Gabriel A. Pareja Ocampo

CONTRIBUCIONES DE WEIERSTRASS A LAS FUNCIONES ELÍPTICAS

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

Departamento de Ciencias Básicas
Medellín, Octubre de 2015

CONTRIBUCIONES DE WEIERSTRASS A LAS FUNCIONES ELÍPTICAS

Trabajo de grado para optar al título de
Magíster en Educación Matemática

Gabriel A. Pareja Ocampo

Director
Leonardo Solanilla Ch.
Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística
de la Universidad del Tolima

Universidad de Medellín
Departamento de Ciencias Básicas
Programa de Maestría en Educación Matemática
Medellín, Octubre de 2015

Resumen. Este trabajo de investigación de maestría contiene algunas reflexiones entorno a la emergencia histórica de la función $\wp$ de Weierstrass. Entre otros elementos interesantes, se prueba que dicha función se hubiera podido construir con los elementos disponibles en la época, es decir, los aportes de Abel, Jacobi y Liouville en el campo de las funciones elípticas. También se precisa la contribución original de Weierstrass en este campo, la cual consistió en fundar la teoría de las funciones elípticas sobre la base firme de los productos y las series infinitas; claro está, aprovechando las ventajas del lenguaje de la Variable Compleja.

Abstract. This Master's Thesis contains some reflections on the historical emergence of Weierstrass $\wp$-function. Among other features, we prove that this function could have been constructed with the elements available at the time, *i. e.*, the contributions of Abel, Jacobi and Liouville to the Elliptic Functions. We also determine the role of Weierstrass in this field, which consisted in establishing the theory of elliptic functions on the solid basis of infinite products and series. Of course, he took advantage of the language of Complex Variables.

Índice general

Introducción

La teoría contemporánea de la funciones elípticas debe mucho a Karl Weierstraß (de ahora en adelante escrito en la forma latinizada Weierstrass) (1815-1897). De hecho, los fundamentos de dicha teoría se deben a este matemático alemán, a menudo llamado “padre del análisis moderno”.

Son varios y muy buenos los textos que describen la forma definitiva que han tomado los grandes descubrimientos de este profesor en el campo de las funciones elípticas. Entre ellos, podemos mencionar aquí a Lang (1987) y Robert (1973). Sin embargo, este trabajo no busca presentar el estado actual de la teoría. Concretamente, esta tesis de maestría emprende un análisis de tipo histórico internalista sobre las notas de clase tomadas por Hermann Schwarz (1843-1921) en unas clases de Weierstrass. Nos referimos a las *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* (Fórmulas y teoremas para el uso de la funciones elípticas), tal como se pueden leer en la publicación de Julius Springer del año de 1892. Más aún, nos enfocaremos solamente en la primera parte de esta obra, parte que aparece traducida como anexo al presente trabajo. Palabras más, palabras menos, nos concentramos en la construcción de la famosa función $\wp$, que la posteridad ha bautizado con el nombre de Weierstrass.

Volviendo al tema del trabajo de grado, debemos insistir en que –más que presentar de teoría de Weierstrass– nuestro interés radica en establecer una relación entre los desarrollos previos de Niels H. Abel (1802-1829), Carl Jacobi (1804-1851) y Joseph Liouville (1809-1882) y la teoría propiamente weierstrassiana. Para ello, debemos asumir que el lector tiene conocimientos sobre las contribuciones de estos matemáticos a las funciones elípticas. En relación con ello, este trabajo hace parte de una investigación más amplia sobre la historia de tales funciones, la cual tiene un importante antecedente en el trabajo de maestría de Palacios (2012). En dicho trabajo se estudiaron los aportes de Liouville a las funciones elípticas.

Así pues, nuestro propósito consiste en proponer algunas hipótesis matemáticas que sirven para tender un puente entre la teoría de las funciones elípticas antes y después de Weierstrass. En otras palabras, buscamos allanar la brecha de lo que podríamos llamar *la ruptura weierstrassiana*. Para ello, hemos encontrado un gran apoyo en el muy erudito libro de Bellachi (1894), donde se hace patente una conexión concreta entre las funciones elípticas de Jacobi y la mencionada función $\wp$, base del edificio teórico de Weierstrass.

Seguimos el orden de las charlas de Weierstrass con algunos rodeos que consideramos importantes. El primer capítulo describimos, sin demostrar, algunos teoremas muy ambiciosos y generales que Weierstrass enuncia –sin prueba alguna–. Ellos dan solución a problemas muy amplios que se salen de lo puramente analítico y tienen que ver con ciertas propiedades aditivas de las funciones meromorfas, que él llama analíticas –puesto que lo son en casi todos los puntos–. En el segundo capítulo proponemos una manera de reducir el orden del polinomio de cuarto grado que aparece en las integrales elípticas de Legendre. Esta reducción, relacionada extrechamente con Weierstrass, parece yacer en la base de su teoría. Las funciones elípticas se definen, en concordancia, como aquellas que satisfacen una ecuación diferencial no lineal de primer orden: el cuadrado de la primera derivada es igual a un polinomio de tercer grado en la función. El tercer capítulo contiene una motivación posible a la función $\wp$ de Weierstrass. Los métodos usados para estudiar dicha función son aquellos de las funciones elípticas antes de Weierstrass. En particular, se encuentra ya la fórmula de adición para una función p, posible antecedente de $\wp$. En el cuarto y último capítulo describimos la construcción original de esta función, la cual olvida completamente los desarrollos anteriores, sentando la base de una "nueva" teoría sobre las series y los productos infinitos.

Al final, bosquejamos algunas conclusiones sobre el camino recorrido en estos capítulos.

CAPÍTULO 1

Fórmulas algebraicas de adición

En este primer capítulo pretendemos descifrar los conceptos fundamentales sobre los cuales Weierstrass levanta sus funciones elípticas. La tarea es intrincada porque sus conceptos no siempre coinciden con los aceptados hoy en día y, tal vez, por el estilo sintético que usa al comienzo de su obra. Tal estilo, en verdad, se limita a presentar sin demostración algunos resultados que, muy seguramente, le habría costado demostrar. El Capítulo II del texto de Hancock (1910) constituye el esfuerzo conocido más completo por elucidar el sentido de dichos teoremas.

1.1. Funciones analíticas

Comencemos por aclarar que, para Weierstrass (1892), una función puede asignar a un mismo elemento varias imágenes. Lo que corresponde al concepto contemporáneo de función es la noción de función unívoca (*eindeutig* en alemán), es decir, aquella que a cada elemento z del plano complejo $\mathbb{C}$ asigna un único valor complejo $\varphi(z)$ –que puede ser el infinito de la esfera de Riemann $\mathbb{S}$–.

Otro concepto que pudiera producir confusión en una primera lectura de

Weierstrass (1892) es el de analiticidad. Hoy en día, una función

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{S}$$

es holomorfa o analítica si es $\mathbb{C}$-diferenciable en cada $z \in \mathbb{C}$ [1]. En este caso, se dice también que la función es entera, por analogía algebraica con los polinomios. De otro lado, el famoso teorema de Liouville[2] asegura que toda función entera acotada es una función constante. Para sacar de lado a estas funciones constantes o triviales, conviene pues hablar de funciones meromorfas, o sea, de funciones que son holomorfas en todo el plano, salvo por un conjunto discreto de números complejos, donde tienen polos[3].

Por las razones expuestas en los dos párrafos anteriores, en lo que sigue del trabajo adoptamos las nociones de la Variable Compleja de hoy y hablaremos de funciones meromorfas.

1.2. Funciones meromorfas que tienen fórmula de adición

Para Weierstrass (1892), una función meromorfa satisface o tiene un teorema de adición algebraico si $\varphi(u+v)$ es expresable como una función racional de $\varphi(u), \varphi(v)$ y las primeras derivadas $\varphi'(u), \varphi'(v)$. Nosotros debemos agregar que esto se debe cumplir para todos los valores $u, v \in \mathbb{C}$ donde dicha función racional tenga sentido, es decir, lejos de los polos. Claro está, en los polos se pueden usar convenciones para manipular al infinito. A menudo, simplificaremos la frase de Weierstrass diciendo que una función meromorfa tiene una fórmula de adición.

Como ejemplos importantes no-triviales de funciones meromorfas que poseen fórmulas de adición tenemos a la exponencial, a las funciones trigonométricas seno y coseno, a la funciones hiperbólicas seno y coseno, a

[1] Hay muchas otras maneras equivalentes de caracterizar esta propiedad, como puede verse en Remmert (1991, pp. 236-237).

[2] *Cf.* Remmert, 1991, p. 245.

[3] *Cf.* Remmert, 1991, p. 315.

las funciones lemniscáticas seno y coseno, entre otras imaginables. Es claro que estamos hablando de las versiones complejas $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{S}$ de dichas funciones. La función exponencial, por ejemplo, satisface la ecuación algebraica $\varphi(u + v) = \varphi(u)\varphi(v)$; la función seno y la función seno hiperbólico, $\varphi(u+v) = \varphi(u)\varphi'(v)+\varphi'(u)\varphi(v)$. En Abel (1827) se puede ver que la función seno lemniscático safisface

$$\varphi(u + v) = \frac{\varphi(u)\varphi'(v) + \varphi'(u)\varphi(v)}{1 + \varphi^2(u)\varphi^2(v)}.$$

Uno de los objetivos más generales de la investigación de Weierstrass era la caracterización de las funciones meromorfas que tienen una fórmula de adición. A manera de ilustración, mencionamos aquí, sin mayores explicaciones, el siguiente resultado.

Lema 1.1. *Una función meromorfa $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{S}$ tiene una formula de adición si y sólo si entre el valor de la función $\varphi(u)$ y la derivada $\varphi'(u)$ se cumple una ecuación algebraica cuyos coeficientes no dependen del argumento u. Esto vale para todos los valores u en los que dicha ecuación tenga sentido.*

La demostración de izquierda a derecha es fácil: basta usar la definición con un valor fijo para v. La demostración del recíproco es mucho mas difícil. Remitimos el lector al libro de Hancock (1910, capítulos VI y VII) para tal prueba.

La función exponencial satisface la ecuación diferencial $\varphi'(u) = \varphi(u)$; la función seno, la identidad pitagórica

$$(\varphi(u))^2 + (\varphi'(u))^2 = 1;$$

la función seno hiperbólico, $(\varphi(u))^2 - (\varphi'(u))^2 = 1$. El seno lemiscático, por su parte, cumple con la relación algebraica

$$(\varphi(u))^4 + (\varphi'(u))^2 = 1.$$

Al respecto de las funciones lemniscáticas, se aconseja consultar el trabajo de grado de Murcia y Saldaña (2011).

1.3. Funciones periódicas

Una de las primeras afirmaciones de la teoría weierstrassiana defiende que todas las funciones meromorfas trascendentes que poseen una fórmula de adición algebraica son periódicas. La prueba de este poderoso e interesante resultado no hace parte de los objetivos de este trabajo. En lo que sigue, nos conformamos simplemente con unas observaciones generales sobre el asunto.

En efecto, el paso de la variable real a la variable compleja representó un avance considerable en la emergencia histórica de las funciones elípticas, tal como se puede ver en los trabajos originales de N. H. Abel (1827) y C. Jacobi (1829). Entre otras muchas propiedades importantes, la periodicidad en los complejos puede ser doble y no solamente simple, como lo es en la variable real. Para aclarar estas nociones, sea $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{S}$ una función meromorfa periódica. Pueden ocurrir dos cosas con respecto a su periodicidad:

1. Si todos los periodos de la función se pueden representar como múltiplos enteros (positivos o negativos) de un periodo primitivo 2ω, la función se llama simplemente periódica. En este caso, dicho periodo primitivo se llama también, por simplicidad, periodo de la funcion. Por ejemplo, el seno circular o trigonométrico tiene periodo 2π; el seno hiperbólico y la función exponencial tienen periódo $2\pi i$. Notamos que la región fundamental de esta funciones es una banda infinita levantada sobre un intervalo.

2. Cuando φ tiene dos periodos complejos primitivos $2\omega, 2\omega'$ –linealmente independientes sobre los reales– se tiene que

$$\varphi(u) = \varphi(u + 2n\omega + 2n'\omega'), \quad \forall n, n' \in \mathbb{Z}.$$

   En este caso, φ se denomina doblemente periódica. Así pues, la región fundamental –en la que la función se repite indefinidamente– es un paralelogramo. El seno lemniscático es una función de este tipo, tal como se explica en Murcia y Saldaña (2011). Con mas generalidad, las construcciones originales de Abel (1827) y Jacobi (1829) ejemplifican la noción de doble periodicidad. Remitimos al lector a Pareja, Solanilla y Tamayo (2013) para una presentación sencilla y detallada del asunto.

Las funciones elípticas son funciones meromorfas que satisfacen una fórmula de adición. Así pues, son funciones periódicas, de hecho, doblemente periódicas. Con estos elementos, los teoremas generales de este capítulo pueden obviarse y, así, es posible dar una caracterización más simple de las funciones elípticas de Weierstrass.

CAPÍTULO 2

Funciones elípticas de Weierstrass

El camino emprendido en el Capítulo anterior es demasiado general y complicado para nuestros objetivos. Así pues, buscamos una manera más sencilla de trabajar con las funciones elípticas.

A continuación presentamos la propiedad fundamental de las funciones elípticas para Weierstrass, a saber: una ecuación diferencial ordinaria en una variable compleja. Para alcanzar este objetivo, revisaremos brevemente la emergencia histórica de las funciones elípticas y, con la ayuda de la Variable Compleja, deduciremos la ecuación diferencial de Weierstrass que caracteriza a dichas funciones.

2.1. Un poco de historia

Las funciones elípticas aparecen por primera vez, casi que seguramente, en las *Recherches* de Abel (1827). Allí, estas funciones se definen como las inversas "formales" de ciertas integrales elípticas. En esencia, el mismo procedimiento fue usado por Jacobi (1829) en sus célebres *Fundamenta Nova*.

Una integral elíptica de la primera especie es una función compleja

$$F : P \to \mathbb{S},$$

de la forma

$$F(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}},$$

donde P es cierta región conveniente del plano complejo. La forma de esta integral es importante y se debe a Legendre (1805). Ciertamente, durante los siglos XVII y XVIII no existía tal forma canónica, lo cual complicaba grandemente el estudio de tales integrales. El valor complejo k se llama módulo de la integral.

Luego de una elección adecuada de P, la función F es inyectiva y diferenciable en casi todos los puntos de su dominio. Por lo tanto se puede hablar de su función inversa φ, una función que resulta ser meromorfa.

2.2. Ecuación diferencial

Si escribimos $u = F(z)$, tenemos que

$$u'(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

donde quiera que esta expresión tenga sentido. En vista de que $z = \varphi(u)$, el teorema de las funciones inversas implica que

$$\varphi'(u) = \sqrt{(1-\varphi^2(u))(1-k^2\varphi^2(u))}.$$

De este modo,

$$\left(\varphi'(u)\right)^2 = (1-\varphi^2(u))(1-k^2\varphi^2(u)). \tag{2.1}$$

Esto quiere decir que el valor de la función meromorfa $\varphi(u)$ y su primera derivada $\varphi'(u)$ satisfacen –donde es posible– una relación algebraica cuyos coeficientes son independientes del argumento u. Por lo dicho en el Capítulo 1, φ es una función meromorfa que tiene una fórmula de adición. En efecto, Abel (1827) prueba que

$$\varphi(u+v) = \frac{\varphi(u)\varphi'(v) + \varphi'(u)\varphi(v)}{1 + k^2\varphi^2(u)\varphi^2(v)}.$$

Es suficiente, pues, reemplazar la expresión para la derivada cuando se quiera obtener la fórmula algebraica de adición.

2.3. Forma de Weierstrass para la ecuación diferencial

La ecuación diferencial 2.1 puede muy bien servir de fundamento para el estudio de las funciones elípticas. Sin embargo, Weierstrass la presenta bajo otra forma. Para justificar el cambio de forma en la relación algebraica entre $\varphi(u)$ y $\varphi'(u)$, seguimos el completísimo texto de Bellachi (1894, *Capo ottavo*).

La idea consiste en usar la sustitución o cambio de variable

$$(\varphi(u))^2 = \frac{e_1 - e_2}{s(u) - e_2}$$

junto con el módulo cuadrado en la forma

$$k^2 = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2},$$

donde e_1, e_2, e_3 son tres complejos distintos entre sí. Con esto, la ecuación 2.1 se convierte, por la regla de la cadena, en

$$(\varphi'(u))^2 = \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \left(1 - \frac{e_1 - e_2}{s(u) - e_2}\right)\left(1 - \frac{e_3 - e_2}{s(u) - e_2}\right).$$

También

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{e_1 - e_2}}{(s - e_2)^{3/2}}\right)^2 = \frac{e_1 - e_2}{4(s(u) - e_2)^3}.$$

De esta manera,

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = (s'(u))^2 = \frac{4}{e_1 - e_2}(s(u) - e_1)(s(u) - e_2)(s(u) - e_3).$$

Este procedimiento reduce, pues, el grado del polinomio a la derecha del cuarto al tercer grado.

Weierstrass (1892) emplea cantidades auxiliares $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$ y escribe

$$(e_1 - e_2)(s'(u))^2 = 4(s(u))^3 - g_2 s(u) - g_3,$$

donde $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, $e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = -g_2/4$ y $e_1e_2e_3 = g_3/4$.

Para restringir el conjunto solución de esta ecuación, se necesita una condición inicial. Estas consideraciones nos llevan al siguiente concepto fundamental.

Definición 2.1. *Una función elíptica de Weierstrass es una función algebraica de la solución –meromorfa, en general–* $p = s(u)$ *al problema diferencial*

$$(e_1 - e_2)\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3, \quad s(0) = \infty,$$

donde $e_1 - e_2, g_2, g_3$ *son constantes convenientes.*

CAPÍTULO 3

La función p

En este capítulo proponemos cierta función p que se deja construir con los resultados de la teoría anterior a Weierstrass. Luego de establecer algunas propiedades importantes de dicha función, nos dedicamos a estudiar distintas versiones de su fórmula de adición. Los elementos obtenidos sirven para motivar la definición de la función $\wp$ de Weierstrass.

La función p de Halphen-Bellachi tiene, de este modo, el valor de una construcción matemática efímera entre las construcciones originales de las funciones elípticas y la función $\wp$ de Weierstrass.

3.1. Existencia de funciones elípticas

De acuerdo con lo dicho en la sección 2.3 del capítulo anterior, la ecuación diferencial que define las funciones elípticas tiene una solución

$$p(u) = e_2 + \frac{e_1 - e_2}{(\varphi(u))^2},$$

donde $\varphi(u)$ es una función de aquellas construidas por Abel (1827) o Jacobi (1829). Recordamos que esta importante transformación ha sido sugerida por Bellachi (1894), quien parece haberla aprendido de Halphen (1886, *Première Partie*). Estos dos autores tienen el incorregible hábito de tratar la variable compleja como dos variables reales, tal vez imitando los desarrollos de Abel y Jacobi. Hoy por hoy, sin embargo, parece más natural trabajar directamente en el cuerpo de los números complejos.

Para facilitar las cosas y cambiando la dirección abeliana del capítulo anterior, usaremos como φ a la función *sinus amplitudinus* de Jacobi. En notación de Gudermann, de ahora en adelante escribimos $\varphi(u) = \mathrm{sn}(u)$. Esta función es muy conocida y usaremos libremente sus propiedades, presentadas en el original de Jacobi (1829) o en el trabajo de Solanilla (2014). Ya que $\mathrm{sn}(0) = 0$, la función $p(u)$ estalla en cero y así, es elíptica.

Recordemos que la función $\mathrm{sn}(u)$ tiene módulo constante k y se puede obtener por inversión formal de la integral elíptica de la primera especie de Legendre. Usando transformación $\zeta = \operatorname{sen}\vartheta$, dicha integral se convierte en

$$F(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}}.$$

La llamada integral completa se denota como $K(k) = K = F(\pi/2)$. También es importante la integral completa conocida como complementaria: $K' = K(k')$, donde $k' = \sqrt{1-k^2}$. En fin, es bien sabido que $4K$ y $2iK'$ constituyen un par de periodos primitivos para $\mathrm{sn}(u)$. Además, esta función es meromorfa no constante con ceros en

$$2nK + 2n'iK', \quad n, n' \in \mathbb{Z},$$

y con polos simples ubicados en

$$2nK + (2n'+1)iK', \quad n, n' \in \mathbb{Z}.$$

En consecuencia, la función $p(u)$ tiene polos dobles donde $\mathrm{sn}(u)$ tenía sus ceros simples y viceversa, los ceros dobles de $p(u)$ yacen donde estaban los polos simples de $\mathrm{sn}(u)$. También, $p(u)$ es doblemente periódica con periodos primitivos $4K$ y $2iK'$. Asimismo, p es una función par puesto que $\mathrm{sn}(u)$ es impar.

Sin embargo, p no es la única solución de la ecuación

$$(e_1 - e_2)(s')^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3.$$

En efecto, al derivar con respecto a u, se obtiene

$$2s''s' = \frac{12}{e_1 - e_2}s^2 s' - \frac{g_2}{e_1 - e_2}s'.$$

Factorizando,

$$\left(2s'' - \frac{12s^2}{e_1 - e_2} + \frac{g_2}{e_1 - e_2}\right) s' = 0.$$

Las soluciones correspondientes a $s' = 0$ son las constantes o triviales. Sin embargo, ellas no satisfacen la condición inicial. Dichas constantes c tienen que satisfacer $4c^3 - g_2 c - g_3 = 0$.

Las soluciones interesantes son, por tanto, las restantes. La ecuación

$$2s'' - \frac{12s^2}{e_1 - e_2} + \frac{g_2}{e_1 - e_2} = 0$$

es muy difícil de resolver por los métodos elementales. Se trata de una ecuación ordinaria no-lineal de segundo orden y de segundo grado.

3.2. Fórmulas de adición

Usamos el antiguo método de Euler-Lagrange, adaptándolo de Pareja, Solanilla y Tamayo (2010, Capítulo 2): la fórmula de adición para p se puede obtener sistemáticamente por métodos del siglo XVIII, tal como se explica enseguida. Queremos encontrar la relación entre valores complejos z, w que produce

$$\int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}} + \int_0^w \frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}} = \int_0^c \frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}},$$

para cierta constante c y

$$f(\zeta) = \frac{1}{e_1 - e_2} \times (4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3).$$

En otras palabras, queremos que $p^{-1}(z) + p^{-1}(w) = p^{-1}(c)$. Ahora, si encontramos –de alguna manera– la relación algebraica $F(z, w, c) = 0$, basta poner

$z = p(u), w = p(v)$ y $c = p(a)$, constante, para obtener la fórmula algebraica de adición

$$F(p(u), p(v), p(a))) \Leftrightarrow u + v = a.$$

La idea de Euler-Lagrange consiste en resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dw} = \sqrt{\frac{g(z)}{g(w)}},$$

donde $g(\zeta) = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3$, con la condición adicional $w(0) = c$. Para tal fin, introducimos –por sugerencia de Lagrange– un parámetro t tal que

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{g(z)}, \quad \frac{dw}{dt} = \sqrt{g(w)}.$$

Así pues,

$$\left(\frac{dz}{dt} + \frac{dw}{dt}\right)\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dw}{dt}\right) = g(z) - g(w).$$

Con ayuda de las variables auxiliares $\alpha = z + w, \beta = z - w$, se obtiene

$$\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} = 4(z^3 - w^3) - (z - w)g_2 = 3\alpha^2\beta + \beta^3 - g_2\beta. \tag{3.1}$$

Ahora bien, por la regla de la cadena, $(dz/dt)^2 = g(z)$ y $(dw/dt)^2 = g(w)$ implican que

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{dg}{dz} = 6z^2 - \frac{g_2}{2}, \quad \frac{d^2w}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{dg}{dw} = 6w^2 - \frac{g_2}{2}.$$

De aquí se encuentra fácilmente que

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 6(z^2 + w^2) - g_2 = 3(\alpha^2 + \beta^2) - g_2. \tag{3.2}$$

Como consecuencia de 3.1 y 3.2, se halla –después de hacer las cuentas– la ecuación

$$2\beta\frac{d^2\alpha}{dt^2} - 2\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} = 4\beta^3.$$

Multiplicando por $(1/\beta^3)d\alpha/dt$, la regla del producto conduce a

$$\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 4\alpha + C,$$

donde C es una cierta constante.

Al retornar a las variables originales debemos tener, pues,

$$\left(\frac{\sqrt{g(z)}+\sqrt{g(w)}}{z-w}\right)^2 = 4(z+w)+C.$$

Con el fin de eliminar los radicales, llamemos Q a esta expresión y pongamos

$$\begin{aligned} R &= \frac{(\sqrt{g(z)}+\sqrt{g(w)})(\sqrt{g(z)}-\sqrt{g(w)})}{z-w} \\ &= \frac{g(z)-g(w)}{z-w} \\ &= 4(z^2+zw+w^2)-g_2, \end{aligned}$$

cf. 3.1. De este modo,

$$\begin{aligned} g(z)+2\sqrt{g(z)}\sqrt{g(w)}+g(w) &= Q(z-w)^2, \\ g(z)-2\sqrt{g(z)}\sqrt{g(w)}+g(w) &= \frac{R^2}{Q}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$R^2-2(g(z)+g(w))Q+Q^2(z-w)^2=0.$$

Usando ahora, $g(z)=g(w)+R(z-w)$,

$$R^2-2R(z-w)Q+Q^2(z-w)^2-4g(w)Q$$

$$=[R-Q(z-w)]^2-4g(w)Q=0.$$

Después de hacer los reemplazos necesarios se encuentra que la solución general de la ecuación diferencial que nos ocupa es

$$16z^2w^2+k_1(z+w)zw+k_2(z^2+w^2)+k_3zw+k_4(z+w)+k_5=0,$$

donde $k_1=-8C$, $k_2=C^2$, $k_3=8g_2-2C^2$, $k_4=2(g_2C+8g_3)$ y $k_5=g_2^2+4Cg_3$. La relación entre c y C se obtiene sustituyendo $z=0, w=c$ en la solución general:

$$C^2c^2+2(g_2C+8g_3)c+g_2^2+4Cg_3$$

$$= c^2C^2 + 2(g_2c + 2g_3)C + 16g_3c + g_2^2 = 0.$$

Denotemos a una de las soluciones de esta ecuación cuadrática como $C = C(c)$. La relación buscada es entonces

$$16s^2(u)p^2(v) - 8C(p(a))\,(p(u) + p(v))\,p(u)p(v)$$

$$+C^2(p(a))(p^2(u) + p^2(v)) + (8g_2 - 2C^2(p(a))p(u)p(v)$$

$$+2(g_2C(p(a)) + 8g_3)(p(u) + p(v)) + g_2^2 + 4C(p(a))g_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow u + v = a.$$

Otras fórmulas relacionadas con la adición se pueden encontrar con ayuda de los pasos usados en la demostración. Por ejemplo, se tiene de más arriba que

$$\frac{1}{4}\left(\frac{p'(u) + p'(v)}{p(u) - p(v)}\right)^2 = p(u) + p(v) + C'.$$

Así, si exigimos que $C' = p(a) = p(u + v)$, obtenemos

$$\frac{1}{4}\left(\frac{p'(u) + p'(v)}{p(u) - p(v)}\right)^2 = p(u) + p(v) + p(u + v).$$

Ahora, la fórmula para $p(2u)$ ($u = v$, argumento doble) produce una indetermincación que se puede obviar con ayuda de ciertos límites (*cf.* Bellachi (1894, p. 254).

Cambiando el signo de v, no obstante, se encuentra fácilmente que

$$p(u + v) - p(u - v) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'(u) + p'(v)}{p(u) - p(v)}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{p'(u) + p'(-v)}{p(u) - p(v)}\right)^2,$$

donde hemos usado la paridad de p. Ahora bien, p' es impar y, de este modo,

$$\begin{aligned} p(u + v) - p(u - v) &= \frac{1}{4}\left(\frac{p'(u) + p'(v)}{p(u) - p(v)}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{p'(u) - p'(v)}{p(u) - p(v)}\right)^2 \\ &= \frac{p'(u)p'(v)}{(p(u) - p(v))^2}. \end{aligned}$$

Otros tipos de fórmulas de adición se pueden encontrar con ingeniosos trucos algebraicos (*cf.* Bellachi (1894, p. 255).

3.3. La función $\wp$

Los razonamientos de las secciones anteriores no son propiamente de Weierstrass (1892), aunque eran comunes en su época. Creemos que, en estos descubrimientos, el alemán encontró la motivación suficiente para sentar una nueva teoría sobre bases más firmes, menos caprichosas.

Sean $\omega = 2K$ y $\omega' = 2K'i$. Con ellas construyamos el retículo

$$L = \{z = n\omega + in'\omega' \in \mathbb{C} : n, n' \in \mathbb{Z}\}.$$

Queremos construir una función $\wp$ que tenga los mismos polos de p, con sus respectivas multiplicidades. Si se pone

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{l \in L - \{0\}} \left(\frac{1}{(u-l)^2} - \frac{1}{l^2} \right),$$

la serie tiene garantizada la convergencia (Lins Neto, 2005, pp. 339-342) y $\wp$ sería la función buscada. Uno se podría preguntar si p y $\wp$ son la misma función. Este asunto, sin embargo, no es sencillo debido a la dificultad de determinar los ceros de $\wp$. Al respecto, remitimos al lector a Eichler & Zagier (1982).

En el capítulo siguiente presentaremos la manera cómo Weierstrass (1892) obtuvo la función $\wp(u)$, que lleva su nombre.

CAPÍTULO 4

La función $\wp$ de Weierstrass

La teoría de la función p desarrollada en el capítulo anterior tiene al menos dos dificultades:

- deja una ecuación diferencial sin un método claro de solución y
- deja la tarea dificilísima de encontrar sus ceros.

Tal vez estas dificultades llevaron a Weierstrass (1892) a sentar sus funciones elípticas sobre bases más sólidas, como lo son las series y los productos infinitos. A la vez, se simplifican las demostraciones de algunos teoremas. Usaremos las notaciones originales del alemán. Veamos.

4.1. La función $\mathfrak{S}u$

Weierstrass comienza la construcción con una función analítica que contiene en potencia a la función $\wp$.

> La función analítica más sencilla, que para todos los valores finitos del argumento u posee carácter de una función entera y, además, tiene la propiedad de que para $u = 0$ así como para todos los valores $u = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, congruentes con éste, se hace

> infinitamente pequeña desde el primer orden, es la función sigma $\mathfrak{S}(u|\omega,\omega') = \mathfrak{S}u$, con par de periodos $(2\omega, 2\omega')$. Esta función se da bajo la forma
>
> $$\mathfrak{S}u = u\prod_w{}' \left(1-\frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}}, \left\{\begin{array}{c} \mu,\mu' = 0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots \pm\infty \\ w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega' \\ \text{excepto } w = 0 \end{array}\right\},$$
>
> en la cual la cantidad w, que aparece en el producto infinito, asume todos los valores abarcados en la expresión $2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, con excepción (a ello hace referencia el acento o apóstrofo ($'$) que aparece en la fórmula del producto, o de una sumatoria) del valor $w = 0$. (Weierstrass, 1892)

Con esta firme resolución comienza la construcción de $\wp$. Como bien lo dice el autor, esta función sí es verdaderamente analítica, o sea, holomorfa en todo el plano complejo. Debido a la simetría del conjunto de ceros con respecto a la aplicación $w \mapsto -w$, $\mathfrak{S}u$ es impar:

$$\mathfrak{S}(-u) = -\mathfrak{S}(u).$$

Asimismo, $\mathfrak{S}(0) = 0$. De otro lado, $\mathfrak{S}u$ no es propiamente periódica, sino que verifica

$$\mathfrak{S}(u \pm 2\omega) = -e^{\pm 2\eta(u\pm\omega)}\mathfrak{S}(u),$$

para cierta constante $\eta = \eta(\omega)$, dependiente de ω. De manera análoga,

$$\mathfrak{S}(u \pm 2\omega') = -e^{\pm 2\eta'(u\pm\omega')}\mathfrak{S}(u), \quad \eta' = \eta'(\omega'). \tag{4.1}$$

Entre otros resultados de Weierstrass sobre esta función, se cuentan un desarrollo en series de potencias y una presentación como producto infinito trigonométrico (Weierstrass, 1892, Capítulo 2 de la traducción en el Anexo).

4.2. La función $\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u)$

En otro paso, Weierstrass (1892) calcula la derivada logarítmica o schwarziana de $\mathfrak{S}u$, para obtener

$$\frac{d}{du}\log \mathfrak{S}(u) = \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u).$$

Esta funcion tiene las siguientes propiedades de periodicidad:

$$\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u \pm 2\omega) = \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u) \pm 2\eta,$$

$$\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u \pm 2\omega') = \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u) \pm 2\eta'.$$

También se pueden obtener un par de expresiones para $\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u)$ en series de potencias (Weierstrass, 1892, Capítulo 2 de la traducción en el Anexo).

4.3. Finalmente, $\wp$

La función buscada es el negativo de la segunda derivada logarítmica de $\mathfrak{S}u$, o sea,

$$\wp u = -\frac{d^2}{du^2}\log \mathfrak{S}u = \frac{(\mathfrak{S}'u)^2 - \mathfrak{S}u\mathfrak{S}''u}{\mathfrak{S}^2 u}.$$

De este modo, $\wp(-u) = \wp(u)$ ($\wp$ es par) y

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \sum_w{}' \left(\frac{1}{(u-w)^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left(\begin{array}{c} w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega' \\ \text{excepto } w = 0 \end{array} \right).$$

Por métodos antiguos y modernos se halla que esta nueva función si es periódica, como se quería:

$$\wp(u \pm 2\omega) = \wp(u),$$

$$\wp(u \pm 2\omega') = \wp(u).$$

De paso, aparece la primera derivada $\wp' u$ de $\wp u$ como un elemento esencial de la teoría weierstrassiana. Ella es impar ($\wp'(-u) = -\wp'(u)$) y se puede desarrollar en series por derivación término a término:

$$\wp' u = -2 \sum_{w} \frac{1}{(u-w)^3} \quad (w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega').$$

Por lo tanto, la derivada $\wp' u$ tiene las mismas propiedades de periodicidad que $\wp u$. Es decir,

$$\wp'(u \pm 2\omega) = \wp'(u),$$
$$\wp'(u \pm 2\omega') = \wp'(u).$$

Para terminar, bástenos con enunciar que la función $\wp$ satisface una fórmula de adición similar a aquella que habíamos probado para la función p en el capitulo anterior:

$$\wp(u \pm v) = \frac{1}{4} \left[\frac{\wp' u \mp \wp' v}{\wp u - \wp v} \right]^2 - \wp u - \wp v.$$

De ésta, se pueden derivar otras propiedades aditivas para $\wp$, similares a las de p. Por último, los desarrollos en series de potencias de $\wp$ permiten mostrar que satisface

$$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3.$$

Conclusiones

Funciones complejas con fórmula de adición

Weierstrass (1892) concentra su atención inicial en una clase especial de las funciones complejas de una variable compleja, a saber: aquellas que tiene o satisfacen un teorema de adición algebraico. Para las funciones φ de este tipo, $\varphi(u+v)$ se puede expresar como una función racional de $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ y las derivadas $\varphi'(u)$, $\varphi'(v)$, donde u, v son valores complejos en los que dicha función racional tiene sentido.

La consideración de esta clase de funciones meromorfas se puede considerar como el paso más importante y general en su camino para erigir un nuevo paradigma para la teoría de las funciones elípticas. Weierstrass sabía que no caía en el vacío puesto que el Análisis Clásico conocía ya importantes ejemplos no triviales de dichas funciones: la función exponencial, las funciones trigonométricas seno y coseno, las respectivas hiperbólicas seno y coseno y las funciones lemniscáticas de Gauss, entre otras; todas en su sentido extendido a la Variable Compleja.

Ahora bien, esta importante clase de funciones se puede caracterizar por dos propiedades fundamentales:

i. Para toda u en el dominio de φ, los valores de $\varphi(u)$ y $\varphi'(u)$ cumplen una relación algebraica cuyos coeficientes no dependen del argumento u (Lema 1.1 de la página 10).

ii. Todas las funciones meromorfas trascendentes que poseen una formula de adición son, simple o doblemente, periódicas.

La primera propiedad evoca natural e inmediatamente las relaciones de tipo pitagórico o exponencial que verifican las funciones mencionadas más arriba, las cuales se conocen por la Trigonometría y el Cálculo elemental.

La segunda propiedad tampoco nos es ajena por cuanto sabemos que la función seno tiene periodo simple 2π, mientras que el seno hiperbólico y la exponencial tiene periodo $2\pi i$. Así que no sorprende, dado que el espacio vectorial complejo tiene dimensión dos sobre los reales, que las funciones del tipo considerado por Weierstrass tengan dos periodos primitivos $2\omega, 2\omega'$, linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$. Es decir,

$$\varphi(u) = \varphi(u + n\omega + n'\omega'), \quad \forall n, n' \in \mathbb{Z}.$$

En este caso se dice que φ es doblemente periódica.

En síntesis, las funciones meromorfas que satisfacen una fórmula de adición son funciones doblemente periódicas, en el caso más interesante. Con ello, nos situamos definitivamente en el campo de la Variable Compleja.

Una sustitución útil

Para Weierstrass (1892), la propiedad fundamental de las funciones elípticas se expresa mediante una ecuación diferencial ordinaria en una variable compleja. Esta formulación recoge toda una experiencia vivida a lo largo del siglo XIX. Desde Legendre (1805) se vislumbraba ya que, al derivar una integral elíptica de la primera especie en los complejos, se obtenía una ecuación diferencial donde aparece que el cuadrado de $\varphi'(u)$ es un polinomio de cuarto grado (relación algebraica que involucra al módulo k y cuyos coeficientes no dependen de u) en $\varphi(u)$. Las herramientas usadas para obtener esta ecuación son simples: el teorema fundamental del Cálculo y el teorema de las funciones inversas.

El alemán, sin embargo, va un paso más allá al reducir el grado del polinomio a tres. La reducción se puede justificar por la sustitución o cambio de variable

$$(\varphi(u))^2 = \frac{e_1 - e_2}{s(u) - e_2},$$

para ciertas constantes $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{C}$, distintas entre sí, y tales que el módulo cuadrado se escribe como

$$k^2 = \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2}.$$

No sabemos si Weierstrass usó esta sustitución; se trata de una hipótesis explicativa debida a Halphen (1886) y Bellachi (1894). De todos modos, la sustitución era bastante conocida en la época. En definitiva, la ecuación diferencial de Weierstrass asume la forma simplificada

$$(e_1 - e_2)(s'(u))^2 = 4(s(u))^3 - g_2 s(u) - g_3,$$

de donde $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, $e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = -g_2/4$ y $e_1e_2e_3 = g_3/4$. Para determinar completamente una solución hace falta imponer una condición inicial. Weierstrass elige $s(0) = \infty$.

La reducción, no obstante, no arroja luces sobre la manera de solucionar la ecuación. En verdad, tal como se explica en la sección 2.1, las soluciones interesantes o no triviales son las soluciones de la ecuación ordinaria

$$2s'' - \frac{12s^2}{e_1 - e_2} + \frac{g_2}{e_1 - e_2} = 0.$$

Esta ecuación es muy difícil de resolver por los métodos elementales. La naturaleza de las funciones elípticas se resiste una vez más a una explicación simple.

La función p de Halphen-Bellachi

De todos modos, la ecuación diferencial que define las funciones elípticas posee soluciones o integrales no triviales con la condición inicial dada. La sustitución que cambia φ por s produce la solución

$$p(u) = e_2 + \frac{e_1 - e_2}{(\varphi(u))^2},$$

donde $\varphi(u)$ es una función de aquellas que ya habían construido Abel (1827) o Jacobi (1829). Podemos, por ejemplo, tomar $\varphi(u) = \mathrm{sn}(u, k)$, la función *sinus amplitudinus* con módulo k de Jacobi. Ciertamente, $\mathrm{sn}(u, k)$ es meromorfa no constante con polos y ceros simples, y dos periodos primitivos independientes. Así, $p(u)$ es meromorfa doblemente periódica con polos y ceros dobles. En particular, como $\mathrm{sn}(0, k) = 0$, $p(0) = \infty$ (polo de orden dos). Por lo tanto, p es elíptica y así, la definición no conduce a un conjunto vacío de funciones.

La función $p(u)$ también satisface una fórmula de adición algebraica, la cual se puede encontrar por los métodos de Euler y Lagrange del siglo XVIII. De hecho, estos métodos producen varias versiones para la mencionada fórmula aditiva.

La función $\wp$ de Weierstrass

Para encontrar esta función, Weierstrass (1892) procede de manera constructiva a partir de dos funciones que le permiten acercarse a la función $\wp$ buscada.

Primero define la función entera (analítica en todo $\mathbb{C}$) $\mathfrak{S}u$ que es impar con $\mathfrak{S}(0) = 0$ y no periódica. Definida inicialmente como un producto infinito con exponenciales, ella se puede representar también como serie de potencias y como producto infinito trigonométrico. Para ello, el maestro alemán hace gala de su conocimiento sobre las expresiones de las funciones transcendentales.

Mediante la derivación schwarziana, se obtiene, en un segundo paso,

$$\frac{d}{du} \log \mathfrak{S}(u) = \frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}}(u).$$

Ésta tiene ya ciertas propiedades de periodicidad y se puede expresar en series de distintos tipos alrededor de algunos puntos distinguidos.

El paso crucial se obtiene al derivar una vez más el logaritmo de $\mathfrak{S}u$ –con el signo revertido–[1]:

$$\wp u = -\frac{d^2}{du^2}\log \mathfrak{S}u = \frac{(\mathfrak{S}'u)^2 - \mathfrak{S}u\mathfrak{S}''u}{\mathfrak{S}^2 u}.$$

La función $\wp$, así obtenida, tiene todas las propiedades deseadas: es meromorfa y doblemente periódica. Además es par y posee una fórmula de adición, la cual coincide con la de la función p de Halphen-Bellachi. Entre otras cosas, la derivada $\wp'$ es impar y tiene las mismas propiedades de meromorfía y periodicidad de $\wp$.

Y lo más importante: $\wp$ es elíptica no trivial porque es solución no constante del problema diferencial

$$(\wp' u)^2 = 4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3, \quad \wp(0) = \infty.$$

En este sentido, Weierstrass (1892) afirma que la función hallada también satisface

$$\wp'' u - 6\wp' u + \frac{1}{2}g_2 = 0.$$

De esta forma, se resuelve de alguna manera la dificultad de la solución a la ecuación similar presentada al final de la Sección 3.1.

Sobre la Educación Matemática

La emergencia de la función $\wp$ muestra la manera cómo una nueva teoría matemática encubre, a la vez que revela, a las teorías anteriores. Las Matemáticas constituyen una empresa histórica, humana, y la construcción de las teorías nunca es lineal ni continua, sino llena de vacilaciones. Este hecho debería iluminar la labor del maestro de matemáticas.

[1]El procedimiento es similar para una de las derivadas parciales de la función Theta de Jacobi.

Bibliografía

[1] Abel, N. H. (1827, 1828). Recherches sur les fonctions elliptiques. *Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgeben von Crelle*, Bd. 2, 3, Berlin. Reimpreso en *Œuvres complètes* (1992). Tome I, deuxième édition, pp. 263–388, Sceaux: Éditions Jacques Gabay; reimpresión autorizada de *Œuvres complètes de Niels Hendrik Abel* (1881), por Ludwig Sylow y Sophus Lie, Christiania (Oslo), Noruega: Grøndahl & Søn.

[2] Lins Neto, A. (2005) *Funções de uma variável complexa.* Rio de Janerio: IMPA (Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada).

[3] Bellachi, G. (1894) *Introduzione storica alla teoria delle funzioni ellittiche.* Firenze: Tipografia di G. Barbèra.

[4] Eichler, M. & Zagier, D. (1982) On the Zeros of the Weierstrass $\wp$-Function. *Mathematische Annalen.* **258**, pp. 309-407.

[5] Halphen, G.-H. (1886) *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.* Paris: Gauthiers-Villars, Imprimeur-Libraire.

[6] Hancock, H. (1910) *Lectures on the Theory of Elliptic Functions.* New York: John Wiley & Sons.

[7] Jacobi, C. G. J. (1829) *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum.* Regiomonti: Sumptibus fratrum Bornträger. Reimpresos en *Gesammelte Werke* (1882-1891). Pp. 49–239, Berlin: Reiner.

[8] Lang, S. (1987) *Elliptic Functions.* New York: Springer Verlag.

[9] Legendre, A. M. (1805, reimpreso en 1825) *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes.* Paris: Imprimerie de Huzard-Courcier.

[10] Liouville, J. (1880). Leçons sur les fonctions doublement périodiques faites en 1847 par M. *J. Liouville. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LXXXVIII, Heft 4,* 277 - 310. Si bien apareció hasta 1880, este artículo relata las lecciones que Liouville impartió en 1847. Su redactor es C. W. Borchardt.

[11] Murcia, J. y Saldaña, A. (2011) *Las funciones elípticas de Abel.* Ibagué, Colombia: tesis de especialización en matematicas avanzadas, Universidad del Tolima.

[12] Palacios, Y. (2012). *Contribuciones de Liouville a las funciones elípticas.* Medellín: tesis de maestría, Universidad de Medellín.

[13] Pareja, G., Solanilla, L. y Tamayo, A. C. (2010). *Integrales elípticas con notas históricas.* Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

[14] Pareja, G., Solanilla, L. y Tamayo, A. C. (2013). *Funciones elípticas: la función seno generalizado.* Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

[15] Remmert, R. (1991). *Theory of Complex Functions.* New York: Springer Verlag.

[16] Robert, A. (1973). *Elliptic Curves.* Berlin: Springer Verlag.

[17] Solanilla, L. (2014). *Las transformaciones elípticas de Jacobi.* Ibagué: Sello Editorial Universidad del Tolima.

[18] Weierstrass, K. (1892). *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen.* Berlin: Verlag von Julius Springer.

Anexo

Traducción de las clases de Weierstrass

Primera parte de

Weierstrass, K. (1892). *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen*. Berlin: Verlag von Julius Springer.