fórmula cuadrática. Esta técnica surgió primero que la factorización de polinomios y puede hacerles vivir a los estudiantes el mismo proceso que se dio en la historia, ellos pueden preguntarse: ¿por qué esta fórmula es exclusiva de los polinomios cuadráticos? ¿por qué la fórmula cuadrática encontra los ceros de los polinomios cuadráticos?¿es posible encontrar para otros polinomios, como el cuarto polinomio de la Tabla 19 que es cúbico, una fórmula semejante? También pueden deducir que la factorización es un método más general que los radicales. El uso de la fórmula cuadrática puede ser difícil para los estudiantes porque deben determinar los valores de a, b y c de la forma desarrollada de un polinomio cuadrático y deben reconocer que es exclusiva de estos polinomios.

Respecto a los momentos de estudio, se espera que sean desarrollados en dos horas de clase, a continuación se describen cada uno de ellos:

- *El momento del primer encuentro:* al igual que en las situaciones anteriores a los estudiantes se les entrega las preguntas en papel. Como desconocen las aplicaciones de las calculadoras es probable que indaguen y exploren la aplicación Y=EDITOR y GRAPH. Algunos de ellos podrán realizar el gráfico con las técnicas L/P antes de verlo

[58] Es importante aclarar que los referentes de la reflexión semiótica se han tomado desde la TAD, sin embargo se tuvieron en cuenta algunos de los planteamientos de Duval.
[59] Solo se retienen puntos considerados aisladamente (Duval, 2001, p. 67).

en la calculadora y usarlas como un medio para verificar las técnicas CAS. Sin embargo realizar las gráficas en L/P, no es una técnica rápida, por lo que tendrían que usar más tiempo de lo previsto. No se descarta que los estudiantes tengan una aprehensión global cualitativa que les permita hacer un bosquejo rápido en L/P en relación a la expresión algebraica.

- *El momento exploratorio:* los estudiantes pueden indagar en su calculadora como abrir la aplicación Y=EDITOR e ingresar la expresión algebraica o es la profesora quien les da estas indicaciones. En cuanto a la sintaxis de entrada de las expresiones algebraicas no se esperan dificultades porque se hace de la misma manera que en HOME. En cuanto a la expresión $y_1(x)=$ en Y=EDITOR, puede ser causante de preguntas, ya que ellos no la han ingresado y no la pueden borrar, además una vez dan [ENTER] el x desaparece y solo queda $y_1=$. A veces en los textos escolares y en la enseñanza se omiten la escritura funcional de los polinomios y es difícil para los estudiantes la lectura e interpretación de $y_1(x)=$.

  Una vez digitada la expresión y al dar [ENTER] los estudiantes pueden esperar que aparezca inmediatamente la gráfica, pero en las calculadoras TI- 92 PLUS se necesita pasar a la aplicación GRAPH, indicación que no se determina en la situación. Por tanto se requiere que la profesora o un estudiante, utilicen el viewscreen y el proyector para mostrarle al grupo el proceso de inserción de la expresión en Y=EDITOR y la ubicación del gráfico correspondiente a la expresión en GRAPH. También es importante explicarles a los estudiantes la opción de seleccionar y deseleccionar las expresiones con [F_4] en Y=EDITOR, ya que aquellas expresiones seleccionadas son las que aparecen en la ventana de graficación y en las tareas se necesita ver una sola gráfica. También se les debe indicar a los estudiantes que cada división del eje x y y es en unidades, ya que en la aplicación WINDOWS EDITOR también es posible generar la división del eje x o y en diferentes escalas.

  Al igual que con los otros comandos el uso de [VALUE] requiere de las indicaciones de cómo funciona, para ello se utiliza el proyector y viewscreen, aunque los estudiantes pueden probar solos qué es lo que hace, por cuestiones de tiempo la profesora puede decidir si son los estudiantes quienes descubren el funcionamiento o es ella quien les muestra cómo se usa.

- *El momento del trabajo de la técnica*: una vez los estudiantes obtienen la gráfica en la calculadora deben realizar una descripción y dibujo de cada una de ellas. En la tarea siguiente se les solicita hallar los ceros de un polinomio por medio de dos técnicas L/P: la factorización o la fórmula cuadrática. Con el valor del cero (abscisa) y el comando [VALUE] observan la ubicación de este punto en el gráfico y se obtiene el valor de la ordenada del cero. Luego deben de ubicar en el dibujo de la Tabla 18 los ceros.
- *El momento tecnológico – teórico:* se da en la descripción de los dibujos de las gráficas de los polinomios, en el uso del comando [VALUE] y en las tareas de la sección 3.2 y 3.4. Los resultados de las Tablas 18 y 19 les permiten a los estudiantes analizar las características de la gráfica según el grado del polinomio, determinar la ubicación de los ceros de un polinomio en su gráfico y establecer el número mínimo y máximo de ceros de un polinomio en relación a su grado.
- *El momento de la institucionalización y evaluación*: al igual que en las anteriores situaciones, la profesora puede realizar la socialización al finalizar o a medida que se culmina una tarea. Sin embargo para no alterar las respuestas, es conveniente para esta situación que la socialización se realice al final y sólo en algunos casos se realicen cortas socializaciones de los aspectos requeridos para el avance de las siguientes tareas.

Tabla 17. Descripción de los indicadores de completitud de una praxeología matemática local en la situación 3: *Hallando los ceros de los polinomios.*

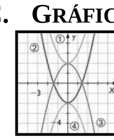
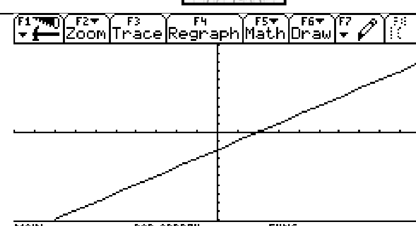
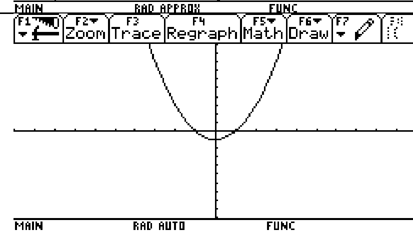
A. INDICADOR	B. DESCRIPCIÓN
2.1. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas.	En relación a la gráfica, los estudiantes tienen la opción de verla en la calculadora, sin embargo pueden recurrir a técnicas L/P para dibujarla en el plano cartesiano. En cuanto a la opción de los ceros se recurre a dos técnicas de L/P, factorización y fórmula cuadrática, la selección de cada una de ellas depende de la forma de la expresión algebraica. En la calculadora existen técnicas para hallar los ceros, como [SOLVE ( )], [ZEROS ( )], [CSOLVE ( )] y [CZEROS ( )] y también para factorizar, pero ninguna de ellas ha sido propuesta en esta situación, quizás los estudiantes las descubran.
3.2. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas.	En esta situación se involucran diferentes objetos ostensivos orales y escritos como los gráficos cartesianos, los valores numéricos, la lengua natural y las expresiones algebraicas. En la Tabla 18, se trabaja con la expresión algebraica, la gráfica y la lengua natural. En la Tabla 19 se pasa de la expresión algebraica, al valor numérico y posteriormente al gráfico. La posibilidad de usar y pasar de un objeto ostensivo a otro permite mirar diferentes características del polinomio.

A. INDICADOR	B. DESCRIPCIÓN
4.3. Existencia de tareas y de técnicas "inversas":	Aunque no son explícitas, se pueden hallar los ceros a partir de las gráficas para verificar el procedimiento L/P. En las tareas se solicita hallar los ceros en L/P y ubicarlos en el plano cartesiano. Pero una vez los estudiantes descubren que los ceros se ubican sobre el eje de las x, pueden hacer el proceso inverso. En cuanto a las tareas de elaboración de gráficos, en estas tareas se parte de la expresión algebraica, en la siguiente situación se presenta el gráfico y se espera que los estudiantes den la expresión algebraica.
5.4. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas	La utilización e interpretación de la fórmula cuadrática no se da, solamente se utiliza para hallar los ceros. En cuanto al uso de la factorización para hallar los ceros, la explicación se da a partir del producto nulo, presentada en la situación 2. Una vez se obtienen los ceros, se ubican en el plano cartesiano de la pantalla de la calculadora y posteriormente en el dibujo de la Tabla 18.
6.5. Existencia de tareas matemáticas "abiertas".	Las preguntas siguientes a las Tablas 18 y 19 pretenden generalizar el comportamiento de las gráficas de los polinomios dados, para ver variaciones y similitudes de los polinomios lineales, cuadráticos y cúbicos.

3.4.1. Situación 3: *Hallando los ceros de los polinomios*

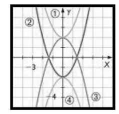
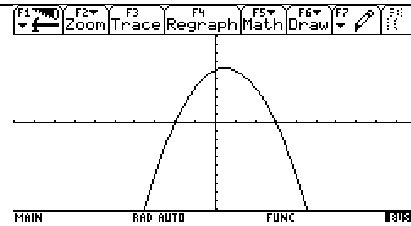
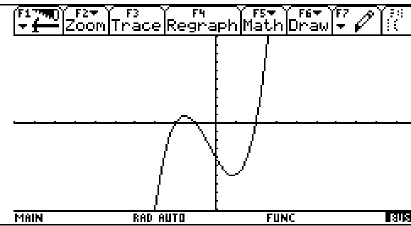
3.1. Ingresa cada uno de los polinomios de la anterior Tabla 18 en Y=EDITOR y luego vaya a GRÁFICOS o GRAPH. Describa lo que observa (columna B) y realice un dibujo de la gráfica (columna C)

Tabla 18. Hallando los ceros de los polinomios (1).

A. POLINOMIO 	B. DESCRIPCIÓN 	C. GRÁFICA[60] 
1. $x-2$	*Es una recta con pendiente positiva o creciente que corta en el eje y en* $(0,-2)$ *y al eje x en* $(2,0)$.	
2. $(x-1)(x+1)$	*Es una curva hacia arriba, como una v (parábola)[61] infinita, que es decreciente para los x positivos y creciente para x negativos. La gráfica corta el eje y en* $(0,-1)$ *y el eje x en* $(1,0)$ *y* $(-1,0)$. *Tiene como eje de simetría el eje y y su vértice es el punto mínimo y coincide con el punto de corte con eje* y.	

[60]Los estudiantes deben realizar las gráficas en la calculadora, luego deben dibujarlas en el plano cartesiano de la Tabla 18.

[61] Los estudiantes pueden no conocer que la gráfica de un polinomio cuadrático se le llama parábola y para dar cuenta de su forma pueden asociarla a algo conocido como una letra.

A. POLINOMIO 	B. DESCRIPCIÓN 	C. GRÁFICA[60] 
3. $-x^2+x+6$	*Es una curva hacia abajo, como una* v *infinita, que es creciente para los* $x \in (-\infty, 0.5)$ *y decreciente en* $x \in (0.5, \infty)$. *La gráfica corta el eje* y *en* $(0,6)$ *y el eje* x *en* $(-2,0)$ *y* $(3,0)$. *Su eje de simetría es* $y = 0.5$, *su vértice es el punto máximo que tiene coordenadas* $(0.5, 6.25)$.	
4. x^2+x^3-4x-4	*Es una curva como una* N *infinita, diferente a las anteriores. Con tres cortes en el eje* x*:* $(-2,0)$, $(-1,0)$ *y* $(2,0)$ *y uno en el eje* y*:* $(0,4)$. *Es creciente para* $x \in (-\infty, -1.5) \cup (1, \infty)$, *y decreciente para* $x \in (-1.5, 1)$.	

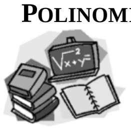
3.2.Observe la Tabla 18 y responda:

a) Según el grado del polinomio, ¿Cuáles serían las características de la gráfica?

El grado determina la forma de la curva, para el polinomio de grado uno se generó una recta con un corte en eje x *y el eje* y, *los polinomios de grado dos generan curvas de forma similar a una* v *infinita con dos cortes en el eje* x *y uno en el eje* y, *el polinomio de grado tres genera una curva con una* N *infinita, con tres cortes en el* x *y uno en el eje* y. *Para el caso de la recta, esta es creciente, para las curvas de los polinomios de grado dos o tres se encuentran intervalos de diferente crecimiento y en el caso de las parábolas el vértice es un máximo o mínimo.*

3.3. Completa la Tabla 19, obteniendo los ceros de los polinomios utilizando procedimientos a Lápiz/Papel (producto nulo o fórmula cuadrática) y escríbalos en la columna B. En la gráfica utilice el comando [VALUE], dé el valor de x obtenido y observe dónde se ubica este punto, escriba las coordenadas del valor en la tercera columna. Ubique en los gráficos (Tabla 18) de la los puntos que corresponden a los ceros, utilice un color para señalarlos.

Tabla 19. Hallando los ceros de los polinomios (3).

A. POLINOMIO 	B. CEROS 	
	1. 	**2.** 
1. $x-2$	$x - 2 = 0$ *luego* $x = 2$. *El cero de este polinomio es* $(2,0)$.	$x_c = 2$ *y* $y_c = 0$ *luego el cero de este polinomio es* $(2,0)$.

A. POLINOMIO 	**B. CEROS** 	
	1. 	**2.** 
2. $(x-1)(x+1)$	*Si* $(x-1)(x+1)=0$, *entonces* $x-1=0$ *o* $x+1=0$. *Luego* $x=1$ *o* $x=-1$, *ceros del polinomio.*	$x_c=1$ *y* $y_c=0$, *uno de los ceros de este polinomio es* $(1,0)$ $x_c=-1$ *y* $y_c=0$, *el otro cero de este polinomio es* $(-1,0)$.
3. $-x^2+x+6$	*Aplicamos la fórmula*: $a=-1$, $b=1$ *y* $c=6$. $x=\frac{-b\pm\sqrt[2]{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt[2]{1^2-4\times(-1)\times 6}}{2(-1)}=\frac{-1\pm\sqrt[2]{25}}{-2}$ *De aquí obtenemos que* $x=-2$ *y* $x=3$, *ceros del polinomio.*	$x_c=-2$ *y* $y_c=0$, *uno de los ceros de este polinomio es* $(-2,0)$ $x_c=3$ *y* $y_c=0$, *el otro cero de este polinomio es* $(3,0)$.
4. x^2+x^3-4x-4	*Factorizar,* $(x^2+x^3)-(4x+4)=x^2(1+x)-4(x+1)=(x+1)(x^2-4)=(x+1)(x-2)(x+2)$. *Producto nulo* $(x+1)(x-2)(x+2)=0$ *Se tiene que* $x+1=0$, $x-2=0$ *y* $x+2=0$, *luego* $x=-1$, $x=2$ *y* $x=-2$, *ceros del polinomio.*	$x_c=-1$ *y* $y_c=0$, *uno de los ceros de este polinomio es* $(-1,0)$ $x_c=2$ *y* $y_c=0$, *otro cero de este polinomio es* $(2,0)$. $x_c=-2$ *y* $y_c=0$, *y el tercer cero de este polinomio es* $(-2,0)$.

3.4.Observe las Tablas 18 y 19 y responda:

a) Observa las gráficas de la Tabla 18, ¿dónde se ubican los ceros de un polinomio?

Los ceros del polinomio se ubican sobre el eje x.

b) ¿Cuántos ceros tiene el polinomio lineal de la Tabla 19? ¿Cuántos ceros tienen los polinomios cuadráticos de la tabla 19? ¿Cuántos ceros tienen el polinomio cúbico de la Tabla 19?¿Depende el número de ceros del grado del polinomio?

El polinomio lineal tiene un cero, los polinomios cuadráticos tienen dos ceros y el polinomio cúbico tres ceros. Eso quiere decir que el número de ceros depende del grado del polinomio, para este caso el número de ceros es igual al grado del polinomio.

Los estudiantes una vez respondan las preguntas 3.4.c. y 3.4.d. pueden retornar a esta pregunta y determinar que la cantidad de ceros es menor o igual a su grado, a excepción de los polinomios lineales.

c) ¿Pueden existir polinomios lineales con más de un cero o sin cero? En el caso de dar una respuesta afirmativa de un ejemplo.

Un polinomio lineal tiene a lo sumo un cero, porque esta recta no cambia de dirección y tiene pendiente diferente a cero. Los únicos polinomios cuya gráfica es una línea recta que no cortan el eje x, son los polinomios constantes, como $y = 4$, pero estos son polinomios de grado cero. Otro polinomio cuya gráfica es una recta que coincide con el eje x es el polinomio cero y que tendría infinitos ceros, pero su grado no es uno, no está definido.

d) ¿Pueden existir polinomios cuadráticos con menos de dos ceros o con más de dos ceros? En el caso de dar una respuesta afirmativa de un ejemplo.

Los polinomios cuadráticos pueden tener a lo sumo dos ceros, sin embargo pueden existir polinomios cuadráticos con un cero como $(x-2)(x-2)$ y sin ceros como $x^2 + x + 6$.

3.5. Análisis *a priori* de la situación 4: *Parábolas*

Variables didácticas de la situación 4.

V1: polinomios cuadráticos con coeficientes enteros y parámetros que toman valores enteros de un conjunto finito.
V2: polinomios en la forma factorizada, desarrollada o canónica.
V3: gráficos de parábolas con diferentes concavidades, puntos de corte con los ejes y amplitud.
V4: en las tareas se usan o se solicitan objetos ostensivos escritos relacionados con las expresiones algebraicas, enunciados verbales, números y gráficos en el plano cartesiano.
V5: en las tareas se usa L/P y la calculadora en la aplicación Y=Editor, GRAPH y HOME, en esta última aplicación se activan los programas [PARABOL1 ( )] y [PARABOL2 ( )].

El inicio de la situación de parábolas se da con el estudio de la familia de la forma $a(x-1)(x+1)$ y $ax^2 + x + 6$, donde los valores de a son enteros negativos y positivos, es $a \in \{-2, -1, 1, 2\}$. La inserción de los valores de a en la aplicación de Y= EDITOR puede incluirlos a todos ó ser digitados uno a uno. En la Figura 31 se muestran cómo los valores de a se agrupan con llaves (vectores) para generar todas las gráficas (pantalla de la derecha) o pueden ser digitados uno a uno (pantalla de la izquierda). La última opción ofrece la posibilidad de seleccionar la gráfica que se quiere ver (al seleccionar la expresión y pulsar $[F_4]$ se seleccionan o deseleccionan), mientras que la primera genera toda la familia de funciones. En la elaboración de la tarea se puede tomar una de las dos opciones.

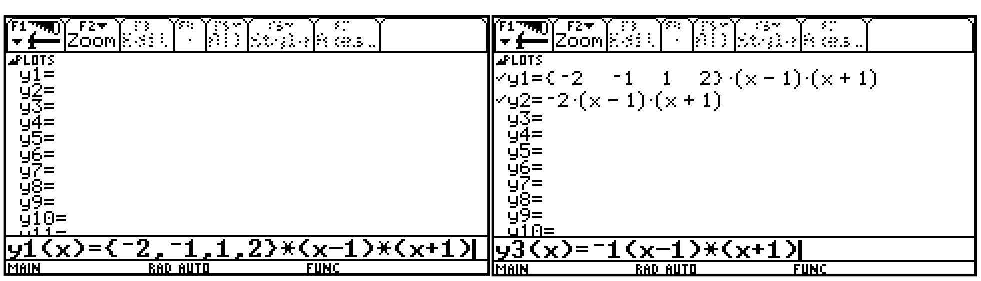


Figura 31.Inserción de polinomios en Y=EDITOR.

Las preguntas posteriores a la elaboración de los gráficos apuntan a mirar los cambios en relación con los valores positivos y negativos de a en las expresiones y determinar diferencias y semejanzas entre los gráficos correspondientes a una misma familia. La última pregunta apunta al reconocimiento de aquellos polinomios cuadráticos que sean factorizables, ya sea a partir de su expresión algebraica o en relación a su gráfica.

Las siguientes tareas son una versión nueva de "expresiones cuadráticas factorizables" presentada en Mejía (2004), quien utiliza dos programas: [PARABOL1 ( )] en el que se obtienen gráficas de expresiones factorizables al azar de la forma $a(x-r)(x-s)$, es $a = 1$ ó $a = -1$ y [PARABOL2 ( )] que genera parábolas de expresiones factorizables y no factorizables de la forma $a(x-h)^2 + k$ donde (h, k) son las coordenadas del vértice y $a = 1$ ó $a = -1$ (Ver Figura 32). La activación del programa se da en la aplicación HOME, allí debe digitarse el nombre del programa con los paréntesis y al dar [ENTER] inmediatamente se muestra la aplicación GRAPH.

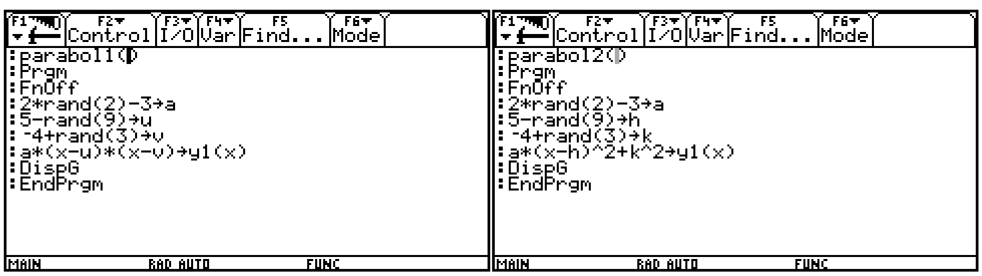


Figura 32. Programas [PARABOL1 ( )] y [PARABOL2 ( )].

Al activar el programa [PARABOL1 ( )] los estudiantes deberán tomar dos gráficos, uno de ellos correspondiente a $a = 1$ y otro $a = -1$. Se han reducido los posibles valores de a porque el interés de la tarea no son los efectos en la abertura de la parábola sino la obtención de la forma factorizada de un polinomio a partir de su gráfico. Una vez seleccionado el gráfico, los estudiantes deberán dibujarlo en su hoja de respuestas, antes de hallar los valores de los ceros y de dar la expresión factorizada. Las tareas anteriores a esta situación apuntan a detectar la relación de los ceros con los factores de los polinomios, sin embargo es en este momento donde se explícita esta relación.

En cuanto al uso del programa [PARABOL2 ( )] se busca que los estudiantes observen que no todas las parábolas cortan el eje x y que por tanto no todas las expresiones polinómicas cuadráticas tienen ceros y como consecuencia no son factorizables en los reales. Las parábolas originadas por el programa corresponden a la expresión polinómica cuadrática $a(x-h)^2+k$ donde (h,k) son las coordenadas del vértice, dicha forma se le conoce con el nombre de canónica. Con este programa se les ha sugerido como tarea encontrar dos parábolas, una que sea factorizable y otra no factorizable. Halladas las gráficas, deberán dibujarlas y determinar las expresiones correspondientes a su forma factorizada o canónica. La pregunta final de la situación es la descripción de la característica de las gráficas correspondientes a los polinomios factorizables y no factorizables. Para la obtención de la forma canónica es importante que reconozcan y obtengan las coordenadas el vértice, en la aplicación de GRÁFICOS o GRAPH pueden hallar el vértice de manera exacta con el comando [MAXIMUM] o [MINIMUM] o de manera aproximada al leer directamente el gráfico o con el comando [TRACE].

Una técnica que los estudiantes pueden usar para verificar si la expresión algebraica propuesta corresponde al gráfico obtenido al azar, es a partir de la graficación simultánea de ambas expresiones; si las gráficas coinciden, es decir que se observa la misma línea, es porque ambas expresiones son equivalentes. Para ver las dos graficaciones sería necesario cambiar el estilo de la segunda expresión por animada o grosor (en inglés animate o thick), porque de lo contrario no se ve la graficación de la segunda expresión algebraica. Es importante aclarar que la parábola al azar solamente cambia con la activación del programa en HOME.

Con esta situación los estudiantes deberán reconocer que las gráficas de las expresiones polinómicas cuadráticas factorizables son aquellas que cortan el eje x, es decir que tienen ceros y sus valores de las abscisas determinan los valores de r y s en la expresión $a(x-r)(x-s)$. Un caso especial y que merece atención, son aquellas parábolas que tienen un cero y que determinan dos factores iguales, ya que hasta el momento se han trabajado con polinomios con dos ceros diferentes o sin ceros en los números reales. La vinculación de los ceros y la forma factorizada de un polinomio facilita otras técnicas de factorización que permitirían determinar si un polinomio es o no factorizable en los reales.

Respecto a las aprehensiones: local por punteo y global cualitativa, se había determinado en la anterior situación que depende del tipo tareas y artefactos, los CAS podrían[62] favorecer la segunda aprehensión. En cuanto a la aprehensión local por punteo se dice lo siguiente:

---

[62] Se dice que podrían, porque de la misma manera que en las técnicas L/P, en los CAS se pueden graficar o determinar un conjunto de puntos obtenidos a partir de la expresión algebraica. Sin embargo el trazo continuo de

> En la enseñanza y en ciertos estudios didácticos uno se atiene al paso de una ecuación a su representación a través de la construcción punto por punto, y se olvida que el paso inverso, es lo que crea problemas. Para efectuar este paso inverso la aproximación punto por punto no solamente es inadecuada sino que se constituye en un obstáculo (Duval, 1992, p. 125).

Cuando se genera la aprehensión global cualitativa el sujeto logra vincular la expresión algebraica con la gráfica porque se centran en un conjunto de propiedades. Esto genera una discriminación sistemática de las variables visuales[63] y una asociación con las unidades significativas de las expresiones algebraicas que permiten la constitución de una técnica para hallar la expresión algebraica de una gráfica (Duval, 1992). Sin embargo esta no es la única forma de encontrar la expresión algebraica dada una gráfica, también existen técnicas como las regresiones que toman un conjunto de puntos. Esta técnica estaría asociada a una aprehensión local por punteo. En el desarrollo de la situación 4 se espera el desarrollo de una aprehensión global cualitativa y así determinar la expresión algebraica de una gráfica.

En las expresiones algebraicas cada símbolo corresponde generalmente a una unidad significativa. Existen unidades significativas en las que los símbolos se omiten: como el coeficiente 1 o el carácter "positivo" de los coeficientes mayores que cero En las expresiones algebraicas hay:

> Los signos relacionales $(<, >, =, \ldots)$
> Los símbolos de operación o de signo $(+, -)$
> Los símbolos de variable,
> Los símbolos de exponente, de coeficiente y de constante (Duval, 1992, p. 127).

En cuanto a las variables visuales generales y las unidades significantes, Duval (1992) plantea algunas, éstas se presentan en la Tabla 20.

dichos puntos no se da de la misma manera que en L/P, es necesario la digitación de la expresión algebraica en Y= EDITOR.

[63] Las variables visuales serían, como su nombre lo indica, las variaciones de las gráficas sobre los cambios que se producen en las expresiones algebraicas.

Tabla 20. Algunas variables visuales generales para rectas o parábolas en correspondencia con las unidades significantes.

A. VARIABLES VISUALES	B. VALORES	C. UNIDADES SIGNIFICANTES CORRESPONDIENTES
1. Implantación de la tarea	Zona	$>,<$
	Trazo	$=$
2. Forma de la tarea	Trazo recto	Exponente de la variable $= 1$
	Trazo curvo	Exponente de la variable > 1

En los polinomios cuadráticos las unidades significantes y variables visuales dependen de la forma algebraica. En todas las formas algebraicas la a se vincula con la concavidad y la dilatación. En la forma estándar o desarrollada $y = ax^2 + bx + c$, b con el desplazamiento hacia la derecha o izquierda del eje y y c con los desplazamientos verticales de la parábola. Si está en la forma factorizada, $y = a(x-r)(x-s)$, los valores de r y s serían las abscisas de los puntos de corte con el eje x. Si está en la forma canónica $y = a(x-h)^2 + k$, los h y k determinan las coordenadas del vértice, que se puede reescribir de la forma del foco, donde $a = \frac{1}{4}p$, $y = \frac{1}{4}p(x-h)^2 + k$, donde p determina la distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz.

En las tareas presentadas se le ha dado mayor énfasis a la forma desarrollada y factorizada, pero en esta situación se plantea la vinculación con la forma canónica, dado que permite obtener parábolas no factorizables y porque la expresión algebraica sólo depende del vértice y de la concavidad de la parábola, mientras que en la forma desarrollada es necesario estudiar y determinar los cambios sobre la gráfica en relación a los parámetros a, b y c, tarea que queda pendiente para otras posibles situaciones. El paso de la gráfica a la expresión algebraica "requiere de la identificación precisa de todos los valores de las variables visuales pertinentes y del reconocimiento cualitativo de las unidades de escritura simbólica que corresponde" (Duval, 1992, p. 138).

En cuanto a los planteamientos presentados en la matemática experimental se mencionaba lo de la inmediatez de los CAS. En estas tareas esta característica se evidencia en la obtención de las gráficas. La posibilidad de pasar rápidamente de una gráfica a otra perteneciente a una misma familia parábolas, favorece la experimentación por la multiplicidad de representaciones. Si estas tareas se hubieran realizado en L/P, se necesitaría de mayor tiempo y el trabajo rutinario agotaría al estudiante sin darle la oportunidad de trabajar lo conceptual.

Respecto a los momentos de estudio, se ha establecido que sean desarrollados en dos horas de clase, a continuación se describen cada uno de ellos:

- *El momento del primer encuentro:* los estudiantes reciben en papel las tareas de la situación “parábolas”, en ella deben escribir sus respuestas en relación a lo que observan de las gráficas de una familia de parábolas. Se espera que los estudiantes relacionen los cambios de las expresiones algebraicas y sus efectos en las gráficas, de manera que posteriormente puedan obtener la expresión algebraica de una gráfica. En tareas anteriores ya se habían trabajado con las parábolas, pero es en este momento donde se les nombran.
- *El momento exploratorio:* en las expresiones algebraicas de los polinomios de las situaciones anteriores los coeficientes son fijos, mientras que en esta situación la primera tarea toma expresiones en la forma estándar y factorizada donde el valor de un coeficiente es un conjunto de números (parámetro). Para determinar cada una de las expresiones el estudiante requiere sustituir en la expresión general cada uno de los posibles valores del coeficiente. Hasta ese momento los estudiantes no han trabajado con este tipo de expresiones y tal vez al de ingresarlas al Y=EDITOR las escriban con el valor general del coeficiente (a) y de esa manera se omite el conjunto de valores que puede tomar a.
- *El momento del trabajo de la técnica*: las técnicas utilizadas para hacer las tareas se vinculan con las relacionadas con las gráficas hechas en la calculadora y con la sustitución de valores de los coeficientes en las expresiones algebraicas de los polinomios. Para la primera tarea los estudiantes ingresan las expresiones en Y=EDITOR, le dan los valores de los coeficientes determinados y observan la gráfica en GRAPH. En la segunda y tercera tarea requieren de activar el programa [PARABOL1 ( )] y [PARABOL2 ( )]. A diferencia de las anteriores situaciones en esta existen mayor uso de las técnicas CAS.
- *El momento tecnológico - teórico:* en la primera tarea una vez los estudiantes elaboren las gráficas, se presentan algunas preguntas que pretenden hallar las diferencias y similitudes

de la familia de parábolas que posteriormente llevan a caracterizar las gráficas de los polinomios factorizables y no factorizables. En el estudio de las parábolas además de mirarse los ceros, también es de interés la obtención de los vértices como puntos máximos o mínimos según la concavidad de la parábola. Con los valores de los ceros, el vértice y el valor de a, es posible obtener la expresión algebraica de un polinomio en su forma factorizada o canónica.

- *El momento de la institucionalización y evaluación*: al igual que en las anteriores situaciones, la hoja de respuestas dará las pautas del trabajo realizado por los estudiantes. Parte de la evaluación también se presenta en las socializaciones que al final de cada sección se da y que además pretenden la institucionalización. Para este momento es útil la ayuda de viewscreen y el proyector para mostrar algunos posibles casos, ya que a diferencia de las situaciones anteriores la utilización de los programas de parábolas al azar generan respuestas múltiples.

  La profesora puede decidir realizar la institucionalización al final de la situación o al terminar cada una de las tareas. Si lo hace al finalizar la tarea 4.1., los estudiantes tendrán mayor claridad de los efectos en la concavidad de a en relación a su signo, esto es importante para realizar las siguientes tareas.

En la Tabla 21 se describen los indicadores de completitud de una praxeología.

Tabla 21. Descripción de los indicadores de una praxeología matemática local en la situación 4: *Parábolas*.

A. INDICADOR	B. DESCRIPCIÓN
2.1. Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas.	En la elaboración de la familia de parábolas es posible tomar dos maneras de inserción de las expresiones en la calculadora, aunque escribir por separado cada una de las expresiones algebraica permite seleccionar las que se quieren ver. En la obtención de los ceros, los estudiantes pueden recurrir a técnicas CAS como el comando [VALUE], [ZEROS], observar en el gráfico o recurrir a técnicas L/P como la fórmula cuadrática o factorización y producto nulo. En la obtención del vértice los estudiantes pueden usar el comando [MÁXIMUM], [MÍNIMUM], [TRACE] o simplemente el gráfico. En las tareas se propone la observación de las gráficas hechas por las calculadoras para luego realizar los dibujos a L/P que cumple con algunas condiciones dadas. Aunque los gráficos de la primera tarea pueden ser realizados con técnicas L/P, se escogió el uso de las calculadoras porque en poco tiempo se obtienen las gráficas y las tareas se pueden centrar en los análisis de las características de las gráficas.

A. INDICADOR	B. DESCRIPCIÓN
3.2. Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas.	En estas tareas se han trabajado diferentes objetos ostensivos orales y escritos, lo *numérico* al dárseles los valores del parámetro *a*, al hallar los ceros y el vértice; la obtención de las *expresiones algebraicas*; los *gráficos* observados y dibujados para hallar diferencias y semejanzas entre aquellos que pertenecen a una misma familia de parábolas y cuyos análisis son expresados con la *lengua natural*.
4.3. Existencia de tareas y de técnicas “inversas”:	Se pasa de la gráfica a la expresión algebraica y viceversa. Entre las gráficas se encuentran las que corresponden a polinomios factorizables y no factorizables. Todo polinomio se puede expresar de la forma canónica mientras que la expresión factorizada sólo es posible determinarla para un polinomio con ceros. Por lo puede establecerse la equivalencia de estas dos formas de expresiones algebraicas de los polinomios.
5.4. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas	En la sustitución de los valores de *a* en las expresiones generales de la familia de parábolas es necesario reconocer el carácter variacional del coeficiente. En cuanto al dibujo de la gráfica en L/P se requiere determinar los elementos de la parábola como ceros, vértice, eje de simetría y concavidad. Al activar los programas de parábolas al azar se necesita designar los valores de *a*, cuyo signo se vincula a los cambios de concavidad. Las preguntas propuestas posterior a la graficación tienen como propósito interpretar los resultados de las técnicas
6.5. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”.	Las tareas 4.2 y 4.3 son abiertas, se pueden obtener diversas parábolas que cumplan con las condiciones determinadas. En la tarea 4.1. la variación del coeficiente *a* genera una familia de parábolas, los estudiantes podrían proponer otros valores de *a*, para determinar diferencias y semejanzas entre las gráficas o para validar o refutar conjeturas.

3.5.1. Situación 4: *Parábolas*

4.1. Obtenga la gráfica de los polinomios cuadráticos pertenecientes a la familia $a(x-1)(x+1)$ y ax^2+x+6, siendo $a \in \{-2,-1,1,2\}$ y responda las siguientes preguntas:

La Figura 33 muestra la familia $a(x-1)(x+1)$

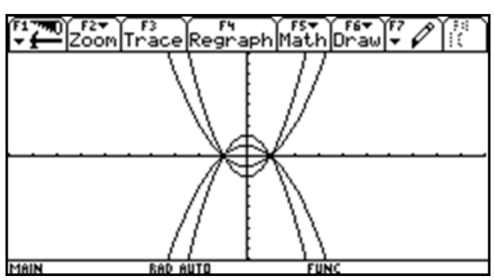


Figura 33. Familia de parábolas $a(x-1)(x+1)$.

La Figura 34 muestra la familia ax^2+x+6

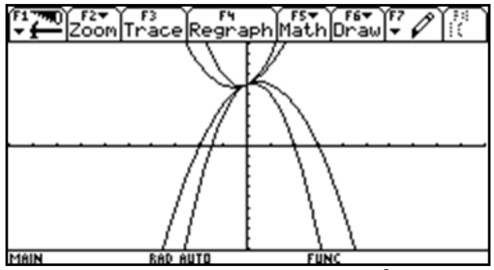


Figura 34. Familia de parábolas $ax^2 + x + 6$

a. ¿En qué afecta a la gráfica sí el valor de a es positivo? ¿y sí es negativo?

   Si el valor de a es positivo la parábola abre hacia arriba, si a es negativo la parábola abre hacia abajo.

b. ¿Qué tiene en común las parábolas de la familia $a(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+1)$? ¿en qué se diferencian?

   Las parábolas cortan al eje x en los mismos puntos, es decir tienen los mismos ceros y comparten el mismo eje de simetría que es el eje y. Sin embargo las concavidades, las dilataciones, el valor del vértice y de otros puntos de la parábola cambian.

c. ¿Qué tiene en común las parábolas de la familia $ax^2 + x + 6$? ¿en qué se diferencian?

   Todas las parábolas cortan al eje y en el punto $(0{,}6)$, es el único punto que pertenece a todas. Se diferencian en la concavidad, en la dilatación, en el eje de simetría, en el valor del vértice y otros puntos de las parábolas.

d. ¿Cuáles de los anteriores polinomios son factorizables?

   Las parábolas que son factorizables son las que cortan el eje x o tienen ceros. En el caso de la primera familia, $a(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+1)$, todas están factorizadas, mientras que en la segunda familia, $ax^2 + x + 6$, solo son factorizables las dos cóncavas hacia abajo porque cortan al eje x.

4.2. Active el programa [PARABOL1( )] en HOME y observe la gráfica de los polinomios cuya expresión es $a(\mathrm{x}-\mathrm{r})(\mathrm{x}-\mathrm{s})$, siendo $a = 1$ ó $a = -1$

El programa se activa al digitar en la aplicación PRINCIPAL o HOME [PARABOL1 ( )] y dar [ENTER]. El resultado es una parábola al azar (Ver Figura 35).

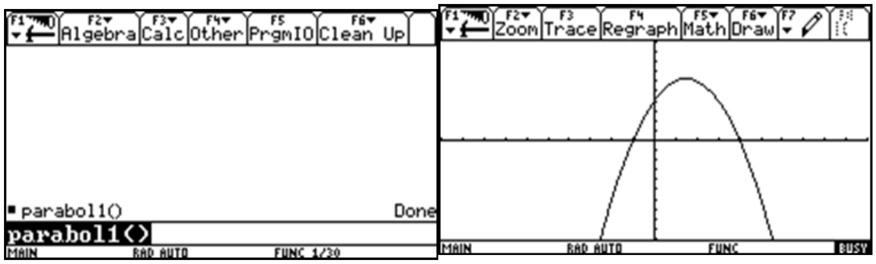
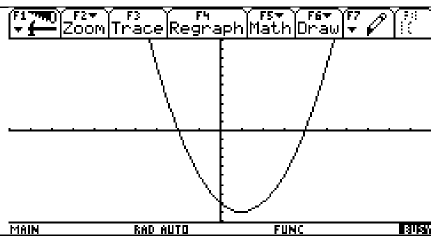
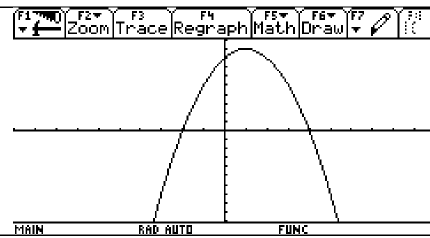


Figura 35. Ejecución del programa [PARABOL1 ( )].

a. En la Tabla 22 dibuje dos gráficas obtenidas por el programa [PARABOL1 ( )], halle los ceros y el valor de $a,$ r y s de la expresión factorizada.

Tabla 22. Parábolas (2).

	A. $\boldsymbol{a = 1}$	***B.*** $\boldsymbol{a = -1}$
1. GRÁFICA		
2. CEROS	$(-2{,}0)\ y\ (4{,}0)$	$(-2{,}0)\ y\ (4{,}0)$
3. EXPRESIÓN $\boldsymbol{a(x-r)(x-s)}$.	$(x+2)(x-4)$	$-1(x+2)(x-4)$

4.3.Active el programa [PARABOL2 ( )] en HOME y observe la gráfica de los polinomios cuya expresión es $a(\mathrm{x}-\mathrm{h})^2+\mathrm{k}$, donde (h,k) son las coordenadas del vértice y $a = 1$ ó $a = -1$.

a. Dibuje parábolas y la expresión algebraica, solicitadas en la siguiente Tabla 23.

El programa [PARABOL2 ( )] se activa de la misma manera que [PARABOL1 ( )] (Ver Figura 36).

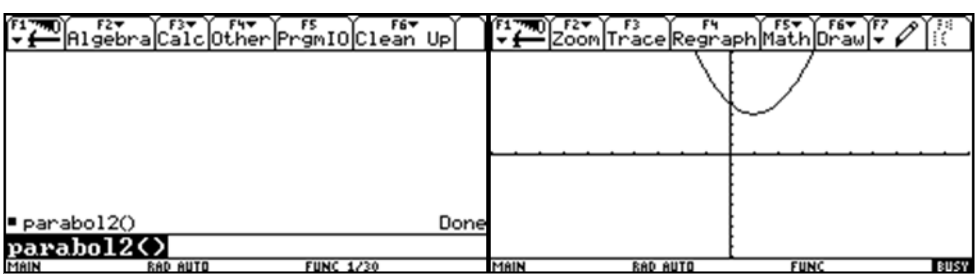
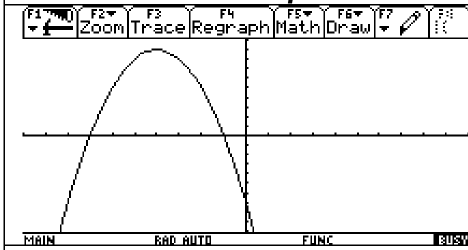
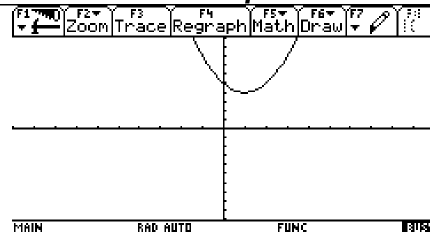


Figura 36. Activación del programa [PARABOL2( )].

Dado que el programa arroja diversas parábolas que cumplen con las condiciones solicitadas en la Tabla 23, se espera que los estudiantes den diferentes respuestas.

Tabla 23. Parábolas (3).

A. Parábola de un polinomio cuadrático factorizable	***B. Parábola de un polinomio cuadrático NO factorizable***
	
Expresión $\boldsymbol{a(x-r)(x-s)}$ $-1(x+1)(x+7)$	***Expresión*** $\boldsymbol{a(x-h)^2+k}$ $(x-1)^2+\ 4$

a. ¿En qué se diferencia la gráfica de los polinomios factorizables de los no factorizables?

Los gráficos de los polinomios factorizables cortan el eje x, es decir tienen ceros. Los gráficos de los polinomios no factorizables no cortan el eje x, es decir no tiene ceros.

3.6. Consideraciones finales del diseño de tareas y análisis *a priori*

Las praxeología locales, matemática y didáctica, relativamente completas propuestas en este trabajo se concretan en las cuatro situaciones presentadas, en donde la complementariedad de las técnicas L/P y CAS caracterizan las técnicas instrumentadas propuestas en este trabajo.

Una característica esencial del conjunto de situaciones es su vinculación con unas tareas frecuentes en ambientes de L/P como factorizar y desarrollar polinomios y paulatinamente se van aumentando las exigencias en las técnicas CAS (comandos de las aplicaciones HOME, Y=EDITOR y GRAPH), dado que es la primera vez que usan las calculadoras simbólicas para estudiar álgebra. No obstante las técnicas L/P están presentes en cada una de las situaciones, en complementariedad con las técnica CAS. Otra característica del conjunto de situaciones es la ilación, los aspectos trabajados en una situación precedente se convierte en elementos necesarios para la siguiente.

Inicialmente en la situación 1*: Explorando los polinomios*, se parte del reconocimiento de la equivalencia de dos formas de escritura algebraica de un polinomio, la desarrollada y la factorizada. Estas tareas permiten realizar un diagnóstico de las habilidades de los estudiantes en el manejo sintáctico de las expresiones algebraicas en L/P y de las definiciones que ellos han construido frente a un polinomio, de su forma factorizada y desarrollada.

Al ejecutar el comando [ENTER] los polinomios pueden ser reescritos en una de las dos formas: la desarrollada o la factorizada. Una de las dificultades del uso del [ENTER], radica en la sintaxis de entrada del polinomio, dado que para ejecutar el comando sólo basta con presionar un botón y si la expresión es admisible para el sistema interno de calculadora aparecerá en la pantalla, de lo contrario se emite un mensaje de error. El [ENTER] como lo menciona Artigue (1996), actúa como una caja negra al ocultar un proceso que debe ser develado por el estudiante. Este tipo de tareas solo existen en la medida que se da la complementariedad de las técnicas L/P y CAS.

El reconocimiento y obtención de cada una de las formas equivalentes de un polinomio es para Cedillo (2006) una tarea frecuente en ambientes L/P e innecesaria en ambientes CAS; afirma que independientemente de la forma que se escriba o se ingrese un polinomio en un CAS se produce la gráfica tan fácilmente como cualquier otra. Y por tanto ya no es necesario pasar de una forma a otra, para lograr graficar y determinar ciertas características y valores de la gráfica.

Sin embargo las diferentes formas de escritura algebraica de los polinomios arroja una información diferente para la obtención de la gráfica en L/P; la forma desarrollada $ax^2 + bx + c$ determina el valor de corte con eje y, $(0, c)$; la forma factorizada $a(x - r)(x - s)$ permite hallar los ceros, $(r, 0)$ y $(s, 0)$ y la forma canónica $a(x - h) + k$ presenta el valor vértice, (h, k) y en todas, el valor de a determina la concavidad y abertura de la parábola.

En contraste a lo anterior, la complementariedad de las técnicas L/P y CAS generadas en las tareas diseñadas en este trabajo de investigación, refuta la propuesta de Cedillo (2006), ya que para lograr reconocer la expresión algebraica de cada una de estas gráficas es necesario transitar en cada una de las formas de escritura algebraica del polinomio y ver las relaciones con la gráfica, en palabras de Duval (1992) se busca desarrollar una aprehensión global cualitativa, es decir lograr la correspondencia entre variables visuales de la gráfica y las unidades significantes de la expresión algebraica.

En la segunda situación, *Evaluando los polinomios*, se reconoce la x como una variable, que toma valores reales y determina un valor correspondiente a una de las imágenes del polinomio, se da un acercamiento funcional que lleva a fijar la mirada en los valores de

r (preimagen) que hacen la imagen del polinomio cero y que determinan un factor lineal de dicho polinomio de la forma $x - r$. Aunque los resultados de evaluación del polinomio por un r sea el residuo de la división de dicho polinomio por $x - r$ (teorema del residuo), el centro de interés está en los casos en donde el residuo es cero (teorema del factor), ya que estos valores se vinculan con los factores de un polinomio.

Otro aspecto a resaltar de esta tarea, es que el comando [POLYEVAL ( )] lleva al reconocimiento de los coeficientes nulos de un polinomio, esta es una técnica diferente para evaluar que requiere de la expresión desarrolla, en orden y completa de un polinomio. También es importante mencionar que esta técnica CAS no había sido reportada en otras investigaciones. Ésta generó una tarea nueva que posibilita la complementariedad de las técnicas L/P y CAS y el desarrollo de una técnica instrumentada.

Una de las características de las situaciones es que se relacionan con los diferentes ostensivos de los polinomios. En la primera situación se usan los objetos ostensivos relacionados con la lengua natural o enunciados verbales y de las expresiones algebraicas. En la segunda situación se vinculan además de los objetos ostensivos de la lengua natural y las expresiones algebraicas, las numéricas. Y en la tercera y cuarta situación se presentan los objetos ostensivos de traza y orales relacionados con los gráficos cartesianos, lo numérico, lo algebraico y la lengua natural. Esto muestra que las situaciones a medida que avanzan promueven cada vez más la relación de los diferentes objetos ostensivos de los polinomios a medida que se usan diferentes técnicas instrumentadas.

La tercera situación: *Hallando los ceros de los polinomios*, parte de la expresión algebraica para que los estudiantes una vez obtengan la gráfica puedan reconocer sus características, como la relación del número de ceros con el grado del polinomio, la forma de la línea, los cortes con el eje y, los intervalos de crecimiento, los mínimos o máximos entre otros aspectos. El trabajo de L/P de esta situación se da al obtener los ceros de un polinomio y luego verificar que dicho valor corresponde a un punto en la parábola, que es el corte con el eje de las x. Una vez identificada esa característica, los estudiantes pueden hallar los ceros de los polinomios y determinar su cantidad en relación al grado del polinomio.

En la cuarta situación: *Parábolas*, se trabajan con las tres formas equivalentes de un polinomio cuadrático: la desarrollada, la factorizada y la canónica. Se espera que los estudiantes reconozcan las características gráficas de una familia de funciones de la forma $a(x-r)(x-s)$ y ax^2+bx+c, en el primer caso se les pide que determinen las relaciones de los ceros con los factores y en el segundo caso los valores de corte con el eje y en relación al término independiente.

En cuanto el uso de los programas [PARABOL1 ( )] y [PARABOL2 ( )], se plantea que dada una gráfica se obtenga su expresión de la forma factorizada y canónica. La conclusión a la que deben llegar los estudiantes es que las parábolas con cortes en el eje x, son las factorizables y las que no tienen cortes no se pueden factorizarse. Esto hace que ellos puedan determinar que aunque un polinomio se puede escribir en la forma desarrollada y canónica no siempre es posible hallar la forma factorizada del polinomio en los reales. Por otra parte las tareas promueven la obtención de la factorización de un polinomio cuadrático con ceros no enteros, dado que las técnicas de L/P para factorizar se aplican y se ejemplifican en polinomios con ceros enteros.

En relación a los comandos, es importante rescatar que no se usaron [FACTOR( )] y [CFACTOR()], los directamente relacionados con la factorización de polinomios. Si no que los vínculos de la factorización con los ceros de un polinomio permitió el uso de otros comandos y aplicaciones en la calculadora simbólica que vinculan diferentes objetos ostensivos.

Entre estos comandos se encuentra el [POLYEVAL ( )] que resalta la complementariedad de las técnicas L/P, porque no existe ninguna técnica CAS que complete el polinomio. Además usar la técnica L/P para completar el polinomio lleva al estudiante a definir el polinomio o monomio cero y determinar la cantidad de términos de un polinomio según su grado. En este caso es la técnica L/P la que trae la parte conceptual del esquema de acción instrumentada y quien determina que la técnica instrumentada no solo sea la técnica CAS, sino el conjunto formado por la técnica CAS y L/P. Esto hace que el momento tecnológico – teórico se suscite posterior al momento de la técnica, porque la técnica L/P es la que trae la explicación de lo que ocurre o necesita el CAS.

Otra de las características de las situaciones es el hecho de que reiterativamente se trabajen con un conjunto de expresiones algebraicas sin muchas variaciones, esto puede aminorar las dificultades en el manejo sintáctico de las expresiones algebraicas y centrar la atención en el momento tecnológico- teórico. Pero puede convertirse en un efecto Topaze[64] porque se espera que el estudiante dé la respuesta que ya el profesor dio en una situación anterior.

En la Figura 37 se reseume la praxeología matemática propuesta en este trabajo, en donde las técnicas instrumentadas se dan en la complementariedad de las técnicas L/P y CAS. En algunos casos se realiza primero las técnicas CAS antes de las técnicas L/P como en la situación 1, la tarea 3.1. y la situación 4, en otros casos primero se realiza la técnica L/P y luego la técnica CAS, como en la situación 2 y la tarea 3.2 porque el uso del comando CAS depende de los resultados obtenidos con técnicas L/P. En la Figura 37 se presentan los tipos de tareas, las técnicas y las tecnologías de manera general, para ver con detalles las tareas se recomienda ver el Anexo B.

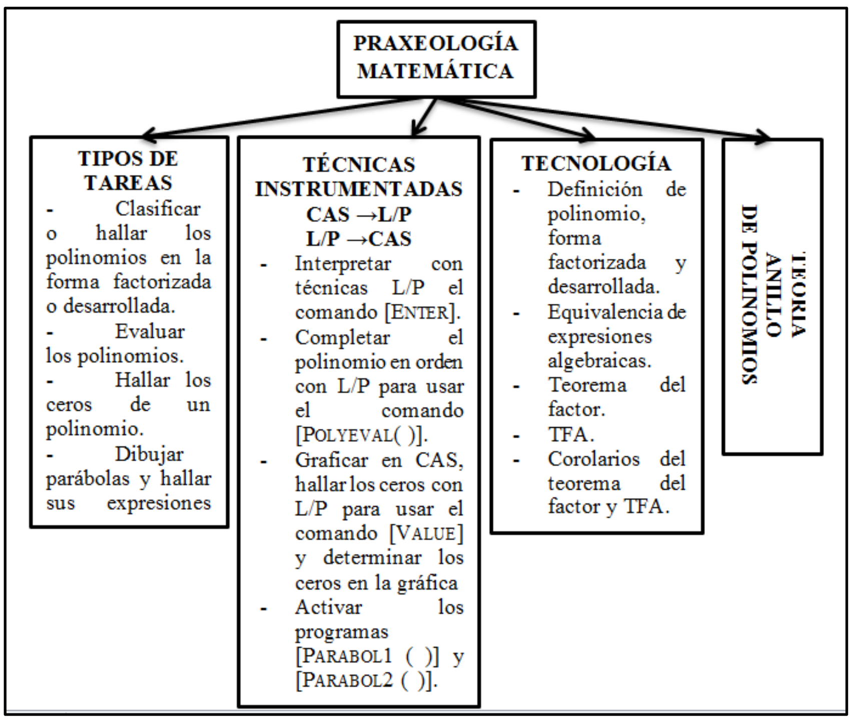


Figura 37. Resumen de la praxeología matemática propuesta en este trabajo.

En cuanto a la praxeología didáctica de la profesora se presentan algunas características generales en los momentos de estudio, se vislumbran algunos de los componentes de esta praxeología didáctica, pero no se hace una clasificación explícita de sus componentes. En el desarrollo de esta tesis se ha considerado la praxeología didáctica de la profesora porque es

[64] "El efecto Topaze consiste en lo siguiente: la respuesta del alumno está generalmente determinada, poco más o menos, de antemano y el profesor negocia las condiciones en las que se producirá y que la dotarán de sentido" (Brousseau, 1990, p. 9).

necesaria para construir la praxeología matemática. Pero la indagación de una praxeología didáctica de manera minuciosa determinaría otro trabajo de investigación. En relación a las praxeologías didácticas del profesor se recomienda ver los trabajos de Ruiz y García (2011) y Sureda y Otero (2010).

En relación a los momentos de estudio de la praxeología didáctica, en particular en el momento de exploración, se prevé que sea la profesora quien presente por primera vez la técnica CAS, porque los estudiantes no conocen su funcionamiento y es necesaria una forma de escritura diferente a la realizada con L/P. Estas diferencias hacen que los CAS no sean fáciles de usar.

No obstante a medida que los estudiantes se relacionan con el CAS pueden adquirir diferentes esquemas de uso como: utilizar el caret para los exponentes, el teclado para acceder a las aplicaciones, el [ENTER] para reducir o ingresar una expresión algebraica y otros de la calculadora simbólica, de manera que paulatinamente la profesora disminuyan las indicaciones del uso del CAS.

Por otra parte el momento de institucionalización en algunas tareas, se hace indispensable realizarlo no al final de la situación sino intermedio, como en el caso de la situación 2 en la tarea 2.1. Si los estudiantes no tienen claro las respuestas de la Tabla 16 los resultados de las tareas 2.2. no van a hacer las esperadas, por lo que se recomienda realizar la institucionalización y evaluación de la tarea 2.1 antes de seguir.

Para el momento de institucionalización y evaluación se ha considerado tomarlos conjuntamente porque se propone que sean los estudiantes los que muestren sus respuestas frente a las tareas, con el uso del viewscreen y el proyector de la calculadora simbólica, al escribir en el tablero sus técnicas L/P o hablar de lo que realizaron. Entre la profesora y los estudiantes se generarán discusiones frente a los resultados obtenidos.

Referente al momento del trabajo de la técnica se prevé algunos fenómenos didácticos relacionados con la transposición computacional, como el de doble referencia y el de pseudo transparencia. En cada una de las situaciones se determinó cuáles son las tareas que desarrollarían el trabajo de la técnica y de la misma manera se hace la distinción con las tareas que miran lo tecnológico-teórico.

En la Figura 38, se presenta un resumen de las praxeologías matemáticas de los textos escolares, allí la factorización es un método para hallar ceros, inicialmente parten de lo numérico para definir qué es factorizar, pasan a lo gráfico con el estudio de áreas para darle una interpretación a las reglas para factorizar aplicadas a un conjunto de expresiones algebraicas. Posteriormente las tareas se enfocan en el uso de estas reglas.

No ajena a estas praxeología matemáticas se proponen una praxeología matemática diferente, en donde se usan estas técnicas L/P en complementariedad con las técnicas CAS. Se parte de que los estudiantes ya habían trabajado las técnicas L/P para factorizar o desarrollar polinomios, por lo que el propósito central no era enseñarles estas técnicas sino mejorarlas y dar a conocer otras.

La praxeología matemática propuesta (la (1) en la Figura 38) muestra la relación biunívoca entre los ceros y los factores y de esa manera si se tienen los ceros se puede factorizar y si factorizo puedo hallar los ceros. Esta nueva relación permite generar otras tareas, técnicas y tecnologías para robustecer la praxeología matemática.

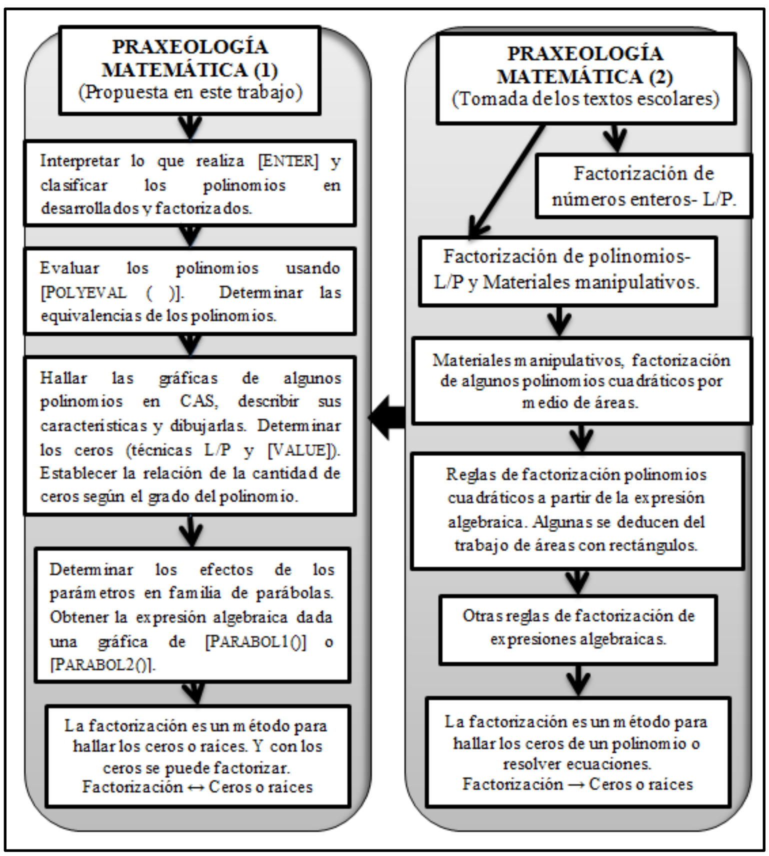


Figura 38. Posibles praxeologías matemáticas relacionadas con la factorización de polinomios.

Finalmente el conjunto de situaciones le da una mirada diferente a la factorización de polinomios, se pasa a lo algebraico, lo numérico, lo gráfico y la lengua natural. También se establecen los vínculos con los componentes de la praxeología matemática, dado que la factorización de polinomios tradicionalmente se ha encasillado en el trabajo sintáctico de las expresiones algebraicas, se deja de lado las relaciones de las técnicas con la tecnología y la teoría.

4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se presenta la revisión de los resultados de la experimentación de las praxeologías, matemática y didáctica, propuesta en el capítulo 3: Diseño de tareas y Análisis *a priori*. Por lo cual se determinarán las técnicas instrumentadas de los estudiantes y su relación con los objetos ostensivos. Otro aspecto de interés en el desarrollo de las praxeologías locales relativamente completas son los momentos de estudio realizados, confrontados con los momentos de estudio propuestos. Se inicia este capítulo con el marco contextual que da cuenta de las condiciones físicas y académicas de los estudiantes participantes. Posteriormente se presentan las fuentes de datos y finalmente el análisis de los resultados de cada una de las situaciones.

4.1. Marco Contextual

El grupo de estudiantes de esta investigación son del grado noveno de la educación básica secundaria en Colombia de una institución educativa de carácter público cuya modalidad de formación es en pedagogía o normalista superior[65]. El grupo estaba conformado por 36 estudiantes, de ellos 13 hombres y 23 mujeres. Su jornada de estudio es matutina, de 6:45 a.m. a 12:45 p.m. de lunes a viernes y el año lectivo de experimentación fue el 2008-2009.

Estos estudiantes recibieron semanalmente 5 horas de clases de matemáticas, organizadas de la siguiente manera: 1 hora los lunes, 2 horas los martes y 2 horas los miércoles. Para la experimentación del proyecto se destinaron tres semanas, 15 horas de clase, se inició el 30 de junio de 2009 y se finalizó el 15 de julio de 2009, fechas próximas a un receso escolar[66].

Una de las ventajas y facilidades para la experimentación de las situaciones es que la institución educativa cuenta con un salón cómodo para el uso de 23 calculadoras TI 92 PLUS, un

[65] Los estudiantes que finalizan el bachillerato reciben el título de Bachiller con profundización en pedagogía (Decreto 2903 de 1994). Estos bachilleres o de otra institución educativa, pueden realizar el programa de formación complementaria, en 4 o 5 semestres respectivamente y optar el título de normalista superior (Decreto 4790 de 2008).

[66] En ese año lectivo, correspondía a la transición del calendario B al A, los estudiantes tenían vacaciones desde el 17 de julio al 18 de agosto y regresaban porque el año lectivo finalizaba el 19 de septiembre. El año lectivo nuevo inició el 19 de octubre de 2009 (Resolución 4143.2.21.4739 de 2008).

viewscreen y un proyector. Este espacio y equipos, son parte de lo solicitado y donado por el MEN, ya que la institución hizo parte del proyecto de incorporación de tecnologías al currículo de matemáticas (Ver MEN, 2004, p. 66).

La organización del salón de clases se presenta en la Figura 39. En cada mesa pueden trabajar hasta 6 estudiantes cómodamente (enumeradas del 1 al 7); los otros objetos del salón se presentan en forma rectangular: dos ventanas (del 12 al 13); tres armarios (del 8 al 10), el tablero (11), la puerta de acceso (14), el viewscreen y el proyector (15). El número correspondiente a cada mesa clasifica los grupos de trabajo y es usado en el análisis de los resultados de las situaciones.

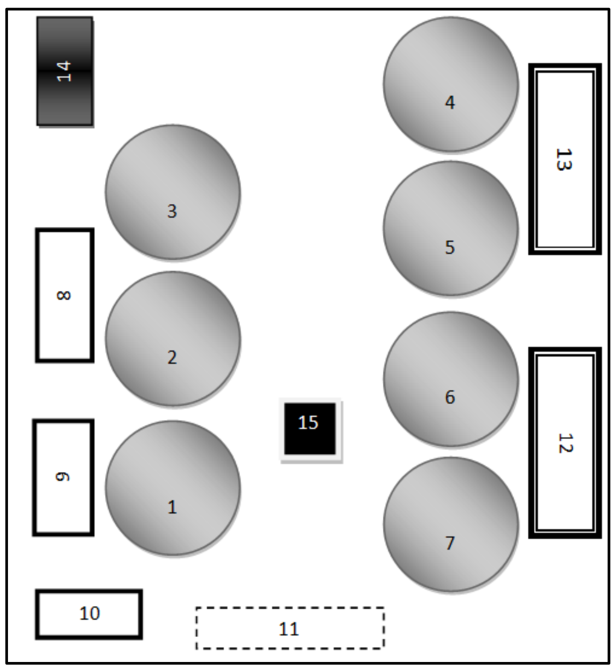


Figura 39.Organización del salón de clases.

Para el momento de la experimentación de las situaciones, los estudiantes habían trabajado durante el grado noveno en álgebra las siguientes temáticas: números reales, relaciones y funciones, sistemas de ecuaciones lineales y factorización de polinomios (Ver Anexo C). Usualmente la factorización de polinomios con técnicas L/P se trabaja en grado octavo, pero las profesoras de noveno grado realizaron un repaso antes de la experimentación, ya que los estudiantes necesitaban conocer y utilizar las técnicas L/P de factorización de polinomios.

La profesora utilizó una guía[67] que incluía algunas técnicas L/P de factorización de polinomios, especialmente relacionadas con polinomios cuadráticos de una variable (Ver Anexo D). En cuanto al uso de las calculadoras simbólicas, ni la profesora ni el grupo de estudiantes habían trabajado con el CAS, solo usaban Cabri Geometry II en las clases de geometría.

De los 6 cursos de noveno grado de la institución educativa se trabajó con uno, la selección la realizó la profesora, quien afirmaba que la distribución de las horas era la más adecuada, además porque el grupo ya había trabajado la factorización polinomios, mientras que los otros apenas iniciaban el tema.

En cuanto a la profesora encargada del grupo participante es necesario destacar que ha laborado por más de 30 años en esta institución educativa y además es egresada de la misma. Durante la fase de formación realizada por el MEN para la incorporación de tecnologías la profesora participó de los talleres realizados por la Universidad del Valle.

4.2. Fuentes de información de la investigación

En cuanto a las fuentes de información de la investigación se tomaron registros escritos, a partir de las hojas de respuestas o de trabajo de los estudiantes y registros fílmicos, a partir de los videos de las sesiones con el uso de calculadoras.

Cada uno de los estudiantes recibió las preguntas de las situaciones en papel, en esa hoja debían de escribir sus respuestas, ellos trabajaron en parejas con una calculadora, y entregaron una sola hoja de respuestas por sesión, aunque no se hubiera finalizado. La otra hoja de respuesta o de trabajo la guardaban para las sesiones de socialización, eso implicaba que ambos estudiantes debían tomar anotaciones y que las respuestas de las situaciones las tenían disponibles para profundizar en casa los aspectos de mayor dificultad, para verificar si lo hecho es correcto o para tener a disposición las respuestas en las siguientes situaciones.

La organización en las mesas y la constitución de las parejas la decidieron los estudiantes. Algunos entregaron una hoja adicional o escribían en el reverso de la hoja de trabajo los procedimientos a L/P, esto sucedió porque no tenían el espacio suficiente después de cada

[67] La guía no fue propuesta por esta investigación, es usada por la profesora para realizar el repaso de las técnicas de factorización de polinomios con L/P.

pregunta (Ver Figura 40). En el Anexo F muestra las hojas de respuestas o de trabajo de los estudiantes, agrupadas en las mesas de trabajo.

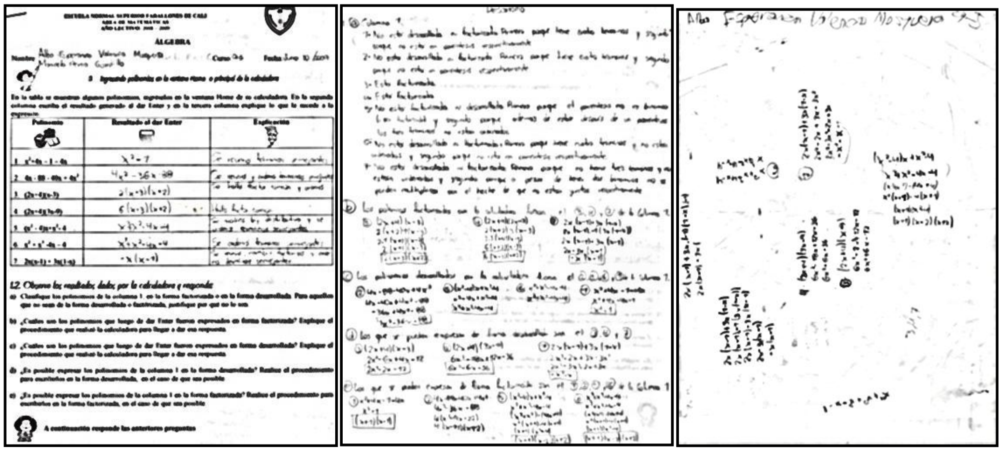


Figura 40. Hojas de trabajo de Alba y Marcela de la Situación 1: *Explorando los polinomios*.

Todas las sesiones con el uso de la calculadora fueron grabadas en video por una persona experta, quien se centra en el trabajo de los estudiantes y se dirige a cada una de las mesas (en adelante se le llama video de cámara 1). Aunque no se ve el desarrollo de la clase completa, se observan diálogos de los estudiantes en relación a las tareas. La descripción y algunos diálogos de estos videos se presentan en el Anexo E y algunos episodios en video en el Anexo G.

Las transcripciones de estos videos tienen algunas anotaciones o comentarios, escritos entre paréntesis, que aclaran sucesos. En cuanto a los episodios[68], usualmente se organizan por el trabajo de cada una de las mesas e inicia con el tiempo, escrito entre corchetes. El tiempo de los videos lo determinó el programa en que fueron vistos en el computador, el VCL media Player 0.9.7. Para distinguir a los estudiantes se usa un nombre y para diferenciar dos personas con el mismo nombre se agrega un número entre paréntesis.

En algunas de estas sesiones se colocó una cámara fija, que daba cuenta de lo que sucedía continuamente en una de las mesas o era la profesora investigadora quien tomaba algunas imágenes de lo sucedido (en adelante se le llama video de cámara 2). Sin embargo esta información no ha sido transcrita, la calidad del video no es buena y solo se ha tomado como referente para dar cuenta de algunos momentos de estudio (Ver Anexo G).

[68]Un episodio representa una primera descomposición intuitiva del proceso de estudio que se relaciona con un cambio significativo en la acción que se realiza y cuyas reglas de formación aún son inciertas (Azcárate y Espinoza, 2000, p. 361). En otras palabras, son segmentos del capítulo en el que se observan acciones interesantes para dar cuenta de los momentos de estudio.

También es importante mencionar, que los análisis de las respuestas se centran en la mesa de trabajo[69] porque en muchos casos todos los estudiantes de la mesa acuerdan la respuesta. Para dar ejemplos del trabajo a veces se toma como ejemplo una pareja de una mesa, la selección de esta pareja puede variar, esto depende de las dificultades, el uso de diferentes técnicas y tecnologías o porque dicha pareja se destaca en los videos por su explicación y participación. La organización de las parejas o grupos se presenta en la Tabla 24. Algunos nombres de los estudiantes están escritos en negrita porque son los estudiantes líderes, aquellos que determinan lo que se debe realizar o que guían en proceso de solución de las tareas.

Tabla 24. Organización de las parejas o grupos de trabajo por mesas.

A. MESA	B. PAREJAS O GRUPOS (PN)[70]	C. DÍAS DE TRABAJO (DT)/ OBSERVACIONES (O)/ INASISTENCIAS (I)
1	P1= **Fardy** y/o Daniel	DT = 30 de Junio, 1, 6, 7, 8, 13, 14 y 15 de Julio O = Daniel realiza la primera situación con Fardy, luego cambia a la mesa 5 y realiza las demás situaciones. I = Fabián asiste a algunas sesiones de clase pero no entregó sus hojas de trabajo.
	P2= Marisol, Natalia y/o Angélica	DT = 30 de Junio, 1, 6, 7, 8, 13, 14 y 15 de Julio O y I= Angélica inicia su trabajo desde la situación 2 porque no asistió a clase los días 30 de Junio, 1, 6 y 8 de Julio. Natalia no asistió el 6 y 15 de julio y no realizó la situación 4.
2	P3= Andrés	DT= 30 de Junio y 1 de Julio. O= Andrés realiza solo la primera situación, las tres últimas las entrega con (P5) I= Andrés no asiste el 6 de Julio.
	P4= **Juan** y María	DT= 30 de Junio, 1, 6, 7, 8, 13, 14 y 15 de Julio I= María no asistió el 15 de Julio.
	P5= Olga, Lady y/o Andrés	DT= 30 de Junio, 1, 6, 7, 8, 13, 14 y 15 de Julio
3	P6= **Julián** y Yurani,	DT= 30 de Junio, 1, 6, 7, 8, 13, 14 y 15 de Julio
	P7= **Mayra** e Isabel	DT= 30 de Junio, 1, 6 7, 8, 13 y 15 de Julio
	P8= Luisa y Dayanna.	DT= 30 de Junio, 1, 6 7, 8, 13, 14 y 15 de Julio I= Dayanna no asiste el 6 de Julio.
4	P9= **Alba** y Marcela	DT= 30 de Junio, 1, 6, 7, 8, 13, 14 y 15 de Julio I = Marcela no asistió el 13 de Julio.
	P10= Lady (2) y Alejandra	DT= 30 de Junio, 1, 6, 7, 8, 13, 14 y 15 de Julio I = Lady (2) no asistió el 13 de Julio.
5	P11= **Camilo,** Jefferson y/o Daniel	DT= 30 de Junio, 1, 6, 7, 8, 13, 14 y 15 de Julio. O= en la primera situación Camilo realiza el trabajo con Jefferson, las siguientes situaciones las realiza con Daniel. I= Jefferson dejó de asistir el 6, 7 y 8 de Julio.
	P12 = Luis, Eduardo y/o Jefferson	DT = 30 de Junio, 1, 6, 7, 8, 13, 14 y 15 de Julio. O = en las dos primeras situaciones Luis las realiza con Eduardo, las dos últimas con Jefferson.

[69] Inicialmente el trabajo se propone en parejas, pero los estudiantes han entregado sus hojas de respuestas en grupos hasta de tres personas o individualmente.
[70] La P denota la pareja o grupo de trabajo y n el número que se designa para diferenciarlos.

A. MESA	B. PAREJAS O GRUPOS (PN)[70]	C. DÍAS DE TRABAJO (DT)/ OBSERVACIONES (O)/ INASISTENCIAS (I)
		I = Eduardo dejó de asistir los días 14 y 15 de Julio. Luis dejó de asistir el 6 de Julio.
	P16 = Frank	DT = 6, 7, 8, 13, 14 y 15 de Julio. O y I = Frank inicia su trabajo desde la situación 2. Había dejado de asistir a clase el 30 de Junio y 1 de Julio.
6	P13= **Felipe**, Lina y Tania	DT= 30 de Junio, 1, 6, 7, 8, 13, 14 y 15 de Julio. I = Felipe dejó de asistir los días 30 de Junio y 7 de Julio.
	P14 y P17 = Lucía, Daniela y Katherine.	DT= 30 de Junio, 1, 6, 7, 8, 13, 14 y 15 de Julio. O = para la segunda situación entregaron una hoja de trabajo adicional la (P17). I = Katherine no asistió el 13 de Julio, Daniela no asistió el 13 y 15 de Julio.
7	P15 y P18 = Laura, Natalia (2) y Sebastián.	DT = 30 de Junio, 1, 6, 7, 8, 13, 14 y 15 de Julio. I = Sebastián dejó de asistir el 30 de Junio, I = Natalia (2) dejó de asistir el 8 y 13 de Julio. O = para la segunda situación entregaron una hoja de trabajo adicional la (P18).
	P19= Sebastián	DT = 13, 14 y 15 de Julio. O = Sebastián entrega su hoja de trabajo solo para las dos últimas situaciones.

En la Tabla 25 se presentan las fuentes de información en relación a las situaciones. También se dan otros datos como las fechas de la experimentación y la cantidad de estudiantes participantes por día.

Tabla 25.Resumen y fuentes de información de la investigación.

A. SITUACIÓN	B. FUENTES DE DATOS	C. FECHA	D. # DE ESTUDIANTES
1. Explorando los Polinomios	15 hojas de respuestas. Videos de cámara 1 - 30 de Junio y 1 de Julio de 2009. Video de cámara 2 - 6 de Julio.	30 de Junio	30 estudiantes
		1 de Julio	33 estudiantes
		6 de Julio	29 estudiantes
2. Evaluando los Polinomios	17 hojas de respuestas Videos de cámara 1 - 7 y 8 de Julio de 2009. Video de cámara 2 - 13 de Julio de 2009	7 de Julio	34 estudiantes
		8 de Julio	31 estudiantes
		13 de Julio	29 estudiantes
3. Hallando los ceros de los Polinomios	16 hojas de respuestas Videos de cámara 1 - 14 y 15 de Julio de 2009.	14 de Julio	33 estudiantes
		15 de Julio	31 estudiantes
4. Parábolas	16 hojas de respuestas Video de cámara 1 – 15 de Julio de 2009	15 de Julio	31 estudiantes

4.3. Análisis de los resultados de la situación 1: *Explorando los polinomios*

Para esta primera situación se han considerado solo 6 mesas de trabajo, esto se debe a que los estudiantes en la primera sesión se organizaron en 6 mesas, pero luego cuando llegan Felipe, Sebastián y Katherine, el 1 de julio de 2009, la organización de la mesa 6 cambia y surge la mesa 7 (Ver Tabla 24). Como algunos estudiantes de la mesa 7 estuvieron en la mesa 6, se considera para esta situación un solo grupo, la mesa 6.

Esta situación se desarrolló en tres sesiones o 5 horas de clase, en comparación con las otras situaciones fue la de mayor tiempo y además permitió diagnosticar las habilidades en el uso de las técnicas L/P de los estudiantes para factorizar y desarrollar un polinomio.

En cuanto a la factorización de los polinomios de la columna A, los estudiantes habían trabajado en el repaso previo a la experimentación la técnica de obtener factor común y las técnicas para factorizar polinomios cuadráticos. Sin embargo los resultados de ejecución muestran errores que ratifican las dificultades de los estudiantes en el tratamiento sintáctico de las expresiones algebraicas.

En el desarrollo de las tareas fue necesario introducir una técnica nueva con L/P, la de factor común por agrupación de términos. Pero como no se había realizado previamente la rutinización de esta técnica L/P, la factorización de los tres últimos polinomios no fue la esperada (el quinto, el sexto y el séptimo polinomio de la columna A). Las respuestas muestran que fue la técnica L/P de mayores dificultades.

En cuanto a la técnica instrumentada, ésta se da en la vinculación de la técnica CAS ([ENTER]) y la técnica L/P (desarrollar o factorizar un polinomio). El resultado de la técnica CAS lleva a indagar una técnica L/P que permita mostrar que el polinomio dado es equivalente al obtenido, la técnica L/P moviliza una tecnología. En el caso de las respuestas de la columna C, algunos estudiantes le dan prioridad a las técnicas L/P para expresar el polinomio tal como lo da la calculadora el ejecutar el comando [ENTER]. Aunque es la tecnología la que determina cuál es la técnica L/P, ya que es necesario tener claro cuando los polinomios son factorizados o desarrollados.

Respecto a las técnicas CAS, el ingreso de las expresiones no fue fácil, la dificultad se dio al entender la sintaxis de entrada de las expresiones algebraicas de la calculadora simbólica, luego solo bastaba con presionar el botón [ENTER], era una técnica muy sencilla.

La definición de la forma desarrollada y factorizada de los estudiantes les permitió además de determinar las técnicas L/P, realizar las clasificaciones de los polinomios. En cuanto a las habilidades en el manejo sintáctico de las expresiones algebraicas, se encuentra que es una tarea difícil para los estudiantes, requirió de más tiempo de lo previsto y generó insatisfacción por los procedimientos largos y reiterativos.

Respecto al diseño, es conveniente omitir en las tareas 1.2.b. y 1.2.c. el procedimiento que suponen realizó la calculadora para expresar los polinomios en la forma desarrollada o factorizada, porque en la pregunta 1.2.d. y 1.2.e. les vuelven a pedir a los estudiantes realizar este procedimiento y teniendo en cuenta que los polinomios de la columna A y B son equivalentes se repiten las respuestas. Además en las justificaciones realizadas en la columna C muchos dan cuenta de la técnica L/P, así que las tareas se vuelven aún más reiterativas. Se recomienda hacer una tabla para las tareas 1.2.a., 1,2.b. y 1.2.c. para clasificar y ver las diferencias entre las formas de escritura de los polinomios y sólo en las dos últimas tareas proponer el uso de técnicas L/P para factorizar o desarrollar los polinomios para expresarlos en una misma forma y ver diferencias y semejanzas.

En cuanto a los momentos de estudio, se presentan a continuación una breve descripción y comparación entre lo propuesto y desarrollado:

- *El momento del primer encuentro:* no existen diferencias entre lo realizado y lo propuesto. Los estudiantes al recibir la calculadora inician la indagación de las funcionalidades de la aplicación HOME, por el momento no preguntan, es la profesora la que da las indicaciones de lo que deben realizar (Ver Anexo E: 30 de Junio de 2009, T1: 0:00 a 1:45 min.).
- *El momento exploratorio:* la profesora dice cómo deben de ingresar los polinomios a la aplicación HOME. Toma como ejemplo el primer y tercer polinomio de la Tabla 14, y simultáneamente los estudiantes lo digitan en sus calculadoras y entre todos dan la justificación de lo que sucede al dar [ENTER] (Ver Anexo E: 30 de Junio de 2009, T1: [1:45 a 5:00 min.]). Entre las sugerencias para escribir los polinomios, se encuentra el uso

de la tecla caret para los exponentes, el uso del signo de la multiplicación para todos los productos y la confrontación entre lo que aparece en la pantalla de la calculadora y el polinomio dado en la columna A. En relación a las respuestas de la columna B, se muestra que la mayoría de los estudiantes no tuvieron dificultades con la utilización del comando [ENTER].

- *El momento tecnológico - teórico y el momento del trabajo de la técnica:* en el desarrollo de las tareas de la situación 1 además de ejecutar una técnica (ingresar los polinomios a la calculadora y dar [ENTER]) a la vez se da una tecnología (explicación y descripción de propiedades de los polinomios), es por eso que se vinculan los dos momentos.

  En los videos se observan el trabajo de los estudiantes en cada una de las mesas, ellos discutieron las respuestas con los compañeros y en algunos casos redactan entre todos la respuesta. En algunos episodios es la profesora quien sugirió cómo hacer la tarea o lo qué debería de hacer (Ver Anexo E: en 30 de Junio de 2009 en T1: [5:00 a 13:42 min.], T2: [0:00 a 13:44 min.], T3: [0:00 a 13:44 min.] y T4: [0:00 a 13:24 min.] y 1 de Julio de 2009 en T1: [0:00 a 52: 27 min.]).

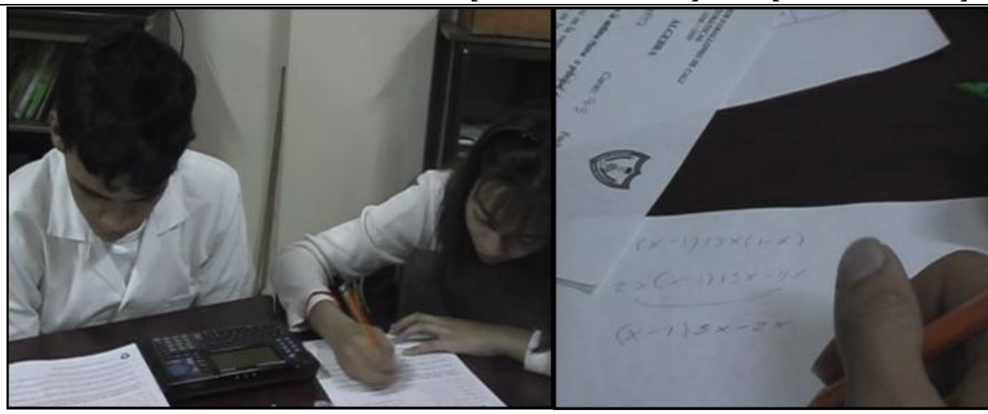
  En la sesión del 30 de Junio los estudiantes fácilmente ingresaron los polinomios a la calculadora, pero les fue difícil realizar la justificación porque necesitan expresar el polinomio con técnicas L/P como aparece en la columna B, y eso hace que la mayoría de los argumentos describan esta técnica L/P y no la tecnología que los lleva a seleccionar y ejecutar la técnica. No obstante en el momento de institucionalización los estudiantes mencionan la propiedad distributiva en algunas de sus justificaciones (Ver Anexo E: 1 de Julio de 2009 en T1: [52: 27 a 1:16:59 min.]).

  En la sesión del 1 de Julio de 2009 los estudiantes inician la segunda parte de la situación 1, que son las tareas sobre las formas de escritura algebraica de los polinomios de la Tabla 14. La mayor dificultad se encuentra en la factorización del segundo, quinto, sexto y séptimo polinomio de la columna A de la Tabla 14.

  En la Tabla 26 se presenta un episodio de P4 de la mesa 2. La factorización del séptimo polinomio ejemplifica las dificultades de los estudiantes al realizar las factorizaciones en L/P. P4 diferentes errores en el manejo de las expresiones algebraicas que les impide ver lo que ha hecho la calculadora. P4 realiza una técnica L/P antes de hacer la justificación de la columna C de la Tabla 14 para el séptimo polinomio. Sin embargo su respuesta en la hoja de trabajo no da cuenta de este proceso de ensayo y error. Aunque en el video se encuentran otros episodios como éste, rescatamos solamente uno.

Tabla 26. Técnica L/P de P4 de la mesa 2 en relación al séptimo polinomio.

DIÁLOGO: 30 DE JUNIO DE 2009 EN T1: [13: 33 A 13:42 MIN.] Y T2: [0:00 A 3:00 MIN.]



Juan: la séptima tampoco sé.
Olga: parece que se hubieran reunido términos semejantes
Juan: parece que 3 o 2 hubiesen sido negativos, y que $3x$ y $2x$ nos quedara menos una x.
Juan: ahora no sé, parece que la calculadora lo hizo mal (no dudan de sus procedimientos L/P si no de los resultados de la calculadora). Si multiplicó los paréntesis y luego los sumó, multiplico esto por esto (señala en la calculadora los términos que se multiplican). Esto da $3x – 2x$. Espérate un segundo (escribe el procedimiento en su hoja de respuestas, realiza los productos indicados). Esto más esto da $6x$ y esto más esto da $-6x$, entonces da cero (parece que realizó de manera incorrecta el producto porque todos los términos son lineales).
María: menos x de dónde sale.
Juan: sabes que, espérate. Tal vez multiplicó solamente uno. Puedo haber hecho esto. Multiplicó esto por esto. Ya sé, multiplicó un solo paréntesis, se reúne aquí y queda $(x-1)$ por $2x$ mas $3x$ porque $-4x$ y $2x$ da $2x$ negativo (borra lo que escribió $2x+3x$) luego escribe $(x-1)(3x-2x)$ y esto aquí da menos uno, digo da uno. Algo da negativo por ahí, una mayor tiene que dar negativo, para que dé menos x. No sé el proceso.

Análisis:

Juan ha escrito en su hoja de respuesta el siguiente procedimiento para mirar que es lo que ha hecho la calculadora y escribir la explicación en la columna C de la Tabla 14.

$$2x(x-1)\ +3x(1-x)$$
$$2x(x-1)+3x-4x$$
$$(x-1)3x-2x$$

En un inicio del diálogo, Juan efectúa los dos productos y esto lo habría llevado a la siguiente expresión $2x^2-2x+3x-3x^2=-x^2+x$ y al tomar la expresión reducida y al sacar como factor común $-x$, habían obtenido la respuesta dada por la calculadora. Pero el argumento se desvía porque han efectuado incorrectamente los productos, al realizar la multiplicación de $3x(1-x)$ obtienen $3x\ -4x$, esto nos indica que efectuaron una suma entre $3x$ y x y no una multiplicación. También reducen $2x$ con $-4x$ y deberían multiplicar $2x$ con $(x-1)$.

Al revisarse su hoja de respuesta la justificación que dan es la siguiente: “*se invirtieron los signos en el segundo paréntesis y se unió términos semejantes*”. Parece que al final lograron encontrar el procedimiento solicitado porque la descripción se relaciona con la aplicación de una técnica de factorización (factor común por agrupación de términos). Sin embargo no se muestra el procedimiento de factorización en las pregunta 1.2.b. o 1.2.e.

En cuanto a la clasificación de los polinomios en la forma desarrollada y factorizada es necesaria una definición, esta es la que determina la clasificación y las técnicas L/P. Algunas de las definiciones de la forma factorizada y desarrollada se presentan en la Tabla 27.

Tabla 27. Algunas definiciones de la forma factorizada y desarrollada de un polinomio.

A. EPISODIO – VIDEO	B. DESCRIPCIÓN O DIÁLOGO
30 de junio de 2009 en T3: [10: 42 a 11:45 min.].	Se observa la respuesta de la explicación del polinomio 7 de la columna A de la Tabla 14 de Isabel (mesa 3). Dayanna le pregunta a Julián si los polinomios que disminuyen su exponente están en la forma desarrollada, Julián dice que sí con su cabeza. Julián señala en la hoja de respuestas tres polinomios que están en la forma desarrollada. Dayanna dice: acá (parece que señala un polinomio) no es desarrollado porque le falta un exponente.
30 de Junio de 2009 en T3: [12:36 a 13:44 min.].	Mayra y Isabel dice que son muchas las cosas que deben de escribir (parece que no les gusta). Mayra afirma que el segundo polinomio de la columna A de la Tabla 14 no estaría en ninguna forma, mientras que el tercero estaría en la forma factorizada. Julián le pregunta a Mayra si está segura si el tercer polinomio está factorizado. Mayra solo afirma que es factorizado porque esta todo agrupadito y se preocupa porque sus compañeros no le creen. Mayra le pregunta a Julián, ¿por qué no son factorizados? Julián se ríe.
30 de Junio de 2009 en T4: [6:00 a 7:20 min.].	En la mesa 3, Mayra: no sé si el 6. Julián: falta organizar los términos, falta organizar los exponentes. Mayra: ¿entonces el 6 también? Julián: debería de ser desarrollada Mayra: profe Julián: por ahora solamente está el 2. Mayra: desarrollado, pero no sé si el 6 este desarrollado. Profe falta organizar los términos y ¿por eso no es desarrollado? Profesora investigadora: un polinomio puede estar desarrollado sin que estén sus términos en orden. Mayra: entonces éste (señala en la hoja), ¿está desarrollado? ¿El dos también está desarrollado? Profesora investigadora: sí, ¿por qué? Mayra: ah no, no está desarrollado. El seis está desarrollado Julián: ¿y el dos? Mayra: el dos no, porque falta reunir los términos semejantes, el $4x$ y el $40x$. Julián: Mayra, ¿el uno y el dos están desarrollados? Mayra: ni el uno, ni el dos están desarrollados.

En el desarrollo de las tareas se observa que los estudiantes constantemente sienten que deben repetir los mismos procedimientos, dado que los resultados de un polinomio en la columna A y la columna B son expresiones equivalentes. Sin embargo no idean una manera para no repetir las respuestas sino que omiten aquellas tareas reiterativas. En cuanto a las dos últimas tareas, en la que se le pide afirmar o refutar que todos los polinomios de la Tabla 14 se pueden escribir de la forma desarrollada y factorizada, sus respuestas muestran la aplicación de una técnica L/P para expresar los polinomios en esas dos formas de escritura, pero no se dice si todos los polinomios se pueden factorizar o desarrollar.

- *El momento de institucionalización y el momento de evaluación:* se ha decidido trabajar ambos momentos porque en las sesiones del 1 y 6 de Julio de 2009 se dan conjuntamente; son tres episodios, el primero al final de la sesión del 30 de Junio de 2009, en donde la profesora define una expresión desarrollada y completa y usa como ejemplo el primer polinomio de la Tabla 14 (Ver Anexo E: 30 de Junio de 2009 en T4: [13.24 a 15:35 min.]).

  El segundo episodio (Ver Anexo E: 1 de Julio de 2009 en T1 [52: 27 a 1:16:59 min.]), la profesora invita a los estudiantes a salir al tablero y dar la respuesta a las tareas. Para completar la Tabla 14 se les solicita utilizar técnicas L/P para expresar el polinomio de la columna A como en la columna B.

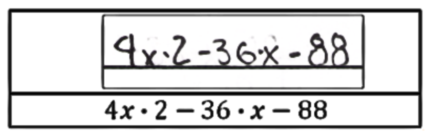
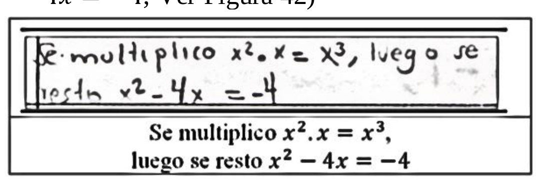
  En el tercer episodio se encuentra en la sesión de trabajo del 6 de Julio de 2009, en donde los estudiantes expresan algunos polinomios de la columna A en la forma factorizada. Dado que este video no se transcribió se hace una breve descripción de lo sucedido: los estudiantes realizan la factorización de los polinomios no factorizados de la columna A en el tablero, el primer polinomio lo factoriza Juan, él usa la regla de diferencia de cuadrados. En la factorización del segundo polinomio Camilo iba a usar la técnica para los polinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, pero por sugerencia de la profesora usa factor común y la técnica para polinomios de la forma $x^2 + bx + c$. Para el quinto polinomio Alba cree que es necesario encontrar la forma desarrollada, pero la profesora le indica cómo realizar la técnica de factor común por agrupación de términos tal como aparece el polinomio en la columna A. Cuando finaliza esta factorización la profesora le sugiere que realice la factorización con el polinomio desarrollado para comparar los resultados. Juan finaliza la sesión con la factorización del sexto polinomio, repite el procedimiento realizado por Alba.

  En lo sucedido el 6 de Julio de 2009 se observa que los estudiantes antes de ejecutar una técnica de L/P prefieren tener el polinomio en su forma desarrollada y en orden y no distinguen fácilmente el factor común por agrupación de términos, técnica no presentada en la guía del Anexo D. En las explicaciones la profesora insiste que lo primero a realizar para factorizar un polinomio es obtener factor común. Aunque en algunos casos las factorizaciones sean iguales, porque corresponden a polinomios equivalentes, los estudiantes efectúan nuevamente el procedimiento de factorización sin identificar los polinomios equivalentes.

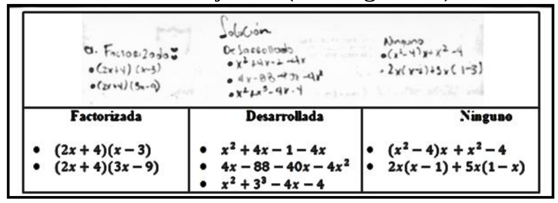
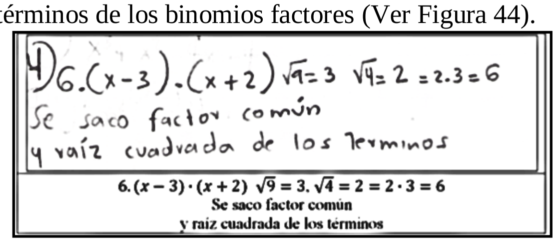
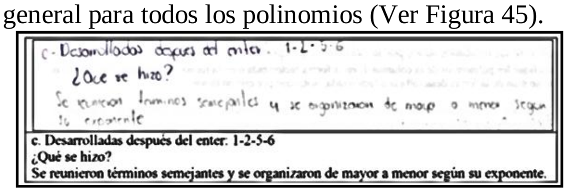
También se dan algunos momentos de institucionalización en los videos del 30 de Junio y 1 de Julio de 2009, cuando las profesoras[71] acompañan el trabajo en cada una de las mesas, pero estos se cruzan con los momentos del trabajo de la técnica y en el momento tecnológico- teórico.

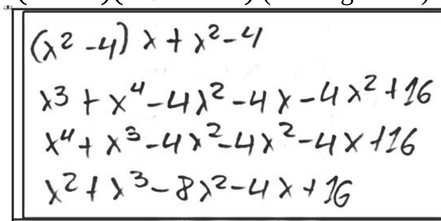
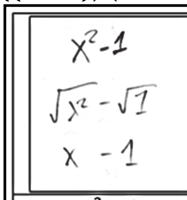
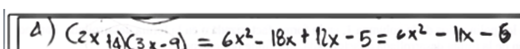
En la Tabla 28 se presenta un resumen de las respuestas de los estudiantes en relación a las técnicas y los objetos ostensivos usados por los estudiantes, a su vez se determinan algunas respuestas inesperadas.

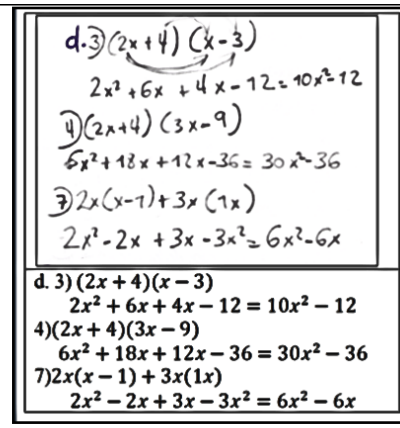
Tabla 28.Resumen de los resultados de la situación 1: *Explorando los polinomios*.

A. TAREA	B. RESULTADOS	C. ALGUNAS RESPUESTAS INESPERADAS
1.1. Tabla 14. Columna B	Todos realizaron esta tarea. Es la respuesta de menos errores.	Sólo un grupo P2 escribió un exponente como si fuera un coeficiente (Ver Figura 41).  **Figura 41. Respuesta de grupo P2 de la mesa 1 en el segundo polinomio en la columna B de la Tabla 14.** El exponente 2 de $4x^2$ parece ser un factor porque entre la x y el 2 hay un punto.
1.1. Tabla 14. Columna C	Todos realizaron las justificaciones. La respuesta de menos errores es la del segundo polinomio y la de mayores errores es la del quinto y sexto polinomio. En relación a las justificaciones, algunos estudiantes realizaron la factorización o el desarrollo del polinomio con técnicas L/P antes de dar la justificación, que en general relata la ejecución de la técnica L/P (Ver Anexo E: 30 de junio de 2009 en T1: [13: 33 a 13:42 min.] y T2: [0:00 a 3:00 min.]).	En las justificaciones del quinto polinomio los estudiantes no indican que se debe realizar el producto, olvidan mencionar que los términos se ordenan, dicen que se han reunido exponentes, afirman que se reducen términos semejantes y expresan una diferencia de términos no semejantes ($x^2-4x=-4$, Ver Figura 42)  **Figura 42. Respuesta de la mesa 6 en el quinto polinomio de la columna B de la Tabla 14.** Las mesas con mayores dificultades en la justificación de lo que sucedió al dar [ENTER] fueron la mesa 1 y 3 porque carecen de un lenguaje matemático apropiado para realizar las descripciones.

[71] En este caso se refiere a la profesora del curso y la profesora investigadora.

A. TAREA	B. RESULTADOS	C. ALGUNAS RESPUESTAS INESPERADAS
1.2.a.	La clasificación de los polinomios dados en la forma desarrollada deja ver una definición, por ejemplo para la mesa 4 un polinomio desarrollado debe estar en orden decreciente del grado de cada uno de los términos, por lo que el sexto polinomio no es desarrollado. En cuanto a los polinomios de la forma factorizada, las mesas 2 y 3 determinan que el séptimo polinomio de la columna A esta factorizado, en dicha expresión hay dos factores adicionados, por tanto podrían considerar la factorización como la presencia de un producto indicado o la asociación de términos. La mayoría de los estudiantes justifican cuáles son los polinomios que no se encuentran en la forma factorizada o desarrollada (mesa 2, mesa 4, mesa 5 y mesa 6).	En la P2, se realiza una clasificación de los polinomios de la columna A, en donde se deducen que la forma desarrollada de un polinomio es lo suma o diferencia de términos, independientemente si son o no son semejantes (Ver Figura 43).  **Figura 43. Respuesta de la tarea 1.2.a. del grupo P2 mesa 1.**
1.2.b.	En cuanto a los polinomios factorizados luego de dar [ENTER], algunos estudiantes usan técnicas L/P para factorizar (mesas 1, 4 y 5) y los restantes dan una explicación en lengua natural (mesas 2, 3 y 6). Las técnicas L/P para factorizar fueron: factor común y factor común por agrupación de términos.	En las justificaciones, se encuentran errores, los estudiantes de la mesa 3 determinan que para factorizar se saca el M.C.M. refiriéndose a factor común y los estudiantes de la mesa 6 dicen que en la factorización del cuarto polinomio se le saca la raíz cuadrada a 4 y 9 en los coeficientes de uno de los términos de los binomios factores (Ver Figura 44).  **Figura 44. Respuesta de la pregunta 1.2.b. por el grupo P4 de la mesa 2.**
1. 2.c.	Algunos utilizan las técnicas L/P para desarrollar los polinomios dados y explicar el procedimiento que hizo la calculadora (mesas 1 y 4). Otros recurren a las explicaciones dadas en la Tabla 14 (mesas 2, 3 y algunos de la mesa 6). Sólo el grupo P15 de estudiantes utilizan tanto técnicas L/P como justificaciones. La técnica L/P para desarrollar un polinomio usada fue: realizar los productos indicados si los hay, reducir los términos semejantes y finalmente ordenar el polinomio.	En la respuesta algunos estudiantes omiten la explicación o procedimiento de los polinomios 2 y 5 (mesa 2) o el polinomio 1 (mesa 5 y algunos de la mesa 6). Los de la mesa 3 omiten en el desarrollo del polinomio 5 y la realización de la multiplicación indicada. Algunos tratan de hacer una descripción general para todos los polinomios (Ver Figura 45).  **Figura 45. Respuesta de la tarea 1.2.b. por el grupo P8 de la mesa 3.**
1.2.d. y 1.2.e.	Respecto a las dos últimas tareas, expresar todos los polinomios de la columna A en la forma desarrollada y factorizada. Los	En la utilización de las técnicas L/P para factorizar o desarrollar un polinomio se presentan diversos errores.

A. TAREA	B. RESULTADOS	C. ALGUNAS RESPUESTAS INESPERADAS
	estudiantes de la mesa 1, repiten sus respuestas en la tarea 1.2.b y 1.2.c, mientras que los estudiantes de las mesas 2, 3, 4, 5 y 6, solo usan las técnicas L/P para expresar los polinomios que no han sido dados u obtenidos al dar [ENTER] en la forma desarrollada (polinomios 3, 4 y 7) o factorizada (polinomios 1, 2, 5 y 6). En las mesas 3, 6 y el grupo P2 de la mesa 1 no realizaron la factorización de los polinomios de la columna A. Todos los estudiantes, exceptuando la mesa 5, omitieron expresar todos los polinomios en la forma desarrollada y factorizada. En cuanto a las técnicas L/P los estudiantes que factorizaron el primer polinomio realizan una diferencia de cuadrados (mesas 2, 4, 5 y P15 de la mesa 6), para factorizar los polinomios tercero y cuarto obtienen factor común (mesas 1, 2, 4 y 5), los que factorizan el segundo polinomio obtienen el factor común y luego usan la técnica para factorizar polinomios de la forma $x^2 + bx + c$ (mesas 2 y 4) o usan la técnica para polinomios de la forma $ax^2 + bx + c$ (mesa 5), las técnicas L/P se presentan en el Anexo D. En el caso de las factorizaciones de los polinomios quinto y sexto usaron factor común por agrupación de términos, luego continúan la factorización de uno de sus binomios factores y finalmente usaron la técnica de diferencia de cuadrados (mesas 2 y 4). Para el séptimo polinomio los estudiantes factorizan por factor común por agrupación de términos (mesas 1, 2, 4 y 5). En relación al desarrollo de los polinomios, la técnica de L/P usada es similar para todos, independiente de su grado. Todos los estudiantes realizaron el desarrollo de los polinomios.	Por ejemplo, en la mesa 5 ven el quinto polinomio como $(x^2 - 4)(x + x^2 - 4)$ (Ver Figura 46).  $(x^2 - 4)x + x^2 - 4$ $x^3 + x^4 - 4x^2 - 4x - 4x^2 + 16$ $x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x^2 - 4x + 16$ $x^2 + x^3 - 8x^2 - 4x + 16$ **Figura 46. Desarrollo del quinto polinomio de la Tabla 14 realizada por el grupo P11 de la mesa 5.** También utilizan la factorización de una diferencia de cuadrados, por lo que sacan la raíz cuadrada de cada uno de los términos, para formar con cada raíz dos binomios factores, uno con la diferencia y otro con la suma de las raíces. No obstante omiten uno de estos dos factores $((x + 1))$ (Ver Figura 47).  $x^2 - 1$ $\sqrt{x^2} - \sqrt{1}$ $x - 1$ **Figura 47. Respuesta de P11 de la mesa 5 para factorizar el primer polinomio de la Tabla 14.** Algunos estudiantes de la mesa 6, al multiplicar dos términos, como resultado de aplicar la propiedad distributiva, realizan una diferencia (Ver Figura 48).  4) $(2x + 4)(3x - 9) = 6x^2 - 18x + 12x - 5 = 6x^2 - 11x - 6$ **Figura 48. Respuesta de P13 de la mesa 6 al desarrollar el cuarto polinomio de la Tabla 14.** Entre los errores más frecuente de todos los estudiantes se da al reducir términos que no son semejantes. En la Figura 49 se muestra este error, además de otros, como la omisión de signos o de términos.

A. TAREA	B. RESULTADOS	C. ALGUNAS RESPUESTAS INESPERADAS
		 **Figura 49. Respuesta de P15 de la mesa 6 al desarrollar los polinomios 3, 4 y 7 de la Tabla 14.**

En relación a los resultados presentados en la Tabla 28 se observa que los estudiantes tuvieron menos dificultades con las técnicas L/P para desarrollar un polinomio que con las técnicas L/P parar factorizarlo, en especial con el uso de la técnica de factor común por agrupación de términos. Esto es debido a que desarrollar un polinomio se sigue una sólo técnica, mientras que para factorizar se necesitan diferentes técnicas en relación a las características del polinomio.

Sólo tres mesas realizaron las técnicas L/P para la factorización de los polinomios (mesas 2, 4 y 5). Mientras que en la mesa 1 y mesa 6 (solo P15) realizaron la factorización de unos cuantos polinomios. En relación a lo anterior, se puede decir que aunque los estudiantes habían factorizado polinomios, no todos sabían que técnica L/P usar para factorizar los polinomios de la Tabla 14.

En las respuestas se alternaron los objetos ostensivos de la lengua natural y las expresiones algebraicas. Con la lengua natural se dan las explicaciones, como lo sucedido al dar [ENTER], que requieren de términos matemáticos que algunos estudiantes no conocían y que hacían incorrectas sus justificaciones. En cuanto a la selección de la técnica de factorización, ésta se vio influenciada por las sugerencias de la profesora durante el acompañamiento a cada una de las mesas.

En cuanto a la praxeología matemática propuesta en la Tabla 11, todas las técnicas L/P y CAS surgieron. Mientras que las preguntas relacionadas con la tecnología evidencian que no todas emergieron, algunas respuestas relatan la técnica (Columna C de la pregunta 1.1.) y otras respuestas se omitieron (pregunta 1.e). La única respuesta que da cuenta la tecnología es pregunta 1.2.a. que remite a la definición de forma factorizada y desarrollada.

4.4. Análisis de los resultados de la situación 2: *Evaluando los polinomios*

En la experimentación de esta situación surgieron algunos cambios en las parejas o grupos de trabajo porque algunos estudiantes dejaron de asistir a la primera sesión. En la mesa 1, llegan Fabián y Angélica. Angélica trabaja con P2, mientras que Fabián hace su trabajo solo y no entrega su hoja de respuestas. En la mesa 5, Jefferson deja de asistir pero a cambió Daniel (antes estaba en la mesa 1) trabaja con Camilo y Frank llega a clase y se organiza en la mesa 5, entrega su trabajo solo. En la mesa 6 y 7 entregan una hoja de trabajo de más (Ver Tabla 24).

En relación a la anterior situación, en donde los estudiantes realizaron en clase todas las tareas, para ésta se propone que realicen en casa las tareas correspondientes a la columna B (polinomios desarrollados en orden) y la columna C (polinomios desarrollados, en orden y completos). Esto se debe a que el tiempo previsto para la primera situación fue más de lo esperado y el tiempo de finalización de todas las situaciones estaba fijo, no era adecuado continuar después de un receso de vacaciones.

A diferencia de la anterior situación, en donde las técnicas L/P fueron las de mayor requerimiento, se esperaba que los estudiantes para estas tareas tuvieran en cuenta las formas desarrolladas y factorizadas de los polinomios de la situación 1, dado que los polinomios 1, 4, 6 y 8 de la Tabla 16 ya se habían factorizado y desarrollado, mientras que los polinomios 2, 3, 5 y 9 de la Tabla 16 pertenecen a la familia $a(x+2)(x-3)$, que se había trabajado en la situación 1 (polinomios 3 y 4 de la Tabla 14). Sin embargo muchos estudiantes no tenían a disposición estos resultados o los olvidaron, por lo tanto realizaron nuevamente las factorizaciones con técnicas L/P. Aunque en estos procedimientos tenían errores, lo hecho se acerca más a la técnica L/P para factorizar esperada y la mayoría de los estudiantes realizan las factorizaciones.

En el desarrollo y factorización de los polinomios se descarta la utilización de los comandos de la calculadora porque esta tarea se hizo en casa, sin embargo los estudiantes durante la clase no descubrieron los comandos [EXPAND ( )] o [FACTOR ( )] y tampoco usaron el [ENTER].

En cuanto a la observación de los datos, todos los estudiantes se fijaron en los polinomios de filas iguales y no vieron las relaciones entre los polinomios no equivalentes, por ejemplo no detectaron que algunos polinomios compartían factores o ceros o que algunos resultados de evaluación eran múltiplos de otros.

Por otra parte el uso del comando [POLYEVAL ( )] no fue fácilmente usado por todos los estudiantes, algunos necesitaron que la profesora les acompañara en el proceso de digitación de los coeficientes del polinomio y otros omitieron verificar si los coeficientes correspondían al polinomio, por lo que los valores no siempre eran los correctos. Pero lo interesante de este comando es que rescata aquellos términos cuyos coeficientes son ceros y que en ocasiones se ignoran. Por tal razón se considera el polinomio $x^2 - 1$ como un binomio y no como un trinomio.

Además la tarea de escribir el polinomio desarrollado, completo y en orden e identificar los coeficientes de cada uno de los términos, da un paso hacia la utilización de la fórmula cuadrática, técnica L/P para hallar los ceros o raíces de un polinomio y posteriormente usada.

En cuanto a la evaluación de los polinomios, Juan es quien lo evalúa con técnicas L/P antes de usar [POLYEVAL ( )] (Ver Anexo E: 7 de Julio de 2009 en T1: [13: 20 a 13:48 min.]), esto le permite comparar los resultados de ambas técnicas. Además la técnica L/P para evaluar polinomios permitió verificar la respuesta del [POLYEVAL ( )] y descartar resultados incorrectos, porque algunos estudiantes al evaluar los polinomios con la calculadora omitieron el signo negativo del número.

Por otra parte los momentos de institucionalización y evaluación estuvieron en varios episodios intermedios a la clase y no solamente al final. Esto se debe a que era necesario tener las respuestas correctas de las columnas B y C de la Tabla 16 antes de hacer la columna D. De igual manera en las tareas 2.2.a., 2.2.b., 2.2.c. y 2.2.d. era necesario verificar los resultados de evaluación de la columna D y aclarar que todos los factores de la forma $(x + s)$ se pueden escribir como una diferencia $(x-(-s))$. De lo contrario los errores de las primeras tareas repercutirían en las respuestas de las tareas siguientes.

Es común que en los análisis de los resultados, los videos sean la fuente para determinar los momentos de estudio, mientras que las hojas de trabajo dan luces del uso de las técnicas, tecnologías y de los diferentes objetos ostensivos involucrados en la solución de las tareas propuestas. En relación a lo propuesto y lo desarrollado en los momentos de estudio esto fue lo que sucedió:

- *El momento del primer encuentro:* antes de que los estudiantes tuvieran las tareas en papel de la situación 2, en una clase anterior (1 de Julio de 2009) la profesora les entrega una lista de polinomios para que ellos en casa encontraran su forma desarrollada, completa y en orden. Para ilustrar el procedimiento, la profesora muestra un ejemplo. Durante la clase del 7 de Julio, la profesora después de entregarles las hojas de trabajo, nuevamente explica cómo deben de completar la Tabla 16 y toma como ejemplo el primer polinomio (Ver Anexo E: 7 de Julio de 2009 en T1: [0:00 a 4.21 min.]).
  Se descarta que hayan usado el [ENTER] u otro comando de la calculadora para hallar la forma desarrollada del polinomio. En las explicaciones no se proponen diferentes formas de escritura de los polinomios para verificar si ellos comprenden cuando un polinomio está desarrollado, ordenado y completo.
- *El momento exploratorio:* algunos estudiantes al completar la Tabla 16 se preguntan si todos los polinomios tienen coeficientes ceros (Ver Anexo E: 7 de Julio de 2009 en T1: [8:14 a 8:52 min.]) y otros inician la evaluación del polinomio con L/P (Ver Anexo E: 7 de Julio de 2009 en T1: [13: 20 a 13:48 min.]). Casi todos estudiantes habían realizado en casa las formas desarrolladas, completas y en orden de los polinomios, así que transcribían la respuesta y por tanto no manifestaron muchas inquietudes frente a lo que debían hacer, aunque unos pocos estudiantes no hicieron la tarea antes de la clase (la mesa 6).
  El segundo momento exploratorio se da cuando los estudiantes van a usar el comando [POLYEVAL ( )], la profesora les indica cómo se debe usar y les sugiere tomar los coeficientes del polinomio desarrollado en orden y completo (columna C de la Tabla 16). A medida que ella da las indicaciones con el viewscreen y el proyector, los estudiantes

también ingresan los datos en su calculadora simbólica. La profesora determina las diferencias del signo menos de número negativo y el signo menos de operación y explica como borrar términos en la línea de entrada para no volver a digitar todas las expresiones al usar el comando [POLYEVAL ( )].

La primera evaluación de polinomio se hace con valor x, la calculadora arroja el polinomio desarrollado en orden, esto sirve para verificar si han escrito correctamente los coeficientes del polinomio y se hace antes de continuar la evaluación con valores numéricos (Ver Anexo E: 7 de Julio de 2009 en T1: [30:10 a 39:18 min.]).

El uso del comando [POLYEVAL ( )] es guiado por la profesora, no se le da el espacio para que los estudiantes prueben como funciona, tampoco se muestran situaciones que generen errores en el uso del comando, como se había propuesto en el análisis *a priori* de la situación.

- *El momento del trabajo de la técnica:* dado que los estudiantes realizaron en casa la tarea de encontrar la forma desarrollada, completa y en orden de los polinomios, no se conoce cuáles fueron y cómo usaron las técnicas L/P (columnas B y C). Y dado que en clase se realizó la revisión de las columnas B y C antes de continuar con la columna D, no se puede determinar quienes hayan tenido problemas con el uso de las técnicas L/P para desarrollar los polinomios.

  En cuanto a la evaluación de los polinomios con el comando [POLYEVAL ( )], algunos estudiantes no reconocieron fácilmente los coeficientes racionales del noveno polinomio y tampoco sabían cómo escribirlos en la calculadora (Ver en Anexo E: 7 de Julio de 2009 en T2: [8:05 a 9:01 min.] y T2: [16:22 a 21:51 min.]).

  Por otra parte algunos estudiantes omitieron el procedimiento de verificar si los coeficientes corresponden a la expresión desarrollada del polinomio, porque no evaluaron el polinomio en x y por tanto no coincidían los resultados de las evaluaciones con los otros compañeros (Ver Anexo E: 7 de Julio de 2009 en T2: [2:09 a 3:30 min.]).

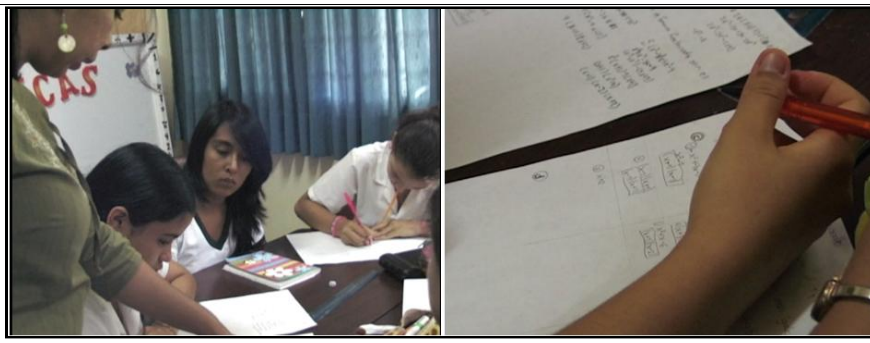
  En las evaluaciones los estudiantes descubren que algunos resultados son iguales para el mismo polinomio, como el primer y último resultado de la evaluación (Ver Anexo E: 7 de Julio de 2009 en T2: [4:23 a 5:03 min.]). Esto se cumple para los polinomios de la familia $a(x+2)(x-3)$, sin embargo esta observación no se reporta en la hoja de respuestas.

En la tarea 2.2.c. se indica que los polinomios deben ser factorizados y comparados, algunos de ellos habían sido trabajados en la situación 1, por lo que se esperaba usaran las expresiones factorizadas ya obtenidas, pero muchos de ellos no tenían a su disposición la hoja de respuestas de esta situación e hicieron nuevamente las factorizaciones (Ver Anexo E: 7 de Julio de 2009 en T2: [23:01 a 24:11 min.] y [28:14 a 28:34 min.]).

En cuanto a la factorización del polinomio $x+2$, no fue tan sencillo determinar que no era factorizable o que era un polinomio primo o irreductible. En la Tabla 29 se presenta el episodio que muestra las discusiones de las estudiantes de la mesa 4 con la profesora investigadora en relación a la factorización de polinomio $x+2$.

Tabla 29. Cuestionamientos de la P9 de la mesa 4 frente a la factorización de $x+2$.

DIÁLOGO DE 7 DE JULIO DE 2009 DE T2: [35:38 A 38:59 MIN.]



En la mesa 4, la profesora investigadora le pregunta a Alba si $x+2$ se puede factorizar.
Alba: diferencia de cuadrados no se puede, cada uno tiene raíz.
Profesora investigadora: ¿factor común se puede?
Alba: no
Profesora investigadora: ¿es diferencia de cuadrados?
Alba: no
Profesora investigadora: ¿es trinomio?
Alba: tampoco.
Profesora investigadora: ¿qué polinomio es ese?
Alba: es dos términos
Marcela: binomio
Profesora investigadora: es un binomio. ¿De qué grado?
Alba: de uno solo
Profesora investigadora: ¿de grado cuánto?
Alba: no, no sabría decirle.
Profesora investigadora: ¿cuál sería el grado? Recuerdas cuál es el grado. Este es un trinomio cuadrado porque tiene tres términos y el término del mayor exponente es dos. El de éste, cuál es (señala $x+2$).
Alba: es de primer grado.
Profesora investigadora: entonces es un binomio de primer grado o lineal. La única forma de factorizar un binomio de primer grado es con factor común. Si no hay factor común, no se puede factorizar $x+2$ es $x+2$, es como los números primos. ¿3 se puede factorizar?
Alba: no
Profesora investigadora: 6 se puede factorizar como 3×2. 3 es un número primo, la única forma de multiplicación es uno por el mismo. No existe otra manera.

DIÁLOGO DE 7 DE JULIO DE 2009 DE T2: [35:38 A 38:59 MIN.]
Culmina la sesión, la profesora les dice que tienen que hacer en casa la factorización de las expresiones. Uno de los dos estudiantes se queda con la hoja de trabajo.
Análisis: la profesora investigadora cuestiona a Alba para que verifique qué tipo polinomio es y en relación a esto escoja la técnica de factorización. La indagación muestra que las estudiantes conocen diferentes técnicas L/P para factorizar algunos polinomios. Sin embargo no se les había propuesto factorizar polinomios irreducibles. Por lo que dudan frente a la respuesta de que un polinomio no es factorizable. Además en las anteriores tareas todos los polinomios se pueden factorizar.

En relación al noveno polinomio, las estudiantes de la mesa 4 intentan factorizarlo en su forma desarrollada y usaron la técnica de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ pero en este caso debe tener en cuenta que los coeficientes son números racionales (Ver Anexo E: 8 de Julio de 2009 en T1: [4:25 a 5:46 min.]). Finalmente antes de usar esta técnica obtienen como factor común $\frac{1}{4}$.

En cuanto a la verificación de las factorizaciones los estudiantes de la mesa 3 determinan que el producto de la forma factorizada debe coincidir con la desarrollada, efectúan la tarea inversa (Ver Anexo E: 8 de Julio de 2009 de T1: [18:40 a 24:12 min.]).

Al finalizar la sesión del 8 y 13 de Julio, se les ha solicitado a los estudiantes hallar los ceros de los polinomios de la columna A de la Tabla 19 de la situación 3, usaron técnicas L/P como fórmula cuadrática, factorización y producto nulo. Este trabajo se propone individual, el 8 de Julio quedó para hacerlo en casa y el 13 de Julio lo presentaron en el salón de clases regular[72] (segundo (duración 3:10 min.) y tercer capítulo (duración 11:07 min.) del video del 13 de Julio de 2009). Aunque esta tarea hace parte de la situación 3 en el momento de institucionalización de la situación 2 surge su vinculación con la tarea 2.2.d.

- *El momento tecnológico – teórico*: en cuanto a las preguntas posteriores a la Tabla 16, los estudiantes de la mesa 3 tienen dificultades con entender qué es conjeturar, para el caso de la pregunta 2.2.b (Ver Anexo E: 7 de Julio de 2009 en T2: [27:21 a 27:54 min.] y [35:20 a 35:36 min.]). Los estudiantes no tienen claro si una conjetura es una idea general o particular de los datos de la evaluación del polinomio (Ver Anexo E: 7 de Julio de 2009 en T2: [29:09 a 30:30 min.]). Para esta misma pregunta, los estudiantes de la mesa 4

[72] Todas las sesiones de trabajo fueron realizadas en la sala de calculadoras, a excepción de esta sesión, realizada en el salón de clases de los estudiantes.

creen que deben extender las filas con otros valores y no ven la generalidad en los resultados de evaluación o en la expresión algebraica desarrollada de cada uno de los polinomios.

En cambio los estudiantes de la mesa 5, sin continuar las evaluaciones determinan que los resultados de las evaluaciones de algunos polinomios para un mismo valor van a ser iguales porque los polinomios tienen la misma forma desarrollada (Ver Anexo E: 7 de Julio de 2009 en T2: [15:08 a 16:20 min.]).

En cuanto a la pregunta 2.2.d. los estudiantes de la mesa 2 no tienen presente la propiedad del producto nulo, muestran que $(x-r)$ al evaluarse por r da cero, pero no tienen en cuenta que este es un factor del polinomio $a(x-r)(x-s)$ (Ver Anexo E. 7 de julio de 2009 en T2 [30:31 a 33:44 min.]).

- *El momento de institucionalización y el momento de evaluación:* el primer momento de institucionalización y evaluación se da al completar las columnas B y C de la Tabla 16, ya que si los resultados son incorrectos las evaluaciones no van a ser las esperadas, por lo que es necesario que la profesora y sus estudiantes corroboren las respuestas. La profesora nuevamente realiza las columnas B y C de la fila correspondiente al primer polinomio, las respuestas para los otros polinomios las realizan los estudiantes, cada uno sale al tablero y explica, entre todos aprueban o refutan el resultado (ver Anexo E: 7 de Julio de 2009 en T1: [16:11 a 30:10 min]).

  Entre las técnicas L/P para determinar la forma desarrollada de un polinomio, una estudiante al multiplicar dos binomios no tienen en cuenta los productos intermedios (los extremos y los medios), en este caso para $(x-1)(x+1)$, multiplican los primeros con los primeros $(x \cdot x)$ y los últimos con los últimos $(-1 \cdot 1)$ y aunque el resultado es el esperado, no se usa la técnica adecuada.

  Otro momento de institucionalización se da al expresar todos los factores en la forma $(x-r)$ y determinar el valor de r, en el caso de x^2-1 su forma factorizada sería $(x-1)(x-(-1))$ y $r=1$ y $s=-1$, esto se hizo antes de realizar la tarea 2.2.d. (ver Anexo E: 8 de Julio de 2009 en T1: [6:43 a 10:32 min.]).

  El siguiente momento de institucionalización y evaluación se da al completar la columna D de la Tabla 16, cada fila de un polinomio es hecho por un estudiante diferente, cada uno sale al tablero y escribe los resultados. Entre las sugerencias que hace la profesora investigadora es que si un polinomio tiene la misma forma desarrollada no tenían que volver a realizar las evaluaciones porque los polinomios son equivalentes, bastaba con repetir los resultados (Ver Anexo E: 8 de Julio de 2009 en T1: [24:13 a 30:13 min.]).

En relación al noveno polinomio uno de los estudiantes obtiene un resultado diferente a los demás, esto suscita la necesidad de usar las técnicas L/P para corroborar o refutar los resultados obtenidos (Ver Anexo E: 8 de Julio de 2009 en T1: [30:13 a 32:30 min.]).

En cuanto a la pregunta 2.2.a. y 2.2.b., los estudiantes dicen que se dieron cuenta que habían algunos pares de polinomios equivalentes o repetidos porque tenían la misma forma desarrollada y además porque al evaluarlos por un mismo valor los resultados eran iguales (Ver Anexo E: 8 de Julio de 2009 en T1: [32:32 a 35:00 a min.]).

En las factorizaciones de la pregunta 2.2.c. la profesora investigadora toma como ejemplo la factorización del sexto polinomio para definir factorizaciones completas y polinomios primos o irreductibles. También muestra que algunos trinomios tienen la misma forma factorizada como los polinomios 2, 3 y 9 de la Tabla 16, pero con diferentes valores de a en la expresión $a(x-r)(x-s)$ (Ver Anexo E: 8 de Julio de 2009 en T1: [46:44 a 50:22 min.], [52:30 a 53:36 min.] y [54:07 a 1:10:43 min.]).

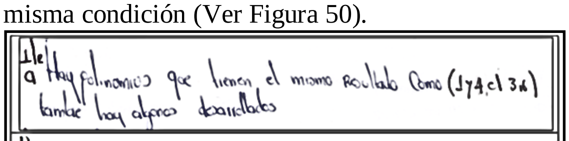
En relación a la pregunta 2.2.d., la profesora investigadora retoma el ejemplo que realizó la profesora y propone otro, los usa para determinar la propiedad del producto nulo, les llama ceros a los r de los factores lineales de la forma $(x-r)$ de un polinomio e introduce la fórmula cuadrática como otra técnica de L/P para hallar los ceros o raíces de los polinomios cuadráticos (Ver Anexo E: 8 de Julio de 2009 en T1: [54:07 a 1:10:43 min.]).

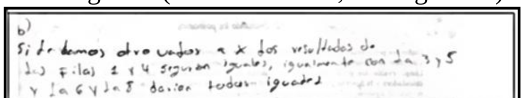
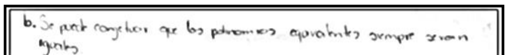
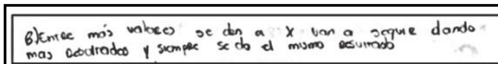
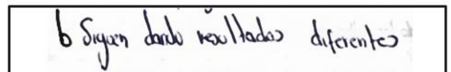
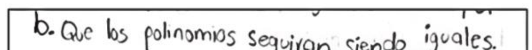
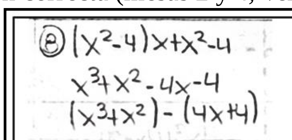
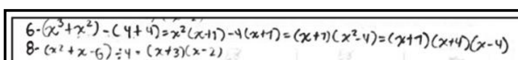
En la sesión del 13 de Julio, la profesora retoma las explicaciones de la clase del 8 de Julio en relación al uso de la fórmula cuadrática o de la forma factorizada para hallar los ceros o raíces de un polinomio cuadrático. La profesora presenta como ejemplo el segundo polinomio $(x-1)(x+1)$, usa ambas técnicas para hallar los ceros y determinar que independientemente de la técnica los resultados son iguales. Posteriormente les propone hallar los ceros de los polinomios de la columna A de la Tabla 18 con el uso de una de las dos técnicas (esto ocurre en el primer capítulo del video del 13 de Julio de 2009 (duración 9:53 min.)).

En la sesión del 13 de Julio surge un segundo momento de institucionalización y evaluación (capítulo cuarto del video del 13 de Julio de 2009 (duración 4:27 min.)), en donde la profesora y los estudiantes determinan los ceros del primer y tercer polinomio. Juan le dice a la profesora que en el caso del tercer polinomio, ha utilizado ambas técnicas para hallar los ceros pero que los resultados no coinciden, la profesora le dice que debe haber un error y le solicita que realice el procedimiento en el tablero. La clase finaliza, hace falta hallar los ceros del cuarto polinomio, la profesora sugiere que la única forma para hallar los ceros de este polinomio es con la forma factorizada.

En relación a los resultados obtenidos a partir de las hojas de respuesta de los estudiantes, se presenta en la Tabla 30 un resumen de la situación 2.

Tabla 30. Resumen de los resultados de la situación 2: *Evaluando los polinomios*.

A. TAREA	B. RESULTADOS	C. ALGUNAS RESPUESTAS INESPERADAS
2.1. Tabla 16	Ninguno de los estudiantes presentó dificultades con las columnas B y C, pero si se dieron algunas respuestas incorrectas en la evaluación de los polinomios con el comando [POLYEVAL( )] (Columna D). Las mesas que resolvieron la Tabla 16 sin errores fueron la 3, 4 y 5, esto a pesar de que los resultados habían sido corregidos antes de entregar sus hojas de trabajo. La técnica CAS es el [POLYEVAL( )] y entre las técnicas L/P esperas son el desarrollo de multiplicaciones, reducción de términos semejantes, orden decreciente y completación del polinomio.	En la evaluación con [POLYEVAL( )] se dan valores que no corresponden, en algunos se omite un signo negativo, por ejemplo los estudiantes de la mesa 2 en la respuesta del noveno polinomio al evaluar en $x = 1$, dieron el resultado positivo, aunque es negativo. Este error generó en el momento de institucionalización la necesidad de evaluar el polinomio a L/P para corroborar el resultado (Ver Anexo E: 8 de Julio de 2009 T1: [30:13 a 32:30 min.]). La mesa con mayores resultados incorrectos en la evaluación de los polinomios fue la mesa 1, quizás porque tenían problemas en comprender cuál era la sintaxis de entrada de [POLYEVAL ( )] (Ver Anexo E: 7 de Julio de 2009 T2: [5:04 a 8:04 min.]). El polinomio con mayores errores en la evaluación fue el noveno porque muchos no reconocieron sus coeficientes racionales.
2.2.a	Casi todos los estudiantes mencionan que existen algunas parejas de polinomios iguales, equivalentes o cuyos resultados de evaluación para un valor de x arrojan el mismo resultado. Por ejemplo los estudiantes de la mesa 5 afirman que los polinomios equivalentes determinan que sus filas sean iguales.	En la mesa 1, la P2 no da respuesta a la pregunta y P1 solo determina correctamente una pareja de polinomios cuyos resultados son iguales, y deja de lado dos parejas de polinomios que cumplen la misma condición (Ver Figura 50).  1) a. Hay polinomios que tienen el mismo resultado como (1 y 4, el 3, 6), tambie hay algunos desarrollados. **Figura 50. Respuesta de P1 de la mesa 1 en la pregunta 2.2.a.**

A. TAREA	B. RESULTADOS	C. ALGUNAS RESPUESTAS INESPERADAS
2.2.b.	Son varias las respuestas, algunos dicen que si se continúan la evaluación de los valores a x, las filas de los polinomios 1 y 4, 3 y 5, 6 y 8 seguirán iguales (P18 de la mesa 7, Ver Figura 51) o que los polinomios equivalentes seguirán iguales (P5 de la mesa 1, P15 de la mesa 7, P13 de la mesa 6, mesas 3, 4 y 5, ver Figura 52). Otros determinan que todos los resultados son diferentes (P1 en la mesa 1, ver Figura 54) y en cierta medida se cumple para algunos valores de x de los polinomios, otros afirman que se obtendrán más resultados al continuar la evaluación (P2 de la mesa 1, ver Figura 53) y algunos dicen que los polinomios seguirán siendo iguales (P4 de la mesa 2, ver Figura 55).  **b) Si le damos otro valor a x los resultados de las filas 1 y 4 seguiran siendo iguales, igualmente con la 3 y 5 y la 6 y 8 darían todas iguales.** **Figura 51. Respuesta de P18 en la mesa 7 en la pregunta 2.2.b.**  **b. Se puede conjeturar que los polinomios equivalentes siempre serán iguales.** **Figura 52. Respuesta de P13 de la mesa 6 en la pregunta 2.2.b.**	Se dan respuestas generales que no dan cuenta de la igualdad de los resultados de evaluación para un valor de x de los polinomios equivalentes (Ver Figuras 53, 54 y 55).  **B) Entre más valores se den a x van a seguir dando más resultados y siempre da el mismo resultado.** **Figura 53.Respuesta de P2 de la mesa 1 en la pregunta 2.2.b.**  **b. Siguen dando resultados diferentes** **Figura 54. Respuestas de P1 en la mesa 1 en la pregunta 2.2.b.**  b. Que los polinomios seguiran siendo iguales **Figura 55. Respuesta de P4 de la mesa 2 en la pregunta 2.2.b.**
2.2.c.	Casi todos los estudiantes realizaron la factorización de los polinomios (mesas 1, 2, 4, 5 y 7, y P6 y P7 de la mesa 3 y P13 de la mesa 6) a excepción de los estudiantes de las mesas 3 y 6, que no realizaron las factorizaciones de algunos polinomios. En cuanto a las técnicas usadas en L/P, ellos usaron factor común, factor común por agrupación y factorización de trinomios de la forma $x^2 + bx + c$. Aunque encontraron las formas factorizadas de los polinomios, en la respuesta a esta tarea se omitió la comparación, los estudiantes no descubrieron la familia de polinomios. Tampoco determinaron otras semejanzas o diferencias en las factorizaciones de los polinomios de la Tabla 16.	La factorizaciones con mayores errores fueron las del polinomio 6 o 8 y 2. Para factorizar los polinomios 6 o 8, algunos estudiantes solo llegan a la agrupación pero no obtienen el factor común (mesa 4 y P13 de la mesa 6, ver Figura 56). Otros llegan a una factorización incompleta pero cuando continúan la factorización del segundo factor, que es una diferencia de cuadrados, no determinan la factorización correcta (mesas 2 y 4, ver Figura 57).  **8) $(x^2-4)x+x^2-4$** **x^2+x^2-4x-4** **$(x^3+x^2)-(4x+4)$** **Figura 56. Respuesta de P10 de la mesa 4 en la pregunta 2.2.c.**  **6- $(x^3+x^2)-(4+4)=x^2(x+1)-4(x+1)=(x+1)(x^2-4)=(x+1)(x+4)(x-4)$** **Figura 57. Respuesta de P4 de la mesa 2 en la pregunta 2.2.c.**

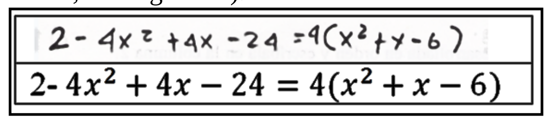
<table>
<tr><th>A. TAREA</th><th>B. RESULTADOS</th><th>C. ALGUNAS RESPUESTAS INESPERADAS</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>En cuanto al polinomio 2, solo obtienen el factor común de los coeficientes que es 4 y dejan el trinomio sin factorizar (mesas 5 y 6, ver Figura 58) o al continuar la factorización del segundo polinomio omiten el número 4 (mesas 2 y P15 de la mesa 7, ver Figura 59).


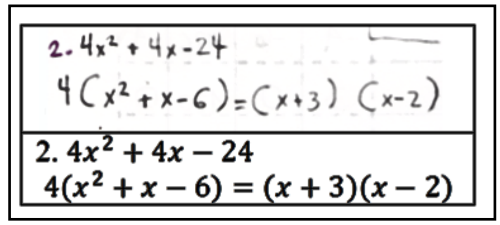
Figura 58. Respuesta de P16 de la mesa 5 en la pregunta 2.2.c.


Figura 59.Respuesta de P15 de la mesa 7 en la pregunta 2.2.c.</td></tr>
<tr><td>2.2.d.</td><td>Son diferentes las razones de lo que sucede al evaluar el polinomio por sus ceros (en este caso r, donde $x - r$ es un factor del polinomio). Algunos dicen que el polinomio se niega (mesas 1 y 5), en este caso la palabra negar es usada como anular, en el sentido que el resultado da cero. En la mesa 2 sin dar muchos detalles, afirman que para todos los valores de r, es igual, pero no se dice cuál es el resultado. Otros dan cuenta de los valores de r para cada polinomio y determinan que todos los resultados son cero (P7 de la mesa 3). Algunos no responden (P6 y P8 de la mesa 3 y todos los de la mesa 6) y otros grupos evalúan el polinomio por el valor de r, muestran y dicen que el resultado da cero (mesas 1, 4, 5 y 7).

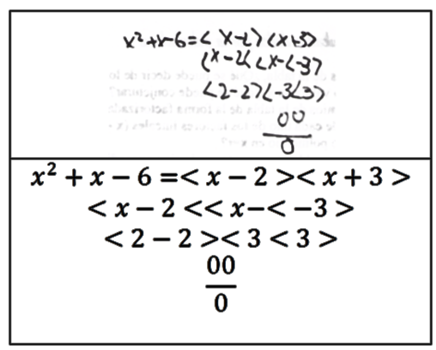
Entre las técnicas L/P que usaron están las vinculadas al cambio de los factores lineales como diferencias, es decir expresar un factor como $(x + s)$ así $(x - (-s))$ o evaluar por r el factor para corroborar que el resultado del polinomio es cero.</td><td>Todos los estudiantes que muestran la evaluación del polinomio por el valor de los ceros, evalúan simultáneamente el polinomio por dos o más valores, además algunos presentan errores en la sintaxis de las expresiones algebraicas como omisión de signos de agrupación o de operaciones (mesas 1, 4, 5 y 7, ver Figura 60).


Figura 60. Respuesta de P2 de la mesa 1 en la pregunta 2.2.d.</td></tr>
</table>

La tarea de mayor dificultad de la situación 2 es la 2.2.b., aunque algunos estudiantes dan cuenta de que algunas filas de los polinomios tienen los mismos resultados y definen a estos polinomios como equivalentes, otros dan a entender que los polinomios equivalentes son iguales, se toma la equivalencia como sinónimo de igualdad. Hubiera sido pertinente mirar las diferencias o relaciones de estos dos términos en el momento de institucionalización y evaluación.

Otras respuestas de la tarea 2.2.b. determinan que los resultados de las evaluaciones de un polinomio son diferentes y en cierta medida se cumple para algunos valores, otros establecen que entre más valores se evalúen mayores resultados se obtienen o que los polinomios siguen siendo iguales, dejándose de lado las regularidades entre los resultados de evaluación de los polinomios. Esto muestra que la lectura de la Tabla 16, que implicaba mirar los valores de la columna D desde las filas y las columnas y tener en cuenta la expresión desarrollada (columnas B y C) de todos los polinomios, no fue una tarea fácil.

En relación a la praxeología matemática propuesta en la Tabla 11 se puede decir que en cuanto a las técnicas L/P usadas para hallar la forma desarrollada completa y en orden no se lograron determinar, los estudiantes las hicieron en casa y tampoco se les solicitaba escribirlas en la hoja de trabajo. Se deduce que no usaron técnicas CAS y se deduce que probablemente realizaron las técnicas L/P esperadas. Para expresar los polinomios en la forma factorizada usaron factor común, factor común por agrupación y trinomios de la forma $x^2 + bx + c$. Unos pocos estudiantes usaron técnicas L/P para evaluar los polinomios y todos usaron el [POLYEVAL( )]. En cuanto a las tecnologías recurren a las definiciones de polinomio, equivalencia de un polinomio, forma factorizada y desarrollada de un polinomio, evaluación de un polinomio y el teorema del factor.

4.5. Análisis de los resultados de la situación 3: *Hallando los ceros de los polinomios*

Las variaciones de las parejas o grupos de trabajo conservan la organización de la situación 2. Sólo se da un cambio y es en la organización de las parejas de la mesa 5, Eduardo deja de asistir los días 14 y 15 de Julio de 2009 pero llega Jefferson quien ocupa su lugar y conforma un grupo con Luis; y en la mesa 7, Sebastián entrega su hoja de trabajo solo, se separa de P15 o P18.

En cuanto a las características del gráfico en relación al grado del polinomio, ellos determinan que la forma y la cantidad de cortes con el eje x dependen del grado del polinomio. Algunos tratan de determinar que entre más curvas, mayor es el grado. No obstante las gráficas de los polinomios del mismo grado, como las parábolas, pueden tener diferencias en relación a su concavidad o puntos de corte con los ejes.

En relación a las líneas rectas, no siempre la expresión algebraica es un polinomio lineal, puede ser un polinomio constante o nulo. Sin embargo no fue clara esta distinción, se asumió que todas las rectas eran gráficas de polinomios lineales o la pregunta se entendió en relación a rectas: ¿pueden existir rectas con más de un cero o que no tengan ceros?

Para algunos grupos, como los estudiantes de la mesa 4, los ceros se relacionan con los puntos de corte con el eje x, en la respuesta 3.2.a. expresaban esta relación, así como que el término independiente determina el punto de corte con el eje y.

En las descripciones de las curvas, algunos se refirieren a la gráfica de los polinomios cuadráticos como parábolas, así mismo determinan sus elementos como eje de simetría, focos o vértice. En los videos algunos estudiantes consultaron textos escolares, para incorporar en sus descripciones algunos términos (Ver Anexo E: 14 de Julio de 2009 en T1: [27:07 a 32:26 min]).

Cuando ubican en el gráfico las raíces de los polinomios, los dibujan como puntos de corte con el eje x, solo los estudiantes de la mesa 3 señalaron el origen de coordenadas como una raíz o cero, porque es el único punto donde ambas coordenadas son nulas, pero no siempre es un punto que pertenece a la gráfica.

Para los estudiantes que responden la pregunta 3.4.a. y 3.4.b. los ceros están sobre el eje de las x y el valor lo determina el corte de la gráfica con el eje x. El número de ceros depende del grado del polinomio. Sin embargo la pregunta 3.4.b. no indaga por las relaciones dependencia del grado del polinomio y el número de ceros, algunos estudiantes simplemente responden que solamente que sí.

En relación al ejemplo de polinomios cuadráticos que tienen menos de dos ceros, solo una pareja determina la expresión algebraica. Los otros grupos dan y dibujan algunos puntos, pero dichas coordenadas no tiene una relación cuadrática, son dadas al azar, trataron de simular una parábola. Las coordenadas de estos puntos son iguales para todas las parejas de diferentes mesas, esto indica que también compartían respuestas con compañeros de mesas cercanas. Tres mesas no dan respuesta a las dos últimas tareas, el tiempo para realizarlas no fue suficiente.

En relación a lo propuesto y lo desarrollado en los momentos de estudio, esto fue lo que sucedió:

- *El momento del primer encuentro:* los estudiantes reciben sus hojas de trabajo de la situación 3 el 14 de Julio y es la profesora quien da las indicaciones de cómo abrir la aplicación Y=EDITOR (diamante [◊] y la letra [W]), ingresar las expresiones algebraicas en la aplicación Y=EDITOR y ver los gráficos en la aplicación GRAPH (diamante [◊] y la letra [R]). Ninguno de los estudiantes usan técnicas L/P para realizar los gráficos en la columna C de la Tabla 18, en el video se observa qua Alba de la mesa 4 se fija en los puntos de corte de la gráfica con los ejes cartesianos para realizar el dibujo del primer polinomio. Algunos estudiantes frente al uso de las aplicaciones Y=EDITOR y GRAPH presentan inconvenientes, no logran ver la gráfica que la profesora muestra con el proyector y el viewscreen (Ver Anexo E: 14 de Julio de 2009 en T1: [0:00 a 6:00 a min.]).
- *El momento exploratorio:* la profesora nuevamente explica cómo se realiza la gráfica en la calculadora del segundo polinomio y menciona como activar y desactivar las expresiones para ver o no ver su gráfica con el comando [F_4]. En la mesa 4 Alba tiene dudas frente a las unidades del eje y y x, porque ve que las del eje x son de mayor longitud y no cree que cada división corresponda a una unidad, por eso le es difícil hallar los puntos de corte con los ejes. Sin embargo no pregunta, asume que cada división son unidades (Ver Anexo E: 14 de Julio de 2009 en T1: [6:00 a 12:25 min.]).

  El segundo momento de exploración se da al usar el comando [VALUE], la profesora utiliza el proyector y el viewscreen para mostrar su uso, pero necesita el valor de la abscisa del cero, así que tanto la profesora como los estudiantes realizan de nuevo el procedimiento de L/P para hallar los ceros de los dos primeros polinomios de la Tabla 18. Una vez ven los ceros en el gráfico de la calculadora, los estudiantes los ubican en el dibujo de la Tabla 18. La profesora explica el uso del comando [VALUE] en los dos primeros polinomios y enfatiza en usar coordenadas para determinar los ceros de los polinomios (Ver Anexo E: 14 de Julio de 2009 en T1: [34:15 a 45:30 min.]).

  En cuanto a la exploración o indagación de técnicas CAS, en el video del 14 de Julio Marcela usó el comando [TRACE] en la aplicación GRAPH, este comando no ha sido indicado en las situaciones propuestas (Ver Anexo E: 14 de Julio de 2009 en T1: [27:07 a 31:59 min.]).

- *El momento del trabajo de la técnica:* en el desarrollo de las tareas de las Tablas 18 y 19 se mezcla el trabajo de la técnica y lo tecnológico – teórico porque las descripciones de los gráficas requieren del reconocimiento de propiedades y el uso del comando [VALUE] necesita la definición de cero e induce a la relación funcional, por tal razón en los videos se señala estos dos momentos conjuntamente, aunque en las tareas de 3.2 y 3.4. solo se da el momento tecnológico – teórico.

  Lo primero que realizan algunos estudiantes de la Tabla 18 son todos los dibujos de las gráficas, mientras que la mayoría de estudiantes simultáneamente hicieron el dibujo y su descripción, otros aún no entendieron cómo hacer las gráficas en su calculadora (Ver Anexo E: 14 de Julio de 2009 en T1: [12:26 a 15:26 min.]).

  En las descripciones y los dibujos, los estudiantes tienen presente la simetría de las parábolas, los ceros como cortes con el eje x y la relación del término independiente del polinomio con el punto de corte con el eje y. Antes de trazar la gráfica lo primero que ubican son los cortes con los ejes, se fijan en las curvas aunque no determinan con exactitud los valores máximos o mínimos (Ver Anexo E: 14 de Julio de 2009 en T1: [15:26 a 15:34 min.], [25:56 a 27:06 min] y [18:35 a 24:14 min.]).

  Para completar la columna B.1. de la Tabla 19, se ve que muchos estudiantes ya habían encontrado los ceros de los polinomios con técnicas L/P, así que tienen en cuenta lo que han hecho y lo transcriben (Ver Anexo E: 14 de Julio de 2009 en T1: [48:47 a 50:22 min.] y [52:49 a 55:25 min.]).

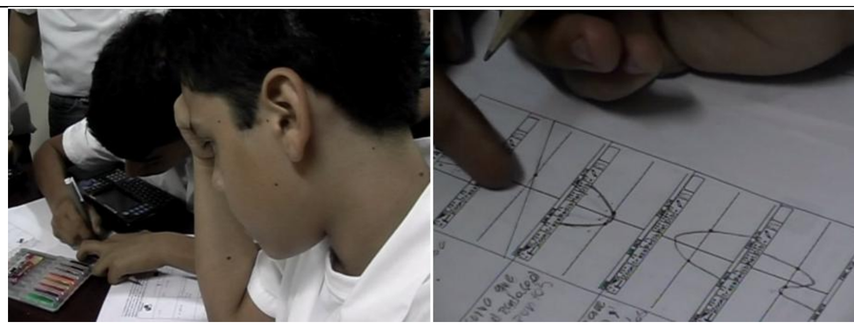
  También se observa en la mesa 2, Juan ha descubierto que su valor numérico de la abscisa del cero no es correcto, porque al usar [VALUE] esperaba ver el punto sobre el eje x, así que al revisar sus procedimientos en L/P y el valor dado a la abscisa, descubre un error, al parecer omitió el signo menos del valor -2. Este episodio muestra la complementariedad de las técnicas CAS y L/P y el surgimiento de una técnica instrumentada, el no ver lo que se esperaba en el CAS en relación a la definición de cero y la dependencia de las variables (función polinómica) lo lleva rectificar sus técnicas L/P (Ver Anexo E: 14 de Julio de 2009 en [50:22 a 52:38 min.]).

- *El momento tecnológico – teórico*: a diferencia de las otras situaciones, en ésta algunos estudiantes hacen uso del texto escolar o el cuaderno para mirar algunos términos o aclarar dudas mientras realizan la solución de las tareas 3.2. y 3.4. (Ver Anexo E: 14 de Julio de 2009 en T1: [27:07 a 31:59 min.] y [32:00 a 32:26 min.]).

  Respecto a la tarea 3.2.a., los estudiantes de la mesa 6 llegan a una conclusión en relación a la cantidad de cortes con el eje x y el grado del polinomio, Felipe afirma: "*si pasa dos veces es de grado dos, si pasa tres veces es de grado tres*" (Ver Anexo E: 14 de Julio de 2009 en T1: [36:36 a 34:14 min.]).

  Por otra parte en las tareas 3.4. la profesora investigadora les fórmula a los estudiantes en cada una de sus mesas algunas preguntas que permiten mirar sus concepciones frente a los ceros de un polinomio en relación a su grado y las características de la gráfica. En la Tabla 31 se da cuenta de uno de estos episodios.

Tabla 31. Cuestionamientos de los estudiantes de la mesa 5 frente a los ceros de un polinomio..

DIÁLOGO Y DESCRIPCIONES DEL 14 DE JULIO DE 2009 DE T1: [59:31 A 1:02:25 MIN.] Y [1:13:02 A 1:19:31 MIN.]
 **[59:31 a 1:02:25 min.]** En la mesa 5. Profesora investigadora: ¿cuál es la característica fundamental de los polinomios que tienen ceros? Camilo: que pasan por x. Profesora investigadora: ¿puede haber una línea recta que no pase por x? Luis: si Profesora investigadora: ¿cómo la dibujarían? Daniel: vertical Profesora investigadora: si es vertical, ¿no pasa por x? Luis: no, una recta paralela al eje x. Profesora investigadora: bueno, ¿ese es un polinomio lineal? ¿Entonces, ese sería un polinomio que no tiene cortes con el eje x y por tanto no tiene ceros? ¿Pueden existir polinomios lineales que tengan más de un cero? Ustedes, ¿qué opinan? ¿Una recta puede cortar en dos puntos el eje x? Camilo: no Profesora investigadora: no, por qué. Camilo: no, es que una línea recta pasa una vez por el eje x. Profesora investigadora: ¿ella no puede ir y volver? Camilo: es que una línea recta solo pasa una vez.

DIÁLOGO Y DESCRIPCIONES DEL 14 DE JULIO DE 2009 DE T1: [59:31 A 1:02:25 MIN.] Y [1:13:02 A 1:19:31 MIN.]
Profesora investigadora: ¿podrían haber sin ceros? Entonces podemos dibujarlo o dar la expresión algebraica de ese polinomio que no corta el eje x. Miremos la siguiente pregunta: ¿pueden existir polinomios cuadráticos con menos de dos ceros? ¿Con menos de dos ceros quiere decir que puede tener uno o no tener ceros? Camilo: no sé. Profesora investigadora: y de más de dos ceros, quiere decir que puede tener tres, cuatro ceros, cinco ceros. Según lo que están viendo, es posible que la parábola tenga más de dos ceros. Daniel: si … no Profesora investigadora: la curva de estos dos polinomios (segundo y tercero de la Tabla 19), tiene algunas características y se le llama parábola. Ahora podrían encontrar una expresión algebraica de un polinomio que no tenga ceros. Camilo: si Profesora Investigadora: ustedes tienen la calculadora, pueden ensayar. También tienen talleres que les sirven. Daniel: todas están buenas, menos la 3.4.d. **[1:13:02 a 1:19:31 min.]** En la mesa 5. Profesora: no necesariamente lo tienes que hacer con calculadora, lo puede hacer con lápiz y papel también. Muéstrame. Camilo: el punto $(-2{,}2)$ y $(2{,}2)$. Si se traza queda horizontal (utiliza la gráfica del segundo polinomio para ver la línea recta horizontal). Profesora: no tiene necesariamente que trabajar con la calculadora, pueden usar el lápiz y el papel. Camilo y sus compañeros de la mesa 5 no logran determinar la expresión de la línea recta paralela al eje x. Ahora tienen el problema de hallar el polinomio cuadrático que no tenga ceros. Hasta el momento no saben cómo obtener la gráfica o su expresión. Daniel da una idea, sugiere utilizar la misma expresión del segundo polinomio y Camilo parece que encontró la manera de hallar la expresión cuadrática, hace un dibujo de la parábola que no corta el eje x y hace una translación vertical hacia arriba de la gráfica del segundo polinomio de la Tabla 18 y dice que necesita la calculadora para hallar la expresión, pero luego parece que encontró la manera de hacerlo con L/P. Camilo: pueden ser con cuatro parejas ordenadas (puntos de la parábola en el plano cartesiano). Luego señalamos uno acá, otro aquí, otro aquí y otro aquí (dibuja los puntos en el plano cartesiano del segundo polinomio de la Tabla 18 la simetría de la parábola). Daniel: hay uno más, mejor dicho sobra uno. Camilo: pero si pueden ser cinco también. Daniel: no me entiendes. Tienen que ser parejas ordenadas. Camilo: no, estas son parejas ordenadas. Entonces sería menos uno (lo borra), menos tres coma seis, menos uno coma dos, cero coma uno (los escribe como parejas ordenadas). Daniel: no puede pasar por x. Camilo: es al revés Frank: $(1{,}0)$ Camilo: uno coma (lo borra), menos dos coma dos, menos uno coma uno. Profesora investigadora: ¿estos son los valores de los ceros? ¿Qué significan esas parejas? Camilo: son las parejas ordenadas que damos para que no cruce por cero. Frank: para que no cruce por x. Profesora investigadora: pero, estás seguro que esas parejas ordenadas pertenecen a una curva que es de una función cuadrática. Daniel: si las unimos todas, va a dar una curva. Camilo le muestra a la profesora investigadora la gráfica de los puntos, indicándole que al unirlos forma una curva. La profesora investigadora le sugiere que realice la gráfica en la respuesta.
Análisis: frente a la pregunta si una recta puede no tener ceros, los estudiantes determinan como caso particular una recta horizontal, sin embargo la expresión algebraica de esta recta no sería un polinomio lineal. En relación a los polinomios cuadráticos, al inicio no saben cómo puede ser la gráfica, pero tienen claro que no pasa por el eje x. Así que Camilo al considerar la propuesta de Daniel, hace una traslación vertical hacia arriba de la parábola del segundo polinomio, ésta no corta al eje x. Para determinar la gráfica, da algunos puntos que parecen ser simétricos, pero no existe una expresión algebraica que verifique que pertenecen a una parábola. Sin embargo los puntos que traza, dan la idea de la gráfica de un polinomio cuadrático sin ceros.

En la discusión de la profesora investigadora con las estudiantes de la mesa 4, se llega a un resultado en relación a una línea recta que tiene más de un cero y es la que recta que coincide con el eje x, las estudiantes no saben la expresión y consideran que no es necesaria la recta si no un segmento de ésta (Ver Anexo E: 14 de Julio de 2009 en T1: [1:03:39 a 1:11:24 min.]). Sin embargo en su hoja de respuesta no se da cuenta a la solución a esta tarea.

Algunos estudiantes consideran un cero de más para todas las gráficas, al revisarse la hoja de respuestas señalan el origen de coordenadas como cero, por lo tanto no ven la relación correcta del grado con el número máximo de ceros posibles de un polinomio (Ver Anexo E: 14 de Julio de 2009 en T1: [1:11:26 a 1.12:46 min.]).

- *El momento de institucionalización y el momento de evaluación:* se da al finalizar la situación, el 15 de Julio la profesora muestra los gráficos de cada uno de los polinomios y los estudiantes dijeron sus características, la mayoría determinan los cortes con el eje x o la cantidad de ceros. En la explicaciones la profesora introduce por primera vez algunos términos como el eje de simetría, el vértice y concavidad de las parábolas (Ver Anexo E: 15 de Julio de 2009 en T1: [0:00 a 32:04 min.])

  En relación a la gráfica del primer polinomio, la profesora digitó la expresión inadecuadamente, pero Camilo descubre el error porque la gráfica corta al eje x en 1 y no en 2, como la gráfica solicitada; el error permitió ver que los estudiantes tenían presente además de la forma de la gráfica, línea recta creciente, los puntos de corte con los ejes.

  Respecto a las gráficas se determinó que los polinomios lineales generaban rectas, los polinomios cuadráticos parábolas y los polinomios cúbicos líneas "onduladas" porque tenían varias curvas.

  Camilo introduce el término ascendente para decir que la parábola abre hacia arriba, la profesora inmediatamente habla del efecto del coeficiente a en la concavidad de la parábola del segundo polinomio. Luego determina que si a es positivo la parábola es ascendente y si a es negativo la parábola es descendente, quedó implícito que a es el coeficiente del término cuadrático del polinomio, aunque en clases pasadas se había determinado la forma desarrollada de los polinomios cuadráticos $ax^2 + bx + c$ y posteriormente se trabajaría a en la forma factorizada $a(x - s)(x - r)$ y nuevamente en la forma desarrollada. Para mostrar la concavidad hacia abajo en relación al coeficiente a, toma como ejemplo la expresión y la gráfica del tercer polinomio.

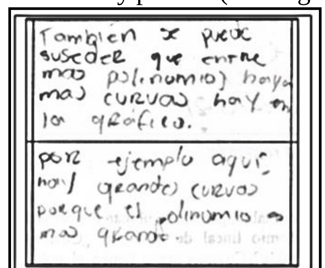
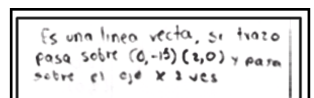
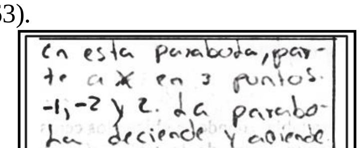
En la gráfica del tercer polinomio la profesora determina el eje de simetría y el vértice. En cuanto al cuarto polinomio los estudiantes dicen que pasa tres veces por el eje x o que tiene tres ceros y que es un polinomio de tercer grado.

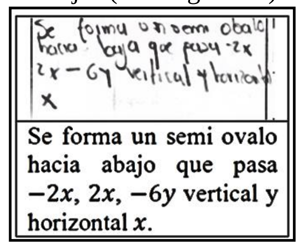
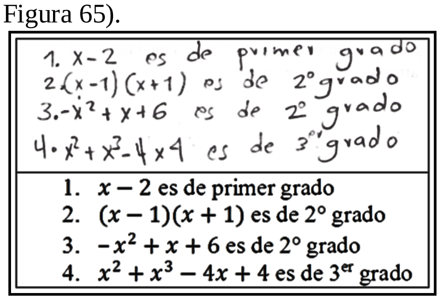
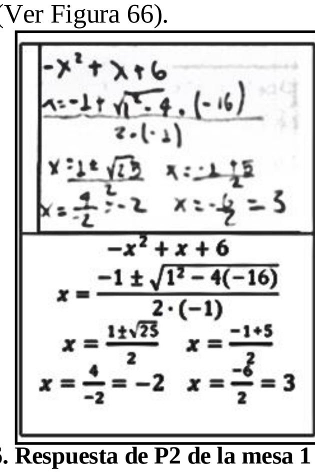
Posteriormente los estudiantes retoman los procedimientos realizados el 13 de Julio para hallar los ceros con técnicas L/P. En el caso del tercer polinomio, lo factorizan para usar producto nulo o con la forma desarrollada dada usan fórmula cuadrática para hallar los ceros. El cuarto polinomio lo factorizan para aplicar la propiedad del producto nulo y hallar los ceros.

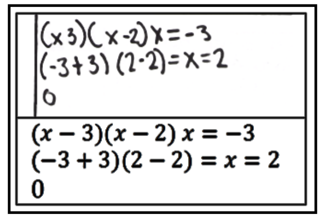
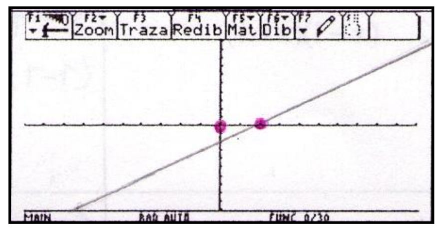
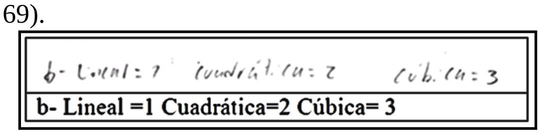
En cuanto a la cantidad de ceros en relación al grado de un polinomio, los estudiantes afirman que las polinomios lineales sin ceros son las constantes ($p(x) = a$ o $y = a$ donde $a \neq 0$) y el polinomio con más de un cero es el que tiene como gráfica una recta que pase por el eje x (el polinomio cero, p(x)=0). Sin embargo aunque la gráfica sean líneas rectas la expresión algebraica no corresponde a polinomios lineales. No obstante las parábolas que no tienen ceros son aquellas que no cortan al eje x, un estudiante dibuja una parábola sin cortes con el eje x para mostrar un ejemplo de polinomios cuadráticos sin ceros y a partir de esta gráfica otro estudiante obtiene la parábola con un solo cero producto de una traslación vertical, de manera que el vértice este sobre el eje x. En el caso de las parábolas y la recta con más de un cero, no se determinan las expresiones algebraicas.

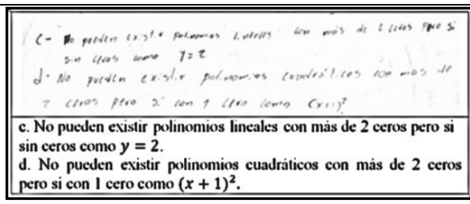
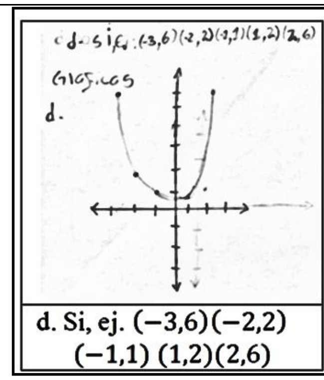
En relación a los resultados obtenidos a partir de las hojas de respuesta de los estudiantes, se presenta en la Tabla 32 un resumen de la situación 3.

Tabla 32. Resumen de los resultados de la situación 3: ***Hallando los ceros de los polinomios.***

A. TAREA	B. RESULTADOS	C. ALGUNAS RESPUESTAS INESPERADAS
3.1. Tabla 18	Todos los estudiantes en sus descripciones determinan los puntos de corte con los ejes, algunos escriben parejas ordenadas (mesa 5 y P13 de la mesa 6) y otros dan el valor de corte en el eje x o y. En cuanto a los nombres de la gráfica o características de la forma, algunos estudiantes hablan de las gráficas como líneas sin decir que son curvas o rectas; otros determinan la gráfica del primer polinomio como una recta, la gráfica del polinomio segundo y tercero como líneas curvas, parábolas o semióvalos y para el cuarto polinomio dicen que es una línea ondulada, curva, parábola o de forma de culebra. Los estudiantes diferencian el término ondulada de curva, dicen que ondulada es porque tiene varias curvas (Ver Anexo E: 15 de Julio de 2009 en T1: [10:40 a 13:27 min.]). En comparación a otras respuestas las estudiantes de la mesa 4 determinan que los cortes con el eje x son los ceros y que el corte con el eje y es el término independiente del polinomio. Se evidencia también la adquisición de algunos términos matemáticos por parte de los estudiantes de la mesa 2, dicen que la recta tiene pendiente positiva, la segunda parábola tiene foco positivo y la tercera parábola tiene foco negativo. Hasta el momento no se ha definido cuál es el foco para las parábolas, usualmente se trabaja en grado décimo en geometría analítica. También los estudiantes de la mesa 5, usan los términos ascender y descender para referirse a concavidad hacia arriba o hacia abajo en el caso de las parábolas o crecimiento y decrecimiento en el caso de la gráfica del polinomio cúbico. Para el primer polinomio P11 dice que la recta es creciente mientras que los estudiantes de la mesa 2 dicen que la recta es ascendente como si fuera sinónimo de creciente o va hacia arriba. Las técnicas usadas son en CAS en relación a gráficos en las aplicaciones Y=EDITOR y GRAPH.	Para P2 de la mesa 1 encuentran una relación entre la cantidad de curvas de la gráfica con la cantidad de términos del polinomio o grado. Sin embargo su descripción no es muy precisa (Ver Figura 61).  **También se puede suceder que entre más polinomios haya más curvas hay en la gráfica. Por ejemplo aquí hay grandes curvas porque el polinomio es más grande.** **Figura 61. Respuesta de P2 de la mesa 1 en la columna B para los polinomios tercero y cuarto.** Otro error se da al determinar las coordenadas de corte con el eje y en P16 de la mesa 5, además dice que la gráfica pasa dos veces por eje x (Ver Figura 62).  **Es una línea recta, su trazo pasa sobre $(0,-15)$ $(2,0)$ y pasa sobre el eje de las x 2 ves** **Figura 62. Respuesta de P16 de la mesa 5 en la columna B de la Tabla 18 para el primer polinomio.** Algunos estudiantes llaman a la gráfica del polinomio cúbico como parábola. Hasta el momento no saben que las parábolas son las gráficas de los polinomios cuadráticos de una variable y usan el término como sinónimo de curva (estudiantes de la Mesa 7 y P14 de la mesa 6, ver Figura 63).  **En esta parabola, parte a x en 3 puntos -1, -2 y 2. La parábola desciende y asciende.** **Figura 63. Descripción del polinomio cúbico de la Tabla 18 por P19 de la mesa 7.** En cuanto a la escritura de los cortes con los ejes, algunos escriben los valores como si fueran

A. TAREA	B. RESULTADOS	C. ALGUNAS RESPUESTAS INESPERADAS
	Para realizar los dibujos de la columna C, los estudiantes no realizaron tablas de datos a L/P.	expresiones algebraicas para referirse al valor numérico y a los ejes (Ver Figura 64).  **Figura 64. Descripción del tercer polinomio de la Tabla 18 por P1.**
3.2.a.	Los estudiantes de la mesa 1 y 3 no dan respuesta. La mayoría de los estudiantes hallaron la relación del grado del polinomio con el número de cortes con el eje x (mesas 2, 5 y P13 de la mesa 6 y P19 de la mesa 7) o el número de ceros del polinomio (mesa 4). En sus descripciones mencionan que el grado del polinomio también se vincula con la forma de la gráfica, dicen que los de grado uno son rectas, los de grado dos son parábolas o curvas y los de grado tres son dos curvas o son onduladas (mesas 2 y 5).	Solamente determinan el grado del polinomio pero no lo vinculan con las características de la gráfica (Ver Figura 65).  **Figura 65. Respuesta de la pregunta 3.2.a. de P15.**
3.3. Tabla 19	Todos los estudiantes realizaron las técnicas L/P para hallar los ceros de un polinomio. Solo los estudiantes de la mesa 3 usaron la fórmula cuadrática para hallar los ceros del tercer polinomio. En cuanto a la escritura de los ceros en la columna B.2. todos usaron coordenadas, algunos discriminaron los valores de la abscisa y la ordenada, tal como se presenta en la calculadora (mesas 1, 4, 5, 6 y 7). Las técnicas usadas en L/P para hallar los ceros son fórmula cuadrática y factorización. Las técnicas CAS son [VALUE] que junto con las técnicas L/P puede ser una técnica instrumentada en la medida que al dar un punto sobre la gráfica, se espera que el valor de la ordenada sea cero o que se ubique en el eje x. Si no se cumple lo anterior, el estudiante puede revisar sus técnicas L/P, para descubrir el error.	En el uso de la fórmula cuadrática se presentaron errores en la escritura, parece que transcribieron el procedimiento sin entender lo realizado, omiten valores y operaciones, pero el resultado es el esperado (Ver Figura 66).  **Figura 66. Respuesta de P2 de la mesa 1 para hallar los ceros del tercer polinomio con la fórmula cuadrática.** En cuanto al uso de la forma factorizada para hallar los ceros, los estudiantes ven independientemente cada uno de los factores, buscan el valor de x para que sea cero. En algunos casos evalúan el polinomio simultáneamente por dos valores. En la Figura 67, se ve la factorización

A. TAREA	B. RESULTADOS	C. ALGUNAS RESPUESTAS INESPERADAS
		del tercer polinomio, desaparecen el factor común -1.  **Figura 67. Respuesta de la mesa 3 para hallar los ceros del tercer polinomio.** Por otra parte los estudiantes omiten o se agregan ceros en el dibujo de la columna C de la Tabla 18. En la Figura 68 agregan el origen de coordenadas como cero.  **Figura 68. Ceros ubicados en el dibujo de la Tabla 18 por los estudiantes de la mesa 3.**
3.4.a.	Todos los estudiantes responden que los ceros se ubican sobre el eje, línea o recta x. Solo los estudiantes de la mesa 1 no responden a esta pregunta.	
3.4.b.	Todos los estudiantes determinan la cantidad de ceros según el grado del polinomio, a excepción de los estudiantes de la mesa 1 que no responden. Algunos omiten responder la pregunta que relaciona el grado con la cantidad de ceros de un polinomio. Algunos responden que sí, sin dar explicaciones, solo la mesa 4 dice que el número de ceros es igual al grado del polinomio.	Algunos estudiantes usan una manera simbólica mezclada con la lengua natural (de manera sincopada) para determinar el número de ceros de cada polinomio en relación a su grado (Ver Figura 69).  **Figura 69. Respuesta de la pregunta 3.4.b. de P4 de la mesa 2.**
3.4.c. 3.4.d.	Algunos estudiantes no dan respuesta a las dos últimas tareas (mesas 1, 3 y 4). Los estudiantes de la mesa 5 y 6 determinan algunos puntos por donde pasaría una recta o una parábola sin ceros. Solo P4 de la mesa 2 da la expresión algebraica de la recta sin ceros ($y=4$) y de la parábola con un cero ($(x+1)^2$) (Ver Figura 70).	Los estudiantes que definen los polinomios a partir de sus puntos, solo dibujan la parábola, pero en el caso de la pareja ordenada $(1,2)$, éste no pertenece a la gráfica. Sin embargo tienen claro que la parábola es simétrica y no corta al eje x. Queda implícito si el ejemplo es para un polinomio cuadrático con un cero o sin ceros (Ver Figura 71). Sin embargo en el momento de institucionalización uno de los estudiantes dice que es el ejemplo de los polinomios cuadráticos sin ceros (Ver Anexo E: 15 de Julio de 2009 en T1: [29:23 a 32:04 min.])

A. TAREA	B. RESULTADOS	C. ALGUNAS RESPUESTAS INESPERADAS
	 **Figura 70. Respuesta 3.4.c y 3.4.d de P4 de la mesa 4.**	 **Figura 71. Respuesta a la pregunta 3.4.d. por los estudiantes de la mesa 5 y 6.** Los estudiantes de la mesa 7 dan ejemplos de otros polinomios lineales o cuadráticos con uno y dos ceros respectivamente. Pero dicha respuesta no es clara, no da cuenta de las preguntas 3.4.c y 3.4.d.

La solución de las respuestas deja ver que para los estudiantes determinaron la relación de los ceros con los cortes con el eje x y el grado del polinomio. Algunos antes de usar el [VALUE] sabían que los cortes del eje x eran los ceros por lo que usaron el [VALUE] para verificar las técnicas L/P.

El uso de la gráfica del polinomio y el comando [VALUE] pone en relación dos variables (x, y), donde x es el valor dado para evaluar el polinomio y y el resultado de la evaluación. En el caso de los ceros se espera que al dar el valor de x en [VALUE], y sea igual a cero. Este comando permite ver el lado funcional de los polinomios y determina otra técnica CAS para efectuar evaluaciones de polinomios.

En relación a las técnicas L/P para hallar los ceros, la explicación fue reiterativa y en varias sesiones (8, 13 y 15 de Julio). No obstante el uso de la fórmula cuadrática se da sin referencia a una tecnología, mientras que la factorización se vincula a la propiedad del producto nulo. Pero en la práctica parece que las dos técnicas, la fórmula cuadrática y la factorización, se usan sin relación a una tecnología, porque los factores se ven aislados y no en relación al producto que determina un polinomio, se buscó donde los factores se hacen ceros y no donde los polinomios se hacen ceros.

Acerca de la tarea 3.4.b. se sugiere cambiar la pregunta para indagar las razones por las cuáles los estudiantes creen que el número de ceros depende del grado, porque la redacción de la pregunta permite como respuesta un sí o no, sin obtener una basta información.

En relación a la praxeología matemática propuesta en la Tabla 11, los estudiantes usaron todas las técnicas, realizaron las gráficas de los polinomios con las aplicaciones Y=EDITOR y GRAPH, hallaron los ceros con técnicas L/P como factorización y fórmula cuadrática y los ubicaron en la gráfica con el comando [VALUE]. En cuanto a la tecnología, las tareas se enfocaron en establecer el vínculo del número posible de ceros en relación al grado del polinomio (TFA y Teorema 1 de la Tabla 11). Quedaron implícitas las otras tecnologías propuestas en la Tabla 11 y vinculadas con las técnicas de factorización, fórmula cuadrática y realización de gráfico cartesiano.

4.6. Análisis de los resultados de la situación 4: *Parábolas*

Los grupos y organización de las mesas es igual que en la situación 3. A diferencia de las otras situaciones, los momentos de estudio se dieron en un orden diferente y en algunos episodios se conjugaron. A pesar de que el tiempo de trabajo fue de menos de una sesión de clase, los estudiantes dieron respuestas a casi todas las tareas.

Una de las ventajas de esta situación es que la técnica CAS: acceso a las aplicaciones Y=EDITOR, GRAPH e inserción de las expresiones en Y=EDITOR, permitió ver la familia de funciones con solo digitar una expresión algebraica que incluía todos los valores de los parámetros. Esto permitió reducir el tiempo de uso de la calculadora para ver las gráficas. Por otra parte, la ejecución de los programas [PARABOL1 ( )] y [PARABOL2 ( )] fue fácil, para obtener una gráfica solo debían digitar el nombre del programa en HOME y dar [ENTER]. No necesitaban ir a Y=EDITOR y GRAPH, como en la tarea 4.1., pero si debían ir a HOME cada vez que querían obtener una nueva parábola y dar [ENTER] sobre el nombre del programa.

No obstante el uso de estas técnicas CAS no fue sencillo por primera vez, los estudiantes no entendían que a tomaba valores diferentes y que todos se escribían entre llaves separados con comas. Al ejecutar el programa debían escribirlo en HOME tal como aparece en la hoja de trabajo y que una vez daban [ENTER] aparecía una gráfica que cambiaba al dar nuevamente [ENTER].

El tiempo de solución de las tareas también se hizo en corto tiempo porque la profesora junto con los estudiantes realizaron la tarea 4.1. y a medida que los estudiantes daban sus respuestas la profesora institucionalizaba el saber matemático y evaluaba.

En relación a lo propuesto y lo desarrollado en los momentos de estudio, esto fue lo que sucedió:

- *El momento del primer encuentro y el momento exploratorio:* los estudiantes graficaron una familia de funciones en la calculadora junto con la profesora y a diferencia de la situación 3, usan una técnica CAS nueva para graficar una familia de funciones, todos los coeficientes se escriben entre llaves y se multiplican por la parte literal del término a que pertenecen (Ver Anexo: 15 de Julio de 2009 en T1: [32:05 a 38:20 min.]).

  Entre las preguntas relacionadas con la sintaxis de entrada de las expresiones algebraicas en la calculadora, una estudiante pregunta sobre el uso de la tecla de negativo y el de resta, en las anteriores situaciones se había hecho la distinción, pero aún no es claro cuando usarlos.

  En cuanto a la sintaxis de entrada, algunos estudiantes en vez de darles valores a a en la expresión $a(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}+1)$, escriben la expresión tal como se da. Esto no les permite ver las parábolas y es necesario que la profesora los acompañe y explique nuevamente el procedimiento.

  Para los estudiantes no es sencillo entender que a toma los valores designados en el conjunto de valores $a \in \{-2, -1, 1, 2\}$, porque sin usar la técnica CAS explicada por la profesora, ellos habían podido digitar cada una de las expresiones algebraicas para un a determinado, tal como lo habían hecho en la situación 3.

  Un segundo momento de exploración se da con las tareas 4.2., antes de usar [PARABOL1 ( )] es necesario desactivar las expresiones algebraicas en Y=EDITOR y dirigirse a la aplicación HOME. Algunos antes de que la profesora indique como ir a la aplicación teclean [◊] y [Q]. En HOME deben escribir en la entrada [PARABOL1 ( )] y dar [ENTER], el comando inmediatamente muestra una parábola. La profesora dice que [PARABOL1 ( )] genera diferentes parábolas y si quieren hallar otra gráfica deben volver a HOME y dar [ENTER] sobre [PARABOL1 ( )] (Ver Anexo E: 15 de Julio de 2009 en T1: [50:52 a 55:44 min.]).

- *El momento tecnológico – teórico*, el *momento de institucionalización y el momento de evaluación:* a medida que la profesora explica cómo usar las técnicas CAS realiza las preguntas de la tarea 4.1. Los estudiantes responden y junto a la profesora acuerdan las respuestas, posteriormente cada uno las escribe en sus hojas de trabajo. A pesar de que estas tareas se hicieron entre todos, para los estudiantes no fueron claras algunas de las respuestas y por tanto presentan errores en lo escribieron en sus hojas de trabajo.

  Para la familia $a(x-1)(x+1)$ se dice que tienen en común los ceros y que se diferencian en la concavidad (ellos hablan de ascendentes y descendentes), de la amplitud de la abertura y en sus vértices. En las explicaciones la profesora introduce el término eje de simetría y vértice (Ver Anexo E: 15 de Julio de 2009 en T1: [38:20 a 42:37 min.]).

  Un segundo momento de institucionalización y evaluación se da cuando los estudiantes ven las gráficas de la familia $ax^2 + x + 6$ y determinan sus diferencias y semejanzas. Dicen que todas las gráficas cortan al eje y en 6 y que se diferencian en su concavidad y la abertura. La profesora les pregunta cuáles de las anteriores polinomios son factorizables, los estudiantes determinan que son las que tiene cortes con el eje x o ceros, en este caso son las parábolas que tienen el valor a negativo. Desde la primera familia de parábolas, la profesora ha enfatizado que si el valor de a es negativo determina una parábola descendente y si el valor de a es positivo la parábola es ascendente (Ver Anexo E: 15 de Julio de 2009 en T1: [46:56 a 50:51 min.]).

  El tercer momento y último de institucionalización y evaluación de las tareas 4.2 y 4.3 no se dio, el tiempo de la clase terminó sin que los estudiantes hubieran finalizado su trabajo.

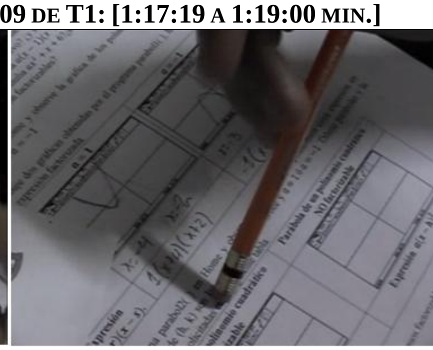
- *El momento de trabajo de la técnica y el momento tecnológico – teórico*: el primer momento de trabajo de la técnica se da en la graficación en CAS de la familia $ax^2 + x + 6$. Los estudiantes ven muchas parábolas porque no desactivaron la anterior familia y otros han digitado la expresión $a(x^2 + x + 6)$ por lo que no ven en sus pantallas lo que la profesora muestra con el proyector y el viewscreen (Ver Anexo E: 15 de Julio de 2009 en [42:38 a 46:55 min.]).

  El segundo momento del trabajo de la técnica y el momento tecnológico – teórico se da en las tareas 4.2. y 4.3. La técnica CAS es la activación de [PARABOL1 ( )] y [PARABOL2 ( )], el uso de ambos programas es similar, pero lo que genera es diferente, el primer programa dibuja parábolas con ceros mientras que el otro muestra parábolas con y sin ceros (momento del trabajo de la técnica). Una vez los estudiantes hallan la parábola para un valor de a, con las características determinadas, la dibujan y deben escribir su forma factorizada o canónica. Finalmente los estudiantes deducen las características de la gráfica de un polinomio factorizable y no factorizable (momento tecnológico - teórico).

En cuanto a los errores en la ejecución de los programas, en la mesa 3 una estudiante digitó [PARABOLA1 ( )], por lo que no veía el resultados de su ejecución, pero sus compañeros rápidamente descubrieron el error (Ver Anexo E: 15 de Julio de 2009 en T1: [58:47 a 1:00:24 min.]). Otra de las dificultades que surgieron con los programas se da cuando daban [ENTER] porque obtenían una nueva gráfica y no podían retornar a la anterior. Algunos estudiantes no lograban obtener la parábola deseada y debieron dar muchas veces [ENTER] (Ver Anexo E: 15 de Julio de 2009 en T1: [1:00:25 a 1:01:52 min.]).

En cuanto a la manera de hallar la expresión factorizada de una parábola, se muestra en la Tabla 33 cómo los estudiantes de la mesa 5 la deducen.

Tabla 33. Obtención de la forma factorizada de un polinomio dada su gráfica por los estudiantes de la mesa 5.

DIÁLOGO DEL 15 DE JULIO DE 2009 DE T1: [1:17:19 A 1:19:00 MIN.]
  La profesora investigadora le solicita a Camilo que le explique a Jefferson como determinar la expresión algebraica. Camilo: primero colocas a, luego abrís paréntesis y escribís x. Qué valor le tienes que poner a x para que de uno. Jefferson: qué le tiene poner a x. Camilo: para que al hacer la operación de cero. Jefferson: menos uno. Camilo: entonces este se coloca negativo, entonces 1 menos 1, da cero. Cuando acá es positivo, entonces el signo que se coloca acá es negativo y cuando acá es negativo entonces el signo que se coloca positivo. Para que de eso. Profesora investigadora: si este positivo aquí como quedaría (señala el valor de r positivo). Camilo: $x - 1$ Profesora investigadora: si este es negativo. Camilo: $x + 1$ Felipe: profes, porque la profesora me dijo que así no se podía, que pusiera $x = -1$ Camilo: da lo mismo Profesora investigadora: podemos escribir $x = 1$ o $x = -1$ o en forma de pareja ordenada.

DIÁLOGO DEL 15 DE JULIO DE 2009 DE T1: [1:17:19 A 1:19:00 MIN.]
Análisis: los factores se determinan al hallar los ceros, si el cero de la parábola es 1 entonces el valor de r sería menos 1 porque $1-1=0$ y el binomio factor sería $(x-1)$. Si el cero es -2, entonces el factor es $x+2$ porque $-2+2=0$. Lo hallado es un binomio de la forma $(x \pm r)$, donde para hallar r se sustituye x por el valor del cero y si iguala a cero, si el cero es -3 entonces $-3 \pm r = 0$ y de allí se deduce r. Sin embargo los estudiantes no escriben ecuaciones, hallan r con sumas o restas mentalmente. Camilo llega a la conclusión que si el cero es positivo se resta el valor del cero a x y si es negativo se le suma el valor del cero a x.

En cuanto a la manera de hallar los factores, la profesora les ha explicado a las mesas 1 y 6 como obtenerlos a partir de los ceros (Ver Anexo E: 15 de Julio de 2009 en T1: [1:01:53 a 1:04:24 min.] y [1:05:01 a 1:06:14 min.]) y casi todos los estudiantes han escrito la expresión factorizada de manera correcta de sus parábolas (Ver Tabla 34). Sin embargo hallar los binomios no es todo, los estudiantes deben de saber que son los factores de un polinomio cuadrático que se puede escribir como $a(x-r)(x-s)$**,** donde a solo tiene dos opciones: 1 o -1.

En relación a las parábolas que son factorizables algunos estudiantes vinculan los cortes del eje x con los ceros y los ceros con los factores, por lo que las parábolas de polinomios no factorizables son las que no cortan al eje x. Sin embargo para hallar la expresión canónica de estos polinomios no fue fácil, solo Camilo intento hallarla con la ayuda de la profesora al sustituir los valores de las coordenadas del vértice, pero al inicio no sabía cuál era el vértice.

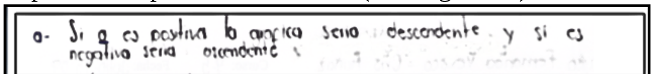
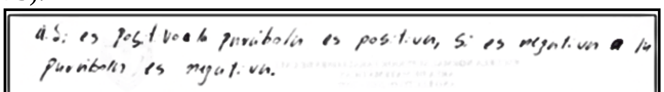
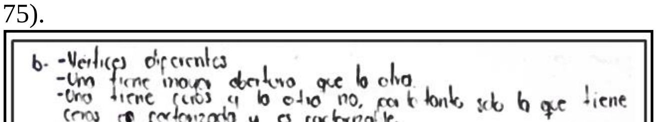
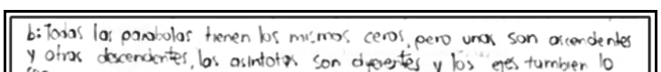
Dado que el tiempo de la clase finalizaba y no había posibilidades de realizar otra sesión porque había un receso de vacaciones, la profesora les solicita a los estudiantes que den respuesta a la pregunta 4.3.b., que es la que concluye la situación 4. Quizás por el tiempo no todos lograron dar las expresiones algebraicas de las parábolas de la tarea 4.3.a. A diferencia de las otras situaciones, los estudiantes siguieron la sugerencia de que cada pareja o grupo debían de tener parábolas diferentes a los compañeros de la mesa.

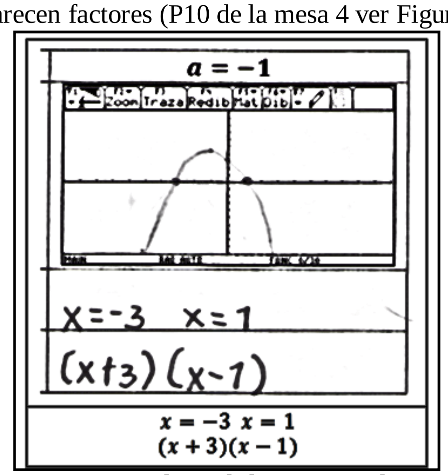
En cuanto a las tareas dadas a los estudiantes, sería conveniente cambiar la pregunta 4.1.d. que fuera más específica, *¿cuáles de los polinomios de la familia $ax^2 + x + 6$ son factorizables? Determine su forma factorizada,* porque las parábolas de la primera familia ya estaban escritos de la forma factorizada y no había mucho que decir.

En las tareas se presenta un error, no se da la escritura de la forma canónica adecuada, no es $a(x-h)^2 - k$ sino $a(x-h)^2 + k$. Esto ya ha sido modificado en las tareas presentadas en este trabajo, pero en la experimentación los estudiantes recibieron la expresión inadecuada y como no se dio el momento de institucionalización y evaluación no se descubrió el error.

En relación a los resultados obtenidos a partir de las hojas de respuesta de los estudiantes, se presenta en la Tabla 34 un resumen de la situación 4.

Tabla 34. Resumen de los resultados de la situación 4: ***Parábolas*****.**

A. TAREA	B. RESULTADOS	C. ALGUNAS RESPUESTAS INESPERADAS
4.1.a.	La mayoría de los estudiantes determinan que el a influye en la concavidad de la parábola, si a es positivo la parábola asciende y si a es negativo la parábola desciende. Los estudiantes de la mesa 1, no dan respuesta a ninguna de las preguntas de la sección 4.1.	En la mesa 3, dos parejas determinan el efecto contrario para el coeficiente a: si a es negativo la parábola asciende y si a es positivo la parábola desciende (Ver Figura 72).  **a. Si a es positiva la gráfica seria descendente y si es Negativa seria ascendente.** **Figura 72. Respuesta de P7 y P8 de la mesa 3 en la tarea 4.1.a.** Algunos dicen que las parábolas son positivas o negativas en relación al mismo signo del coeficiente a, pero no es claro a que se refieren al darle signos a las parábolas (Ver Figura 73).  **a. Si es positiva *a* la parábola es positiva, si es negativa *a* la parábola es negativa.** **Figura 73. Respuesta de los estudiantes de la mesa 4 en la tarea 4.1.a.**
4.1.b	Algunos estudiantes solo mencionan diferencias, que las parábolas ascienden y otras desciende, que sus vértices y aberturas son diferentes (mesas 3 y 7). Otros indican que tienen en común puntos de corte o ceros (mesas 2, 4 y 5).	Los errores se dan al determinar falsas diferencias entre las parábolas, como sus ceros, ejes y asíntotas (Ver Figuras 74 y 75).  **b. Vértices diferentes** **- Una tiene mayor abertura que la otra** **- Una tiene ceros y la otra no, por tanto solo la que tiene ceros es factorizada y es factorizable** **Figura 74. Respuesta de P8 de la mesa 3 a la tarea 4.1.b.**  **b. Todas las parábolas tienen los mismos ceros, pero unas son ascendentes y otras descendentes, las asintotas son diferentes y los ejes tambien lo son.** **Figura 75. Respuesta de los estudiantes de la mesa 2 en la tarea 4.1.b.**
4.1.c	Los estudiantes que responden esta pregunta coinciden en determinar que	

A. TAREA	B. RESULTADOS	C. ALGUNAS RESPUESTAS INESPERADAS
	todas las parábolas se cortan en el mismo punto en el eje y. Algunos determinan diferencias como la concavidad, los vértices, la abertura y que algunas parábolas tienen ceros y otras no. P6 no da respuesta a 4.1.c ni a 4.1.d.	
4.1.d	En relación a los polinomios que son factorizables, algunos determinan que son todos cuyas gráficas que cortan el eje x (mesas 3, 4 y 7) o los que tienen ceros (P4 de la mesa 2 y mesa 4). Otros diferencian entre las dos familias, aclaran que los de la familia $a(x-1)(x+1)$ ya están factorizados, mientras que los de la familia ax^2+x+6 se tendrían que indagar (mesa 5 y 6) o de estos son solamente factorizables los polinomios de las parábolas cóncavas hacia abajo, las que cortan al eje x (mesa 7).	
4.2.a. Tabla 22	Todos los estudiantes lograron determinar la expresión factorizada de la gráfica obtenida con [PARABOL1 ( )] que coincidía con los valores de los ceros del dibujo. En las mesas todos obtuvieron gráficas diferentes a excepción de P16 y P11 que tenían iguales todas las respuestas.	En la obtención de la expresión factorizada del polinomio, surgieron algunos errores, como la omisión de $a=-1$ (mesa 2, P7, P10 y P12, ver Figura 76), factores que no corresponde (P15 de la mesa 7, ver Figura 78) o binomios que no parecen factores (P10 de la mesa 4 ver Figura 77).  **Figura 76. Respuesta de P7 de la mesa 3 en la tarea 4.2.a.**

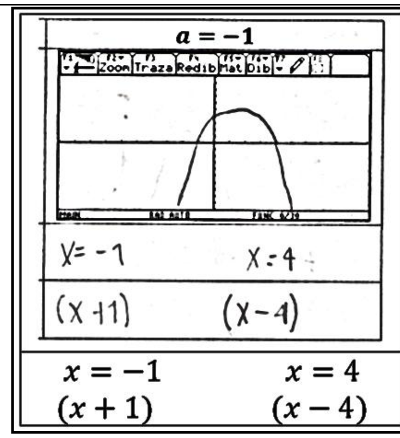
<table>
<tr><th>A. TAREA</th><th>B. RESULTADOS</th><th>C. ALGUNAS RESPUESTAS INESPERADAS</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>


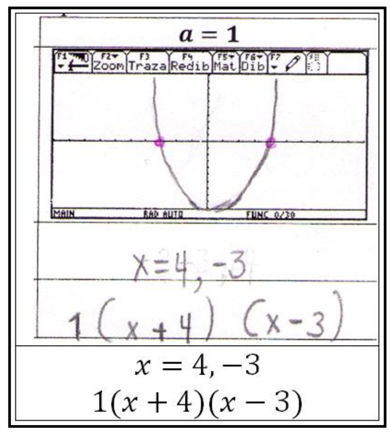
Figura 77. Respuesta de P10 de la mesa 4 en la tarea 4.2.a.


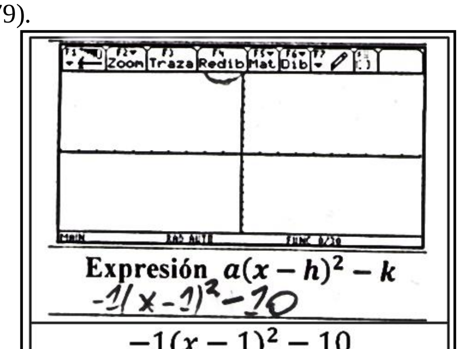
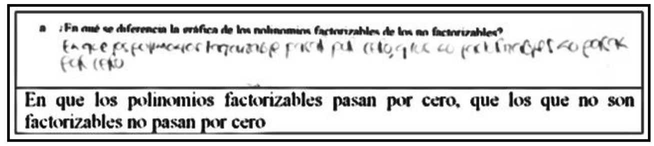
Figura 78. Respuesta de P15 en la mesa 7 en la tarea 4.2.a.
</td></tr>
<tr><td>4.3.a.
Tabla 23</td><td>La mayoría de los estudiantes realizaron las dos gráficas de polinomios factorizables y no factorizables (P4, P8, mesas 1, 6 y 7). Algunos solo mostraron la gráfica del polinomio factorizable (P5 y P12) y otros la de la no factorizable (P7 y P16). Unos cuantos dieron la expresión algebraica del polinomio factorizable (P9, P11, P14, mesa 6 y 7) y solo una pareja la expresión del polinomio no factorizable (P11).</td><td>Aunque P11 fue el único grupo que determinó la expresión algebraica de la parábola no factorizable, existen algunos errores en su obtención. El valor de a no es negativo porque la parábola es cóncava hacia arriba y h no es 10 sino 9, además la expresión general correcta es $a(x - h)^2 - k$ (Ver Figura 79).


Figura 79. Respuesta de P11 de la mesa 5 en la tarea 4.3.a.
</td></tr>
<tr><td>4.3.b.</td><td>Casi todos los estudiantes afirman que los polinomios factorizables son aquellos cuyas gráficas cortan al eje x</td><td>En la respuesta de P14 dicen que los polinomios no factorizables no pasan por cero, mientras que los factorizables pasan por cero. En este caso la respuesta es</td></tr>
</table>

A. TAREA	B. RESULTADOS	C. ALGUNAS RESPUESTAS INESPERADAS
	(P13, mesas 3, 5 y 7), tienen ceros (mesa 2) o dan ambas respuestas (mesas 1 y 4).	ambigua, porque en el plano cartesiano los puntos se dan en parejas ordenadas o se habla de rectas como $y = 0$ o el eje x (Ver Figura 80).  **Figura 80. Respuesta de P14 de la mesa 6 en la tarea 4.3.b.**

En relación a los resultados se observa que es fácil para los estudiantes obtener la expresión factorizada de los polinomios porque desde la segunda situación se empezaron a establecer los vínculos entre los ceros, los cortes con el eje x y los factores lineales, pero no pasa lo mismo con la forma canónica, previamente no se había trabajado cómo hallar los valores del vértice, ni qué era el vértice, la tarea se introduce prematuramente.

Esto daría elementos para diseño de una siguiente situación que conecte las formas desarrolladas, factorizadas y canónicas de manera que se pueda llegar a concluir que todos los polinomios se pueden escribir en las formas desarrollada y canónica pero no todos en la forma factorizada, que dichas expresiones son equivalentes y cada una arroja una información diferente en relación al gráfico. Además a partir de los datos de la parábola se puede obtener el valor de a y que por tanto todo polinomio con cortes en x se puede factorizar con la su gráfica en un CAS y técnicas L/P, nuevamente se da la complementariedad de las técnicas.

En relación a la praxeología matemática propuesta en la Tabla 11, todas las técnicas se usaron: la elaboración de gráficos en Y=EDITOR y GRAPH y la activación de las parábolas al azar en HOME. En cuanto tecnologías, las tareas hicieron un llamado al teorema del factor, definición de parábola y forma factorizada de un polinomio. Esto indica que la praxeología matemática propuesta para esta situación se generó.

4.7. Consideraciones finales de los análisis de los resultados.

Una vez finalizado el análisis de los resultados en relación a lo planeado, dicha confrontación refleja algunos aspectos que no fueron considerados *a priori* y sólo en la práctica se ven. Esto es lo que hace que las praxeologías, matemática y didáctica, se nutran y sea necesaria una revisión que genere cambios en su constitución. En la presentación de los resultados de cada una de las situaciones se encuentran recomendaciones para renovar estas praxeologías.

En cuanto al uso de la lengua natural, en todas las situaciones hay preguntas que necesitaban este objeto ostensivo. Si bien, los estudiantes se arriesgaron a hablar y escribir de las matemáticas, esta tarea no es fácil, porque necesitan de una lengua natural especializada. Es por ello que algunos estudiantes consultan sus cuadernos y textos escolares para usar los términos adecuados y dar cuenta de lo que perciben o entienden.

Referente a las técnicas CAS y L/P, se observa que la complementariedad de éstas propende al desarrollo de técnicas instrumentadas porque al develar lo que hace la calculadora con el comando [ENTER], al darle los elementos de entrada para que funcione el comando [POLYEVAL( )] o al seleccionar una gráfica generada por [PARABOL1( )] y [PARABOL2( )] correspondiente a algunas condiciones dadas, existen elementos conceptuales que determinan lo que se debe hacer.

A diferencia de otras investigaciones, en el desarrollo de las tareas se necesita que los estudiantes previamente hayan trabajado las técnicas L/P porque el propósito es usarlas para entender o poder usar las técnicas CAS que son nuevas para ellos. No se descarta que en el uso de ambas se dé mutuamente una mejoría, en algunos episodios se observa como los estudiantes rectifican sus resultados en L/P al ver los resultados de aplicar una técnica CAS. De alguna manera la complementariedad de ambas técnicas lleva al surgimiento de una tecnología que da cuenta en parte, de qué es lo que hace esta técnica y para qué sirve, esto propende al mejoramiento del uso de las técnicas.

Respecto a los momentos de estudio, presentados en los análisis *a priori* por separado y en un orden, la experimentación refuta la rigidez con la que se plantearon, porque en ocasiones fue difícil separar algunos momentos que ocurren simultáneamente y en un orden no lineal como el momento del trabajo de la técnica y el momento tecnológico-teórico que en algunos casos se dan conjuntamente o los momentos de exploración que no solamente se dan al inicio de la situación.

En cuanto al uso de las técnicas CAS, algunos comandos fueron de fácil uso como el [ENTER] y la realización de gráficos, las respuestas muestran pocos los errores. Los comandos de mayor exigencia fueron el [POLYEVAL( )] y el [VALUE] porque existe una sintaxis de entrada que determina al polinomio como un vector y porque los ceros los relaciona con punto en el plano cartesiano. Los comandos [POLYEVAL( )] y el [VALUE] lleva a un cambio de representación matemática para su uso (conversión).

En cuanto a las técnicas L/P, la de mayor dificultad son las relacionadas con la factorización de polinomios y la ejecución de una regla vinculada a la forma de la expresión algebraica, muchos estudiantes no distinguían qué técnica seleccionar y cómo usarla. Mientras que para realizar los gráficos en L/P no tuvieron inconvenientes en determinar algunas variables visuales que facilitaban hacer un dibujo semejante al obtenido en la calculadora simbólica.

El estudio llevó a los estudiantes a relacionar la expresión algebraica de la forma factorizada con la gráfica, esta relación se da al vincular la factorización a los ceros y el estudio de los cambios del parámetro en la expresión $a(x-r)(x-s)$. Esta tarea no fue difícil porque las situaciones apuntaban a reconocer los ceros con los factores. Mientras que en la tarea de hallar la expresión canónica dada la gráfica, muchos no llegaron a obtener la expresión algebraica, esto se debe a que no se establecieron los vínculos entre las unidades significativas de las expresiones algebraicas con las variables visuales de la gráfica, esto muestra que la aprehensión global cualitativa no se da de *ipso facto* por el uso de la calculadora sino que depende de las tareas propuestas.

Finalmente el desarrollo de las praxeologías, matemática y didáctica, deja ver diversas relaciones de los conocimientos matemáticos que se pueden establecer en la factorización de polinomios cuando se estable los vínculos con los ceros o raíces, se abarcan más elementos prácticos y teóricos Este vínculo sólo se devela al realizar el barrido histórico – epistemológico, trae consigo una tecnología como el teorema del factor y el TFA, que permanecen ocultas cuando la factorización de polinomios se ve exclusivamente en el tratamiento sintáctico de los polinomios

5. CONCLUSIONES

Es en este capítulo del trabajo donde se relacionan lo teórico con lo práctico, en donde se confrontan las expectativas con lo realizado y donde surgen nuevos planteamientos en Educación Matemática que contribuyen a la investigación relacionada con la integración de TIC y en particular de los CAS en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel de la básica secundaria en Colombia.

Uno de los propósitos implícitos es fomentar a nivel local y nacional las investigaciones o experiencias de aula relacionadas con las diversas actividades del álgebra escolar que propone Kieran (2003) en la integración de CAS. En particular estas praxeologías, matemática y didáctica, muestran que es posible realizar actividades transformacionales teniendo presente los planteamientos de una matemática experimental y que la factorización de polinomios se puede trabajar desde las otras actividades como la generalización o el metanivel global, se elimina su encasillamiento como una tarea exclusiva de la actividad transformacional.

En cuanto a la pregunta de investigación, lo realizado lleva a determinar unas posibles praxeologías, matemática y didáctica, relativamente completas alrededor de la factorización de polinomios en un ambiente L/P y CAS que propenden al desarrollo de técnicas instrumentadas y a la coordinación de diferentes objetos ostensivos. Aunque ya existen praxeologías, matemáticas y didácticas, alrededor de la factorización de polinomios en ambientes L/P y CAS (Ver APTE, s.f.), las praxeologías propuestas tienen una mirada diferente a las existentes, se da énfasis a las técnicas instrumentadas que surgen en la complementariedad de la técnicas L/P y CAS y en coordinación con los diferentes objetos ostensivos.

Inicialmente las investigaciones en Educación Matemática perfilan un camino en el cual las técnicas L/P y CAS pueden trabajarse conjuntamente en la constitución de praxeologías matemáticas y didácticas. Esta postura contradice la concepción de que las técnicas CAS llevan a desuso de las técnicas L/P, sino que al contrario muestran que la vinculación de ambas técnicas genera integración de TIC en el aula de matemáticas.

Una de las hipótesis de investigación es que la complementariedad de las técnicas L/P y CAS no solo fomentan la integración de TIC, sino que generan el desarrollo de técnicas instrumentadas. Este trabajo comprueba la hipótesis, porque es en las relaciones de estas técnicas dónde surge lo conceptual, en ocasiones se aprovecha la inmediatez de la técnica CAS para develar lo que está detrás de la respuesta, en otros casos la técnica L/P guía y determina el uso de la técnica CAS. Esto hace que el uso de CAS no sea solamente presionar botones y ver resultados, sino entender lo que éste hace y lo que significa matemáticamente el resultado. De esta manera las técnicas L/P no desaparecen y se convierten en el puente de integración de los CAS, dado que son las técnicas de mayor uso en el aula.

Frente a la ejecución de la técnica instrumentada, en cada situación se presentan tareas que pretenden develar lo conceptual detrás de lo práctico. Es la técnica la que permite establecer los vínculos entre lo práctico y lo teórico, resaltándose su valor pragmático y epistémico. Estas tareas son preguntas que le siguen a las tablas que organizan los resultados de las técnicas instrumentadas.

Sobre la mirada de los artefactos en la construcción de los instrumentos, la TAD es insuficiente para dar cuenta de la dimensión instrumental, razón por la cual se mira la génesis instrumental. Por otra parte el papel de las técnicas instrumentadas extiende los lazos de la TAD con la génesis instrumental. Además los estudios relacionados con la integración de CAS al aula de matemáticas reafirman que es posible tomar en cuenta ambas aproximaciones, es este trabajo no ajeno a estas posturas.

Al constituirse estas praxeologías es necesaria una metodología que guíe el proceso de investigación. Por tanto se toman los referentes de una micro - ingeniería didáctica. La TAD se convierte en el marco teórico general que junto a la génesis instrumental da cuenta de la dimensión didáctica y cognitiva de los análisis preliminares y delimitan los análisis *a priori* y *a posteriori*.

En lo concerniente a la dimensión histórica – epistemológica de los análisis preliminares, se ha mencionado que las relaciones entre la factorización y los ceros de un polinomio fortalecen los componentes prácticos y teóricos de la praxeología matemática que aquí se constituye. El estudio de los ceros lleva a considerar otras técnicas para factorizar polinomios que usan diferentes objetos ostensivos, ya que por el teorema del factor, con tener los ceros se pueden hallar los factores de un polinomio. Así que la praxeología matemática se robustece, generalizándose la factorización como método para hallar la solución de cualquier ecuación y es la búsqueda de los ceros un método para hallar la factorización de un polinomio de grado n. En las praxeologías matemáticas que circulan en los textos escolares analizados, la factorización es un método para hallar los ceros, pero no se da el caso contrario, vinculo que permitió generar diversas actividades del álgebra escolar en relación a la factorización de polinomios.

Respecto a la fase de diseño y análisis *a priori* de la micro-ingeniería didáctica, fue fundamental describir como se presentan los indicadores de una praxeología local relativamente completa, así mismo como determinar los posibles momentos de estudio, las posibles soluciones, fenómenos didácticos y procesos de instrumentalización. Confrontados los análisis *a priori* con los de los resultados se observa que algunos aspectos se dieron tal como se esperaba, mientras que otros surgieron inesperadamente, pero dicha confrontación sirve para nutrir las praxelogías, matemática y didáctica.

Otra característica de las praxeologías es que la factorización de polinomios es un proceso para hallar una expresión equivalente. En las praxeologías habituales con L/P es usual que la factorización se trabaje desde la manipulación de las expresiones algebraicas, desde reglas particulares aplicadas al tipo de polinomio. No ajena a esta relación, la primera situación busca conocer las habilidades de los estudiantes en dichas técnicas L/P, además del reconocimiento y diferenciación de las diversas formas simbólicas equivalentes de un polinomio.

Paulatinamente las técnicas L/P para factorizar y desarrollar un polinomio se aproximan al estudio de los gráficos, este vínculo genera otra manera de determinar si un polinomio es o no es factorizable, si tiene ceros o no tiene, se da paso a los problemas que tuvieron los matemáticos al buscar otros métodos diferente a los radicales y estudiar las raíces de una ecuación.

De esta manera en la praxeología matemática ingresan diferentes objetos ostensivos. Se inicia desde lo habitual con las expresiones algebraicas, se pasa a lo numérico y finalmente a las gráficas, la lengua natural es transversal y se constituye en el medio de explicación y argumentación. Al abarcar diversos objetos ostensivos se generan otras técnicas para factorizar polinomios.

En cuanto a los resultados, se reafirma que es difícil para los estudiantes ejecutar las técnicas L/P para factorizar, aunque lean la técnica seguir el procedimiento no fue fácil, porque son diferentes técnicas en relación a las características de un polinomio. Pero al tener otras técnicas para factorizar un polinomio como las relacionadas con los ceros, le permite al estudiante conocer otras técnicas más generales porque son independientes de la forma del polinomio, como el uso del gráfico y la fórmula cuadrática para los polinomios cuadráticos.

En los resultados se observan que los estudiantes al relacionar los ceros y su gráfica determinan que cuando no hay cortes con el eje x es porque no hay ceros reales. Así que concentran sus conjeturas a la forma de la gráfica del polinomio, sin detenerse en mirar si la gráfica corresponde al polinomio indagado, por eso consideran que todas las rectas son las gráficas de los polinomios lineales.

Algunas tareas dan pie al estudio de las relaciones de los coeficientes de un polinomio y de sus formas factorizada, desarrollada y canónica con la gráfica. Se fomenta una aprehensión global cualitativa, manifestada cuando los estudiantes seleccionan la gráfica en relación a las características dadas, relatan los cambios en las variables visuales de las gráficas en relación a las unidades significativas de las expresiones algebraicas de los polinomios y hallan la expresión algebraica de las parábolas.

En términos generales las praxeologías, matemática y didáctica, invitan a los estudiantes a usar diversas técnicas instrumentadas y objetos ostensivos, construyéndose una teoría alrededor de la factorización de polinomios, como la relacionada con el teorema del factor y el TFA, que son inexistentes o implícitas en las praxeologías puntuales o locales no relativamente completas que circulan en la escuela.

Otro punto a indagar en la constitución de posibles tareas son los comandos [FACTOR ( )], [CFACTOR( )], [EXPAND( )], [SOLVE( )] de la aplicación HOME, [ZEROS] en la aplicación GRAPH y otras aplicaciones como POLYNOMIAL ROOT FINDER, relacionadas al estudio de los ceros y la factorización de polinomios. De igual manera se puede proponer praxeologías matemáticas en relación a polinomios de grado mayor a tres y de tecnologías como la regla de los signos de Descartes. Así que existen otras posibilidades de praxeologías, matemática y didáctica, con el uso del CAS de las calculadoras simbólicas y L/P por proponer.

En cuanto al conjunto de situaciones, la última deja abierta la brecha de continuar la indagación de las relaciones de los polinomios con su forma canónica y la gráfica. Así como establecer la equivalencia entre la forma canónica, factorizada y desarrollada de un polinomio cuadrático.

Es interesante evidenciar con hechos que algunas ideas frente al uso de los CAS como el reconocimiento de las formas de escritura simbólica de un polinomio ya no va a ser necesarias (Cedillo, 2006) se refuta cuando se proponen tareas como hallar la expresión algebraica dada la gráfica, en donde se da la relación entre las variables visuales y las unidades significantes de las expresiones algebraicas para desarrollar una aprehensión global cualitativa y en donde la distinción de las formas simbólicas de polinomios es relevante.

En este trabajo quedan las siguientes preguntas abiertas:

1. En relación a los textos escolares: ¿Cuáles serían las características de los textos escolares para la enseñanza de las matemáticas en bachillerato que integren ambientes de L/P y CAS?
2. En cuanto a la complementariedad de artefactos, en este trabajo se usaron el L/P y el CAS de las calculadoras simbólicas TI-92 PLUS, sin embargo existen otros CAS, programas o artefactos que permitirían estudiar la factorización de polinomios como el Apluxis, el GeoGebra, la Caja de polinomios, Alnuset, Wiris entre otros, por lo que surgen las siguientes preguntas: ¿Cuáles artefactos permitirían el estudio de la factorización de polinomios? ¿Cuáles de estos artefactos posibilitarían un ambiente complementario de técnicas? ¿Cómo son las praxeologías, matemática y didáctica, que tomen en consideración la complementariedad de técnicas?
3. Respecto a la génesis instrumental: ¿Cuál podría ser la gestión didáctica del profesor en la construcción de instrumentos cuando se toma en consideración las técnicas L/P y CAS?
4. Dado que la experimentación solo fue de tres semanas, surge la siguiente pregunta: ¿Qué caracterizaría una propuesta curricular de un año lectivo con un ambiente L/P y CAS?
5. Respecto a las praxeologías didácticas, ¿Cuáles son las tareas, técnicas y teorías didácticas del profesor en un ambiente de L/P y CAS?
6. En cuanto a las técnicas CAS, ¿cuáles son las tecnologías CAS que pertenecen al universo interno de la calculadora y determinan limitaciones o posibilidades del uso de las técnicas CAS?

Finalmente este trabajo de investigación nutre la formación de la investigadora y de aquellos interesados en estas problemáticas, por otra parte espera ser un referente para futuras investigaciones en el ámbito de la educación secundaria.

BIBLIOGRAFÍA

Acevedo, M. & Falk, M. (1997). *Recorriendo el álgebra. De las solución de ecuaciones al álgebra abstracta.* Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Acosta, M. (2005). Geometría experimental con Cabri: Una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática*, 17 (3), 121- 140.

Acosta, M. (2008). *Démarche expérimentale, validation, et ostensifs informatisés. Implications dans la formation d'enseignants à l'utilisation de Cabri en classe de géométrie.* (Tesis de doctorado no publicada). Université Grenoble 1 Joseph Fourier, Grenoble, Francia.

Aleksandrov, A., Kolmogorov, A. & Laurentiev, M. (1994). *La matemática 1: su contenido, métodos y significado.* (M. López, Trad.). Madrid, España: Alianza Universidad.

Álvarez, C. (2000). Descartes lector de Euclides En: *Descartes y la ciencia del siglo XVIII* (1ra edición). México D.F., México: Siglo Veintiuno editores.

Arce, J., Ramírez, M., Malagón, R., Arboleda, L., Torres, L. & Valoyes, L. (2004). *Iniciación al álgebra escolar: situaciones funcionales, de generalización y modelación.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

APTE (s.f.). Recuperado el 7 de noviembre de 2008 de http://www.math.uqam.ca/APTE

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En: M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Artigue, M. (1996). Por una visión didáctica sobre la utilización de los instrumentos del cálculo formal en la enseñanza de las matemáticas. *Enseñanza de las Matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas* (pp. 223 - 240). (P. Ferreras-Soto Trad.).Paris, Francia: Université París VII et IUFM de Reims.

Artigue, M. (1997). Le logiciel «Derive » comme révélateur de phénomènes didactiques lies a l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics*, 33 (2), 133-169.

Artigue, M. (2002a). L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire: les leçons de quelques ingénieries didactiques. En: D. Guin & L. Trouche (eds.), *Calculatrices Symboliques. Transformer du travail informatique : un problème* *didactique* (pp. 277- 349). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage, éditions.

Artigue, M. (2002b). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, 245–274.

Artigue, M., Laborde, C., Lagrange, J-B. & Trouche, L. (2003). Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. En: A. J. Bishop, M. Clements, J. Kilpatrick & K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education*, (pp. 239–271). Gran Bretaña: Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M. (2007). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 6 (8), 13-33.

Assude, T. & Gelis, J. (2002). La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics*, 50 (3), 259-287.

Azcárate, C. & Espinoza, L. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de "limite de función": una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las ciencias*, 18 (3), 355-368.

Balacheff, N., & Kaput, J. (1996). Computer-Based learning environments mathematics. En: A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds), *International Handbook of Mathematics Education* (pp.469-501). Holanda, Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Bartolini Bussi, M. (2005). When classroom situation is the unit of analysis: the potential impact on research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 59, 299–311.

Bosch, M. & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19 (1), 77-124. Recuperado el 13 de noviembre de 2009 de : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf

Bosch, M., Chevallard, Y. & Gascón, J. (2000). *Cuadernos de Educación. Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje* (2da Edición). España, Barcelona: Editorial ICE-HORSORI.

Bosch, M. (2003). Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. En N. De los Ángeles, C. Rodríguez, L. Contreras & J. Carrillo (comp.), *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15- 28). Huelva, España: SEIEM

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. (Tesis de doctorado no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24 (2), 205-250.

Bosch, M. & Gascón, J. (2001). *Las prácticas docentes del profesor de matemáticas*. Recuperado el 10 de octubre de 2010 de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/almeria/Practicas_docentes.PDF

Bosch, M. & Gascón, J. (2004). *La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos.* Recuperado el 23 de marzo de 2009 de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/madrid_2004/gascon_unidad_analisis.doc

Brousseau, G. (2002). Les grandes dans la scolarité obligatoire. En J-L. Dorier, M. Artaud, M., Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (eds.), *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques – Corps – 21-30 Août* (pp. 331-348). France: La pensé Sauvage – Editions.

Brousseau, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas? *Enseñanza de las ciencias*, 8(3). Recuperado el 20 de junio de 2011 de http://www.unige.ch/fapse/clidi/textos/Didactica1-Brousseau.pdf

Camacho, M., Hernández, J., Palarea, M. & Socas, M. (1996). *Iniciación al álgebra. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Madrid, España: Editorial síntesis.

Casalderrey, F. (2000). *Cardano y Tartaglia: Las matemáticas en el renacimiento italiano.* Madrid, España: Nivola libros y ediciones.

Cedillo, T. (2006). La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Los sistemas algebraicos computarizados. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11 (28), 129-153. Recuperado el 29 de octubre de 2006 de http://www.comie.org.mx/v1/revista/portal.php?criterio=ART00007&idm=es&sec=SC03&sub=SBB

Chamorro, M. (2003). Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas. En Chamorro, M., Belmonte, J., Llinares, S., Ruíz, M. & Vecino, F. (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas para primaria* (pp. 69- 94). Madrid, España: Pearson Educación.

Charbonneau, L. (1996). From Euclides to Descartes: algebra and its relation to geometry. En: N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (eds.), *Approaches to Algebra* (pp.15-38). Netherlands, Alemania: Kluwer Academics Publisher.

Chevallard, Y. (2002). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. (R. Barroso y T. Fernández, Trads.) *Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas,* 3(2), 1-33. Recuperado el 26 de Noviembre de 2006 de http://www.uaq.mx/matematicas/redm/ articulos.html?1005

Chica, Á. (2001). *Descartes: Geometría y Método*. Madrid, España: Nivola libros y ediciones.

Collette, J.P. (2000). *Historia de las matemáticas (4ta ed.)*. (A. Casal, Trad.) Tomo 2. México D.F, México: Siglo Veintiuno Editores.

Collette, J. P. (2002). *Historia de las matemáticas (2da ed.)*. (P. González, Trad.) Tomo 1 México D.F, México: Siglo Veintiuno Editores.

Dávila, G. (2003a). El desarrollo del álgebra moderna. Parte II: El álgebra de las ecuaciones. *Apuntes en Historia de las Matemáticas*, 2 (1), 27- 58. Recuperado el 15 de agosto de 2008 de http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/2-1-4-algebra.pdf

Dávila, G. (2003b). El desarrollo del álgebra moderna. Parte III El surgimiento del álgebra moderna. *Apuntes en Historia de las Matemáticas*, 2 (2), 38-78. Recuperado el 15 de agosto de 2008 de http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/2-2-4-algebra3.pdf

Demana, F. & Waits, B. (2000a). *El Papel de la Computadora Portátil El álgebra Simbólica en la Educación Matemática en el Siglo XXI: ¡Un llamado para la Acción!* Recuperado el 11 de abril de 2003 de http: // www.ti.com/calc/latinoamerica/papel.htm - 40k demana

Demana, F. & Waits, B. (2000b). Computadores en el salón de clase: una mirada hacia al futuro En: P. Gómez & B. Waits (Eds.), *Papel de las calculadoras en el salón de clase*. (pp.195-201). Bogotá, Colombia: Una empresa Docente.

Descartes, R. (s.f.) *La geometría*. (G. Quintás Trad.). Bogotá, Colombia: Círculo de Lectores.

Díaz, M. (1995). *Sobre la simbolización en el álgebra. Aplicación al proceso de aprendizaje en las desigualdades en la Educación Secundaria*. (Tesis de doctorado no publicada).

Universidad Complutense, Madrid, España. Recuperado el 20 de febrero de 2009 de http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=15816

Douady, R. (1995). La Ingeniería Didáctica y la Evolución y su relación con el conocimiento. En: M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 61-96). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter.* Recuperado el 18 de octubre de 2006 de http://www.fi.uu.nl/~pauld/dissertation/

Drijvers, P. & Kieran, C. (2006). The co-emergence of maquine techniques, paper and pencil techniques, and theoretical reflection: a study of CAS use in secondary school algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 11(3), 205-263. Recuperado el 19 de agosto de 2008 de la base de datos SpringerLink.

Drijvers, P., Kieran, C. & Mariotti, M. (2007). *Integrating technology into mathematics education: theoretical perspectives.* Recuperado el 2 de octubre de 2009 de http://math.coe.uga.edu/olive/emat9640/ICMI_Study17C2_Theory.doc

Duval, R. (1992). Gráficas y Ecuaciones: articulación de dos registros. *Antología en Educación Matemática*. México, México: CINVESTAV.

Duval, R. (2001). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo.* (M. Vega Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle. (Trabajo original publicado en 1999).

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: un estudio de la variación y el cambio*. México D.F., México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Fernández, F. (1997). Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. *Revista Uno*, (14), 75-91

Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. (Tesis de maestría no publicada). Centro de investigación de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México D.F., México. Recuperada el 5 de octubre de 2009 de http://www.cimateuagro.org/tesis/2001/marcelaferrari/C2.pdf

Fonseca, C. & Gascón, J. (2000). Integración de praxeologías puntuales en una praxeología matemática local. La derivación de funciones en Secundaria. En *IV Simposio de la SEIEM*. Huelva, España: SEIEM.

Gascón, J. (1998). Evolución didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (52), 7-33.

Gascón, J. (1999). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación Matemática*, 11 (1), 77-88

Gómez, P. & Rico, L. (2002). *Análisis didáctico, conocimiento didáctico y formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Granada: Universidad de Granada. Recuperado el 2 de noviembre de 2010 de http://funes.uniandes.edu.co/376/

Guacaneme, E. (2001). *Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas.* (Tesis de maestría no publicada). Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Cali, Colombia.

Guin, D. & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of instrumental orchestrations. *ZDM*, 34 (5), 204-211.

Heeffer, A. (2007). Learning Concepts Through the History of Mathematics. En K. François & J. P. Van Bendegem (Eds.) *Philosophical Dimensions in Mathematics Education*. New York, USA: Springer.

Henriques, A. (2006). *L'enseignement et l'apprentissage des integrales multiples : analyse didactique integrant l'usage du logiciel maple.* (Tesis de doctorado no publicada). Université Joseph Fourier, Grenoble, Francia. Recuperado el 11 de noviembre de 2009 de http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/10/03/53/PDF/AFONSO_HENRIQUES_THESE.pdf

Kieran, C. (2003). The transition from arithmetic to algebra: a model for conceptualizing school algebra and the role of computer technology in supporting the development of algebraic thinking. En: E. Filloy (Ed.), *Matemática Educativa: Aspectos de la investigación actual. Centros de investigación y estudios avanzados* (pp. 121-142). México D.C., México: Fondo de Cultura Económica.

Kieran, C. (2005). *Interpreting and assessing the answers given by the CAS expert: a reaction paper.* Recuperado el 23 de marzo de 2009 de http://www.lkl.ac.uk/research/came/events/CAME4/CAME4-topic2-Kieran-reaction.pdf

Kieran, C., Boileau, A., Saldanha, L., Hitt, F., Tanguay, D., & Guzmán, J. (2006). Le rôle des calculatrices symboliques dans l'émergence de la pensée algébrique : le cas des expressions équivalentes. En *Actes du colloque EMF 2006*. Recuperado el 7 de noviembre de 2008 de http://www.math.uqam.ca/APTE/Publications/EMFjuin2006.pdf

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, II.* (C. Fernández & A. García, Trads.). Madrid, España: Alianza Universidad

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I.* (M. Martínez, J. Tarres y A. Casal, Trads.). Madrid, España: Alianza Universidad

Lagrange, J.B. (2000a). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics*, 43 (1), 1-30.

Lagrange, J.B. (2000b). *Approches didactique et cognitive d'un instrument technologique dans l'enseignement, le cas du calcul formel en lycée.* Paris, Francia : Université Paris VII. Recuperado el 5 de octubre de 2009 de http://jb.lagrange.free.fr/HDR_JBL.pdf

Lagrange, J.B. (2002). Les outils informatiques entre "sciences mathématiques" et enseignement. Une difficile transposition? En D. Guin y L. Trouche (ed.), *Calculatrices Symboliques. Transformer du travail informatique: un problème didactique* (pp.89-116). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Malisani, E. A. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico. Visión histórica. *Revista IRICE*, (13). Recuperado el 24 de julio de 2007 de math.unipa.it/~grim/AlgebraMalisaniSp.pdf

Meavilla, V. (s.f.). Tartaglia, Nicolás Fontana (ca.1499-1557). Recuperado el 21 de marzo de 2011 de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&task=view&id=10028&Itemid=33&showall=1

Mejía, M. (2004). *Análisis didáctico de la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas.* (Tesis de pregrado no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares en Matemáticas*. Recuperado el 12 de mayo de 2010 de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

MEN. (2004). Tecnología Informática: Innovación en el currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media. Bogotá, Colombia: Enlace Editores.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Recuperado el 10 de mayo de 2010 de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

Mora, L., Torres, J. & Luque, C. (2004). Factorización algebraica. En *XIV Encuentro de* *geometría y sus aplicaciones y Encuentro de aritmética, Memorias de los Encuentros de geometría y sus aplicaciones* (pp.177 – 186). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional

Moreno, L. (2002). Instrumentos Matemáticos Computacionales. En MEN (ed.), *Formación de docentes sobre el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas* (pp. 81- 86). Bogotá, Colombia: Enlace Editores.

Muñoz, I. & Serrano, C. (2008). Complementariedad entre las modalidades educativas: presencial y distancia. *Revista de Educación a Distancia*, 8(20). Recuperado el 21 de julio de 2010 de http://redalyc.uaemex.mx/pdf/547/54702003.pdf.

Navarro, C. (2004). *Elaboración y funcionamiento de una Ingeniería Didáctica basada en la visualización de los límites* $lim_{x\to 0}\frac{Sen(x)}{x}$ *y* $lim_{x\to 0}\frac{1-cos\,(x)}{x}$. Tesis de maestría no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional: México D.F., México. Recuperada el 8 de Noviembre de 2009 de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis02.html.

Palarea, M. & Socas, M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 14, 7 -24

Pappus de Alejandria (s.f.). Recuperado el 21 de febrero de 2009, en http://www.xtec.es/~jdomen28/biografiapappus.htm

Peschek, W. (2005). *The impact of CAS on our understanding of mathematics education*. Recuperado el 13 de noviembre de 2006 de http://www.lonklab.ac.uk/came/events/CAME4

Piaget, J. & García, R. (1982). *El álgebra. Psicogénesis e historia de la ciencia*. México D. F., México: Siglo veintiuno editores.

Puig, L. (2003). *Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa*. Recuperado el 18 de enero de 2009 de http://www.uv.es/puigl/granada%2003%20oral.pdf

Rabardel, P. (s.f). *Los hombres y las tecnologías II. Perspectiva cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. (M. Aslanides, Trad.) (Trabajo original publicado en 1995). Recuperado el 6 de enero de 2010 en http://www.ergonomia.cl/0103a.html

Ralston, A. (1999). *Por la Abolición de las Matemáticas de Lápiz y Papel*. Recuperado el 10 de junio de 2002 de http: //tetis.d5.ud.es/edumat/abolición.html.

Recalde, L. (2002). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Ruiz, L. & García, F. (2011). Análisis de las praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *RELIME*, 14 (1), 41-70.

Samper, C. (2006). *Conexiones Matemáticas 8*. Bogotá, Colombia: Editorial Norma.

Sánchez, E. (1997). *El graficador como apoyo a la comprensión conceptos algebraicos*. (Documento no publicado). México, México: CINVESTAV-IPN

Serrano, C. (2006). *Conexiones Matemáticas 9*. Bogotá, Colombia: Editorial Norma

Sesa, C. (2005). *Iniciación al estudio del álgebra. Orígenes y perspectivas*. Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y medida de magnitudes.* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

Sureda, P. & Otero, M. (2010). Teoremas en acto y Praxeologías de los profesores de Matemáticas. *Revista de investigación*, 34(71), 33-56

Texas Instruments (1999). Manual de TI- 89 y TI- 92 plus. Recuperado el 28 de marzo de 2009 de http://www.virtual.ipn.mx/herramientas/Documentacion/manual.pdf

Trouche, L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations*. Montpellier, Francia: Edition de l'IREM. Recuperado el 5 de octubre de 2009 en: http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/19/00/91/PDF/Trouche_2003.pdf

Trouche, L. (2005a). Calculator in Mathematics Educations: a rapid evolution of tools, with differential effects. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (eds.), *The didactical Challenge of symbolic Calculator* (pp. 9- 39). New York, E.U.A: Springer.

Trouche, L. (2005b). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (eds.), *The didactical Challenge of symbolic Calculator* (pp. 137- 162). New York, E.U.A: Springer.

Vergnaud, G. (1990). Teoría de los campos conceptuales. (J. Godino, Trad.) *Recherches en Didáctique des Mathématiques*, 10 (2,3), 133-170. Recuperado el 31 de octubre de 2009 de http//ipes.anep.edu.uy/documentos/curso_dir_07/modulo2/materiales/didactica/campos.pdf

Vieta's formula (s.f.). Recuperado el 25 de enero de 2009 de http://mathworld.wolfram.com/VietasFormulas.html

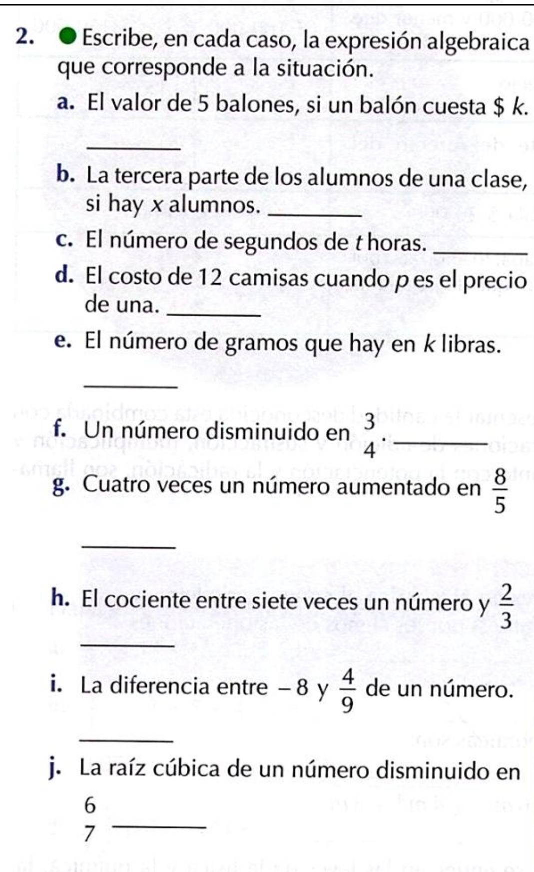
Vizmanos, J. (2000). ¿Desaparecerá el álgebra elemental con la utilización de las nuevas calculadoras gráficas? En P. Gómez & B. Waits (Eds.), *El Papel de las calculadoras en el salón de clase* (pp. 185- 194). Bogotá, Colombia: Una empresa Docente.

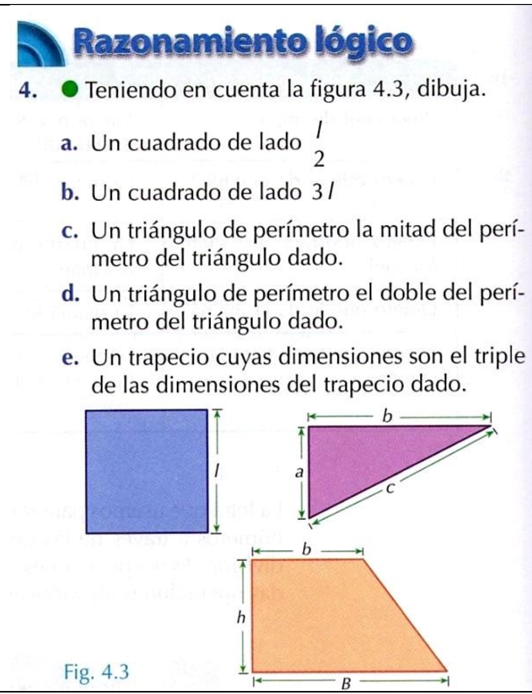
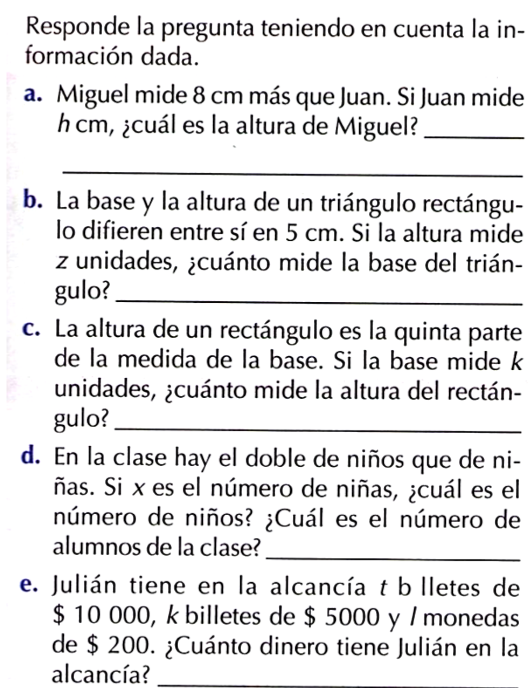
Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. (E. Ausejo, J. Escorihuela, M. Hormigón, D. Kara-Murzá y A. Millán, Trads.) Madrid, España: Siglo XXI (Trabajo original publicado en1989).

ANEXOS

Anexo A. Tareas del libro conexiones matemáticas 8 y 9.

Tabla 1. Imágenes de las tareas de la unidad 8-4 de polinomios.

A. TAREAS	B. IMÁGENES
1. Obtener el resultado de las operaciones indicadas al darle un valor a la letra.	 **Comunicación** 1. Asigna a cada letra el natural que le corresponde por el lugar que ocupa en el abecedario, así $a = 1, b = 2, c = 3, \ldots, z = 29$ Diviértete Halla, en cada caso, el resultado de la operación ndicada. **a.** $k + b \quad c$ **b.** $\frac{(m+n)}{(s+q)}$ **c.** $h \quad j$ **d.** $\sqrt{n}$ **e.** $\sqrt{\frac{(ch \quad h)}{(q+d)}}$ **f.** $\frac{\sqrt{k+ñ}}{x-y}$
2. Hallar la expresión algebraica correspondiente a un enunciado, al volumen o área de una figura geométrica.	 **2.** Escribe, en cada caso, la expresión algebraica que corresponde a la situación. **a.** El valor de 5 balones, si un balón cuesta \$ k. ________ **b.** La tercera parte de los alumnos de una clase, si hay x alumnos. ________ **c.** El número de segundos de t horas. ________ **d.** El costo de 12 camisas cuando p es el precio de una. ________ **e.** El número de gramos que hay en k libras. ________ **f.** Un número disminuido en $\frac{3}{4}$. ________ **g.** Cuatro veces un número aumentado en $\frac{8}{5}$ ________ **h.** El cociente entre siete veces un número y $\frac{2}{3}$ ________ **i.** La diferencia entre -8 y $\frac{4}{9}$ de un número. ________ **j.** La raíz cúbica de un número disminuido en $\frac{6}{7}$ ________

A. TAREAS	B. IMÁGENES
3. Realiza la figura geométrica según la expresión algebraica.	 **Razonamiento lógico** **4.** Teniendo en cuenta la figura 4.3, dibuja. **a.** Un cuadrado de lado $\frac{l}{2}$ **b.** Un cuadrado de lado $3l$ **c.** Un triángulo de perímetro la mitad del perímetro del triángulo dado. **d.** Un triángulo de perímetro el doble del perímetro del triángulo dado. **e.** Un trapecio cuyas dimensiones son el triple de las dimensiones del trapecio dado. Fig. 4.3
4. Determinar el valor desconocido a partir de los datos de un enunciado.	 Responde la pregunta teniendo en cuenta la información dada. **a.** Miguel mide 8 cm más que Juan. Si Juan mide *h* cm, ¿cuál es la altura de Miguel? ________ **b.** La base y la altura de un triángulo rectángulo difieren entre sí en 5 cm. Si la altura mide *z* unidades, ¿cuánto mide la base del triángulo? ________ **c.** La altura de un rectángulo es la quinta parte de la medida de la base. Si la base mide *k* unidades, ¿cuánto mide la altura del rectángulo? ________ **d.** En la clase hay el doble de niños que de niñas. Si *x* es el número de niñas, ¿cuál es el número de niños? ¿Cuál es el número de alumnos de la clase? ________ **e.** Julián tiene en la alcancía *t* b lletes de \$ 10 000, *k* billetes de \$ 5000 y *l* monedas de \$ 200. ¿Cuánto dinero tiene Julián en la alcancía? ________

A. Tareas	B. Imágenes
5. Determinar si dos expresiones algebraicas son equivalentes.	**6.** Remplaza las variables por varios números reales, positivos y negativos, para determinar si las expresiones algebraicas dadas son equivalentes. Escribe tu conclusión **a.** $x^2 + 7x + 12,\ (x + 3)(x + 4)$ **b.** $(y + 3)^2;\ y^2 + 9$ **c.** $\frac{x^2 + x - 20}{x - 4},\ x + 5$ **d.** $z^3 - 27,\ (z - 3)(z^2 + 3z + 9)$ **e.** $\sqrt{x^2},\ x$ **f.** $(x - 2)^2 - (x + 2)^2,\ -8x$ **g.** $(w - 8)(w + 8),\ w^2 - 64$
6. Simplificar los términos de un polinomio	Reduce, en cada caso, los térm nos semejantes del polinomio. **a.** $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^2 + 2x^2 - \frac{5}{12}x^2 + \frac{4}{5}x^2$ **b.** $2y^4 - \frac{3}{2}y^3 - \frac{5}{8}y^4 + \frac{1}{16}y^3 - \frac{1}{4}y^4$ **c.** $-t^5 + \frac{4}{7}t^2 - \frac{2}{3} - \frac{4}{15}t^2 + \frac{8}{9}t^5 + \frac{5}{6}$ **d.** $\frac{2}{5}z^3 - \frac{4}{5}z + 3z^5 - \frac{7}{20}z^3 - \frac{4}{7}z^5$ **e.** $x^2 + \frac{3}{2}y + 2x^2 + \frac{1}{2}y - 5x^2$ **f.** $\frac{2}{3}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - 7x^4 + \frac{7}{4}x^2 - 12x^3$ **g.** $\sqrt{3}y^3 - 6y^5 + y^3 + \sqrt{7}y^5 + 4$ **h.** $\frac{1}{\sqrt{5}}x + \sqrt{5}x - \sqrt[4]{8}x^3 - 3x^2 + \frac{3}{\sqrt[4]{2}}x^3$
7. Hallar el grado de un polinomio o monomio	**6.** Halla el grado de cada polinomio. **a.** $3x^4 + 9x^3 \quad 5x^7 + 2x^5 - 12$ **b.** $-14y^9 + 52y^3 + 5y^{11} - 8y^7 + 3y^4 + 33$ **c.** $53x^4y^3 - 25x^2y^4 - 9x^4y^1 - 13x^5y^5 - 8$ **d.** $\sqrt{7}x + 9$ **e.** $4x^2y^3z^6 - \frac{3}{7}x^2y^8z^2 - \frac{7}{9}x^3y^9z$

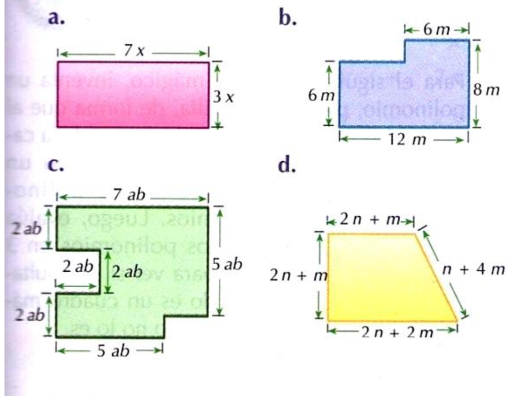
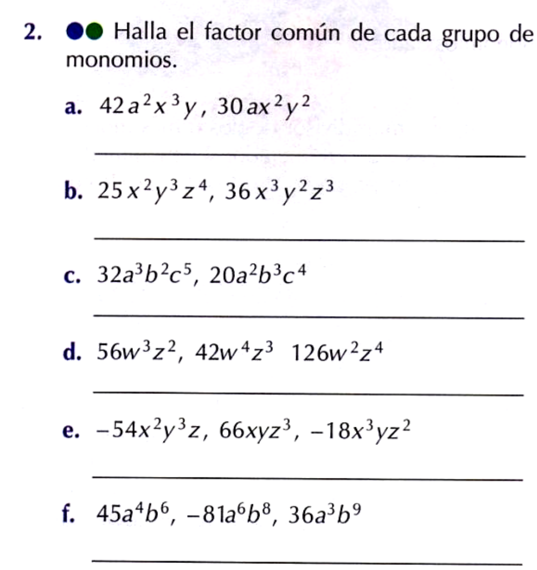
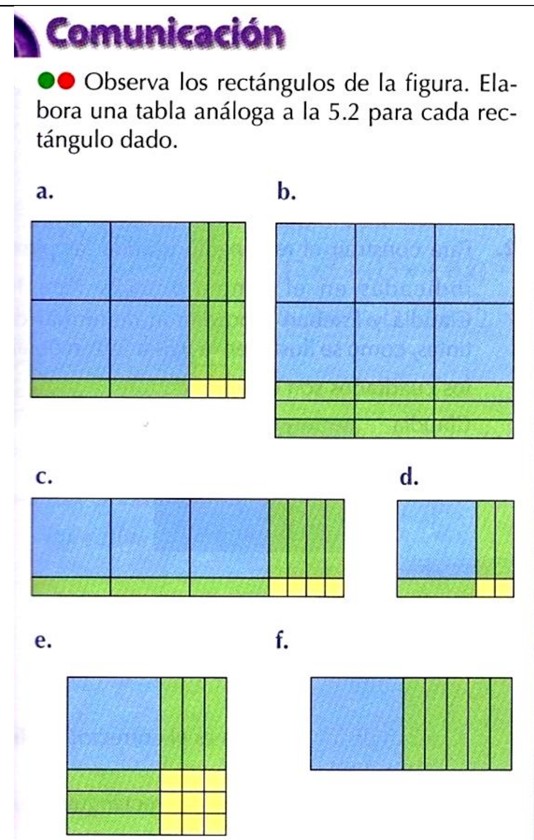
A. TAREAS	B. IMÁGENES
8. Hallar el polinomio correspondiente al área, el perímetro o el volumen de figuras geométricas.	**3.** Encuentra el perímetro de cada región de la figura 4.5.  Fig. 4.5
9. Realizar adiciones y sustracciones de polinomios.	**2.** Adiciona los pol nomios de cada literal **a.** $9x^4 - 3x + 7x^2 - 2,\ x^2 + 5x - 8x^3 + 6$ y $-6x + 4x^4 - 5x^3 - 7$ **b.** $\frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{3}x^2y - \frac{3}{8}x^2y^2;\ \frac{5}{2}x^3y^2 - \frac{1}{8}xy^2 + \frac{2}{5}$ y $\frac{1}{9}x^2y - \frac{5}{4}x^2y^2 - \frac{7}{10}$ **3.** Suprime los paréntesis, reduce y ordena. **a.** $x^4 + 6x^3 - 2x + 3 - (4x^4 + 6x^3 + 3x - 2\ + 4x - 5$ **b.** $x^3 - 3x^2 + 7 - (x^4 + 2x^2 - 1) - (x^3 - 3x^2 - 2)$ **c.** $(y^2 - a^3 - b) - \left(\frac{1}{2}y^2 - 2a^3 + b\right) + \left(\frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}b\right) - \left(\frac{-1}{8}y^2 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{4}b\right)$
10. Hallar el resultado de multiplicar dos polinomios.	**2.** Realiza la multiplicación y escribe el grado del polinomio producto, en cada caso. **a.** $(-t^2 + 4t - 7)(4t - 2)$ **b.** $(2w + 5w^2 - 3w^3)(3w^2 - 5w^3)$ **c.** $(-x^3 + 2x^2 + x)(x^2 - 5x + 2)$ **d.** $\left(\frac{7}{8}h^2 - 3h + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{8}{7}h^3 \quad \frac{2}{3}h^2 - h\right)$ **e.** $(2x^3y^2)(-4x^3y + 3xy^2 - 7x^2y^3)$ **f.** $(\sqrt[3]{2}z^2y + 3z)(\sqrt[3]{4}zy^3 - 5)$ **g.** $(x^3 - x^2 + x)(x^3 - x^2)$ **h.** $(3t^2 - 5t + 2)(2t^2 - 3t + 4)$ **i.** $(y - 2x)(2x^2 + y^2 - 3xy)$
11. Efectuar las divisiones de dos polinomios. Hallar el factor para completar la igualdad.	**4.** Efectúa las divisiones. **a.** $6x^2 - 29x + 38$ entre $2x \quad 7$ **b.** $x^2 + 8$ entre $x - 3$ **c.** $3t^2 + 13t + 12$ entre $3t + 4$ **d.** $2k^3 + 11k - 4$ entre $2k - 1$

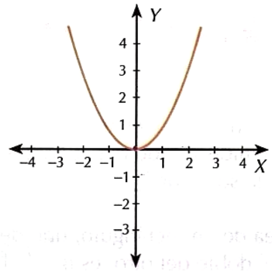
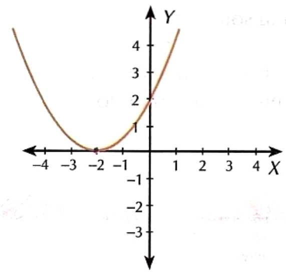
Tabla 2. Imágenes de las tareas de la unidad 8-5 de factorización y aplicaciones.

A. TAREAS	B. IMÁGENES
1. Obtener el máximo común divisor o factor común de polinomios.	 2. Halla el factor común de cada grupo de monomios. a. $42a^2x^3y$, $30ax^2y^2$ b. $25x^2y^3z^4$, $36x^3y^2z^3$ c. $32a^3b^2c^5$, $20a^2b^3c^4$ d. $56w^3z^2$, $42w^4z^3$ $126w^2z^4$ e. $-54x^2y^3z$, $66xyz^3$, $-18x^3yz^2$ f. $45a^4b^6$, $-81a^6b^8$, $36a^3b^9$
2. Obtener la expresión factorizada, desarrollada, dada la base y la altura de un rectángulo. Construir rectángulos que representen algunos trinomios.	

A. TAREAS	B. IMÁGENES
3. Factorizar polinomios. Determinar si un polinomio es primo.	Un polinomio que no puede expresarse como producto de polinomios de menor grado, es **irreductible**. Si el polinomio tiene coeficientes enteros que son relativamente primos y es además irreductible, decimos que es **primo**. **5.** ● Determina si el trinomio es primo. Si no lo es, factorízalo. **a.** $x^2 - 9x + 18$ ________ **b.** $x^2 - 10x + 8$ ________ **c.** $7m^2 - 9m + 2$ ________ **d.** $35x^2 + 34x + 8$ ________ **e.** $6x^2 + 13x + 8$ ________ **f.** $120b^2 - 23b + 1$ ________ **g.** $10x^2 - 11x - 3$ ________ **h.** $10x^2 - 27x + 9$ ________
4. Resolver ecuaciones cuadráticas.	● Resuelve cada ecuación aplicando la *propiedad de productos nulos.* **a.** $(x+3)(x-5)=0$ $x =$ ____ **b.** $3x(2x+9)(x-7)=0$ $x =$ ____ **c.** $(n+3)(n+9)=0$ $n =$ ____ **d.** $(2y-5)(3y+7)=0$ $y =$ ____ **e.** $n(5n-2)(2n+5)=0$ $n =$ ____ **f.** $(x-3)(2x+1)(5x-4)=0$ $x =$ ____ ● Factoriza cada trinomio y luego resuelve la ecuación. **a.** $p^2 - p - 6 = 0$ $p =$ ____ **b.** $10u^3 - 5u^2 = 0$ $u =$ ____ **c.** $7x^2 - 18x + 11 = 0$ $x =$ ____ **d.** $4x^3 - 12x^2 + 8x = 0$ $x =$ ____ **e.** $2y^2 - 25y - 13 = 0$ $y =$ ____ **f.** $15z^2 - 14z - 49 = 0$ $z =$ ____

Tabla 3. Imágenes de las tareas de la unidad 9-3 de función cuadrática, ecuaciones cuadráticas.

A. TAREAS	B. IMÁGENES
1. Escribir las expresiones algebraicas de la forma $f(x) = y = ax^2 + bx + c$ ó $y - k = a(x - h)^2$.	**1.** ● Escribe cada una de la siguientes expresiones en la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ para establecer que se trata de una función cuadrática. **a.** $y - 3x^2 = 5 - 2x$ ____________ **b.** $2y \quad x^2 = 0$ ____________ **c.** $(2 - y) = (x - 1)^2$ ____________ **2.** ● Expresa cada función cuadrática en la forma $(y \quad k) = a(x - h)^2$ **a.** $y = x^2 - 4x + 3$ ____________ **b.** $y - 2x^2 = 2(3x + 2)$: ____________
2. Realizar la gráfica de funciones cuadráticas y hallar sus interceptos con los ejes, el vértice, el eje de simetría y el rango.	**6.** Traza la gráfica de la función cuadrática $y = 2x^2 + 5x - 3$ completando el trinomio cuadrado perfecto. **7.** Encuentra el vértice de la parábola $y = -x^2 + 4x + 5$
3. Encontrar la función inversa de una función.	**2.** Determina una función inversa para cada una de las funciones dadas. **a.** $y = 2x^2$ ____________ **b.** $y = 2(x - 4)^2$ ____________ **c.** $y - \frac{1}{2} = 3x^2$ ____________ **d.** $y = \frac{1}{2}x^2 + 5$ ____________

A. TAREAS	B. IMÁGENES
4. Representar en el mismo plano una función inversa a la función dada.	**3.** Representa en el mismo plano una función n-versa a la función dada. **a.**  **b.** 
5. Hallar la solución de ecuaciones cuadráticas.	**1** ● Halla la solución de las siguientes ecuaciones cuadráticas: **a.** $6h^2 = 294$ ______________ **b.** $5(x - 7)^2 = 60$ ______________ **c.** $x^2 + 15x = 0$ ______________ **d.** $x^2 + 5x - 14 = 0$ ______________
6. Calcular el valor del discriminante y establecer cuántas raíces tiene la ecuación y cómo son.	**2.** ● Antes de resolver la ecuación, calcula el valor del discriminante y establece cuántas raíces tiene la ecuación y cómo son Luego calcula el conjunto solución **a.** $3x^2 + 5x + 1 = 0$ ______________ **b.** $4z^2 + 20z = -25$ ______________ **c.** $y^2 - 4y + 5 = 0$ ______________
7. Hallar y resolver la ecuación cuadrática correspondiente a una situación o enunciado.	**6.** ● Determina los valores de b y c que hacen posible que la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ tenga como soluciones – 3 y 4. ____________ Repite el ejercicio con otras ecuaciones y menciona alguna propiedad de la suma y el producto de las soluciones de ecuaciones cuadráticas de la forma $1x^2 + bx + c = 0$

Anexo B. Las Situaciones.

1. Explorando los Polinomios

1.1 En la tabla se muestran algunos polinomios, ingréselos en la aplicación HOME de su calculadora. En la segunda columna escriba el resultado generado al dar [ENTER] y en la tercera columna explique lo que le sucede a la expresión.

Polinomio 	Resultado al dar [ENTER] 	Explicación 
1. $x^2 + 4x - 1 - 4x$		
2. $4x - 88 - 40x + 4x^2$		
3. $(2x + 4)(x - 3)$		
4. $(2x + 4)(3x - 9)$		
5. $(x^2 - 4)x + x^2 - 4$		
6. $x^2 + x^3 - 4x - 4$		
7. $2x(x - 1) + 3x(1 - x)$		

1.2. Observe los resultados dados por la calculadora y responda:

a) Clasifique los polinomios de la columna 1 en la forma factorizada o en la forma desarrollada. Para aquellos que no sean de la forma desarrollada o factorizada, justifique por qué no lo son.
b) ¿Cuáles son los polinomios que luego de dar [ENTER] fueron expresados en forma factorizada? Explique el procedimiento que realizó la calculadora para llegar a dar esa respuesta.
c) ¿Cuáles son los polinomios que luego de dar [ENTER] fueron expresados en forma desarrollada? Explique el procedimiento que realizó la calculadora para llegar a dar esa respuesta.
d) ¿Es posible expresar los polinomios de la columna 1 en la forma desarrollada? Realice el procedimiento para escribirlos en la forma desarrollada, en el caso de que sea posible.
e) ¿Es posible expresar los polinomios de la columna 1 en la forma factorizada? Realice el procedimiento para escribirlos en la forma factorizada, en el caso de que sea posible.

2. Evaluando los Polinomios

2.1 Dados los polinomios de la tabla, encuentre su forma desarrollada en orden y escríbala en la columna 2. Complete el polinomio y escríbalo en la columna 3. Culmine las columnas 2 y 3, antes de continuar. Luego evalúe los polinomios para los valores de x determinados en cada columna, utilizando la calculadora y el comando [POLYEVAL( )]. Anote el resultado de la evaluación en cada fila, es importante que no pase al siguiente polinomio hasta que lo haya evaluado en cada uno de los valores de x determinados.

Polinomio 						
	Forma desarrollada en orden	**Polinomio completo en orden**	$x=-2$	$x=-1$	$x=11$	$x=1$
1. $x^2+4x-1-4x$						
2. $14x-24-10x+4x^2$						
3. $x(x-2)+3(x-2)$						
4. $(x-1)(x+1)$						
5. x^2+x-6						
6. x^2+x^3-4x-4						
7. $x+2$						
8. $(x^2-4)x+x^2-4$						
9. $\frac{x^2+x-6}{4}$						

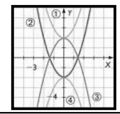
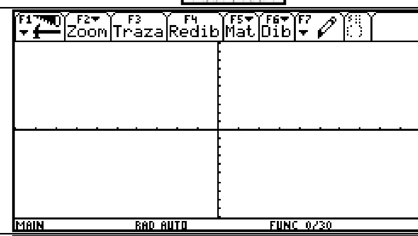
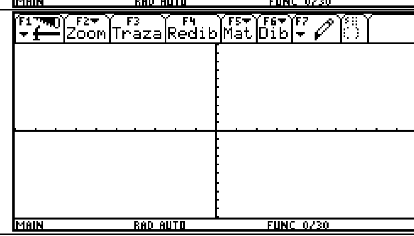
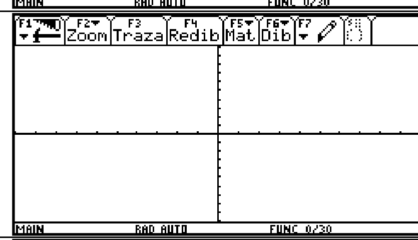
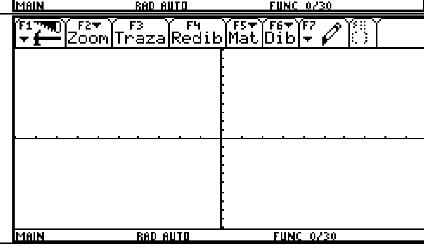
2.2. Observe los resultados dados por la calculadora:

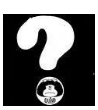
a) Observe los resultados de la tabla, ¿Qué se puede decir de los polinomios?
b) Si se continúan dando valores a x, ¿qué se puede conjeturar?
c) Re-escriba los polinomios de la tabla de la forma factorizada y compárelos.
d) ¿Qué se puede decir de cada uno de los factores lineales (x – r) siendo r un número, de los polinomios y la evaluación de dicho polinomio en x = r?

Responde en la hoja en blanco y anota cualquier procedimiento

3. Hallando los ceros de los Polinomios

3.1. Ingresa cada uno de los polinomios de la anterior tabla en Y=EDITOR y luego vaya a GRÁFICOS o GRAPH. Describa lo que observa (columna 2) y realice un dibujo de la gráfica (columna 3).

Polinomio 	**Descripción** 	**Gráfica** 
1. $x-2$		
2. $(x-1)(x+1)$		
3. $-x^2+x+6$		
4. x^2+x^3-4x-4		



3.2. Observe la tabla y responda:

b) Según el grado del polinomio, ¿Cuáles serían las características de la gráfica?

3.3. Completa la tabla, obteniendo los ceros de los polinomios utilizando procedimientos a Lápiz/Papel (producto nulo o fórmula cuadrática) y escríbalos en la columna 2. En la gráfica utilice el comando [VALUE], dé el valor de x obtenido y observe dónde se ubica este punto, escriba las coordenadas del valor en la tercera columna. Ubique en el gráfico de la anterior tabla los puntos que corresponden a los ceros, utilice un color para señalarlos.

Polinomio 	**Ceros** 	
		
1. $x-2$		
2. $(x-1)(x+1)$		
3. $-x^2+x+6$		
4. x^2+x^3-4x-4		

3.4. Observe las tablas y responda:

a) Observa las gráficas de la primera tabla, ¿dónde se ubican los ceros de un polinomio?
b) ¿Cuántos ceros tiene el polinomio lineal de la tabla? ¿Cuántos ceros tienen los polinomios cuadráticos de la tabla? ¿Cuántos ceros tienen el polinomio cúbico de la tabla? ¿Depende el número de ceros del grado del polinomio?
c) ¿Pueden existir polinomios lineales con más de un cero o sin ceros? En el caso de dar una respuesta afirmativa de un ejemplo.
d) ¿Pueden existir polinomios cuadráticos con menos de dos ceros o con más de dos ceros? En el caso de dar una respuesta afirmativa de un ejemplo.

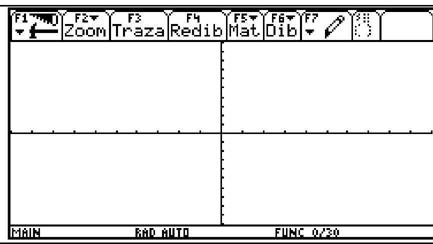
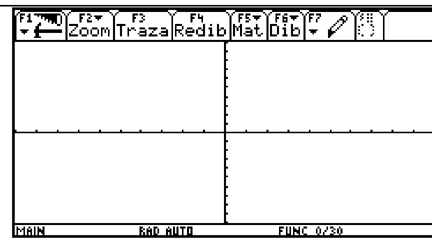
4. Parábolas

4.1. Obtenga la gráfica de los polinomios cuadráticos pertenecientes a la familia$a(x-1)(x+1)$ y ax^2+x+6 , siendo $a=\{-2,-1,\ 1,\ 2\}$ y responda las siguientes preguntas:

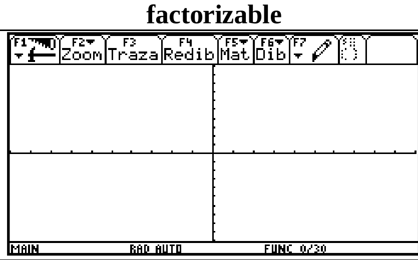
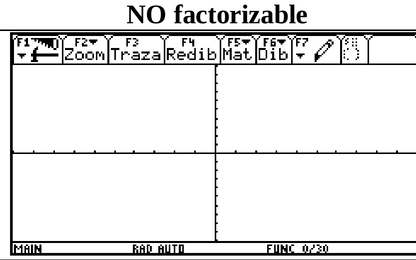
a) ¿En qué afecta a la gráfica sí el valor de a es positivo? ¿y sí es negativo?
b) ¿Qué tiene en común las parábolas de la familia $a(x-1)(x+1)$?¿en qué se diferencian?
c) ¿Qué tiene en común las parábolas de la familia ax^2+x+6?¿en qué se diferencian?
d) ¿Cuáles de los anteriores polinomios son factorizables?

4.2. Active el programa [PARABOL1( )] en HOME y observe la gráfica de los polinomios cuya expresión es $a(x-r)(x-s)$, siendo $a=1$ ó $a=-1$

a) En la siguiente tabla, dibuje dos gráficas obtenidas por el programa [PARABOL1( )], halle los ceros y el valor de $a, r\ y\ s$ de la expresión factorizada.

	$\boldsymbol{a=1}$	$\boldsymbol{a=-1}$
Gráfica		
Ceros		
Expresión $\boldsymbol{a(x-r)(x-s)}$**.**		

4.3. Active el programa [PARABOL2 ( )] en HOME y observe la gráfica de los polinomios cuya expresión es $a(x-h)^2+k$, donde (h, k) son las coordenadas del vértice y $a=1$ ó $a=-1$. Dibuje parábolas y la expresión algebraica solicitadas en la siguiente tabla:

arábola de un polinomio cuadrático factorizable	**Parábola de un polinomio cuadrático NO factorizable**
	
Expresión $\boldsymbol{a(x-r)(x-s)}$**,**	**Expresión** $\boldsymbol{a(x-h)^2+k}$

a) ¿En qué se diferencia la gráfica de los polinomios factorizables de los no factorizables?

Anexo C. Programación anual de matemáticas del año lectivo 2008-2009 para el grado noveno en la institución educativa.

PERÍODO 1			
Álgebra		**Estadística y Probabilidad**	
Contenidos	# de semanas	Contenidos	# de semanas
Números reales: ubicación en la recta numérica, valor absoluto, exponentes y radicación.	4	**Datos agrupados:** frecuencia absoluta y relativa, marcas de clase, medidas de tendencia central, rango y longitud de un intervalo, histograma, ojiva, polígono de frecuencia.	2
Relaciones y Funciones: representación gráfica de las funciones, tipo de funciones, función lineal y afín, pendiente de recta y ecuación de la recta.	6	**Probabilidad:** experimentos aleatorios, espacios muéstrales y eventos, propiedades de la probabilidad, eventos complementarios, probabilidad de la unión de eventos mutuamente excluyentes, probabilidad de eventos no excluyentes, probabilidad de la intersección de eventos independientes, probabilidad de la intersección de eventos dependientes.	8

PERÍODO 2			
Álgebra		**Geometría**	
Contenidos	# de semanas	Contenidos	# de semanas
Sistemas de ecuaciones lineales 2x2 y sistemas de ecuaciones lineales 3x3: todos los métodos de solución: igualación, sustitución, eliminación y Cramer.	6	**Congruencia de polígonos:** definición, criterios de congruencia de triángulos.	2
Factorización de expresiones algebraicas: de polinomios cuadráticos, factor común y por agrupación.	4	**Semejanza de polígonos:** definición, proporcionalidad geométrica, teorema de Tales y criterios de semejanza de triángulos	8

PERÍODO 3			
Álgebra		**Geometría**	
Contenidos	# de semanas	Contenidos	# de semanas
Función cuadrática: gráfica, ceros, raíces, ecuación cuadrática, fórmula cuadrática.	6	**Circunferencia:** recta, arcos, segmentos y ángulo en la circunferencia, relaciones y medidas.	10
Números complejos: definición, potencias de i, operaciones con números complejos.	4		

PERÍODO 4			
Álgebra		**Geometría**	
Contenidos	# de semanas	Contenidos	# de semanas
Función exponencial: representación gráfica, propiedades, ecuación exponencial.	5	**Estudio de los sólidos:** caracterización y clasificación de los sólidos Áreas, volúmenes de sólidos.	10
Función logarítmica: representación gráfica propiedades, ecuación logarítmica.	5		

RECURSOS:

Utilizaremos como recursos: material manipulativo, libros de texto, calculadora graficadora, equipo de utensilios para el trabajo de geometría, computadores para el uso de software.

EVALUACIÓN:

A lo largo de cada período se valorarán los trabajos individuales o grupales, la participación en clase, las salidas al tablero, la responsabilidad en la entrega de trabajos y tareas, el trabajo y buen uso de las aulas especializadas, exámenes cortos durante el período y una evaluación final que tiene el carácter de superación para los estudiantes de bajo desempeño en la que se retoman todos los temas del período. Para fortalecer la estrategia de aprender del error, cada estudiante debe corregir las evaluaciones y talleres en su cuaderno, el cual va a tener una valoración en cada período.

BIBLIOGRAFÍA:

1. Camargo, L. & García, G. (2004). *Nuevo Alfa 9*. Bogotá, Colombia: Editorial Norma.
2. Díaz, F & Centeno, G. (2004) *Nuevo pensamiento matemático 9*. Bogotá, Colombia: Libros & Libros S.A.
3. Estrada, W.; Moreno, V. & Novoa, F. (2005). *Espiral 9*. Bogotá, Colombia: Editorial Norma.
4. Serrano, C. (2006). *Conexiones Matemáticas 9*. Bogotá, Colombia: Editorial Norma
5. Nivia, L. & Alfonso, L. (2007).*Matemáticas soluciones 9*. Bogotá, Colombia: Editorial futuro.

Anexo D. Guía para factorización en L/P

NORMAL SUPERIOR FARALLONES DE CALI
REPASO FACTORIZACION DE
EXPRESIONES CUADRATICAS

A continuación encontraran algunos polinomios factorizados paso a paso, repasen estos ejercicios y, con base en ellos resuelvan los ejercicios propuestos.

a) <u>Factor común</u>: $6xy - 3x$, en este caso se observa que en el polinomio el factor común es $3x$, ya que es el MCD de los dos términos, factorizando queda:

$$6xy - 3x = \underline{3x}.2y - \underline{3x}\,.\,1 = \underline{3x}\,(2y-1)$$

FC

b) <u>Trinomio cuadrado perfecto:</u> $x^2 + 4x + 4$, este polinomio es un trinomio porque tiene 3 términos, y es cuadrado perfecto porque el primer y el tercer término x^2 y 4, tienen raíz cuadrada entera, $\sqrt{x^2} = x$ y $\sqrt{4} = 2$, y el segundo término $4x$ se obtiene multiplicando por 2 la raíz del primero por la raíz del tercer termino así: $2.x.2 = 4x$. Factorizando queda:

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)\,(x+2) = (x+2)^2$$

c)<u>Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$</u> : $x^2+5x + 6$, para factorizar este tipo de polinomios buscamos dos números que multiplicados den el tercer término, en este caso 6 y que, sumados o restados den el segundo término, en este caso 5. Para nuestro ejemplo, los dos números que multiplicados dan 6 y sumados 5 son 3 y 2, porque $3.2 = 6$ y $3+2 = 5$. Factorizando queda:

$$x^2+5x+6 = (x+2)\,(x+3)$$

d) <u>Diferencia de cuadrados:</u> $4x^2 - 25$, un binomio será una diferencia de cuadrados perfectos si sus dos términos tienen raíz cuadrada entera y si están restándose, en este caso $\sqrt{4x^2} = 2x$ y $\sqrt{25} = 5$. Factorizando queda:

$$4x^2 - 25 = (x+5)\,(x-5)$$

e) <u>Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$</u> : $6x^2 + x - 2$, para factorizar este tipo de trinomios procedemos siguiendo los siguientes pasos:

<u>Paso 1</u>: Multiplico todo por el coeficiente de x^2 $\longrightarrow$ en este caso 6, dejando indicadas la multiplicación por el primer y segundo términos y efectuando la multiplicación del tercer término, para que el polinomio original no cambie dividimos todo por el mismo 6, así:

$$\frac{6.6x^2 + 6.x - 6.2}{6} = \frac{(6x)^2 + (6.x) - 12}{6}$$

<u>Paso 2</u> : Con el nuevo polinomio $\dfrac{(6x)^2 + (6.x) - 12}{6}$

factorizo como el caso c) Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, buscamos dos números que multiplicados den el tercer término, en este caso –12 y que, sumados o restados den el segundo termino, en este caso 1. (Ya que en este caso el término que está al cuadrado es 6x). Para nuestro ejemplo, los dos números que multiplicados dan –12 y sumados 1 son 4 y -3, porque 4.(-3)=–12 y 4 + (-3) = 1. Factorizando queda:

$$\frac{(6x)^2 + (6.x) - 12}{6} = \frac{(6x+4).(6x-3)}{6}$$

<u>Paso 3</u>: En cada uno de los 2 factores en que quedó el polinomio sacamos factor común.

FC FC

$$\frac{(6x+4).(6x-3)}{6} = \frac{(3.2x + 2.2).(3.2x - 3.1)}{6} = \frac{2.(3x+2).3.(2x-1)}{6} =$$

$$\frac{2.3.(3x+2)(2x-1)}{6} = \frac{6.(3x+2)(2x-1)}{6} = (3x+2)(2x-1)$$

En conclusión: $6x^2 + x - 2 = (3x+2)(2x-1)$

Teniendo en cuenta las explicaciones anteriores factoriza completamente en los enteros los siguientes polinomios:

1) $x^2 + 4x + 2$	2) $x^2 + 8x + 3$	3) $3x^2 - 5x + 3$	4) $3x^2 - 6x$	5) $4x^2 + 8x$
6) $7a^2 - 14$	7) $2x^2 - 6x + 4$	8) $x^2 + 2x + 1$	9) $x^2 + 7x + 10$	10) $x^2 - x - 12$
11) $x^2 - 4$	12) $4x^2 - 16$	13) $6x^2 - x - 2$	14) $9x^2 - 49$	15) $4x^2 - 8x + 4$
16) $9x^2 + 6x + 1$	17) $x^2 + 11x + 24$	18) $25x^2 - 1$	19) $4x^2 - 13x + 3$	20) $2x^2 + 6x + 4$
21) $36x^2 - 64$	22) $10x^2 + 11x - 6$	23) $x^2 - 8x + 12$	24) $4x^2 + 12x + 9$	

Anexo E. Transcripción de videos

Tabla 1. Transcripción del video del 30 de Junio de 2009.

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 30 DE JUNIO DE 2009</th></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1[73]: 0 a 1:45 min.</td><td>EL MOMENTO DEL PRIMER ENCUENTRO</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">Los estudiantes reciben cada uno las tareas en papel y una calculadora por pareja. Mientras tanto exploran algunas funcionalidades, como escribir palabras en HOME, apagar y prender la calculadora, mientras que otros esperan las indicaciones de la profesora. Antes de iniciar la lectura de la pregunta 1.1., la profesora les solicita a los estudiantes que todos tengan en su calculadora la aplicación HOME.</td></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1: 1:45 a 5:00 min.</td><td>EL MOMENTO EXPLORATORIO</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">La profesora indica la manera cómo los estudiantes deben ingresar la expresión $x^2 + 4x - 1 - 4x$. A medida que la escribe en la bandeja de entrada de la calculadora, da algunas indicaciones en relación a cómo escribir el exponente, colocar el signo multiplicación entre 4 y x y escribir el signo menos de operación y el signo menos de negativo. Finalmente lo que debe aparecer en la bandeja de entrada de la calculadora es x^$2 + 4x - 1 - 4x$. En el tiempo 2:32 se observa la expresión de Camilo, quien ingresó adecuadamente la expresión y le ha dado [ENTER]. La profesora les hace ver que la expresión ha cambiado, ya no aparece el gorrito (caret) sino solamente el exponente, hace las siguientes preguntas: comparen la respuesta con el polinomio que ingresaron ¿Qué pasó? ¿Qué le pasó a ese polinomio? Juan dice que se han reducido los términos semejantes. La profesora aclara que lo que acaban de decir, es necesario que lo escriban en la columna C de Tabla 14[74] y el resultado de la calculadora se coloca en la columna B de la Tabla 14.
La profesora pasa a mirar la expresión número 3 de la columna A de la Tabla 14. Les indica que deben abrir y cerrar paréntesis y les pregunta: ¿Qué operación hay entre esos dos binomios? Camilo contesta que es una multiplicación. La profesora indica que después de cerrar el paréntesis del primer binomio es necesario colocar el signo de multiplicación antes de abrir el siguiente paréntesis.</td></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1: 5:00 a 13:42 min.</td><td>EL MOMENTO DEL TRABAJO DE LA TÉCNICA Y EL MOMENTO TECNOLÓGICO - TEÓRICO.</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">La profesora le explica a Daniel y Fardy (mesa 1) como deben realizar la tarea 1.
Juan (mesa 2) explica que en la segunda expresión algebraica se reducen nuevamente los términos semejantes, $4x - 40\,x$ da $-36\,x$, los demás términos quedan iguales. En la tercera expresión dice que se sacó factor común. María la compañera de Juan le pide que la deje ingresar la expresión, mientras que Olga le pide a Juan que le explique el proceso de la tercera expresión de la columna A de la Tabla 14.</td></tr>
</table>

[73] Los capítulos se denotan con el nombre Tn, donde n es un número natural. Al observar el video en el programa VCL media Player 0.9.7, se ven cortes en la secuencia del video, que hacen que nuevamente inicie el conteo en segundos, dichos segmentos de video son los que se denominan capítulos.

[74] El número de las Tablas va en correspondencia con el cuerpo del trabajo.

FECHA: 30 DE JUNIO DE 2009	
La profesora se acerca a Mayra (mesa 3) y le ayuda a realizar y redactar la tarea 1. Ahora se acerca a la mesa de Alejandra (mesa 4) y le pregunta ¿qué ha sucedido? , contesta que los términos se han reducido, la profesora le pregunta cuáles son los términos que son semejantes, una de las compañeras de la misma mesa pregunta si deben anotar los términos semejantes en la respuesta, la profesora le dice que no, sólo que ella quiere saber si identifican los términos semejantes. La profesora le pregunta a Alejandra si 88 es semejante con éste (otro de los términos que señala en la hoja), ella dice que no, pero señala $4x$ y $-40x$. La profesora le dice muy bien, le pregunta qué otra cosa hizo la calculadora, le indica: mira quién estaba de último, la estudiante responde $4x^2$, la profesora pregunta y ahora ¿quién está de primero? Alejandra responde $4x^2$. Profesora: entonces ¿qué paso? Alejandra: los organizó Profesora: ¿qué otra palabra puedes usar? (una compañera dice los desarrolla, otra compañera menciona los ordenó). La profesora aprueba la última respuesta. La profesora se acerca a Luis (mesa 5) y le corregí una de la respuesta de la segunda expresión algebraica de la columna A, Luis dice que se han reunido factores semejantes, la profesora pregunta señalando el polinomio: ¿aquí hay factores? Camilo (mesa 5) contesta que son los factores de x, dice que $4x$, $40x$ son factores. La profesora dice que son términos, aclara que los que están separados por un signo más o menos son términos, pregunta entonces ¿qué colocan? ¿Cómo son esos términos?¿Por qué los pudieron reunir? Felipe dice que tienen el mismo exponente, la profesora le pregunta en vez de decir eso ¿qué podemos decir?, señala la hoja de respuestas. También le da indicaciones para que tengan en cuenta el orden. Pasa a la siguiente mesa (6), Daniela no habla, la profesora mira la hoja de respuesta y sólo ve los resultados de dar [ENTER], le indica que debe dar las razones de lo sucedido. Lucía explica que se reunieron los términos semejantes y el polinomio se ordenó. La profesora sugiere que realicen las justificaciones. [13:13 a 13:42 min.] Juan (mesa 2): no entiendo qué pasó con el polinomio 7 (fila 7 y columna A). Parece que lo hizo mal. La séptima tampoco sé. Olga: parece que se hubieran reunido términos semejantes Juan: parece que 3 o 2 hubiesen sido negativos, y que $3x$ y $2x$ nos quedara menos una x. Juan: ahora no sé, parece que la calculadora lo hizo mal.	
TIEMPO T2: 0:00 a 13:44 min.	**EL MOMENTO DEL TRABAJO DE LA TÉCNICA Y EL MOMENTO TECNOLÓGICO - TEÓRICO**
DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS	
[0:00 a 3:00 min.] Continúa los cuestionamientos de Juan y sus compañeros alrededor de lo que realizó la calculadora respecto al séptimo polinomio. Juan: si multiplicó los paréntesis y luego los sumó, multiplicó esto por esto (señala en la calculadora los términos que se multiplican). Esto da $3x - 2x$. Espérate un segundo (escribe el procedimiento en su hoja de respuestas, realiza los productos indicados). Esto más esto da $6x$ y esto más esto da $-6x$, entonces da cero (parece que realizó de manera incorrecta el producto porque todos los términos son lineales). María: menos x donde sale.	

FECHA: 30 DE JUNIO DE 2009
Juan: sabes que, espérate. Tal vez multiplicó solamente uno. Puedo haber hecho esto. Multiplicó esto por esto. Ya sé, multiplicó un solo paréntesis, se reúne aquí y queda $(x-1)$ por $2x$ mas $3x$ porque $-4x$ y $2x$ da $2x$ negativo (borra lo que escribió $2x+3x$) luego escribe $(x-1)(3x-2x)$ y esto aquí da menos uno, digo da uno. Algo da negativo por ahí, una mayor tiene que dar negativo, para que sea menos x. No sé el proceso. Juan a escrito en su hoja lo siguiente $$2x(x-1)\ +3x(1-x)$$ $$2x(x-1)+3x-4x$$ $$(x-1)3x-2x$$ María: ahí si da menos. Juan: si da menos x. La profesora que se hizo, profesora. [3:42 a 11:00 min.] La profesora se acerca a la mesa (4) y le explica a Alba que en la expresión 7 de la columna A de la Tabla 14, debe de mirar que lo que está dentro de los paréntesis tengan el mismo signo, en este caso se refiere a $(x-1)$ y $(1-x)$. Entre los intentos, Alba y Marcela dan muchas respuestas, una de ellas es realizar la multiplicación, otra es cambiar el orden de uno de los dos binomios $(x-1)$ o $(1-x)$, es Marcela la que sugiere multiplicar uno de estos dos binomios por – 1, la profesora aprueba la última respuesta. Con la ayuda de la profesora y sus compañeras, Alba logra realizar el procedimiento para mostrar la equivalencia de lo arrojado por la calculadora y la expresión inicial. Finalmente la respuesta no coincide. Así que confrontan las expresiones $x(1-x)$ y $-x(x-1)$. La profesora le pregunta qué debe de hacer para que la expresión $(1-x)$quede igual a $(x-1)$. Alba no logra hacer el procedimiento, la profesora le sugiere que convierta $(1-x)$ en $(x-1)$. Finalmente le sugiere que realice nuevamente el procedimiento ya hecho pero cambia $(1-x)$ a $(x-1)$. [11:00 a 11:40 min.] Ahora la profesora pasa a la mesa de Camilo, ellos responden ya acabamos, les preguntan: ¿qué pasó en este último? Camilo: se cambiaron los signos multiplicando por -1 Profesora: a quién multiplicó por -1 Camilo: a $3x(1-x)$ que dio $-3x$ Profesora: y luego ¿qué hizo la calculadora? Camilo: se disuelven $-3x$ y $2x$ que da $-x$, luego se saca factor común, que es $(x-1)$ Profesora: muy bien. [11: 41 a 13:33 min.] La profesora pasa a la mesa 6 y revisa las respuestas de Lina, Profesora: no me has comparado lo del quinto, porque aquí no hay nada escrito, no pueden pasar a otro polinomio sin haber comparado que fue lo que hizo la calculadora, mira tienes esto, esto lo ingresaste no cierto y te dio esto, qué hizo la calculadora con esto para poder escribir esto (la profesora señala las expresiones) observa ¿qué operaciones hay implicadas? (La profesora le

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 30 DE JUNIO DE 2009</th></tr>
<tr><td colspan="2">señala el primer producto)
Lina: hay una suma, resta
Profesora: aquí que hay
Lina: resta
Profesora: pero del paréntesis, ¿por quién se está multiplicando por el paréntesis?,
Lina responde la x.
Profesora: entonces ¿qué sería lo primero que tenía que hacer la calculadora?
Lina: multiplicar,
Profesora: multiplicar, ¿por quién?
Lina: por x^2
Profesora: por esa x y ¿qué le da?
Lina: x^3
Profesora: y qué más
Lina: x^2
Profesora: ¿le da x^2?
Lina: no
Profesora: -4 por x, ¿qué le da? o x por -4?
Lina: $-4x$
Profesora: $-4x$ míralo aquí, y x^2 este de aquí y -4, ahora de acuerdo con eso escribe ¿qué hizo la calculadora?

[13:33 a 13:44 min.]
La profesora se acerca a la mesa 3 a hablar con Julián quien se realiza la justificación del séptimo polinomio
Julián: cambiaron de sitio
Profesora: ¿cambiaron de sitio?¿cómo así? Mire en el primer paréntesis que hay.
Julián: $x - 1$
Profesora: en el otro
Julián: $(1 - x)$</td></tr>
<tr><td>TIEMPO
T3: 0:00 a 13:44 min.</td><td>EL MOMENTO DEL TRABAJO DE LA TÉCNICA Y EL MOMENTO TECNOLÓGICO - TEÓRICO.</td></tr>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">[0:00 a 0:21 min.]
Profesora: cómo son esos dos paréntesis. la equis aquí que signo tiene (señala $(x-1)$)
Julián: positivo
Profesora: y aquí (señala $(1-x)$)
Julián: negativo
Profesora: para poderlo resolver tengo que lograr que uno de estos paréntesis quede igual a este (señala $(x-1)$). ¿Qué haces para que te cambien de signo? Piensa a ver qué haces.

[1:00 a 2: 26 min.]
Se observa a Mayra leyendo las preguntas posteriores a la Tabla 14. La profesora les sugiere a los estudiantes pasar a la pregunta o tarea 2, les dice que recuerden que es forma factorizada o desarrollada y les indica que deben escribir las respuestas en la parte de atrás de la hoja. Señala</td></tr>
</table>

FECHA: 30 DE JUNIO DE 2009
que el trabajo es en parejas y que no pueden pasar hasta no completar la Tabla 14. [2:26 a 3:48 min.] Se observa el trabajo de Alba y Marcela, escriben y no logran ponerse de acuerdo. Buscan el procedimiento que realizó la calculadora. En la hoja de Alba se observa que ha escrito: $2x(x-1)\ +\ 3x(1-x)$ $2x(x-1)\ -1(3x(1-x))$ $2x(x-1)\ -3x\ (-1+x)$ $2x-3x(x-1)(x-1)$ $-x(x-1)$ [3:50 a 8:43 min.] La profesora se encuentra en la mesa 1 explicándole a Fardy: Profesora: si de $2x$ sacas como factor $2,$ ¿qué te queda? Fardy: 2 Profesora: por cuánto multiplicas este 2 para que te de $2x$. Si a 2 lo multiplas por 1 te da 2, yo lo que necesito es que me de $2x$. Daniel: por 2 Profesora: si $2x$ lo multiplas por 2 te da $4x$ y lo que se necesita es que sea $2x$, tu dijiste que de aquí salía este 2 como factor común. ¿Cómo sabes que de que aquí salió este 2? Daniel: ¿por qué es el único 2 que allí en esa operación? Profesora: porque si salió es por qué es factor … común? Si saco 2 como factor común ¿aquí qué me queda? si yo saco 2 como factor común entonces qué me queda Daniel: $(x+4)$. Profesora: pero 2 es factor común de todos, no solamente de $2x$. Vuélvalo a escribir $(2x+4)(3x-9)$, entonces tu lo vas a resolver (señala el primer factor). Aquí que le vas a sacar, Daniel: 2 Profesora: habrá paréntesis. Daniel : $x, 4$ Profesora: por qué 4, pero si 2 es factor de 4. Daniel: ah sí, ya entendí. Profesora: aquí ¿qué quedo?¿Aquí hay factor común?¿Cuál es el otro factor? $(3x-9)$. No hay factor común en estos dos, fíjate bien. Tienes $3x$ y 9. Daniel: a 3×3 Profesora: ¿Qué factor común hay ahí? Daniel: es 3 Profesora: 3 ¿Qué te queda dentro del paréntesis? Daniel: x uno Profesora: ¿Una qué? Daniel: una x y 3 Profesora: bien, sigue, qué más puedes hacer allí. (Se observa la hoja del estudiante con lo siguiente $2(x+2)3(x-3)$ $2(x+2)(x-3))$

FECHA: 30 DE JUNIO DE 2009
Profesora: organiza eso. (Señala la hoja) ¿Qué se hizo este 3? ¿Qué está haciendo este 2? Daniel: multiplicar Profesora: ¿y este 3? Daniel: multiplicar Profesora: ¿Yo puedo decir 2 por 3 por este paréntesis, por este otro paréntesis? Daniel: pues sí Profesora: pues sí, porque la multiplicación es conmutativa. Entonces 2 por 3 , ¿qué te da? Daniel: 6 Profesora: en vez de escribir 2, ¿qué escribirías? Daniel: $6(x-3)(x+2)$ Profesora: ¿eso es lo que le da a la calculadora? Daniel: si, es eso Profesora: ¿dónde está lo que te dio la calculadora? Daniel: (señala otro polinomio) Profesora: estamos en este. Tú copiaste aquí, fue este. Te dio eso la calculadora. Daniel: si Profesora: ¿qué fue lo que hizo la calculadora? Daniel: factorizó Profesora: ¿cómo factorizó? Daniel: humm Profesora: ¿qué hizo para factorizar? Daniel: no entiendo la pregunta Profesora: ¿qué factorización hizo? ¿qué le hizo a este binomio? (lo señala) Daniel: saco un término común Profesora: saco factor común. ¿Y a este? Daniel: también Profesora: eso fue lo que hizo la calculadora, saco factor común. Daniel: entonces aquí escribo, se factorizó. Profesora: ¿en cuáles? Teniendo en cuenta eso, puedes analizar esta. (Señala en la hoja). Recuerden que es entre los dos que realizan el análisis. Comparan lo que tenían y comparan el resultado que les dio la calculadora. [8:45 a 10: 42 min.] Se observa la hoja de trabajo de Luis (mesa 5), él discrimina los polinomios en factorizados y desarrollados. Camilo escribe los polinomios en la parte de atrás de su hoja. Luis no entiende la pregunta o tarea 2.b. y le pregunta a Camilo que le explique, Camilo lee en voz alta la pregunta y revisa cada una de las respuestas dadas por la calculadora usa el cursor (arriba y abajo). [10: 42 a 11:45 min.] Se observa la respuesta de la explicación del polinomio 7 de la columna A de la Tabla 14 de Isabel (mesa 3). Dayanna le pregunta a Julián si los polinomios que disminuyen su exponente están en la forma desarrollada, Julián dice que si con su cabeza. Julián señala en la hoja de respuestas tres polinomios que están en la forma desarrollada. Dayanna dice: acá (parece que señala un polinomio) no es desarrollado porque le falta un exponente.

FECHA: 30 DE JUNIO DE 2009	
[11.46 a 12: 36 min.] La profesora indica que las respuestas a las preguntas se deben realizar en la parte de atrás de la hoja. Se observa la mesa 4, Lady (2) dice que el tercero esta factorizado. Alejandra escribe que el segundo polinomio no está ni factorizado, ni desarrollado. [12:36 a 13:44 min.] Mayra y Isabel dice que son muchas las cosas que deben de escribir (parece que no les gusta). Mayra afirma que el segundo polinomio de la columna A de la Tabla 14 no estaría en ninguna forma, mientras que el tercero estaría en la forma factorizada. Julián le pregunta a Mayra si está segura si el tercer polinomio está factorizado. Mayra solo afirma que es factorizado porque esta todo agrupadito y se preocupa porque sus compañeros no le creen.	
TIEMPO T4: 0:00 a 13:24 min.	**EL MOMENTO DEL TRABAJO DE LA TÉCNICA Y EL MOMENTO TECNOLÓGICO - TEÓRICO.**
DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS	
Mayra le pregunta a Julián, ¿por qué no son factorizados? Julián solo se ríe. [0:10 a 0:17 min.] La profesora les indica que los otros puntos son largos y si no les alcanza la hoja pueden utilizar otra. [0.17 a 1:10 min.] Se observa la mesa 6, Natalia (2) borra su hoja de respuestas mientras que Laura le indica que lo que ha hecho esta malo. [1:10 a 4:04 min.] Se observa la mesa 2, María le indica a Juan que le explique el procedimiento que realizó la calculadora para dar esa respuesta. Todos escriben. Juan afirma que el tercer polinomio se ha sacado 2 como factor común del primero, y ya. Lady repite la respuesta en tono de pregunta, Juan responde sí. Olga indica que la justificación la pueden señalar con una flechita, dado que olvidaron colocarla antes. Juan dice que solo son las respuestas del por qué, es solo en el b, Olga no entiende. Juan dice que va a fusionar todas las respuestas. Olga: ve pero este no está desarrollado (señala en la hoja). Juan: ¿Cuál? Olga: (nuevamente señala en la hoja de respuestas) No están organizados. Juan: si mira, dos, uno, menos uno, menos x y luego menos cero. Olga: ¿por qué? Menos uno, bueno en fin. Culmina la conversación María pregunta: En esta (señala la hoja) cuando se dice reunió es que se multiplicó términos semejantes. ¿Cierto? Juan: No María: En ¿dónde era que usted decía que se multiplicaba? Juan: (Lee la hoja de respuesta) Saco factor común, se invierte el segundo paréntesis, se multiplicó.	

FECHA: 30 DE JUNIO DE 2009
María: y ahí se reunieron términos semejantes. Juan: ahí si se reunieron términos semejantes. Juan alega que ya se había colocado lo que había sucedido, y no entiende porque le preguntan nuevamente. [4: 05 a 6:00 min.] Se observa la mesa 6, discuten cuales son las factorizadas Lucía dice que son el 3, 4 y el 7. Laura afirma que las factorizadas son las que tienen multiplicación Lucía: pero mira que la factorizada también esta ordenada. Daniela: no, factorizada es cuando esta multiplicada. Lucía: pero multiplicada también se puede ordenar. Tania: ¿qué no lo sean? Daniela: el 3, 4 y el 7 no son factorizados. Laura: ¿qué no lo sean? Se supone que unos son factorizados y otros desarrollados, lo que están pidiendo cuáles no son. Lucía: pero aquí todos son desarrollados y factorizados. ¿Entonces? Lina: entonces no hay respuesta (risas) Daniela: Pasemos a la siguiente. [6:00 a 7:20 min.] En la mesa 3, Mayra: no sé si el 6. Julián: falta organizar los términos, falta organizar los exponentes Mayra: ¿entonces el 6 también? Julián: debería de ser desarrollada Mayra: profe Julián: por ahora solamente está el 2. Mayra: desarrollado, pero no sé si el 6 este desarrollado. Profe falta organizar los términos y ¿por eso no es desarrollado? Profesora investigadora: un polinomio puede estar desarrollado sin que estén sus términos en orden. Mayra: entonces éste (señala en la hoja), ¿está desarrollado? ¿El dos también está desarrollado? Profesora investigadora: sí, ¿por qué? Mayra: ah no, no está desarrollado. El seis está desarrollado Julián: ¿y el dos? Mayra: el dos no, porque falta reunir los términos semejantes, el $4x$ y el $40x$. Julián: Mayra, ¿el uno y el dos están desarrollados? Mayra: ni el uno, ni el dos están desarrollados. [7:23 a 8:10 min.] La profesora se encuentra en la mesa 4, pregunta: el 6 y el 2 se están multiplicando, ustedes estaban hablando bien. Explique el procedimiento que hizo la calculadora para llegar a esa respuesta. Ustedes ya habían organizado esto aquí. Expliquen cómo paso esto. Alba: el qué estaba arribita. Marcela: ahí que escribir esto que tenemos aquí. Lady 2: explicar cómo este procedimiento, señala en la hoja.

FECHA: 30 DE JUNIO DE 2009

Profesora: exactamente
Todas: huy profe.
Profesora: pero ustedes ya lo analizaron, cuando arriba lo hicieron.
Todas: pero huy, todo eso.
Alba: pero será que si alcanzamos a hacer todo eso.
Profesora: si alcanzan.
Todas: pero hay.

[8:11 a 10:59 min.]
Se observa el trabajo de Mayra (mesa 3), lee la siguiente pregunta: ¿Cuáles son los polinomios desarrollados luego de dar [ENTER]?
Isabel: este no, el dos, el cinco, el seis y ya.
Mayra: ¿cuál dijiste vos?, el dos, el cinco y el…?
Isabel: el seis.
Julián: Mayra, ¿cuáles son los desarrollados después de dar el [ENTER]?
Mayra: el dos, el cinco y el seis. Pero no sé, si el uno también.
Julián: si, si
Mayra: entonces sería el uno, el dos, el cinco y el seis.
Julián: si Mayra
Isabel: también hay que explicar el procedimiento.
Mayra: lo que se hizo, ¿verdad? en todos reunir términos semejantes.
Isabel: ¿también?
Mayra: pues mira, en el primero lo que se hizo fue anular el cuatro, anular es reunir términos semejantes. En el dos también se reunieron términos semejantes. En el cinco se reunieron términos semejantes. En el seis también. Ah, no miento, en el seis solamente se organizaron de mayor a menor.
Isabel: y en el cinco.
Julián: entonces se coloca…
Mayra: no, en el cinco solamente se reunieron términos semejantes. Entonces se coloca se reunieron términos semejantes y se organizaron de mayor a menor según los exponentes.

[10:59 a 11:13 min.]
Se observa el trabajo de Camilo, él escribe un polinomio en su hoja de respuestas.

[11:14 a 13:24 min.]
En la mesa 4, Lady 2: toca escribir todo el procedimiento, hacer todo el procedimiento de éste hasta llegar a éste (señala en la hoja). Por eso, porque si no le toca que hacer el doble, hacerlo aquí y en la E.
Alba: coloquemos aquí la respuesta porque si no, no llegamos nunca.
Marcela: porque a cada rato toca voltear la hoja y no aguanta.
Lady 2: dos abre paréntesis equis menos tres, cierra, equis más dos.
Alba: saco factores comunes.
Marcela: aplicamos ley distributiva y ya.
Alba: no, factor común de ese es dos. El factor común de ese es uno.
Marcela: uno, ¿por qué?

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 30 DE JUNIO DE 2009</th></tr>
<tr><td colspan="2">Alba: porque uno por x es x
Marcela: si ve que no tiene factor común.
Lady 2: obvio, si tiene.
Marcela: ¿cuál?
Alba: uno, porque dos más uno, dos. No espere. No, dos por uno dos. Se supone que el factor de ese, es uno y el de ese, dos. Y por eso dos por uno dos, por eso aquí aparece el dos.
Alba: escribe en la hoja.
$(2x + 4)(x - 3)$
$2(x + 2)1(x- \ )$
Dos por x, $2x$ y dos por dos, cuatro. Uno para llegar a x, multiplicamos por x, no negativo.
Marcela: ah, ya se enredó. ¡Qué tragedia!
Lady 2: ¿y para el tres?</td></tr>
<tr><td>TIEMPO
T4: 13.24 a 15:35 min.</td><td>EL MOMENTO DE INSTITUCIONALIZACIÓN</td></tr>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">La profesora les pide un momento, lee la información de la hoja que se le ha entregado a cada estudiante (es una tarea que deben realizar en casa). Encuentre la expresión de desarrollada de los siguientes polinomios. Recuerden que la expresión desarrollada, es cuando no hay que hacerle ninguna operación a los polinomios, ya se han reunido los términos semejantes y no hay ninguna multiplicación. Luego les dice, organiza el polinomio y complétalo. Hagamos un ejemplo.
Realiza el procedimiento del primer polinomio: $x^2 + 4x - 1 - 4x$.
Ustedes ya lo conocen, fue el primero que trabajos hoy. En forma desarrollada, ¿cómo queda?
Estudiantes y profesora: $x^2 - 1$.
Profesora: ¿por qué? Por que $4x$ y $-4x$ me da cero.
Pero si les diera $x^3 + x + 2$, esta desarrollado y en orden pero después de x^3, ¿quién seguía quien?
Estudiantes: x^2
Profesora: entonces eso es lo que me piden en el segundo punto, que lo vuelva escribir, pero completo: $x^3 + 0x^2 + x + 2$.
Eso quiere decir completo, que los términos que no aparecen se les colocan los coeficientes ceros. Mañana traen esa tarea lista.
Hasta mañana, muchas gracias</td></tr>
</table>

Tabla 2. Transcripción del video del 1 de Julio de 2009.

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 1 DE JULIO DE 2009</th></tr>
<tr><th>TIEMPO
T1: 0:00 a 52: 27 min</th><th>EL MOMENTO DE TRABAJO DE LA TÉCNICA Y EL MOMENTO TECNOLÓGICO - TEÓRICO</th></tr>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">[0:00 a 2:29 min.]
La profesora lee la pregunta 2 y les indica que deben retomar el trabajo de ayer. Camilo le pregunta que si debe factorizar los que polinomios que ya se encuentran factorizados, la profesora le responde que si se puede sacar otro factor y se continúa la factorización, de los polinomios de la columna A de la Tabla 14, sólo uno se encuentra complemente factorizado. En la mesa 6, Lucía afirma que los que un polinomio que señala en la hoja (parece ser el séptimo), no está factorizado porque no aparece multiplicación.

[2:30 a 2:48 min.]
Laura (mesa 7) afirma que los polinomios de la forma factorizada luego de dar [ENTER] son el 2, el 3 y el 4, porque los demás son desarrollados con un proceso. Ella escribe los polinomios ubicándolos en columnas.

[3:05 a 3:21 min.]
Daniel (mesa 1) señala el 3, el 4 y el 7.
Profesora: ahora explique que hizo la calculadora, ¿por qué obtuvo esto?
Daniel: ¿Debo hacer un procedimiento?
Profesora: exactamente.

[3:26 a 3:55 min.]
Ahora la profesora se encuentra en la mesa 2, Juan pregunta cuáles son los polinomios que se deben escribir en la forma desarrollada. La profesora nuevamente lee la hoja de preguntas y le señala que son todos los de la columna A[75] de la Tabla 14. Para la pregunta ¿existen algunos que ya estén en la forma desarrollada?, Juan señala el primer polinomio de la columna A de la Tabla 14.

[4:11 a 7:11 min.]
En la mesa 3, discuten si son los polinomios de la columna A o B, los que se deben desarrollar. Mayra aclara que son los de la columna A y los que ya estén desarrollados no se deben desarrollar. Empieza a mencionar que el primer polinomio ya está desarrollado, el dos falta. Dice que el $4x$ con el $40x$ da $44x$. Julián refuta y dice que da $-36x$. Mayra aprueba la respuesta. Comparten las respuestas con los compañeros de la mesa.
Dayanna: el dos ya estaba, solo debíamos organizarlos no más, ¿no Mayra?
Isabel: por eso y ¿los demás no hay que desarrollarlos?
Mayra: yo digo que no, porque están factorizados.
Isabel: ¿y el 3?
Mayra: El 3 y el 4 no. El 5 no sé, el 6 hay que acomodarlo y el 7 … también.</td></tr>
</table>

[75] En la hoja aparece la columna 1, sin embargo se ha cambiado a columna A para quede en coherencia con las explicaciones del cuerpo del trabajo.

FECHA: 1 DE JULIO DE 2009
Dayanna: ¿el dos también? Julián: obvio. Parece que Dayanna ha escrito un polinomio equivocado en su hoja de respuestas y Julián le dice que si uno es positivo y el otro negativo, se restan los términos. Mayra parece tener el mismo error de Dayanna. [7:16 a 18:31 min.] Alba le pregunta a la profesora investigadora: Alba: ¿cuándo es desarrollada es porque está en orden y tiene tres términos? Profesora investigadora: la forma desarrollada puede estar en desorden, no deben de haber términos semejantes y debe estar en forma de suma. Por ejemplo este de aquí (señala el polinomio 6 de la columna A) está desarrollado pero no está ordenado. Aquí ya se ordena (señala la columna B de la Tabla 14). Alba: no tampoco Profesora investigadora: aquí le falta una equis al cubo. Alba: así (corrige en la hoja, tenia $x + x^2 - 4x - 4$ por $x^3 + x^2 - 4x - 4$). Profesora investigadora: este por ejemplo ya está en la forma desarrollada y en orden (señala el segundo polinomio de la columna B). Porque no hay términos semejantes y se están sumando monomios o restando monomios. Alba: no necesariamente tiene que tener tres términos. Profesora investigadora: no necesariamente tienen que tener tres términos. (Señala un polinomio de la Tabla 14) mira aquí hay cuatro. También seis. Marcela: viste, viste. Alba: entonces es el segundo, el quinto y el sexto. Todas las estudiantes de la mesa 4, escriben la respuesta. Alba saca su calculadora aritmética. Marcela: ¿vos trajiste la hoja de factorización? (Ninguna de las compañeras ha traído la hoja de factorización). Alba escribe el polinomio 2 de la columna A y reduce los términos $-40x + 4x$. Marcela: ¿por qué da $-36x$? ¿Usted resto esto? (señala en la hoja de trabajo dos monomios). Escriben la respuesta dada por la calculadora y el polinomio inicial, para saber a ¿qué deben llegar? Alba escribe el quinto polinomio, indica que debe realizar la multiplicación. Realiza lo siguiente: $(x^2 - 4)x + x^2 - 4$ $x^2x + x^2x^2 - x^24 - 4x - 4x^2$. Borra el anterior resultado y vuelve a realizar el procedimiento, escribe: $x^2x + x^2x^2 - x^24 - 4x - 4x^2 + 4$. Marcela: Alba me explica que no entendí. Alba escribe $x^3 + x^4$ Marcela: no, no, no. Alba: en la respuesta aparece x^2. (Voltea la hoja para cerciorarse del resultado de la calculadora). Alba: hay algo raro que no me cuadra. Marcela revisa el procedimiento de Alba: lee lo que han escrito en la justificación, afirma que

FECHA: 1 DE JULIO DE 2009

aplicar la ley distributiva es multiplicar.
Marcela muestra en la hoja como aplicar la ley distributiva. Las flechas indican las multiplicaciones de los términos.

$$(x^2-4)x+x^2-4$$¶

Alba, borra los productos y los vuelve a realizar, coloca inmediatamente los resultados de aplicar su ley distributiva. Llama a la profesora.
La profesora lee la pregunta y la respuesta, ella coloca aquellos polinomios que luego de dar [ENTER] se expresan en su forma desarrollada.
Profesora: ¿por qué el primero no?
Alba: porque aquí está el x^2 y tiene que ser x. En orden.
Profesora: le falta un término, pero está desarrollado. ¿Aparecen términos semejantes para reunir?.
Alba: no
Profesora: ya se reunieron, ¿verdad?
Alba: si
Profesora: por eso este no estaba desarrollado porque había términos semejantes para reunir. ¿Esta expresado como factores?
Marcela: si
Profesora: ¿Cuáles son los factores?
Marcela: x^2 y -1 (los señala en la hoja)
Profesora: no porque yo veo un signo de operación, que es resta, menos. Entonces no son factores. ¿Factores es para qué operación?
Marcela: multiplicación
Profesora: multiplicación, como aquí que está indicada una multiplicación (señala el polinomio 3 de la columna A). Entonces éste (señala el polinomio de la fila 1, columna B) está desarrollado.
Alba: sí.
Profesora: éste está desarrollado.
Alba: la duda era que cuando fuimos a desarrollar éste (polinomio de la fila 5, columna A) para llegar a éste (polinomio de la fila 5, columna B).
Profesora: (Lee la pregunta de su hoja). En éste que procedimiento realizó la calculadora para llegar a éste (señala en la hoja).
Marcela: reunió
Profesora: entonces explique cuáles reunió.
Alba: las x, $4x$ y $-4x$.
Profesora: $4x-4x$, qué me da?
Alba: cero
Profesora: así va explicando cada uno.
Alba: si profe, pero cuando hicimos esta tuvimos un problema (polinomio 5).
Profesora: (señala los factores de la expresión algebraica), ¿qué tiene que hacer la calculadora?
Alba: aplicar la ley distributiva
Profesora: muy bien, aplicar ley distributiva. ¿Haber dónde está?
Alba: aquí está (señala la respuesta).
Profesora: $x \times x^2$

FECHA: 1 DE JULIO DE 2009
Alba: x^3 Profesora: $x \times 4$. (La profesora señala los siguientes términos con su dedo índice. $(x^2-4)x+x^2-4$) Alba: $4x^2$ Profesora: no, x por 4 Alba: $4x$ Profesora: y tú que escribiste? Marcela: x^4, vio. Alba: no, no profesora. Éste por este, éste por este. (Señala los siguientes términos $(x^2-4)x+x^2-4$). Profesora: no señora, solamente esta multiplicado ¿por quién? Marcela: por x. Profesora: eso que estas diciendo es si hubiera aquí un paréntesis y acá otro. (Señala en la expresión los paréntesis que han sido resaltados $(x^2-4)(x+x^2-4)$). Pero no lo hay. Alba: Entonces es solamente por este (señala la x) Profesora: solamente es por éste (la x) y reúne los términos. Alba borra lo que había escrito. [18:31 a 24:40 min.] Camilo (mesa 5) mira la hoja de factorización que le ha entregado su profesora previamente a la intervención. Indica que parece ser uno de los trinomios de la forma x^2+bx+c, pero menciona que no han visto la factorización de expresiones elevadas al cubo para el caso de la expresión x^3+x^2-4x-4. Manifiesta que está bloqueado. Luis llega a una expresión cuadrática: $16x^2+144x-352$, que proviene de la expresión $4x^2-36x-88$, dice que primero los organizó y luego multiplicó por cuatro. Camilo pregunta por la división por cuatro. Revisa la expresión y la expresa como $4^2x^2-4\times 36x-352\div 4$, encuentra que el segundo término es negativo. Intenta factorizar el trinomio y usa la técnica de los polinomios de la forma x^2+bx+c. No encuentra un número que multiplicado de 352 y sumado dé 36. Exclama que tiene que dar menos 36, revisa los signos del segundo término y el tercero. E inicia a expresar algunos productos Camilo: 63×4, no da; 21×12, tampoco da. 36 por cuanto se tiene que multiplicar para llegar a 352. Luis: 36×4, o 8×-3 Camilo: es que no hay, analiza por 10 da 36, por 9 da 324, no da 352. Entonces no se puede. Luis: 36×10 da 360 Camilo: y 36 por nueve muy bajo. Luis: 37 por 9 Jefferson: da 324 no sirve. Camilo: no da. Debemos usar la fórmula que dijo la profesora que no nos habían enseñado.

FECHA: 1 DE JULIO DE 2009

[24:40 a 27:22 min.]
En la mesa 6, Felipe se realiza el desarrollo de los polinomios de la Tabla14.
Daniela: yo no entiendo Felipe, tenemos que expresar los polinomios de la forma desarrollada. ¿Y el proceso?
Lucía: pero esto (señala la columna A de la Tabla 14)
Felipe: no se puede, por eso estoy haciendo el proceso.
Felipe: se multiplica éste por éste, éste por éste (indica los términos a multiplicar y aplica la ley distributiva).
Daniela: pero no hay que reunir términos semejantes?
Lina: si señora, así hizo la profesora.
Lucía: es que no son los resultados.
Daniela: es todo los que se puedan expresar. ¿Cuáles se pueden expresar de la forma desarrollada?
Felipe: por eso. Si te da este resultado (señala un polinomio de la forma factorizada) tienes que mirar cómo llegar a la forma desarrollada.
Lina: pero los de la columna A.
Felipe: por eso, si haces un procedimiento (señala a la expresión de la columna A) te da esto (señala la expresión de la columna B). Ahora hay que hacer otro procedimiento para que le dé la forma desarrollada.
Lina: ah, ya entendí.
Felipe: (risas), bueno no sé, en este no se puede hacer, da $2x^2$. No se puede hacer.
Daniela: ¿en cuáles se puede hacer?
Felipe: hay que multiplicar éste por éste y luego éste por éste. (Se observa la hoja a realizado lo siguientes líneas en la expresión $2(x+2)(x-3)$).
Éste por éste (señala x y x) daría x^2. Y con este dos daría $2x^2$. Luego x por 2, daría $2x$. Allí se va cumpliendo, ¿no? Pero al multiplicar 3 por esta x daría $3x$, pero supuestamente la x no debería estar.
Daniela: y los positivos y negativos ¿dónde los pone?
Felipe: ahorita más ratico. Me da $-3x$ y esa equis no debería estar allí, no cumple la forma desarrollada.
Daniela: es que desarrollada es ordenada.
Lina: por eso
Felipe: no se cumple no se puede ordenar.
Lucía:¿ y entonces?
Felipe: es lo único que sé, les doy copia. No hay nada más que hacer.
Los de la mesa copian el resultado.
$2(x+2)(x-3)\ 2x^2\ 2x\ -3x$ (omiten el signo = de $2(x+2)(x-3) = 2x^2\ 2x\ -3x$)

[27:24 a 28:31 min.]
En la mesa 5, Camilo realiza la factorización. Mira la hoja de las técnicas L/P para factorizar. Dice que sólo le falta el 5 para expresarlo en la forma factorizada.

[28:31 a 36:42 min.]

FECHA: 1 DE JULIO DE 2009
Se observa la mesa 2, Juan realiza la factorización de $4x^2 - 36x - 88$. Dice dos números que multiplicados me den -88 y sumados -36. Debe ser uno positivo y otro negativo. Juan descompone 88 en factores primos. Pregunta si 88 tiene raíz cuadrada. No cierto. Sus compañeros no contestan. Dice 9 por 9 es 81 y 10×10 yuca. Andrés refuta, no da 100 y no yuca. Juan: toca qué hacer una cosa larguísima que pereza. Olga: no se puede factorizar. Juan: toca hacer una cosa larguísima y me da pereza. María: toca multiplicar todo por 4 y dividirlo por 4. Juan: sí. Juan: toca reunir términos semejantes, hay que desarrollarlo María: no, hay que factorizarlo. Juan: para factorizarlo hay que desarrollarlo primero, reunir términos semejantes. (Solicita ayuda de la profesora). Profesora: a ver Juan Juan: cierto profe que para poder factorizarlo hay que colocarlos en la forma desarrollada. Profesora: no (la profesora lee la consigna de la tarea) ¿es posible expresar los polinomios de la columna A en la forma factorizada? Realice el procedimiento para escribirlos en la forma factorizada, en el caso de que sea posible. Este primero (fila 1, columna A) ¿qué haces con este polinomio para poderlo factorizar? Juan: reuní términos semejantes, (señala la columna B, fila 1), queda una diferencia de cuadrados. Ese ya lo tengo. Profesora: este (columna A, fila2) Juan: este también. Quedaría así (señala la columna B, fila 2). Profesora: ¿qué es lo primero que uno le mira a un polinomio? Juan: factor común. Profesora: el factor común y luego continúas. Juan: ya me acorde. Este ya está factorizado (columna A, fila 3), este ya está factorizado (columna A, fila 4). Profesora: pero éste todavía le podemos hacer algo (columna A, fila 3). ¿Qué fue lo que hizo la calculadora? Juan: No, profe. Ah, factor común, no qué pereza. Aquí también factor común (columna B, fila 4). Profesora: en éste qué hacemos para factorizar (columna A, fila 5). Juan: multiplicamos esto por la x. Daría esto (columna B, fila 5). Aquí se reúnen términos semejantes. Profesora: esa podría ser una forma, pero hay otra forma. Pero si te queda más fácil con esa. Juan: ¿cómo sería la otra forma? Profesora: observa aquí que tienes dentro de ese paréntesis (columna A, fila 5). Juan: x^2 menos 4. Profesora: x^2 menos 4. ¿Todo multiplicado? Juan: por x. Profesora: ¿por fuera del paréntesis qué tienes? Juan: x^2 menos 4. Profesora: qué pasa si yo le coloca a esto un paréntesis (se refieren al segundo x^2 menos 4).

FECHA: 1 DE JULIO DE 2009

Juan: qué esto quedaría al cuadrado (señala los dos x^2 menos 4).
Profesora: ¿humn?
Juan: qué esto quedaría al cuadrado (señala los dos x^2 menos 4).
Profesora: si a esto se encierra en un paréntesis (señala los dos x^2 menos 4).
Juan: que quedaría encerrado en un paréntesis. No, no sé.
Profesora: compare, qué pasaría con esto y con esto (señala los dos x^2 menos 4).
Juan: qué esto quedaría a esto (señala los dos x^2 menos 4).
Profesora: entonces, ¿qué sería? Habría dos términos.
Juan: quedaría dos veces esto (x^2 menos 4).
Profesora: estaría repetido. ¿Sería qué?
Juan: al cuadrado.
Profesora: Factor común.
Juan: no
Profesora: escríbelo.
Juan escribe
$(x^2-4)x\ +(x^2-4)$
Profesora: compara este término con este (x^2 menos 4)
Juan: son iguales.
Profesora: no, porque que este (el primer x^2 menos 4) esta multiplicado por x, y este no (segundo x^2 menos 4). Pero el paréntesis es igual. ¿Cuándo hay un factor igual en dos términos que hacemos?
Juan: factor común.
Profesora: qué es lo que es igual.
Juan: x^2 menos 4
Profesora: entonces escribe como factor común. Entre paréntesis porque el binomio es un factor común. ¿Por quién?
Juan: x.
Profesora: por cuánto multiplico para que me vuelva a dar esto ((x^2-4)). Por uno, cierra el paréntesis y ya está factorizado, sacando factor común. ¿En este caso qué había de especial?, que el factor común es un binomio. Ahora mira esos dos factores, ¿se puede seguir factorizando?
(Juan ha escrito en su hoja $(x^2-4)(x+1)$)
Juan: la x. ¿no? No se puede sacar la x.
Profesora: x aquí es un término y aquí un término. Pero mira cada binomio. Mira el primer binomio.
Juan: es una diferencia
Profesora: sí.
Juan: si, una diferencia de cuadrados.
Profesora: el primer binomio es una diferencia de cuadrados, entonces ¿cómo queda?
(Juan escribe en su hoja de trabajo $(x+2)(x-2)(x\ +1)$)
Profesora: ¿quedo completamente factorizado?
Juan: pues sí.
Profesora: bien.
Juan borra el procedimiento, Olga le dice que deje lo que había escrito.

[36:47 a 39:08 min.]

FECHA: 1 DE JULIO DE 2009
En la mesa 1, se observa lo que escribe Marisol y Daniel en sus hojas de respuestas. [39:13 a 39:39 min.] En la mesa 7 Sebastián, escribe las respuestas de Laura y Natalia en su hoja de trabajo. Mientras Laura intenta realizar la factorización de un polinomio en su cuaderno. [39:40 a 44:42 min.] En la mesa 4, Alba se enfrenta a la factorización de $4x^2 - 36x - 88$. Dice que se debe realizar un procedimiento largo, pero luego determina que se puede sacar factor común. Marcela dice que el factor común es 2, Alba afirma que es 4. Alba utiliza su calculadora aritmética para mostrarle a Marcela que los coeficientes de los términos del polinomio son divisibles por 4, divide 88 entre 4. Las otras divisiones las realiza mentalmente. Escribe $4(x^2 - 9x - 22)$. Alba: entonces después de esto tengo que sacar los binomios. Marcela: no. Alba: si Marcela: cuáles binomios. Alba: entonces después de esto, qué se hace. (Llama a la profesora investigadora pero no se acerca). Lady (2): sabes dónde está la hoja de factorización. La profesora indica que de las hojas de trabajo de cada una de las parejas sólo deben de entregar una hoja con las operaciones. La otra es para realizar la plenaria. Alba: (pregunta a la profesora investigadora) ya saque factor común de este $(4x^2 - 36x - 88)$. Y me dio esto $4(x^2 - 9x - 22)$. Ahora tengo que buscar dos números que me multiplicados me den 22 y sumado o restando me de 9. Profesora investigadora: ¿Cómo haces para saber si es sumado o es restado? Alba: tiene que ser restar porque (señala a $9x$) es menor. Profesora investigadora: trajiste la hoja de factorización. Alba: no Profesora investigadora: colocas el cuatro y sacas los dos grupos. Le sacas la raíz a este (x^2). ¿Cuál es? (lo que escriben es $4(x \quad)(x \quad)$) Alba: x Profesora investigadora: este signo lo pones acá. ¿Y menos por menos? (lo que escriben es $4(x- \quad)(x \quad)$) Alba: más Profesora investigadora: este signo lo colocas acá. Si son de diferente signo, ¿se suman o se restan? (lo que escriben es $4(x- \quad)(x+ \quad)$) Alba: se restan. Profesora investigadora: se restan. Allí es donde se da cuenta si se suman o se restan, cuando se hace esto. Marcela: qué te dije Alba. Alba: entonces tiene que ser el once el negativo y el menor dos. (Lo que escriben es $4(x - 11)(x + \ 2)$). Después de esto…

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 1 DE JULIO DE 2009</th></tr>
<tr><td colspan="2">Marcela: las diferencias.
Alba: no está bien.
Alba: ahora tengo que factorizar $x^3 + x^2 - 4x - 4$. A ver factor común de todos, no hay factor común. ¿Binomio?, no. (Alba mira la hoja de factorización, llama a la profesora).

[44:42 a 48:39 min.]
En la mesa 3, Julián realiza algunos productos en una lista. Parece que desarrolla el polinomio $(2x + 4)(x - 3)$. Borra cada uno de los productos. Escribe los productos y reduce los términos semejantes.
Dayanna le pregunta a Julián ¿cuál sería el procedimiento para el siguiente polinomio? Cree que es igual que el anterior. Julián le indica la aplicación de la ley distributiva, señala los términos a multiplicar. Dayanna realiza una línea, Julián indica los términos a multiplicar, traza líneas. En la hoja de Isabel se observa la reducción de dos términos semejantes, al parecer al desarrollado el cuarto polinomio (columna A, fila 4).
Julián y Mayra confrontan sus respuestas, Mayra sumó $18x$ y $12x$, Julián restó $18x$ y $12x$. Isabel y Mayra aceptan la respuesta de Julián, pero Isabel duda del signo de $-6x$. Julián indica que es porque es $-18x + 12x$

[48.40 a 52:26 min.]
En la mesa 6, Felipe realiza los productos del séptimo polinomio (columna A, fila 7), luego reducen los términos semejantes para expresar el polinomio en su forma desarrollada. Tania revisa el procedimiento realizado por Felipe y le indica que existe un error. Felipe cambia la respuesta y le da indicaciones a Lucía en relación a la multiplicación de los términos. Felipe nuevamente realiza el producto del séptimo polinomio, pero ahora el resultado es diferente. La profesora se acerca a cada mesa y solicita la entrega de la hoja de respuestas.</td></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1: 52: 27 a 1:16:59 min.</td><td>EL MOMENTO DE INSTITUCIONALIZACIÓN Y EL MOMENTO DE EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">La profesora lee el enunciado de la primera tarea y los polinomios. Luis responde que en el primer polinomio se ha convertido en $x^2 - 1$ y lo que ha hecho la calculadora es reducir los términos $4x - 4x$. Julián dice que en el segundo polinomio se convierte en $4x^2 - 36x - 88$, porque reunió el $4x$ con el $40x$ y los organizó según sus exponentes. Para el tercer polinomio Felipe dice que le dio $2(x - 3)(x + 2)$ y que la calculadora sacó factor común a $(2x + 4)$.
Profesora: además de eso, qué hizo la calculadora.
Lucía: lo ordenó.
Profesora: muy bien. El cuarto $(2x + 4)(3x - 9)$. (silencio) ¿Qué nos dio la calculadora?¿Qué resultado? (silencio) $(2x + 4)(3x - 9)$.
Alba: $6(x - 3)(x + 2)$, hay dos factores comunes.
Profesora: a quién le sacó factor común.
Alba: a los dos binomios.
Profesora: a los dos binomios. Al primer binomio qué factor común le saco.
Alba: el 2.
Profesora: ¿y al otro?
Alba: 3.
Profesora: por eso aparece qué número</td></tr>
</table>

FECHA: 1 DE JULIO DE 2009
Alba: 6. Profesora: 6, porque 2 por 3 es 6. ¿Qué otra cosa hizo además de sacar factor común? Alba: los organizo. Profesora: bien. El quinto, $(x^2 - 4)x + x^2 - 4$. ¿Qué obtuvo la calculadora? Lady: $x^3 + x^2 - 4x - 4$ Profesora: bien, entonces qué operaciones realizó la calculadora. Lady: multiplicó el paréntesis. Profesora: ¿eso aplicar qué? ¿Por qué multiplicó el paréntesis? ¿Por quién multiplico ese paréntesis? Estudiantes: por la x Profesora: ¿cómo hacíamos esa multiplicación? Aplicando la propiedad Estudiantes[76]: distributiva. Profesora: ¿Qué más hizo la calculadora? Estudiante: los acomodó Profesora: antes de acomodarlos qué más tuvo que hacer. Antes de ordenar ese polinomio que más tuvo que hacer la calculadora. Estamos en el quinto. Dayanna: ordenarlos según su exponente. Profesora: antes de ordenarlos tuvo que hacer algo. Estudiante: aplicar la propiedad distributiva. Profesora: ya la aplico, entonces qué apareció. Juan: Multiplicó por el paréntesis, los exponentes los acomodó. Profesora: tuvieron que reunir términos semejantes. El sexto $x^2 + x^3 - 4x - 4$. ¿Qué ocurrió? Jefferson: lo mismo, $x^3 + x^2 - 4x - 4$ Profesora: ¿qué hizo la calculadora? Jefferson: se organizaron los términos. Profesora: exacto. El séptimo $2x(x-1) + 3x(1-x)$. Mire lo que nos dio. Mayra: nos dio $-x(x-1)$. Profesora: ¿qué explicación le das a eso? Mayra: aplicaron ley distributiva y organizaron términos semejantes. Profesora: miren que hizo la calculadora. Mayra: saco el mínimo común múltiplo y se multiplicó. Estudiantes: nooo. Mayra: sí. Profesora: allí no hay mínimo común múltiplo. Juan: en el segundo término se invirtieron los signos, se sacó el menos para poder cambiar los signos y se múltiplo el $3x$ por ese mismo paréntesis, luego se reunieron términos semejantes. Profesora: Se pudo factorizar. Sí, pero primero hubo necesidad de cambiar signos en ese paréntesis. Observen que se primer paréntesis dice $x - 1$ y el otro $1 - x$. Mientras que en uno la x es positiva en el otro es negativa. El uno esta negativo y en el otro paréntesis el uno esta positivo. Entonces era necesario cambiar los signos del segundo paréntesis. Para eso sacaste como factor común el menos uno. Bien. El segundo[77] observa los resultados dados por la calculadora y responda. A. Clasifica los polinomios de la columna A en la forma factorizada o

[76] Cuando no se identifica la persona que habla se escribe estudiante.
[77] En la hoja de respuestas de los estudiantes, era la pregunta o tarea 1.2.

FECHA: 1 DE JULIO DE 2009
desarrollada. Para aquellos que no los sean en la forma factorizada o desarrollada, justifica porque no lo son. ¿Cuáles están en forma desarrollada? Julián: el uno, dos, el cinco y el seis. Profesora: estamos mirando la columna A, la primera columna. Tú me dices que el uno, el uno de la primera columna ¿está desarrollado? Julián: el seis Profesora: ya porque no es el uno. Antes habías dicho el uno y ahora porque no. Felipe: porque no están reunidos términos semejantes. Profesora: entonces solamente el seis. ¿Cuáles están en forma factorizada? Estudiantes: tres, cuatro y siete. Profesora: haber, observemos el siete. Ustedes me dicen que el siete esta en forma factorizada. Cuando hablamos en forma factorizada, ¿Qué significa eso? ¿Qué significa que este factorizada? ¿Qué operación hay allí? Estudiante: multiplicación. Profesora: en el séptimo se está indicando solamente multiplicación. Estudiantes: no Profesora: en el séptimo, ¿todo está en forma de factores?¿Qué pasa Camilo? Camilo: se suma $2x(x-1)$ con $3x(1-x)$ Profesora: como hay una suma no esta factorizada. ¿Cuáles quedaron sin factorizar? Felipe: 1,2, 5 y 7 Profesora: tú ya dijiste porque no está desarrollado el uno (señala a Felipe). El dos ¿por qué no está en forma desarrollada? Julián: falta reunir exponentes. Profesora: ¿Exponentes? ¿Qué es lo que nos falta reunir? Julián: términos. Profesora: ¿cuáles términos? Julián: $4x$ y $-40x$. Profesora: o sea términos semejantes. El quinto por qué no está desarrollada ni factorizada. Felipe: porque hay que realizar una multiplicación. Profesora: porque hay que realizar una multiplicación, pero también una suma. Felipe: hay que reunir términos semejantes. Profesora: hay que reunir términos semejantes. Primero hay que hacerle todas las operaciones que están indicadas. Bien pasemos al punto B. Cuáles son los polinomios qué luego de dar [ENTER] fueron expresados en forma factorizada? Ya miramos cuál columna. Felipe: el dos. Profesora: la columna B. ¿Cuáles quedaron en la forma factorizada? Estudiantes: el tres, el cuatro y el siete. Profesora: el tres, el cuatro y el siete. Bien. ¿Quién nos explica, qué paso con el tres? Miren acá el tres. $(2x+4)(x\ -3)$. Esto era lo que nos daban en la columna A. En la segunda nos dan $2(x-3)(x+2)$. ¿Qué fue lo que paso? Yurani: se buscó el factor común Profesora: de cuál binomio? Yurani: del primero Profesora: ¿cuál es el factor común de $(2x+4)$? Yurani: dos

FECHA: 1 DE JULIO DE 2009
Profesora: entonces qué queda al sacar factor común dos. Continúa. ¿Qué queda al sacar un dos, aquí (señala $2x$)? Julián: x Profesora: y aquí (señala el 4) Felipe: dos Profesora: dos por equis, dos equis y dos por dos, cuatro. Por equis menos tres. (La profesora escribe en el tablero $2(x+2)(x-3)$), pero éste no fue el resultado, sino éste (señala $2(x-3)(x+2)$). ¿Qué fue lo que hizo la calculadora? Estudiantes: los organizó. Profesora: ¿Cuál otro estaba factorizado? ¿Quién nos viene a explicar qué paso con el cuatro? (Escribe en el tablero $(2x+4)(3x-9)$). Felipe: lo que hizo la calculadora fue sacarle factor común al primero y al segundo. Después los multiplicó. Factor común de este (señala $(2x+4)$) seria 2. (Escribe en el tablero $2(x+2)$). El factor de este (señala a $(3x-9)$) seria 3. (Escribe en el tablero $3(x-3)$, queda finalmente $2(x+2)3(x-3)$). Lo que hizo la calculadora fue multiplicar éste con éste (señala al 2 y al 3), da 6 por equis más dos por equis menos tres. Profesora: ¿qué hizo luego la calculadora? Estudiantes: los ordenó. Felipe: quedo seis por equis menos tres, por equis menos dos (Escribe en el tablero $6(x-3)(x+2)$). Profesora: muy bien. ¿Quién más quedo factorizado? Estudiantes: el siete. Profesora: ¿quién va explicar qué paso con el siete? (La profesora escribe y lee el polinomio $2x\,(x-1)\ +3x(1-x)$). Y a la calculadora le dio $-x(x-1)$. ¿Quién va explicarlo? Alba: se supone que $(1-x)$ y $(x-1)$, hay que tratar de que queden iguales, en el mismo orden. Profesora: con los mismos signos. Alba: tomamos $(1-x)$ y al multiplicarlos por -1, ya vuelve al primero (señala $(x-1)$). (Escribe $2x(x-1)\ -1(3x(1-x))$). Multiplicamos -1 por menos $3x$, daría $-3x$ y -1 por 1 daría menos 1, y -1 por $-x$, daría más x. (Escribe en el tablero $2x(x-1)-\ 3x(x-1)$). Como estos quedaron de los mismos signos (señala a los dos binomios $(x-1)$) restamos estos dos (señala a $2x$ y $-3x$) Profesora: a ver, un momentico. (Hay un corte del video). Profesora: ya me dijeron cuáles son los que quedaron en la forma desarrollada. A ver ¿por qué el uno está en la forma desarrollada? Ya lo habíamos visto. ¿Por qué? Cuando dieron [ENTER] porque está desarrollado. Juan: ya se habían reunido los términos semejantes. No había nada más que hacer en el polinomio. Profesora: muy bien. El dos. ¿Qué paso con el dos? Estudiantes: se reunieron esos términos semejantes. Profesora: (repite lo anterior). ¿Cuál es el otro? Estudiantes: el cinco. Profesora: ¿por qué esta en forma desarrollada? Antes de reunir términos semejantes ya habíamos dicho que se había hecho. Eso ya estaba en el primer punto cuando mirábamos que había hecho la calculadora. Antes de reunir los términos semejantes que tuvo qué hacer la calculadora. Estamos en el quinto. Ya habíamos mirado lo que se tenía que hacer en el quinto.

FECHA: 1 DE JULIO DE 2009

Luis: la distributiva.
Profesora: aplico la distributiva al multiplicar por equis. ¿Cuál otra quedo desarrollado? El seis.
Estudiante: simplemente lo organizó.
Profesora: pasemos al punto D. (Lee el enunciado) ¿Cuántos hemos mirado que están en la forma desarrollada?
Estudiantes: cuatro
Profesora: solamente nos hacen falta tres. (Lee el enunciado) ¿Cuántos nos faltan? El tres, el cuatro y el siete. ¿Cómo lo hacemos? ¿Qué hacen en el tres? Si tienen un binomio por otro binomio. Se tiene $(2x + 4)(x - 3)$. ¿Cómo llevaron este polinomio en la forma desarrollada?
Felipe: sacamos factor común.
Profesora: para llevarlo a la forma desarrollada, ¿sacamos factor común?
Felipe: no
Profesora: ¿cuándo sacamos factor común es para qué?
Estudiantes: para factorizar
Profesora: para factorizar. ¿Cómo lo llevó a la forma desarrollada?
Alba: multiplicó un paréntesis por otro.
Profesora: multiplico un binomio por el otro (La profesora indica los productos de los términos de la siguiente manera

$$(2x + 4)(x - 3)$$

)

Al hacer eso qué obtuvieron, léanme lo que obtuvieron. Ustedes tienen allí las operaciones. ¿Qué obtuvieron al hacer eso?
Felipe: $2x^2 - 6x + 4x - 12$.
Profesora: después, ¿qué hicieron?
Felipe: agrupamos términos semejantes.
Profesora: y ¿qué les quedo?
Felipe: $2x^2 - 2x - 12$.
Profesora: lo mismo tenía que hacer con el cuarto y el siete. Aplicar también la distributiva.

Tabla 3. Transcripción del video del 7 de Julio de 2009.

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 7 DE JULIO DE 2009</th></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1: 0:00 a 4.21 min.</td><td>EL MOMENTO DEL PRIMER ENCUENTRO.</td></tr>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">Se observan las mesas de trabajo, la profesora les entrega las hojas con las preguntas de la situación 2. Los estudiantes previamente se les ha solicitado que encuentren la forma desarrollada y completa de algunos polinomios.
La profesora les da un ejemplo de lo que debían hacer, escribe las expresiones en tres columnas, una con el polinomio dado, otra con el polinomio desarrollado y otra con el polinomio desarrollado y completo.
<table><tr><td>$x^2 + 4x - 1 - 4x$</td><td>$x^2 - 1$</td><td>$x^2 + 0x - 1$</td></tr></table>
La sugerencia es que tengan en cuenta que para completar un polinomio es necesario que estén en orden, que se fijen en los términos que hacen faltan, cuyo coeficiente sería cero. En el caso anterior, falta el término cuya ´parte literal es x, para completarlo se escribiría $x^2 + 0x - 1$.</td></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1: 4:21 a 38:18 min.</td><td>EL MOMENTO EXPLORATORIO</td></tr>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">Las estudiantes de la mesa 4, 5 y 7 tienen la respuesta de la forma desarrollada y completa de los polinomios en su cuaderno y los escriben en la hoja de respuestas.

[8:14 a 8:52 min.]
En la mesa 1, Fabián pregunta: si un polinomio tiene todos sus términos ¿es necesario agregarle ceros (el segundo polinomio)? La profesora le indica que dicho procedimiento solo es necesario para los polinomios que no están completos.

[8:56 a 9:16 min.]
Se observa que en la mesa 2, Lady ya ha encontrado todos los polinomios desarrollados y completos.

[9:17 a 9:40 min.]
En la mesa 6, la profesora les llama la atención porque no realizaron en casa la tarea de hallar la forma desarrollada y completa de los polinomios.

[10:02 a 13:16 min.]
En la mesa 3,5 y 6, se cuestionan por lo que necesitan hacer en las columnas de la parte D la Tabla 16.

[13: 20 a 13:48 min.]
En la mesa 2, Juan inicia las evaluaciones del polinomio, encima del polinomio sustituye el valor de x y realiza mentalmente las operaciones. Borra la sustitución para realizar otra evaluación.

[13:50 a 14:33 min.]</td></tr>
</table>

FECHA: 7 DE JULIO DE 2009	
En la mesa 1 se observa a Fabián al escribir la forma desarrollada de los polinomios y mirar la respuesta de su cuaderno. Los estudiantes reciben sus calculadoras simbólicas y trabajan en cada una de las mesas.	
TIEMPO T1. 16:11 a 30:10 min.	**EL MOMENTO DE INSTITUCIONALIZACIÓN Y EL MOMENTO DE EVALUACIÓN**
DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS	

La profesora escribe los polinomios de la columna A de la Tabla 16.
Profesora: esa es la columna A que aparece en sus hojas, en la columna B debían de escribirlo en forma desarrollada y en orden. El primero ya lo habíamos hecho. Reunimos $+4x\ -4x$, ¿nos da?
Estudiantes: cero
Profesora: y quedo x^2-1. En la tercera, hay que completarlo, ¿qué falta?
Estudiantes: la x.
Profesora: ¿Qué escribimos en vez de esa x que no estaba?
Estudiantes: $0x-1$ (escribe en el tablero x^2+0x-1).
Profesora: así tenían que hacer los otros restantes ¿Quién escribe el segundo? Una vez completa la columna B y C.
Felipe sale al tablero y escribe

$4x^2-24x-24$	$4x^2\ -24\,x\ -24$

Profesora: ¿están de acuerdo con lo que él escribió?
Estudiantes: no.
Profesora: ¿por qué no? ¿Quién le ayuda? ¿Qué pasó con el 24?
Frank: que allí es un cuatro.
Profesora: ¿en cuál 24? Porque hay dos 24.
Frank: el de la mitad.
Profesora: el que está acompañado ¿de quién?
Frank: de la x
Profesora: de la x, ¿por qué dice que no es 24?
Felipe: es negativo y positivo entonces al hacer la multiplicación da menos cuatro.
Profesora: ¿estás haciendo una multiplicación?
Felipe: no, los estoy sumando. Felipe escribe

$4x^2-4x-24$	$4x^2\ -4\,x\ -24$

Profesora: al sumarlos da menos cuatro equis.
Camilo: todavía esta malo
Profesora: ¿por qué?
Camilo: porque $4x$ es positivo
Profesora: sí. Este $14x$ es positivo así que el $4x$ es positivo. ¿Quién va salir a desarrollar el tercero?
Frank: escribe $x^{\,2}+x\ -6$
Profesora: ¿de dónde salió eso? ¿Qué aplicaste para llegar a esa respuesta? Haber le ayudamos, que está haciendo esta x con el paréntesis (señala la expresión $x(x-2)$ de $x(x-2)\ +3(x-$

FECHA: 7 DE JULIO DE 2009

2)).

Frank: está multiplicando

Profesora: entonces, ¿Qué aplicas aquí?

(Frank señala la x y la x de $x(x-2)$)

Profesora: ¿y qué más?¿x por menos 2? Escríbelo acá abajito (señala una parte del tablero).

(Frank va escribiendo los productos que la profesora le va indicando. A medida que escribe la profesora le corrige el resultado. Finalmente escribe:

$x^2 - 2x + 3x - 6$)

Profesora: entonces se reunió $-2x$ con $+3x$ y dio $+x$. ¿Cómo queda la otra columna? ¿Nos faltó la otra columna? ¿Cómo queda?

Estudiantes: igual.

María: $x^2 + x - 6$

Profesora: bien, el cuarto.

María escribe en el tablero para la expresión

$(x-1)(x+1)$	$x^2 - 1$	$x^2 + 0x - 1$

Profesora: de dónde salió $x^2 - 1$

María señala en la expresión $(x-1)(x+1)$ algunos productos, como x por x da x^2 y -1 por 1 da -1.

Profesora: haber, será cierto lo que ella dice. Atiendan, ella dice que x por x da x^2 y -1 por 1 da -1. ¿Así se hace? Esa es la forma de multiplicar esos dos binomios?¿Cuéntame qué había que hacer?

Julián: al multiplicar queda entre paréntesis $(x-1)^2$

Profesora: ¿están iguales para poder elevarlos todos a la dos? Esto (escribe en el tablero $(x-1)^2$) es cuando se ha repetido este $(x-1)$ dos veces como factor. No me sirve. Ella me dice que x por x le da x^2 y que 1 por -1 da -1, ¿es eso correcto?

Camilo: como ambos están entre paréntesis el x se multiplica por la otra x y el 1, y el -1 por la x y 1.

Profesora: entonces aplicar ¿qué propiedad?

Estudiantes: distributiva.

Profesora: se aplica la propiedad distributiva y luego se anulan algunos términos. Podríamos pensar en otra forma de haber.

Juan: diferencia de cuadrados.

Profesora: recordando los productos notables eso es una diferencia de cuadrados. Muy bien, en cualquiera de las dos formas llegaban a esa respuesta. Seguimos. ¿Quién hace el quinto?

Estudiantes: ya está desarrollado.

Profesora: entonces escribámoslo de una vez. (En el tablero $x^2 + x - 6$). Le falta algún término.

Estudiantes: no

Profesora: entonces queda igual. (Escribe en la columna C el mismo polinomio). El sexto.

Julián escribe lo siguiente en el tablero.

$x^2 - x^3 - 4x - 4$	$x^3 - x^2 - 4x - 4$	$x^3 - x^2 - 4x - 4$

Profesora: ¿qué le hiciste al polinomio?

Julián: solamente ordenarlo.

Profesora: seguimos con el séptimo, tenemos que hacerle algo al séptimo.

FECHA: 7 DE JULIO DE 2009	
Estudiante: no. Profesora: ¿esta ordenado? Estudiantes: si Profesora: ¿falta algún término? Estudiantes: no La profesora escribe en el tablero	

$x+2$	$x+2$	$x+2$

Profesora: el octavo, ¿qué le tienen que hacer al octavo? ¿Qué hacemos para escribirlo en la forma desarrollada?
Juan: multiplicamos el paréntesis por la x que está afuera.
Profesora: muy bien.
Juan escribe en el tablero

$(x^2-1)x\ +x^2-1$	x^3-4x+x^2-1

Profesora: no va a factorizarlo va a escribirlo en forma desarrollada. Pero en esa columna puede quedar así (se refiere a la columna B). No, ¿cómo debe estar en esa columna?
Felipe: en orden
Profesora: ¿ya está en orden?
Felipe: no
Juan corrige y ahora escribe

$(x^2-1)x\ +x^2-1$	x^3+x^2-4x-1	x^3+x^2-4x-1

Profesora: muy bien, ya lo escribió desarrollado y en orden (lee el polinomio) y no nos faltaba ningún termino. Nos falta el último, el noveno.
Daniel escribe en el tablero

$(x^2+x-6)\div 4$	$\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}-\frac{6}{4}$	$\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}-\frac{6}{4}$

Profesora: cada término que hay este paréntesis está divido por cuatro. ¿Alguien modificó este $\frac{6}{4}$? ¿Todos dejaron $\frac{6}{4}$?
Estudiantes: si
Profesora: en vez de escribir $\frac{6}{4}$ también qué había podido escribir.
Estudiantes: $\frac{3}{2}$
Profesora: pero me representa lo mismo. ¿Corrigieron?, ¿entendieron? ¿Qué quiere decir escribirlo desarrollado y en orden, y luego escribirlo desarrollado en orden y completo? Ahora sí, vamos a seguir con la otra actividad con la calculadora.

TIEMPO T1. 30:10 a 39:18 min.	**EL MOMENTO EXPLORATORIO**
DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS	
La profesora lee las preguntas, indica hasta el punto que se ha realizado. Pregunta qué significa evaluar los polinomios para los valores de x .	

FECHA: 7 DE JULIO DE 2009
Juan: reemplazar x por el valor que está allí. Profesora: muy bien reemplazar, cambiar, sustituir el valor de la x por el valor que está allí. (La profesora continúa la lectura de la situación 2, muestra lo que deben hacer en la calculadora con el viewscreen y el proyector). Profesora: sólo vamos a tener en cuenta la columna C. Si solamente vamos a tener en cuenta la tercera columna, en el primer polinomio cuáles son los coeficientes que voy a tener en cuenta. ¿Qué coeficientes tiene x^2? Estudiantes: uno. Profesora: ¿y x? Estudiantes: cero Profesora: ¿luego otro coeficiente sigue? Estudiantes: el menos uno Profesora: el menos uno, cuál sería el coeficiente de x^0. Entonces, empecemos. Prendan la calculadora, ya la tienen lista. Recuerden que si la pantalla no está limpia, se van a F_1 el número 8, y [ENTER]. Entonces escribimos [POLYEVAL( )], ahora paréntesis, miren el paréntesis en las teclas superiores de los números, abren paréntesis, abrimos llave, para abrir llave se van a la tercera tecla, cerca de donde prendieron la calculadora, [2ND] y el paréntesis, ya ¿apareció la llave?. Estudiantes: si Profesora: ahora escribimos los coeficientes del primer polinomio, $1, 0\ y\ -1$, separados por comas. Olga: ¿Cuál es la coma? Profesora: voy a escribir cero, la coma está al lado del paréntesis. Perdón, aquí tengo un error. ¿Cuál es el primero? (Había escrito como primer coeficiente el cero). Estudiantes: uno Profesora: uno coma. ¿Quién sigue? Estudiantes: el cero Profesora: cero coma, ¿quién sigue? Estudiantes: el menos uno Profesora: menos uno. Ojo, el menos no es de operación es el menos de ese número, el que está entre paréntesis, en la parte inferior de los números. El negativo del paréntesis, menos, está al lado del punto. Cierro llaves. La última que abrí fue llave. Coma x, cierro paréntesis. Estudiante: se cerró llaves Profesora: la llave la cerré después del menos uno [ENTER]. Estudiantes: $x^2 - 1$ Profesora: $x^2 - 1$. ¿Hay vamos todos? Estudiantes: si Profesora: ¿A alguien no le dio así? Ahora con el cursor, con este círculo. (Señala el cursor en su calculadora). Estudiante: profe lo escribimos. Profesora: no, todavía no escriba nada, porque no tiene el valor del polinomio. Con el este (el cursor), vamos a poner el cursor acá, (después de la x). Con el lado derecho. Con esta flechita al lado del [ENTER], en la parte de abajo (la fecha se llama [DEL]). Borro el paréntesis y la equis. ¿Cuál es el primer valor que aparece en la columna? Estudiantes: -2

FECHA: 7 DE JULIO DE 2009	
Profesora: -2, ese menos es con el que aparece entre paréntesis. Ahora ¿qué cierro? Estudiantes: paréntesis. Profesora: ¿y qué hago? Estudiantes: [ENTER]. Profesora: ¿y qué me apareció? Estudiantes: tres. Juan: me dio lo mismo. Profesora: tú ya lo habías hecho a mano, mentalmente. Y lo habías escrito sin el uso de la calculadora. Juan: si, yo pensé que me había quedado malo. Profesora: bien, terminemos esta. Otra vez con el cursor. ¿Ya todos lo tienen así? Estudiantes: si Profesora: ahora voy a borrar, con la flechita, el paréntesis y el menos dos. ¿Qué dice en la columna? Estudiantes: menos uno. Profesora: el menos que está entre paréntesis. Menos uno, cierro paréntesis. [ENTER]. ¿Cuánto? Estudiantes: cero Profesora: entonces qué escriben allí cero. Ahora les ayudo. Listos. ¿Qué nos falta? Vuelvo con el cursor y borro el paréntesis y el menos uno. ¿Qué número me toca ahora? Estudiantes: once (se observa la calculadora de Juan, tiene problemas con la sintaxis de entrada). Profesora: once. Da ciento veinte. Vuelvo con el cursor y borro. ¿Cuál sigue? Estudiantes: uno Profesora: uno, cierro paréntesis. [ENTER] ¿Qué me dio? Estudiantes: cero Profesora: ¿ya termine con cuál? Con la primera, ahora deben de seguir con las otras, pero recuerden que estamos usando es la columna C porque los coeficientes deben estar completos. Olga: profe cómo se escribe. Profesora: ahora sí, voy a pasar a cada una de las mesas para mirar que necesitan.	
TIEMPO T2. 0:00 a 23:01 min.	**EL MOMENTO DEL TRABAJO DE LA TÉCNICA**
DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS	
[0:00 a 1:24 min.] Las estudiantes de la mesa 4 ingresan los valores del segundo polinomio. Alba y Marcela han escrito en sus calculadoras [POLYEVAL({4,4,-24}, x)] y [POLYEVAL({4,4,-24},-2)]. Alba les da las indicaciones de lo que deben escribir en la calculadora a Lady (2) y Alejandra. [1:25 a 2:08 min.] Se observa la calculadora de Camilo, mesa 5, han pasado a evaluar el tercer polinomio, la primera evaluación es con x. Camilo ingresa los coeficientes en la calculadora, pero parece que lo que hizo no está bien. [2:09 a 3:30 min.] Lucía: profe, estos resultados ¿están bien? ¿Por qué a ellos les da un resultado diferente? (señala a Lina).	

FECHA: 7 DE JULIO DE 2009
Profesora investigadora: ¿cómo nos damos cuenta de que está bien? Cuando colocamos la expresión, la primera concuerda con esta. ¿Ustedes le colocaron el coma equis? Felipe: si Profesora investigadora: haber, muéstrame. Felipe: no Estudiantes: ah. Profesora investigadora: no cierto. A veces pasa que cuando no le colocan el coma x, están trabajando con la expresión que no es. Lucía: profe se nos borró la expresión. ¿Por qué? Profesora investigadora: ¿se les borro? Vienen con el cursor la señalan y le dan [ENTER] allí. (Mueve el cursor hacia arriba buscando la expresión en el historial). Lucía: luego le damos borrar. (Bajo la expresión señalada borran algunos datos para introducir otros. La profesora investigadora le explica a Felipe como verificar si la expresión es la misma que ellos necesitan trabajar.) [3:30 a 4:22 min.] En la mesa 7, Sebastián mira y confronta sus respuestas con las de Laura, les devuelve su hoja y Laura junto con su compañera sigue ingresan las expresiones y anotan los resultados. [4:23 a 5:03 min.] En la mesa 6, están escribiendo y evaluando los Polinomios. Lucía: mira que el primero da igual que el último (en las evaluaciones de x^2+x-6 por -2 y 1 da el mismo resultado) Daniela: aja. Mira que en el primero nos da el segundo igual al último (la expresión es x^2-1 evaluada en -1 y 1), entonces no entiendo. Lucía: será casualidad. [5:04 a 8:04 min.] En la mesa 1, Fardy y Fabián tiene problemas cuando ingresan una expresión, la profesora investigadora lo acompaña. Deja que el estudiante escriba el polinomio como él piensa que debe escribirlo. Profesora investigadora: debes colocar coma entre cada coeficiente. Este es el coeficiente de x^2, este el de x y este el término independiente. Fardy: allí están. Profesora investigadora: si coincide esta expresión con esta, entonces si son los coeficientes del polinomio. Fardy: pues borre todo (Fabián no logra que la calculadora le arroje un resultado). Marisol: ve Fardy, entonces esto se borra. Fardy: está mal borrada, borra 1 y coloca -1. (Toma la calculadora y escribe en ella las indicaciones). Marisol: ¿por qué? Fardy: para hacer el cambio, allí da -6. -1, porque vea (señala la Tabla 16). Marisol: ¿nos ayudas a hacer la cuarta? Fardy: borra todo.

FECHA: 7 DE JULIO DE 2009
Marisol: con F_{18} Fardy: dale borrar y vuelves y escribes lo mismo. [8:05 a 9:01 min.] En la mesa 2, se observa a la profesora investigadora preguntándole a los estudiantes si la expresión que han digitado es la misma que aparece al usar [POLYEVAL( )] evaluado en x, ellos afirman que es la misma expresión. Mientras tanto Juan realiza la verificación, dice que el polinomio obtenido es simplificado. Lady pregunta por la última expresión, Olga le dice que tiene que dividir y Juan determina los coeficientes uno sobre cuatro, uno sobre cuatro y tres sobre dos. Lady pregunta cómo se coloca el sobre y Juan le responde que con división. [9:04 a 9:30 min.] En la mesa 1 la profesora le ayuda a Fabián a ingresar los datos. Profesora: ¿ahora qué hago? Fabián: coma equis. Profesora: coma equis. ¿Qué hago ahora? Fabián: cierro paréntesis. Profesora: y [ENTER]. ¿Les dio lo mismo? ¿Ahora qué hacen? Fabián: borramos la x y colocamos el número Profesora: antes de borrar la equis, ¿qué hacen? Fabián: colocamos el cursor. [9:31 a 11:34 min.] Se observa la mesa 3, los estudiantes están colocando los resultados de la evaluación y terminando la Tabla 16. Luisa le pregunta a Mayra si lo que ha escrito en la calculadora es correcto. Mayra le indica qué es -6. Yurani está digitando el quinto polinomio con el coma equis. Julián le solicita que se cerciore si ambas expresiones son iguales (el polinomio de la Tabla 16 y el polinomio que aparece la calculadora). [11:35 a 12:32 min.] En la mesa 5, la profesora investigadora le hace la aclaración que evaluado es una cosa distinta que elevado. Profesora investigadora: lo que estamos haciendo con la calculadora es que el valor de la equis se sustituye. Y te está dando este resultado cuando le das el valor de la equis. Nosotros podemos evaluar a mano también, pero allí lo estamos haciendo con la calculadora. Luis: todo polinomio se escribe en la forma desarrollada y completa. Profesora investigadora: escriban esto en la parte de atrás, las cuatro preguntas las pueden responder en la parte de atrás. Luis: yo le dije que todos los polinomios se pueden escribir en la forma desarrollada y completa. [12:35 a 15:06 min.] En la mesa 4, Profesora: ¿cuál es el coeficiente de x^2? Señala a $\frac{x^2}{4}$ Alejandra: uno

FECHA: 7 DE JULIO DE 2009
Profesora: uno, ¿tú qué número ves allí? Lady (2): un cuarto Profesora: que es lo mismo que uno dividido cuatro. Para escribirlo tienes que escribir uno dividido cuatro, coma, ¿cuál es el coeficiente qué sigue? (Le indica que corrija el signo del coeficiente del segundo término). Aquí qué signo tenemos. Lady(2): menos Profesora: entonces porque cambias el signo. (Lady (2) le indica a Alejandra que escriba en la calculadora los coeficientes.) Alejandra: un cuarto. Profesora: otra vez uno divido cuatro. ¿Qué sigue? Lady (2): seis dividido cuatro. (Se observa la digitación en la calculadora de Alejandra. La profesora les indica que deben de continuar con las preguntas qué le siguen a la Tabla 16.) Alba: hay que anotar todos los procedimientos acá (en la parte de atrás de la hoja). Marcela y Alejandra: hay no. Alba: pero yo los tengo en mi cuaderno. Lady (2): yo pensé que de esto (señala las columnas de evaluación). [15:08 a 16:20 min.] En la mesa 5. Camilo: el dos y el cinco. Profesora: aquí me dio igual y aquí me dio igual (señala los resultados de evaluación de dos polinomios). ¿Si se le da el cinco, el seis, el siete? Daniel: no va a cambiar. Profesora: continúan dando iguales. ¿Por qué? Daniel: porque son lo mismo. Camilo: tienen la misma fórmula en letras. Luis: tienen la misma expresión. Profesora: tienen la misma expresión o es el mismo polinomio. Si me da lo mismo ¿cómo es éste polinomio con éste? Daniel: iguales Luis: semejantes Profesora: en vez de decir iguales ¿qué otra cosa podemos decir? ¿Qué son qué? Frank: parecidos. Profesora: no son parecidos, si tienen el mismo valor ¿qué son? Frank y Luis: iguales Profesora: en vez de decir iguales, son equivalentes. Camilo: eso. Frank: para que borras la primera, si esta buena. (Luis borra la respuesta). Luis: no esta buena. [16:22 a 21:51 min.] En la mesa 1. Profesora investigadora: ¿qué número multiplicado por x^2 me da ese? (Señala $\frac{x^2}{4}$) ¿A ver cómo se lee?

FECHA: 7 DE JULIO DE 2009
Fabián: x^2 sobre cuatro. Profesora investigadora: qué número multiplicándose por x^2 me da x^2 sobre cuatro. Si multiplicas por dos qué te da. Fardy: uno. Profesora investigadora: ¿cuál sería? Es x^2 sobre cuatro o se puede leer x^2 cuartos. ¿Cuál sería el coeficiente que esta con x^2? (todos se quedan callados) Profesora investigadora: aquí se dividió todo por cuatro. Si yo divido por cuatro, ¿qué número estaría multiplicando al x^2? Fardy: el ocho. Profesora investigadora: voy a escribir $\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}-\frac{6}{4}$ Voy a separar este. $\frac{1}{4}x^2$ ¿Qué me da un cuarto de x^2? ¿Ustedes recuerdan cómo se multiplican estos términos? Fabián: un tercio da. Profesora investigadora: ¿al multiplicar estos términos qué me da? Recuerdan como se multiplica un fraccionario. Fabián: denominador con numerador. Profesora investigadora: noo. ¿Se acuerdan cómo se multiplican los fraccionarios? Marisol: la ley de la oreja. Profesora investigadora: a ver yo les recuerdo. Ustedes multiplican, numerador por numerador. Y no numerador por denominador. Uno por x^2. ¿qué me da? Fardy: x^2. Profesora investigadora: uno por cuatro Marisol y Fardy: cuatro. Profesora investigadora: esto que está aquí es lo mismo que acá (señala en la hoja donde realizó el procedimiento). ¿Cuál es el coeficiente? Marisol: ¿uno, dos? Profesora investigadora: ¿cuál es el número que acompaña la x^2?, ¿cuál es el coeficiente? mira este se puede expresar así $\frac{x^2}{4}=\frac{1}{4}x^2$. ¿Cuál es el número que se multiplica por x^2? Fardy: el uno. Profesora investigadora: este es el uno, ¿cómo se llama este número? (señala en la hoja) Éste se llama el uno. Fardy y Marisol: un cuarto. Profesora investigadora: entonces, ¿cuál sería el coeficiente del siguiente? (se refiere al segundo término). Marisol: uno, dos, tres cuartos. Profesora investigadora: mira que se parece a éste.: un cuarto. Profesora investigadora: porque un cuarto, si usted multiplica un cuarto por x, ¿qué daría? Una por equis, equis, cuatro por una, cuatro. (Escribe en el cuaderno $\frac{1}{4}\times\frac{x}{1}$). ¿Cuál es el coeficiente?

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 7 DE JULIO DE 2009</th></tr>
<tr><td colspan="2">El número que se está multiplicando por la x. El del tercer término, ¿cuál sería el coeficiente?
Fabián: seis cuartos
Profesora investigadora: positivo o negativo, mira.
Fabián: negativo.
Marisol: qué hacemos con la calculadora.
Profesora investigadora: ¿cuál es el coeficiente del primero?
Fabián: cuatro, cuatro, cuatro.
Profesora investigadora: cuatro no. ¿Cómo se llama ese coeficiente?
Fardy: un cuarto
Profesora investigadora: ¿Cómo lo escribirían en la calculadora? ¿Esta rayita como la pueden ver? (La rayita de $\frac{1}{4}$).
Fabián: dividiendo.
Profesora investigadora: entonces como escribirías un cuarto.
Fabián: uno divido cuatro.
Profesora investigadora: entonces ya pueden ingresar los coeficientes.

[22:00 a 23:00 min.]
Lucía usa la calculadora para obtener los resultados de la evaluación, luego los comparte con los compañeros de la mesa.</td></tr>
<tr><td>TIEMPO
T2. 23:01 a 38:59 min.</td><td>EL MOMENTO DEL TRABAJO DE LA TÉCNICA Y EL MOMENTO TECNOLÓGICO-TEÓRICO</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">[23:01 a 23:52 min]
Se observa la mesa 3, los estudiantes realizan las preguntas después de la Tabla 16.

[23:01 a 24:11 min.]
Se observa la mesa 5, la profesora investigadora le solicita a Camilo que tenga en cuenta las respuestas de la situación 1. Camilo dice que no tiene la hoja de respuestas de la situación 1 porque su compañero no asistió a clase.

[24:12 a 24:26 min.]
La profesora les sugiere en la pregunta: sí se siguen dando valores a x ¿Qué se puede conjeturar? ¿Qué creen que va a pasar?, es en relación a la respuesta que han dado en 2.2.a. ¿Qué se imaginan que va a pasar?

[24:32 a 24: 58 min.]
Se observan a los estudiantes de la mesa 2 escribir sus respuestas.

[25:00 a 25:36 min.]
Se observan los estudiantes de la mesa 6 escribir sus respuestas.

[25:36 a 26:16 min.]
Se observan los estudiantes de la mesa 3, están discutiendo la pregunta b, si le siguen dando valores a x, que pasa con el resultado.</td></tr>
</table>

FECHA: 7 DE JULIO DE 2009
[26:16 a 27:03 min.] En la mesa 4, Alba le pregunta a la profesora sobre la pregunta 2.2.b, si se siguen dando los valores de x. Alba crea que debe continuar con más valores de x en la Tabla 16. La profesora le aclara que no debe seguir dándole los valores a x, es sólo que necesita imaginarse lo que va a pasar. Alba indica que los valores son diferentes. La profesora le dice que mire nuevamente las filas. Alba infiere que los polinomios son equivalentes. La profesora le sugiere que mire las filas, porque los polinomios son los mismos. [27:06 a 27:20 min.] En la mesa 2, la profesora investigadora les solicita que simultáneamente escriban las respuestas. Porque María transcribe las respuestas de Juan, quien alega que así es más rápido. La profesora indica que las factorizaciones las deben realizar en la parte de atrás de la hoja. [27:21 a 27:54 min.] En la mesa 3, la profesora investigadora les explica qué es conjeturar: es algo que tú ves, pero no necesariamente tiene que ser demostrado, sino que usted puede generalizar en relación a todos los casos. La conjetura es algo que no se necesita probar, está latente para ser probada. Es simplemente una idea de todas las expresiones. Mayra determina que es como una conclusión. [27:56 a 28:13 min.] En la mesa 1, la profesora se acerca y le indica a Fardy que mire las filas para que determine cómo son los polinomios. [28:14 a 28:34 min.] En la mesa 6, la profesora les indica que el polinomio 3 no está factorizado y les recuerda que algunos de estos polinomios ya habían sido factorizados en la situación 1. Les solicita que realicen las factorizaciones en la parte de atrás de la hoja y les sugiere que miren la columna donde los polinomios están desarrollados y en orden (columna B). [28:36 a 29:07 min.] En la mesa 4, Alba realiza las factorizaciones de los polinomios. [29:09 a 30:30 min.] En la mesa 3, Mayra se cuestiona porque han determinado una conjetura que no se cumple para todos los casos en relación a los valores 1 y -1. Julián determina que se puede escribir la conjetura y hace alusión que no se cumple para todos los polinomios. Mayra se cuestiona porque dice que los valores de x pueden ser otros. Isabel dice que son hay preguntas repetidas, pero Mayra refuta su afirmación, negándola con su cabeza. [30:31 a 33:44 min.] Se observa la mesa 2, Juan explica la respuesta d. Dice que los valores son iguales a cero, porque si $x = r$ entonces $(x - r) = 0$. Le pregunta a la profesora investigadora, si su respuesta es correcta, ella le sugiere que mire la factorización del primer polinomio, y determine el valor de r

FECHA: 7 DE JULIO DE 2009
y obtenga el resultado de evaluar el polinomio por r. [33:45 a 35:18 min.] Se observa la mesa 5, la profesora acompaña a Daniel a factorizar la expresión $x^3 + x^2 - 4x - 4$. La pregunta de Camilo está relacionada con el cambio de los signos al agrupar $-4x - 4 = -(4x + 4)$. [35:20 a 35:36 min.] En la mesa 3, continúan con la duda de qué es una conjetura, la profesora investigadora afirma que puede decir de eso que está allí sin necesidad de tener que evaluar, por eso se llama conjetura porque usted no tiene que evaluar, probar. [35:38 a 38:59 min.] En la mesa 4, la profesora investigadora le pregunta a Alba si $x + 2$ se puede factorizar. Alba: diferencia de cuadrados no se puede, cada uno tiene raíz. Profesora investigadora: ¿factor común se puede? Alba: no Profesora investigadora: ¿es diferencia de cuadrados? Alba: no Profesora investigadora: ¿es trinomio? Alba: tampoco. Profesora investigadora: ¿qué polinomio es ese? Alba: es dos términos Marcela: binomio Profesora investigadora: es un binomio. ¿De qué grado? Alba: de uno solo Profesora investigadora: ¿de grado cuánto? Alba: no, no sabría decirle. Profesora investigadora: ¿cuál sería el grado? Recuerdas cuál es el grado. Este es un trinomio cuadrado, porque tiene tres términos y el término del mayor exponente es dos. El de éste, cuál es (señala $x + 2$). Alba: es de primer grado. Profesora investigadora: entonces es un binomio de primer grado o lineal. La única forma de factorizar un binomio de primer grado es con factor común. Si no hay factor común, no se puede factorizar $x + 2$ es $x + 2$, es como los números primos. ¿3 se puede factorizar? Alba: no Profesora investigadora: 6 se puede factorizar como 3×2. 3 es un número primo, la única forma de multiplicación es uno por el mismo. No existe otra manera. Culmina la sesión, la profesora les dice que tienen que hacer en casa la factorización de las expresiones. Uno de los dos estudiantes, queda con la hoja de preguntas.

Tabla 4. Transcripción del video del 8 de Julio de 2009.

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 8 DE JULIO DE 2009</th></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1: 0:00 a 6:43 min.</td><td>EL MOMENTO DEL TRABAJO DE LA TÉCNICA</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">[0:00 a 2:36 min.]
Los estudiantes realizan la factorización de las expresiones de la situación 1.
En la mesa 1, Fardy indica que los polinomios están dados en la forma desarrollada, la profesora les dice que deben factorizarlos. Marisol pregunta si los polinomios que ha escrito están factorizados, la profesora les dice que están en la forma desarrollada.

[2:48 a 3:04 min.]
Juan de la mesa 2 le pregunta a la profesora que si $x+2$ no se factoriza, ella le responde que no se factoriza.

[3:50 a 4:24 min.]
La profesora le indica a Camilo (mesa 5) como realizar la factorización del quinto polinomio con la técnica para trinomios de la forma x^2+bx+c.

[4:25 a 5:46 min.]
En la mesa 4, Alba no ha factorizado el polinomio:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}-\frac{6}{4}$$
Profesora: observa bien este polinomio. ¿Cuál es el coeficiente de x^2 ?
Alba: un cuarto
Profesora: ¿cuál es el coeficiente de x?
Alba: un cuarto
Profesora: y aquí por quién puedes multiplicar el menos seis para que te vuelva a dar seis.
Alba: por dos
Profesora: no, mira acá. Si aquí sacaste un cuarto, ¿aquí podrías sacar un cuarto (señala a menos seis cuartos) de factor común? Un cuarto por menos seis, ¿qué te da?
Alba: menos seis cuartos.
Profesora: menos seis cuartos. Entonces ¿cuál es el factor común?
Marcela: un cuarto.
Profesora: la otra no podemos, porque ¿un cuarto tiene raíz cuadrada exacta?
Alba: un medio
Profesora: ¿y seis cuartos tiene raíz cuadrada exacta?
Alba: no, pero lo que yo hice es buscar dos números que me den multiplicados me den seis y restados me den dos.
Profesora: es que no te pueden dar seis sino menos seis cuartos. Porque aquí no está el seis solo, sino menos seis cuartos. Tendrías que trabajar con esas fracciones.

[5:48 a 6:41 min.]
En la mesa 3, la profesora revisa la factorización de Julián. Él no sabe cómo factorizar una diferencia de cuadrados. La profesora le pide a alguno de los compañeros de la mesa que diga el</td></tr>
</table>

FECHA: 8 DE JULIO DE 2009	
procedimiento. Profesora: ¿por qué decimos que es una diferencia de cuadrados? ¿Cuál es la raíz cuadrada de x^2? Julián: x Profesora: ¿cuál es la raíz cuadrada de 1? Julián: uno. Profesora: uno, ya comprobamos que es una diferencia de cuadrados. ¿Qué hemos visto para diferencia de cuadrados? Julián: que es $(x+1)(x+1)$ Profesora: bien.	
TIEMPO T1: 6:43 a 10:32 min.	**MOMENTO DE INSTITUCIONALIZACIÓN**
DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS	
La profesora lee y explica la tarea d de la segunda parte de la situación 2. Toma como ejemplo el primer polinomio $x^2 - 1$. Profesora: ¿qué tuvieron en cuenta para factorizarlo? ¿Ese binomio qué es?¿Qué fue lo que me dijeron allá, ahora? Estudiantes: es una diferencia de cuadrados. Profesora: ¿Cómo se factoriza una diferencia de cuadrados? ¿Raíz de x^2? Estudiantes: x Profesora: raíz cuadrada de uno. Estudiantes: uno. Profesora: ¿qué hago con esas dos raíces? Estudiantes: equis más uno por equis menos uno. (En el tablero ha escrito $x^2-1=(x+1)(x-1)$.) Profesora: teniendo en cuenta todas las factorizaciones, vamos a hacer este punto, qué dice que le vamos a dar a x el valor de r. Pero todos los binomios deben estar escritos de la siguiente forma (señala $(x-r)$). En este caso quien es r (señala $(x+1)$). Estudiantes: uno Profesora: en este caso quien es r. Estudiantes: menos uno Profesora: menos uno, uno. Pero aquí me dicen que deben estar escritos de la siguiente forma (señala $(x-r)$). Con la resta, sí. Entonces miremos. Si yo tengo x (señala $(x+1)$) que hago para que este signo cambiarlo a que me quede como éste, con resta (señala $(x-r)$). En vez de este más qué podemos escribir. Menos y este uno como me queda. Estudiante: entre paréntesis Profesora: negativo para que se convierta en positivo. (Escribe en el tablero $(x-(-1))$). Esto (señala $(x+1)$ es esto mismo (señala $(x-(-1))$), porque este menos con este menos me da más. Pero aquí me están hablando de esta clase de binomios. Este le tendré que hacer algún cambio (señala $(x-1)$). Estudiantes: no Profesora: hasta allí está claro. Bien, ¿qué más me dicen que haga? Que la x la cambie por una r. La sustituya, la reemplace. Aquí en vez de x que coloco, -1 (Señala el binomio $(x-(-1))$). Este binomio se convertiría en menos uno, menos, menos uno. Menos uno. ¿Menos por menos? Estudiantes: más.	

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 8 DE JULIO DE 2009</th></tr>
<tr><td colspan="2">Profesora: qué me da menos uno más uno.
Estudiantes: cero.
Profesora: en este otro qué pasaría en lugar de x, ¿qué tengo que colocar? (Señala el factor $(x-1)$).
Estudiantes: uno.
Profesora: uno menos uno. ¿Qué me da?
Estudiantes: cero.
Profesora: cero por cero. ¿Qué me da?
Estudiantes: cero.
Profesora: ahora pueden responder lo que dice allí. Y mira si se cumplen en todos. Sigan trabajando.</td></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1: 10:32 a 24:15 min.</td><td>EL MOMENTO DEL TRABAJO DE LA TÉCNICA Y MOMENTO TECNOLÓGICO – TEÓRICO</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">[10:36 a 11:53 min.]
Se observa la mesa 6 y 1 apenas inician el trabajo de clase.

[11:54 a 12:31 min.]
En la mesa 4, Alba pregunta si en la tarea d debe realizar algún procedimiento o solamente responde. La profesora le indica que es necesario presentar el procedimiento, eso quiere decir que necesita escribir el polinomio factorizado y realizar el procedimiento presentado en el tablero. No necesita realizarlo con todos los polinomios, pero si al menos con otros dos.

[12:31 a 13:24 min.]
En la mesa 3 y 7 están realizando procedimientos.

[13:25 a 13:53 min.]
En la mesa 6, la profesora le solicita que cada uno escriba la respuesta en su hoja. Una de las estudiantes de la mesa no estaba escribiendo porque no llevo su hoja de respuestas.

[13:54 a 14:26 min.]
En la mesa 1, la profesora se acerca a mirar la factorización de Fabián. Le indica que en el segundo polinomio además de sacar factor común puede continuar el proceso.

[14:27 a 14:58 min.]
En la mesa 5, los estudiantes están realizando las factorizaciones, no hablan.

[15:00 a 15:30 min.]
En la mesa 3, los estudiantes charlan, algunos en relación a las tareas.

[15:32 a 16:58 min.]
En la mesa 4, Alba realizó la factorización de un polinomio y piensa que debe realizar la multiplicación. La profesora le recuerda expresar los binomios factores en la forma $(x-r)$ para hallar r. Para expresar $(x+3)$ en la forma $(x-r)$ le recuerda el procedimiento realizado en $(x+1)$ en el ejemplo presentado en el tablero. Le solicita al grupo trabajar en equipo porque</td></tr>
</table>

FECHA: 8 DE JULIO DE 2009	
Alba hace sola los procedimientos. [17:00 a 17:59 min.] En la mesa 2, Juan le solicita explicación a la profesora para realizar la factorización del sexto polinomio. [18:00 a 18:38 min.] En la mesa 6 se ven los estudiantes escribiendo las respuestas y en la mesa 4 Alejandra transcribe las respuestas hechas por Alba a su hoja de trabajo. [18:40 a 24:12 min.] En la mesa 3, Mayra tiene duda en la factorización de un polinomio, dice que al realizar la multiplicación no le queda igual al polinomio en su forma desarrollada. La profesora investigadora le recomendó continuar la factorización del polinomio, al parecer la factorización no está completa. Se escucha que los profesores deben retirarse del salón de clase, sin embargo la profesora les dice que estarán a cargo de la profesora investigadora quien anuncia que en cinco minutos inicia la plenaria. Algunos estudiantes ya han terminado, otros sienten que han conversado mucho en la clase porque no han hecho mucho y otros escriben afanosamente las respuestas de sus compañeros.	
TIEMPO T1: 24:13 a 1:22:51 min.	**MOMENTO DE INSTITUCIONALIZACIÓN Y MOMENTO DE EVALUACIÓN**
DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS	

[24:13 a 30:13 min.]
La profesora investigadora lee el enunciado de la tarea, que indica la evaluación de los polinomios. Escribe en el tablero los datos de la evaluación.

POLINOMIO	$x = -2$	$x = -1$	$x = 11$	$x = 1$
1. $x^2 + 4x - 1 - 4x$	3	0	120	0
2. $14x - 24 - 10x + 4x^2$	-16	-24	504	-16
3. $x(x-2) + 3(x-2)$	-4	-6	126	-4
4. $(x-1)(x+1)$	3	0	120	0

Un estudiante responde cada una de las evaluaciones de un polinomio. La profesora investigadora una vez le da las respuestas, les pregunta a los compañeros si comparten las mismas respuestas, ellos aprueban o refutan. Les recuerda que al evaluar por x, debe darles la misma expresión algebraica, eso da garantía de que las evaluaciones les queden a todos iguales. Sin haber dado los resultados del polinomio 4, algunos estudiantes afirman que los valores son iguales al polinomio uno.
Profesora investigadora: ¿cómo hicieron esta? Volvieron a digitar los coeficientes
Estudiantes: no
Juan: el polinomio completo en orden era el mismo.
Profesora investigadora: del uno y del cuatro. ¿O sea que ustedes repitieron el procedimiento para este?
Juan: no
Profesora investigadora: algunos repitieron el procedimiento, otros tomaron los valores del

FECHA: 8 DE JULIO DE 2009

primer polinomio porque la expresión desarrollada de ambas polinomios es la misma.

POLINOMIO	$x=-2$	$x=-1$	$x=11$	$x=1$
5. x^2+x-6	-4	-6	126	-4
6. x^2+x^3-4x-4	0	0	1404	-6
7. $x+2$	0	1	13	3
8. $(x^2-4)x+x^2-4$	0	0	1404	-6
9. $\frac{(x^2+x-6)}{4}$	-1	$\frac{-3}{2}$	$\frac{63}{2}$	-1

Juan: el octavo da lo mismo que el seis.

[30:13 a 32:30 min.]
Al preguntar si a todos les da la misma evaluación en el polinomio 9 en $x=1$, algunos dicen que el resultado es 1 y no -1. Para verificar la respuesta se propone realizar la evaluación a mano. La profesora investigadora dice que es importante realizar la prueba con la técnica Lápiz/Papel, porque a veces se pueden digitar valores que no lo son.
Expresa la evaluación así: si $\mathrm{x}=1$ entonces $\frac{1^2+1-6}{4}=\frac{(1+1-6)}{4}=\frac{(2-6)}{4}=\frac{-4}{4}=-1$
Mientras la profesora investigadora realiza el procedimiento. Juan lo hace en su cuaderno y descubre que la respuesta es menos uno.

La profesora investigadora justifica el error, dice que quizás no vieron el menos en la calculadora o justificaron algo que no corresponde. Continúan con las preguntas después de la tabla 16.

[32:32 a 35:00 a min.]
Profesora investigadora: observe los resultados de la Tabla 16 qué se puede decir de los polinomios.
Leydi: que algunos polinomios se repiten, como el 1 y 4, el 3 y 5 y el 6 y 8.
Profesora investigadora: me dices que se repiten 1 y 4, el 3 y 5 y el 6 y 8. ¿Cómo se dieron cuenta que se repetían?
Juan: en la forma desarrollada.
Profesora investigadora: y ¿cuándo evaluaron? ¿Qué paso?
Juan: también cuando reemplazábamos x, quedaban iguales los valores.
Profesora investigadora: entonces ustedes empiezan a ver que los polinomios si los expresó en la forma desarrollada, algunos tienen la misma la forma desarrollada. Y cuando los evaluamos también dan los mismos valores. ¿Cierto?
Miremos el punto 2.2.b, si se continúan dando los valores de x, ¿qué se puede conjeturar?
Juan: que el resultado va a ser igual.
Alba: los anteriores polinomios equivalentes continúan siendo iguales.
Profesora investigadora: ¿tendrían que seguir evaluando?
Alba: si evaluó en 4, 3, 6 y 5, equis sería ese mismo.
Profesora investigadora: ¿tendría que seguir evaluando? ¿tuvieron que expandir la tabla?
Juan: no

FECHA: 8 DE JULIO DE 2009
[35:01 a 38:05 min.] Profesora investigadora: no tuvieron que seguir expandiendo la tabla. Miremos la 2.2.c, reescriba los polinomios de la forma factorizada y compárelos. Bueno, ya algunos lo habían hecho. Vamos a escribir la forma factorizada. ¿Quién quiere factorizar el primero? Estudiantes: x^2. Juan: no da x^2. Estudiantes: $(x+1)(x-1)$ Profesora investigadora: esa es la factorización. Ustedes recuerdan que cuando daban la expresión desarrollada era equivalente a esta. ¿Qué polinomio es este? (Escribe en el tablero $(x+1)(x-1) = x^2-1$). Juan: diferencia de cuadrados. [38:09 a 44:59 min.] Profesora investigadora: si hacemos entonces la factorización de este otro (segundo polinomio), que es este, $4x^2+4x-24$. ¿Cuál sería la factorización? Julián: escribe $2(x+6)2(x-4)$. Estudiantes: es cuatro. Profesora investigadora: usted ¿qué hizo para factorizar de esa manera? Julián: le saque raíz cuadrada a x^2, que es x (señala las x en la factorización) y raíz cuadrada a cuatro, que es dos (señala los dos en la expresión). Y busco dos números que multiplicados me den menos veinte cuatro y sumados me dé positivo (señala el 4). (Profesora investigadora explica como factorizar el polinomio con la técnica que propone Julián y hace algunas afirmaciones que muestran que el resultado de Julián no es correcto. Escribe $(2x+\quad)(2x-\quad)$ y busca dos números que multiplicados den 24, lo descompone y les pregunta a los estudiantes si los factores los deben sumar o restar y qué valor debe dar). Profesora investigadora: es posible encontrar dos números que multiplicados den 24 pero restados den 4, haber $6\times 4 = 24$ pero $6-4 = 2$ no da. Se realiza la prueba con otros factores de 24. La profesora investigadora le solicita que explique nuevamente el procedimiento. Julián decide realizar la factorización de otra manera, sus compañeros les han dicho que debe sacar factor común. Escribe $4(x^2+x-24)$. Sus compañeros le dicen que no es 24, sino 6. La profesora investigadora señala el 24 y aclara que si sacamos factor común 4, no puede quedar nuevamente 24. Julián escribe ahora $4(x^2+x-6)$. Profesora investigadora: ¿Cómo se puede factorizar este? (Señala el trinomio x^2+x-6) Julián efectúa la siguiente factorización: $2(x+3)2(x-2)$. Juan: le dice que multiplique el dos por el dos para que quede cuatro. Profesora investigadora: les dio así. Los estudiantes algunos dicen que sí y otros que no. La profesora investigadora nuevamente le explica el procedimiento que efectúo Julián. Dice lo siguiente: Entonces el cuatro lo puedo dejar allí, le sacamos raíz al primer término (x^2) y esa raíz la colocamos en los dos grupitos o factores, el signo más lo ponemos aquí, y el producto por más por menos (escribe $4(x+\quad)(x-\quad)$). Buscamos dos números que multiplicados me den 6 y que

FECHA: 8 DE JULIO DE 2009
al restar porque aparecen signos distintos me den uno. ¿Cuáles serían los números? Estudiantes: tres y dos. Profesora investigadora: así que la factorización del compañero es correcta, sino que factorizó el cuatro en dos por dos. Lo había podido dejar así, solamente colocar el cuatro. Miremos la siguiente expresión, quién quiere factorizar la siguiente. [45:00 a 45:31 min.] Juan escribe $(x-2)(x+3)$ Profesora investigadora: ¿qué hizo Juan? Juan: saque como factor este (señala $(x-2)$) y me quedo equis más tres. Profesora investigadora: ¿cómo podemos factorizar el siguiente? [45:41 a 45:39 min.] Alba: es la del primero Juan: ya está factorizado. Profesora investigadora: no tengo que hacer nada ya está factorizado. El quinto, ¿cómo se factoriza? [45: 40 a 46:43 min.] Julián: igual que el tercero. Profesora investigadora: ¿qué me da? Estudiantes: $(x+3)(x-2)$ Profesora investigadora: en estas factorizaciones ya habían algunas que ya habían hecho. Simplemente colocó la expresión. El sexto como se factoriza. Ustedes lo hicieron en la clase anterior. ¿Qué se hace para factorizar? [46:44 a 50:22 min.] Alba: $x^3+x^2-4x-4=(x^3+x^2)-(4x-4)$ Profesora investigadora: Del primer término, ¿cuál sería el factor común? Camilo: x^2 Profesora investigadora: si sacas x^2, ¿qué queda? Alba escribe en el tablero $x^2(x+1)$ – $4(x-1)=(x^2-4)(x+1)(x-1)$ Profesora investigadora: alguien quiere decir algo en relación a lo que obtuvo Alba. Camilo: si sacas el menos 4, lo que queda adentro es positivo. A bueno, Alba. Alba corrige y escribe $(x^2-4)(x+1)$. Profesora investigadora: miremos este término de acá (señala (x^2-4)). ¿Este término de aquí se puede seguir factorizando?¿Cuál sería la factorización? Camilo: $(x+2)(x-2)(x+1)$ Profesora investigadora: correcto. Resulta que el resultado que le da la compañero esta factorizado, pero aún hay términos que se pueden seguir factorizando. Cuando logramos factorizar al máximo se dice que es una factorización completa. Está totalmente factorizada. No hay más que factorizar, estos términos están todos factorizados ya no se pueden factorizar más. Esta es una factorización completa, la otra es una factorización no completa. Miremos el siguiente término. ¿Cuál sería la factorización de $x+2$? [50:23 a 51:17 min.]

FECHA: 8 DE JULIO DE 2009
Juan: no se puede. Profesora investigadora: $(x+2)$ ya no se puede factorizar más. Si lo quiero mostrar como multiplicación lo escribiría como equis más dos por uno. Pero ese término no se puede factorizar, por otros dos polinomios. Es un polinomio irreducible. Cuando ya no se puede factorizar más. Se le llama polinomio irreducible. Los que se pueden factorizar más, cómo se les llamaría. Juan: reducible [51:17 a 52:22 min.] Profesora investigadora: reducible. ¿Cuál sería la factorización de este término? (señala el octavo). Ustedes me dijeron que el 6 y 8 eran iguales. Leydi: la factorización es la misma que el otro polinomio. Es la misma que la quinta. Juan: no Profesora investigadora: la misma de ¿cuál? Estudiantes: de la sexta. Profesora investigadora: allí sería $(x+2)(x-2)(x+1)$. Porque son dos expresiones que tienen la misma forma desarrollada. Y el último, es el que más dificultades les parecieron a ustedes. ¿Cómo se puede factorizar? [52:30 a 53:36 min.] Luis: un cuarto por equis menos dos por equis más tres. La profesora escribe en el tablero $\frac{1}{4}(x-2)(x+3)$. Miremos todas las factorizaciones. Estas dos tienen un parecido (señala $\frac{1}{4}(x-2)(x+3)$ y $(x-2)(x+3)$), pero aquí se diferencia porque multiplican por un cuarto. La factorización del polinomio 3 y 5 son iguales, la diferencia es que se han escrito los factores en distinto orden, pero ustedes saben que la conmutatividad se cumple para la multiplicación. La profesora investigadora compara los polinomios, se determinan que algunos polinomios tienen los mismos factores de polinomios, con la diferencia que existe un factor numérico, es el caso de los polinomios 2, 3 y 9. [54:07 a 1:10:43 min.] La profesora investigadora lee la pregunta 2.2.d. Les pregunta cómo expresar los binomios cuyos términos se suman a la forma $(x-r)$. Nuevamente retoma el ejemplo que realizó la profesora. Explica la propiedad del producto nulo y expresa los factores lineales de la forma $(x-r)$. Determina que los r se les llaman los ceros del polinomio porque al evaluarlos da cero. Les pregunta a los estudiantes como se obtuvieron los ceros, ellos responden que con la forma factorizada y con el cambio de los signos para expresarlos en la forma $(x-r)$ cuando en el binomio se suman los términos. Dice que existe otra manera de hallar los ceros es con la fórmula cuadrática y los ceros también se les llama raíces. Ahora les solicita hallar los ceros del siguiente polinomio. $$x^2+6x+9$$ Juan: es un trinomio cuadrado perfecto. Profesora investigadora: ¿cuál es la factorización? Estudiantes: $(x+3)(x+3)$ Profesora investigadora: esto se puede escribir de la forma $(x+3)^2$, ¿cuáles serian los ceros de

FECHA: 8 DE JULIO DE 2009
este polinomio? Estudiantes: menos tres Profesora investigadora: tengo que expresarlos de esta forma $(x-(-3))(x-(-3))$, el cero en este caso es el valor por el cual esto (el trinomio cuadrado) se hace cero (escribe en el tablero $\left(x-(-3)\right)\left(x-(-3)\right)=0$). ¿Cuándo un producto se hace cero? Cuando uno de los dos factores se hace cero. ¿Cuándo este factor se hace cero?, cuando x vale -3. ¿Cuánto debe valer x para que esto se haga cero (señala uno de los factores)? x vale menos tres. ¿Cuánto debe valor x para que este factor se haga cero? (señala el otro factor) Nuevamente x vale menos tres. ¿Cuántos ceros tiene este polinomio? Estudiantes: uno. Profesora investigadora: porque los dos factores dan el mismo cero. Esto se puede hacer con la factorización pero yo también lo puedo hacer con la fórmula cuadrática. Esta es la fórmula cuadrática, que me permite obtener los ceros de un polinomio cuadrático, de un trinomio cuadrado perfecto. (Escribe: $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$) ¿Qué significa el a, b y c? Fabián: números Juan: los coeficientes. Profesora investigadora: ¿cuál sería el valor de a? Juan: del primero. Profesora investigadora: miremos ¿cuál sería el valor de a aquí? ¿Cuál sería el valor de a de este polinomio? Estudiantes: uno Profesora investigadora: el valor de b Estudiantes: 6 Profesora investigadora: el valor de c Estudiantes: 9 Profesora investigadora: correcto. Si voy a utilizar la fórmula cuadrática, voy a sustituir los valores aquí. La fórmula es como una receta, haga el procedimiento y obtendrá el resultado. Sustituya el valor de los coeficientes. ¿Cuál sería el valor de b? El más menos indica, sumo y después resto, me van a dar dos resultados. (La profesora efectúo las operaciones conjuntamente con los estudiantes, escribió en el tablero lo siguiente: $x=\frac{-6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{-6}{2}=-3$). ¿Obtuvimos el mismo cero que teníamos allá? (Señala el procedimiento de factorización). Estudiantes: sí. Profesora investigadora: eso que quiere decir, si yo necesito el valor con el cual el polinomio se hace cero, puedo utilizar la fórmula cuadrática, que tiene que ver con los coeficientes del polinomio desarrollado. O puedo hallarlo con los factores. ¿Cuándo esto es cero?, cuando x vale -3. Y si esto vale cero (señala un factor), entonces el producto es cero. Por tanto el valor de $x=-3$, se le llama un cero. Vamos a mirar otro ejercicio distinto a éste, con dos ceros. Este tiene un cero, miren que cuando tiene un cero lo que está dentro del radical es cero, pero cuando el polinomio tiene dos ceros, entonces lo que está dentro del radical no es cero. Lo voy a escribir de la forma factorizada: $(x-3)(x-7)$, ¿cuáles serían los ceros del polinomio?

FECHA: 8 DE JULIO DE 2009
Juan: tres y siete. Profesora investigadora: porque son los ceros 3 y 7, porque si yo sustituyo el valor de 3, aquí me da cero, en el otro menos cuatro, cero por menos cuatro, cero. O sea que si uno de los dos factores se hace cero, el producto es cero. Entonces ya tenemos los dos ceros de este polinomio. ¿Cuál es la expresión desarrollada del polinomio?¿cómo lo hacemos? Juan: equis por equis, menos siete equis, menos tres equis y veintiuno. Profesora investigadora escribe en el tablero $= x^2 - 7x - 3x + 21$ $= x^2 - 10x + 21$ Utilicemos la fórmula cuadrática para hallar los ceros, por eso necesitamos la forma desarrollada. ¿Cuánto vale a? $a = 1$ $b = -10$ $c = 21$ Ahora sustituyo acá (en la fórmula cuadrática). $x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(21)}}{2(1)}$ $= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2}$ $\frac{10 + 4}{2} = \frac{14}{2} = 7$ $\frac{10 - 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$ Eso quiere decir que puedo utilizar el producto nulo, que quiere decir cuando los factores se hacen cero. Y en ese caso cuando los factores se hacen cero entonces esos valores son ceros o puedo utilizar la fórmula cuadrática, que usa los coeficientes de la forma desarrollada. Si utilizamos el [POLYEVAL ( )] y sustituimos por estos valores el polinomio nos tendrá que dar cero. Alguien tiene preguntas. [1:10:44 a 1:22:51 min.] Daniel: ¿de dónde salió el cuatro? Profesora investigadora: el diez sale de menos, menos 10 y de dónde sale el 4, 100 menos 84 da 16, la raíz de 16 es cuatro. Si la raíz de 16 es 4, me quedaría una raíz que se le suma al 10 y se divide por dos y la otra raíz donde se resta por el valor de cuatro y se divide por dos. Ahora, hay polinomios donde este valor de aquí, la raíz cuadrada, da negativo. ¿Ustedes pueden hallar la raíz cuadrada de un valor negativo? Estudiantes: no Profesora investigadora: la raíz de -4, ¿qué es? Estudiantes: dos Profesora investigadora: no, la raíz cuadrada de un número negativo no se puede en los números reales. Si se puede en los números complejos. Pero en el caso de que ustedes les den un valor negativo aquí (el subradical), quiere decir que el polinomio no tiene raíces. Existen polinomios cuadráticos que no tienen raíces. ¿Cuáles? Ustedes los puede determinar cuándo esto le da negativo (subradical). Porque las raíces negativas no existen. ¿Qué vamos a hacer ahora? Les voy a entregar una hoja y van a hallar los ceros de un polinomio con Lápiz/Papel ya sea por el

FECHA: 8 DE JULIO DE 2009
método de factorización o por la fórmula cuadrática. Más bien en el cuaderno. Hallar los ceros de: - $x+2$ - $(x-1)(x+1)$ - $-x^2+x+6$ - x^2+x^3-4x-4 Les voy a dar una hojita, para que los realicen. Cada uno lo debe de hacer y entregar al final de la clase. Utilizando una forma. Se observan los estudiantes, están trabajando. La profesora investigadora aclara que la fórmula cuadrática se aplica para trinomios cuadráticos, de esta forma ax^2+bx+c, aquí se incluyen los trinomios cuadráticos perfectos. O un binomio que sea cuadrático, porque en el caso de x^2-1, cuando uno lo completa y aparece el término de la mitad (escribe en el tablero x^2+0x-1). La fórmula cuadrática es para polinomios cuadráticos. Aclara que para hallar los ceros, el polinomio puede estar en la forma desarrollada o factorizada. Al final los estudiantes se llevan el trabajo para terminarlo en casa.

Tabla 5. Transcripción del video del 14 de Julio de 2009.

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 14 DE JULIO DE 2009</th></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1: 0:00 a 6:00 a min.</td><td>EL MOMENTO DEL PRIMER ENCUENTRO</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">La profesora da las indicaciones del manejo de la calculadora. Les solicita a los estudiantes que opriman la tecla diamante [◊] y la letra [W]. Se muestra la aplicación Y=Editor. En $y_1(x)$ se digita $x-2$. Luego digitan la tecla diamante [◊] y la letra [R], observan la aplicación Graph, allí aparece la recta correspondiente al polinomio $x-2$. La profesora se acerca a la mesa 6 para mirar cuál ha sido el error porque no ven la gráfica que ella proyecta con el viewscreen. Mientras la profesora da las indicaciones, Alba dibuja la gráfica, se fija en los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

En la mesa 1, Fardy no puede hacer la gráfica en la calculadora, en cambio Marisol ya la obtuvo. Ella le da las indicaciones a Fardy, le dice que escriba la letra x y luego w, pero se retracta, ahora no sabe cómo borrar lo digitado.

La profesora les indica a los estudiantes que dibujen la gráfica, que se fijen en los puntos donde pasa y tengan en cuenta los ejes. Todo lo que puedan decir lo deben escribir en la columna B de la Tabla 18.</td></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1: 6:01 a 12:25 min.</td><td>EL MOMENTO DE EXPLORACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">[6:01 a 7:00 min.]
En la mesa 2, Juan en su descripción de la primera gráfica toma como referentes los puntos de corte con los ejes y dice que la recta es ascendente. María se da cuenta que dibujó otra recta que pasa por otros puntos de corte con los ejes.

[7:00 a 7:40 min.]
La profesora aclara que en la columna C de la Tabla 18 deben realizar la gráfica que ven en sus calculadoras, lo que allí aparece es sólo el plano cartesiano.
[7:42 a 9:33 min.]
En la mesa 4, Alba discute con su compañera cuáles son los puntos de corte con los ejes de coordenadas. Alba se cuestiona por la longitud de las unidades de cada uno de los ejes, los del eje y son de menor longitud que el eje x. Marcela afirma que la recta pasa por el 2 y el -2 sin tener en cuenta la longitud de las unidades (puntos de corte con los ejes). Alba pregunta dónde queda -2, Marcela le responde que es el punto de corte con el eje y. Alba dice que el 2 es un cero del polinomio.

[9.34 a 12:25 min.]
La profesora presenta Y=Editor, como los estudiantes tiene Graph es necesario recordarles cuales son las teclas que les permiten abrir la aplicación Y=Editor. Ahora indica que para desactivar el polinomio, se señala y se oprime F_4, la activación de una expresión se observa con un chulito (✓). Toma el $y_2(x)$, allí digita el segundo polinomio. Indica</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 14 DE JULIO DE 2009</th></tr>
<tr><td colspan="2">Profesora: abro paréntesis, equis menos uno, cierro paréntesis, ¿qué debo escribir ahora?
Estudiantes: por
Profesora: abro paréntesis, equis más uno, cierro paréntesis. ¿Qué debo de hacer ahora?
Estudiante: diamante[◊] y [R]
Profesora: para que aparezca, la gráfica.
Estudiantes: oh
Profesora: ahora van a hacer lo mismo, van a observar bien la gráfica. Este es el eje horizontal x, y este el eje vertical y. Observen bien hacia cada lado, qué está pasando (señala los puntos de corte de la parábola). Y miren la forma que tiene esa gráfica. Observen que pasa con el plano cartesiano. Todo lo que ustedes tengan que decir de esa gráfica, lo escriben en la columna B. En la tercera o columna C deben trazar la gráfica. Mírenla bien en su calculadora y la trasládenla al papel.</td></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1: 12:26 a 27:06 min.</td><td>MOMENTO DEL TRABAJO DE LA TÉCNICA Y EL MOMENTO TECNOLÓGICO - TEÓRICO</td></tr>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">[12:26 a 15:26 min.]
En la mesa 5 Camilo realiza la descripción de la gráfica, escribe para el segundo polinomio que es una curva que desciende y luego asciende. Pasa por los puntos $(-1,0)$, $(0,-1)$ y $(1,0)$. Rápidamente pasa a la siguiente gráfica del tercer polinomio de la Tabla 18, la describe como una curva que asciende y desciende. Pasa por los puntos $(-2,0)$, $(0,6)$ y $(3,0)$. Luis y Jefferson antes de hacer la descripción, dibujan todas las gráficas. A la vez se escucha a la profesora explicándoles nuevamente a los estudiantes de la mesa 6, no entienden cómo hacer las gráficas en la calculadora.

[15:26 a 15:34 min.]
En la mesa 2, Juan en su descripción determina una propiedad de la parábola, su simetría.

[16:21 a 18:14 min.]
En la mesa 3 Mayra le pregunta a Julián cómo se coloca el elevado a la dos, él le señala la tecla (caret), ella no está segura si después del caret debe poner el dos. Después de digitar el polinomio, se observa la gráfica de la parábola. Luisa le pide ayuda a Mayra con el manejo de la calculadora, pero Mayra es quien teclea, ingresa el polinomio y encuentra la gráfica. Yurani teclea en la calculadora mientras Julián le dice que hacer.

[18:15 a 18:35 min.]
Una de las preguntas de la profesora es: ¿piensen qué pasaría si se prolonga el plano? ¿Qué pasa con la gráfica? ¿Se termina allí?
Estudiantes: no

[18:35 a 24:14 min.]
Alba realiza la gráfica del polinomio cúbico, determina los ceros con los resultados en L/P realizados el 13 de Julio. Debajo de su hoja de trabajo tiene el texto escolar “Conexiones Matemáticas 9” abierto en la temática correspondiente a función cuadrática. Alba no discute la respuesta con sus compañeras. La profesora investigadora se acerca a Alba y le pregunta en qué</td></tr>
</table>

FECHA: 14 DE JULIO DE 2009

se fijaron para hacer las gráficas, Alba lee sus respuestas, dice que los cortes con el eje x son los ceros y que el último término del polinomio (el de grado cero) determina el corte con el eje y. La profesora investigadora le pregunta a Alba cómo hicieron para hacer las curvitas de la gráfica del cuarto polinomio. Marcela dice que vieron en la calculadora, Alba no sabe cómo expresar la manera con que las hizo.

[24:20 a 24:50 min.]
Mientras Camilo y Daniel hablan, Frank transcribe las respuestas en su hoja de trabajo.

[24:50 a 25:53 min.]
En la mesa 2, Juan le presenta a la profesora los ceros, ella aprueba su respuesta y le sugiere que escriba lo dicho en la hoja.

[25:56 a 27:06 min.]
En la mesa 3 Mayra dibuja la gráfica del polinomio cúbico ella coloca los cortes con los ejes x antes de trazar la curva. Julián le ayuda a Dayanna a realizar el dibujo de gráfica del tercer polinomio de la columna A de la Tabla 18, lo primero que hace es mirar el punto de corte con el eje y de la gráfica de su hoja de trabajo.

TIEMPO T1: 27:07 a 34:14 min.	**EL MOMENTO TECNOLÓGICO - TEÓRICO**

DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS

[27:07 a 31:59 min.]
En la mesa 4, Alba le pregunta a la profesora dónde debe de escribir la respuesta de la tarea 3.2.a., le indica que la puede escribir en el espacio final de la hoja. Alba inicia la respuesta pero tiene duda sobre el nombre de la función que representa el primer polinomio de la columna A Tabla 18, por eso consulta su texto escolar “Conexiones Matemáticas 9”. Simultáneamente la profesora pregunta si recuerdan cómo hallar el grado del polinomio, Juan dice que lo determina el máximo exponente de uno de los términos del polinomio. Lady (2) parece que espera ver algo en la gráfica que no corresponde a lo que ha dibujado, borran el dibujo y nuevamente lo hace. Alba antes de escribir su respuesta consulta el texto escolar, mientras tanto Marcela empieza a explorar la gráfica con [TRACE].

[32:00 a 32:26 min.]
En la mesa 1 Fardy consulta su cuaderno, porque no sabe cómo escribir las características de la gráfica para el segundo polinomio. Marisol le dice que le pregunte a Daniel.

[32:27 a 33:34 min.]
En la mesa 7 Sebastián escribe su respuesta de la pregunta 3.2.a. detalla lo relacionado con el grado del polinomio. Pasa a la preguntas 3.3., llama a la profesora. Mientras que sus compañeras describen las características de la gráfica del polinomio cúbico.

[36:36 a 34:14 min.]
En la mesa 6:
Daniela: ustedes dicen que según el grado del polinomio, aumentan las rectas, x es la que cambia ¿cierto?

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 14 DE JULIO DE 2009</th></tr>
<tr><td colspan="2">Felipe: según cuántas veces pase por x, se define el grado del polinomio.
Daniela: pero es equis quien cambia la variabilidad de la línea.
Lucía: del grado.
Felipe: si pasa dos veces es de grado dos, si pasa tres veces es de grado tres.</td></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1: 34:15 a 45:30 min.</td><td>EL MOMENTO DE EXPLORACIÓN</td></tr>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">[34:15 a 37:35 min.]
La profesora solicita que pasen a las preguntas 3.3., Lina termina la descripción para el polinomio cúbico (algunos estudiantes no realizan las tareas en el tiempo previsto, mientras que otros avanzan rápidamente).
La profesora solicita atención y lee la pregunta 3.3. Les recuerda que los ceros de los polinomios debían de haberlos hallado en casa y que hoy van a retomar estos procedimientos. Se les solicita que escriban los procedimientos para hallar los ceros en Lápiz/Papel. La profesora toma como ejemplo $x-2$, les pregunta cuál es el valor de x que hace nula la operación.
Podemos decir que $2-2=0$, por lo tanto x, cuánto vale.
Felipe: dos.
Profesora: o podían decir, vamos a hacer nulo esto, entonces $x-2=0$. Entonces $x=2$. ¿En este podíamos haber usado la fórmula cuadrática?
Estudiantes: no
Profesora: ¿por qué no?
Alba: porque es de primer grado y la fórmula cuadrática se aplica a los polinomios de segundo grado. Vamos a trabajar la primera.
[35:16 a 40:10 min.]
La profesora gráfica el primer y segundo polinomio, por equivocación. Sólo necesita ver la función lineal. Los estudiantes le indican que en el programa Y=EDITOR tenía seleccionada las dos expresiones. Cuando tiene la recta, busca el comando [VALUE] en [F_5].
Profesora: aquí ven el valor de x. ¿Cuál fue el valor de x que encontraron?
Estudiantes: dos
Profesora: ¿qué me está señalando en la pantalla?
Estudiantes: el dos positivo, en el eje de la x.
Profesora: o sea que está señalando el cero. Recuerden que con este valor el polinomio se anulaba. Este el punto dónde se corta el eje x. Volteen la hoja y con un color, rojo, azul o lo que quieran repiten en la gráfica ese punto, que es el cero de ese polinomio.
Los estudiantes solicitan nuevamente explicación y la profesora repite el procedimiento.

[40:16 a 45:30 min.]
La profesora les dice que deben de tener en cuenta las coordenadas del cero en la columna C, toma como ejemplo el primer polinomio. $x=2$ y $y=0$, ¿qué coordenada se forma?
Felipe: (2,0)
Profesora: recuerden que la pareja ordenada debe ir entre paréntesis. Pasemos nuevamente a diamante[◊] y la letra [W], quién estaba activada
Felipe: y_1
Profesora: desactivemos y_1 y activemos y_2. ¿Todos tienen activada y_2? Diamante [◊] y la letra [R], aparece nuevamente la gráfica de y_2. Necesito que todos estén allí, miren la pantalla. Ahora</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 14 DE JULIO DE 2009</th></tr>
<tr><td colspan="2">vamos a [F_5], y ¿qué activo?
Felipe: [VALUE].
Profesora: [ENTER]. Allá me aparece los valores de x, pero resulta que ustedes todavía no saben que van a encontrar para x. ¿Cuál es el polinomio?
$$(x-1)(x+1)$$
Profesora: ya con lápiz y papel debieron haber encontrado los ceros de ese polinomio. ¿Cuáles eran?
Julián: uno y menos uno
Profesora: de dónde salió el uno.
Julián: de x menos uno, porque uno menos uno cero. Y el otro de $x+1$, porque menos uno más uno cero.
Profesora: los encontraste haciendo ese producto nulo. Y tenemos $x=1$ y $x=-1$. Entonces qué voy a digitar. $x=1$. [ENTER]. Miren el punto que se está señalando en la gráfica. Dónde lo deben resaltar, en la gráfica que ustedes hicieron, resáltelo. ¿Qué escribimos en la columna C? ¿Cuánto vale x?
Estudiantes: uno.
Profesora: ¿cuánto vale y?
Estudiantes: cero.
Profesora: ¿cuál es la pareja ordenada?
Fardy: (1,0)
Profesora: (1,0), muy bien. Pero resulta que aquí había dos valores. Entonces ¿qué hago? Tengo que volver a [F_5]. Y otra vez [VALUE], [ENTER]. Borró ese valor de x, con la flechita, qué valor le vamos a escribir ahora.
Fardy: -1
Profesora: ese menos es con que tecla.
Fardy: con la de paréntesis.
Profesora: muy bien. [ENTER]. Observen, ¿cuál se activó? Devuélvanse a su gráfica y lo resaltan. En ese punto que está allí activado, cuánto vale x.
Felipe: -1.
Profesora: ¿cuánto vale y?
Felipe: 0
Profesora: entonces, ¿Cuál es la pareja ordenada?
Felipe: $(-1,0)$
Profesora: muy bien, continúan ustedes con el resto de gráficas.</td></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1: 45:30 a 59:30 min.</td><td>EL MOMENTO DEL TRABAJO DE LA TÉCNICA Y EL MOMENTO TECNOLÓGICO - TEÓRICO</td></tr>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">[45:31 a 46:44 min.]
En la mesa 5, Daniel y Camilo están decidiendo cuál técnica L/P pueden usar para hallar los ceros del tercer polinomio de la Tabla 18. Daniel sugiere la fórmula la cuadrática. Determinan los coeficientes y sustituyen. Frank transcribe lo que Camilo ha escrito en su hoja de trabajo.

[46:45 a 48:46 min.]
En la mesa 4, Julián nuevamente digita los polinomios en Y=EDITOR y Mayra le pregunta por el valor de la abscisa para usar [VALUE]. Julián le explica a Dayanna como ingresar las expresiones</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 14 DE JULIO DE 2009</th></tr>
<tr><td colspan="2">en Y=EDITOR y ver las gráficas, pero ella no las puede ver, así que Julián nuevamente ingresa la expresión al Y=EDITOR y le muestra la gráfica. Luego le indica a Dayanna como usar el [VALUE].

[48:47 a 50:22 min.]
En la mesa 4, Alba previamente había obtenido los ceros de los polinomios, los tiene escritos en una hoja, ahora los escribe en la columna B.1. de la tabla 18 de la situación 3.

[50:22 a 52:38 min.]
En la mesa 2, Juan halló los ceros del tercer polinomio, pero el valor de abscisa de uno de los ceros no coincide con el punto de corte de la gráfica con el eje x, finalmente encontró el error, al parecer le había quitado el signo menos a -2.

[52:39 a 52:49 min.]
La profesora les solicita que escriban las respuestas de la sección 3.4 de la situación 3, en la hoja en blanco que les han entregado.

[52:49 a 55:25 min.]
Luis transcribe de una hoja los procedimientos para hallar los ceros en la columna B.1 de la Tabla 19.
Camilo le indica a Daniel los valores de los ceros. Hallan los ceros del cuarto polinomio con factorización.

[55:26 a 59:30 min.]
En la mesa 4, Alba halla los ceros del polinomio de tercer grado por factorización, determina las parejas ordenadas de los ceros. Alba inicia la sección 3.4, parece estar insegura con sus respuestas y llama a la profesora. Lee sus respuestas, dice que los ceros quedan en el eje x y que dependen del grado del polinomio.</td></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1: 59:31 a 1:21:10 min.</td><td>EL MOMENTO TECNOLÓGICO - TEÓRICO</td></tr>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">[59:31 a 1:02:25 min.]
En la mesa 5.
Profesora investigadora: ¿cuál es la característica fundamental de los polinomios que tienen ceros?
Camilo: que pasan por x.
Profesora investigadora: ¿puede haber una línea recta que no pase por x?
Luis: si
Profesora investigadora: ¿cómo la dibujarían?
Daniel: vertical
Profesora investigadora: si es vertical, ¿no pasa por x?
Luis: no, una recta paralela al eje x.
Profesora investigadora: bueno, ese es un polinomio lineal. Entonces, ¿ese sería un polinomio que no tiene cortes con el eje x y por tanto no tiene ceros? ¿Pueden existir polinomios lineales que tengan más de un cero? Ustedes, ¿qué opinan? ¿Una recta puede cortar en dos puntos del eje x?</td></tr>
</table>

FECHA: 14 DE JULIO DE 2009
Camilo: no Profesora investigadora: no, por qué. Camilo: no, es que una línea recta pasa una vez por el eje x. Profesora investigadora: ¿ella no puede ir y volver? Camilo: es que una línea recta solo pasa una vez. Profesora investigadora: ¿podrían haber sin ceros? Entonces podemos dibujarlo o dar la expresión algebraica de ese polinomio que no corta el eje x. Miremos la siguiente pregunta: pueden existir polinomios cuadráticos con menos de dos ceros. Con menos de dos ceros quiere decir que puede tener uno o no tener ceros. Camilo: no sé. Profesora investigadora: y de más de dos ceros, quiere decir que puede tener tres, cuatro ceros, cinco ceros. Según lo que están viendo, es posible que la parábola tenga más de dos ceros. Daniel: si … no Profesora investigadora: la curva de estas dos, tiene algunas características y se le llama parábola. Ahora estas dos podrían encontrar una expresión algebraica que no tenga ceros. Camilo: si Profesora Investigadora: ustedes tienen la calculadora, pueden ensayar. También tienen talleres que les sirven. Daniel: todas están buenas, menos la 3.4.d. [1:02:28 a 1:03:16 min.] En la mesa 3, la profesora se acerca a mirar los resultados de los ceros obtenidos con Lápiz/Papel del polinomio cuarto de la Tabla 19. Observa que habían omitido un factor. Finalmente aprueba el resultado. Luisa transcribe las respuestas de Dayanna. [1:03:39 a 1:11:24 min.] En la mesa 4, Alba habla con la profesora investigadora. Profesora investigadora: puede haber una curva que no tenga sino un solo cero. Marcela: no Profesora investigadora: cómo se imaginan una curva que tenga solamente un cero. Alba: no sé. Tienen que haber parejas, pares ordenados, si tiene tres ceros. Las pareja sería de tres ceros. Marcela: no, ¿qué tenga solamente un cero? No, no tendría que ser una curva, sino una línea. Profesora investigadora. Si, ¿Dónde se ven los ceros en la gráfica? Marcela: no se ven Profesora investigadora: según lo que ustedes han hecho hoy, dónde se podría ver los ceros en la gráfica. Alba: pues en el eje de las x. Marcela: casi siempre están en el eje de las x. Profesora investigadora: casi siempre, o ¿hay alguno que no? bueno todos los que tiene allí, sí. ¿Puedo tener una curva que corte en un punto al eje x? (Alba señala los cortes con el eje x y el eje y y Alejandra le corrige el error). Profesora investigadora: puedo tener una curva como esta, que pase por el eje x en un punto o que no pase por el eje x. Marcela: puede ser, puede estar en el eje y.

FECHA: 14 DE JULIO DE 2009
Profesora investigadora: según lo que están viendo, hasta cuántos ceros tiene el polinomio de grado tres. Alba: tres Profesora investigadora: si es un polinomio de grado dos, ¿cuántos son? Alba: dos Profesora investigadora: si es un polinomio de grado uno, lineal. Alba: uno Profesora investigadora: en relación a lo que ven en la Tabla 19, usted puede decir algo de esos polinomios. Entonces ahora vienen las preguntas: ¿es posible tener un polinomio lineal sin ceros o con más de dos ceros? Si es posible muestre un ejemplo. Alba: yo creo que con un cero. Ah no, esperece. ¿Es posible o es realidad? Profesora investigadora: si es posible, muestre un ejemplo. Usted lo puede graficar o le puede dar la expresión algebraica de ese polinomio. Alba: si es lineal, es de primer grado y tendría un solo cero. Profesora investigadora: podría tener un polinomio lineal que no tenga ceros. Que no sea ese, porque ese tiene uno. Ustedes recuerdan, que han visto función lineal y expresiones de funciones lineales. Marcela: porque hay algunas que no se pueden resolver. Alba: que no sea cuadrático. Profesora investigadora: estamos en las lineales, en la gráfica en qué me tengo que fijar para saber si tiene ceros. En la gráfica dónde detecto que hay tiene ceros. Si tiene ceros qué pasa en la gráfica. Alba: entonces atraviesa al eje x. Profesora investigadora: si no tiene ceros, ¿qué pasaría? Alba: pasa por y. Profesora investigadora: y tendrá que ver con los ceros. Marcela: no, hasta ahora no. Profesora investigadora: el x, entonces sino tiene ceros. Alba: entonces no pasa por y. Profesora investigadora: no pasa por x. ¿Si tiene ceros? Alba: pasa por x. Profesora investigadora: pensemos en un polinomio lineal, que cumpla esa condición. Si no encuentras ninguno, colocas no se puede. ¿Podrá haber una línea recta con más de dos ceros? Una línea que venga y vuelva por acá. Alba: en ese caso fue posible (señala una parábola). Marcela: pero esa es una curva. No, porque no sería recta. Profesora investigadora: ¿por qué no sería una recta? Marcela: no puede tener dos ceros, porque la recta tendría que encorvarse y ya sería curva. Profesora investigadora: esa explicación escríbala, por qué no puede tener más de dos ceros o por qué no puede tener ceros. Cómo lo vería en el gráfico, cuál sería la expresión algebraica de esa función. Alba: yo puedo hacer una gráfica así (sobre el eje x), que pasará solo por x. Profesora investigadora: si pasará por x, ¿qué gráfica sería? Alba: no todo, solo un pedacito. Profesora investigadora: puedo obtener una gráfica que pase por el eje x.

FECHA: 14 DE JULIO DE 2009
Alba: ¿cómo se llamaría? Profesora investigadora: ¿cuál sería la expresión? Allí todos los valores son cero. Marcela: x Profesora investigadora: ¿Cómo sería la gráfica que pasa por el eje x? Alba: no sé, no me puedo acordar. No todo, si no un pedacito nada más. Profesora investigadora: ¿puede pasar por un pedacito nada más? Alba: ¿o tiene que pasar por todo? Profesora investigadora: tú tienes ahí un buen ejemplo. Alba: entonces un segmento de recta. Profesora investigadora: yo puedo tener una recta con un segmento de recta. Marcela: no. Profesora investigadora: si yo tengo un segmento, una recta pasa por ese segmento. Escriban lo que piensan, que después hacemos la socialización. [1:11:26 a 1.12:46 min.] En la mesa 3, Dayanna y Julián discuten el número de ceros de las gráficas de los polinomios. En sus afirmaciones determinan que el punto de corte con el eje y es un cero. Julián pregunta por su hoja de trabajo, Mayra y Luisa están transcribiendo sus respuestas. [1.12:46 a 1.12:50 min.] La profesora les solicita que terminen de responder rápidamente las preguntas. [1:13:02 a 1:19:31 min.] En la mesa 5. Profesora: no necesariamente lo tienes que hacer con calculadora, lo puede hacer con lápiz y papel también. Muéstrame. Camilo: el punto $(-2,2)$ y $(2,2)$. Si se traza queda horizontal (utiliza la gráfica del segundo polinomio para ver la línea recta horizontal). Profesora: no tiene necesariamente que trabajar con la calculadora, pueden usar el lápiz y el papel. Camilo y sus compañeros de la mesa 5 no logran determinar la expresión de la línea recta paralela al eje x. Ahora tienen el problema de hallar el polinomio cuadrático que no tenga ceros. Hasta el momento no saben cómo obtener la gráfica o su expresión. Daniel da una idea, sugiere utilizar la misma expresión del segundo polinomio y Camilo parece que encontró la manera de hallar la expresión cuadrática, hace un dibujo de la parábola que no corta el eje x haciendo una translación vertical hacia arriba de la gráfica del segundo polinomio de la Tabla 18 y dice que necesita la calculadora para hallar la expresión, pero luego parece que encontró la manera de hacerlo con L/P. Camilo: pueden ser con cuatro parejas ordenadas (puntos de la parábola en el plano cartesiano). Luego señalamos uno acá, otro aquí, otro aquí y otro aquí (dibuja los puntos en el plano cartesiano del segundo polinomio de la Tabla 18 en relación a la simetría de la parábola). Daniel: hay uno más, mejor dicho sobra uno. Camilo: pero si pueden ser cinco también. Daniel: no me entiendes. Tienen que ser parejas ordenadas. Camilo: no, estas son parejas ordenadas. Entonces sería menos uno (lo borra), menos tres coma

FECHA: 14 DE JULIO DE 2009
seis, menos uno coma dos, cero coma uno (los escribe como parejas ordenadas). Daniel: no puede pasar por x. Camilo: es al revés Frank: $(1{,}0)$ Camilo: uno coma (lo borra), menos dos coma dos, menos uno coma uno. Profesora investigadora: ¿estos son los valores de los ceros? ¿Qué significan esas parejas? Camilo: son las parejas ordenadas que damos para que no cruce por cero. Frank: para que no cruce por x. Profesora investigadora: pero, estás seguro que esas parejas ordenadas pertenecen a una curva que es de una función cuadrática. Daniel: si las unimos todas, va a dar una curva. Camilo le muestra a la profesora investigadora la gráfica de los puntos, indicándole que al unirlos forma una curva. La profesora investigadora le sugiere que realice la gráfica en la respuesta. [1:19:31 a 1:20:00 min.] En la mesa 4, Alba encuentra las características de la pendiente de una función lineal horizontal en su cuaderno. Suena el timbre y Alba no ha terminado. Alba le pregunta a la profesora si la función afín y la lineal se parece, la profesora responde son lineales. Finalmente la profesora recoge una hoja por grupo o pareja.

Tabla 6. Transcripción del video del 15 de Julio de 2009.

FECHA: 15 DE JULIO DE 2009	
TIEMPO T1: 0:00 a 32:04 min.	**EL MOMENTO DE INSTITUCIONALIZACIÓN Y EL MOMENTO DE EVALUACIÓN**
DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS	

[0:00 a 3:55 min]
La profesora lee la pregunta 3.1. Escribe en el tablero los polinomios de la Tabla 18 y les solicita que describan la gráfica de $x-2$. La profesora muestra la gráfica con el viewscreen y el proyector.
Profesora: ¿qué paso cuando graficaron el primer polinomio? Recuerden que tienen que describir todo lo que paso con este primer polinomio. ¿Qué escribieron ustedes? ¿Que tienen allí escrito? Deben tener afuera las hojas. Se las voy a recordar (utiliza el viewscreen y el proyector).
Profesora: ¿qué paso con esta gráfica?
Juan: es lineal.
Profesora: ¿por qué es una lineal?
Juan: hay una sola respuesta y es una línea recta.
Profesora: la representación es una línea recta. ¿A qué se refiere con una sola respuesta?
Juan: un solo corte en x.
Profesora: en otras palabras en lugar de decir un corte en x, podemos decir un solo cero. ¿Cuál es ese cero?
Estudiantes: dos.
Camilo: esa gráfica está mal.
Profesora: pasa por el dos. Corta x por dos.
Profesora: será que yo le coloque $x-1$. Espérense un momento (ve en Y=EDITOR). Allí está cortando en 1, porque yo escribí, digite $x-1$, está cortando en 1. Pero si vamos a la que ustedes tenían, allí en la hoja es $x-2$. Esta si es exactamente la del taller, la otra también era lineal. Juan nos dice que era una línea recta. Alba nos dice que hay un cero. ¿Qué coordenadas corresponden a este punto? (señala el cero).
Estudiantes: dos
Profesora: dos que
Marcela: dos menos dos.
Alba: dos coma cero.
Profesora: dos coma cero, dos menos dos no. Dos cero, en x es dos y en y es cero. Bien sigamos con la otra.

[3:56 a 6:39 min.]
Profesora: la otra dice $(x-1)(x+1)$. ¿Qué pasa con esta gráfica? ¿Qué me pueden decir de esta gráfica?
Daniel: que hay dos puntos de corte con el eje x.
Profesora: muy bien, que otra cosa me pueden decir.
Luis: ¿qué es curva?
Profesora: ¿esa línea curva que está allí cómo se llama?
Estudiantes: parábola
Profesora: ¿qué más me pueden decir de esa parábola?
Camilo: menos uno en y, es ascendente

FECHA: 15 DE JULIO DE 2009
Profesora: qué quiere decir Camilo cuando dice que la curva es ascendente. Hacia donde se prolonga esa curva que se llama parábola. Estudiantes: hacia arriba. Profesora: por eso decimos que es ascendente. Observan en el polinomio que representamos allí, y que dice $(x-1)(x+1)$, qué signo tiene ese polinomio, qué hay antes del paréntesis. Estudiantes: positivo Profesora: por eso es que esa parábola asciende. Porque ese polinomio tiene un signo positivo iniciando, antes de los paréntesis. Si no hay nada es porque es positivo. Siempre que sea positivo asciende. ¿Cuáles son las coordenadas o los ceros de esta parábola? Aquí que cero es este. Estudiantes: menos uno Profesora: ¿y este? Estudiantes: uno [6:40 a 10:38 min.] Profesora: algo más sobre esta gráfica. Seguimos con la otra. Que dice $-x^2+x+6$ (la ingresa a Y=EDITOR). Es descendente. Por qué descendente, miren que va hacia abajo, y si seguimos dibujándola, sus ramas van hacia abajo. Qué más se puede decir de ella, además de ser descendente. Alba: que es de segundo grado. Profesora: es la representación de un polinomio de segundo grado. ¿Y la anterior no era polinomio de segundo grado? Alba: no, era lineal. Profesora: están de acuerdo, entonces por qué nos dio una parábola. Están de acuerdo con que la anterior era lineal Alba: no, la primera es lineal, la segunda también es también de segundo grado y esa también es de segundo grado. Profesora: lo que pasa es que la segunda esta factorizada si la multiplicamos me daba la x^2. Qué más pueden decir de esta. Andrés: tiene eje negativo. Profesora: ¿Cuál eje negativo? ¿Cuáles son los ceros de esta parábola? Estudiantes: menos dos y tres. Profesora: ¿Cómo sabes que es menos dos y tres? Felipe: porque es donde corta el eje de las x. Profesora: esa parábola esta corrida hacia la derecha. Situémonos en el eje de las y. En la otra, la parábola pasaba por -2 y 2, estaba a la misma distancia del eje de las y.en ese caso, decimos que y, en el caso anterior es el eje de simetría. O sea que un lado es exactamente igual al otro. ¿Aquí y es un eje de simetría? Estudiantes: no Profesora: si yo doblara esto por aquí, esto no me queda sobre este. Miren esta distancia y miren esta. ¿Dónde estará el eje de simetría? Tengan en cuenta que la distancia del eje de simetría hacia una rama de la parábola, deber ser la misma que esta hacia la otra rama. Por dónde trazaríamos el eje de simetría. Estudiantes: en el uno. Profesora: si yo me sitúo aquí y trazo esta paralela, ¿me queda? Felipe: en la mitad.

FECHA: 15 DE JULIO DE 2009
Camilo: en la mitad de uno y cero Alba: en dos Profesora: en la mitad de este primer segmento. Qué me queda aquí, uno, dos y medio, uno, dos y medio. ¿Cómo sería este eje de simetría?, paralelo a quién, a y. Pasaría aquí, por este punto que en la parábola se llama vértice. En este caso es el punto más alto que tiene la parábola. Es el valor máximo de esa parábola, porque de resto ella va descendiendo, por aquí pasaría el eje de simetría. Estas distancias siempre son siempre equidistantes. Si yo tengo aquí un punto en esta parábola teniendo el eje de simetría, tomó esta medida y puedo trazar al frente el otro punto y eso me facilita para trazar el gráfico. [10:40 a 13:27 min.] Profesora: seguimos con la otra: $x^2 + x^3 - 4x - 4$. ¿Qué me pueden decir de esta gráfica? Frank: que cruza tres veces por equis. Profesora: que esta está cortando el eje de las x en tres puntos diferentes. ¿Cuáles son esos puntos? Estudiantes: menos uno, menos dos y dos. Profesora: en otras palabras que diríamos, ¿qué tiene que? Estudiantes: tres ceros. Profesora: ¿cuáles serán las coordenadas del primer cero que encuentran a la izquierda? Estudiantes: $(-2{,}0)$ Profesora: -2 que es el valor en x y cero en y porque no se ha movido de allí. ¿De este? Estudiantes: $(-1{,}0)$ Profesora: ¿y este? Estudiantes: $(2{,}0)$ Profesora: qué más pueden decir de ese gráfico. Frank: que es una línea ondulada. Estudiantes: curva Profesora: qué es una línea curva, qué quiere decir ondulada. Frank: que tiene varias curvas Profesora: tiene tres ceros Marcela: esta gráfica es de un polinomio de tercer grado. Profesora: cómo sabes que es de tercer grado. Marcela: porque tiene tres ceros. Profesora: mirando el polinomio cómo sabías que es de tercer grado. Marcela: porque se repite la x tres veces. Profesora: será por eso. Felipe: porque el exponente más grande es tres. [13:28 a 15:07 min.] Profesora: bien. Luego dice completa la Tabla 19 obteniendo los ceros de los polinomios. Ya fuimos hablando de esos ceros. Ya miramos los ceros, las coordenadas de cada cero. Ahora vamos a ubicar los puntos, ya están ubicados, con la calculadora los señalamos con color. Cómo encontramos esos ceros con lápiz y papel. ¿Qué hacían con el primer polinomio? Con $x - 2$. Alba: se igualaba a dos, no a menos dos. Estudiantes: igualamos a cero.

FECHA: 15 DE JULIO DE 2009

Profesora: este (señala $x-2$), cuál fue el cero que encontramos para este.
Estudiantes: dos
Profesora: dos, por qué, como lo encontraron.
Estudiantes: igualando a cero.
Profesora: igualando a cero, teniendo en cuenta entonces aquí cuánto vale la x,
Estudiantes: dos

[15:08 a 16:16 min.]
Profesora: dos menos dos me debe dar cero. ¿Cuál es el valor de este cero? ¿Cómo encontraron el de segundo?
Luis: menos.
Profesora: ¿por qué? ¿De dónde sacaste el menos y el más uno? Esta factorizado, cuando esta factorizado qué hacemos.
Julián: se buscan diferencias de signos.
Profesora: para qué de cuánto.
Julián: cero.
Profesora: o igualamos cada factor a cero. Si yo tengo $(x-1)$, cuánto vale la x para que me de cero.
Estudiantes: uno
Profesora: uno menos uno me da cero. Entonces la $x=1$. Es lo mismo que decir $x-1=0$, entonces $x=1$. ¿Y qué paso con el tercero?

[16:17 a 19:28 min.]
Luis: con la fórmula cuadrática (sale al tablero a mostrar el procedimiento, la profesora le escribe la fórmula cuadrática).
Determina los valores de $a=-1$, $b=\ 1$ y $c=6$. Sustituye.

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-1)6}}{2.-1}$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{-2}$$

Profesora: ¿de dónde sale el 25?
Luis: de realizar, estas operaciones (señala el radicando, al inicio había escrito $2\cdot 1$, escucha a uno de sus compañeros y cambio el valor por $2\cdot -1$).

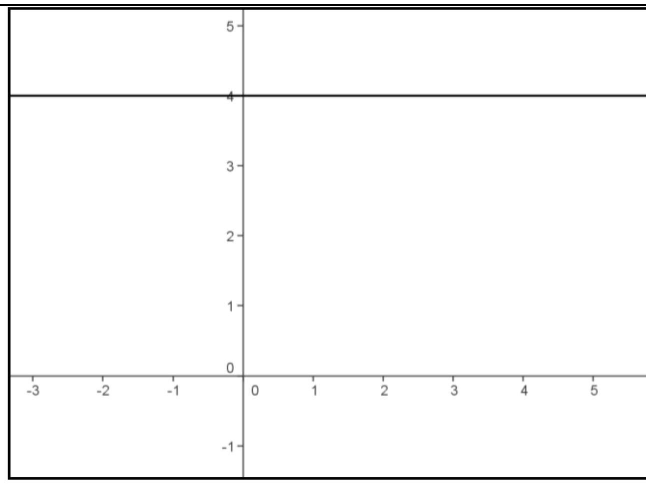
$$x=\frac{-1\pm 5}{-2}$$
$$\frac{4}{-2}\frac{6}{-2}$$

Profesora: ¿qué quieres decir con eso allí?
Luis: que separamos (señala el $\pm$).
Profesora: entonces $x=$, con cuál vas a trabajar primero. Entonces borre el otro porque está separando signos. Entonces con más, quite este (señala a $\frac{6}{-2}$, Luis escribe $x=\frac{4}{-2}$). Menos uno más cinco le da cuatro, sobre menos dos. ¿Qué le da eso?
Luis escribe menos dos.

FECHA: 15 DE JULIO DE 2009
Profesora: igual a menos dos. Menos uno menos cinco, que le da (iba a borrar el menos). Allí está bien. Ahora vamos a buscar el otro cero. Luis escribe $\frac{6}{-2}$. Profesora: ¿qué signo tiene este 6? Luis: positivo Profesora: ¿por qué? Luis: negativo. (Escribe en el tablero $\frac{-6}{-2} = 3$). Profesora: entonces x igual a ... Luis escribe $x = 3$. Profesora: allí aparecen los dos ceros del tercer polinomio. [19:29 a 21:53 min.] Y el cuarto polinomio. Son los mismos que habíamos visto en el gráfico. Y el cuarto polinomio. Juan escribe $x^2 + x^2 - 4x - 4$. Los compañeros le advierten de un exponente que no corresponde. Ahora escribe $x^2 + x^3 - 4x - 4$. $x^2(x+1)4(x+1)$ Profesora: ¿de dónde salió esto? Juan: pues sacamos factor común. Profesora: bueno asocie. Juan escribe $(x^2 + x^3) - (4x + 4)$. Juan: entonces sacamos factor común de estos dos (señala $(x^2 + x^3)$) que es x^2 y sacamos factor común de estos (señala $(4x + 4)$) que es 4. Profesora: ese 4 que sacaste de factor común ¿qué signo tiene? Juan: negativo (escribe en el tablero $x^2(x+1) - 4(x+1)$). Profesora: bien y ahora. Juan: ahora reunimos. (Escribe en el tablero $(x+1)(x^2-4)$). Ahora seguimos factorizando (señala a $x^2 - 4$) Profesora: ese binomio lo seguimos factorizando. Juan escribe $(x+1)(x-2)(x+2), x = -1, x = 2$ y $x = -2$. Profesora: allí están los tres ceros, que son los mismos que vimos en el gráfico. Si retomamos nuevamente el tercero, él lo resolvió, encontró los ceros utilizando la fórmula cuadrática., de qué otra forma habíamos podido encontrar los ceros en el tercero, ¿solamente con la fórmula cuadrática? En lugar de escribir la fórmula cuadrática, qué habíamos podido hacer con el tercero. [21:54 a 25:15 min.] Julián: la raíz cuadrada. Profesora: ¿raíz cuadrada de quién? Julián: de x^2 Profesora: mira el tercero es un trinomio, qué más le podemos hacer a ese trinomio además de aplicar la fórmula cuadrática para encontrar los ceros Mayra: factorizar Profesora: cómo podemos factorizar este trinomio. Andrés: dos números que. Profesora: obsérvenlo bien, recuerden ahora cuando vimos los gráficos. Aquí me dio línea recta

FECHA: 15 DE JULIO DE 2009
(señala el primer polinomio), aquí qué nos dio (señala el segundo polinomio). Estudiantes: una parábola ascendente. Profesora: dijimos que era ascendente, por qué. Estudiantes: porque era positivo. Profesora: porque este signo de a, que estaría aquí afuera, es positivo. En este caso, sino aparece nadie, qué número es. Estudiantes: uno Profesora: uno, y es positivo. Aquí cuánto vale a (señala el tercer polinomio). Estudiantes: menos uno Profesora: por eso la parábola nos dio, cómo Estudiantes: descendente. Profesora: y esta es de tercer grado (señala el cuarto polinomio). Comparando estas dos (el polinomio dos y tres), ambas las podemos sacar por factorización. Qué hago aquí antes de factorizar (señala el tercer polinomio). Qué factor común hay, para quitar este menos de aquí. Estudiantes: el uno Profesora: ¿con el uno positivo sacamos este menos? Julián: con el uno negativo. Profesora: sacamos factor común, el uno negativo. ¿Cómo queda eso, al sacarle factor común el uno negativo? Sebastián escribe $-x^2+x+6$. Profesora: saque factor común, menos uno. Abra paréntesis. Por cuánto multiplicas -1 para que te de x^2. Sebastián escribe $-1(x^2\ +$ Profesora: a ver, menos por más, ¿te da más? ¿Allí que va? Sebastián escribe $-1(x^2-x-6)$ Profesora: ¿ahora qué haces con el trinomio? Sebastián: factorizo. Profesora: primero el menos uno. Factorizas el trinomio. Sebastián escribe $-1(x-2)(x-3)$. Uno de los compañeros le indica que uno de los signos no es correcto. Ahora escribe $-1(x+2)(x-3)$. Profesora: a ver, son dos números qué multiplicados les de seis, dos por menos tres menos seis y dos y menos tres menos uno. Observen, quedo factorizado en dos binomios, pero miren aquí que signo tiene la a. Camilo: negativo Profesora: por eso la parábola nos dio en forma descendente. [25:16 a 29:22 min.] Profesora: ¿Pueden existir polinomios lineales con más de un cero o sin ceros? En el caso de dar una respuesta afirmativa de un ejemplo. Juan: con más de un cero, no. Pero sí, sin ceros. Profesora: por ejemplo, muéstranos allá. ¿Qué vas a hacer? Vas a graficar. Ahora que él termine, intervienen ustedes. Juan dibuja la siguiente gráfica.

FECHA: 15 DE JULIO DE 2009



Juan: puede haber una ecuación, que la recta, no tenga corte en x, en esté caso sería $y = 4$.
Profesora: bien ¿y siempre tiene que ser que este en la parte superior?
Juan: no puede ser negativa.
Profesora: está claro, ésta no tiene ceros porque no hay cortes en x. Y los ceros son los cortes en x. Eso está claro. Si hay sin ceros y con más de un cero. ¿Ninguna?
Marcela: si tiene más de dos ceros no se puede porque no sería lineal.
Profesora: vamos a ver, a ver. Ella dice que si hay más de un cero no sería lineal. ¿Necesariamente tiene que ser curva para que haya más de un cero?
Juan: profesora $y = x$, es decir todo el eje x.
Profesora: si señor tiene toda la razón, puede ser que la recta nos coincida con x, quede aquí sobre el eje de la x. ¿Cuántos cortes hay con el eje x?
Estudiantes: infinitos
Profesora: todos los valores de x son los números reales, que son los que están en el eje de las x.

[29:23 a 32:04 min.]
Seguimos, podemos tener polinomios cuadráticos con menos de dos ceros.
Camilo dibuja una parábola cóncava hacia abajo, con eje de simetría y y vértice en $(0, -1)$. Dibuja los puntos y posteriormente la curva.
Camilo: solamente que esta torcida, aquí está la curva, pero no está cortando el eje x, entonces hay un cero x, cero ceros.
Profesora: no corto a x, en ninguna parte. Muy bien. Otro, ¿hay otra posibilidad? Miren esto que él nos está diciendo. Puede estar por aquí (dibujo la gráfica con el debo en los diferentes cuadrantes) y puede ser ascendente o descendente. Pero que otra posibilidad, dice que con menos de dos ceros. En el ejemplo de Camilo no hay ningún cero.
Felipe: que la haya tocado una vez no más.
Profesora: ¿cómo quedaría la gráfica si la corta en un punto no más? ¿Dónde quedaría ese vértice que hablamos ahora? Tú me dices que si subimos la parábola, a dónde, aquí (señala el origen) (Felipe no quiere salir al tablero y le da las indicaciones a la profesora, quien finalmente dibuja la gráfica). Según lo que él dice la parábola sube aquí (señala a $(0,0)$) entonces dónde tocó, en un solo punto. Entonces tiene que ser en $(0,0)$, puede ser en cualquier punto del eje de las x.
Profesora: ahora si les voy a entregar las calculadoras.

FECHA: 15 DE JULIO DE 2009	
TIEMPO T1: 32:05 a 38:20 min.	**EL MOMENTO DEL PRIMER ENCUENTRO Y EL MOMENTO DE EXPLORACIÓN**
DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS	
La profesora lee las indicaciones de la situación 4. Profesora: cuál es el polinomio $a(x-1)(x+1)$, primero vamos a trabajar con esa familia, pero vamos a variar la a, con a de valor -1, luego -2, 1 y 2. Prendan la calculadora. Abrimos llave, recuerdan cómo se abre llave. (Utiliza el viewscreen y el proyector para digitar los valores de a). Allí vamos todos. Estudiantes: no Profesora: entre llaves les quedó $-2,-1,1$ y 2, cerraron llave (se ve en Y=EDITOR, $\mathrm{Y}_1(x)=\{-2,-1,1{,}2\}$), por y vamos a digitar el polinomio (se ve $\mathrm{Y}_1(x)=\{-2,-1,1{,}2\}*(x-1)*(x-1)$). Alba: profesora el menos ¿que allí aparece es el de paréntesis o el normal? Profesora: el de operación, el normal. Camilo: [ENTER] profe. Profesora: les apareció la parte superior. Ahora diamante [◊] y la letra [R] y esperen, observen, la primera que digitamos, la que tenía menos. (Se observa que Dayanna en vez de escribir los valores de a, escribe $a(x-1)(x+1)$, sin hacer explícito el por de multiplicación). Frank: la hicieron mal Profesora: ¿díganme cuántas tienen que salir? Estudiantes: dos, cuatro. Juan: a mí solamente me dio una. Profesora: esperece. Con paciencia que ellas aparecen. Bien allí tenemos la familia de las parábolas $a(x-1)(x+1)$. ¿Cuántos valores diferentes le dimos a? Cuatro, por eso aparecen cuatro parábolas. (Los estudiantes se sienten impacientes y muestran su calculadora a la profesora, solicitan la ayuda de la profesora). Olga: profe esto está dañado Profesora: no está dañado, usted está haciéndolo algo mal. Vuélvalo a hacer. Ya todos deben de tener la familia de parábolas.	
TIEMPO T1: 38:20 a 42:37 min.	**EL MOMENTO TECNOLÓGICO – TEÓRICO, EL MOMENTO DE INSTITUCIONALIZACIÓN Y EL MOMENTO DE EVALUACIÓN**
DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS	
Profesora: ¿Cuáles son las parábolas que tienen el a positivo? Juan: las que abren hacia arriba. La profesora señala las parábolas en la pantalla. Profesora: entonces ¿qué pasa cuando a es positivo? Alba: que las parábolas son ascendentes. Profesora: bien, y si son negativas Alba y Camilo: las parábolas son descendentes. Profesora: qué tienen en común las parábolas de la familia $a(x-1)(x+1)$ y en qué se diferencian. Vamos a compararlas todas. Alba: cortan en 1 y en -1.	

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 15 DE JULIO DE 2009</th></tr>
<tr><td colspan="2">Juan: tienen los mismos ceros
Profesora: tienen los mismos ceros. Bien, eso es lo que tienen en común. En que se diferencian.
Alba: en a.
Profesora: que unas ascienden y otras descienden. Unas son positivas y las otras son negativas. ¿Cómo se da uno cuenta al mirar el polinomio si va ser ascendente o descendente? ¿Mirando a quién? ¿El signo de quién?
Estudiantes: de x
Profesora: ¿de x?, ¿Qué es lo que miró, el signo de quién? ¿Cómo se dan cuenta si la parábola va a ser descendente o ascendente?
Felipe: el signo del polinomio.
Marcela: del signo que hay al principio del polinomio.
Profesora: el signo de quién
Marcela: del polinomio.
Juan: el signo del primer término.
Profesora: si esta ordenado. ¿Cómo llamamos usualmente a ese coeficiente?
Camilo: negativo
Profesora: es el signo de a. Miren allí está en la familia: $a(x-1)(x+1)$. Esa a fue la que sustituimos por valores. En que se diferencian fuera de la concavidad, que unas suben y otras bajan, descendente y ascendente. ¿En qué más? ¿En qué más? Apenas tenemos una diferencia, ¿de resto son iguales?
Juan: son ascendentes y ascendentes. No más.
Profesora: no más, todo lo demás es igual, apenas tenemos una diferencia, de resto todo son iguales. Ustedes solamente me dijeron que tenían los mismos ceros, ¿hay más cosas iguales o hay diferencias? Miren esas dos que ascienden (señala las dos gráficas), ¿qué pasa?
Juan: son diferentes.
Profesora: en qué más se diferencian.
Juan: las asíntotas de la más chiquita, se cortan con la otra. Bueno una es más ancha que la otra.
Profesora: bien, una tiene más abertura que la otra. ¿Qué más? Vuelvo y se las muestro, las ascendentes. Esta es una y esta es otra. Esto como se llama (señala el vértice), el qué. No, este puntico donde está mi dedo.
Juan: el eje.
Profesora: no, este es el eje de asimetría, que coincide con y. Pero este qué es, el qué, el vértice de la parábola y este es el de la otra. ¿Son iguales?
Estudiantes: no
Profesora: entonces sus vértices son diferentes. Ahora miremos las que desciende, miren una y miran la otra, ¿tienen el mismo vértice?
Estudiantes: no.
Profesora: esta es otra diferencia, en los vértices.</td></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1: 42:38 a 46:55 min.</td><td>EL MOMENTO DEL TRABAJO DE LA TÉCNICA</td></tr>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">[42:37 a 45:27 min.]
Profesora: seguimos, ahora ya trabajamos con esta familia de parábolas, trabajaremos con otra, cuál es la otra familia, ax^2+x+6, vamos a trabajar con los mismos valores de a. Vamos a diamante [◊] y la letra [W] y la vamos a desactivar esta.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 15 DE JULIO DE 2009</th></tr>
<tr><td colspan="2">Daniel: cómo la desactivo.
Camilo: con [F_4] señalándola.
Profesora: ahora primero a digitar los valores de a. Abrimos llave y digitamos -2 coma -1 coma 1 coma 2 y cerramos llaves. Por y ahora escribimos, no escribimos la a, porque ya están los valores de a, qué escribimos $x^2 + x + 6$, [ENTER]. Mírenla allá arriba $y_2(x)$, esta allá arriba.
Marcela: entre paréntesis.
Profesora: no
Camilo digita la expresión $x^2 + x + 6$ entre paréntesis, Daniel le pregunta a Camilo, si el menos que usó es el del paréntesis.
Profesora: vamos a trabajar con esta familia $ax^2 + x + 6$, ya dieron [ENTER].
Se escucha que los estudiantes, no logran las gráficas. Parece que no desactivaron la primera familia de parábolas.
Profesora: diamante [◊] y la letra [R] y denle tiempo a que aparezcan todas.
Andrés: aparecen unas encimas de las otras.

[45:27 a 46:34 min.]
La profesora se acerca a Camilo, espera que él digite la expresión, Camilo le pregunta si debe escribir $x^2 + x + 6$ entre paréntesis, Camilo se da cuenta que no debía cerrar la expresión entre paréntesis. Frank y Camilo comparan las gráficas obtenidas, con las que se ven en la pantalla.

[46:35 a 46:55 min.]
La profesora se acerca a mirar si los estudiantes de la mesa 7 y 6 tienen las parábolas esperadas.</td></tr>
<tr><th>TIEMPO
T1: 46:56 a 50:51 min.</th><th>EL MOMENTO DE INSTITUCIONALIZACIÓN Y EL MOMENTO DE EVALUACIÓN</th></tr>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">[46:56 a 49:35 min.]
Profesora: ahora si observemos las parábolas, qué tienen en común la familia $ax^2 + x + 6$. Obsérvenlas bien.
Lady: que todas se cortan en un mismo punto.
Profesora: ¿en cuál punto?
Lady: en el eje de y, en 6.
Profesora: tienen el mismo punto de intersección en el eje de las y. Bien, qué tienen de diferente.
Lady: unas son ascendentes y las otras descendentes.
Profesora: ¿cuáles son las ascendentes?
Alba: unas son ascendentes y las otras descendentes.
Profesora: ¿cuáles son las ascendentes?
Alba: las que son positivas.
Profesora: ¿qué tienen positivo?
Alba: uno y dos.
Profesora: pero ese uno y dos, qué representan.
Alba: los ceros.
Profesora: no, esos no son ceros. Ese uno y dos, ¿qué son? ¿Los valores de quién?
Estudiantes: de a.
Profesora: cuando esa a, es positiva. Las parábolas son ascendentes. Tú me dijiste que</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 15 DE JULIO DE 2009</th></tr>
<tr><td colspan="2">corresponden a que valores de a.
Alba: a uno y dos.
Profesora: y las otras dos parábolas, ¿cómo son?
Estudiantes: negativas, descendentes.
Profesora: descendentes ¿Qué valores tiene a?
Estudiantes: negativo.
Profesora: ¿Cuáles son esos valores negativos que trabajamos?
Estudiantes: -1 y -2.
Alba: hay otra diferencia, a pesar de que son cuadráticas, unas no tiene ceros y la otras si tienen ceros en x.
Profesora: muy bien, hay dos que no tienen ceros. ¿Cómo sabes que no tienen ceros?, Alba.
Marcela: porque no intercepta en x.
Profesora: que más, hay otra diferencia.
Juan: la abertura.

[49:36 a 50:51 min.]
Profesora: una tiene mayor abertura que la otra, tanto para las que ascienden como las que descienden.
¿Cuáles de los anteriores polinomios son factorizables? De esas cuatro parábolas, cada una de las parábolas corresponde a un polinomio diferente. Mirando el gráfico, ¿cuáles son factorizables?.
Juan: las que tienen ceros.
Profesora: solamente son factorizables las dos que cortan el eje x, estas dos no tienen ceros por lo tanto no son factorizables. ¿Qué valores tiene a, en las dos que son factorizables?
Felipe y Marcela: -2 y -1.</td></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1: 50:52 a 55:44 min.</td><td>EL MOMENTO EXPLORATORIO</td></tr>
<tr><th colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</th></tr>
<tr><td colspan="2">[50:52 a 51:11 min.]
Se observa a los estudiantes de la mesa 3 revisando lo que han escrito en las tareas 4.1.

[51:12 a 51:40 min.] Se observa a los estudiantes de la mesa 2, Juan les explica a sus compañeros como abrir la aplicación HOME con las teclas diamante [◊] y [Q].

[51:40 a 51:55 min.] La profesora sugiere que para borrar utilicen [F_1] y 8, pero deben ir a Y=EDITOR y desactivar las expresiones antes de borrarlas.

[52:13 a 55:44 min.] La profesora indica la manera como se abre la aplicación HOME con las teclas diamante [◊] y [Q]. Luego les indica que deben escribir en la entrada [PARABOL1 ( )], tal como aparece en las hojas.
Estudiantes: ¿entre paréntesis?
Profesora: no, abrimos y cerramos paréntesis. Después de [PARABOL1 ( )] abrimos y cerramos paréntesis y luego damos [ENTER].
(Camilo está usando Voyage 200 y no sabe qué hacer, Daniel le indica que debe teclear [◊] y [Q] y luego escribir en la entrada [PARABOL1 ( )]).
Estudiantes: tan chévere.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">FECHA: 15 DE JULIO DE 2009</th></tr>
<tr><td colspan="2">Profesora: a todos no les da igual a cada uno les da una parábola diferente. Por ejemplo si yo quiero cambiar esa parábola me voy otra vez a HOME y doy [ENTER] y me aparece otra diferente. Vuelvo a [◊] y [Q] y doy [ENTER] y siempre aparecen diferentes.
Se observan los estudiantes, ellos ingresan la expresión en HOME.
Profesora: ya vieron que aparecen diferentes parábolas.</td></tr>
<tr><td>TIEMPO
T1: 55:54 a 1:17:47</td><td>EL MOMENTO DEL TRABAJO DE LA TÉCNICA Y EL MOMENTO TECNOLÓGICO-TEÓRICO</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESCRIPCIÓN O DIÁLOGOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">[55:54 a 56:35 min.]
La profesora lee las tareas 4.2. y una de las indicaciones es que deben buscar una parábola con a negativo, $a = -1$, luego dibujarla, hallar los ceros y la expresión algebraica.

[56:36 a 57:04 min.]
En la mesa 4, Alba encontró una parábola cóncava hacia abajo y la dibuja en la columna B de la Tabla 22.

[57:05 a 57:53 min.]
En la mesa 5, Camilo dibuja en la columna A de la Tabla 22 una parábola cóncava hacia abajo para $a = 1$. Luis también dibuja su gráfica, pero no se ve lo que hace. Frank mira la gráfica de Camilo.

[57:54 a 58:46 min.]
En la mesa 2, cada pareja dibuja sus parábolas. La profesora se acerca a mirar el trabajo de Juan y no ha escrito la expresión de la parábola.
La profesora dice a todo el grupo que expresión es escribir el polinomio correspondiente a cada una.

[58:47 a 1:00:24 min.]
En la mesa 3, Mayra digita la expresión de [PARABOLA1 ( )] y no obtiene la gráfica, le pregunta a Julián que debe hacer, Dayanna y Julián le dicen que es [PARABOL1 ( )].

[1:00:25 a 1:01:52 min.]
En la mesa 5, Camilo le indica a Daniel, que una vez le dé [ENTER] no puede volver a ver la gráfica anterior. Camilo da varias veces [ENTER] pero las parábolas que obtiene son descendentes, cuando encuentra una ascendente no se ve el vértice, continúa hasta encontrar una ascendente que muestre el vértice. Frank no usa su calculadora, toma de Camilo para dibujar la parábola.

[1:01:53 a 1:04:24 min.]
En la mesa 6, la profesora acompaña a Felipe en el proceso de escritura de la expresión algebraica de una parábola cóncava hacia arriba. Felipe no sabe si escribir $x - 1$ o $x + 1$, sabiendo que un cero es igual a -1.
Profesora: esto donde está, en x o en y.
Felipe: en x.
Profesora: entonces x igual. Y el otro. (Se refiere a la escritura de los ceros).</td></tr>
</table>

FECHA: 15 DE JULIO DE 2009
Felipe escribe los dos ceros de la forma $x = r$. Profesora: ahora con esto escribe la expresión (los ceros). ¿Cómo quedaría? ¿Cuánto vale a? Felipe: uno. Profesora: abra paréntesis. Si la x vale -1 cuando debe valer este, para que le de cero. ¿Menos uno? Despeje a ver si le da. Felipe: uno Profesora: pero qué signo hay aquí, menos o más. No ve, que aquí hay un menos. Por qué más, porque la x vale menos dos, así que la única manera es que aquí sea... Felipe: + 1. Profesora: ¿$+1$? Esto es uno o dos. Borre aquí. Entonces es -1 o más +1. Si la x, vale -1 entonces que le suma para que le cero. Felipe: -1 Profesora: menos uno menos uno da menos dos. Felipe: +1. Profesora: suma esto, y vera que da cero. Por quién, ¿qué le da el otro? Felipe escribe en su hoja. Profesora: bien, ahora está (señala la siguiente gráfica). ¿Cuánto vale la a? Felipe escribe $a = 1$. Profesora: ¿era uno? Felipe contesta sí, con su cabeza. Profesora: ahora aquí, menos uno, sí. Por quién, muy bien. Felipe escribe sus respuestas y la profesora las revisa. La profesora le sugiere a los otros compañeros que cada uno debe tener su parábola. [1:01:53 a 1:05:00 min.] La profesora acompaña a Sebastián en el proceso de obtención de la expresión del polinomio de la Tabla 22, hasta que se obtiene la expresión correcta. [1:05:01 a 1:06:14 min.] La profesora: 16 se acerca a la mesa 1. Fardy ya ha determinado los ceros de la parábola y escribe la expresión factorizada. Profesora: ¿cuánto vale a? Fardy: uno Profesora: entonces abra paréntesis. x menos cero. Marisol: menos tres. Profesora: porque menos tres, la x vale -3 y esto se tiene que convertir en cero. Entonces, cuánto tiene que valer r, para que al sumarlo con -3 te de cero. Fardy: r cuánto tiene que valer. Tres. Profesora: entonces cómo le queda la expresión. Fardy: $x + 3$ Profesora: muy bien. Por quién. Fardy: por x menos. Profesora: recuerda que se debe convertir en cero el paréntesis. ¿Cuánto tiene allá? Fardy: menos uno. Por $x - 3$. Profesora: aquí tiene menos tres.

FECHA: 15 DE JULIO DE 2009
Fardy: a no, me parece que es por menos uno. Profesora, sí, y menos uno reunido con menos uno, ¿le da cero? Fardy: no. Profesora: entonces. Fardy: más uno Profesora: ahora tú haces la otra, recuerda que se convierte en cero por eso hablamos de los ceros. [1:06:15 a 1:17:19 min.] Se observa la mesa 2, Juan es quien determina las expresiones de las gráficas que han dibujado sus compañeros. Luego continúa con la expresión de sus gráficas. [1:17:19 a 1:19:00 min.] La profesora investigadora le solicita Camilo que le explique a Jefferson como determinar la expresión algebraica. Camilo: primero colocas a, luego abrís paréntesis y escribís x. Qué valor le tienes que poner a x para que de uno. Jefferson: que le tiene poner a x. Camilo: para que al hacer la operación de cero. Jefferson: menos uno. Camilo: entonces este se coloca negativo, entonces 1 menos 1, da cero. Cuando acá es positivo, entonces el signo que se coloca acá es negativo y cuando acá es negativo entonces el signo que se coloca positivo. Para que de eso. Profesora investigadora: si este positivo aquí como quedaría (señala el valor de r positivo) Camilo: $x-1$ Profesora investigadora: si este es negativo. Camilo: $x+1$ Felipe: profes, porque la profesora me dijo que así no se podía, que pusiera $x=-1$ Camilo: da lo mismo Profesora investigadora: podemos escribir $x=1$ o $x=-1$ o en forma de pareja ordenada. [1:19:00 a 1:11:51 min.] La profesora sugiere que continúen con las tares de 4.3. Se observa la mesa 3, Mayra e Isabel escriben conjuntamente la respuesta. Isabel le explica a Luisa como obtener la expresión. Julián y Yurani escriben la forma factorizada de las parábolas, han omitido el valor de a, en las expresiones. [1:11:52 a 1:12:42 min.] En la mesa 4, Alba ya ha encontrado las gráficas de las parábolas que no son factorizables. Alba: que no toca las x, cuando no la toca no tiene ceros. (Dibuja con su dedo una curva hacia arriba) Alejandra: puede ser así o así (dibuja con su dedo una curva cóncava hacia arriba y otra cóncava hacia abajo). Alba: puede ser cualquiera, que no toque esta línea (señala el eje x) Lady (2): hay que buscar una que no tenga la raya.

FECHA: 15 DE JULIO DE 2009
Alba: con la fórmula. [1:12:42 a 1:16:00 min.] En la mesa 5, Camilo encontró una parábola que no corta el eje x. Se la muestra a sus compañeros. Camilo: pero esta expresión cómo es. Dice si a es -1, entonces x es (escribe en su hoja $-1(x-\ )$), Daniel: es cero. Camilo: h es otra. Coordenadas del vértice y cuál es el vértice. (Camilo llama a la profesora). Camilo: profe aquí me dice que para hallar esta fórmula hay que hacer Profesora: para hacer esta fórmula hay que tener la parábola. ¿Qué condición tiene? Camilo: mírela (la señala en el plano cartesiano). Qué no pase por x. Profesora: pero mira que aquí no puedes apreciar las coordenadas. Busca otra en donde puedas apreciar un poco más. Luis: profesora esta (muestra la gráfica de su calculadora). Camilo: las coordenadas son menos dos cero. Profesora: las coordenadas de quién. Del vértice Camilo: ¿Cuál es el vértice? Profesora: recuerdan que hablamos de un eje de simetría. Estas por ejemplo, el eje de simetría es un paralela al eje de las y que divide exactamente la parábola. Uno ubicando el eje de simetría puede ubicar el vértice. Camilo: profe es uno. Profesora: no la vaya a tocar con el lápiz que por eso se está manchando. Daniel: si, es uno. Profesora: si es uno ¿cuáles son las coordenadas del eje de simetría? Daniel: menos uno Profesora: ¿y arriba? Daniel: ocho Profesora: ¿cuántas a ver? Espérate. Daniel: menos uno diez. Profesora: bien, entonces esas son las coordenadas del vértice. Y aquí que dice. Camilo: h, k Profesora: son las coordenadas del vértice. Entonces cuánto vale h. Camilo: menos uno Profesora: ¿cuánto vale k? Daniel: diez. Camilo diez o menos diez. Profesora: qué dice allí Camilo: menos, entonces menos Profesora: sí. Daniel: porque uno elevado al cuadrado. Camilo: porque la fórmula dice que elevado al cuadrado. Daniel: a ya. Profesora: sigan sustituyendo en la fórmula. La profesora se acerca a mirar el trabajo de Luis.

FECHA: 15 DE JULIO DE 2009
Profesora: ¿estás en [PARABOL2( )]? Esta es factorizable o no factorizable? Luis: no Profesora: entonces ¿dónde dibujarías esta? Es esa que tiene allí Luis: no, acá Profesora: dibújala. Usted le trazo el eje de simetría. [1:16:01 a 1:16:09 min.] La profesora se dirige al grupo y les solicita que escriban al final de la hoja la respuesta a la última pregunta. Independientemente si lograron terminar completamente la situación. [1:16:10 a 1:17:47 min.] Camilo da respuesta a la última pregunta y finaliza el taller. La profesora recibe una hoja por grupo.

Anexo F. Hojas de respuestas

Para acceder a las hojas de respuesta, puede dar clic sobre el hipervínculo de la columna A (versión digital), o ingrese en un navegador de internet la dirección que se escribe en la columna B cuyo password de acceso es polinomios (versión impresa).

A. SITUACIÓN	B. ACCESO POR URL
Situación 1: Explorando los Polinomios	http://vimeo.com/user7518116/situacion1
Situación 2: Evaluando los Polinomios	http://vimeo.com/user7518116/situacion2
Situación 3: Hallando los ceros de los Polinomios	http://vimeo.com/user7518116/situacion3
Situación 4: Parábolas	http://vimeo.com/user7518116/situacion4

Anexo G. Videos

Para acceder a los videoclips, puede dar clic sobre el hipervínculo de la columna A (versión digital), o ingrese en un navegador de internet la dirección que se escribe en la columna B cuyo password de acceso es polinomios (versión impresa).

A. FECHA	B. ACCESO POR URL
30 de Junio de 2009	http://vimeo.com/user7518116/30junio2009
1 de Julio de 2009	http://vimeo.com/user7518116/1julio2009
6 de Julio de 2009	http://vimeo.com/user7518116/6julio2009
7 de Julio de 2009	http://vimeo.com/user7518116/7julio2009
8 de Julio de 2009	http://vimeo.com/user7518116/8julio2009
13 de Julio de 2009	http://vimeo.com/user7518116/13julio2009
14 de Julio de 2009	http://vimeo.com/user7518116/14julio2009
15 de Julio de 2009	http://vimeo.com/user7518116/15julio2009