



**UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN POR  
TRAMOS USANDO EL PERIÓDICO Y GEOGEBRA.**

**ÁLVARO JAVIER SAA VERNAZA**

**ÁNGELA KATHERINE TROCHEZ TAPIA**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE  
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA  
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
SANTIAGO DE CALI  
2013**



**UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN POR  
TRAMOS USANDO EL PERIÓDICO Y GEOGEBRA.**

**ÁLVARO JAVIER SAA VERNAZA (0743630)**

**ÁNGELA KATHERINE TROCHEZ TAPIA (0843980)**

**Trabajo de grado para optar el título  
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas**

**Directora  
Mg. Maritza Pedreros Puente**

**UNIVERSIDAD DEL VALLE  
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA  
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA  
SANTIAGO DE CALI  
2013**



### ACTA DE EVALUACIÓN DE TRABAJO DE GRADO

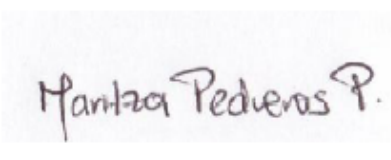
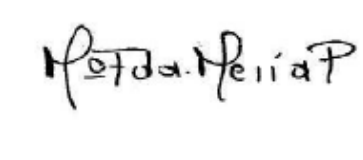
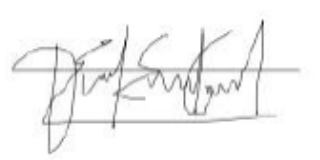
Tenga en cuenta: 1. Marque con una **X** la opción escogida.  
2. diligencie el formato con una letra legible.

|   |   |                          |               |                                     |                                     |               |
|---|---|--------------------------|---------------|-------------------------------------|-------------------------------------|---------------|
| TÍTULO DEL TRABAJO:   | UNA PROPUESTA DE ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN POR TRAMOS USANDO EL PERIÓDICO Y GEOGEBRA. |                          |               |                                     |                                     |               |
| Se trata de:  | Proyecto  | <input type="checkbox"/> | Informe Final | <input checked="" type="checkbox"/> |                                     |               |
| Director:   | MARITZA PEDREROS  |                          |               |                                     |                                     |               |
| 1er Evaluador:  | MARIA FERNANDA MEJÍA PALOMINO   |                          |               |                                     |                                     |               |
| 2do Evaluador:  | JORGE ENRIQUE GALEANO   |                          |               |                                     |                                     |               |
| Fecha y Hora  | Año:  | 2013                     | Mes:          | 09                                  | Día:                                | 2             |
|   |   |                          |               |                                     | Hora:                               | 4:00 p.m.     |
| <b>Estudiantes</b>  |   |                          |               |                                     |                                     |               |
| Nombres y Apellidos completos   |   | Código                   |               | Programa Académico                  |                                     |               |
| ANGELA KATHERINE TROCHEZ  |   | 0843980                  |               | 3469                                |                                     |               |
| ALVARO JAVIER SAA   |   | 0743630                  |               | 3469                                |                                     |               |
| <b>EVALUACIÓN</b>   |   |                          |               |                                     |                                     |               |
| Aprobado  |   | <input type="checkbox"/> | Meritorio     |                                     | <input checked="" type="checkbox"/> | Laureado      |
| Aprobado con recomendaciones  |   | <input type="checkbox"/> | No Aprobado   |                                     | <input type="checkbox"/>            | Incompleto    |
| En el caso de ser <b>Aprobado con recomendaciones</b> (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de _____ (máximo un mes) <b>ante:</b>  |   |                          |               |                                     |                                     |               |
| Director del Trabajo  |   | <input type="checkbox"/> | 1er Evaluador |                                     | <input type="checkbox"/>            | 2do Evaluador |
| En el caso que el Informe Final se considere <b>Incompleto</b> , se da un plazo de máximo de _____ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:  |   |                          |               |                                     |                                     |               |
| Año:  |   | Mes:                     |               | Día:                                |                                     | Hora:         |
| En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la <b>razón del desacuerdo</b> y las <b>alternativas</b> de solución que proponen (diligenciar la página siguiente). |   |                          |               |                                     |                                     |               |

#### FIRMAS:

|                               |               |               |
|-------------------------------|---------------|---------------|
|                               |               |               |
| Director del Trabajo de Grado | 1er Evaluador | 2do Evaluador |



| OBSERVACIONES  | X  | RECOMENDACIONES:  | RAZÓN DEL DESACUERDO – ALTERNATIVAS: |
|--|--|---|--------------------------------------|
| <i>(si se considera necesario, usar hojas adicionales)</i>   |  |   |                                      |
| <p>Consideraciones generales para la mención otorgada al trabajo:</p> <p>Es un trabajo que satisface ampliamente los requisitos exigidos a un trabajo de grado; en éste se encuentran evidencias claras de la revisión documental, la apropiación de elementos fundamentales de las perspectivas teóricas abordadas, la definición de un marco metodológico adecuado a los propósitos y demás elementos del proyecto, la presentación de un problema, unos objetivos, la elaboración y presentación de una propuesta que da cuenta de un trabajo responsable y pertinente. En este sentido, el trabajo con un software libre, un objeto matemático del cual se tienen pocos trabajos y el esfuerzo por aplicar conceptos significativos en el diseño de las situaciones hacen del trabajo un referente importante para los estudios locales en educación matemática.</p> <p>Igualmente del trabajo se resaltan los siguientes aspectos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• La elaboración de una propuesta para la enseñanza de la función a trozos partiendo de contextos reales tomados del periódico. Por lo que se realiza la necesidad del estudio de la función para comprender la información que es emitida a un público general.</li> <li>• Dado que los estudiantes de grado noveno a quienes se les aplicó la secuencia conocen la función afín y lineal, la propuesta permitió afianzar y ampliar el concepto de función.</li> <li>• El uso de GeoGebra permitió que se trabajaran diferentes registros de representación semiótica.</li> </ul> <p>Se resalta, que los autores lograron en los tiempos estipulados la elaboración de este trabajo de grado, cumpliendo con la coherencia, buena presentación y redacción. Además de crear un trabajo diferente y novedoso a los realizados en el área de educación matemática.</p> <p>-----<br/>         -----<br/>         -----</p> <p>Fin de los comentarios.</p> |  |   |                                      |
|   |  |  |                                      |
| Director del Trabajo de Grado  | 1er Evaluador  | 2do Evaluador   |                                      |





**PARTE 1. Términos de la licencia general para publicación digital de obras en el repositorio institucional de Acuerdo a la Política de Propiedad Intelectual de la Universidad del Valle**

Actuando en nombre propio los AUTORES o TITULARES del derecho de autor confieren a la UNIVERSIDAD DEL VALLE una Licencia no exclusiva, limitada y gratuita sobre la obra que se integra en el Repositorio Institucional, que se ajusta a las siguientes características:

- a) Estará vigente a partir de la fecha en que se incluye en el Repositorio, por un plazo de cinco (5) años, que serán prorrogables indefinidamente por el tiempo que dure el derecho patrimonial del AUTOR o AUTORES. El AUTOR o AUTORES podrán dar por terminada la licencia solicitando por escrito a la UNIVERSIDAD DEL VALLE con una antelación de dos (2) meses antes de la correspondiente prórroga.
- b) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para que en los términos establecidos en el Acuerdo 023 de 2003 emanado del Consejo Superior de la Universidad del Valle, la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993 y demás normas generales sobre la materia, publique la obra en el formato que el Repositorio lo requiera (impreso, digital, electrónico, óptico, usos en red o cualquier otro conocido o por conocer) y concen que dado que se publica en Internet por este hecho circula con un alcance mundial.
- c) El AUTOR o AUTORES aceptan que la autorización se hace a título gratuito, por lo tanto renuncian a recibir emolumento alguno por la publicación, distribución, comunicación pública y cualquier otro uso que se haga en los términos de la presente Licencia y de la **Licencia Creative Commons** con que se publica.
- d) El AUTOR o AUTORES manifiestan que se trata de una obra original y la realizó o realizaron sin violar o usurpar derechos de autor de terceros, obra sobre la que tiene (n) los derechos que autoriza (n) y que es él o ellos quienes asumen total responsabilidad por el contenido de su obra ante la UNIVERSIDAD DEL VALLE y ante terceros. En todo caso la UNIVERSIDAD DEL VALLE se compromete a indicar siempre la autoría incluyendo el nombre del AUTOR o AUTORES y la fecha de publicación. Para todos los efectos la UNIVERSIDAD DEL VALLE actúa como un tercero de buena fé.
- e) El AUTOR o AUTORES autorizan a la UNIVERSIDAD DEL VALLE para incluir la obra en los índices y buscadores que estimen necesarios para promover su difusión. El AUTOR o AUTORES aceptan que la UNIVERSIDAD DEL VALLE pueda convertir el documento a cualquier medio o formato para propósitos de preservación digital.

**SI EL DOCUMENTO SE BASA EN UN TRABAJO QUE HA SIDO PATROCINADO O APOYADO POR UNA AGENCIA O UNA ORGANIZACIÓN, CON EXCEPCIÓN DE LA UNIVERSIDAD DEL VALLE, LOS AUTORES GARANTIZAN QUE SE HA CUMPLIDO CON LOS DERECHOS Y OBLIGACIONES REQUERIDOS POR EL RESPECTIVO CONTRATO O ACUERDO.**



PARTE 2. Autorización para publicar y permitir la consulta y uso de obras en el Repositorio Institucional.

Con base en este documento, Usted autoriza la publicación electrónica, consulta y uso de su obra por la UNIVERSIDAD DEL VALLE y sus usuarios de la siguiente manera;

a. Usted otorga una (1) licencia especial para publicación de obras en el repositorio institucional de la UNIVERSIDAD DEL VALLE (Parte 1) que forma parte integral del presente documento y de la que ha recibido una (1) copia.

Si autorizo  No autorizo

b. Usted autoriza para que la obra sea puesta a disposición del público en los términos autorizados por Usted en los literales a), y b), con la **Licencia Creative Commons Reconocimiento - No comercial - Sin obras derivadas 2.5 Colombia** cuyo texto completo se puede consultar en <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/co/> y que admite conocer.

Si autorizo  No autorizo

Si Usted no autoriza para que la obra sea licenciada en los términos del literal b) y opta por una opción legal diferente describala<sup>1</sup>:

En constancia de lo anterior,

Título de la obra: Una propuesta de enseñanza de la función por tópicos usando el periódico y geogebra

Autores:

Nombre: Angela Katherine Trachez Tapia

Firma:   
C.C. 1144.147.672

Nombre: Alvaro Javier Sosa Veraza

Firma:   
C.C. 1144031776

Nombre:

Firma: \_\_\_\_\_  
C.C. \_\_\_\_\_

Fecha: 09-09-2013

<sup>1</sup> Los detalles serán expuestos de ser necesario en documento adjunto

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradecemos a todas las personas que nos apoyaron durante el desarrollo de nuestro trabajo de grado.

A Dios, por darnos la oportunidad de vivir y de estar en todo momento del desarrollo esta investigación.

A nuestras familias, por su apoyo incondicional durante toda nuestra carrera universitaria.

A nuestra directora Maritza Pedreros, pues con su constante apoyo, dedicación, paciencia y conocimiento, nos colaboró en todos los momentos solicitados.

A nuestros evaluadores María Fernanda Mejía y Jorge Enrique Galeano, por sus aportes y sugerencias para que el trabajo se completara de la mejor manera.

También al profesor Octavio Pabón, que nos aportó su granito de Ideas para el desarrollo de esta investigación.

A la Universidad del Valle, por permitirnos desarrollar nuestras capacidades para afrontar nuestra vida profesional.

A todos, les agradecemos su apoyo que permitieron finalizar nuestras carreras con mucho orgullo.

## TABLA DE CONTENIDO

|   |    |
|---|----|
| <b>INTRODUCCIÓN</b> .....   | 2  |
| <b>CAPÍTULO I</b> .....   | 6  |
| <b>ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN</b> .....                       | 6  |
| 1.1 CONTEXTUALIZACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....                  | 6  |
| 1.2 JUSTIFICACIÓN .....   | 11 |
| 1.3 OBJETIVOS.....  | 19 |
| 1.3.1 Objetivo General.....   | 19 |
| 1.3.2 Objetivos Específicos.....  | 19 |
| <b>CAPÍTULO II</b> .....  | 20 |
| <b>MARCO TEÓRICO</b> .....  | 20 |
| 2.1 DIMENSIÓN COGNITIVA .....   | 20 |
| 2.1.1 Registros de representación semiótica .....                         | 21 |
| 2.1.2. Mediación y Génesis Instrumental.....                              | 26 |
| 2.1.3. Transposición Computacional o Informática .....                    | 29 |
| 2.1.4. Representaciones Ejecutables.....                                  | 32 |
| 2.2. DIMENSIÓN MATEMÁTICA .....   | 34 |
| 2.3 DIMENSIÓN DIDÁCTICA.....  | 41 |
| 2.3.1 Teoría de Situaciones Didácticas.....                               | 42 |
| 2.3.2 Referente Curricular.....   | 46 |
| <b>CAPÍTULO III</b> .....   | 49 |
| <b>MARCO METODOLÓGICO</b> .....   | 49 |
| 3.1 CONCEPCIÓN DE LA SECUENCIA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS .....        | 51 |
| 3.1.1 Búsqueda de gráficos en el periódico .....                          | 52 |
| 3.1.2 Construcción de gráficas con el software GeoGebra .....             | 55 |
| 3.1.3 La continuidad de la función por tramos.....                        | 58 |
| 3.1.4 Componente de la Secuencia Didáctica: La adaptación del medio. .... | 59 |
| 3.2 ANÁLISIS A PRIORI DE LAS SITUACIONES .....                            | 63 |
| 3.2.1 Situación 1. “El periódico y los taxis” .....                       | 65 |
| 3.2.2 Situación 2. “La carrera de un taxi” .....                          | 76 |



|  |            |
|--|------------|
| 3.2.3 Situación 3. “Comparando precios” .....                          | 83         |
| <b>CÁPITULO IV</b> .....   | <b>95</b>  |
| <b>ANÁLISIS A POSTERIORI Y RESULTADOS</b> .....                        | <b>95</b>  |
| 4.1 MARCO CONTEXTUAL .....   | 95         |
| 4.2 ANÁLISIS A POSTERIORI DE LAS SITUACIONES .....                     | 97         |
| 4.2.1 Situación 1. “El periódico y los taxis” .....                    | 98         |
| 4.2.2 Situación 2. “La carrera de un taxi” .....                       | 113        |
| 4.2.3 Situación 3. “Comparando precios” .....                          | 121        |
| <b>CÁPITULO V</b> .....  | <b>136</b> |
| <b>CONCLUSIONES</b> .....  | <b>136</b> |
| <b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> .....                                | <b>142</b> |
| <b>ANEXOS</b> .....  | <b>148</b> |
| Anexo 1. Situación 1 _ página 1 .....                                  | 148        |
| Anexo 2. Situación 1 _ página 2 .....                                  | 149        |
| Anexo 3. Situación 1 _ página 3 .....                                  | 150        |
| Anexo 4. Situación 2 _ página 1 .....                                  | 151        |
| Anexo 5. Situación 2 _ página 2 .....                                  | 152        |
| Anexo 6. Situación 3 _ página 1 .....                                  | 153        |
| Anexo 7. Situación 3 _ página 2 .....                                  | 154        |
| Anexo 8. Situación 3 _ pagina 3 .....                                  | 155        |
| Anexo 9. Situación 3 _ pagina 4 .....                                  | 156        |
| Anexo 10. Situación 3 _ página 5 .....                                 | 157        |
| Anexo 11. Producciones de los estudiantes Situación 1 _ página 1 ..... | 158        |
| Anexo 12. Producciones de los estudiantes situación 1 _ página 2 ..... | 159        |
| Anexo 13. Producciones de los estudiantes situación 1 _ página 3 ..... | 160        |
| Anexo 14. Producciones de los estudiantes situación 2 _ página 1 ..... | 161        |
| Anexo 15. Producciones de los estudiantes situación 2 _ página 2 ..... | 162        |
| Anexo 16. Producciones de los estudiantes situación 3 _ página 2 ..... | 163        |
| Anexo 17. Producciones de los estudiantes situación 3 _ página 3 ..... | 164        |
| Anexo 18. Producciones de los estudiantes situación 3 _ página 4 ..... | 165        |
| Anexo 19. Producciones de los estudiantes situación 3 _ página 5 ..... | 166        |

## LISTA DE IMÁGENES

|   |     |
|---|-----|
| Imagen 1. Representaciones matemáticas con GeoGebra ..... | 16  |
| Imagen 2. Representación gráfica de la pendiente.....     | 37  |
| Imagen 3. Situación didáctica y a-didáctica .....         | 43  |
| Imagen 4. Taxi A .....                                    | 60  |
| Imagen 5. Taxi B .....                                    | 61  |
| Imagen 6. Situación 1 “El periódico y los taxis” .....    | 65  |
| Imagen 7. Situación 1, Taxi A y Taxi B .....              | 70  |
| Imagen 8. Situación 2 “La carrera de un taxi” .....       | 76  |
| Imagen 9. Situación 3 “El periódico y los taxis” .....    | 83  |
| Imagen 10. Taxi 2B .....                                  | 84  |
| Imagen 11. Situación 1 _ ítem a _ taxi A _ caso 1.....    | 101 |
| Imagen 12. Situación 1 _ ítem a _ taxi A _ caso 2.....    | 102 |
| Imagen 13. Situación 1 _ ítem a _ taxi A _ caso 3.....    | 102 |
| Imagen 14. Situación 1 _ ítem a _ taxi A _ caso 4.....    | 103 |
| Imagen 15. Situación 1 _ ítem a _ taxi B .....            | 103 |
| Imagen 16. Situación 1 _ ítem b _ taxi A _ caso 1 .....   | 105 |
| Imagen 17. Situación 1 _ ítem b _ taxi A _ caso 2.....    | 105 |
| Imagen 18. Situación 1 _ ítem b _ taxi A _ caso 3.....    | 106 |
| Imagen 19. Situación 1 _ ítem b _ taxi B .....            | 106 |
| Imagen 20. Situación 1 _ ítem c _ taxi A _ caso 1 .....   | 108 |
| Imagen 21. Situación 1 _ ítem c _ taxi A _ caso 2 .....   | 108 |
| Imagen 22. Situación 1 _ ítem c _ taxi A _ caso 3.....    | 109 |
| Imagen 23. Situación 1 _ ítem c _ taxi A _ caso 4 .....   | 109 |
| Imagen 24. Situación 1 _ ítem d _ caso 1.....             | 111 |
| Imagen 25. Situación 1 _ ítem d _ caso 2.....             | 112 |
| Imagen 26. Situación 2 _ ítem a _ caso 1.....             | 114 |
| Imagen 27. Situación 2 _ ítem a _ caso 2.....             | 115 |
| Imagen 28. Situación 2 _ ítem a _ caso 3.....             | 115 |
| Imagen 29. Situación 2 _ ítem a _ caso 4.....             | 116 |
| Imagen 30. Situación 2 _ ítem b _ caso 1.....             | 117 |
| Imagen 31. Situación 2 _ ítem b _ caso 2.....             | 117 |
| Imagen 32. Situación 2 _ ítem b _ caso 3.....             | 118 |
| Imagen 33. Situación 2 _ ítem c _ caso 1 .....            | 119 |
| Imagen 34. Situación 2 _ ítem c _ caso 2.....             | 119 |
| Imagen 35. Situación 2 _ ítem d _ caso 1.....             | 120 |
| Imagen 36. Situación 2 _ ítem d _ caso 2.....             | 121 |
| Imagen 37. Situación 3 _ ítem a .....                     | 124 |
| Imagen 38. Situación 3 _ ítem b .....                     | 125 |
| Imagen 39. Situación 3 _ ítem c _ caso 1 .....            | 126 |
| Imagen 40. Situación 3 _ ítem c _ caso 2.....             | 126 |

|  |     |
|--|-----|
| Imagen 41. Situación 3 _ ítem d .....          | 128 |
| Imagen 42. Situación 3 _ ítem e _ caso 1 ..... | 129 |
| Imagen 43. Situación 3 _ ítem e _ caso 2 ..... | 130 |
| Imagen 44. Situación 3 _ ítem f _ caso 1 ..... | 130 |
| Imagen 45. Situación 3 _ ítem f _ caso 2 ..... | 131 |
| Imagen 46. Situación 3 _ ítem g _ caso 1 ..... | 132 |
| Imagen 47. Situación 3 _ ítem g _ caso 2 ..... | 133 |
| Imagen 48. Situación 3 _ ítem h _ caso 1 ..... | 133 |
| Imagen 49. Situación 3 _ ítem h _ caso 2 ..... | 134 |

## LISTA DE TABLAS

|  |    |
|--|----|
| Tabla 1. Aspectos relativos a la producción de representaciones semióticas.....                      | 24 |
| Tabla 2. Representaciones de la función lineal. ....   | 38 |
| Tabla 3. Representación de la función afín.....  | 39 |
| Tabla 4. Función Constante.....  | 40 |
| Tabla 5. Estándares de 8° y 9° del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos ..... | 48 |
| Tabla 6. Fases de la Ingeniería Didáctica.....   | 51 |
| Tabla 7. Gráfica de una función por tramos con el comando Si[ ]......                                | 57 |
| Tabla 8. Rejilla de análisis de las situaciones .....  | 64 |
| Tabla 9. Estructura de la secuencia didáctica.....   | 64 |
| Tabla 10. Registros de representación de la situación 1 .....  | 69 |
| Tabla 11. Similitudes y diferencias entre el Taxi A y Taxi B.....                                    | 74 |
| Tabla 12. Variables de la Carrera de un Taxi .....   | 78 |
| Tabla 13. Situación 2 _ Literal (c) tratamiento .....  | 81 |
| Tabla 14. Listado de Valores por Unidades .....  | 84 |
| Tabla 15. Análisis de variación por intervalos.....  | 87 |
| Tabla 16. Ejecución de la secuencia didáctica .....  | 98 |

## RESUMEN

Este trabajo de grado pretende contribuir con el proceso de enseñanza de la función por tramos partiendo de sus diferentes registros de representación semiótica al integrar el periódico y GeoGebra como contextos matemáticos para el diseño e implementación de una secuencia didáctica. Así la pregunta de investigación que guía este trabajo da cuenta de los elementos a tener en cuenta para integrar GeoGebra, al tomar como contexto matemático el periódico y el papel de los registros de representación semiótica para el estudio de la función por tramos con un grupo de estudiantes de grado noveno. Para el diseño de la secuencia didáctica se toma como referente la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007), la teoría de las representaciones semióticas de Duval (1999), las representaciones ejecutables de Moreno (2002) y la Transposición computacional de Balacheff (1988). La metodología empleada retoma algunos elementos de la Micro-Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). La experimentación se realizó con estudiantes de noveno grado de educación secundaria del colegio Bennett.

**Palabras Claves:** GeoGebra, el periódico, función, teoría de situaciones didácticas (TSD), registros de representaciones semióticas, transposición computacional, representaciones ejecutables.



## INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado se enfoca en el diseño e implementación de una secuencia de situaciones didácticas para el estudio de función por tramos, con la integración de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) y el periódico como un recurso didáctico en el aula de clase. Se parte del hecho de que el uso de las TIC es frecuente en los adolescentes de hoy en día, por lo cual al integrarlas en una secuencia de situaciones didácticas determina otras alternativas de enseñanza y de acercamiento al conocimiento matemático. Este trabajo se inscribe en la línea de las Tecnologías de la Información y Comunicación y Educación Matemática (TICEM) del programa de la Licenciatura en Educación Básica, con énfasis en Educación Matemática.

Para ello se retoman algunos reportes como el de la Comisión Vallecaucana por la Educación (CVE). (s.f.). *Compilación evolución de resultados pruebas Saber 5, 9 Y 11 Valle del Cauca y Santiago de Cali* que han mencionado el bajo rendimiento de los estudiantes que se presenta en las pruebas, en ellas se realizan algunas preguntas que hacen alusión a la interpretación de gráficas, las cuales están relacionadas con el estudio de función, el cual no es fácil para los estudiantes. Una manera de ratificar lo anterior se da en dichas pruebas saber, una de las posibles razones se debe a la manera de enseñar tradicionalmente las funciones, al partir de la representación algebraica para llegar a la representación gráfica, como se menciona en el planteamiento del problema y la justificación.

La forma de enseñanza tradicional deja de lado el desarrollo de la aprehensión global en los estudiantes como lo dice Duval (1999), acercándose más a una aprehensión puntual o icónica. Otro problema es la escasa formación de ciudadanos matemáticamente competentes, para lograrlo es necesario que los estudiantes analicen e interpreten gráficas presentadas en un contexto real como lo es el periódico al respecto Fernández y Rico (1999) afirman:

Es importante establecer el máximo de puentes entre el saber escolar convencional y los intereses prioritarios de nuestro medio social. Y esto porque no sólo hay que educar sobre la base del pasado, sino que también hay que educar para el futuro, con previsión de que nuestros alumnos necesariamente, van a enfrentarse a múltiples cambios a lo largo de su vida. (p.16)

De acuerdo a lo anterior se debe tener en cuenta el papel del docente a partir de los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) y Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) en los cuales se plantea que los docentes deben crear contextos matemáticos reales que ayuden a los estudiantes a reconstruir los conocimientos matemáticos básicos.

Por otro lado, se toman en consideración otros investigadores como Brousseau (2007) para el diseño de la secuencia didáctica, Duval (1999) para el análisis de las diferentes representaciones semióticas, Rabardel (1995), Trouche (2005) y Moreno (2002) para la configuración del ambiente de aprendizaje informático y la forma de gestionar la situación, todos éstos elementos serán de gran utilidad para el diseño de una secuencia de situaciones didácticas, la cual se fundamenta desde tres dimensiones: Cognitiva, Matemática y Didáctica. La secuencia de situaciones didácticas fue aplicada en el Colegio Bennett, en el grado noveno de la básica secundaria del año lectivo 2012-2013.

El presente trabajo de grado está estructurado en cinco capítulos así:

El primer capítulo corresponde al planteamiento del problema, la justificación y los objetivos, en este se muestra la necesidad de diseñar una secuencia de situaciones didácticas que muestre los aportes y restricciones de la enseñanza del estudio de función en la educación básica secundaria al utilizar GeoGebra y el periódico.

El segundo capítulo hace alusión al marco teórico de referencia se presentan los elementos que permiten la fundamentación de la problemática, y el desarrollo de la propuesta de trabajo, organizándose en tres dimensiones. En la dimensión cognitiva se presentan los registros de representación semiótica desde la teoría de Duval (1999); el papel de la génesis instrumental teniendo presente el rol mediador de las TIC por Rabardel (1995) y Trouche (2005), la transposición computacional o informática de Balacheff (1988) y las representaciones ejecutables de Moreno (2002). En la dimensión matemática se aborda el componente matemático de la función (Stewart, Redlin & Watson, 2001) y funciones en contextos de Hitt (2002). En la dimensión didáctica se toma en cuenta la teoría de situaciones didácticas (TSD) de Brousseau (2007) y lo curricular (MEN, 2006).

En el tercer capítulo se aborda lo referente a la metodología, se describen las fases consideradas para el diseño e implementación de la secuencia de situaciones didácticas con el respectivo análisis *a priori* de cada situación, de acuerdo a las categorías definidas en el marco teórico referenciado en el capítulo II “Marco Teórico”.

En el cuarto capítulo se presenta el marco contextual y los análisis *a posteriori* con los respectivos protocolos de la puesta en escena de las situaciones, con el fin de validar lo expuesto en los análisis *a priori* del capítulo III con los estudiantes del grado noveno del Colegio Bennett.

En el quinto capítulo denominado conclusiones se examinan los resultados presentados en el capítulo IV, a fin de validar o refutar la pregunta problema, objetivos y la hipótesis que se encuentran al inicio del trabajo.

Finalmente, se presentan los anexos y la bibliografía. En la bibliografía se encuentran las referencias de todos los autores, y textos que han servido de fundamentación teórica para la realización de este trabajo grado.

En los anexos se muestran evidencias fotográficas y escritas que respaldan la realización de los análisis.

# CAPÍTULO I

## ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

A continuación, se presenta la problemática que existe en la actualidad sobre el estudio de la función, a partir de los diferentes registros de representación, orientada por una pregunta, la cual guía el desarrollo de este trabajo, con el fin de aportar al análisis del estudio de la función por tramos.

Igualmente, los problemas subyacentes a la integración de diferentes tipos de recursos, tales como GeoGebra y el periódico, que hacen parte de la vida diaria de los estudiantes, convirtiéndose en un contexto pertinente para el estudio de la función por tramos, finalmente se plantea el objetivo general y los objetivos específicos.

### 1.1 CONTEXTUALIZACIÓN Y PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Teniendo en cuenta que los medios de comunicación están dispuestos al público a los cuales las personas pueden acceder cada vez de una forma más rápida a formatos digitales como por ejemplo, los periódicos, revistas, boletines informativos entre otros, en los cuales las representaciones gráficas son utilizadas para ilustrar temas de la actualidad o de la comunidad, como es la evolución de las tasas de interés, el aumento del desempleo, el incremento de diferentes tarifas, la producción nacional de petróleo, el incremento económico de las empresas, el recaudo histórico de impuestos en Colombia, etc. Estas situaciones son presentadas gráficamente y posiblemente llevan a otros tipos de representaciones que pueden servir de contexto para introducir el estudio de función por tramos.



Además, se tiene presente el hecho de implementar el periódico como un recurso didáctico en el aula de clase, en cuanto al análisis e interpretación del gráfico. Al respecto De Guzmán (1984) afirma que la construcción de gráficas y su interpretación matemática son consideradas como temas pertinentes al conocimiento que debe poseer un ciudadano. De la misma manera Campanario y Otero (citado por García, 2005) “proponen que uno de los objetivos básicos de la enseñanza de la ciencia sea que los estudiantes aprendan a analizar datos e interpretar adecuadamente representaciones gráficas de los mismos” (p.12).

Es fundamental que la enseñanza de interpretación de gráficas sea rigurosa en el aula, puesto que es deber del docente proveer situaciones a partir de la variación y cambio, y así formar ciudadanos para tomar decisiones en la vida real. Por lo tanto:

Es necesario que en los procesos de enseñanza de las matemáticas se asuma la clase como una comunidad de aprendizaje donde docentes y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento, para ejercer la iniciativa y la crítica y para aplicar ese conocimiento en diversas situaciones y contextos. (MEN, 2006, p. 48)

Con relación a lo anterior se puede decir que algunos docentes enseñan mecánicamente el estudio de función, es decir, conducen a los estudiantes a realizar la gráfica de una función, dando valores a la variable independiente para obtener la variable dependiente, estos datos se tabulan y se ubican puntos en el plano cartesiano para luego trazar una línea, esta práctica no aporta a la construcción del estudio y las propiedades de la función en la resolución de un problema o en situaciones, por ejemplo la dependencia del precio con respecto a las unidades recorridas en la carrera de un taxi.

Esta manera de representar o elaborar gráficos cartesianos favorece más una aprehensión local, descartando la posibilidad de una aprehensión global

(Duval, 1999). Debido a que en la aprehensión local por punteo, solo se retienen puntos que son considerados para trazar una línea, mientras que en la aprehensión global cualitativa, se trata de que el estudiante pueda discriminar o abstraer las características de la función. Por tal razón se puede considerar que existen dificultades en el aprendizaje de las interpretaciones adecuadas de las gráficas, ya que se tiende a enseñar lo que es la aprehensión local e icónica, como lo hace notar Duval (2001) en el siguiente fragmento: “Uno de los problemas específicos del aprendizaje es hacer pasar a los alumnos de una aprehensión local e icónica a una aprehensión global cualitativa”. (p. 66)

Del mismo modo, se puede decir que es importante tener presente la visualización, debido a que el estudiante puede abstraer de la gráfica estudios importantes para llegar a un razonamiento<sup>1</sup> adecuado. Se espera que los estudiantes al tener la gráfica de la función puedan interpretarla sin hacer ninguna técnica algorítmica, por lo que la visualización es un proceso que se debe desarrollar en las aulas de clase, “Debido a que es necesario tener una habilidad para mejorar la información a partir de una gráfica” (Bengtsson, citado por García, 2005, p.12). Aunque la visualización es importante en este proceso de interpretar gráficas no se toma como referente teórico para ser analizado.

Es evidente que las actuales estrategias de enseñanza para el estudio de función han sido insuficientes, puesto que para los estudiantes es difícil dicho estudio, esto se puede asegurar al considerar los resultados de los estudiantes en las pruebas de estado. Así mismo cabe resaltar que en las aulas de clase existe una tendencia de enseñar las funciones a partir de expresiones algebraicas y se dejan de lado otras representaciones. Como lo dicen Roth, Bowen y McGinn (citado por García, 2005) recalcan que “los estudiantes tienen dificultades al interpretar las representaciones gráficas porque se hace poco uso de ellas en el aula” (p. 13).

---

<sup>1</sup> “Razonamiento se define como una actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información” (Balacheff, 2000. p.13)

Esta problemática es importante resaltarla puesto que a la mirada del Ministerio de Educación Nacional (MEN) mencionan que:

En la Educación Básica Secundaria, el sistema de representación más directamente ligado con las variaciones es el sistema algebraico, pero éstas también se expresan por medio de otros tipos de representaciones como las gestuales, las del lenguaje ordinario o técnico, las numéricas (tablas), las gráficas (diagramas) y las icónicas, que actúan como intermediarias en la construcción general de los procedimientos, algoritmos o fórmulas que definen el patrón y las respectivas reglas que permiten reproducirlo. (MEN, 2006, p.67).

Teniendo en cuenta lo anterior es preciso señalar que el Ministerio de Educación Nacional (MEN), como ente legal, presenta como referentes vigentes los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006) para la formulación curricular en las escuelas; en los que se ratifica la importancia del desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, como el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Por otro lado, se tiene presente la teoría de Duval que define las tres actividades cognitivas; *conversión*, *tratamiento* y *formación* que da cuenta de lo planteado por el MEN, al analizar cada una de las situaciones.

De ahí que el diseño de situaciones para la enseñanza de la función en contextos matemáticos obtenidos del periódico y con la integración de GeoGebra que favorezcan la interpretación de diferentes registros de representación semiótica, dando especial interés al registro gráfico. Dicha integración de TIC se debe tener presente que:

El avance tecnológico ha influido notablemente en el desarrollo de nociones teóricas que antes se tomaban en cuenta pero que no eran consideradas como cruciales en términos de explicar el aprendizaje de estudios matemáticos. Estos aspectos teóricos son la base para entender el estudio de las diferentes representaciones de los objetos matemáticos y su papel en la construcción de estudios. Ahora, con la tecnología, es importante el estudio de las diferentes representaciones de los objetos. (Hitt, 2003, p. 214).

Por otra parte el rol del docente es importante en el uso de GeoGebra. Salinas (1998, citado por Salinas, 2004) afirma que:

El docente deja de ser fuente de todo conocimiento y pasa a actuar como guía de los estudiantes, facilitándoles el uso de los recursos y las herramientas que necesitan para explorar y elaborar nuevos conocimientos y destrezas; pasa a actuar como gestor de la pléyade de recursos de aprendizaje y a acentuar su papel de orientador y mediador. (p.3).

De esta manera el avance tecnológico influye en el aprendizaje de los estudios matemáticos, favorece la utilización de las diferentes representaciones del objeto que se ponga en acto. Para que este aprendizaje tenga frutos en lo relacionado con el ambiente tecnológico es necesaria la presencia de un docente, que regule, construya y valide el conocimiento que circula en el aula de clase.

Por lo cual este trabajo de grado pretende responder la siguiente pregunta:

**¿Qué caracteriza el diseño de una secuencia didáctica, con GeoGebra para el estudio de la función por tramos en un grupo de estudiantes de grado noveno, teniendo presente algunos contextos matemáticos tomados del periódico?**

Con este interrogante se pretende privilegiar especialmente la articulación de los diferentes registros de representación semiótica, especialmente del registro gráfico al lenguaje natural y algebraico y su papel en el análisis de la variación y cambio.

Según las dificultades mencionadas referente a la interpretación del registro gráfico, la hipótesis central de este trabajo es:

- La integración de recursos como GeoGebra y el periódico favorece la actividad cognitiva de conversión entre diferentes tipos de registros de representación semiótica en el estudio de la función por tramos.

## **1.2 JUSTIFICACIÓN**

Los docentes ante la problemática anterior deben buscar soluciones que ayuden a los procesos de enseñanza de la función. Se debe estudiar más a fondo las características de las representaciones gráficas presentes en los medios de comunicación impresos y/o digitales, para generar nuevas propuestas de enseñanza, y de esa manera tratar de mejorar la comprensión en matemáticas de los estudiantes, tanto en las escuelas como en las pruebas externas.

Una de las pruebas externas es la Saber, realizada a nivel nacional en diferentes grados de la educación básica y media. Es importante reconocer que el “propósito principal de Saber (...) es contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación colombiana mediante la realización de medidas periódicas del desarrollo de competencias de los estudiantes de educación básica, como indicador de calidad del sistema educativo” (MEN, 2012, párr. 1).

En los últimos años los resultados de esta prueba han sido muy bajos en relación al pensamiento variacional e interpretación de gráficos en estudiantes de grado noveno y en otros tópicos de las matemáticas. Teniendo presente que “Los



porcentajes aumentan para el grado noveno, mostrando que el 84% de los estudiantes del Valle del Cauca están entre Insuficiente y Mínimo y el 71% en Cali” (CVE, s.f., p.9).

En consecuencia se puede decir que los resultados en el Valle del Cauca y Santiago de Cali se ubican entre los niveles Insuficiente y Mínimo de aprendizaje, como lo muestra la compilación de la Comisión Vallecaucana por la Educación (CVE, s.f.).

Según los resultados de la prueba Saber 2009, en la que se evaluó a 118.315 estudiantes del departamento del Valle del Cauca, muestra en términos generales que los estudiantes de grados Quinto y Noveno del Valle del Cauca, en su mayor porcentaje, aún no superan el nivel Mínimo de aprendizaje para las áreas de matemáticas, lenguaje y ciencias naturales. No se presentaron porcentaje superiores en los niveles Satisfactorio y Avanzado. (CVE, s.f., p.7)

Estas pruebas permiten que cada institución ya sea privada o pública tenga información de las fortalezas y debilidades en las áreas de conocimiento en la formación de sus estudiantes, para que surjan elementos de mejoramiento que lleven a la evaluación de sus procesos de enseñanza. En relación a lo anterior, se tiene presente:

El carácter censal de SABER 5º y 9º permite que cada colegio tenga información sobre sus fortalezas y debilidades, y da elementos para el diseño, ejecución y evaluación de los planes de mejoramiento institucional. Además, permite que los padres de familia conozcan en detalle cómo están sus hijos en cada una de las áreas que evalúa la Prueba. (CVE, s.f., p.4).

Estas pruebas llevarían a disminuir los bajos rendimientos, generadas en los últimos tiempos y un acercamiento a lo que plantea el MEN en relación al

currículo, de manera que éste se desarrolle correctamente en los planteles educativos. Por tal motivo, es indiscutible la importancia de los resultados de las pruebas Saber para este trabajo, porque de alguna manera se espera contribuir en la formación de los estudiantes colombianos al generar una propuesta de enseñanza de la función.

De esta manera, se considera que el uso de las TIC y el periódico pueden contribuir al mejoramiento en la enseñanza de las matemáticas, porque las TIC se integran cada vez más en nuestra sociedad en todos los niveles y en particular en la educación como un contexto natural, en el que el diseño de las situaciones favorecen la interpretación de los gráficos cartesianos y de los diferentes registros de representación de la función. De manera que, la escuela no puede estar ajena a los avances tecnológicos y éstos se deben integrar al aula de clase.

Se pretende el uso del periódico en el ambiente escolar porque “hay que poner a disposición de los niños y jóvenes aquellos elementos y valores intelectuales, emocionales y técnicos que le van a permitir una incorporación adecuada a su medio social” (Fernández & Rico, 1999, p.15), como una contribución a la formación académica de los estudiantes, además de proporcionar contextos matemáticos de la vida real o cotidiana, como lo vemos:

La prensa explicita en el aula una de las necesidades básicas de nuestra sociedad actual: la necesidad de comunicar, de proporcionar información organizada sobre los temas más importantes e interesantes de sentirse implicado a las decisiones más destacadas que se van tomando en las diversas instituciones sociales. (Fernández & Rico, 1999, p.16).

Haciendo uso de las representaciones gráficas que muestran las relaciones entre variables matemáticas. Por lo cual:

Las gráficas suponen un modelo para representar la relación entre dos variables con carácter general, una de cuyas aplicaciones prácticas más frecuentes se presenta al estudiar una variable a lo largo del tiempo. Es precisamente el hecho de que una de las magnitudes considerada sea el tiempo lo que lleva a una representación continua. (Fernández & Rico, 1999, p.123).

Este es un trabajo que pretende ser interesante, porque se espera lograr una serie de transformaciones en la forma de enseñanza tradicional de la función, caracterizada por la utilización de la pizarra, el marcador y el cuaderno, que pueden generar en los estudiantes el poco interés por aprender las matemáticas.

Por lo cual, se pretende promover una enseñanza que aproveche las habilidades que traen consigo actualmente los jóvenes en el manejo las TIC (nativos digitales<sup>2</sup>). Pero el cambio no se podría lograr sin la formación de los docentes, porque ellos son quienes proponen el uso de estos recursos en los diseños de situaciones didácticas para sus estudiantes. Aunque este trabajo no se enfoca en la formación docente, los diseños de situaciones de aprendizaje y la interpretación de su implementación puede ser un modelo para que otros docentes tomen en consideración el uso de las TIC y el periódico.

Se decide integrar el programa GeoGebra, como una de las herramientas de la TIC que se utilizan para la enseñanza de las matemáticas desde las áreas de la geometría, álgebra y el cálculo. Este software permite que el estudiante interprete estudios matemáticos al visualizar e interactuar con ellos, modificándolos dinámicamente para resolver problemas matemáticos.

---

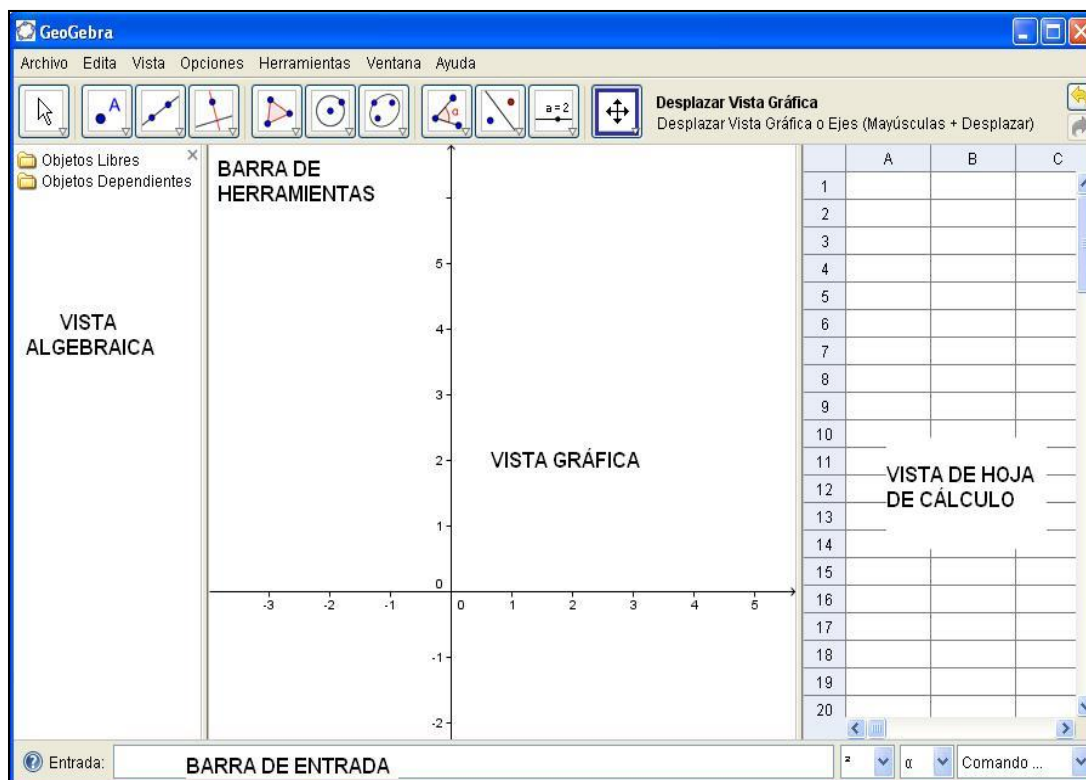
<sup>2</sup> Nativo Digital, refiriéndose a personas nacidas en la era digital, además de tener una gran atracción y habilidad por las TIC.

En el caso del estudio de las funciones GeoGebra permite relacionar la representación algebraica, gráfica y tabular de manera automática y simultánea, al realizar cambios en alguna de ellas. Cada una con diferentes funciones así:

- En la representación gráfica, es posible trazar puntos, segmentos, circunferencia, polígonos y gráfica de funciones.
- En la representación algebraica, se puede realizar la lectura de coordenadas de puntos, ecuaciones y funciones.
- En la representación tabular, se maneja a partir de una hoja de cálculo, que permite vincular los valores de las celdas con puntos sobre los gráficos, a partir del comando “*crear lista de puntos*”.

Las anteriores funciones permiten que los estudiantes visualicen el efecto que tienen los parámetros de la expresión algebraica, en la representación gráfica y tabular, haciendo evidente el manejo de las representaciones ejecutables.

En la Imagen 1, se muestra una pantalla de inicio de GeoGebra con los tres tipos representaciones.



**Imagen 1. Representaciones matemáticas con GeoGebra**

Por otra parte, por ser GeoGebra un software gratuito, es posible su instalación en computadores y permite la descarga de la última versión del programa (4.2.21.0)<sup>3</sup>, GeoGebra se rige bajo la licencia de libre distribución, sin usos comerciales; para ello es necesario que el computador tenga instalado Java<sup>4</sup>, ya que el programa está diseñado sobre dicha plataforma. Igualmente GeoGebra maneja una versión en línea (Java Webstart) y para tablas de Windows 8, Android y iPad, lo cual es una ventaja para ser integrado en las aulas de clase según las condiciones tecnológicas con las que cuentan las instituciones educativas en la actualidad.

<sup>3</sup> Se puede descargar desde la página oficial <http://www.GeoGebra.org/cms/>

<sup>4</sup> Se puede descargar desde la página oficial <http://www.java.com/es/> la versión mínima que necesita es la (1.4.2).

De la misma manera, cabe resaltar que se tomó como fuente de estudio la función por tramos, puesto que es difícil encontrar en los periódicos una situación real que se comporte de manera lineal, por ello se toma en cuenta la información presentada en lenguaje natural en los periódicos para construir una gráfica por tramos y diseñar la secuencia.

Aunque el estudio de la función por tramos no es muy usual en grado noveno, este tipo de función permite integrar los conceptos que los estudiantes manejan referidos a funciones lineales y afines, lo cual aporta a la identificación del dominio, rango, la pendiente como razón de cambio y la relación entre las magnitudes involucradas.

De esta manera se da cuenta de lo planteado en los lineamientos curriculares (1998):

Los contextos donde aparece la noción de función establecen relaciones funcionales entre los mundos que cambian, de esta manera emerge la función como una herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio. Los modelos más simples de función (lineal, afín, cuadrática, exponencial) [...] Es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones donde la función no exhiba una regularidad, con el fin de alejar la idea de que su existencia o definición está determinada por la existencia de la expresión algebraica. A la conceptualización de la función y los objetos asociados (dominio, rango...) le prosigue el estudio de los modelos elementales, lineal, afín, cuadrático, exponencial, priorizando en éstos el estudio de los patrones que los caracterizan (crecientes, decrecientes). La calculadora gráfica se constituye en una herramienta didáctica necesaria para lograr este propósito. (p.51)

Aunque en la cita anterior no se menciona específicamente la función por tramos se señala la utilidad de la calculadora gráfica como herramienta didáctica, en este caso de GeoGebra para desarrollar la secuencia didáctica y lograr este propósito.

En relación con el marco teórico, se adoptó la TSD Brousseau (1986) porque la secuencia de situaciones didácticas son las que enmarcaran las acciones de enseñanza que deberá diseñar e implementar el docente para orientar a los estudiantes al estudio de función por tramos.

Este enfoque considera que el conocimiento matemático es concebido como un conjunto organizado de saberes generados por la cultura y, por lo tanto, la enseñanza de las matemáticas se concibe como un proceso centrado en la producción de los conocimientos como resultado de establecer nuevas relaciones entre las estructuras de conocimiento existente y las nuevas, de tal manera que se puedan transformar y reorganizar. Además, según Brousseau (1986) la producción de conocimiento siempre debe estar acompañada de su validación.

De acuerdo a lo planteado por Brousseau, un elemento importante a tener en cuenta es la noción del medio cuando se implementan recursos tecnológicos, pues un software como GeoGebra permite la interacción de éste con el estudiante, para conjeturar y analizar las conversiones que se pueden dar en los diferentes tipos de representaciones. De forma específica, en este caso, se utilizó el deslizador<sup>5</sup> como instrumento para que el estudiante al realizar acciones, este le genere retroacciones que le permitieran una validación positiva o negativa, es decir, si alcanzó o no lo que se quería con dicha acción.

---

<sup>5</sup> El deslizador es una herramienta de GeoGebra que se utiliza para arrastrar un punto sobre la gráfica, la ventana de diálogo emergente permite especificar el nombre, intervalo [mín, máx], e incremento del valor correspondiente, sin embargo su configuración es independiente a la gráfica. Su valor cambia al arrastrar con el ratón o *mouse* el punto que aparece sobre el segmento del deslizador. La posición de un deslizador puede ser fija sobre la pantalla (horizontal o vertical) y no es afectado por ningún tipo de *zoom*.

## **1.3 OBJETIVOS**

### **1.3.1 Objetivo General**

- Caracterizar el estudio de la función por tramos en una secuencia didáctica que propicie el manejo de diferentes representaciones semióticas, al integrar recursos como Geogebra y el periódico con estudiantes de grado noveno.

### **1.3.2 Objetivos Específicos**

- Establecer algunos referentes cognitivos, matemáticos y didácticos que fundamenten el diseño de una secuencia de situaciones didácticas.
- Caracterizar un diseño de una secuencia de situaciones didácticas usando GeoGebra teniendo presente el papel de las representaciones semióticas en contextos matemáticos tomados del periódico.
- Analizar el proceso de la mediación instrumental con relación a la ejecución de la secuencia de situaciones didácticas diseñada.



## CAPÍTULO II

### MARCO TEÓRICO

A continuación se presentan algunos referentes teóricos que permiten la sustentación del diseño de una secuencia de situaciones didácticas, los cuales son presentados en tres dimensiones. En la *dimensión Cognitiva* se presenta algunos elementos asociados a los registros de representación semiótica desde la teoría de Duval (1999) y el papel de la génesis instrumental teniendo presente el rol mediador de las TIC (Rabardel, 1995; Trouche, 2005), además la transposición computacional (Balacheff, 1988) y representaciones ejecutables (Moreno, 2002). En la *dimensión matemática* se aborda el componente matemático alrededor de la función (Stewart, Redlin & Watson, 2001) y funciones en contextos (Hitt, 2002). En la *dimensión didáctica*, se presenta la teoría de situaciones didácticas (TSD), las cuales brindan pautas para el diseño de las situaciones didácticas (Brousseau, 2007) y por último se aborda el currículo (MEN, 2006).

#### 2.1 DIMENSIÓN COGNITIVA

En esta dimensión cognitiva se toman cuatro puntos importantes para la construcción del marco teórico. En primer lugar los registros de representación semiótica de Duval, en las que se destaca el tratamiento y formación de un mismo registro y la conversión entre registros tales como el algebraico, gráfico y tabular. En segundo lugar la mediación instrumental y génesis instrumental que da cuenta de las actividades cognitivas en un ambiente informático. En tercer lugar, se tiene la transposición computacional o informática enfocada a la identificación de las potencialidades y restricciones del artefacto, la interfase y su vinculación con el medio externo, específicamente con el periódico. En un cuarto lugar se tiene las representaciones ejecutables del programa GeoGebra.

### 2.1.1 Registros de representación semiótica

Para iniciar es importante definir lo que se entiende por registro, según Duval (1999):

Considera que los sistemas semióticos, en efecto, deben cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación. En primer lugar, constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como *una representación de alguna cosa* en un sistema determinado [*formación*]. Luego, transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que pueden constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales [*tratamiento*]. Por último, convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que estas últimas permiten explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado [*conversión*]. No todos los sistemas semióticos permiten éstas tres actividades cognitivas fundamentales, como por ejemplo, el lenguaje morse o la codificación de tránsito. Pero el lenguaje natural, las lenguas simbólicas, los gráficos, las figuras geométricas, etc., sí las permiten. Hablaremos entonces de registro de representación semiótica (p. 30)

A continuación se ampliarán las definiciones mencionadas anteriormente como la formación, el tratamiento y la conversión que se presentan en las actividades cognitivas que propone Duval (1999):

La **formación** permite expresar una representación mental o describir un objeto matemático, lo cual implica seleccionar un conjunto de características, en los cuales se asignarán unas reglas de formación que permita el uso de los signos, es decir, las determinaciones que constituyen lo que se quiere representar, por ende:

Formar una representación semiótica es recurrir a un(os) signo(s) para actualizar o para sustituir la visión de un objeto. Excepto los casos de idiosincrasia, los signos utilizados pertenecen a un sistema semiótico ya constituido y ya utilizado por otros: la lengua materna, un código icónico de representación gráfica o artística, una lengua formal, etc. Los actos más elementales de formación son, según los registros la designación nominal de objetos, la reproducción de su contorno percibido, la codificación de relaciones o de algunas propiedades de un movimiento. (Duval, 1999, p. 41).

Por tanto la formación de representaciones semióticas implica seleccionar un conjunto de ciertas características de una actividad que son percibidas, ya sean imaginadas o representadas en función de las representaciones propias de un registro escogido.

En cuanto al **tratamiento** como otra actividad cognitiva, se dice que es:

Una transformación de una representación (inicial) en otra representación (terminal), respecto a una cuestión, a un problema o una necesidad, que proporcionan el criterio de interrupción en la serie de las transformaciones efectuadas. El tratamiento es pues, una transformación de las representaciones al interior del registro de representación o de un sistema. (Duval, 1999, p. 42).

Lo que quiere decir, que el tratamiento es una transformación interna de un registro, es decir, la transformación de una representación en otra representación pero en un mismo registro.

Antes de iniciar con la breve descripción de lo que define Duval (1999) como conversión, es importante determinar que varios registros de representación semiótica puede usar signos o conjunto de marcas comunes (los dígitos), para determinar la equivalencia entre ellos, a continuación se muestra un ejemplo

tomado de D' Amore, (2006) el cual afirma que “el registro semiótico lenguaje de las fracciones:  $\frac{3}{6}$ ,  $\frac{50}{100}$ ,  $\frac{1}{2}$  y registro semiótico lenguaje del porcentaje: 50%” (p. 185). Estos registros de representación se agrupan como representaciones numéricas.

En cuanto a la **conversión** Duval (1999) la define de esta manera;

La conversión es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro. La conversión es pues, una transformación externa relativa al registro de representación de partida. (p. 44).

En cuanto a la conversión se puede decir que es un cambio de registro de representación, en relación al mismo objeto matemático. Por ejemplo, cuando al resolver un problema se utiliza gráficos cartesianos para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, se expresa con una expresión algebraica la misma función, en estos cambios esta de referente el mismo objeto matemático en dos tipos de representaciones. En pocas palabras, estos cambios de registros son importantes ya que si se enseña una sola forma quedarían propiedades relevantes fuera de la enseñanza, debido a que “convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado” (Duval, 1999. p.29). Por tanto es necesaria la conversión de los sistemas de representación.

Para el caso de las funciones existen diferentes tipos de representación semiótica, en algunos casos su uso no es fácil para los estudiantes, una de las razones puede ser el poco trabajo en los cambios de registros de representaciones semióticas. Por otra parte, los objetos matemáticos solo son conocibles a partir de los diferentes tipos de representación semiótica, dada su

naturaleza, en este caso las representaciones gráficas ofrecen la información necesaria para el análisis de una situación.

A continuación se definen las representaciones semióticas como las “representaciones cuya producción no puede hacerse sin la movilización de un sistema semiótico: así, las representaciones semióticas pueden ser producciones discursivas (en lengua natural, en lengua formal), o no discursivas (figuras, gráficos, esquemas)” (Duval, 1996, p. 3). Para comprender la producción de las representaciones semióticas, se toma en consideración tres aspectos como se muestra en la siguiente tabla:

|                        |   |
|------------------------|---|
| Aspecto estructural    | <ul style="list-style-type: none"> <li>• La naturaleza y el número de sus signos: la significancia.</li> <li>• El tipo de funcionamiento: reglas de formación que permiten combinar los signos en la unidad de una representación (Benveniste 1974, p. 51-52)</li> <li>• El número de dimensiones (1 o 2) según las cuales los signos pueden estar asociados (Bresson, 1987, p. 943-944)</li> </ul> |
| Aspecto fenomenológico | <ul style="list-style-type: none"> <li>• El modo de producción: externo o interno, es decir, físico o mental (Vigotski, 962)</li> <li>• El modo sensorial requerido para la aprehensión: visión, audición.</li> </ul>   |
| Aspecto funcional      | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Las funciones cognitivas fundamentales: comunicación (o transmisión), objetivación y tratamiento.</li> </ul>   |

**Tabla 1. Aspectos relativos a la producción de representaciones semióticas.**

Fuente (Duval, 1996, p. 4).

Todo sistema semiótico que permita cumplir estas tres funciones cognitivas fundamentales constituyen un registro de representación. Entonces, no todos los sistemas semióticos pueden construir registros de representación.

Sin embargo es conveniente tener en cuenta que el uso de diferentes representaciones semióticas, implica pasar de una representación a otra (conversión). El paso de la expresión algebraica a la representación gráfica suele ser de menor dificultad que el paso de la gráfica a la expresión algebraica. Para el estudiante la actividad de conversión no es fácil, porque es una actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir, ya que puede significar cosas diferentes para ellos. En relación a lo anterior Duval (1999) propone que:

Hay representaciones internas y externas; las representaciones externas son observables y pueden ser expuestas públicamente; las representaciones internas no pueden ser observadas públicamente. O sea son de carácter privado. Para Duval las representaciones externas son representaciones generadas a través de un sistema de signos, es decir, son representaciones semióticas. Las representaciones semióticas según Duval pueden ser interpretadas por todos los individuos capaces de interpretar este sistema de signos. (p.22).

Así mismo, Duval afirma que la manera de cambiar la forma de una representación es una operación difícil e incluso en ocasiones imposible para muchos estudiantes de los diferentes niveles de enseñanza. “Todo sucede como si para la gran mayoría de los estudiantes la comprensión que logran de un contenido quedara limitada a la forma de representación utilizada”. (p.28).

Para el estudio de estas representaciones en un ambiente informático, se tomaran en cuenta los procesos de mediación y génesis instrumental, los cuales se desarrollan a continuación.

### 2.1.2. Mediación y Génesis Instrumental

Se contempla la mediación de GeoGebra para contextualizar fenómenos de variación y de cambio que contribuya al estudio de la función.

El aprendizaje con instrumentos no se da de manera instantánea, sino que es por la mediación instrumental, según Rabardel (1995) afirma que “la posición intermediaria del instrumento hace de él un mediador de las relaciones entre el sujeto y el objeto” (p.135), donde el sujeto actúa sobre el objeto mediante una situación. Por lo cual:

Los instrumentos tienen un doble uso en el seno de las actividades educativas. En los estudiantes, influyen profundamente en la construcción del conocimiento y los procesos de estudio. Para los profesores, pueden considerarse como variables sobre las cuales se actúa para la concepción y el control de las situaciones pedagógicas (Rabardel, 1995; citado por Del Castillo & Montiel, s.f.a, p. 1674).

De igual importancia la génesis instrumental es el proceso mediante el cual un artefacto<sup>6</sup> se convierte en instrumento<sup>7</sup> y esto se da a partir de dos procesos, el primero es la instrumentalización y el segundo es la instrumentación. Para la instrumentalización el objetivo es que el sujeto al usar el artefacto se apropie de sus propiedades para lo cual fue construido y lo adapta a sus necesidades ó lo limita.

La instrumentalización es la expresión de la actividad específica de un sujeto sobre lo que el usuario piensa en relación para qué fue construido el artefacto y cómo debe ser utilizado, la elaboración de un instrumento

---

<sup>6</sup> Se entiende *artefacto* como “un objeto material o abstracto que emplea un usuario para realizar cierto tipo de actividad, puede ser un objeto sin significado a menos que el usuario lo haya utilizado antes o haya visto cómo lo usan otros” (Rabardel, 1995; citado por Cedillo, 2006, p. 133).

<sup>7</sup> Se entiende como instrumento como la construcción psicológica del artefacto junto con los esquemas mentales que el usuario desarrolla para resolver un tipo de tareas específicas.

ocurre en su uso. La Instrumentalización conduce así al enriquecimiento de un artefacto, o a su empobrecimiento (Trouche, 2005, p.148). (Citado por Del Castillo & Montiel, s.f.b, p.464).

En la instrumentación se considera que el sujeto debe construir esquemas de uso, mientras realiza un tipo de tarea, estos esquemas de uso son a largo plazo, como se muestra en la siguiente cita:

El proceso de instrumentación se refiere a la construcción de esquemas de uso por el sujeto. Los esquemas de uso tienen una componente privada, es decir, una construcción consustancial al sujeto. Tienen también un componente social, es decir, resultante de las interacciones del sujeto con los otros usuarios, diseñadores y de las distintas ayudas exteriores (Del Castillo & Montiel, s.f.a, p.1677).

De manera que, los esquemas de utilización son definidos como una organización mental, en el cual el sujeto construye habilidades y técnicas conceptuales al usar el artefacto en un aula de clase. Según Rabardel (1995) distingue dos niveles de esquemas de utilización:

- Los **esquemas de uso** están orientados a las actividades secundarias, es decir, a la gestión de las características y propiedades, que corresponden a las acciones vinculadas con el artefacto. En este primer nivel se sitúan los esquemas de utilización elementales, por ejemplo la manipulación del deslizador.
- Los **esquemas de acción instrumentada**, están orientados a mostrar los tipos específicos de transformaciones en los objetos de las actividades principales, para las que el artefacto es un medio de realización. Los esquemas del primer nivel (esquemas de uso) constituyen, según la terminología de Cellier, módulos especializados, que se coordinan unos con otros y también con otros esquemas, se asimilan y se acomodan



recíprocamente para construir los esquemas de acción instrumentada (p.172).

Por consiguiente, al tener presentes los *esquemas de uso* se construye una secuencia de situaciones didácticas en un ambiente de aprendizaje tecnológico, en la cual los estudiantes tienen diferentes tipos de registros de representaciones, como gráficas y el tabular que permiten hacer un estudio sobre la función por tramos. Por lo cual, Rabardel (1999; citado por Ruiz & Santacruz, 2010).

Enfatiza que el impacto de los instrumentos en la actividad cognitiva del sujeto está relacionado con las limitaciones específicas de los artefactos y las acciones que son posibles con ellos. Es decir, los instrumentos ofrecen a los estudiantes nuevas formas de exploración, sin embargo siempre van a existir limitaciones y restricciones propias del artefacto. (p. 583).

En resumen, se tiene que la génesis instrumental es un proceso en el cual se pone en juego un artefacto que se convierte en instrumento, para construir esta relación, se hace necesario pasar por procesos de instrumentalización, que permiten al estudiante pensar, relacionar y utilizar ese artefacto en una situación, mientras que la instrumentación es cuando el estudiante construye esquemas al interpretar y solucionar la situación, como la tarifa de los taxis planteada en este trabajo.

Paralelamente, el conocimiento producido está vinculado por el instrumento de mediación utilizado, como lo afirma Moreno (2002) “Toca un punto muy sensible con relación a las estructuras cognitivas, a saber, la influencia que tienen los instrumentos de mediación en la arquitectura de la mente humana.” (p.83), nuestro aparato cognitivo funciona mediante la mediación instrumental que se construye de manera evolutiva de la necesidad de mediación, por lo cual el conocimiento del estudiante no es independiente del instrumento.

Asimismo el conocimiento que se tiene cuando se utiliza un artefacto como GeoGebra puede que sea escaso, por lo cual el sujeto no se desplaza con armonía en la estructura que tiene el artefacto, pero el sujeto cuando lo adopta, lo puede adaptar de acuerdo a sus necesidades para construir el objeto matemático, manipular las diferentes representaciones que existen en un entorno dinámico del artefacto. De acuerdo a lo anterior Moreno (2002), afirma que:

Este enfoque sobre la actividad cognitiva ha recibido una atención creciente en los últimos años debido, en parte, a la presencia de las herramientas computacionales en la educación. Allí es necesario entenderlos como herramientas de mediación de las actividades cognitivas orientadas al aprendizaje. (p.83).

De ahí la importancia de que los docentes cambien la enseñanza tradicional al implementar diferentes recursos como el periódico o las TIC, además de aceptar incluir éstos al aula de clase, puesto que depende del tipo de situaciones que se propongan, lo cual muchas veces se tiende a trivializar lo que se puede hacer a lápiz y papel, por ello es fundamental el diseño de situaciones que generen una verdadera actividad.

Por el uso de artefactos como la calculadora se hace necesario que tanto los docentes como estudiantes tengan presentes las fortalezas y debilidades al momento de integrarlos a la escuela, se considera que existe una transformación en la naturaleza del conocimiento, de ahí que se deban tener en cuenta los elementos de la transposición computacional o informática presentada a continuación.

### **2.1.3. Transposición Computacional o Informática**

Para definir lo que Balacheff propone como transposición informática, primero se aclara la transposición didáctica por (Chevallard 1985, citado por

Balacheff, 1988) quien afirma que el saber de la escuela no es el saber construido por los matemáticos, sino que es un saber transpuesto que ha sido adaptado y que se presenta de la manera más cercana posible al conocimiento matemático formal, pero esta transposición depende del contexto en que se movilice, de la historia, de todo lo que se va dando a través del tiempo. Cuando este saber ingresa a la tecnología el saber también cambia, por ejemplo la geometría que pasa de ser una geometría estática a una geometría dinámica, entonces el conocimiento como tal, es decir, la naturaleza del conocimiento es transformada, por estas razones se hace el paralelo de la transformación didáctica con la transformación computacional como lo menciona Balacheff (1988) “la Transposición Informática es un proceso probable para transformar profundamente el conocimiento a ser enseñado en el curso del diseño e implementación de un ambiente de aprendizaje basado en computación” (p. 1).

Por ende cuando se habla de la transposición computacional se debe saber que el conocimiento matemático es afectado como tal, puesto que aparecen un tipo de representaciones que son ejecutables que dan respuestas automáticas y que existe un universo interno que gestiona y emite una respuesta. Lo que el estudiante tiene que hacer es interpretar esa respuesta, ¿Qué es lo que arroja? ¿Cómo sirve ese resultado para utilizarlo en un problema o situación? cuando se integra un programa como GeoGebra se deben considerar tres elementos que menciona Balacheff (1988):



- **Universo interno:** que es la manera como ha sido configurado el programa y qué tipo de devoluciones o retroacciones que brinda este software para el trabajo que se está haciendo. Definiendo este universo como:

Los diferentes compuestos electrónicos en los cuales la articulación y la puesta en obra permiten “el funcionamiento del dispositivo informático” en una simplificación un poco rápida pero que no reducirá el propósito de lo que se quiere nosotros consideraremos

que una presentación operacional de este universo esta dado por los leguajes de la programación. (p.2).

Entonces lo que dice la transposición informática es que se tiene un universo interno que está definido por el lenguaje de programación y depende de quién diseña el programa, que no es susceptible de ser modificado, es decir el programa funciona de tal manera que el sujeto se debe adaptar a lo que el programa ofrece.

El siguiente elemento que propone Balacheff (1988) es la interfase.

- **Interfase:** Es el entorno en el cual el sujeto explora los diferentes comandos y herramientas que dispone el programa y en el cual los estudiantes desarrollaran los procesos de instrumentalización e instrumentación, es decir, “es el lugar entre el usuario y el dispositivo informático” (p.2), En este caso GeoGebra presenta los tres tipos de representación el gráfico, el algebraico y el tabular, de modo que al aplicar las situaciones el estudiante va a tener la posibilidad de manejar los dos tipos de representaciones; gráfico y tabular. Además se restringirán algunos comandos de la barra herramientas del programa, de esta manera los estudiantes no podrán acceder a todos los comandos, se tendrán previstos el apuntador  y el desplazamiento  de la pantalla, para que el estudiante realice la exploración de las gráficas.
- **Universo externo:** “en el cual se encuentra el sujeto y en donde le son eventualmente accesibles a otros dispositivos (sobre todo con relación a los conocimientos en juego del dispositivo informático)” (p.2). En este último elemento se relacionará el programa GeoGebra con los demás recursos, en este caso se tiene el periódico e internet y se adiciona una carpeta con link, por algún fallo técnico, además lo que ellos podrían usar el lápiz y el papel esto haría parte del universo externo.

En resumen, cuando se habla de las representaciones ejecutables, estas representaciones dependen del universo interno, después existe una interfase la cual puede ser modificada por el sujeto y que puede ser adaptada según las necesidades del usuario en la solución de las situaciones propuestas.

Se puede decir que, la transposición informática da cuenta del cambio en la naturaleza de los objetos matemáticos como tal y en la forma de interactuar con ellos, como se describió anteriormente a partir de los diferentes elementos.

Al considerar la nueva actividad cognitiva que se genera en ambientes informáticos y poder manipular diferentes representaciones en la interfase, es indispensable dar cuenta de su ejecutabilidad, a continuación se amplía dicho aspecto.

#### **2.1.4. Representaciones Ejecutables**

El propósito de este apartado es determinar la naturaleza de las representaciones matemáticas en ambientes de aprendizajes informáticos, a partir de la caracterización de la ejecutabilidad del software GeoGebra, así como la importancia de relacionar este tipo de representaciones con el contexto de la vida cotidiana como la tarifa de los taxis en la ciudad de Cali para el estudio de la función por tramos.

Estas herramientas tecnológicas proporcionan varias representaciones de objetos matemáticos en diferentes sistemas semióticos como las numéricas, gráficas, tabulares y algebraicas, la cual permite el paso de un registro a otro, es decir la conversión entre ellas, por ejemplo, pasar de la representación gráfica a la tabular. Lupiañez (2000) considera que, las representaciones ejecutables suministran relaciones matemáticas en diferentes sistemas semióticos, permitiendo cambiar de un registro a otro, es decir, la conversión entre ellas, además plantea que:

Este tipo de tecnología constituye un *micromundo* que posee, como hemos visto, varios registros y que permite el tránsito entre ellos. Además, dentro de cada uno también pueden efectuarse procesamientos en el sentido antes citado, como por ejemplo, al hacer un ZOOM a una gráfica. (p.42)

Este tipo de herramientas tiene la potencialidad de ser complementadas y enriquecidas, ya que desaparece el carácter estático de las gráficas de las funciones en lápiz y papel, que son representadas con ciertas cualidades que les permite la facilidad de moverlas, transformarlas, manipular los objetos y actuar sobre ellos. Este tipo de representaciones tiene la característica que es ejecutable, según Moreno (2002) “significa que una vez instalados en el lenguaje del medio computacional, las nuevas representaciones son procesables y manipulables” (p.84). Paralelamente a este tipo de representaciones ejecutables Lupiañez & Moreno (2002) las definen como “portadoras de la potencialidad de simular acciones cognitivas con independencia de quien las utiliza (usuario de un software como GeoGebra) por ejemplo; al graficar una función: lo que varía con el usuario es la interpretación que puede darse a la información que suministrar el software”. (p.43)

Como lo plantea Moreno (2002) “Podemos imaginar los sistemas de representación como herramientas de mediación. En sus versiones informáticas, la forma general de representación tiene una característica central: es ejecutable.”(p.84), por lo cual podemos ejecutarlo y representarlo, lo que lleva a una dimensión operatoria del estudio matemático que no permite estar estático, de modo que “la posibilidad de procesar esa información de cierta manera debido a la ejecutabilidad del sistema de representación que le suministra la máquina.” (p.84). Lo que brinda la posibilidad de comprender el objeto matemático, en el momento en que el estudiante “vea” como cambia la variable dependiente al hacer variar la independiente.

La integración entre lo estático y lo dinámico “ejecutable” se debe comprender como medio de enseñanza y no como un obstáculo para la enseñanza, empezando desde la forma de como introducir esa tecnología en un entorno sociocultural.

Por consiguiente existen dos características de la ejecutabilidad con relación a los sistemas de representación, mencionado por Pedreros (2012) “son la conversión entre representaciones y el procesamiento, es decir las transformaciones de las representaciones en el mismo registro donde fueron creadas, el procesamiento así considerado es una acción sobre las representaciones interna a un registro en el sentido de Duval” (p.92).

A través de la manipulación del registro gráfico por GeoGebra, ayuda a construir el estudio de función mediante un objeto ejecutable, que permitirá capturar la relación funcional de las variables que se manejen.

## **2.2. DIMENSIÓN MATEMÁTICA**

El estudio matemático de la función gira en torno a una clase de correspondencia llamada una relación, que se define así:

“Una función  $f$  es una regla que designa a cada elemento de  $x$  de un conjunto  $A$  exactamente un elemento, llamado  $f(x)$ , de un conjunto  $B$ ” (Stewart, Redlin & Watson, 2001, p.132).

Por lo cual, cada elemento  $x$  del conjunto  $A$ , se relaciona con un elemento del conjunto  $B$  que se define por  $y = f(x)$ . El conjunto  $A$  se llama dominio de la función o el conjunto de todos los posibles valores para la variable independiente, y el conjunto  $B$ , se conoce como el conjunto formado por todos los valores posibles de  $f(x)$ , conforme  $x$  varía en todo el dominio de  $f$ , llamando conjunto imagen o rango.

En esta dimensión, es necesario determinar una definición formal de función, donde se destacan dos aspectos que mencionan Saldanha y Thompson (1998; citados por Del Castillo & Montiel, s.f.a, p. 1672).

- La función es una relación entre cantidades, las cuales pueden ser representadas por un par ordenado cuyas coordenadas representan valores de dos cantidades simultáneamente, y
- Conlleva a la idea de que dos valores de las cantidades pueden, en efecto variar.

Las funciones se constituyen como un saber para describir fenómenos, partiendo de contextos establecidos a partir de relaciones entre mundos que cambian, donde se pueden identificar las cantidades que permanecen invariantes y cuales cambian según la situación. Por ejemplo, el costo de enviar un paquete por correo según su peso (en función del peso), los resultados académicos que obtiene un estudiante en función del tiempo dedicado a estudiar, además el caso de las tarifas de los taxis, entre otros.

Una de las formas de representar las funciones es a partir de una gráfica de un sistema de coordenadas, donde se establece la relación al asociar puntos en el plano cartesiano como una pareja ordenada  $(x, y)$ , se define de la siguiente manera:

Si  $f$  es una función con dominio  $A$ , entonces la gráfica de  $f$  es el conjunto de pares ordenados  $\{(x, f(x)) / x \in A\}$ . En otras palabras, la gráfica de  $f$  es el conjunto de todos los puntos  $(x, y)$  tales que  $y = f(x)$ ; es decir, la gráfica de  $f$  es la que corresponde a la ecuación  $y = f(x)$ . (Stewart, Redlin & Watson, 2001, p.139).

Las funciones se dan como un estudio de la matemática en aplicaciones directas de la vida real. Hitt (2002) señala que:



A través de las funciones podemos modelar matemáticamente un fenómeno de la vida real, describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado de cada uno de los sucesos que estamos describiendo. (p. 79).

Hablar de función implica también hacer mención de los diferentes tipos de función, por ejemplo: la función lineal, cuadrática, cúbica, polinómica, trigonométrica, logarítmica, exponencial y afín.

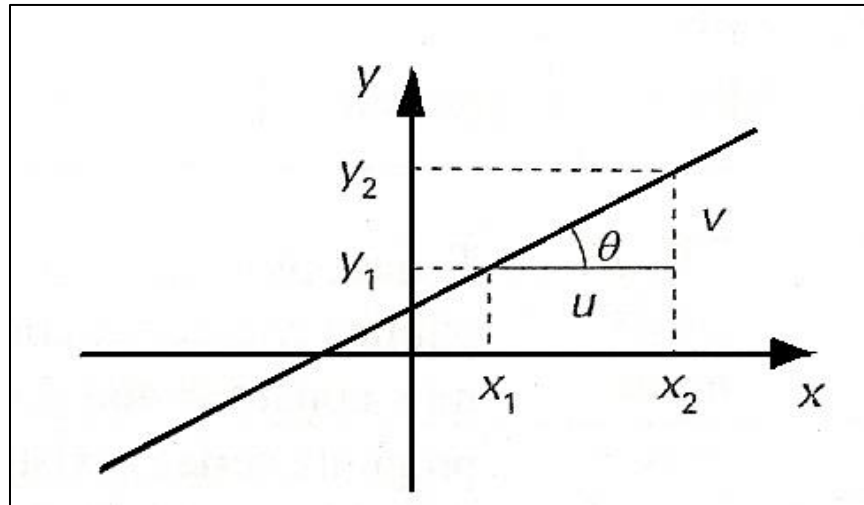
La función lineal es de las más importantes en la aplicación de modelar contextos tomados directamente de un fenómeno real, además que es muy rápida en la interpretación de la información obtenida.

La función lineal  $f(x) = ax$  puede ser representada a través de una gráfica, al unir de manera secuencial los puntos de los pares ordenados  $(x, y)$ , en una línea recta que pasa por el origen de coordenadas. Un aspecto notorio que se percibe de la gráfica de las funciones lineales, es su pendiente, la cual presenta la inclinación y la dirección, la cual representa el crecimiento o decrecimiento de los valores de las variables.

El reconocimiento de las variables que se encuentran en las funciones lineales y afines se da mediante el análisis de la razón entre los cambios de la variable  $f(x)$  con respecto a  $x$ . Es decir, que se toman dos puntos correspondientes  $P_1(x_1, f(x_1))$  y  $P_2(x_2, f(x_2))$  y el cociente de la diferencia entre dos valores de cada variable  $\Delta x = x_2 - x_1$  y  $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$ . Se tienen que:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2) - (x_1)} = m$$

Gráficamente, se representa la pendiente  $m$  como:

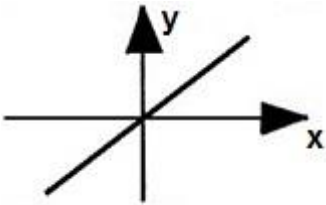
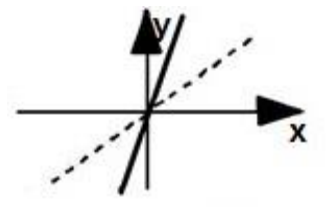
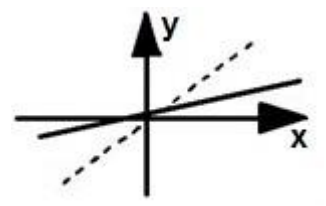
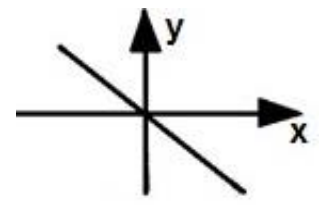


**Imagen 2. Representación gráfica de la pendiente**

Fuente: Hitt (2002)

Se asume el concepto de pendiente  $m$  como un elemento importante en la comprensión del concepto de función lineal, debido a la relación con algunos elementos del cálculo, como la razón de cambio.

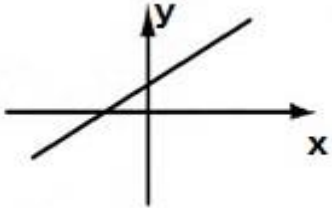
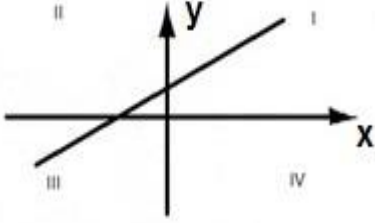
La función lineal pasando por el origen  $(0,0)$ ; es decir  $f(x) = ax$  con  $b = 0$

| Representación algebraica          | Valor de la pendiente | Valor de la ordenada al origen | Representación gráfica   | Análisis de la gráfica en relación con los cuadrantes |
|------------------------------------|-----------------------|--------------------------------|--|---|
| $f(x) = x$                         | $m = 1$               | $b = 0$                        |    | $m > 0$<br>cuadrantes I y III                         |
| $f(x) = 3x$                        | $m = 3$               | $b = 0$                        |    | $m > 0$<br>cuadrantes I y III                         |
| $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)x$ | $m = \frac{1}{3}$     | $b = 0$                        |   | $m > 0$<br>cuadrantes I y III                         |
| $f(x) = -x$                        | $m = -1$              | $b = 0$                        |  | $m < 0$<br>cuadrantes II y IV                         |

**Tabla 2. Representaciones de la función lineal.**

Fuente: Hitt (2002)

Una función  $f$  de la forma  $f(x) = mx + b$ , se conoce como función afín, donde  $m$  es la pendiente de la recta y  $b$  es la longitud del cruce con el eje al origen. La clasificación de las funciones lineales en su posición en el plano cartesiano se da, en la siguiente tabla.

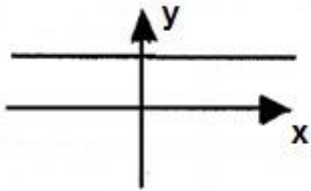
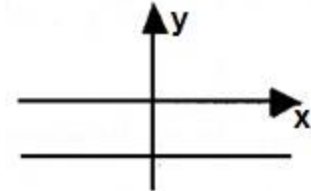
| Representaciones algebraica | Representación gráfica (cuando $m > 0, b > 0$ )  | Ejes cartesianos y cuadrantes  |
|-----------------------------|--|--|
| $f(x) = mx + b$             |  <p>Un sistema de ejes cartesianos con un eje horizontal etiquetado como 'x' y un eje vertical etiquetado como 'y'. Una línea recta con una pendiente positiva cruza el eje y en un punto positivo y el eje x en un punto negativo.</p> |  <p>Un sistema de ejes cartesianos con un eje horizontal etiquetado como 'x' y un eje vertical etiquetado como 'y'. Una línea recta con una pendiente positiva cruza el eje y en un punto positivo y el eje x en un punto negativo. Los cuadrantes están etiquetados con números romanos: I en el cuadrante superior derecho, II en el superior izquierdo, III en el inferior izquierdo y IV en el inferior derecho.</p> |

**Tabla 3. Representación de la función afín**

Fuente: Hitt (2002)

La función afín permite modelar situaciones presentadas en un contexto real matemático, por ejemplo, el costo de enviar un paquete por correo según su peso (en función del peso). La expresión matemática para modelar la situación presentada es la de tipo  $y = mx + b$ , donde  $y$  es el precio a pagar por el envío en función de  $m$  como costo del peso enviado y  $b$  como el cargo básico o impuesto por dicho paquete.

Un caso especial de la función afín se presenta cuando la pendiente  $m = 0$ , lo que indica que la pendiente no presenta inclinación. La función  $f(x) = b$ , donde  $b$  es un número dado, se conoce como función constante porque todos sus valores son iguales a  $b$ . Su gráfica es horizontal  $y = b$ . A continuación se muestra un ejemplo de la gráfica de la función constante  $f(x) = b$  si,  $b = 3$  ó  $b = -3$ .

| Representación algebraica | Valor de la pendiente | Valor de la ordenada al origen | Representación gráfica   | Análisis de la gráfica en relación con los cuadrantes |
|---------------------------|-----------------------|--------------------------------|--|---|
| $f(x) = 3$                | $m = 0$               | $b = 3$                        |  | $b > 0$<br>cuadrantes I y II                          |
| $f(x) = -3$               | $m = 0$               | $b = -3$                       |  | $b < 0$<br>cuadrantes III y IV                        |

**Tabla 4. Función Constante**

Fuente: Hitt (2002)

Las funciones definidas por tramos, son dadas por más de una función, ya que según (Stewart, Redlin & Watson, 2001) la define como “Una ecuación puede estar definida por diferentes ecuaciones en varias partes de su dominio” (p.145). La modelación a través de tramos con funciones lineales, dicho por Hitt (2002), el cual plantea que “existe una gran cantidad de fenómenos que admiten una modelación local por medio de una función lineal” (p.89). Ejemplos como, la población de la ciudad de Nueva York, la función del tiempo y el costo de un viaje en taxi como función de la distancia recorrida.

Para este estudio se requiere establecer un conjunto de funciones de partida para el diseño de las situaciones de la función definida por tramos mediado por GeoGebra. Es así que se considera para el diseño la función constante, función

lineal y afín. Se define entonces una función por tramos, tomado de (Chumpitaz, L, 2013, p.45) así:

Inicialmente fijamos una familia de funciones  $F \subset \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ , que denominamos funciones básicas, y una familia  $Y$  de subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}$ ,  $Y \subset P(\mathbb{R})$ .

*Definición:* una función  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $A \subseteq \mathbb{R}$  es una función definida por tramos, si existe una colección o familia de funciones  $\{f_i: A_i \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$  de la forma  $f_i = f \upharpoonright_{A_i}$  donde  $f \in F$  y  $A_i \in Y$ ,  $i \in I$ , donde  $I$  es un conjunto de índices contable, de modo que:

- I.  $f(x) = f_i(x)$  si  $x \in A_i$ ,  $i \in I$ . (Propiedad de la regla por tramos)
- II.  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ . (Propiedad del dominio)
- III.  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $i, j \in I$ ,  $i \neq j$ . (Propiedad del no solapamiento)
- IV. Dados  $i, j \in I$ ,  $i \neq j$ ,  $f_i = f \upharpoonright_{A_i}$ ,  $f_j = g \upharpoonright_{A_j}$  con  $f, g \in F$ , se tiene que  $f \neq g$ . (Propiedad de la no redundancia)

Para efectos de este trabajo  $F$  es la familia de funciones generadas por  $\{b, mx, mx + b\}$ , es decir el conjunto de todas las combinaciones de las funciones.

Las situaciones de funciones pueden darse mediante el uso de sistemas de representación, tales como expresiones verbales, expresiones algebraicas y analíticas, gráficas cartesianas o tabulares.

### 2.3 DIMENSIÓN DIDÁCTICA

En esta dimensión, se presenta la teoría de situaciones Didácticas de Brousseau (2007), que describe el aprendizaje por adaptación que trata de la interacción entre un sujeto y un medio, por otra parte la situación a-didáctica se da

en el momento en que el estudiante por sí mismo trata de llegar a un conocimiento que se le propone alcanzar. La situación didáctica es cuando el docente guía al estudiante por medio de preguntas para que construya de manera apropiada el conocimiento. Por otra parte se presenta el referente curricular, el cual se tendrá en cuenta para saber qué es lo que propone el MEN en los grados de 8º y 9º para el estudio de función.

### **2.3.1 Teoría de Situaciones Didácticas**

Se toma la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (2007), la cual es apropiada para analizar con claridad el papel del instrumento tecnológico (como medio), el estudiante y el rol del docente. Es importante anotar que los artefactos como GeoGebra y el deslizador, no generan conocimientos matemáticos por sí mismos, por lo que es necesario estar en relación con una situación didáctica que sea guiada por el docente. Así mismo es el referente para el diseño de secuencia de situaciones didácticas. Por lo cual se describen a continuación algunos de sus principios teóricos:

- **Aprendizaje por adaptación**

La interacción del estudiante y el medio permite determinar un aprendizaje por adaptación según, Acosta, Monroy y Rueda (2010) lo define como: “el aprendizaje que se produce por interacción entre un sujeto y un medio” (p.174). Según Acosta (2010) “el medio es aquello con lo que interactúa el estudiante, sobre el cual puede realizar acciones y recibir retroacciones que le permitan la validación” (p.135); estas retroacciones corresponden a las reacciones o respuestas del medio a las acciones del sujeto, del mismo modo Acosta, Monroy y Rueda (2010) lo mencionan como:

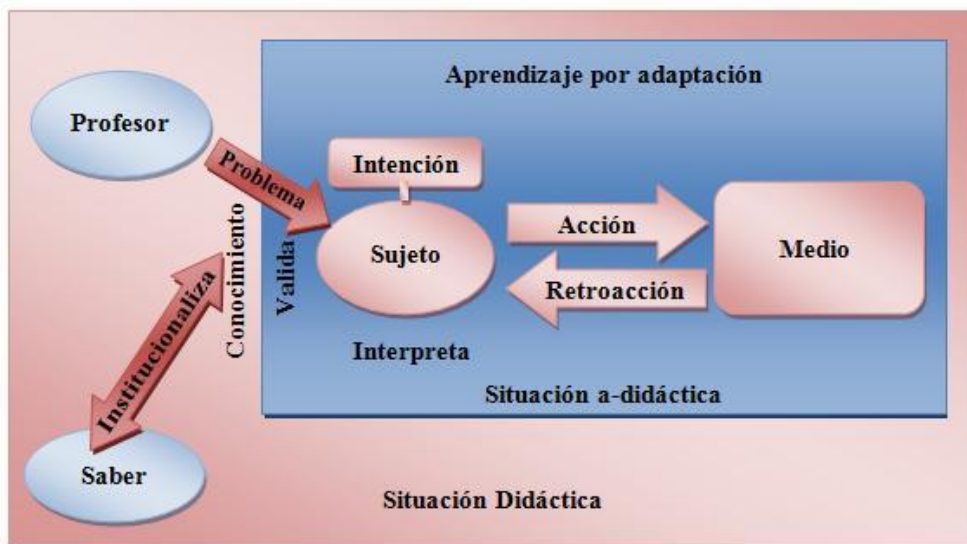
El sujeto tiene una intención (una necesidad, un objetivo) y para alcanzarla realiza una acción sobre el medio. El medio reacciona a esa acción (lo cual

recibe el nombre de retroacción). El sujeto interpreta esta retroacción para poder validar o invalidar su acción; es decir, para decidir si alcanzó o no lo que se proponía. Si la acción que realizó el sujeto no alcanza lo que él quería, entonces la validación es negativa, y el sujeto modifica su acción para poder alcanzar lo que se propone. Si la acción sí alcanzó lo que el sujeto quería, la validación es positiva y el sujeto refuerza dicha acción. (P. 175).

- **Situación didáctica y a-didáctica**

En la TSD se presentan dos situaciones: una didáctica y otra a-didáctica; Acosta (2010) lo menciona como:

La TSD denomina situación a-didáctica a una actividad que produce un aprendizaje por adaptación, y la incluye dentro de una situación didáctica, que es una situación de clase. La TSD caracteriza la situación didáctica como una situación en la que intervienen tres elementos: un saber (a enseñar), un profesor (que desea enseñar ese saber) y un estudiante (o más) (que desean aprender ese saber). (p. 133).



**Imagen 3. Situación didáctica y a-didáctica**

Fuente: Acosta (2010)



En la situación a-didáctica se distinguen tres tipos de situaciones: situación de acción, situación de formulación y situación de validación. En la situación de acción el sujeto actúa sobre el medio en búsqueda de una solución, de modo que el estudiante realiza acciones que pueden desembocar en la creación de un saber hacer, por lo que el conocimiento está implícito en las acciones de los sujetos. En la situación de formulación los sujetos explicitan de forma verbal su pensamiento y sus estrategias. Además el sujeto podría justificar su posición. En la situación de validación los sujetos utilizan el conocimiento para declarar de forma argumentativa a favor o en contra de una afirmación.

El docente debe diseñar un problema que será planteado al estudiante y adaptado a un medio, con la intención de un aprendizaje, además de generar retroacciones, para que el estudiante interprete y valide sus acciones. Además de esto, Acosta (2010) menciona que el docente “‘institucionaliza el saber’, es decir explicita las relaciones entre el conocimiento personal de los estudiantes, contextualizado dentro de la situación a-didáctica, y el saber ‘oficial’ ” (p. 135).

De la misma manera, Margolinas (2009) aporta elementos a la TSD sobre la gestión del docente, que permite la organización de la implementación de la secuencia didáctica, es decir, explica la consigna de la situación y la organización del trabajo.

Indicando primeramente que las palabras “situación”, “fase” y “proceso” son palabras que no se deben definir en sí mismas, por ende;

- Situación: caracteriza un nivel de descripción en términos de determinación o limitación.
- Fase: describe un momento del desarrollo de la interacción en clase.
- Proceso: describe un proyecto de los actores.

La utilización de la palabra “fase” no es nueva en didáctica de las matemáticas, pues los investigadores hablan con frecuencia de fases cuando quieren describir los momentos observados, explicables, pero no necesariamente previstos, de modo que:

Llamaremos *fase de validación* al espacio de dialogo, entre los estudiantes cuando justifican o defienden sus posibles soluciones. Para Brousseau (1978a; citado por Margolinas, 2009) la fase de validación es:

Discusiones espontáneas sobre la validez de las estrategias. Aparecen aquí como medios de acción. Los alumnos las utilizan como un medio para convencer a su compañero de que realice la acción planeada. Los medios de lograr la convicción pueden ser muy variados (autoridad, retórica, pragmática, validez, lógica). (p. 93).

Llamaremos *fase de formulación* a las situaciones en la que el medio se organiza para que el estudiante explicita de forma verbal su pensamiento y sus estrategias. Para Brousseau (1978a; citado por Margolinas, 2009) la fase de formulación es:

Un momento en el que se formula efectivamente los conocimientos en juego en la interacción didáctica. *La construcción de situaciones de formulación busca que los intercambios esenciales en el juego correspondiente puedan analizarse como fases de formulación.* (p.96)

Se pretende que por medio de las situaciones el estudiante llegue al estudio y propiedades de la función por tramos. Por lo cual, no es indispensable que los estudiantes tengan conocimientos de uso del programa GeoGebra, puesto que las situaciones se realizarán por medio del deslizador, y la visualización permitirá identificar algunas características de las variables representadas.

### 2.3.2 Referente Curricular

En la educación matemática, el estudio de la función es de gran interés por la problemática del aprendizaje en los estudiantes, de las aplicaciones y usos en la vida cotidiana, además de estudiar la importancia del pensamiento variacional como la variación y el cambio presentado en un contexto cotidiano.

Con relación al estudio de función desde lo curricular, se puede decir que, el pensamiento variacional en la educación básica secundaria es importante, ya que involucra estudios en analizar gráficas y expresiones algebraicas. Por ejemplo, en el periódico se presentan contextos de dependencia que son tomados de la vida cotidiana y que relacionan variables de una misma cantidad con respecto al tiempo. En relación a lo anterior se tiene en cuenta: “El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica” (MEN, 1998, p.50).

El MEN (2006) describe el pensamiento variacional en los siguientes términos:

Este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los estudios y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la

variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas. (p. 66).

Por consiguiente en el pensamiento variacional, existen diferentes tipos de registros de representación como:

Los diferentes sistemas de representación asociados a la variación se encuentran los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas, la instruccional (programación), la mecánica (molinos), las fórmulas y las expresiones analíticas. (MEN, 1998, p.50).

Para el desarrollo de este trabajo se rescatan algunos de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), propuestos para noveno grado, en relación al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, así:

| GRADO                      | PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS   |
|----------------------------|---|
| <b>Octavo a<br/>Noveno</b> | Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas de la función por tramos.   |
|                            | Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada.   |
|                            | Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.  |
|                            | Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.  |
|                            | Idéntico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan. |
|                            | Idéntico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de                                 |

|  |   |
|--|---|
|  | variación.  |
|  | Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas. |

**Tabla 5. Estándares de 8° y 9° del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos**

Fuente: MEN (2006)

El desarrollo del pensamiento variacional, se realiza a partir de situaciones diseñadas desde contextos de variación y cambio, como la identificación de cambios en el mundo circundante, tales como las variables que intervienen, lo que cambia y lo que permanece constante, el campo de variación de cada variable y las posibles relaciones entre ellas.

Por lo cual, la secuencia didáctica presentada en este trabajo, permite el desarrollo del pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, en este caso el estudio de la función permite la interpretación de situaciones cotidianas, aludiendo a las cantidades que varían o permanecen constantes en el tiempo, las relaciones presentes en la situación, pueden representarse mediante expresiones verbales, expresiones algebraicas, gráficas cartesianas y tabulares.

## CAPÍTULO III

### MARCO METODOLÓGICO

En el desarrollo de este trabajo se utilizaron algunos elementos de microingeniería, la cual Artigue (1995) la caracteriza por “un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (p. 36), para esta investigación se utilizarán elementos de una metodología a nivel micro, “ya que permiten tener en cuenta de manera local la complejidad de los fenómenos de clase”. (p. 37). Por lo cual se estudiará un determinado tema como lo es el estudio de la función por tramos, a partir de contextos de un referente público como el periódico, al hacer uso del software GeoGebra.

En el proceso experimental de la micro ingeniera didáctica se distinguen cuatro fases:

#### ❖ **Primera fase: Análisis preliminares.**

En esta fase se realiza la concepción de función en un ambiente de aprendizaje tecnológico en un determinado contexto, por ende se evaluarán los siguientes puntos:

- **Dimensión Cognitiva:** se toma en cuenta lo relacionado con las representaciones semióticas de Duval (1999). Esta dimensión da pautas para el análisis de los resultados de aplicación de la secuencia didáctica en relación al aprendizaje de los estudiantes cuando interpretan las gráficas de GeoGebra de un contexto tomado del periódico.

- **Dimensión Matemática<sup>8</sup>:** se centrará en las características del conocimiento que se pondrá en juego con la secuencia de situaciones didácticas diseñada en GeoGebra teniendo en cuenta el periódico, en las cuales se pretenden considerar algunos elementos como; puntos de intersección, dominio, rango, dependencia entre variables, entre otros.
- **Dimensión Didáctica:** en esta dimensión se tendrá en cuenta la teoría de situaciones didácticas y los referentes curriculares de Colombia.

Las dimensiones anteriormente descritas se desarrollaron en el capítulo II “Marco teórico”.

#### ❖ **Segunda fase: Concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas.**

En esta fase se presentan los aspectos relacionados con la concepción y diseño de la secuencia didáctica y su respectivo análisis *a priori*, donde se incluye la descripción y predicción de las situaciones retomando, los registros de representación semiótica y los esquemas de uso mencionados en los análisis preliminares. Esta segunda fase se desarrolla en el ítem 3.1 del presente capítulo.

#### ❖ **Tercera fase: Experimentación.**

Esta fase hace referencia a la implementación de la secuencia didáctica ha los estudiantes, en ella se realizan las observaciones y anotaciones que se obtuvieron de las secuencias de situaciones didácticas.

---

<sup>8</sup> Artigue propone una dimensión epistemológica, sin embargo en este trabajo se realizará una revisión de los referentes matemáticos de la función.

#### ❖ Cuarta fase: Análisis *a posteriori* y validación.

Esta última fase, será ejecutada después de la experimentación, debido a que se realiza un análisis *a posteriori*, en el cual los datos recogidos, durante la experimentación. La validación de la hipótesis que conciernan la investigación, se basa en la confrontación de los análisis *a priori* y *a posteriori*.

La tercera y cuarta fase serán desarrolladas en el capítulo IV.

A continuación se presenta un cuadro general de las cuatro fases:

| FASE   | SITUACIONES   |
|--|---|
| Análisis preliminares  | 1. Dimensión matemática.<br>2. Dimensión cognitiva<br>3. Dimensión didáctica.                     |
| Concepción y análisis <i>a priori</i> de las situaciones didáctica | 1. Diseñar la secuencia didáctica.<br>2. Realizar el análisis <i>a priori</i> .                   |
| Experimentación  | 1. Realizar la experimentación de la secuencia didáctica en colegio Bennett.                      |
| Análisis <i>a posteriori</i> y validación.                         | 1. Analizar los datos de la experimentación.<br>Al compararlos con los análisis <i>a priori</i> . |

Tabla 6. Fases de la Ingeniería Didáctica

### 3.1 CONCEPCIÓN DE LA SECUENCIA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS

En este apartado, inicialmente se retoman algunas consideraciones sobre el procedimiento de la selección de gráficas del periódico; interesa igualmente presentar las características del programa GeoGebra y limitaciones que tiene este software para el diseño de la secuencia. Por último, se tiene en cuenta algunos elementos importantes al integrar TIC tales como describir qué se tiene a



disposición, los tiempos establecidos y la gestión del docente al presentar cada situación.

### **3.1.1 Búsqueda de gráficos en el periódico**

Para usar el periódico como recurso en el diseño de la secuencia didáctica, se realizó una búsqueda intensiva de gráficos en las cuales se presentaran magnitudes que se pudieran tratar como continuas y además enfocadas al estudio de la función lineal, como propuesta de tipo experimental en la que se pudiera estudiar los siguientes elementos: dominio, rango, dependencia entre variables, entre otros.

En la búsqueda inicial, se rastrearon gráficos que tuvieran como variable el tiempo, puesto que según Fernández y Rico (1999) esto garantizaba que las gráficas fueran funciones, sin embargo en esta búsqueda, las gráficas que se encontraron se relacionaban con el tiempo pero de tipo estadístico, tales como, diagramas de barras, sagital, circular entre otras, dichos gráficos mostraban por ejemplo, la tasa de crecimiento del desempleo, el aumento de inflación de la gasolina.

Por lo anterior, se redireccionó la búsqueda de tipo gráfico a una noticia en que la información fuera presentada en lenguaje natural, con el fin de transformar el mismo, en una representación gráfica en GeoGebra y diseñar la secuencia didáctica.

En dicha búsqueda, se encontró una colección especial por parte del periódico “*Q’hubo*” de contextos matemáticos, llamada “*Aprendiendo Matemáticas*”, la cual se indaga y se encuentra con una situación propuesta titulada “*El precio del taxímetro*”, esta presenta tres momentos que son de interés para el diseño de la secuencia de situaciones didácticas; primero se hace una reflexión sobre el funcionamiento del taxímetros en diferentes países, segundo se

toma la representación tabular, construida a partir de un patrón de medida, hasta llegar a una generalidad, representada en una expresión algebraica acorde a la situación antes descrita. Por último, presenta la utilidad de un gráfico para representar la información, además se muestran variaciones de la situación a partir de un gráfico comparativo de tres taxímetros con preguntas que guían la interpretación de dichas gráficas.

Se puede observar que se realiza un acercamiento de manera tradicional al pasar del registro en lengua natural, al tabular y finalmente al gráfico. Sin embargo la situación anterior se tomó como referencia para realizar una búsqueda a nivel local, es decir, tomar como base las noticias presentadas en los periódicos sobre el tema de los taxis en la ciudad de Cali y poder iniciar el diseño de la secuencia de situaciones didácticas sobre el estudio de la función. Teniendo en cuenta los objetivos propuestos en este trabajo, el interés primordial es privilegiar diversos contextos específicamente en la vida cotidiana, como lo es, la tarifa de los taxis de la ciudad de Santiago de Cali.

A continuación se presenta la noticia<sup>9</sup> seleccionada del día 03 de marzo del 2012<sup>10</sup>, noticia que permite contextualizar la situación que se tomó como referencia para el diseño de la secuencia didáctica.

---

<sup>9</sup> Noticia tomada de la página web del periódico *El Tiempo* de Santiago de Cali <http://www.eltiempo.com/archivo/documento/CMS-11267963>

<sup>10</sup> No se consideran las tarifas de los taxis de la Ciudad de Cali del año 2013, porque la publicación fue después de la búsqueda, además en la tabla de tarifas no existía recurrencia.

## **Aumenta 100 pesos la carrera mínima de taxis en Cali**

La Alcaldía Municipal dispuso que ahora costará 4.000 pesos.

La Secretaría de Tránsito y Transporte Municipal anunció que a partir del viernes rige el Decreto 0151 de marzo de 2012, por medio del cual se establece las nuevas tarifas para el servicio público individual de pasajeros tipo taxis.

### **Los valores son:**

Recorrido de ochenta (80) metros - Valor \$80

Valor por Unidad - Valor \$84

Banderazo - Unidades 14 - Valor \$1.400

Carrera Mínima - Unidades 47 - 48 - Valor \$4.000

Tiempo de espera de 50 segundos - Unidades 1 - Valor \$84

Recargo por servicio puerta a puerta - Valor \$1.000

Recargo nocturno, dominicales y festivos - Valor \$1.000

El recargo nocturno se aplicará desde las 8:00 de la noche hasta las 5:00 de la mañana del día siguiente.

Según esta reglamentación, los taxis deben portar elementos como el taxímetro, la tabla de equivalencias de unidades y valores, así como la tarjeta de control en un sitio visible para el usuario.

Las tarifas no incluyen el servicio al aeropuerto pues estas deben ser determinadas por el Municipio de Palmira y empiezan a regir desde el puente sobre el río Cauca en el denominado 'Paso del Comercio', para lo cual se le adicionará al valor que marque el taxímetro final dicha tarifa.

Consulte el Decreto 0151 de marzo de 2012

REDACCIÓN CALI

Publicación eltiempo.com

Sección-Nación

Fecha de publicación: 3 de marzo de 2012

Autor: REDACCIÓN CALI

Con la información suministrada en la noticia anterior se realizó el diseño de la secuencia, la cual se presenta y se analiza en el apartado 3.2.2.

### **3.1.2 Construcción de gráficas con el software GeoGebra**

Por tratarse de un trabajo en la línea de TICEM, se desea integrar diferentes elementos tecnológicos tales como: un software didáctico como GeoGebra, una página web, computadores de mesa, tablero acrílico y hojas de trabajo impresas, para el estudio de la función.

Se optó por crear un ambiente de aprendizaje en el cual los estudiantes puedan manipular, más que crear la representación gráfica de la información presentada en la noticia del periódico acerca de las tarifas de los taxistas, puesto que para la creación de la gráfica los estudiantes necesitarían la construcción de esquemas de uso y de acción instrumentada más elaborados, de esta manera se tomó la decisión de presentar la gráfica con la imagen insertada de un taxi para su análisis.

Para la creación de las gráficas en GeoGebra se presentó una limitación grande en cuanto al manejo de las escalas de los ejes de cartesianos, al considerar las variables *metro vs precio*, pues sus valores no permitían visualizar las diferentes coordenadas, las intersecciones con los ejes y su inclinación, por esta restricción del software se optó por realizar las gráficas con las variables *unidades vs precio*, de tal manera que se pudiera visualizar mejor la gráfica.

Respecto al tipo de función a estudiar, también se realizaron algunos ajustes, pues se pensó en el estudio de funciones lineales y afines en el contexto de las tarifas de los taxis, la tabla de valores tiene intervalos afines y constante por tramos, en efecto se hizo un análisis sobre la tabla de tarifas que manejan los taxistas, en lápiz y papel para hallar la expresión algebraica, puesto que para obtener la gráfica en GeoGebra es necesario hallar esta expresión.

De modo que, se crean dos gráficas para que el estudiante decida cuál de las dos representa mejor la información, por medio de acciones que retroalimente en el desarrollo de la secuencia.

La primera gráfica (Taxi A) se encontró su representación algebraica;  $f(x) = 80x + 280$  con dominio  $14 \leq x \leq 150$ , cada unidad aumenta 80, como lo dice la noticia del periódico, tratando de presentar una generalización de esta información, pero al ver que el punto de partida de 14 unidades equivale a \$1.400 pesos el cual es llamado banderazo y al evaluar esta unidad en la expresión algebraica no se obtuvo este valor. De manera que Ingresar en la barra de entrada esta expresión algebraica al software GeoGebra se genera la gráfica.

Por otra parte, se diseña una función por tramos, resaltando la importancia de abordar este tipo de funciones que son poco estudiadas en la educación básica.

A continuación, se describe el procedimiento realizado para la creación de la gráfica (Taxi B) que representa la gráfica de la función por tramos según la información del periódico, a partir de la tabla de valores por unidad en GeoGebra.

La construcción de una función por tramos en GeoGebra es realmente tan sencilla como graficar una función cualquiera, para esto se utiliza la barra de entrada y se hace necesario usar el comando condicional:

Si[<Condición>,<Entonces>]. Luego, <Condición> se escribe el dominio compuesto de intervalos y <Entonces> la representación algebraica de la función.

La construcción de la función definida por tramos, según el comando condicional Si[] de GeoGebra, se muestra en la tabla 7.

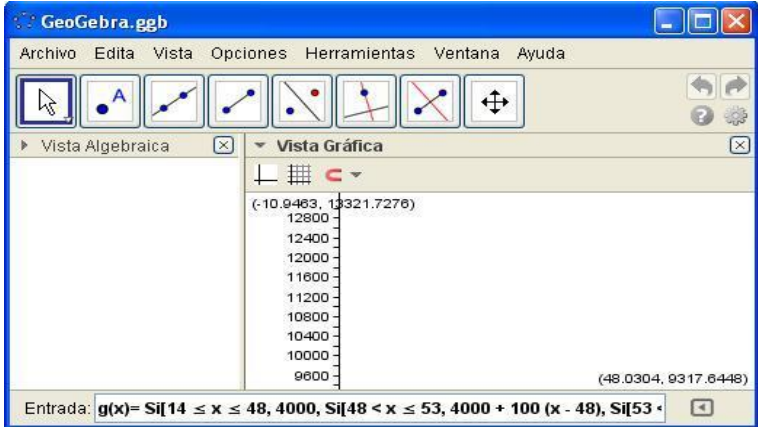
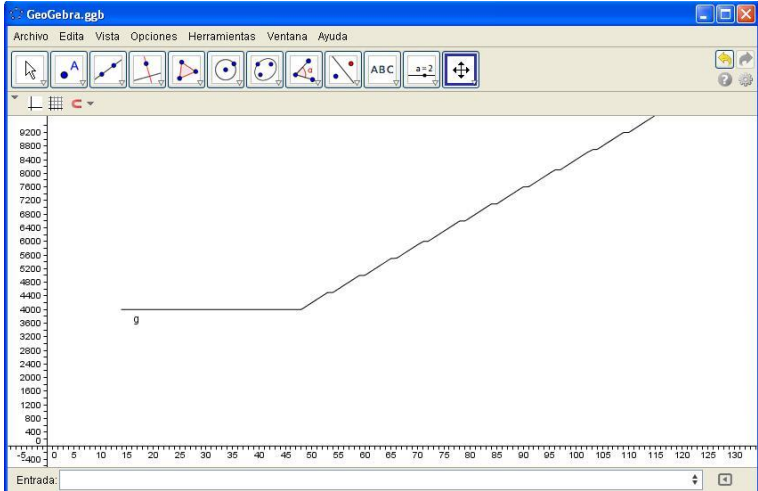
| Descripción  | Figura   |
|--|--|
| <p>Se Escribe en la barra de entrada “Si” y automáticamente aparecerá el comando Si[] y se prosigue a completar las reglas de correspondencia de los tramos de la función <math>g(x)</math>.</p> |  <p>Función <math>g</math>: <math>Si[14 \leq x \leq 48, 4000, Si[48 &lt; x \leq 53, 4000 + 100(x - 48), Si[53 &lt; x \leq 54, 4500 + 100(x - 48), Si[54 &lt; x \leq 59, 4500 + 100(x - 54),</math></p> |
| <p>Después de escribir el comando Si[] y modificar el dominio con su función, se presiona la tecla “Enter” del teclado de la computadora y se obtiene la representación gráfica.</p>             |  $g(x) = \begin{cases} 4000 & Si, 14 \leq x \leq 48 \\ 100(x - 48) + 4000 & Si, 48 < x \leq 53 \\ 4500 & Si, 53 < x \leq 54 \\ 100(x - 54) + 4500 & Si, 54 < x \leq 59 \end{cases}$                   |

Tabla 7. Gráfica de una función por tramos con el comando Si[ ]

### 3.1.3 La continuidad de la función por tramos

En este apartado, se describen las propiedades que se cumplen para que las unidades y el precio sean continuos en su representación gráfica, por ende se toma, Molinás, P., & Martínez, J. (s.f.a).

- Continuidad de una función en un punto

Decimos que una función es continua en un punto  $x_0$  cuando en dicho punto podemos asegurar que:

1. La función está definida en  $x_0$ , es decir,  $f(x_0)$  existe.
2. Los límites laterales  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  existen (se pueden calcular y son finitos) y son iguales, lo que equivale a afirmar que existe el límite de la función en dicho punto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Coincide el límite de función en el punto con su valor en dicho punto, es decir que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

En nuestro contexto de la moneda colombiana y las unidades que marca el taxímetro, se podría pensar que se presenta un caso de discontinuidad en el cobro de una carrera, es decir que el precio aumenta de 100 pesos por cada unidad marcada, pero en realidad se aproxima el valor a pagar al múltiplo más cercano a 100, por ejemplo, para un cobro de \$4.020 pesos, se aproxima \$4.000 pesos. Un ejemplo de esto, es el siguiente:

Verificar la continuidad de  $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 4000 & \text{Si, } 14 \leq x \leq 48 \\ 100(x - 48) + 4000 & \text{Si, } 48 < x \leq 53 \end{cases}$$

El punto a estudiar es  $x = 48$

i.  $f(48) = 4000$ , existe.

ii.  $\lim_{x \rightarrow 48^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 48^-} 4000 = 4000$

$$\lim_{x \rightarrow 48^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 48^+} 100(x - 48) + 4000 = 4000, \text{ existen}$$

iii.  $\lim_{x \rightarrow 48} f(x) = 4000$

Luego  $f(x)$  es continua en 48 y por tanto en todo su dominio.

Se puede afirmar que en cada intervalo de la función por tramos es continuo para cualquier  $x_i$ . Puesto que el taxímetro varía según la distancia recorrida en metros, aunque marque las unidades de manera discreta. Se toma así un subdominio del conjunto de los números reales, siendo este los números naturales a partir del banderazo. Por último, bastaría que los límites laterales de los extremos coincidan con las imágenes de dichos extremos tomados como se mostró en el ejemplo presentado anteriormente.

### 3.1.4 Componente de la Secuencia Didáctica: La adaptación del medio.



Para el diseño de las preguntas de la secuencia didáctica se toma un personaje que tiene un estilo propio en la televisión colombiana llamado “*Tal Cual*”<sup>11</sup> o también conocido como el boletín del consumidor, el cual indaga con preguntas concretas sobre la importancia de la carrera mínima y las unidades que intervienen en ella, las preguntas de “*Tal Cual*” se presenta por medio de un ambiente dinámico que guían la exploración de los estudiantes en los gráficos de GeoGebra, de tal manera que la retroalimentación que brinda el medio sea cada vez que utilice el cursor para mover el deslizador, para darle fuerza a este

---

<sup>11</sup> Personaje creado por el humorista gráfico Francisco Hernández, para responder las preguntas o inquietudes de los consumidores de una forma clara y sencilla, este personaje es avalado por la Confederación Colombiana de Consumidores.



personaje se ha considerado un video en el cual él cuestiona cómo se genera el cobro de la tarifa de una carrera en la Ciudad de Bogotá<sup>12</sup>.

Por otro lado, al programa GeoGebra se le ha restringido comandos como la barra de entrada y la vista algebraica, puesto que al final de la secuencia didáctica el estudiante deberá de llegar a la expresión algebraica de cada tramo de la función, además de la barra de herramientas excepto el botón (elige y mueve objetos ) y desplazador (desplaza vista gráfica ) , son herramientas básicas para la exploración de la situación didáctica. Con el deslizador se le da mayor énfasis al movimiento que produce la figura del taxi al desplazarse sobre las gráficas mostrando la variación de las coordenadas cartesianas.

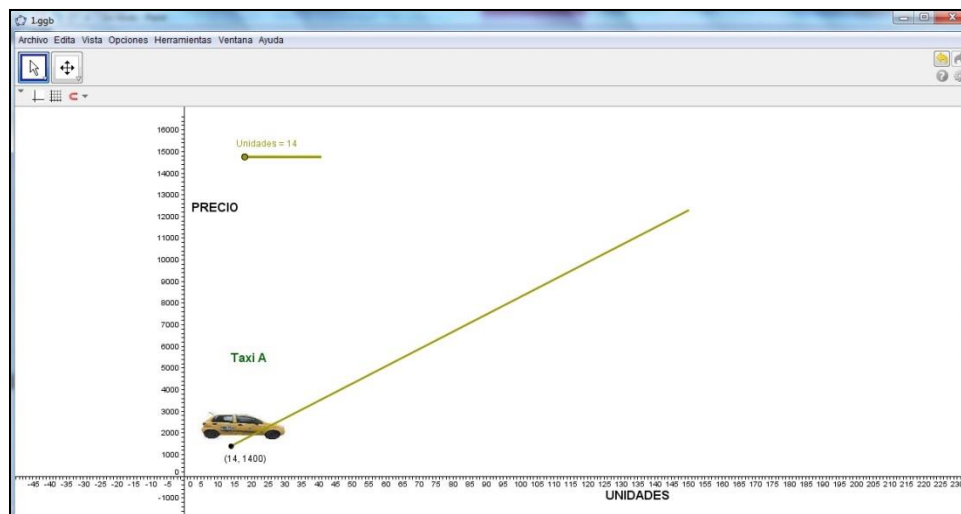
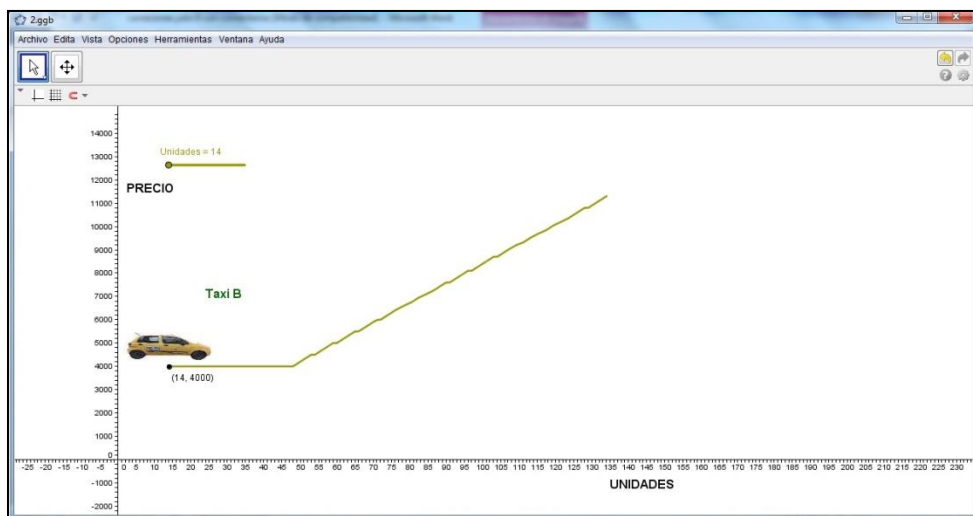


Imagen 4. Taxi A

<sup>12</sup> Video tomado de <https://www.youtube.com/watch?v=iy3knAIGYo0>



**Imagen 5. Taxi B**

Los elementos tecnológicos que se tendrán en cuenta para este diseño ya se han mencionado, sin embargo es necesario especificar que para las situaciones se utilizara computadores de mesa en los cuales se instaló el programa (GeoGebra 4.2.6) e internet para abrir los enlaces, además se les entrego en físico las preguntas de la situación correspondiente.

Para el desarrollo de la implementación se plantea dos opciones; en la primera opción se crea un blog<sup>13</sup> llamado “GeoGebra y el Periódico” con tres pestañas que contienen cada una de las situaciones para aplicar la secuencia didáctica, denominadas; Situación 1. “El periódico y los taxis”, Situación 2. “La carrera de un taxi” y Situación 3. “Comparando precios”. Las situaciones 1 y 3 presentan archivos de HTML en GeoGebra. De modo que el administrador del blog puede restringir las situaciones que no se vayan a presentar en determinada sesión, según el orden y los tiempos para el desarrollo de la secuencia.

La otra opción para el desarrollo de la implementación es crear una carpeta con las gráficas en GeoGebra de la situación correspondiente a cada sesión, además los link descargados por si hay alguna dificultad con la conexión a internet

<sup>13</sup> El blog se encuentra en el link <http://GeoGebrayperiodico.blogspot.com>

en cada uno de los computadores. Para abrir la carpeta el docente debe guiarlos describiendo la ruta, por ejemplo: ingresar al disco local (D) a la carpeta *publik* y buscar la carpeta con el nombre de “*Univalle*”, al abrir esta carpeta se desplegará un archivo llamado (Gráfica 1. Taxi A) y (Gráfica 2. Taxi B), asimismo el link descargado de la información presentada en el periódico para que desarrollen la Situación 1. “El periódico y los taxis”.

De la misma forma, se les adjunta los archivos a la carpeta “*Univalle*” de acuerdo a la situación que se vaya a plantear por ejemplo para la Situación 2. “La carrera de un taxi” sólo se les pide abrir el link del periódico y resolver las preguntas que se les entregaron en físico, ya para la Situación 3 “Comparando precios” se adjunta un archivo de GeoGebra (Gráfica 2a. Taxi B) el cual les ayudará a resolver las preguntas de esta última situación.

Por otro lado, al inicio de cada situación el docente entregará a cada estudiante la hoja de trabajo con las preguntas de la situación respectiva, el docente leerá uno por uno los ítems y les pedirá que respondan en la hoja de trabajo teniendo en cuenta lo que observan en el periódico y las gráficas establecidas en GeoGebra. En la segunda situación no se tiene presente ninguna gráfica solo la información del periódico. Al Finalizar cada situación el docente recogerá la hoja de trabajo resuelta por los estudiantes.

A partir del diseño de la secuencias de situaciones didácticas que se presentan mediante el uso de GeoGebra, se pretende indagar sobre las posibles dificultades y logros de los estudiantes al momento de enfrentarse a las representaciones gráficas, sus propiedades y estudios que se aluden al tema de función por tramos, como por ejemplo lo relacionado con el dominio, rango, crecimiento, puntos de intersección, relaciones entre las variables, entre otros aspectos.

### 3.2 ANÁLISIS A *PRIORI* DE LAS SITUACIONES

Para el análisis *a priori*, las unidades de análisis se centran en las tres dimensiones que componen los análisis preliminares, como se presenta en la siguiente tabla:

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| <b>Dimensión Cognitiva</b>  | <ol style="list-style-type: none"><li>1. Sistemas de registro de representación semiótica gráfico, tabular, algebraico en los cuales se identifica las siguientes transformaciones: conversión, tratamiento y formación.</li><li>2. Mediación y Génesis instrumental:<ul style="list-style-type: none"><li>• Instrumentación: los esquemas de acción instrumentada y configuración del medio.</li><li>• Instrumentalización: esquemas de uso.</li></ul></li></ol> |
| <b>Dimensión Matemática</b> | <ul style="list-style-type: none"><li>• Identificación de la pendiente por tramos como variación de cambio.</li><li>• Identificación de dependencia entre variables.</li><li>• Tramos constantes y afines.</li><li>• Interpretación de gráficas como lectura de puntos.</li></ul>   |
| <b>Dimensión Didáctica</b>  | <ol style="list-style-type: none"><li>1. Teoría de Situaciones Didácticas:<ul style="list-style-type: none"><li>• Fases de acción, formulación, e institucionalización.</li><li>• Retroacciones del medio.</li></ul></li><li>2. Estándares del MEN:<ul style="list-style-type: none"><li>• Identificar comportamientos de gráficas.</li><li>• Variación entre la dependencia entre variables.</li></ul></li></ol>   |

|  |   |
|--|---|
|  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificación de la pendiente en situaciones de variación.</li> <li>• Describir situaciones de variación representados en gráficos y tablas.</li> </ul> |
|--|---|

**Tabla 8. Rejilla de análisis de las situaciones**

El análisis *a priori* se sustenta en la información del periódico con las gráficas ejecutables en GeoGebra por medio del deslizador, generando posibles retroalimentaciones que el medio pueda ofrecer al momento que el estudiante realice acciones a este para dar solución a las preguntas.

A continuación se describe las situaciones con los tiempos considerados por sesiones y los propósitos de cada situación, al identificar las características de la función (ver Tabla 9).


| SITUACIÓN                       | PROPÓSITOS   | DUARACIÓN  |
|---------------------------------|--|------------|
| <b>EL PERIÓDICO Y LOS TAXIS</b> | Interpretación de gráficas.  | 45 minutos |
| <b>LA CARRERA DE UN TAXI</b>    | Reconocer las variables que intervienen en la situación y determinar relaciones de dependencia.                    | 45 minutos |
| <b>COMPARANDO PRECIOS</b>       | Validar la expresión algebraica teniendo presente el contexto del periódico y la acción instrumentada en GeoGebra. | 60 minutos |

**Tabla 9. Estructura de la secuencia didáctica**


Al aplicar la secuencia didáctica se busca que los estudiantes se aproximen al estudio de la función por tramos, desde el reconocimiento de las variables, su dependencia y la transformación de los diferentes registros de representación, a partir de lo presentado en la noticia del periódico.

A continuación se presenta la primera situación y su análisis:

### 3.2.1 Situación 1. “El periódico y los taxis”




**SITUACION 1**  
**EL PERIÓDICO Y LOS TAXIS**



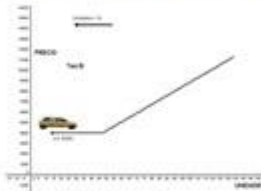
FECHA: \_\_\_\_\_ GRADO: \_\_\_\_\_

NOMBRE: \_\_\_\_\_

1. Lee detenidamente la información del periódico.
2. Con base a la información que leíste, analiza las gráficas y determina:



**Gráfica 1. Taxi A**



**Gráfica 2. Taxi B**

- Para ello responde:
  - a. “*Tal Cual*” aborda un taxi de su casa al trabajo. ¿Cuál es el valor que deberá pagar, si el taxímetro marca menos de 48 unidades?
 

Taxi A:

Taxi B:
  - b. ¿Es posible que a “*Tal Cual*” le cobren el mismo precio por una carrera de 24 unidades a una de 40 unidades?
 

Taxi A:

Taxi B:
  - c. Si el taxista le cobró a “*Tal Cual*” por la carrera \$6.000 pesos ¿Cuántas unidades marco el taxímetro?
 

Taxi A:

Taxi B:
  - d. ¿Qué similitudes o diferencias observas con respecto al precio y las unidades entre el Taxi A y Taxi B?
- 3. “*Tal Cual*” desea saber ¿Cuál de las dos gráficas representa de manera más certera la información que suministra el periódico? Explica tu elección.




Imagen 6. Situación 1 “El periódico y los taxis”

## **Descripción de la situación 1**

La situación 1, inicia con la lectura de la noticia en la página web del periódico, luego con la exploración de las gráficas del taxi A y taxi B, en la cual es probable que surjan preguntas en cuanto al manejo del software, con respecto al movimiento del taxi en la gráfica, de modo que el estudiante debe construir *esquemas de uso* por medio del deslizador, éste se convierte en instrumento cuando es utilizado con la intención de responder a los ítems propuestos, para lo cual debe desarrollar esquemas de uso que le permitan la lectura de unidades específicas a partir del arrastre del deslizador.

Como el objetivo de la situación es comparar gráficas dinámicas presentadas en GeoGebra, el estudiante debe hacer lectura de puntos por intervalos, ubicar puntos en la gráfica en doble vía, es decir, dada la unidad hallar el precio y dado el precio establecer las unidades recorridas, de esta manera se estudia la correspondencia entre las variables y la variación con respecto a la tarifa del taxi, lo que lleva a identificar la variable independiente (unidades recorridas) y la dependiente (precio). Para ello se debe hacer uso del deslizador que se ha nombrado "*unidades*". Después del breve análisis sobre parejas ordenadas se indaga sobre las similitudes y diferencias que encontraron en las gráficas y por último que el estudiante determine cuál de ellas corresponde a la información presentada en el periódico.

Además, se prevé que el estudiante tenga facilidad de interpretar la información en lenguaje natural que aparece en el periódico y su representación gráfica en GeoGebra, para que pueda establecer relaciones entre ambas y así dar solución a la situación (ver Anexo 1,2 y 3).

## **Estándares propuestos por el MEN de la situación 1**

Los estándares que aborda la situación con respecto al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos, son:

- Analizar en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas. En este caso son funciones por tramos, constante y afín.
- Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. Se hace énfasis en el estudio de las propiedades de las gráficas de funciones por tramos, constante y afín.

Con los cuales permite que los estudiantes, al analizar la representación gráfica, observen comportamientos específicos en la función por tramos ya sean constantes y afines.

### **Análisis de las fases que intervienen en la situación 1**

El docente presenta la situación y resuelve inquietudes a los estudiantes, más no brinda solución a los ítems propuestos, guía al estudiante hacia la interpretación del periódico y su representación gráfica, describiendo el proceso en las siguientes fases:

**Fase de Acción:** Se presenta las gráficas realizadas en GeoGebra nombradas de la siguiente manera (Taxi A) y (Taxi B), para que el estudiante indague sobre el análisis de las gráficas con respecto al contexto de las tarifas de los taxis dado por el periódico, en las cuales al interactuar con el deslizador genera retroacciones para identificar elementos necesarios sobre la variación, al momento del estudiante validar su acción, puede ser positiva o negativa, si es positiva debe identificar; las parejas ordenadas, la posición del taxi en la gráfica, la variación y la dependencia entre las variables, para así dar solución a los ítems de la situación.

De la misma manera, si el estudiante responde de acuerdo a lo planteado en el análisis *a priori* de cada pregunta, entonces se dirá que las acciones que realizaron en las gráficas con el deslizador será una validación positiva.



Se hacen preguntas concretas sobre determinada carrera y las unidades correspondientes a dicho valor, este tipo de preguntas hará que el medio genere retroacciones al estudiante cada vez que éste utilice el deslizador indicando la pareja ordenada. Como por ejemplo, la pregunta del ítem (c) que cuestiona el precio determinado de \$6.000 pesos y que el estudiante responda por la cantidad de unidades que marca el taxímetro para ese cobro. Dicha exploración se realizará en las dos gráficas.

El estudiante debe identificar que para realizar movimientos en la gráfica que permitan pasar de una unidad a otra, es más preciso, dar clic sobre el deslizador y desplazarse con las teclas derecha e izquierda del computador, sin necesidad de utilizar el mouse.

Por consiguiente se analizan algunas relaciones con los registros de representación gráfica de la situación (ver Tabla 10), se convierte las representaciones de lengua natural de la noticia en otros registros de representación como lo es el gráfico, con los cuales se permite explicitar significaciones relativas a la información del periódico, es decir, la conversión entre registros permite pasar de manera directa del registro verbal a otros registros. Por ejemplo, al leer la noticia del periódico ésta menciona que la carrera mínima es de \$4.000 pesos para 47 y 48 unidades, siendo este un valor constante en la tarifa, la transformación se produce de manera interna al realizar la conversión de la representación tabular al gráfico, al relacionar los puntos correspondientes en el plano cartesiano, caso contrario se da al transformar una representación gráfica a la expresión algebraica.

| Representaciones  |                  |                     |       |       |  |  |
|---|------------------|---------------------|-------|-------|--|--|
| Registro Tabular  | Registro Gráfico | Registro algebraico |       |       |  |  |
| <table border="1"> <thead> <tr> <th>Unidades</th> <th>Valor (\$)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>47-48</td> <td>4.000</td> </tr> </tbody> </table> | Unidades         | Valor (\$)          | 47-48 | 4.000 |  | $g(x) = 4000 + 0(x - 14)$ $\text{dominio} = 14 \leq x \leq 48$ |
| Unidades  | Valor (\$)       |                     |       |       |  |  |
| 47-48   | 4.000            |                     |       |       |  |  |

**Tabla 10. Registros de representación de la situación 1**

**Fase de Formulación:** Se utiliza la información del periódico y las dos gráficas mencionadas anteriormente, para que los estudiantes solucionen de manera verbal y escrita la interpretación que lograron hacer y cómo llegaron a la solución. Se espera que los estudiantes respondan alrededor del siguiente análisis:

La gráfica del (Taxi A) inician en catorce unidades, en el cual las tarifas de cobro que presenta el taxímetro tienen un monto fijo de \$1.400 pesos para comenzar un recorrido, llamado “Banderazo”. Luego se cobra \$80 pesos por cada 80 metros recorridos llamado “unidad”. En la gráfica uno el precio de la tarifa crece a medida que el deslizador aumenta en cada unidad.

Por otro lado, el (Taxi B) inicia constante en \$4.000 pesos entre  $14 \leq x \leq 48$  unidades, donde  $x$  son las unidades y  $y$  el precio constante de la tarifa, dato que suministra la noticia del periódico, es decir, que el usuario que aborde un taxi deberá cancelar esa tarifa mínima siempre y cuando que el taxímetro marque menos o igual a 48 unidades, esto hace que, por ejemplo un viaje de 20 unidades no sea el doble de un viaje de 40 unidades en costo.

A partir de las 49 unidades por cada 80 metros recorridos la tarifa aumenta \$100 pesos, pero la noticia dice que el taxímetro cobra \$80 pesos por cada 80

metros recorridos, lo cual hace que cada cinco (unidades) halla un valor constante en dos (2) unidades, puesto que se cobra \$20 adicionales y cada 5 unidades se completan \$100 pesos. De esta manera se equilibra el cobro para que se mantenga el precio de la tarifa mencionada en el periódico.

**Fase de Institucionalización:** Los estudiantes expondrán los resultados obtenidos en el desarrollo de las preguntas y el docente retomará los aportes de los estudiantes en especial de la pregunta tres, se deja claro que la función no es creciente de 48 unidades en adelante y se puede considerar afín y constante por tramos, por ejemplo entre 14 a 48 unidades es constante por ser la tarifa mínima, debido a que en el periódico es explícito.

### Análisis de cada pregunta de la situación 1

La primera pregunta, se remite a los estudiantes a leer detenidamente la información presentada en el periódico. El estudiante deberá leer la información para analizar las gráficas y responder las preguntas en lápiz y papel.

En la pregunta dos se presentan dos gráficas (ver Imagen 7) que pueden llegar a representar la información del periódico, la primera el (Taxi A) se ha construido como una función afín y el (Taxi B) representa una función por tramos.

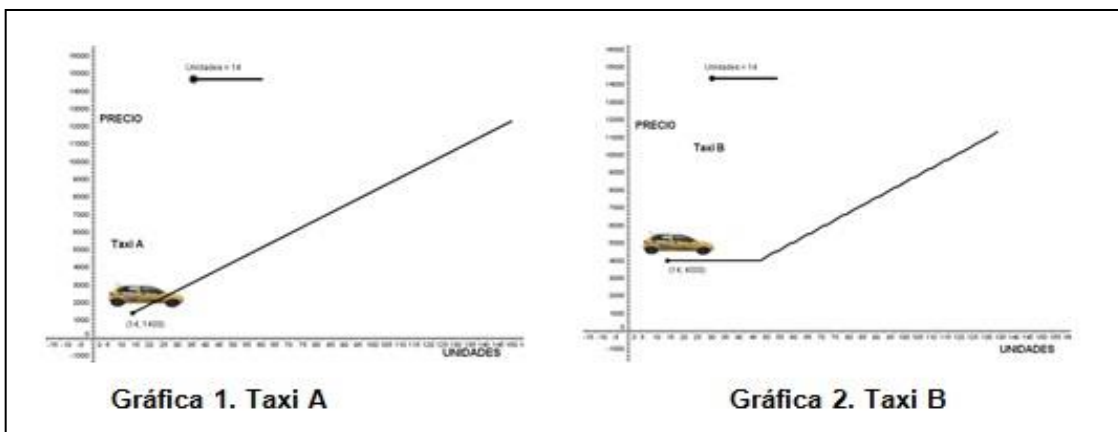


Imagen 7. Situación 1, Taxi A y Taxi B

Para solucionar la pregunta dos con sus respectivos ítems se espera una aproximación por parte de los estudiantes del siguiente análisis:

Los ítems (a) y (b) son preguntas que indagan sobre la lectura que realizaron en la pregunta número uno y las dos gráficas mencionadas anteriormente, se espera que los estudiantes analicen el valor en un intervalo que corresponde a la carrera mínima y en puntos específicos de la gráfica enfocado a unidades dadas, de igual modo se puede deducir que esta situación toma como base el análisis de gráficas y que los estudiantes representaran en lenguaje natural sus soluciones.

**a. “Tal Cual” aborda un taxi de su casa al trabajo. ¿Cuál es el valor que deberá pagar, si el taxímetro marca menos de 48 unidades?**

En la gráfica del Taxi A, se espera que escriban con certeza que el valor a pagar de una carrera menor de 48 unidades equivale a \$4000 pesos, pues son las unidades que corresponden al pago de la carrera mínima. Un posible error en el análisis de la lectura es que escriban que para el taxi A, el valor a pagar de 48 unidades sea de \$4.120 pesos, aunque la coordenada cartesiana es correcta, también se puede presentar que los estudiantes respondan que “*Tal Cual*” deberá pagar entre un rango de \$1.400 a \$4.120 pesos, esto indicaría que el estudiante se ha limitado a indicar parejas ordenadas.

Para la gráfica del Taxi B es más factible identificar que cualquier unidad menor o igual a 48 es equivalente a \$4000 pesos, pues es representado de manera constante en la gráfica, y esta sería una interpretación correcta de la noticia.

**b. ¿Es posible que a “Tal Cual” le cobren el mismo precio por una carrera de 24 unidades a una de 40 unidades?**

A diferencia del ítem anterior, ésta indaga por coordenadas específicas en el plano, para que el medio genere retroalimentaciones, cuando el estudiante se

ubique en las unidades requeridas al mover el deslizador que están dentro del dominio de la carrera mínima.

En la gráfica del (Taxi A) no es posible que cobren el mismo precio, pues la función es creciente en todo su dominio, por lo cual el valor de 24 unidades equivale a \$2.200 pesos y el de 40 unidades equivale a \$3.408 pesos, siendo estos de diferente valor, pero teniendo en cuenta la información del periódico es correcto cobrar el mismo precio, en este caso la carrera mínima equivalente a \$4.000 pesos, encontrando que esta gráfica es limitada al no incluir la variable constante de la carrera mínima en determinado dominio.

Para el (Taxi B) es factible identificar que cualquier unidad menor de 48 es equivalente a \$4.000 pesos, pues las unidades cuestionadas (24 y 40) se encuentran dentro del dominio  $14 \leq x \leq 48$  de la función constante.

**c. Si el taxista le cobró a “Tal Cual” por la carrera \$6.000 pesos ¿Cuántas unidades marcó el taxímetro?**

En el (Taxi A), las coordenadas que el valor dependiente \$6.000 pesos se encuentra aproximadamente entre las unidades 71 y 72 con un precio de \$5.960 y \$6.040 pesos respectivamente, con una diferencia de \$40 pesos.

Una posible dificultad al resolver esta pregunta, es que el estudiante no sepa escoger cuál de las dos aproximaciones escoger, puede que unos escojan la unidad 71, porque al moverse o deslizarse sobre la gráfica de la función afín se encontraran que el primer valor cercano a \$6.000 pesos es \$5960 y la siguiente unidad sobrepasa dicho valor, el estudiante podría tomar cualquiera de éstas opciones, sin embargo se puede privilegiar la primera opción.

Para el (Taxi B) el valor dependiente \$6.000 pesos es un valor constante entre 71 y 72 unidades, por lo cual ambas unidades son la solución de la pregunta.

Un posible error que se puede presentar es que los estudiantes al mover el taxi con el deslizador y se ubica en el valor de \$6.000 pesos, encontrará que la unidad 71 es equivalente al precio dado, y no observará el tramo constante con dominio  $71 \leq x \leq 72$  unidades, es decir, que no verificará que la unidad siguiente también es equivalente a los \$6.000 pesos.

**d. ¿Qué similitudes o diferencias observas con respecto al precio y las unidades entre el Taxi A y Taxi B?**

La pregunta 2 finaliza con este ítem, el cual cuestiona sobre las similitudes o diferencias que se observan con respecto al precio y las unidades en las dos gráficas. Para resolver este ítem es factible explicarlo como lo presentado en la tabla 11.

| <b>Similitudes</b>  |  |
|---|--|
| <b>Taxi A y Taxi B</b>  |  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ambas gráficas inician en 14 unidades.</li> <li>• Los recargos aplican para los dos (2) taxis.</li> <li>• El valor de la carrera mínima.</li> <li>• Algunas unidades se aproximan en sus precios.</li> </ul>                                       |  |
| <b>Diferencias</b>  |  |
| <b>Taxi A</b>   | <b>Taxi B</b>  |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• La gráfica es una función afín.</li> <li>• El precio va aumentando de \$80 pesos.</li> <li>• Por ser una función afín el precio varía.</li> <li>• comienza con la pareja ordenada (14,1.400).</li> <li>• el dominio de la tarifa mínima</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• la gráfica es una función por tramos constantes y afín.</li> <li>• El precio aumenta de \$100 pesos en los por tramos lineales.</li> <li>• Las unidades que están en por tramos constantes equivalen al mismo precio.</li> <li>• comienza con la pareja ordenada</li> </ul> |

|   |  |
|---|--|
| $14 \leq x \leq 48$ unidades aumenta de \$80 pesos por cada unidad. | (14,4.000).<br>• El dominio de la tarifa mínima $14 \leq x \leq 48$ es constante en \$4.000 pesos. |
|---|--|

**Tabla 11. Similitudes y diferencias entre el Taxi A y Taxi B**

**3. “Tal Cual” desea saber ¿Cuál de las dos gráficas representa de manera más certera la información que suministra el periódico? Explica tu elección.**

Para resolver esta pregunta se requiere que los estudiantes concluyan de acuerdo al análisis realizado en las preguntas anteriores, según la información de la lectura de las parejas ordenadas, la dependencia del precio con respecto a las unidades y la interpretación de la gráfica en general.

Para solucionar este interrogante con los elementos necesarios se concluye que la gráfica correcta para interpretar la información del periódico es el (Taxi B), porque se construyó de tal manera que cumpliera con los valores determinados en la noticia y los datos de la tabla de valores de los taxistas, tabla que hasta el momento los estudiantes no conocen.

A pesar de que no aumenta de \$80 en \$80 pesos explícitamente como lo dice el periódico. Se presenta que cada cinco unidades existe constante en dos unidades las cuales incluyen los \$20 pesos que sobran en cada unidad. Es decir de la unidad 49 hasta la 53 se cobra de \$100 pesos cada una pero en la unidad 53 y 54 tiene en mismo valor y aquí en estas dos unidades es donde se remunera lo que no se incluyó en las unidades anteriores, es decir recompensa lo que faltaba en las unidades de 49 hasta 53 haciendo una aproximación en base 100. Además la gráfica tiene en cuenta los estudios de banderazo, la carrera minina, el valor de un recorrido cada 80 metros y el valor de la unidad.

Posiblemente se puede presentar que los estudiantes seleccionen la gráfica del Taxi A como correcta, justificando el cobro de los \$80 pesos por cada 80 metros recorridos como lo dice el periódico y esta puede ser más factible para ellos, si sucede esto puede que los estudiantes no hayan validado de manera correcta la noticia del periódico.

Con la aplicación de esta situación se puede concluir que las unidades de análisis que se presenta, es el paso de la representación gráfica a lenguaje natural, del mismo modo las retroacciones que le brinda las gráficas al estudiante para dar una validación positiva o negativa, además las fases que se presentan en la aplicación, por ejemplo en la fase de acción se toman los esquemas de uso que desarrollaron los estudiantes para ubicar los puntos pedidos, y algunos de los estándares básicos presentados para la secuencia.



### 3.2.2 Situación 2. “La carrera de un taxi”



**SITUACIÓN 2**  
**LA CARRERA DE UN TAXI**



FECHA: \_\_\_\_\_ GRADO: \_\_\_\_\_

NOMBRE: \_\_\_\_\_

1. Teniendo en cuenta los datos que presenta el periódico y el video donde aparece “*Tal cual*”: Ayúdale a completar la siguiente tabla:

| Variables                                | Valor |
|--|-------|
| Recorrido de 80 metros                   |       |
| Banderazo                                |       |
| Carrera mínima                           |       |
| Tiempo de espera 50 segundos             |       |
| Recargo por servicio puerta a puerta     |       |
| Recargo nocturno, dominicales y festivos |       |

**Tabla 1.** Variables de la Carrera de un Taxi

De acuerdo a la tabla anterior “*Tal Cual*” desea determinar:

- ¿De qué variables depende la tarifa de un taxi, qué le dirías tú? Justifica tu respuesta.
- ¿El recargo nocturno, dominical y festivo interfiere en el valor de la tarifa mínima? Justifica.
- Si “*Tal cual*” el domingo recorrió 8 km en taxi para llegar al estudio de grabación del noticiero ¿Cuánto pagó por este recorrido? Muestra los cálculos requeridos para llegar a la respuesta.
- ¿Cuál(es) de ellas permanecen constantes (no varían) al realizar un recorrido en taxi?



#### Imagen 8. Situación 2 “La carrera de un taxi”

#### Descripción de la situación 2

En la situación 2 se presenta la noticia en la página web del periódico, además se muestra un video del “*boletín del consumidor*”, el cual contextualiza como se genera el cobro de una carrera y muestra las condiciones para la misma.

Con base en lo anterior, el estudiante completa la tabla (ver Tabla 12). Además de esto, la situación contiene 4 ítems, en los cuales se espera que el estudiante identifique las diferentes variables que intervienen en el cobro de la carrera de un taxi, partiendo del reconocimiento de variables y la variación entre ellas (ver Anexo 4 y 5).

### **Estándar propuesto por el MEN de la situación 2**

El estándar que se aborda en la situación con respecto al Pensamiento Variacional y sistemas algebraicos y analíticos, es:

- Identificar y utilizar diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación. La importancia de este apartado es la variación entre dependencia de variables.

Con este estándar se pretende que los estudiantes tomen decisiones al momento de reconocer la dependencia de las variables y el significado de los recargos al realizar un recorrido en taxi, además la conversión en el sistema métrico decimal de kilómetros a metros y su relación con el precio.

### **Análisis de las fases que intervienen en la situación 2**

El docente facilita de nuevo a los estudiantes la noticia del periódico y el video donde “*Tal cual*” cuestiona cómo se genera el cobro de la tarifa de una carrera, además indica como abrir el archivo y resuelve inquietudes a los estudiantes, sin dar la solución de los ítems propuestos, guía al estudiante hacia la interpretación del periódico, describiendo las siguientes fases:

**Fase de Formulación:** esta fase inicia la completar la tabla, con la información leída del periódico, permite reconocer las variables que influyen en el cobro de una carrera y la dependencia de ellas. (Ver Tabla 12)

| <b>Variables</b>                         | <b>Valor</b> |
|--|--------------|
| Recorrido de 80 metros                   |              |
| Banderazo                                |              |
| Carrera mínima                           |              |
| Tiempo de espera 50 segundos             |              |
| Recargo por servicio puerta a puerta     |              |
| Recargo nocturno, dominicales y festivos |              |

**Tabla 12. Variables de la Carrera de un Taxi**

El propósito de completar la tabla y los ítems propuestos, es familiarizar al estudiante con:

- Comprender el comportamiento de las variables y hacer predicciones sobre ellas.
- Identificar las variables que intervienen en el problema y relacionarlas matemáticamente.
- Desarrollar habilidades para la interpretación de la información dada.

**Fase de Institucionalización:** Los estudiantes expondrán los resultados obtenidos en el desarrollo de las preguntas y el docente retomará los aportes de los estudiantes. Por ejemplo en el ítem (b) se deja claro que el cobro de una carrera se debe tener presente las variables; recargo nocturno dominical y festivo. Además convertir unidades que sean equivalentes entre sí, por ejemplo en el ítem (c), se pregunta en kilómetros y se hace necesario realizar una conversión a metros, dado que el periódico maneja esta unidad de medida; un recorrido de 80 m equivale a \$80 pesos , además deja claro las variables que son independientes y dependientes.

## **Análisis de cada pregunta de la situación 2**

Las preguntas propuestas tienen como propósito identificar las variables que permanecen constantes, las que varían y las relaciones de dependencia entre ellas. En esta situación se plantea que el análisis de los estudiantes sea en lengua natural, al relacionar sus respuestas con la (tabla 12).

La situación continúa con 4 ítems, que llevan al estudiante a utilizar el registro de lengua natural, como un recurso que permite la formulación de argumentos y justificaciones, como un referente para indagar el objeto matemático.

- a. ¿De qué variables depende la tarifa de un taxi, qué le dirías tú?  
Justifica tu respuesta.**

Para solucionar este interrogante se espera que el estudiante tome como guía la tabla presentada en la situación, para que relacione las variables que depende el cobro de una carrera.

De acuerdo a lo anterior, se espera que los estudiantes determinen que las variables a tratar son: recorrido de 80 metros, el tiempo de espera, recargo servicio puerta a puerta, recargo nocturno, dominical y festivo.

Por otro lado, se pueden encontrar respuestas para casos específicos por ejemplo, considerar que el día y la hora interfieren en el cobro, lo cual es correcto aunque de alguna manera está implícito en los recargos que se encuentran en la tabla 12.

Así mismo se dirá que los estudiantes consideran la representación tabular para solucionar en lengua natural.

**b. ¿El recargo nocturno, dominical y festivo interfiere en el valor de la tarifa mínima? Justifica.**

Este interrogante da sentido al recargo, tanto así que el estudiante debe decidir sobre el significado de los recargos identificando el tipo de recargo a utilizar, pues se toman en consideración tres tipos de recargo; el nocturno y el dominical o festivo, siendo un valor extra al costo de la carrera mínima, es decir, que una carrera menor o igual a 48 unidades tiene un valor establecido de \$4.000 pesos más \$1.000 pesos por el recargo, lo cual indica que \$5.000 pesos es el cobro total.

Al responder este ítem, el estudiante puede caer en el error de no separar el recargo nocturno, dominical y festivo, pues, esto indica que si se toma un servicio después de las 8:00 p.m. horas del día domingo el recargo que deberá pagar el usuario será de \$2.000 pesos, esta pregunta debe ser aclarada por medio de ejemplos para mejor comprensión por parte del estudiante, pues los recargos se deben tomar por separado, indicando que si una persona toma un taxi un día domingo a las 5:00 p.m. el recargo que aplica es de \$1.000 pesos, pero si el mismo sujeto aborda un taxi el día domingo las 10:00 pm se cobrara tanto el recargo nocturno como el dominical, por ende el valor extra de \$2.000 pesos es sumado valor de la carrera mínima.

En este ítem, los estudiantes pueden presentar en lengua natural su solución al indicar como interfiere el recargo en la tarifa mínima, o pueden tomar la representación numérica al sumar lo(s) recargo(s) y la carrera mínima.

**c. Si “*Tal cual*” el domingo recorrió 8 km en taxi para llegar al estudio de grabación del noticiero ¿Cuánto pagó por este recorrido? Muestra los cálculos requeridos para llegar a la respuesta.**

El propósito de este ítem es que el estudiante debe identificar que se presenta un recargo de \$1.000 pesos, por otro lado se debe realizar un proceso de

conversión de kilómetros (*km*) a metros (*m*), y de metros al valor por unidad, respuesta que se puede obtener por medio de operaciones para la conversión o de la lectura del (Taxi B) al considerar el valor que le corresponde a 100 unidades, pues el periódico toma como referencia los metros recorridos, además el recorrido de 80 metros equivale a una unidad de \$84 pesos. Por ende, los estudiantes deben tener claro el valor de las unidades y la unidad de medida presente, para luego dar un resultado e incluir el valor del recargo dominical, para llegar a un resultado de \$8.400 pesos para el pago del recorrido, es decir, que se encontrará asociado el valor del cargo fijo con la constante que va a ser adicionada al valor de 100 unidades, y que el precio de la carrera se calculará en función del valor previamente establecido para cada unidad.

|   |   |
|---|---|
| Si “Tal cual” el domingo recorrió 8 km en taxi para llegar al estudio de grabación del noticiero ¿Cuánto pagó por este recorrido? Muestra los cálculos requeridos para llegar a la respuesta. |   |
| Tratamiento: recorrió 8 km  | $1\text{km} = 1.000\text{ m}$<br>$8\text{km} = 8.000\text{ m}$                        |
| Tratamiento: resolver de acuerdo a los valores de referencia presentado en el periódico.  | $8000/80 = 100\text{ unidades}$<br>$100 \times 84 = 8.400$<br>$8.400 + 1.000 = 9.400$ |
| El valor del recorrido por 8 km es de:  | 9.400 pesos   |

**Tabla 13. Situación 2 \_ Literal (c) tratamiento**

Los cálculos que realicen los estudiantes, les permitirá entender la funcionalidad de los datos en el contexto e identificar el tipo de variación que está presente en la situación.

Puede existir confusión, la noticia del periódico mencionan que cada 80 metros recorridos cuesta \$80 pesos, pero cada unidad son 80 metros recorridos y

cuesta \$84 pesos, por ende un posible error es que los estudiantes escojan las unidades y multiplicarlas por \$80 pesos lo que indica que dará un resultado de \$8.000 pesos más el recargo nocturno será \$9.000. Este resultado no está incluido como posible respuesta. De manera análoga se desarrolla el que eligió el valor del recorrido de 80 metros.

En el presente ítem, los estudiantes podrán hacer un tratamiento aritmético al llegar al valor del recorrido (Ver Tabla 13).


**d. ¿Cuál(es) de ellas permanecen constantes (no varían) al realizar un recorrido en taxi?**

Este interrogante conduce a los estudiantes a reflexionar sobre las variables que permanecen constantes en el costo de la tarifa por ejemplo: el banderazo, carrera mínima, recargo por servicio puerta a puerta y recargo nocturno, dominicales y festivos que se cobra en diferentes situaciones.


Un posible error es que los estudiantes no consideren los recargos como una constante porque afecta el cobro de una carrera deduciendo que varía la tarifa.

En este ítem los estudiantes pueden representar sus soluciones en lengua natural, a partir del uso de la tabla 12.

### 3.2.3 Situación 3. “Comparando precios”



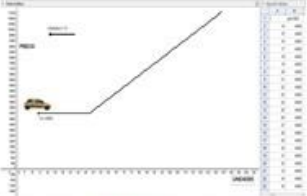
**SITUACIÓN 3**  
**COMPARANDO PRECIOS**



FECHA: \_\_\_\_\_ GRADO: \_\_\_\_\_  
 NOMBRE: \_\_\_\_\_

En un recorrido realizado por “Tal Cual” en taxi, indagó sobre el funcionamiento del taxímetro en la ciudad de Cali encontrando que: El taxímetro marca las *unidades* cada 80 metros recorridos, el precio<sup>1</sup> de 1 unidad equivale a \$80 pesos. Al iniciar una carrera se inicia con el banderazo, esto significa que el taxímetro empieza a contar desde 14 unidades y su valor es igual a \$1.400 pesos. De acuerdo a lo anterior analiza la siguiente tabla y la gráfica:

| LISTADO DE VALORES POR UNIDADES |       |       |       |         |       |
|---------------------------------|-------|-------|-------|---------|-------|
| UNID                            | VALOR | UNID  | VALOR | UNID    | VALOR |
| ADES                            | \$    | ADES  | R \$  | ADES    | R \$  |
| 47-48                           | 4.000 | 67    | 5.600 | 86      | 7.200 |
| 49                              | 4.100 | 68    | 5.700 | 87      | 7.300 |
| 50                              | 4.200 | 69    | 5.800 | 88      | 7.400 |
| 51                              | 4.300 | 70    | 5.900 | 89      | 7.500 |
| 52                              | 4.400 | 71-72 | 6.000 | 90-91   | 7.600 |
| 53-54                           | 4.500 | 73    | 6.100 | 92      | 7.700 |
| 55                              | 4.600 | 74    | 6.200 | 93      | 7.800 |
| 56                              | 4.700 | 75    | 6.300 | 94      | 7.900 |
| 57                              | 4.800 | 76    | 6.400 | 95      | 8.000 |
| 58                              | 4.900 | 77    | 6.500 | 96-97   | 8.100 |
| 59-60                           | 5.000 | 78-79 | 6.600 | 98      | 8.200 |
| 61                              | 5.100 | 80    | 6.700 | 99      | 8.300 |
| 62                              | 5.200 | 81    | 6.800 | 100     | 8.400 |
| 63                              | 5.300 | 82    | 6.900 | 101     | 8.500 |
| 64                              | 5.400 | 83    | 7.000 | 102     | 8.600 |
| 65-66                           | 5.500 | 84-85 | 7.100 | 103-104 | 8.700 |



**Gráfica 3.**

a. Compara las coordenadas que aparecen en el gráfico al mover el taxi con los datos de la tabla en la hoja de cálculo. ¿Qué puedes concluir?

b. Según los datos representados en la hoja de cálculo ayuda a “Tal cual” a ubicar en la gráfica los puntos correspondientes al cobro de las carreras que marcan 57, 58, 71, 72, 80, 81, 84 y 85 unidades, para ello utiliza el comando lista de puntos.

| Intervalo              | Precio \$               | Intervalo              | Precio \$ |
|------------------------|-------------------------|------------------------|-----------|
| [14, 48] o 14 ≤ x ≤ 48 |                         | (59, 60] o 59 ≤ x ≤ 60 |           |
| (48, 53] o 48 ≤ x ≤ 53 | Aumenta, de 4000 a 4500 | (60, 65] o 60 ≤ x ≤ 65 |           |
| (53, 54] o 53 ≤ x ≤ 54 | Constante en 4.500      | (65, 66] o 65 ≤ x ≤ 66 |           |
| (54, 59] o 54 ≤ x ≤ 59 |                         | (66, 71] o 66 ≤ x ≤ 71 |           |

e. Utiliza los intervalos de la tabla anterior para encontrar la pendiente de los primeros 4 intervalos. Recuerda que:

f. ¿Cuánto vaía el precio en cada unidad?

¿Qué puedes concluir del resultado obtenido en el punto anterior y la variación del precio de cada unidad? Observa su comportamiento en la gráfica.

g. Defina una función a trozo al considerar los primeros 4 intervalos de variación de la tabla 2, tener en cuenta los valores de las pendientes halladas y el precio al iniciar cada intervalo.

**Tabla 2.** Análisis de variación por intervalos

h. Complete la expresión como función a trozos de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} \text{_____} & \text{Si } 14 \leq x \leq 48 \\ 100(x-48)+4000 & \text{Si } 48 \leq x \leq 53 \\ \text{_____} & \text{Si } 53 \leq x \leq 54 \\ \text{_____} & \text{Si } 54 \leq x \leq 59 \end{cases}$$

Tabla 1. Listado de Valores por Unidades

- c. Ahora compara el “Listado de valores por unidades” con los datos de la hoja cálculo generada por el gráfico en GeoGebra. ¿Qué diferencias encuentras y qué puedes concluir?
- d. Según lo estudiado anteriormente junto a “Tal cual” responde: ¿En qué intervalos el precio **aumenta** y en cuales se mantiene **constante**?

<sup>1</sup> El precio de la unidad es tomando del año 2012, del periódico El Tiempo como se presentó en la situación 1.

### Imagen 9. Situación 3 “El periódico y los taxis”



A continuación, se presenta la ampliación del listado de valores (ver Tabla 14) y del gráfico de la situación 3 (ver Imagen 10).

| LISTADO DE VALORES POR UNIDADES |          |          |          |          |          |
|---------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| UNIDADES                        | VALOR \$ | UNIDADES | VALOR \$ | UNIDADES | VALOR \$ |
| 47- 48                          | 4.000    | 67       | 5.600    | 86       | 7.200    |
| 49                              | 4.100    | 68       | 5.700    | 87       | 7.300    |
| 50                              | 4.200    | 69       | 5.800    | 88       | 7.400    |
| 51                              | 4.300    | 70       | 5.900    | 89       | 7.500    |
| 52                              | 4.400    | 71-72    | 6.000    | 90-91    | 7.600    |
| 53-54                           | 4.500    | 73       | 6.100    | 92       | 7.700    |
| 55                              | 4.600    | 74       | 6.200    | 93       | 7.800    |
| 56                              | 4.700    | 75       | 6.300    | 94       | 7.900    |
| 57                              | 4.800    | 76       | 6.400    | 95       | 8.000    |
| 58                              | 4.900    | 77       | 6.500    | 96-97    | 8.100    |
| 59-60                           | 5.000    | 78-79    | 6.600    | 98       | 8.200    |
| 61                              | 5.100    | 80       | 6.700    | 99       | 8.300    |
| 62                              | 5.200    | 81       | 6.800    | 100      | 8.400    |
| 63                              | 5.300    | 82       | 6.900    | 101      | 8.500    |
| 64                              | 5.400    | 83       | 7.000    | 102      | 8.600    |
| 65-66                           | 5.500    | 84-85    | 7.100    | 103-104  | 8.700    |

Tabla 14. Listado de Valores por Unidades

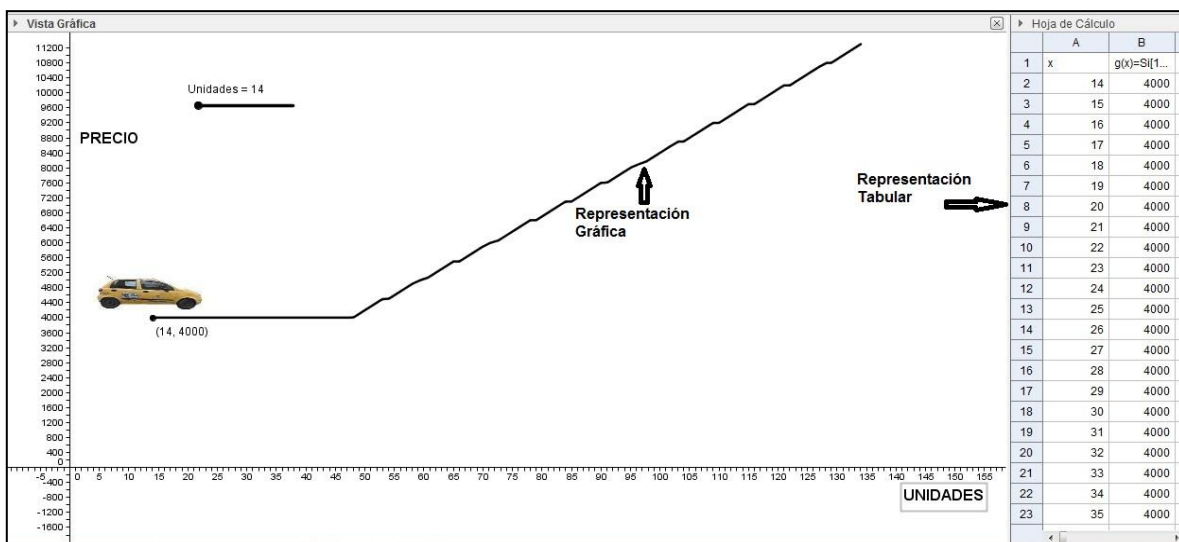


Imagen 10. Taxi 2B

### **Descripción de la situación 3**

La tercera y última situación, inicia con un párrafo introductorio que contextualiza y explica al estudiante como es el funcionamiento de un taxímetro, de manera que identifique la dependencia de las unidades con respecto a los metros recorridos, la dependencia del precio con respecto a las unidades recorridas y el sentido del banderazo y demás variables analizadas en las situaciones 1 y 2.

Al mismo tiempo, se muestra al estudiante la Tabla 13<sup>14</sup> que los taxistas portan en sus vehículos en un lugar visible para el usuario verifique el costo del recorrido según las unidades que marca el taxímetro, además se muestra la gráfica de función por tramos previamente analizada en la situación 1, con la representación tabular en la hoja de cálculo en GeoGebra (ver Imagen 10).

El estudiante debe relacionar los datos de la (Tabla 14) con puntos en el plano cartesiano (parejas ordenadas), hallar la pendiente de cada intervalo, hallar los intervalos de crecimiento, valores constantes de la función y el comportamiento que presenta la gráfica. Para dar solución a los ítems (ver Anexos 6, 7, 8, 9, y 10).

### **Estándar propuesto por el MEN de la situación 3**

Pensamiento Variacional y sistemas algebraicos y analíticos:

- Generalizar soluciones y estrategias para nuevas situaciones de problemas.
- Identificar y utilizar diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.
- Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).

---

<sup>14</sup> De la tabla original que portan los taxistas en sus vehículos, los investigadores solamente tomaron las unidades y sus valores, pues lo demás está en explícito en el periódico.

El objetivo de esta última situación es que el estudiante relacione los diferentes registros de representación semiótica de la función por tramos como: el tabular, gráfico y algebraico. Tratando de generalizar el comportamiento de una situación de la vida cotidiana a partir de las características de la función presentada.

### **Análisis de las fases que intervienen en la situación 3**

El docente facilita a los estudiantes la gráfica del (Taxi 2B), e indicará cómo abrir el archivo con el nombre y en la carpeta de “Univalle” ubicada en el PC de cada estudiante, se entregan las hojas de trabajo de la situación, se resuelve inquietudes, más no brinda la solución a los ítems propuestos, guiará al estudiante hacia la interpretación de lo que se representa en el periódico con lo presentado gráficamente.

**Fase de Acción:** en esta fase se presentará la gráfica del (Taxi 2B) hecha en GeoGebra, con la representación tabular de la función, esto implica que cuando el estudiante explore nuevamente con el deslizador, podrá tener los dos tipos de registros tabular y gráfico en la pantalla dinámica de GeoGebra (ver Imagen 10), identificar los valores independientes y dependientes de la función por tramos, esta representación tabular muestra la misma representación numérica de la tabla de los taxistas anteriormente mencionada, es decir que el estudiante se encontrará con documentos y archivos relacionados entre sí.

**Fase de Formulación:** en esta fase se tendrá en cuenta los análisis realizados por parte de los estudiantes en cada uno de los ítems de la situación, sus respuestas se constituirán en la base primordial para los análisis *a posteriori* que se realizará después de la experimentación de la secuencia didáctica.

**Fase de validación:** en esta fase se hace explícito el objeto matemático de la función por tramos, en el cual se espera que los estudiantes realicen

tratamientos aritméticos para hallar la razón de cambio, validar el resultado en el registro algebraico o tabular para la construcción de este objeto matemático.

**Fase de Institucionalización:** Los estudiantes expondrán los resultados que obtuvieron al desarrollar las preguntas y el docente retomará los aportes de los estudiantes por ejemplo en el ítem (c) se aclara cuáles son las diferencias que se encontraran en los registros gráficos y tabular.

En el ítem (d) se observa la gráfica del (Taxi 2B) para analizar los tramos que crece y permanece constante para el cobro de una carrera, de acuerdo a la variación y cambio de cada intervalo y a la inclinación que presenta la gráfica, los tramos de la gráfica se harán explícitos mediante la tabla (ver Tabla 15).

| Intervalo                           | Precio \$                     | Intervalo                        | Precio \$ |
|-------------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|-----------|
| [14,48]<br>ó<br>$14 \leq x \leq 48$ |                               | (59,60]<br>ó<br>$59 < x \leq 60$ |           |
| (48,53]<br>ó<br>$48 < x \leq 53$    | Aumenta,<br>de 4000 a<br>4500 | (60,65]<br>ó<br>$60 < x \leq 65$ |           |
| (53,54]<br>ó<br>$53 < x \leq 54$    | Constante<br>en 4.500         | (65,66]<br>ó<br>$65 < x \leq 66$ |           |
| (54,59]<br>ó<br>$54 < x \leq 59$    |                               | (66,71]<br>ó<br>$66 < x \leq 71$ |           |

**Tabla 15. Análisis de variación por intervalos**

### **Análisis de cada pregunta de la situación 3**

Como ya se mencionó, se presenta una tabla de valores similar a la que portan los taxistas en sus vehículos para cobrar el recorrido en una carrera, también se presenta la representación gráfica con la representación tabular en GeoGebra, lo anterior se da para resolver las preguntas que se plantean.

La situación continúa con 8 ítems, que llevan al estudiante a utilizar registros gráfico, tabular, numérico y algebraico, como un referente para indagar el objeto matemático a partir de la formulación de argumentos y justificaciones:

**a. Compara las coordenadas que aparecen en el gráfico al mover el taxi con los datos de la tabla en la hoja de cálculo. ¿Qué puedes concluir?**

El propósito de este ítem es que el estudiante utilice dos registros de representación dados en GeoGebra de forma simultánea, se retoma el gráfico que se utilizó en la situación 1.

Por otro lado, se encuentra la representación tabular realizada en una hoja de cálculo a partir del gráfico. Se espera que para esta situación los estudiantes estén en un proceso de instrumentación, en el cual desarrollen *esquemas de uso* que le permita realizar acciones espontáneas al manejar el deslizador e interpretar el recorrido del taxi como la variación de las unidades con respecto al precio a pagar.

**b. Según los datos representados en la hoja de cálculo ayuda a “*Tal cual*” a ubicar en la gráfica los puntos correspondientes al cobro de las carreras que marcan 57, 58, 71, 72, 80, 81, 84 y 85 unidades, para ello utiliza el comando lista de puntos.**

En este ítem se desarrolla un *esquema de uso* guiado por el docente, el cual se realiza desde el registro tabular de GeoGebra, para lo cual, el estudiante utiliza

el comando “*lista de puntos*” para representar la coordenada cartesiana en el gráfico.

La importancia es mostrar la relación que se establece en los dos registros de representación mediados por GeoGebra, el cual, permite que el estudiante entienda las potencialidades del software, al resolver eficazmente los puntos ordenados en la gráfica y reconocer una nueva manera de explorar la situación.

Una limitación que se puede presentar en esta pregunta, es que el estudiante no haya desarrollado una instrumentalización del deslizador y no sepa relacionar los valores de la tabla con la variación de las razones que presenta la gráfica.

**c. Ahora compara el “Listado de valores por unidades” con los datos de la hoja cálculo generada por el gráfico en GeoGebra. ¿Qué diferencias encuentras y qué puedes concluir?**

Para dar respuesta a este ítem, el estudiante debe encontrar las diferencias de los datos que se presentan en el listado de valores por unidades, con la hoja de cálculo de GeoGebra. Para lo cual, se identifica que el listado por valores no se presenta de manera explícita el precio de las unidades que pertenecen al intervalo  $14 \leq x \leq 48$ , cuyo valor es constante e igual a \$4.000 pesos, sólo se menciona 47-48 unidades, se asume que para valores menores a 47 se tiene el mismo precio, mientras que en la hoja de cálculo en GeoGebra se incluye el precio de las unidades del intervalo antes mencionado.

En este ítem es importante el listado de valores por unidades (ver Tabla 14), ya que muestra una regla de correspondencia entre los valores de la pareja ordenada, con respecto a la representación tabular del gráfico (ver Imagen 10).

**d. Según lo estudiado anteriormente junto a “*Tal cual*” responde: ¿En qué intervalos el precio *aumenta* y en cuáles se mantiene *constante*?**

En esta pregunta se muestra al estudiante una tabla (ver Tabla 15) que representa los ocho primeros intervalos de la función por tramos, en representación algebraica de cada dominio. Se pide hallar donde aumenta y donde es constante el precio.

Para solucionar este ítem, el estudiante tiene la libertad de escoger entre la representación gráfica (ver Imagen 10) o la tabular (ver Tabla 14), pues en la gráfica se puede realizar la acción de arrastrar la imagen del taxi con el deslizador y la variación de las unidades con respecto al precio mostrando las parejas ordenadas.

También se puede apreciar en la gráfica los intervalos constantes y crecientes, por lo cual el estudiante debe ubicar las parejas ordenadas que se encuentran en los intervalos dados e identificar el comportamiento en la gráfica.

Por otro lado, se encuentra la representación tabular que también es otra opción, si se tiene claro la relación de dependencia entre las variables, es decir, que es necesario observar que toda razón entre las *diferencias* correspondientes a dos valores de la tabla es una constante, lo cual indica que ellos deben de identificar cómo varían con respecto al precio.

A partir del análisis de la representación tabular se puede llegar al concepto de función por tramos, como la variación de las razones, diferencias entre las cantidades de cada magnitud, es decir, la diferencia entre dos valores consecutivos o por intervalos, del precio y la diferencia de los valores correspondientes de las unidades y la razón de cada una de estas diferencias.

- e. Utiliza los intervalos de la tabla anterior para encontrar la pendiente de los primeros 4 intervalos. Recuerda que:**

***La pendiente es la inclinación entre dos puntos del plano cartesiano y se halla haciendo el cociente de la diferencia entre los valores de “y” y “x”***

En este ítem se retoma los intervalos trabajados en la tabla del ítem (d) (ver Tabla 15), para ello se inicia con el estudio del concepto de pendiente en lengua natural y los tratamientos en registro aritmético, para lo cual el estudiante Identifica el dominio de variación de las magnitudes que intervienen en la situación. Se toman los extremos de covariación como dos coordenadas cartesianas y se realiza el cociente de la diferencia entre los valores de  $y$  y  $x$ . Se encuentra así, que la razón de cambio entre las unidades que intervienen es de 100 pesos y 0 pesos.

Se toman dos puntos del primer intervalo de la tabla anterior (ver Tabla 15), se halla el cociente de la diferencia entre los valores de  $y$  y  $x$ , se tiene que:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2) - (x_1)}$$

Por ejemplo, para los dos primeros intervalos se toman las parejas ordenadas como extremos de los intervalos unidades y precios para hallar el valor de la pendiente del primer tramo se realiza el siguiente tratamiento:

$P_1(14,4000)$  y  $P_2(48,4000)$

$$m = \frac{4000 - 4000}{48 - 14} = \frac{0}{34} = 0$$

Para el segundo intervalo se toman las parejas ordenadas:  $P_3(48,4000)$  y  $P_4(53,4500)$ , para hallar el valor de la pendiente del segundo tramo:

$$m = \frac{4500 - 4000}{53 - 48} = \frac{500}{5} = 100$$

De manera análoga se aplica para el resto de los intervalos.



f. **¿Cuánto varía el precio en cada unidad?** \_\_\_\_\_

**¿Qué puedes concluir del resultado obtenido en el punto anterior y la variación del precio de cada unidad? Observa su comportamiento en la gráfica.**

Como en el ítem anterior se halla la fórmula de la pendiente como la razón de cambio entre magnitudes, da cuenta que en tramos constantes el precio es \$0 pesos por cada unidad y en los tramos lineales el precio varían \$100 pesos por cada unidad, calculando la razón como la diferencia entre dos parejas de números, lo que se puede observar en la gráfica del (Taxi 2B) con la inclinación de cada tramo afín.

**g. Defina una función a trozo al considerar los primeros 4 intervalos de variación de la tabla 15, tener en cuenta los valores de las pendientes halladas y el precio al iniciar cada intervalo.**

Este tienen como propósito encontrar las expresiones algebraicas de cada tramo, para ello se analiza los cuatro primeros intervalos que se estudiaron en el ítem anterior, así que el estudiante ya ha encontrado la pendiente y el precio en que inicia cada intervalo, ahora debe encontrar la variación de  $x$  en determinado intervalo para lo cual se debe tener el dominio en que varía  $x$ , lo cual se ha trabajado en el ítem (d), se pretende desarrollar un proceso de actividad cognitiva del (tratamiento) en un mismo registro de representación.

La expresión algebraica por tramos, debe tener la forma:

$$g(x) = \text{costo inicial} + \text{pendiente} \cdot (\text{unidad final} - \text{unidad inicial}),$$

Las unidades dependen del intervalo o dominio de cada expresión, por ejemplo:

- En el primer intervalo se tienen que:

$$\begin{aligned}
 g_1(x) &= 4000 + 0(x - 14) \text{ Si, } 14 \leq x \leq 48 \\
 &= 4000 + 0 \\
 g_1(x) &= 4000
 \end{aligned}$$

Entre el intervalo  $14 \leq x \leq 48$  unidades se debe pagar \$4.000 pesos.

- Para el segundo intervalo:

$$g_2(x) = 4000 + 100(x - 48) \text{ Si, } 48 < x \leq 53$$

Como prueba se toma una unidad 52 que se encuentra en el intervalo  $48 < x \leq 53$ , reemplazando de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 g_2(x) &= 4000 + 100(52 - 48) \text{ Si, } 48 < x \leq 53 \\
 &= 4000 + (5200 - 4800) \\
 &= 4000 + 400 \\
 g_2(x) &= 4400
 \end{aligned}$$

En 52 unidades se debe pagar \$4.400 pesos.

De manera análoga se hallan las expresiones algebraicas de los demás intervalos.

#### **h. Complete la expresión como función a trozos de la siguiente forma:**

La situación tres culmina con este ítem, de manera que los estudiantes definen una función en cuatro tramos en los dominios correspondientes a las funciones constante y afín las cuales podrán ser observadas por los estudiantes en la gráfica de GeoGebra.

De tal forma que hallen la expresión algebraica de la función por tramos, ayudándose con el ítem (g), en el cual se espera que los estudiantes obtengan

una expresión equivalente a la inicial, es decir, que el registro de partida y el registro de llegada sean iguales.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{0(x - 14) + 4000}{1} & \text{Si, } 14 \leq x \leq 48 \\ \frac{100(x - 48) + 4000}{1} & \text{Si, } 48 < x \leq 53 \\ \frac{0(x - 53) + 4500}{1} & \text{Si, } 53 < x \leq 54 \\ \frac{100(x - 54) + 4500}{1} & \text{Si, } 54 < x \leq 59 \end{cases}$$

En resumen, en esta situación se parte del registro gráfico y tabular para llegar al registro algebraico, con el fin de obtener la expresión algebraica de la función por tramos, esto es, dar generalizaciones del comportamiento de la situación. El proceso de validación se conseguirá cuando se toma cualquier valor del intervalo, se reemplaza en la expresión algebraica y se obtiene el precio de la unidad evaluada, el cual puede ser corroborado en la gráfica de valores.

## CÁPITULO IV

### ANÁLISIS A POSTERIORI Y RESULTADOS

En este capítulo se describe la aplicación de la secuencia didáctica, se mencionará a los estudiantes que participaron en el desarrollo de la misma, y también se resaltarán las características del Colegio donde se realizó la experimentación.

Además se mostrarán los resultados obtenidos en la aplicación de la secuencia didáctica, que se recogieron y organizaron para confrontar la veracidad de la hipótesis desarrollada al inicio de la investigación (ver p.11) con el análisis *a posteriori*.

#### 4.1 MARCO CONTEXTUAL

La fase experimental de la investigación se implementó los días 11 y 17 de junio de 2013 en el Colegio Bennett, la cual es una entidad de carácter privado que se encuentra ubicada en el barrio Ciudad Jardín, pertenece a la comuna 22 de Santiago de Cali. La institución educativa cuenta con una única jornada académica de 6:45 a.m. a 2:30 p.m., la aplicación de la secuencia fue desarrollada durante el año lectivo 2012-2013.

El Colegio cuenta con tres salas de sistemas dotadas y actualizadas<sup>15</sup> para la enseñanza con TIC, por lo cual, la actualización del software GeoGebra versión 3.2 a la versión 4.2 no presentó ningún problema, aunque se presentó inconvenientes en ejecutar el java para que funcionara el *plugin* en la aplicación de GeoGebra creada en el blog, además el internet presentaba deficiencias en

---

<sup>15</sup> Cada sala de sistemas cuenta con equipos en red, además de tablero, buena iluminación y dos aires acondicionados.

cargar el blog, la página web y la reproducción online del video de "*Tal cual*", cuando se realizaban al mismo tiempo en todos los computadores, esto es debido a que la sala de sistemas se encontraba en red por cable.

El grupo experimental trabajó en la sala principal que contó con 24 computadores, los cuales habían sido previamente configurados por los investigadores instalando el programa y creando una carpeta llamada "*Univalle*" ubicada en el disco local (D), que contienen las situaciones del Taxi A y B en GeoGebra, la página web del periódico "*El Tiempo*", el video de "*Tal Cual*". Además se les entregó a los estudiantes de manera individual las hojas de trabajo para que resuelvan las respectivas preguntas.

La secuencia didáctica se aplicó a un grupo de veinte y tres (23) estudiantes pertenecientes al grado noveno (9-B) de educación básica secundaria, cuyas edades oscilan entre catorce (14) y quince (15) años de edad.

Las situaciones se aplicaron de manera individual en dos sesiones, en la primera se llevó a cabo la situación número uno con un tiempo de 40 minutos y en la segunda sesión se desarrolló la situación dos, tres y el cierre de la secuencia en 85 minutos.

La puesta en escena de la secuencia se presentó, por parte de uno de los investigadores<sup>16</sup>, quien realizó la gestión de la situación, el cual dio las indicaciones para desarrollar cada una de las situaciones y tuvo en cuenta algunas preguntas para la fase de institucionalización.

Por otra parte, el segundo investigador apoya este rol entregando materiales como las hojas de trabajo, toma el registro fotográfico y de video, además de

---

<sup>16</sup> El rol de dirigir la situación será rotativo entre los dos investigadores Álvaro Javier Saa y Ángela Katherine Trochez

cuestionar a los estudiantes para que éstos reflexionen realizando las acciones y retroacciones que brinda el medio.

La recolección de los datos para los análisis, se hizo por medio de las producciones escritas en las hojas de trabajo de los estudiantes, al finalizar cada sesión; se verificó las producciones de video, fotos y de audio. Se tomaron los resultados más relevantes para realizar el análisis *a posteriori*.

#### **4.2 ANÁLISIS A POSTERIORI DE LAS SITUACIONES**

A continuación se presentan los sucesos ocurridos durante la experimentación, el cual se analiza desde los diferentes registros de representación y la teoría de situaciones, verificando si se cumplió lo propuesto en el análisis *a priori* y dando a conocer aquellos acontecimientos que no se tuvieron previstos durante la secuencia didáctica.

Cabe anotar que el tiempo previsto en el análisis *a priori* para la aplicación de la secuencia, fue acorde para realizar las situaciones uno y dos, pues no hubo necesidad de ampliarlo, por otra parte, el tiempo previsto para la situación tres fue un poco corto, aunque la situación dos fue resuelta en 15 minutos menos que lo que se propuso, para la situación tres el tiempo siguió siendo demasiado corto.

De manera que, la siguiente tabla presenta cada una de las situaciones de la secuencia didáctica, la fecha en que fue realizada, la cantidad de estudiantes que participaron y el tiempo en que se ejecutó:

| SITUACIONES              | FECHA            | NUMERO DE ESTUDIANTES | TIEMPO     |
|--------------------------|------------------|-----------------------|------------|
| EL PERIÓDICO Y LOS TAXIS | 12 de junio 2013 | 22                    | 40 minutos |
| LA CARRERA DE UN TAXI    | 17 de junio 2013 | 23                    | 30 minutos |
| COMPARANDO PRECIOS       | 17 de junio 2013 | 21                    | 55 minutos |

Tabla 16. Ejecución de la secuencia didáctica

Se aclara que durante este análisis se presentaron protocolos de estudiantes que se nombraran con la letra E, si interfiere otro estudiante en el diálogo se llamará E<sub>1</sub>, E<sub>2</sub>, y así sucesivamente, por último la letra D se denotara para el docente.

#### 4.2.1 Situación 1. “El periódico y los taxis”

El tiempo programado en el análisis *a priori* de la situación uno (ver Tabla 9) fue realmente el justo para el desarrollo de la misma (ver tabla 16), por lo cual, haber guardado los documentos en el disco duro de los computadores con anterioridad agilizó la implementación, pues poner en práctica la secuencia con el blog con el enlace de la página web de *El Tiempo*, generaba retrasos al esperar que cargara en cada uno de los 24 computadores programados en red de la sala de sistemas.

Como se planeó en el análisis *a priori*, el docente encargado presentó y explicó la situación a los estudiantes, además dirigió a los estudiantes a la carpeta “Univalle”, la cual contenía el enlace de la página del periódico con la noticia, las 2 gráficas del taxi A y B construidas en GeoGebra.

Inicialmente, los estudiantes abrieron el archivo HTML de la noticia y la leyeron detenidamente durante 4 minutos, proceso que no tuvo inconvenientes al abrir desde los computadores ni se presentó preguntas por parte de los estudiantes al interpretar la lectura después de ser leída, cabe notar que en el análisis *a priori* se planteó que el contexto de los taxis no era ajeno en la vida cotidiana para los estudiantes.

Mientras los estudiantes leían la noticia, la interpretaron y lograron relacionarla con experiencias propias como se evidencia en el siguiente diálogo:

|   |
|---|
| <p>E<sub>1</sub>: Cuando el taxi para en el semáforo y pasan los 50 segundos, el taxímetro pasa de 14 a 15 de 15 a 16 y así sucesivamente.</p> <p>E<sub>2</sub>: Y de noche después de salir de rumbar le cobran más.</p> <p>E<sub>1</sub>: (Sonríe mientras sigue leyendo) y los festivos y dominicales, si sabe que es dominicales?</p> <p>E<sub>2</sub>: Si claro.</p> |
|---|

Los literales de (a) hasta (c) de la pregunta 2 inician con la fase de acción, pues los estudiantes exploraban el medio para mover la imagen del taxi sobre la gráfica del taxi A y taxi B, respondiendo los literales mencionados anteriormente a partir de las retroacciones que le brindaba el deslizador, se evidenciaron 3 casos que afirmaban que no era posible mover el taxi.

Esto se debía a que los estudiantes trataban de mover el taxi, dando clic desde la misma imagen y también desde el punto de coordenada, este tipo de *esquemas de uso* no se tuvo previsto en el análisis *a priori*, sin embargo se mencionó que probablemente surgieran preguntas respecto al manejo del software, lo que indica que con estas acciones, no es posible hacer que se mueva el taxi, pues todavía sus *esquemas de uso* no se habían desarrollado totalmente; de modo que el docente intervino con preguntas como lo muestra el siguiente diálogo:



D: Hay que analizar las gráficas, tu cómo harías para mover el taxi?

E<sub>3</sub>: De aquí. (Le da clic sostenido a la imagen del taxi), no se puede.

D: ¿No mueve?

E<sub>3</sub>: No

D: ¿De dónde se movería entonces?

E<sub>3</sub>: [El estudiante empieza a explorar dando clic en el apuntador y desplazamiento], pero no logra mover el taxi.

E<sub>4</sub>: Usted lo mueve así [indicando en el computador de ella como mueve el taxi]

D: Haber, nosotros hemos creado un deslizador llamado “unidades” con el que pueden mover el taxi, como lo dijo tu compañera [señalándola].

E<sub>3</sub>: Entonces, lo muevo desde acá.

D: Sí.

Así, los estudiantes desarrollaron *esquemas de uso* desde un componente social con la interacción entre el estudiante y el diseñador de la situación, permitiendo descubrir cómo se movía el taxi.

**a. “*Tal Cual*” aborda un taxi de su casa al trabajo. ¿Cuál es el valor que deberá pagar, si el taxímetro marca menos de 48 unidades?**

Para la gráfica del Taxi A, 7 de 22 (32%) estudiantes relacionaron los datos presentados del periódico, justificando que una carrera menor o igual de 48 unidades equivale a \$4.120 pesos, según la gráfica y deducen que el valor a pagar es de \$4.000 pesos, dando así la respuesta correcta. La imagen 11 muestra la respuesta de un estudiante que identifica las unidades que corresponde a una carrera mínima.

- a. "*Tal Cual*" aborda un taxi de su casa al trabajo. ¿Cuál es el valor que deberá pagar, si el taxímetro marca menos de 48 unidades?

Taxi A:

El total a pagar si abordo un taxi de su casa al trabajo es de \$4.120 este valor no es real porque el valor de la carrera mínima es de \$4000



El total a pagar si abordo un taxi de su casa al trabajo es de \$4.120 este valor no es real porque el valor de la carrera mínima es de \$4000

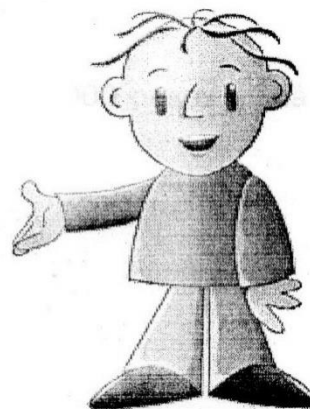
**Imagen 11. Situación 1 \_ ítem a \_ taxi A \_ caso 1**

Surge otro tipo de respuesta, en el cual 4 de 22 (18%) de estudiantes dieron como respuesta la coordenada cartesiana de 48 unidades, es decir, responde de manera puntual, solo leen el precio de la unidad mencionada en la pregunta, sin tener presente que se les pide el valor que sea menor o igual a 48 unidades, indicando que el valor de 48 equivale a \$4.120 pesos, siendo esto verdadero en la gráfica si se toma la pareja ordenada (48,4120), pero ignoran la información leída del periódico.

A continuación se puede ver que los estudiantes realizaron una lectura puntual (unidades, precio) para el caso de 48 unidades (ver Imagen 12). Se evidencia la dificultad para realizar la lectura en intervalos en este caso para el rango de la tarifa mínima, ver producción completa de la estudiante en el anexo 11.

a. "Tal Cual" aborda un taxi de su casa al trabajo. ¿Cuál es el valor que deberá pagar, si el taxímetro marca menos de 48 unidades?

Taxi A: Debe de pagar 4120 ya que en la gráfica los puntos marcan (48, 4120)



Debe pagar 4120 ya que en la gráfica los puntos marcan (48,4120)

Imagen 12. Situación 1 \_ ítem a \_ taxi A \_ caso 2

En el análisis *a priori* de la gráfica del taxi A se esperaba que los estudiantes dieran en sus respuestas el rango entre \$1.400 a \$4.120 pesos que se cobra en el dominio de 14 a 48 unidades, este tipo de respuesta se presentó por 3 de 22 (14%) de los estudiantes como lo muestra la imagen 13:

a. "Tal Cual" aborda un taxi de su casa al trabajo. ¿Cuál es el valor que deberá pagar, si el taxímetro marca menos de 48 unidades?

Taxi A: Desde las 48 unidades hasta la primera, el valor máximo es \$4120 pesos y el mínimo de 14 unidades cuesta \$1400



Desde las 48 unidades hasta la primera, el valor máximo es \$4120 pesos y el mínimo de 14 unidades cuesta \$1400.

Imagen 13. Situación 1 \_ ítem a \_ taxi A \_ caso 3

Por último 8 de 22 (36%) estudiantes no lograron relacionar e interpretar la información del periódico con las gráficas de una forma coherente, pues

responden sin justificar el valor de la carrera mínima con unidades menor o igual a 48, además solo se enfocan en los valores que muestra el periódico sin tener en cuenta las gráficas (ver Imagen 14).

|  |
|--|
| <p>a. <b>"Tal Cual"</b> aborda un taxi de su casa al trabajo. ¿Cuál es el valor que deberá pagar, si el taxímetro marca menos de 48 unidades?</p> <p>Taxi A: <i>Debenomos pagar 4000 pesos</i></p> |
| <p>Deberíamos pagar 4000 pesos</p>   |

**Imagen 14. Situación 1 \_ ítem a \_ taxi A \_ caso 4**

Por otro lado, para la gráfica del Taxi B se permite apreciar que el 100% de los estudiantes, respondieron que el valor a pagar cuando el taxímetro marca menos de 48 unidades es de \$4.000 pesos en el intervalo de 14 a 48 unidades. Como lo indica la imagen 15.

|  |
|--|
| <p>Taxi B: <i>El valor que debera pagar, si el taximetro marca 47 es \$4.000 porque segun la informacion del periodico la carrera minima cuesta \$4.000.</i></p> |
| <p>El valor que debería pagar, si el taxímetro marca 48 es de \$4000 porque según la información del periódico la carrera mínima cuesta \$4000.</p>              |

**Imagen 15. Situación 1 \_ ítem a \_ taxi B**

Se analiza que en la gráfica del taxi A, solo un 32% responde de acuerdo a lo presentado en la gráfica y el periódico, teniendo en cuenta el *esquema de uso* adecuado y una validación positiva pues se logró lo planteado y el 68% no responde de acuerdo al periódico o de forma incoherente, lo cual se convierte en una validación negativa, pues el estudiante no logró lo propuesto, por ende se

continúa con la dificultad en la interpretación de gráficos, entonces ¿el software no aporta? o ¿faltó gestión del docente?

Mientras que en el taxi B el 100% de los estudiantes lograron identificar que al realizar la acción de mover la gráfica con el deslizador este le brinda retroacciones indicando que el valor es de \$4.000 pesos, teniendo presente la representación tabular y la representación gráfica para validar el significado de la carrera mínima, pues relacionaron e interpretaron la gráfica con la información en el periódico, dando así una validación positiva, aproximándose al objetivo de esta situación al analizar las gráficas y el comportamiento de ellas.

**b. ¿Es posible que a “*Tal Cual*” le cobren el mismo precio por una carrera de 24 unidades a una de 40 unidades?**

Este ítem continúa enfocado a la carrera mínima, por lo cual el estudiante analiza algunos puntos que se encuentran en el dominio de  $14 \leq x \leq 48$ . En ella, se le preguntó a los estudiantes, si es posible que a “*Tal cual*” le cobren el mismo precio por una carrera de 24 unidades a una de 40 unidades, se encontró que los estudiantes respondieron a partir de la gráfica del Taxi A de tres formas distintas:

En el primer tipo de respuesta 9 de 22 (41%) estudiantes encontraron el valor de las unidades pedidas y se dieron cuenta que no es posible que el cobro sea de \$4.000 pesos, puesto que 24 y 40 unidades se encuentran dentro de 48 unidades, lo cual equivale a la tarifa mínima como lo dice el periódico, esto indica que el estudiante desarrolla una aprehensión global de la situación (ver Imagen 16), la producción completa del estudiante se encuentra en el anexo 12.

b. ¿Es posible que a "Tal Cual" le cobren el mismo precio por una carrera de 24 unidades a una de 40 unidades?

Taxi A: ~~Si~~ teniendo en cuenta que la carrera mínima es de ~~4000~~ 4000 unidades, si es posible. Pero si solo tenemos en cuenta la gráfica con 24 unidades serían \$2200 y con 40 unidades serían ~~2200~~ \$3480 y de ese modo no sería posible.

Teniendo en cuenta que la carrera mínima es de 4000 (48 unidades) Si es posible. Pero si solo tenemos en cuenta la gráfica con 24 unidades serían \$2200 y con 40 unidades serían \$3480 y de ese modo no sería posible.

Imagen 16. Situación 1 \_ ítem b \_ taxi A \_ caso 1

El segundo tipo de respuesta 7 de 22 (32%) estudiantes respondieron de manera puntal, indicando solamente las parejas ordenadas de las unidades 24 y 40 con su respectivo valor \$2.200 y \$3.480 pesos, ignorando la relación de estos valores con la información del periódico, sin hacer alusión al valor de la carrera mínima como se evidencia en la imagen 17.

b. ¿Es posible que a "Tal Cual" le cobren el mismo precio por una carrera de 24 unidades a una de 40 unidades?

Taxi A:

24 unidades = \$ 2200  
40 unidades = \$ 3480 } NO le cobran lo mismo.

Imagen 17. Situación 1 \_ ítem b \_ taxi A \_ caso 2

Finalmente se presentó que 6 de 22 (27%) estudiantes realizaron la diferencia entre los precios las unidades pedidas, proporcionando como resultado \$1.280 pesos, resultado que no se planteó como posible error por parte de los estudiantes en el análisis *a priori*. Esto se evidencia en la imagen 18.

b. ¿Es posible que a "Tal Cual" le cobren el mismo precio por una carrera de 24 unidades a una de 40 unidades?

Taxi A: No es posible entre 24 y 40 hay diferencia de \$1280 pesos

No es posible entre 24 y 40 hay una diferencia de \$1280 pesos

### Imagen 18. Situación 1 \_ ítem b \_ taxi A \_ caso 3

En la gráfica del Taxi B, el 100% de los estudiantes identificaron que para 24 y 40 unidades le corresponden un único valor de \$4.000 pesos, además de asociar este valor como una constante en el gráfico. En la imagen 19, muestra el caso de un estudiante.

Taxi B:

Si es posible porque en las unidades 24 y 40 cuesta lo mismo (\$4.000) ya que es constante.

Si es posible porque en las unidades 24 y 40 cuesta lo mismo (\$4000) ya que es constante.

### Imagen 19. Situación 1 \_ ítem b \_ taxi B

Siendo la gráfica del taxi B, la que mejor representa la tarifa de la carrera mínima, puesto que al tomar cualquier valor entre el dominio antes mencionado el precio a pagar siempre será de \$4.000 pesos.

A continuación se presenta la forma verbal como un estudiante trata de justificar que para el taxi B, las unidades 24 y 40 le corresponde pagar el mismo precio, para ello el medio creado por GeoGebra genera una retroalimentación cuando el estudiante realiza la acción de mover el deslizador para ubicar el taxi en la coordenada correspondiente de 24 y 40 unidades, solucionando la situación planteada:

E: Da lo mismo, si es posible, si pongo 24 da 4000 y si pongo 40 también da 4000, así que si es posible.

D: ¿Por qué crees que es posible que cobren lo mismo?

E: Porque es la carrera mínima

De lo anterior, lleva a pensar que algunos estudiantes no analizaron que ese tramo de la gráfica era una función constante, por lo cual la pareja ordenada de (24, 4.000) y (40,4.000) tienen el mismo valor. Aunque no es objetivo de la situación, algunos estudiantes dijeron que el tramo era constante.

En este ítem se presenta que para el taxi A, un 41% de los estudiantes relacionaron las unidades pedidas e indicaron que si es posible el cobro en las dos unidades pues según el periódico, las unidades de la carrera mínima es hasta 48 unidades, haciendo la relación entre la representación gráfica y la tabular presentada en el periódico, alcanzando un análisis válido a partir de las acciones que realizó en el medio. Mientras el 59% de los estudiantes no relacionaron la representación tabular con la gráfica, pues no desarrollaron acciones que les posibilitara una validación positiva, indicando esto que el estudiante no alcanzó lo que se proponía.

Por el contrario en el taxi B, el 100% de los estudiantes identificaron que si es posible que cobren el mismo valor, justificando en lenguaje natural que el tramo es constante, siendo este un elemento necesario para el estudio de la función por tramos, en este orden de ideas, se puede decir que el estudiante al realizar una acción con el deslizador en la representación gráfica esta le brinda retroacciones con una validación positiva, pues indica un comportamiento en la gráfica que el estudiante analizó y que es parte del objetivo en esta situación.

**c. Si el taxista le cobró a “*Tal Cual*” por la carrera \$6.000 pesos ¿Cuántas unidades marco el taxímetro?**



Al analizar este ítem se presentaron 4 tipos de respuestas para la gráfica del Taxi A, siendo 3 de ellas previstas en el análisis *a priori*.

Se inicia con el primer tipo de respuesta, en la cual 7 de 22 (32%) estudiantes no tuvieron dificultad al identificar que 71 y 72 unidades les corresponde un valor de \$5.960 y \$6.040 respectivamente, precios que aproximaron a \$6.000 identificando que se encuentren a una diferencia de 40 pesos de la variable dependiente dada, concluyendo que se puede tomar cualquiera de las dos unidades (ver Imagen 20).

|  |
|--|
| <p>c. Si el taxista le cobró a "Tal Cual" por la carrera \$6.000 pesos ¿Cuántas unidades marco el taxímetro?</p> <p>Taxi A: En la gráfica A se puede ver que si el taxímetro marca 71 el precio es de 5960 y la carrera la aproximan a 6000 en el taxímetro de 72 marcaría 6040 entonces en los dos casos sería 6000</p> |
| <p>En la gráfica A se puede ver que si el taxímetro marca 71 el precio es de 5960 y la carrera la aproximan a 6000 en el taxímetro de 72 marcaría 6040 entonces en los dos casos sería 6000</p>  |

Imagen 20. Situación 1 \_ ítem c \_ taxi A \_ caso 1

En el segundo tipo de respuesta, 9 de 22 (41%) estudiantes, escogieron 72 unidades, ya que este tiene un valor correspondiente a \$6.040 pesos, aproximándolo al valor dependiente (ver Imagen 21).

|   |
|---|
| <p>c. Si el taxista le cobró a "Tal Cual" por la carrera \$6.000 pesos ¿Cuántas unidades marco el taxímetro?</p> <p>Taxi A: El taxímetro marco 72 unidades pero serían 6040 pesos</p> |
| <p>El taxímetro marco 72 unidades pero serían 6040 pesos</p>  |

Imagen 21. Situación 1 \_ ítem c \_ taxi A \_ caso 2

Pasa lo mismo con el tercer tipo de respuesta, en este solo 1 de 22 (4%) estudiantes eligió la unidad 71. En el análisis *a priori* se pensaba que eligieran la unidad 71 pues al mover el taxi con el deslizador sería la primera unidad cercana a \$6.000 pesos, como queda evidenciado el resultado fue distinto, pues la mayoría opto por 72 unidades (ver Imagen 22).

c. Si el taxista le cobró a "**Tal Cual**" por la carrera \$6.000 pesos ¿Cuántas unidades marco el taxímetro?

Taxi A: 71

**Imagen 22. Situación 1 \_ ítem c \_ taxi A \_ caso 3**

Finaliza con el último tipo de respuesta, en la cual 5 de 22 (23%) estudiantes escribieron que 71,5 eran las unidades próximas para ese valor dependiente, valor que no se tuvo en cuenta como respuesta de los estudiantes en el análisis *a priori*, pues el deslizador se configuró para que movieran el taxi de a una unidad sin tener en cuenta valores decimales (ver Imagen 23).

c. Si el taxista le cobró a "**Tal Cual**" por la carrera \$6.000 pesos ¿Cuántas unidades marco el taxímetro?

Taxi A: para que al taxi A le gilla cobrado 6000 pesos tu haber recorrido 71,5 unidades

Para el taxi A le haya cobrado 6000 pesos al haber recorrido 71.5 unidades.

**Imagen 23. Situación 1 \_ ítem c \_ taxi A \_ caso 4**

Para la gráfica del Taxi B se tenía previsto que los estudiantes identificaran el valor constante de \$6.000 pesos entre las unidades 71 y 72, este resultado fue evidenciado en tan solo 3 de 22 (4%) estudiantes, esto indica que un 19 de 22 (96%) estudiantes optaron por la opción de elegir 71 o 72 unidades, no fue equilibrado este porcentaje entre estas dos unidades, pues el 77% escogió como

verdadera 72 unidades, el cual es un porcentaje amplio que no interpretaron el tramo constante de ambas unidades en la gráfica.

El 32% de los estudiantes no tuvieron dificultad al identificar que para 71 y 72 unidades corresponde un valor de \$5.960 y \$6.040 pesos respectivamente, los cuales se aproximan a \$6.000, haciendo una conversión pasando de la gráfica a dar una solución en lenguaje natural y representación numérica, además al usar la gráfica desarrollaron *esquemas de uso*, pues algunos estudiantes tomaron las teclas derecha e izquierda para mayor precisión en las parejas ordenadas, en las cuales el medio les brindó la retroacción de transmitir que en estas unidades habían un valor aproximado llegando así a que la acción que realizó el estudiante es una validación positiva, ya que identificó lo pedido en la pregunta.

Por otro lado el 68% de los estudiantes restantes no lograron identificar que las dos unidades eran próximas a \$6.000 pesos siendo esto que al interactuar con el medio, la acción que realizó no permitió recibir retroacciones y el estudiante no alcanzó lo que se proponía en este ítem.

Por otro lado en el taxi B, se presentó un resultado no esperado con respecto a los análisis *a priori*, puesto que solo un 4% identificaron el tramo constante en las unidades 71 y 72, puesto que el estudiante interactuó con el medio de tal manera que le permitió recibir retroacciones para alcanzar lo propuesto ayudado de un buen *esquema de uso*. Mientras que el 96% de los estudiantes no realizaron una acción adecuada que le permitiría recibir retroacciones para alcanzar una validación positiva.

**d. ¿Qué similitudes o diferencias observas con respecto al precio y las unidades entre el Taxi A y Taxi B?**

Al analizar las hojas de trabajo se encontró que 16 de 22 (73%) estudiantes se fijaron que en la gráfica del Taxi A, el precio siempre varía cada vez que se aumentan las unidades, además que el incremento era de \$80 por cada unidad.

La misma cantidad de estudiantes analizaron que en la gráfica del Taxi B, es constante hasta 48 unidades, notando que en algunas partes de la gráfica presentaba pequeños por tramos constantes lo que implica tener dos unidades con el mismo valor. Lo anterior se evidencia en el caso de uno de los estudiantes que notaron estas similitudes y diferencias (ver Imagen 24).

|   |
|---|
| <p>d. ¿Qué similitudes o diferencias observas con respecto al precio y las unidades entre el Taxi A y Taxi B?</p> <p>TAXI A: cambian los precios según las unidades porque siempre aumenta.</p> <p>TAXI B: es constante y cuesta lo mismo hasta llegar a la unidad 48 y luego aumenta y esta constante por algunas unidades también. A veces cambia el precio y a veces no.</p> |
| <p>Taxi A cambian los precios según las unidades porque siempre aumenta.</p> <p>Taxi B es constante y cuenta lo mismo hasta llegar a la unidad 48 y luego aumenta y esta constante por algunas también. A veces cambia el precio y a veces no.</p>  |

**Imagen 24. Situación 1 \_ ítem d \_ caso 1**

De acuerdo a la anterior imagen los estudiantes no encontraron regularidad en establecer cada cuantas unidades aumenta y cada cuantas queda constante.

Otro caso se presentó por parte de 4 de 22 (18%) estudiantes que solo se fijaron en exactitud de los precios que presenta el taxi B y caso contrario de la poca exactitud del taxi A.

Por último 2 de 22 (9%) estudiantes justificaron la pregunta tomando casos particulares del ítem anterior, es decir que interpreta el funcionamiento del taxímetro con aproximar los precios para que sea un cobro exacto, tomando como

ejemplo el ítem (c) del cobro de \$6.000 pesos por una carrera en un taxi, respuesta que no fue prevista para este último ítem (ver Imagen 25), la producción completa del estudiante en el anexo 13.

d. ¿Qué similitudes o diferencias observas con respecto al precio y las unidades entre el Taxi A y Taxi B?

LOS 2 TIENEN EL MISMO VALOR SOLO QUE EL TAXI A EL TAXÍMETRO COBRA 40 CENTAVOS MAS PERO ENTONCES EL TAXISTA LO APROXIMA A 6000 PESOS

Los 2 tienen el mismo valor solo que el taxi A el taxímetro cobra 40 centavos mas pero entonces el taxista lo aproxima a 6000 pesos

Imagen 25. Situación 1 \_ ítem d \_ caso 2

**3. “Tal Cual” desea saber ¿Cuál de las dos gráficas representa de manera más certera la información que suministra el periódico? Explica tu elección.**

Para solucionar esta pregunta surgieron dos tipos de respuestas:

Una de ellas 17 de 22 (77%) estudiantes consideraron que la gráfica del Taxi B es la que mejor representa la información del periódico, porque incluyen el banderazo, la carrera mínima y a partir de 48 unidades el taxímetro empieza a aumentar el valor de la tarifa.

El segundo tipo de respuesta se presentó por parte de 5 de 22 (23%) estudiantes, que consideran la gráfica del Taxi A como la más acertada para representar la noticia del periódico, justificando su elección al decir que esta aumenta \$80 pesos por cada unidad recorrida, mas no interpretaron la gráfica con relación a la carrera mínima presentada en el periódico.

A modo de conclusión, se puede afirmar que el objetivo propuesto para esta situación se vio desarrollado en los conocimientos nuevos que adquirieron los estudiantes, llevándolos a identificar la relación entre un lenguaje verbal con las coordenadas cartesianas de la gráfica. Además de identificar elementos de una función por tramos al reconocer que en algunos por tramos se comporta de manera constante, y en otros crecientes. Por otro lado reconocen la dependencia del precio con respecto a las unidades recorridas.

De acuerdo, a los estándares se evidencio que el 77% de los estudiantes analizaron las representaciones gráficas cartesianas, los comportamientos y propiedades de la función por tramos pues mencionaban que el taxi A era lineal y cobra de \$80 por unidad y el Taxi B era constante en un tramo aumente y vuelve constante y así en otras partes de la gráfica con el valor de unidad de \$100 pesos, asimismo se presentan las conversiones que se identificaron, por ejemplo pasar de la representación gráfica o tabular a las soluciones en lenguaje natural y se evidencia la *fase de formulación* como se presentó en el *a priori*, al mismo tiempo se puede decir que el estudiante siempre interactuó con el medio y explorando esquemas de uso, sobre el cual pudo realizar acciones que le permitieron recibir retroacciones con el fin de validar sus necesidades, ubicando puntos y precios ya sean pedidos o dados, siendo de esta manera una validación positiva o negativa.

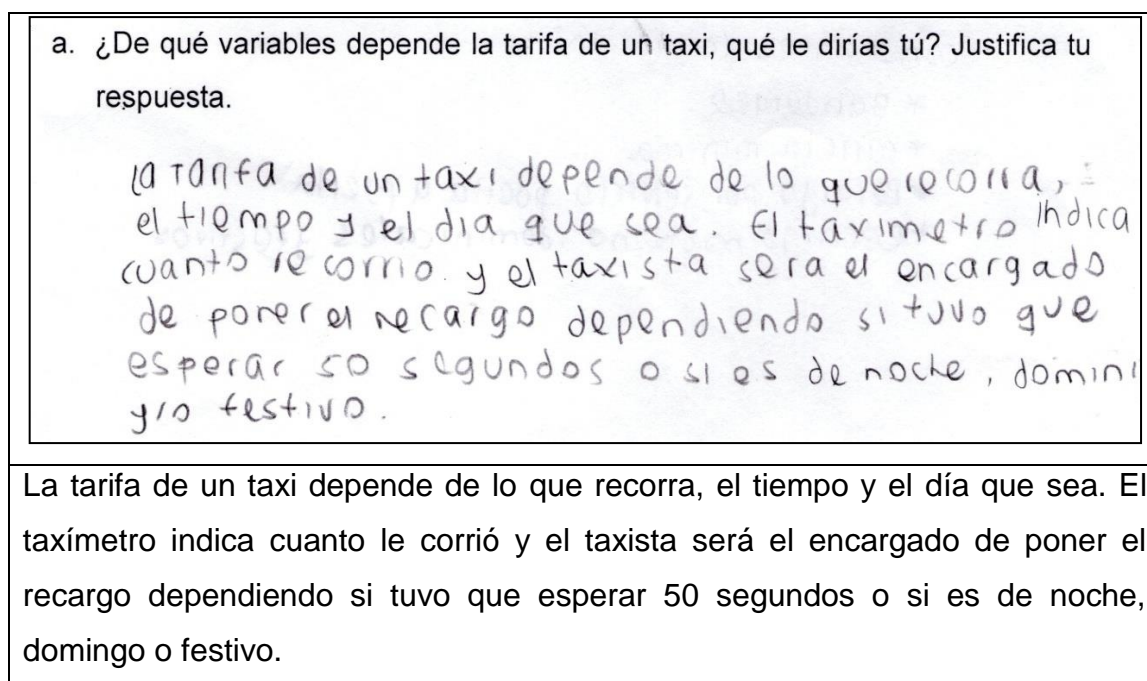
#### **4.2.2 Situación 2. “La carrera de un taxi”**

El tiempo de 45 minutos previsto en el análisis *a priori* para la situación (ver Tabla 9) fue realmente amplio, pues los estudiantes la desarrollaron en 30 minutos (ver Tabla 16), pues la situación se desarrolló sin inconvenientes técnicos y como se planeó en el análisis *a priori*, el docente presentó y explicó la situación a los estudiantes de igual manera como se realizó en la situación anterior, a diferencia que esta situación sólo se trabajó con la página web del periódico y el video del “Boletín del consumidor” que ha sido descargado.

Los estudiantes con base en los dos elementos, después de completar la tabla prosiguen a responder los siguientes ítems de la pregunta 2:

- a. **¿De qué variables depende la tarifa de un taxi, qué le dirías tú? Justifica tu respuesta.**

Para ello 6 de 23 (26%) de los estudiantes responde efectivamente que el recorrido, el tiempo de espera y los tres tipos de recargo son las variables que influyen en el cobro de una carrera en taxi, un ejemplo de ello se vivencia en la imagen 26.



**Imagen 26. Situación 2 \_ ítem a \_ caso 1**

Por consiguiente, el resto de los estudiantes lograron identificar algunas variables, como por ejemplo 8 de 23 (35%) estudiantes tomaron que la tarifa de un taxi depende del valor de cada unidad, recargos y el recorrido, pero no consideran que el tiempo también es una variable en el cobro de la carrera de un taxi (ver Imagen 27).

a. ¿De qué variables depende la tarifa de un taxi, qué le dirías tú? Justifica tu respuesta.

Yo le diría que la tarifa de un taxi depende de las variables de recorrido y de su horario porque si es en horas de la noche el precio será 1000 pesos más.

Yo le diría que la tarifa de un taxi depende de las variables de recorrido y de su horario porque si es en horas de la noche el precio será de 1000 pesos más.

**Imagen 27. Situación 2 \_ ítem a \_ caso 2**

Asimismo 7 de 23 (30%) estudiantes, identificaron que depende de los recargos al tener en cuenta el día, la hora y el tiempo de espera, pero también toman el banderazo como variable de la que depende el cobro de una carrera, se evidencia que no es claro para ellos que el banderazo es constante (ver Imagen 28).

a. ¿De qué variables depende la tarifa de un taxi, qué le dirías tú? Justifica tu respuesta.

La variable de la tarifa de un taxi depende del banderazo, el tiempo de espera, recargo por servicio puerta a puerta y si es después de las 7pm o es domingo serían 1000 pesos de más.

Lo variable de la tarifa de un taxi depende del banderazo, el tiempo de espera, recargo servicio puerta a puerta y después de las 7pm o es domingo serían 1000 pesos de más.

**Imagen 28. Situación 2 \_ ítem a \_ caso 3**

Por otro lado 2 de 23 (9%), estudiantes se enfocaron en el recorrido del taxi y en los valores que representan las variables, sin indicar claramente las posibles



variables que intervienen en el cobro, además que es necesario lo que determina el gobierno para las tarifas de los taxis y lo que influye al cambiar las tarifas por ejemplo a las afueras de la ciudad (ver Imagen 29).

a. ¿De qué variables depende la tarifa de un taxi, qué le dirías tú? Justifica tu respuesta.

Yo le diría a tal cual que las variables de un taxi dependen de lo que está determinado por el gobierno en cada ciudad, entonces ~~si~~ si el taxi se sale de cierto perímetro comienza a regir otras variables.

Yo le diría a tal cual que las variables de un taxi dependen de lo que está determinado en el gobierno en cada ciudad, entonces si el taxi sale de cierto perímetro comienza a regir otras variables.

**Imagen 29. Situación 2 \_ ítem a \_ caso 4**

Por ende se puede decir que en este ítem, los resultados informaron que un alto porcentaje (100%) de los estudiantes describieron en registro de lengua natural sus soluciones al indicar cuáles son las variables que intervienen en el cobro de una carrera, aunque con algunas imprecisiones de redacción y con la ayuda de la tabla presentada en la situación (ver Anexo 14).

**b. ¿El recargo nocturno, dominical y festivo interfiere en el valor de la tarifa mínima? Justifica.**

En este ítem se analizaron tres tipos de casos para la solución:

En el primer caso 11 de 23 (48%) estudiantes indicaron que, una persona debe pagar por la carrera un valor de \$5.000 pesos, sin tener presente que, al ser domingo y con nocturno se debe cobrar un acumulado de \$2.000 pesos a la carrera mínima, pero es válido, pues los estudiantes solo tomaron el dominical o

festivo sin aplicar recargo nocturno si es así la respuesta es posible (ver Imagen 30).

b. ¿El recargo nocturno, dominical y festivo interfiere en el valor de la tarifa mínima? Justifica.

Si interfiere; Aumenta \$1000 entonces costaría: \$5.000

+ \$4.000 → carrera mínima.  
\$1.000 → Recargo nocturno, dominical y festivo.  
\$5.000

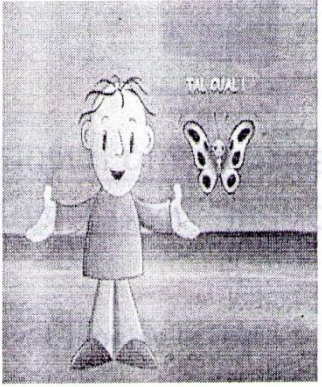
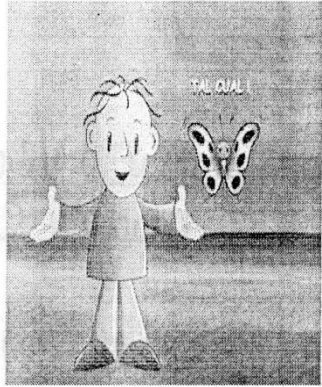


Imagen 30. Situación 2 \_ ítem b \_ caso 1

Otro caso se presentó con 11 de 23 (48%) estudiantes, quienes indicaron que sólo el valor recargo dominical o festivos sin tener presente el recargo nocturno, lo mismo que la pregunta anterior puede que solo lo hayan tomado sin el recargo nocturno, indicando solamente el valor de \$1.000 pesos y sin sumárselo a la carrera mínima (ver Imagen 31).

b. ¿El recargo nocturno, dominical y festivo interfiere en el valor de la tarifa mínima? Justifica.

Si interfiere por que si el recorrido es después de las 8pm te van a cobrar 1000 de más.




Si interfiere por que si el recorrido es después de las 8 pm te van a cobrar 1000 de más.

Imagen 31. Situación 2 \_ ítem b \_ caso 2

El último caso fue de 1 de 23 (4%) estudiantes que se aproxima a la respuesta correcta al responder que \$1.000 pesos como recargo dominical y festivo, y que además si es mas de las 8:00 p.m. incluye un nuevo recargo que es el nocturno lo cual suma \$2.000 pesos pero sin aclarar que el valor por añadidura es sumado a la carrera mínima (ver Imagen 32).

b. ¿El recargo nocturno, dominical y festivo interfiere en el valor de la tarifa mínima? Justifica.

Si, el valor de una carrera nocturna, dominical o festivo se le agrega un valor de +1000 y si es por la noche se le agrega otros 1000 =2000.



Si, el valor de una carrera nocturna, dominical o festivo se le agrega un valor de + 1000 y si es por la noche se le agrega otros 1000 =2000.

Imagen 32. Situación 2 \_ ítem b \_ caso 3

En este ítem, se presenta que un 52% de los estudiantes realizaron operaciones aritméticas, y el lenguaje natural para justificar sus respuestas mientras que el 48% sólo usa el lenguaje natural para dar sus respuestas, pues los estudiantes no alcanzaron a expresar la relación aditiva en las cantidades de la carrera mínima y el recargo dominical o festivo (ver Anexo 15).

**c. Si “Tal cual” el domingo recorrió 8 km en taxi para llegar al estudio de grabación del noticiero ¿Cuánto pagó por este recorrido? Muestra los cálculos requeridos para llegar a la respuesta.**

Para dar respuesta a este interrogante, se presentó en los estudiantes dos casos diferentes:

En el primero 12 de 23 (52%) estudiantes escribieron que deberá pagar un valor de \$9.000 pesos (Ver imagen 33), incluyendo lo del recargo dominical, respondieron de acuerdo a lo que se había previsto en el análisis a *priori*.

c. Si "Tal cual" el domingo recorrió 8 km en taxi para llegar al estudio de grabación del noticiero ¿Cuánto pagó por este recorrido? Muestra los cálculos requeridos para llegar a la respuesta.

Tal cual" pago por este recorrido 9000 pesos.

8 km = 8000 metros

80 metros = \$80

$$\frac{8000}{80} = 100$$

$$8000 + 1000(\text{Domingo}) \times 80 = 9000 \text{ pesos}$$

\$9000

Imagen 33. Situación 2 \_ ítem c \_ caso 1

En el segundo caso 11 de 23 (48%) estudiantes, tomaron en cuenta el valor de la unidad, dando un valor de \$9.400 pesos (Ver imagen 34) que deberá pagar "Tal Cual" por la carrera esta opción es analizada en el a *priori*.

c. Si "Tal cual" el domingo recorrió 8 km en taxi para llegar al estudio de grabación del noticiero ¿Cuánto pagó por este recorrido? Muestra los cálculos requeridos para llegar a la respuesta.

1 km = 1000 m

8 km = 8000 m = 80 = 100 x 84 = 8.400

$$\begin{array}{r} 8.400 \\ + 1.000 \\ \hline 9.400 \end{array}$$

Por este recorrido pagó 9.400.

Imagen 34. Situación 2 \_ ítem c \_ caso 2



Al analizar las hojas de trabajo se puede decir que el 100% de los estudiantes realizaron operaciones aritméticas, para conseguir el valor de la carrera, observando que ningún estudiante se apoyó en la gráfica del Taxi 2B de la situación 1, para hallar el valor de las unidades, en la realización de estas operaciones se observan que los estudiantes aplican la conversión del sistema métrico al pasar kilómetros a metros, y de metros a unidades.

Se puede evidenciar que a pesar de contar con la posibilidad de utilizar la gráfica del Taxi 2B en GeoGebra o realizar el procedimiento a lápiz y papel, los estudiantes privilegiaron este último, lo cual muestra la poca apropiación del medio para dar respuesta a la pregunta planteada.

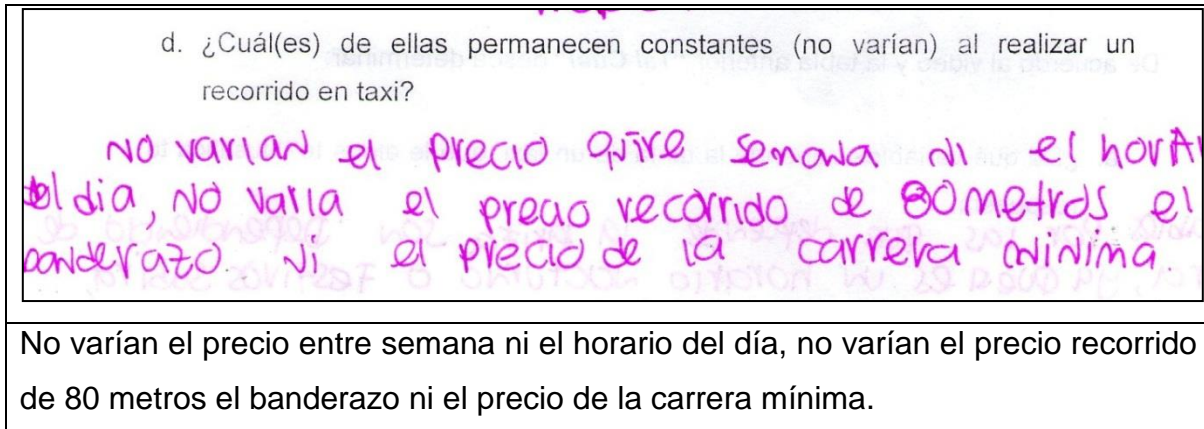
**d. ¿Cuál(es) de ellas permanecen constantes (no varían) al realizar un recorrido en taxi?**

Para solucionar este interrogante se presentaron dos casos diferentes; en el primero 18 de 23 (78%) estudiantes respondieron que las variables constantes en un recorrido eran banderazo, carrera mínima, el recargo puerta a puerta y los recargos nocturno, dominical y festivo, lo cual se evidencia en la siguiente solución (ver imagen 35).

|  |
|--|
| <p>d. ¿Cuál(es) de ellas permanecen constantes (no varían) al realizar un recorrido en taxi?</p> <p>El banderazo, la carrera mínima, recargo servicio puerta a puerta y el recargo de domingo, después de las 8 y festivo son constantes nunca varían.</p> |
| <p>El banderazo, la carrera mínima, recargo servicio puerta a puerta y el recargo de domingo, después de las 8 y festivo son constantes nunca varían.</p>  |

**Imagen 35. Situación 2 \_ ítem d \_ caso 1**

En el segundo caso 5 de 23 (22%) estudiantes no respondieron de manera coherente, pues tomaron que depende de las tarifas de cada ciudad sin dar solución a lo que se les preguntaba (ver Imagen 36).



**Imagen 36. Situación 2 \_ ítem d \_ caso 2**

Al revisar las hojas de trabajo de la presente situación se puede concluir que algunos estudiantes interpretaron, reconocieron y validaron las relaciones que existen entre variables al identificar la dependencia de las variables en el cobro de una carrera, al mismo tiempo tomaron decisiones al identificar los parámetros que varían y las que permanecen constantes en el valor de la tarifa de un taxi y al realizar un recorrido, además el significado de los recargos. Por otro lado, se presentaron las fases de formulación en las cuales ellos conjeturan y crean hipótesis. Llegando de esta manera a una validación positiva o negativa, pues se puede decir si un estudiante alcanzó o no lo previsto en el análisis *a priori* de cada pregunta.

#### **4.2.3 Situación 3. “Comparando precios”**

Comparando el tiempo programado en el análisis *a priori* de la situación 3 (ver Tabla 9) y el tiempo que realmente se utilizó durante la experimentación (ver Tabla 16), se puede apreciar que sobrepasa la duración propuesta en el análisis *a priori*, debido a que en esta sesión se presentaron las situaciones 2 y 3, por ende

en esta situación algunos estudiantes no alcanzaron a realizar los dos últimos ítems (g) y (h), además no se logró planificar otra sesión, debido a que los estudiantes estaban culminando el año lectivo y realizaban diferentes actividades escolares que impedía tenerlos reunidos para continuar y cerrar la implementación.

En esta primera parte, los estudiantes tuvieron una comprensión general del enunciado, aunque algunos confundían el dato presentado del banderazo que no se mostraba reflejado en el listado de valores por unidad, por lo cual fue necesario leer nuevamente el enunciado, se hizo especial énfasis en la última oración *“Al iniciar una carrera se inicia con el banderazo, esto significa que el taxímetro empieza a contar desde 14 unidades y su valor es igual a \$1.400 pesos. De acuerdo a lo anterior analiza la siguiente tabla y la gráfica”*. Por otro lado, era necesario que el estudiante identificará en la situación las magnitudes de unidades recorridas como variable independiente, costo de la carrera como variable dependiente, se les hizo la pregunta: *“¿Cuáles son las magnitudes que intervienen en esta situación?”*. A lo cual ellos respondieron, las unidades y el precio.

En esta situación se analizaron los siguientes ítems:

**a. Compara las coordenadas que aparecen en el gráfico al mover el taxi con los datos de la tabla en la hoja de cálculo. ¿Qué puedes concluir?**

Para el análisis de este ítem se evidenció que la mayoría de los estudiantes reconocieron las cantidades que se mantienen constantes y las que variaban, para ello, algunos estudiantes realizaron la acción de mover el taxi y comparar las coordenadas con los valores de la tabla, en el primer tramo se encontró un valor constante de \$4.000 pesos entre 14 y 48 unidades, en el segundo tramo se presentó una variación de \$100 pesos por cada unidad, de esta manera relacionaron los dos registros el tabular y gráfico y se formularon preguntas como:

D: ¿Según la gráfica y la tabla, hay alguna diferencia?

E: [Señala la hoja de cálculo de GeoGebra] pues acá me están explicando todo lo de acá, porque mira que acá el valor es igual hasta que llegue al mínimo 47 y 48.

D: ¿Y por qué cree usted eso?

E: ¿Qué hay un mínimo?

D: Si, que acá [señala la hoja de cálculo de GeoGebra] todos están iguales.

E: Porque se supone que hasta llegar al mínimo que es 47- 48 se cobra los \$4.000 pesos, sin importar cuanto sea [señala en la hoja de cálculo las unidades entre 14 y 48] se van a cobrar lo mismo, ese es el mínimo para el taxista.

D: ¿Y eso lo puedes ver en la gráfica?

E: No

D: ¿No?, miremos por ejemplo 14 ¿Cuánto te da?

E: ¡Ahhh! Obvio se mantiene, obvio es que es recta, o sea está constante y está en \$4.000 pesos.

D: Pero allí [señalando el gráfico] te aparece constante ¿hasta qué unidad?

E: Hasta 48 [moviendo el taxi con el deslizador]

D: ¿Y en 49 es constante?

E: No

D: ¿Ya comienza a qué?

E: Ya empieza a ascender

D: A crecer ¿cierto? Y eso lo puedes ver aquí [señalando la hoja de cálculo de GeoGebra] ¿hasta 48 es constante?

E: Si obvio, y aquí ya cambia [señala con el ratón la celda de la unidad 49], sube \$100 pesos y sigue subiendo.

Además, de las preguntas que hizo el docente se evidenció como los estudiantes responden en la hoja de trabajo, relacionando las variables en los dos registros el tabular y el gráfico (ver Imagen 37):



- a. Compara las coordenadas que aparecen en el gráfico al mover el taxi con los datos de la tabla en la hoja de cálculo. ¿Qué puedes concluir?

Podemos evidenciar que de la 14 a la 48 el precio es 4000 ya después cada una unidad sube 100 pesos

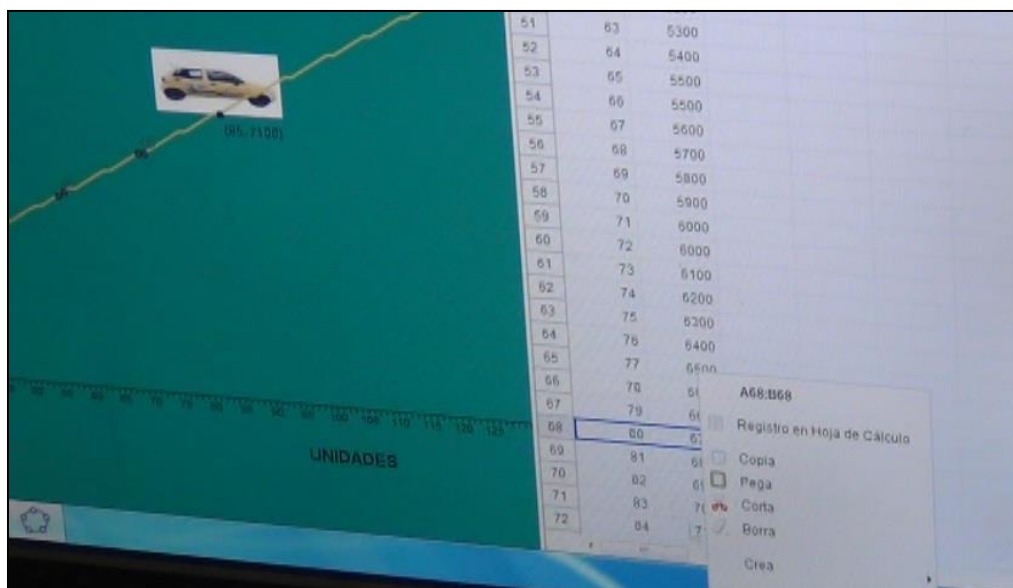
Podemos evidenciar que de la 14 a la 48 el precio es 4000 ya después cada unidad sube 100 pesos

**Imagen 37. Situación 3 \_ ítem a**

Con este ítem los estudiantes desarrollaron la fase de acción al utilizar *esquemas de uso* al comparar la representación gráfica con la representación tabular, apoyándose con el teclado para mayor precisión en la ubicación de las parejas ordenadas, además se presentó la conversión de los sistemas de registros presentes en este punto, ver producción completa del estudiante en el anexo 16.

- b. Según los datos representados en la hoja de cálculo ayuda a “*Tal cual*” a ubicar en la gráfica los puntos correspondientes al cobro de las carreras que marcan 57, 58, 71, 72, 80, 81, 84 y 85 unidades, para ello utiliza el comando lista de puntos.**

En el ítem se desarrolló un esquema de uso al ubicar pares ordenados de la tabla al gráfico, aquí no se presentaron las dificultades planteadas en el análisis *a priori* de alguna limitación en relacionar la correspondencias, de  $(x, g(x))$  como puntos cartesianos de la gráfica (ver Imagen 38).



**Imagen 38. Situación 3 \_ ítem b**

Este ítem fue guiado por el docente al indicar como debían utilizar el comando “*lista de puntos*” para que pasaran de la representación tabular a la gráfica, utilizando la conversión de los sistemas de representación involucrados.

- c. Ahora compara el “Listado de valores por unidades” con los datos de la hoja cálculo generada por el gráfico en GeoGebra. ¿Qué diferencias encuentras y qué puedes concluir?**

En este ítem, los estudiantes analizaron las dos tablas la primera es “Listado de valores por unidades” (ver Tabla 14) y la segunda es la hoja cálculo generada por el gráfico en GeoGebra (ver Imagen 10) presentadas en esta situación, para lo cual 17 de 21 (81%) de los estudiantes realizaron un análisis puntual  $(x, g(x))$  de las variables, encontraron que la diferencia entre las dos tablas es la coordenada de partida, es decir que, en la hoja de cálculo de GeoGebra inicia en 14 unidades y el listado de valores en (47-48 unidades). Un ejemplo es la imagen 39.

c. Ahora compara el "**Listado de valores por unidades**" con los datos de la hoja cálculo generada por el gráfico en GeoGebra. ¿Qué diferencias encuentras y qué puedes concluir?

en los datos de la hoja empieza desde 47 unidades en el PC empieza desde 14 unidades y los valores de las unidades son las mismas.

En los datos de la hoja empieza desde 47 unidades en el pc empieza desde 14 unidades y los valores de las unidades son las mismas.

**Imagen 39. Situación 3 \_ ítem c \_ caso 1**

Por otra parte, se presentó el caso de 4 de 21 (19%) de estudiantes que no encontraron ninguna diferencia entre las dos tablas, como se muestra a continuación (ver Imagen 40).

c. Ahora compara el "**Listado de valores por unidades**" con los datos de la hoja cálculo generada por el gráfico en GeoGebra. ¿Qué diferencias encuentras y qué puedes concluir?

No hay diferencias de datos, son los mismos.

No hay diferencias de datos, son los mismos.

**Imagen 40. Situación 3 \_ ítem c \_ caso 2**

Lo cual no se tenía previsto en el análisis *a priori*, es decir que no se percataron del valor constante de \$4.000 pesos entre el intervalo de [14,48] que presenta la hoja de cálculo de GeoGebra.

Aunque esta posible justificación puede ser errónea ya que si un estudiante dice que no hay diferencia porque es innecesario poner de la unidad 14 hasta la

48 el precio, pues ya se sabe que eso es la carrera mínima y no tendrá sentido que estuviera explícita en el listado de valores que portan los taxistas.

Los sistemas de representación utilizados en este ítem fue en un mismo registro, pues utilizaron tanto la tabla del listado de valores como la tabla de la hoja de cálculo en GeoGebra.

**d. Según lo estudiado anteriormente junto a “*Tal cual*” responde: ¿En qué intervalos el precio *umenta* y en cuales se mantiene *constante*?**

En este ítem, los estudiantes completaron sin inconvenientes la tabla, de manera que 17 de 21 (81%) estudiantes se apoyaron de la gráfica, pues esta les permitió bridar retroacciones ya que al “ver” la forma de la gráfica en unos tramos es constante y en otros afín (ver Imagen 10) para validar la variación del precio en cada intervalo, por otro lado, el 19% restante utilizó la representación tabular (ver Tabla 14) para asociar los valores de cada columna, de manera que encontraron la diferencia entre dos valores consecutivos de la columna del precio con respecto a los valores consecutivos de las unidades (ver Imagen 41).

Así la totalidad de los estudiantes lograron identificar y completar la representación tabular, a partir de la representación gráfica y la tabla. Sin privilegiar ninguno de los dos registros, de esta manera los estudiantes pudieron establecer una representación puntual de la relación entre las unidades y el precio (ver Anexo 17).

d. Según lo estudiado anteriormente junto a “*Tal cual*” responde: ¿En qué intervalos el precio *umenta* y en cuales se mantiene *constante*?

| Intervalo                           | Precio \$                        | Intervalo                           | Precio \$                       |
|-------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| [14,48]<br>ó<br>$14 \leq x \leq 48$ | constante<br>en<br>4.000         | (59,60]<br>ó<br>$59 \leq x \leq 60$ | constante<br>en<br>5000         |
| (48,53]<br>ó<br>$48 \leq x \leq 53$ | Aumenta, de<br>4000 a 4500       | (60,65]<br>ó<br>$60 \leq x \leq 65$ | AUMENTA<br>de<br>5000 a<br>5500 |
| (53,54]<br>ó<br>$53 \leq x \leq 54$ | Constante en<br>4.500            | (65,66]<br>ó<br>$65 \leq x \leq 66$ | constante<br>en<br>5500         |
| (54,59]<br>ó<br>$54 \leq x \leq 59$ | Aumenta<br>de<br>4.500 a<br>5000 | (66,71]<br>ó<br>$66 \leq x \leq 71$ | Aumenta<br>de 5500<br>a 6000    |

Tabla 2. Análisis de variación por intervalos

Imagen 41. Situación 3 \_ ítem d

e. Utiliza los intervalos de la tabla anterior para encontrar la pendiente de los primeros 4 intervalos. Recuerda que:

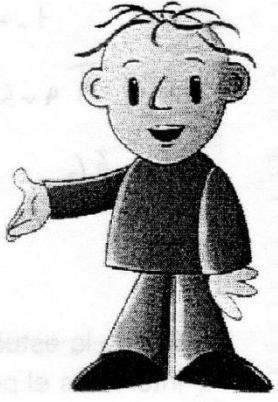
***La pendiente es la inclinación entre dos puntos del plano cartesiano y se halla haciendo el cociente de la diferencia entre los valores de “y” y “x”***

En el análisis de los resultados de este ítem, encontramos que 12 de 21 (57%) de los estudiantes asoció la pregunta con la expresión de la pendiente, implícitamente pasaron de una lengua natural a una representación numérica, además realizaron tratamientos en el registro aritmético, se tomaron los 4 primeros intervalos de covariación de la tabla del ítem anterior, e identificaron la coordenada cartesiana para realizar el cociente entre "la diferencia del precio" y "la diferencia de las unidades", y lograron formular que varía \$100 pesos en los intervalos

crecientes y \$0 pesos en los intervalos constantes sin variación, un ejemplo del procedimiento realizado es (ver Imagen 42), la producción completa de otro estudiante en el anexo 18.

e. Utiliza los intervalos de la tabla anterior para encontrar la pendiente de los primeros 4 intervalos. Recuerda que:

*La pendiente es la inclinación entre dos puntos del plano cartesiano y se halla haciendo el cociente de la diferencia entre los valores de "y" y "x"*



$$\begin{array}{l}
 (x_1, y_1) \quad (x_2, y_2) \\
 (14, 4000) \quad (48, 4000) \\
 \frac{4000 - 4000}{48 - 14} = \frac{0}{35} = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (x_3, y_3) \quad (x_4, y_4) \\
 (48, 4000) \quad (53, 4500) \\
 \frac{4500 - 4000}{53 - 48} = \frac{500}{5} = 100
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (x_5, y_5) \quad (x_6, y_6) \\
 (53, 4500) \quad (54, 4500) \\
 \frac{4500 - 4500}{54 - 53} = \frac{0}{1} = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (x_7, y_7) \quad (x_8, y_8) \\
 (54, 4500) \quad (59, 5000) \\
 \frac{5000 - 4500}{59 - 54} = \frac{500}{5} = 100
 \end{array}$$

**Imagen 42. Situación 3 \_ ítem e \_ caso 1**

Por otra parte, se presentó el caso de 2 de 21 (10%) de los estudiantes tomaron puntos cualesquiera consecutivos, además de aplicar incorrectamente el tratamiento aritmético, como por ejemplo (ver Imagen 43).

$$\begin{aligned}
 y &= 60 - 59 = 1 \\
 x &= 5000 \\
 \frac{60 - 59}{5000 - 5000} &= \frac{1}{0} = 0 \\
 \\
 y &= 47 - 46 = 1 \\
 x &= 4000 \\
 \frac{47 - 46}{4000 - 4000} &= \frac{1}{0} = 0
 \end{aligned}$$

Imagen 43. Situación 3 \_ ítem e \_ caso 2

Por último 7 de 21 (33%) de los estudiantes no respondieron esta pregunta.

f. ¿Cuánto varía el precio en cada unidad? \_\_\_\_\_

¿Qué puedes concluir del resultado obtenido en el punto anterior y la variación del precio de cada unidad? Observa su comportamiento en la gráfica.

En este análisis se encontró que 12 de 21 estudiantes (57%) que realizaron el tratamiento aritmético de la pregunta anterior, validaron la inclinación y el comportamiento de variación en la gráfica y la asociaron como la razón de cambio entre magnitudes, esto se evidencia en la imagen 44.

f. ¿Cuánto varía el precio en cada unidad? de 100 a 0 pesos

¿Qué puedes concluir del resultado obtenido en el punto anterior y la variación del precio de cada unidad? Observa su comportamiento en la gráfica.

Que cuando el punto es constante con el otro punto, la pendiente no se mueve y es 0.  
 cuando hay dos puntos inclinados la pendiente se mueve por 100 puntos.

Imagen 44. Situación 3 \_ ítem f \_ caso 1

Por otro lado, se analizó que 4 de 21 (19%) de los estudiantes articularon el registro gráfico con el tabular, al recibir retroacciones por parte del primer registro que le permitió al estudiante formular conjeturas, como por ejemplo, la gráfica después de la unidad 48 empieza a cambiar y varía de \$100 pesos, mientras que en el tramo constante la variación es de \$0 pesos, llegando de esta manera a una validación positiva que le brindó el medio al determinar la variación del precio en los 4 primeros intervalos para describir su comportamiento en lengua natural, (ver Imagen 45).

|  |
|--|
| <p>f. ¿Cuánto varía el precio en cada unidad? <i>normalmente varía 100 pero cada 5 unidades el precio es constante durante 2 unidades</i></p> <p>¿Qué puedes concluir del resultado obtenido en el punto anterior y la variación del precio de cada unidad? Observa su comportamiento en la gráfica.</p> <p><i>Después de la unidad 48 por cada 5 unidades se aumenta 100 pero en un intervalo de 2 unidades se mantiene constante así sucesivamente</i></p> |
| <p>Normalmente varía 100 pero cada 5 unidades el precio es constante durante 2 unidades.</p> <p>Después de la unidad 48 por cada 5 unidades se aumenta 100 pero en un intervalo de 2 unidades se mantiene constante así sucesivamente.</p>   |

**Imagen 45. Situación 3 \_ ítem f \_ caso 2**

Por último, 5 de 21 (24%) de los estudiantes no respondieron la pregunta<sup>17</sup>.

**g. Defina una función a trozo al considerar los primeros 4 intervalos de variación de la tabla 15, tener en cuenta los valores de las pendientes halladas y el precio al iniciar cada intervalo.**

En el análisis de este ítem, se encontró que 8 de 10 (80%) estudiantes

<sup>17</sup> A partir del ítem g se realizó la situación con 10 estudiantes, debido a que el resto necesitaron tiempo para realizar una presentación del área de Inglés, por esta razón, se analizaron los porcentajes y protocolos con esta cantidad de estudiantes.



realizaron procedimientos al efectuar tratamientos aritméticos para determinar las expresiones algebraicas de los intervalos de covariación, los cuales se evidencian en dos casos diferentes:

Para el primer caso 5 de 10 (50%) estudiantes partieron de una representación simbólica la función afín  $y = mx + b$ , escogiendo unidades específicas de los tramos constantes, al confundir el valor de la pendiente en un tramo constante, además identificaron la variable  $x$  como una unidad, hallando el valor de la primera unidad de cada intervalo constante (ver Imagen 46).

g. Defina una función a trozo al considerar los primeros 4 intervalos de variación de la tabla 2, tener en cuenta los valores de las pendientes halladas y el precio al iniciar cada intervalo.

$y = mx + b = (14, 4000)$

$4000 = 0(14) + b$       $0(14) + 4000$   
 $4000 = 0 + b$       $0 + 4000$   
 $b = 4000$       $-4000$

$y = mx + b = (54, 4500)$

$4500 = 0(54) + b$       $0(54) + 4500$   
 $4500 = 0 + b$       $0 + 4500$   
 $b = 4500$       $= 4500$

$y = mx + b = (53, 4500)$

$4500 = 100(53) + b$   
 $4500 - 5300 = b$   
 $b = -800$

$100(53) - 800$   
 $5300 - 800$   
 $4500$

$y = mx + b = (59, 5000)$

$5000 = 100(59) + b$   
 $5000 = 5900 + b$   
 $5000 - 5900 = b$   
 $b = -900$

$100(59) - 900$   
 $5900 - 900$   
 $= 5000$

Imagen 46. Situación 3 \_ ítem g \_ caso 1

Para el segundo caso, 3 de 10 (30%) estudiantes, tomaron tramos constantes y afines, en los cuales identificaron la pendiente de cada intervalo, es decir, en el tramo constante es 0 y en el tramo que ascendente es 100, además relacionan que para hallar el valor de cualquier unidad es necesario que la  $x$  sea la resta de la unidad mayor con la menor en un tramo arbitrario (ver Imagen 47).

g. Defina una función a trozo al considerar los primeros 4 intervalos de variación de la tabla 2, tener en cuenta los valores de las pendientes halladas y el precio al iniciar cada intervalo.

$$\begin{aligned}
 & a \quad y = mx + b \quad (11, 4000) \quad b \quad y = 100(x + 4000) \\
 & \quad 4000 = 0(11) + b \quad \quad \quad = 100(31 - 98) + 4000 \\
 & \quad 4000 = 0 + b \quad \quad \quad = 100(3) + 4000 \\
 & \quad 4000 - 0 = b \quad \quad \quad = 300 + 4000 \\
 & \quad 4000 = b \quad \quad \quad = 4300 \\
 & \quad \boxed{y = 0x + 4000} \\
 & c \quad y = 0x + 4000 \\
 & \quad y = 0(54 - 53) + 4000 \\
 & \quad y = 0 + 4000 \\
 & \quad y = 4000
 \end{aligned}$$

Imagen 47. Situación 3 \_ ítem g \_ caso 2

Por último el 20% de los estudiantes no respondieron la pregunta.

**h. Complete la expresión como función a trozos de la siguiente forma.**

Con este ítem finaliza la situación, solo 2 de 10 (20%) estudiante halló la expresión algebraica por tramos, al tomar en cuenta de los tramos constante y afines. Llegando así a la generalización de cada tramo. Como se muestra a continuación: (ver Imagen 48)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{0(x-14) + 4000}{100(x-48) + 4000} & \text{Si } 14 \leq x \leq 48 \\ \frac{0(x-53) + 4300}{100(x-54) + 4300} & \text{Si } 48 \leq x \leq 53 \\ & \text{Si } 53 \leq x \leq 54 \\ & \text{Si } 54 \leq x \leq 59 \end{cases}$$

Imagen 48. Situación 3 \_ ítem h \_ caso 1

Por otro lado 4 de 10 (40%) estudiantes llegaron a un expresión errónea al generalizar cada tramo (ver Imagen 49).

$$g(x) = \begin{cases} \frac{10(x-14)+4000}{100(x-48)+4000} & \text{Si } 14 \leq x \leq 48 \\ \frac{0(x-53)+4000}{100(x-53)+4000} & \text{Si } 48 \leq x \leq 53 \\ \frac{0(x-53)+4000}{100(x-53)+4000} & \text{Si } 53 \leq x \leq 54 \\ \frac{100(x-53)+4000}{100(x-53)+4000} & \text{Si } 54 \leq x \leq 59 \end{cases}$$

**Imagen 49. Situación 3 \_ ítem h \_ caso 2**

Para finalizar el 40% restante de los estudiantes no respondieron la pregunta, pues se vieron limitados a encontrar la representación algebraica de la función por tramos de las unidades del taxi con respecto a la tarifa a pagar (ver Anexo 19).

Los estudiantes determinan los intervalos de covariación en la función por tramos, mediante la manipulación de la representación gráfica que conducen a respuestas, revelando la falta de articulación con las representaciones tabulares y algebraicas para determinar las respuestas.

En esta situación se decidió no usar la expresión algebraica al inicio, es decir, que no se tomó como un punto de partida si no como un punto de llegada, por ende se hace más complejo e importante la conversión, ya que los estudiantes deben hacer un cambio de registro de representación gráfica a la representación algebraica, dado que es uno de los cambios de representación semiótica más complejo, puesto que deben identificar las magnitudes y establecer su variación y dependencia. Una de las estrategias de solución empleadas por los estudiantes

favoreció la utilización de la tabla del ítem d y la representación gráfica del taxi 2B en GeoGebra.

La limitación que se presentó en los estudiantes fue el tiempo, pues como se dijo al inicio del análisis *a posteriori* la situación 2 y 3 se realizó en 2 horas lo cual no fue previsto en el análisis *a priori*, además de esto, la situación 3 era demasiado larga para que la resolvieran en ese espacio de tiempo, aunque no estuvieron presentes todos los estudiantes se puede evidenciar que la mitad de ellos lograron llegar a la expresión algebraica.

## CÁPITULO V

### CONCLUSIONES

Durante el desarrollo del presente trabajo se implementó la metodología de investigación de la micro ingeniería didáctica que permitió orientar y corroborar elementos teóricos en el desarrollo de la secuencia didáctica, al diseñar, experimentar y analizar los resultados. Esta investigación permitió fortalecer nuestra formación profesional como docentes en el área de la educación matemática.

Se diseñó una secuencia didáctica basada en la TSD de manera que integrará el software GeoGebra, complementado con el periódico que contextualiza las situaciones, pues las acciones realizadas por los estudiantes en el medio les brindó retroacciones y de este modo la interacción y manipulación, les permitió resolver los ítems propuestos.

Al llevar a cabo la experimentación de la secuencia didáctica se observó que al contextualizar las situaciones con la noticia del periódico, los estudiantes se enfocaron en la primera situación a interpretar las representaciones gráficas y relacionar los datos presentados en la noticia. De esta manera se puede decir que cada situación fue pertinente, pues involucraron elementos que resultaron familiares para los estudiantes, como la tarifa de los taxis en la ciudad de Cali, del mismo modo la ubicación de las situaciones favoreció el desarrollo del estudio de la función por tramos, pues en el orden en que se presentaron eran necesarios para desarrollar las siguientes.

Los análisis preliminares desarrollados en el marco teórico a partir de las tres dimensiones la cognitiva, matemática y didáctica, aportaron elementos importantes para el diseño, además de factores como, el reconocimiento de la

variación desde distintos registros de representación como el gráfico y el tabular, partiendo del uso de la tecnología.

Es recomendable proponer situaciones de variación en contextos reales y que tengan sentido en los estudiantes, ya que, de esta manera identificaron las variables que estuvieron en juego por medio de la manipulación del medio, en cuanto al cambio de la variable dependiente al variar la independiente.

De esta manera, el objetivo general se puede ver evidenciado, con lo dicho en los párrafos anteriores, pues se diseñó y se implementó la secuencia didáctica, haciendo uso del software GeoGebra tomando un contexto matemático como lo es el periódico al hacer el estudio sobre la función por tramos, el cual permitió a los estudiantes tomar casos de la vida real que ellos frecuentan, como lo fue las salidas a rumbeo y las variables que interfieren en el cobro de la carrera.

Se puede afirmar que la hipótesis planteada al inicio de esta investigación se cumplió en la gran mayoría de las situaciones, pues el haber integrado recursos como GeoGebra y el periódico, permitieron el cambio de registro de representación semiótica de una manera espontánea. De modo que, se vio reflejado en las tres situaciones implementadas, ya que los estudiantes pasaron fácilmente del registro gráfico al tabular y a la lengua natural, para sintetizar las soluciones que se han obtenido en otros registros.

De acuerdo, a lo anterior se puede afirmar que los diferentes tipos de registros de representación semiótica sobre el estudio de la función por tramos se vieron evidenciados en cada situación así:

En la situación 1, ya que la mayoría de los estudiantes interpretan la representación gráfica con los ítems planteados dando así sus justificaciones en lenguaje natural.

En la situación 2, se evidenció que el uso de la tabla sobre los valores correspondientes a las variables fue útil para ellos ya que dieron solución en lenguaje natural, además de tratamientos que hicieron en algunos casos como en el ítem d.

Para la situación 3, se utilizaron los tres tipos de registros de representación semiótica más destacables en este trabajo de grado como la representación gráfica, tabular y algebraica.

En cuanto a la pregunta de investigación, se pudo evidenciar la caracterización de los diferentes registros de representación semiótica y las transformaciones que utilizaron los estudiantes para justificar sus soluciones en los ítems respectivos, pues en la situación 2 utilizaron la lengua natural y los tratamientos aritméticos y en la situación 3 trabajaron con registros gráfico, tabular y algebraico, estos diferentes registros se pudieron observar cuando se analizó las hojas de trabajo y los protocolos de observación.

El estudio de las funciones por tramos, se abordó desde una perspectiva variacional, partiendo del registro gráfico como representación ejecutable, hacía diferentes registros como el tabular y el algebraico, lo cual rompe con una secuencia tradicional de enseñanza, como por ejemplo:

- Iniciar con la definición algebraica, luego con su representación gráfica, y después pasar al estudio de las propiedades, posteriormente operaciones procedimentales y finalmente a las aplicaciones en contextos reales.

En la experimentación se evidenció el poco interés de los estudiantes de verificar sus resultados con otros tipos de registros. De manera que, tratan de responder cada pregunta en el registro inicial dado.

Los resultados obtenidos nos muestran con satisfacción que las nociones de intervalo, constante y variable se dan como interiorizadas por la mayoría de los estudiantes. Caso contrario se evidenció que la conversión de representación gráfica a la algebraica presentaron dificultades, pues esto se reflejó en un porcentaje amplio en las últimas dos preguntas del análisis *a posteriori* de la situación 3. Aun así es posible aprovechar la tecnología para fomentar en los estudiantes procesos de razón como la variación y el cambio entre variables.

En el desarrollo de este trabajo y los resultados presentes en la aplicación de la secuencia didáctica, se aprecia que los estudiantes identificaron la función como cantidades que varían, al ver el cambio de las parejas ordenadas  $(x, g(x))$  en la representación gráfica.

La secuencia didáctica, tuvo buena acogida por parte de los estudiantes al presentarse en un contexto reconocido y vivido por ellos, como lo es el cobro de la carrera de un taxi y las variables que influyen en esta, de igual manera, al incluir a “*Tal cual*” indagando con preguntas que llevan a la formulación de conjeturas por parte de los estudiantes. De manera que, es una buena alternativa para que los docentes exploren diversas formas de diseñar y presentar situaciones, pues el integrar GeoGebra como medio didáctico permite realizar acciones sobre la representación gráfica que ayuda a desarrollar el pensamiento variacional.

Para la situación 3 se propone, que el estudiante ingrese la función por tramos en GeoGebra, puesto que podrá para validar la gráfica obtenida con la gráfica que trabajaron durante la situación.

Aunque la función por tramos no es estudiada en grado noveno de la educación secundaria puesto que no son presentadas explícitamente en los estándares del MEN, no obstante, hay un estándar que menciona la familia de funciones, así que los docentes pueden aplicar funciones por tramos que sean



continuos, y así no tener problemas con la discontinuidad y la existencia de límites en puntos específicos.

Por otro lado, como los estudiantes estaban finalizando el año lectivo ya conocían las funciones abordadas en la secuencia, lo que les permitió utilizar el contexto propuesto para establecer relaciones funcionales entre las variables involucradas, lo anterior se pudo evidenciar en la situación 3 con el ítem d, que los estudiantes reconocieron los intervalos que la componen a partir de la variación y la dependencia entre variables, los tramos constantes, la pendiente y el comportamiento de la gráfica.

Ahora bien, cabe resaltar que el desarrollo de la experiencia fue satisfactoria, porque los estudiantes a pesar de que es un nivel básico lograron desarrollar la secuencia didáctica sin ningún inconveniente, a pesar que la falta de tiempo y oportunidades de programar una sesión más para que el resto de estudiantes también llegaran a la expresión algebraica, no se logró concretar pues como se dijo en el *a posteriori* los estudiantes estaban finalizando año por tanto esto impidió un próximo encuentro.

Esta investigación ayuda a tener una perspectiva amplia acerca la enseñanza de funciones por tramos, convirtiéndose en la base para poder replantear posteriores estudios entorno a la enseñanza de las funciones en un ambiente tecnológico.

Como sugerencia para una próxima aplicación se tiene que: en la situación 1 los estudiantes deben responder según la información presentada en el periódico y no el análisis de la gráfica de manera aislada, aunque ese análisis permita observar la manera en que los estudiantes interpretan la gráfica del Taxi A.

De esta investigación, se producen los siguientes interrogantes:

- Dado que este trabajo se centró en las producciones de los estudiantes y no la labor del docente ¿cómo debería ser la gestión del docente al trabajar con el software GeoGebra para el estudio de la función por tramos?
- Debido a que en esta investigación no se ingresó la representación algebraica en GeoGebra para obtener su representación gráfica ¿Cómo sería la actividad de conversión de la representación algebraica a la representación gráfica en GeoGebra?

Por último, Se recomienda que en investigaciones posteriores de esta misma perspectiva, se orienten hacia los siguientes enfoques:

- La modelación matemática, desde diversas situaciones cotidianas, que propicien la enseñanza de funciones a través de cambios de registros.
- Enfocar la noción de función con variación en el proceso de modelación para estudiar otras clases de funciones como: (cuadráticas, cubicas, entre otras).
- Situaciones dinámicas que potencialicen el razonamiento matemático en los estudiantes, de manera que, relacionen la covariación como la razón de cambio de cantidades relacionadas que varían entre sí.

Finalmente, esta investigación enriqueció las prácticas pedagógicas, en la medida que es posible integrar contextos de la vida real que sean de interés en los estudiantes e integrarlos al aula mediante herramientas computacionales como GeoGebra, teniendo presente los estándares curriculares del MEN, pues permitió pensar en una secuencia didáctica diferente para el desarrollo del pensamiento variacional, en cuanto al análisis de intervalos continuos como la variación y el cambio en cada tramo para el estudio de la función por tramos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, M. (2010). Enseñando Transformaciones Geométricas Con Software De Geometría Dinámica. *En Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 132-142). Recuperado el 24 de octubre de 2012, de [http://funes.uniandes.edu.co/1169/1/132\\_ENSEANDO\\_TRANSFORMACIONES\\_GEOMETRICAS\\_CON\\_SOFTWARE\\_DE\\_GEOMETRA\\_DINMICA\\_Asocolme2010.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1169/1/132_ENSEANDO_TRANSFORMACIONES_GEOMETRICAS_CON_SOFTWARE_DE_GEOMETRA_DINMICA_Asocolme2010.pdf)

Acosta, M., Monroy, L. & Rueda, K. (2010). *Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio. Revista integración, 28 (2), 173 – 189.* Recuperado el 2 de Noviembre de 2012, de <http://matematicas.uis.edu.co/~integracion/Ediciones/vol28N2/V28N2-6Acosta.pdf>

Aprendiendo matemáticas 05, el precio del taxímetro (2012). Suplemento Periódico Qhubo. ISBN: 978-958-712-811-6

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En R. Douady, L., Moreno., & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-60). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana S.A de C.V.

Balacheff, N. (1988). *Transposición informática. Una nota sobre un nuevo problema para la didáctica.* (E. Fernández, Trad.) Cali, Colombia: Universidad del Valle. (Documento no publicado)

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los estudiantes de matemáticas.* Bogotá, Colombia: Una empresa docente, Universidad de los Andes.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática.* Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática

Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de Situaciones Didácticas*. (D. Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal. (Trabajo original publicado en 1986).

Cali, R. (2012, 3 de Marzo). Aumenta 100 pesos la carrera mínima de taxis en Cali. *El Tiempo*. Recuperado de: <http://www.eltiempo.com/archivo/documento/CMS-11267963>

Cedillo, T. E. (2006, enero-marzo). La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Los sistemas algebraicos computarizados. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(28), 129-153.

Chumpitaz, L. (2013). *La Génesis Instrumental: Un estudio de los procesos de instrumentalización en el aprendizaje de la función definida por tramos mediado por el software GeoGebra con estudios de ingeniería*. Tesis maestría. Perú: Pontificia Universidad Católica del Perú Escuela de posgrado.

Comisión Vallecaucana por la Educación (CVE). (s.f.). *Compilación evolución de resultados pruebas Saber 5, 9 Y 11 Valle del Cauca y Santiago de Cali*. Recuperado el 08 de Octubre de 2012, de <http://www.cve.org.co/Documentos/1.%20Comunidad/COMPILACI%C3%93N%20EVOLUCI%C3%93N%20DE%20RESULTADOS%20SABER.pdf>

D' Amore, B. (2006). *Objetos, significado, representaciones semióticas y sentido*. *Relime*, número especial, 177-195.

Del Castillo, A. & Montiel, G. (s.f. a). *Desarrollo del Pensamiento Covariacional en un Ambiente Gráfico Dinámico. Hacia una Génesis Instrumental*.

Recuperado el 24 de Octubre de 2012, de [http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/\(ADelCastillo-GMontiel2009b\)-ALME22-.pdf](http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/(ADelCastillo-GMontiel2009b)-ALME22-.pdf)

Del Castillo, A. & Montiel, G. (s.f. b). *¿Artefacto o instrumento? Esa es la pregunta.* Recuperado el 26 de Octubre de 2012, de [http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/\(ADelCastillo-GMontiel2009a\)-ALME22-.pdf](http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/(ADelCastillo-GMontiel2009a)-ALME22-.pdf)

De Guzmán, M. (1984). *El papel de la matemática en el proceso educativo inicial. Enseñanza de las ciencias*, 2 (3), 91 – 95.

Duval, R. (1996). *¿Con cuál aproximación cognitiva quedarse en didáctica de las matemáticas?* (M. Vega Trad.) Cali, Colombia: Universidad del Valle. (Documento no publicado)

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval, R. (2001). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Fernández, A. & Rico, L. (1999). *Prensa y educación matemática*. Madrid, España: Editorial síntesis.

García, J. (2005). *La comprensión de las representaciones gráficas cartesianas presentes en los libros de texto de ciencias experimentales, sus características y el uso que se hace de ellas en el aula*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Hitt F. (2002). *Funciones en Contexto*. Proyecto sobre Visualización Matemática. Departamento de Matemática Educativa. México.

Hitt, F. (2003). *Una reflexión sobre la construcción de estudios matemáticos en ambientes de tecnología*. 10 (2), 213 – 223. Recuperado el 15 de septiembre de 2012, de <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/fernandoHitt.pdf>

Lovesportv. (2012, Diciembre 18). *Boletín del consumidor tal cual prima de navidad para los taxistas* [Video]. Recuperado 24 de Abril de 2013, de <http://www.youtube.com/watch?v=iy3knAIGYo0>

Lupiáñez, J. (2000). *Nuevos Acercamientos a la Historia de la Matemática a través de la Calculadora TI-92*, Universidad de Granada, Granada

Lupiáñez, j., & Moreno, L. (2002). *Seminario nacional de formación de docentes: uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 428 - 256). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas*. (M. Acosta & J. Fiallo, Trad.). Bucaramanga, Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (2012). *Pruebas Saber*. Bogotá, Colombia. Recuperado el 15 de septiembre de 2012, de <http://www.mineducacion.gov.co/1621/w3-article-244735.html>

Molinás, P., & Martínez. (s.f.a). *Continuidad de una función real de variable real*. Universidad Oberta de Catalunya. Recuperado el 15 de Marzo de 2013, de [http://www.uoc.edu/in3/emath/docs/Continuidad\\_1D.pdf](http://www.uoc.edu/in3/emath/docs/Continuidad_1D.pdf)

Moreno, L. (2002). *Instrumentos matemáticos computacionales*. En MEN, Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas (pp. 81 - 86). Bogotá – Colombia.

Pedreros, M. (2012). *Modelización de situaciones de movimiento en un sistema algebraico computacional: una aproximación desde la teoría antropológica de lo didáctico y el enfoque instrumental*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Rabardel, P. (1995). *Los hombres y las tecnologías, visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. (M. Acosta Trad.) Cali, Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Ruiz, J., & Santacruz, M. (2010). *Una Secuencia Didáctica desde la Orquestación Instrumental: La Función Cuadrática en Grado Noveno de Educación Básica* (pp. 582 – 590). *En Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. Recuperado el 2 de Noviembre de 2012, de [http://funes.uniandes.edu.co/1133/1/582\\_Una\\_Secuencia\\_Didctica\\_desde\\_la\\_Orquestacin\\_Asocolme2010.pdf](http://funes.uniandes.edu.co/1133/1/582_Una_Secuencia_Didctica_desde_la_Orquestacin_Asocolme2010.pdf)

Saa, A., & Trochez, A. (2013, Marzo 5). Geogebra y el periódico. [Mensaje en Blog]. Recuperado de <http://geogebraayperiodico.blogspot.com>

Salinas, J. (2004). *Innovación docente y uso de las TIC en la enseñanza universitaria*. Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC). 1 (1), 1-16. Recuperado el 15 de septiembre de 2012, de <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=78011256001>

Stewart, S., Redlin, R., & Watson, S. (2001). PRECALCULO matemáticas para el cálculo, tercera edición.

Thouche, L.(2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments. En D. Guin, K. Ruthven and L. Thouche (Eds.), *The didactical Challenge of Symbolic Calculators, turning a computacional device into a mathematical instrument* (pp. 137 - 162). N.Y: Springer.



# ANEXOS

## Anexo 1. Situación 1 \_ página 1



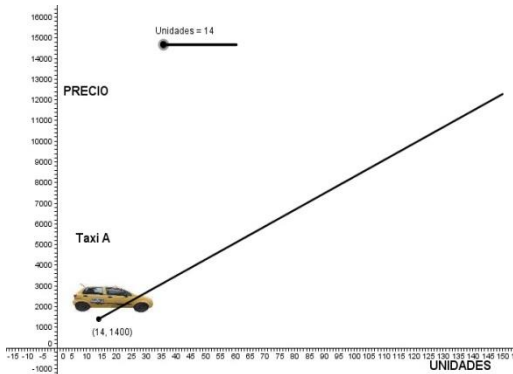
### SITUACIÓN 1 EL PERIÓDICO Y LOS TAXIS



FECHA: \_\_\_\_\_ GRADO: \_\_\_\_\_

NOMBRE: \_\_\_\_\_

1. Lee detenidamente la información del periódico.
2. Con base a la información que leíste, analiza las gráficas y determina:

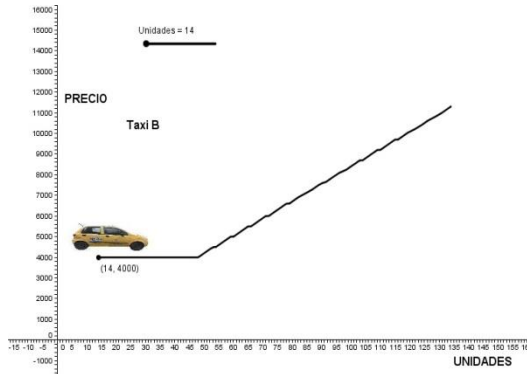


Gráfica 1. Taxi A

- Para ello responde:

- a. “*Tal Cual*” aborda un taxi de su casa al trabajo. ¿Cuál es el valor que deberá pagar, si el taxímetro marca menos de 48 unidades?

Taxi A:



Gráfica 2. Taxi B



## Anexo 2. Situación 1 \_ página 2

Taxi B:

- b. ¿Es posible que a “**Tal Cual**” le cobren el mismo precio por una carrera de 24 unidades a una de 40 unidades?

Taxi A:

Taxi B:

- c. Si el taxista le cobró a “**Tal Cual**” por la carrera \$6.000 pesos ¿Cuántas unidades marco el taxímetro?

Taxi A:

### Anexo 3. Situación 1 \_ página 3

Taxi B:

d. ¿Qué similitudes o diferencias observas con respecto al precio y las unidades entre el Taxi A y Taxi B?

3. “**Tal Cual**” desea saber ¿Cuál de las dos gráficas representa de manera más certera la información que suministra el periódico? Explica tu elección.

## Anexo 4. Situación 2 \_ página 1



### SITUACIÓN 2 LA CARRERA EN UN TAXI



FECHA: \_\_\_\_\_ GRADO: \_\_\_\_\_

NOMBRE: \_\_\_\_\_

1. Teniendo en cuenta los datos que presenta el periódico: Y el video donde aparece **“Tal cual”**: Ayúdale a completar la siguiente tabla:

| Variables                                | Valor |
|--|-------|
| Recorrido de 80 metros                   |       |
| Banderazo                                |       |
| Carrera mínima                           |       |
| Tiempo de espera 50 segundos             |       |
| Recargo por servicio puerta a puerta     |       |
| Recargo nocturno, dominicales y festivos |       |

**Tabla 1.** Variables de la Carrera de un Taxi

De acuerdo a la tabla anterior **“Tal Cual”** desea determinar:

- a. ¿De qué variables depende la tarifa de un taxi, qué le dirías tú? Justifica tu respuesta.

## Anexo 5. Situación 2 \_ página 2

- a. ¿El recargo nocturno, dominical y festivo interfiere en el valor de la tarifa mínima? Justifica.



- b. Si "**Tal cual**" el domingo recorrió 8 km en taxi para llegar al estudio de grabación del noticiero ¿Cuánto pagó por este recorrido? Muestra los cálculos requeridos para llegar a la respuesta.

- c. ¿Cuál(es) de ellas permanecen constantes (no varían) al realizar un recorrido en taxi?

## Anexo 6. Situación 3 \_ página 1



### SITUACIÓN 3 COMPARANDO PRECIOS



FECHA: \_\_\_\_\_ GRADO: \_\_\_\_\_

NOMBRE: \_\_\_\_\_

En un recorrido realizado por **“Tal Cual”** en taxi, indagó sobre el funcionamiento del taxímetro en la ciudad de Cali encontrando que:

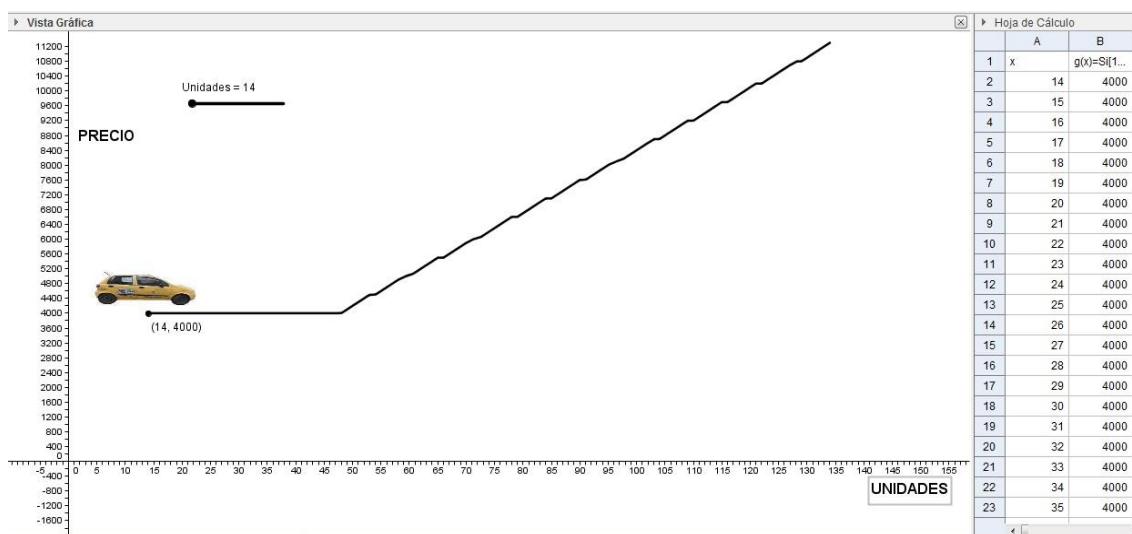
El taxímetro marca las *unidades cada 80 metros recorridos*, el precio<sup>18</sup> de 1 unidad equivale a \$80 pesos. Al iniciar una carrera se inicia con el banderazo, esto significa que el taxímetro empieza a contar desde 14 unidades y su valor es igual a \$1.400 pesos. De acuerdo a lo anterior analiza la siguiente tabla y la gráfica:

| LISTADO DE VALORES POR UNIDADES |          |          |          |          |          |
|---------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| UNIDADES                        | VALOR \$ | UNIDADES | VALOR \$ | UNIDADES | VALOR \$ |
| 47- 48                          | 4.000    | 67       | 5.600    | 86       | 7.200    |
| 49                              | 4.100    | 68       | 5.700    | 87       | 7.300    |
| 50                              | 4.200    | 69       | 5.800    | 88       | 7.400    |
| 51                              | 4.300    | 70       | 5.900    | 89       | 7.500    |
| 52                              | 4.400    | 71-72    | 6.000    | 90-91    | 7.600    |
| 53-54                           | 4.500    | 73       | 6.100    | 92       | 7.700    |
| 55                              | 4.600    | 74       | 6.200    | 93       | 7.800    |
| 56                              | 4.700    | 75       | 6.300    | 94       | 7.900    |
| 57                              | 4.800    | 76       | 6.400    | 95       | 8.000    |
| 58                              | 4.900    | 77       | 6.500    | 96-97    | 8.100    |
| 59-60                           | 5.000    | 78-79    | 6.600    | 98       | 8.200    |
| 61                              | 5.100    | 80       | 6.700    | 99       | 8.300    |
| 62                              | 5.200    | 81       | 6.800    | 100      | 8.400    |
| 63                              | 5.300    | 82       | 6.900    | 101      | 8.500    |
| 64                              | 5.400    | 83       | 7.000    | 102      | 8.600    |
| 65-66                           | 5.500    | 84-85    | 7.100    | 103-104  | 8.700    |

**Tabla 1.** Listado de Valores por Unidades.

<sup>18</sup> El precio de la unidad es tomando del año 2012, del periódico El Tiempo como se vio en la situación 1.

## Anexo 7. Situación 3 \_ página 2



**Gráfica 3.**

- Compara las coordenadas que aparecen en el gráfico al mover el taxi con los datos de la tabla en la hoja de cálculo. ¿Qué puedes concluir?
  
- Según los datos representados en la hoja de cálculo ayuda a **“Tal cual”** a ubicar en la gráfica los puntos correspondientes al cobro de las carreras que marcan 57, 58, 71, 72, 80, 81, 84 y 85 unidades, para ello utiliza el comando lista de puntos.

### Anexo 8. Situación 3 \_ pagina 3

c. Ahora compara el “**Listado de valores por unidades**” con los datos de la hoja cálculo generada por el gráfico en GeoGebra. ¿Qué diferencias encuentras y qué puedes concluir?

d. Según lo estudiado anteriormente junto a “**Tal cual**” responde: ¿En qué intervalos el precio **augmenta** y en cuales se mantiene **constante**?

| Intervalo                           | Precio \$                  | Intervalo                           | Precio \$ |
|-------------------------------------|----------------------------|-------------------------------------|-----------|
| [14,48]<br>ó<br>$14 \leq x \leq 48$ |                            | (59,60]<br>ó<br>$59 \leq x \leq 60$ |           |
| (48,53]<br>ó<br>$48 \leq x \leq 53$ | Aumenta, de<br>4000 a 4500 | (60,65]<br>ó<br>$60 \leq x \leq 65$ |           |
| (53,54]<br>ó<br>$53 \leq x \leq 54$ | Constante en<br>4.500      | (65,66]<br>ó<br>$65 \leq x \leq 66$ |           |
| (54,59]<br>ó<br>$54 \leq x \leq 59$ |                            | (66,71]<br>ó<br>$66 \leq x \leq 71$ |           |

**Tabla 2.** Análisis de variación por intervalos



### Anexo 9. Situación 3 \_ pagina 4

- e. Utiliza los intervalos de la tabla anterior para encontrar la pendiente de los primeros 4 intervalos. Recuerda que:

*La pendiente es la inclinación entre dos puntos del plano cartesiano y se halla haciendo el cociente de la diferencia entre los valores de "y" y "x"*



- f. ¿Cuánto varía el precio en cada unidad? \_\_\_\_\_

¿Qué puedes concluir del resultado obtenido en el punto anterior y la variación del precio de cada unidad? Observa su comportamiento en la gráfica.

### Anexo 10. Situación 3 \_ página 5

- g. Defina una función a trozo al considerar los primeros 4 intervalos de variación de la tabla 2, tener en cuenta los valores de las pendientes halladas y el precio al iniciar cada intervalo.

- h. Complete la expresión como función a trozos de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} \underline{\hspace{10em}} & \text{Si } 14 \leq x \leq 48 \\ \underline{100(x-48)+4000} & \text{Si } 48 \leq x \leq 53 \\ \underline{\hspace{10em}} & \text{Si } 53 \leq x \leq 54 \\ \underline{\hspace{10em}} & \text{Si } 54 \leq x \leq 59 \end{cases}$$

# Anexo 11. Producciones de los estudiantes Situación 1 \_ página 1



Universidad  
del Valle

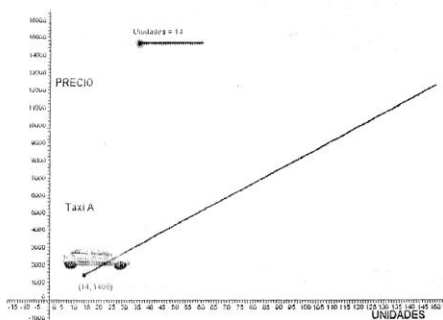
## SITUACIÓN 1 EL PERIÓDICO Y LOS TAXIS



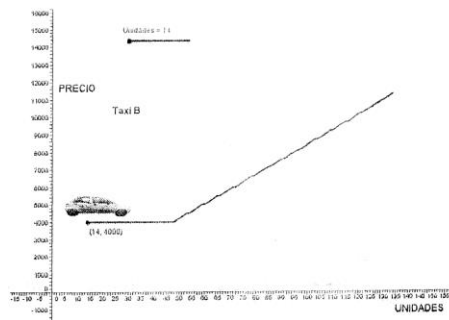
COLEGIO BENNETT

FECHA: 12/06/2013 GRADO: 9B  
NOMBRE: Paula Vidal

1. Lee detenidamente la información del periódico.
2. Con base a la información que leíste, analiza las gráficas y determina:



Gráfica 1. Taxi A

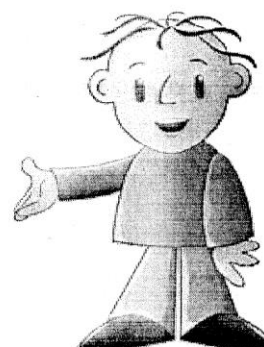


Gráfica 2. Taxi B

- Para ello responde:

- a. "Tal Cual" aborda un taxi de su casa al trabajo. ¿Cuál es el valor que deberá pagar, si el taxímetro marca menos de 48 unidades?

Taxi A: Debe de pagar 4120 ya que en la grafica los puntos marcan (48, 4120)



Anexo 12. Producciones de los estudiantes situación 1 \_ página 2

Taxi B: Seria la carrera minima (\$4000)

b. ¿Es posible que a "Tal Cual" le cobren el mismo precio por una carrera de 24 unidades a una de 40 unidades?

Taxi A: ~~Si~~ teniendo en cuenta que la carrera minima es de \$4000 (4 unidades), si es posible. Pero si solo tenemos en cuenta la grafica con 24 unidades serian \$2200 y con 40 unidades serian ~~\$3480~~ \$3480 y de ese modo no seria posible

Taxi B: Si es posible incluso si solo tenemos ~~la~~ en cuenta la grafica

c. Si el taxista le cobró a "Tal Cual" por la carrera \$6.000 pesos ¿Cuántas unidades marco el taxímetro?

Taxi A: Si le cobro \$6000 pesos el taxímetro debio haber marcado aproximadamente entre T1 y T2

Anexo 13. Producciones de los estudiantes situación 1 \_ página 3

Taxi B:

71 unidades marco el taxímetro con un valor de \$6000

d. ¿Qué similitudes o diferencias observas con respecto al precio y las unidades entre el Taxi A y Taxi B?

Los 2 tienen el mismo valor solo que el taxi A el taxímetro cobia 40 centavos más pero entonces el taxista lo aproxima a \$6000 pesos

3. "Tal Cual" desea saber ¿Cuál de las dos gráficas representa de manera más certera la información que suministra el periódico? Explica tu elección.

Para mí la gráfica que representa de manera más certera la información del periódico es el gráfico b del caso la c ya que según la carrera es el precio más acertado según la información del periódico

## Anexo 14. Producciones de los estudiantes situación 2 \_ página 1



Universidad  
del Valle

### SITUACIÓN 2

#### LA CARRERA DE UN TAXI



COLEGIO BENNETT

Nombre: Mania Camila Londono Garcia GRADO: 9B  
 FECHA: Junio - 17 - 2013  
 NOMBRE: Junio - 17 - 2013

1. Ver el video: El boletín del consumidor "Tal cual".
2. Teniendo en cuenta los datos que presenta el periódico ayúdame a "Tal cual" a completar la siguiente tabla:

| Variabes                                 | Valor   |
|--|---------|
| Recorrido de 80 metros                   | \$ 80   |
| Banderazo                                | \$ 1400 |
| Carrera mínima                           | \$ 4000 |
| Tiempo de espera 50 segundos             | \$ 84   |
| Recargo por servicio puerta a puerta     | \$ 1000 |
| Recargo nocturno, dominicales y festivos | \$ 1000 |

Tabla 1. Variables de la Carrera de un Taxi

De acuerdo al video y la tabla anterior "Tal Cual" desea determinar:

- a. ¿De qué variables depende la tarifa de un taxi, qué le dirías tú? Justifica tu respuesta.

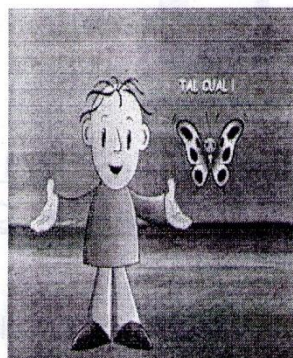
Las variables que determinan la tarifa de un taxi son el banderazo por el que siempre comienza una carrera y el recorrido por cada 80 metros.

Aparte si es un día festivo o es de noche, si se pide puerta a puerta o si el taxista espera el valor va a cambiar pero como era Navidad esos valores no iban a cambiar.

## Anexo 15. Producciones de los estudiantes situación 2 \_ página 2

- b. ¿El recargo nocturno, dominical y festivo interfiere en el valor de la tarifa mínima? Justifica.

Si interfiere porque así vas a hacer un trayecto corto si es después de las 8, domingo o festivo habría 1000 pesos extras que pagar.



- c. Si "Tal cual" el domingo recorrió 8 km en taxi para llegar al estudio de grabación del noticiero ¿Cuánto pagó por este recorrido? Muestra los cálculos requeridos para llegar a la respuesta.

"Tal cual" pagaría 9.000 pesos y a que:

$$8 \text{ km} = 8.000 \text{ metros} \quad \frac{8000}{80} = 100$$

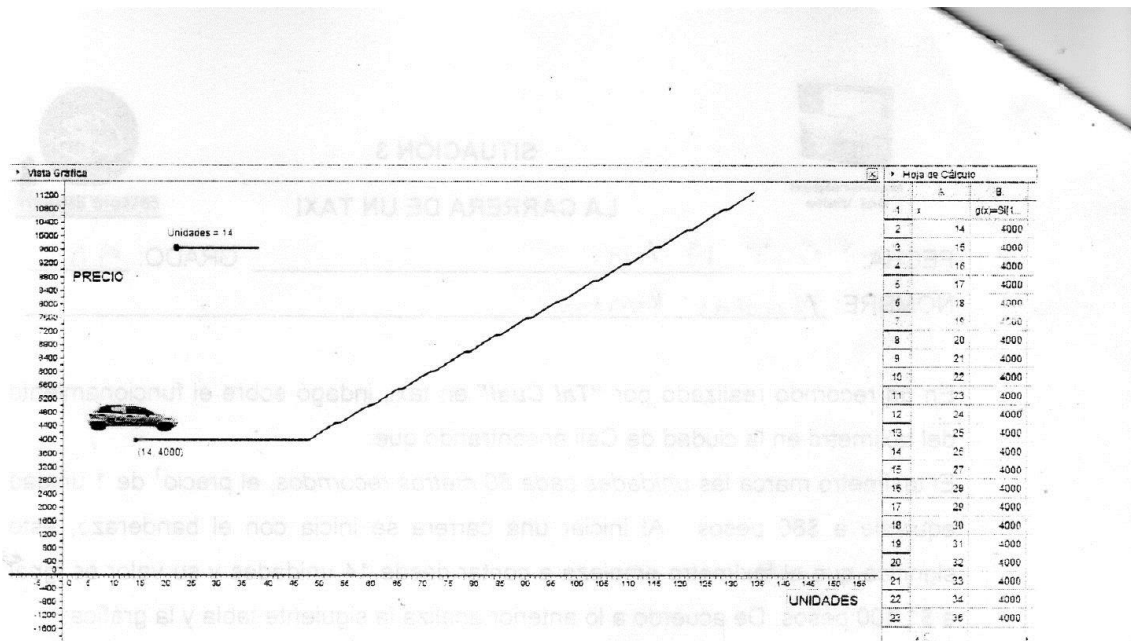
$100 \times 80 = 8000$  pero es domingo entonces pagaría 9 hay mil pesos más que pagar.

- d. ¿Cuál(es) de ellas permanecen constantes (no varían) al realizar un recorrido en taxi?

El banderazo, la cámara mínima, recargo servicio a puerta y el recargo de domingo, después de las 8 y festivos son constantes nunca varían.



## Anexo 16. Producciones de los estudiantes situación 3 \_ página 2



Gráfica 2a .Taxi b

- a. Compara las coordenadas que aparecen en el gráfico al mover el taxi con los datos de la tabla en la hoja de cálculo. ¿Qué puedes concluir?

Podemos evidenciar que de la 14 a la 48 el precio es 4000 ya después cada unidad sube 100 pesos

- b. Según los datos representados en la hoja de cálculo ayuda a "Tal cual" a ubicar en la gráfica los puntos correspondientes al cobro de las carreras que marcan 57, 58, 71, 72, 80, 81, 84 y 85 unidades, para ello utiliza el comando lista de puntos.

57 = 4800  
 58 = 4900  
 71 = 6000  
 72 = 6000  
 80 = 6700  
 81 = 6800  
 84 = 7100  
 85 = 7100



## Anexo 17. Producciones de los estudiantes situación 3 \_ página 3

- c. Ahora compara el "**Listado de valores por unidades**" con los datos de la hoja cálculo generada por el gráfico en GeoGebra. ¿Qué diferencias encuentras y qué puedes concluir?

en los datos de la hoja empieza desde 47 unidades  
 en el PC empieza desde 14 unidades y los valores  
 de las unidades son las mismas.

- d. Según lo estudiado anteriormente junto a "**Tal cual**" responde: ¿En qué intervalos el precio **aumenta** y en cuales se mantiene **constante**?

| Intervalo                   | Precio \$                  | Intervalo                   | Precio \$                        |
|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|----------------------------------|
| [14,48]<br>ó<br>14 ≤ x ≤ 48 | constante<br>en<br>4000    | (59,60]<br>ó<br>59 ≤ x ≤ 60 | constante<br>en<br>5000.         |
| (48,53]<br>ó<br>48 ≤ x ≤ 53 | Aumenta, de<br>4000 a 4500 | (60,65]<br>ó<br>60 ≤ x ≤ 65 | aumenta de<br>5000<br>a<br>5500  |
| (53,54]<br>ó<br>53 ≤ x ≤ 54 | Constante en<br>4.500      | (65,66]<br>ó<br>65 ≤ x ≤ 66 | constante<br>en<br>5500          |
| (54,59]<br>ó<br>54 ≤ x ≤ 59 | Aumenta de<br>4500 a 5000  | (66,71]<br>ó<br>66 ≤ x ≤ 71 | aumenta de<br>5500<br>a<br>6000. |

Tabla 2. Análisis de variación por intervalos

## Anexo 18. Producciones de los estudiantes situación 3 \_ página 4

- e. Utiliza los intervalos de la tabla anterior para encontrar la pendiente de los primeros 4 intervalos. Recuerda que:

La pendiente es la inclinación entre dos puntos del plano cartesiano y se halla haciendo el cociente de la diferencia entre los valores de "y" y "x"



$$14 - 48 = \frac{4000 - 4000}{48 - 14} = \frac{0}{34} = 0$$

$$48 - 53 = \frac{4500 - 4000}{53 - 48} = \frac{500}{5} = 100$$

$$53 - 54 = \frac{4500 - 4500}{54 - 53} = \frac{0}{1} = 0$$

$$54 - 59 = \frac{5000 - 4500}{59 - 54} = \frac{500}{5} = 100$$

- f. ¿Cuánto varía el precio en cada unidad? normalmente varia 100 pero cada 5 unidades el precio es constante durante 2 unidades  
 ¿Qué puedes concluir del resultado obtenido en el punto anterior y la variación del precio de cada unidad? Observa su comportamiento en la gráfica.

Después de la unidad 48 por cada 5 unidades se aumenta 100 pero en un inter valo de 2 unidades se mantiene constante así sucesivamente

Anexo 19. Producciones de los estudiantes situación 3 \_ página 5

g. Defina una función a trozo al considerar los primeros 4 intervalos de variación de la tabla 2, tener en cuenta los valores de las pendientes halladas y el precio al iniciar cada intervalo.

$$y = mx + b = (14, 4000)$$

$$4000 = 0(14) + b \quad 0(14) + 4000$$

$$4000 = 0 + b \quad 0 + 4000$$

$$\boxed{b = 4000} \quad = 4000$$

$$y = mx + b \quad (54, 4500)$$

$$4500 = 0(54) + b \quad 0(54) + 4500$$

$$4500 = 0 + b \quad 0 + 4500$$

$$\boxed{b = 4500} \quad = 4500$$

$$y = mx + b \quad (53, 4500)$$

$$4500 = 100(53) + b$$

$$4500 - 5300 = b$$

$$\boxed{b = -800}$$

$$100(53) - 800$$

$$5300 - 800$$

$$4500$$

$$y = mx + b \quad (59, 5000)$$

$$5000 = 100(59) + b$$

$$5000 = 5900 + b$$

$$5000 - 5900 = b$$

$$\boxed{b = -900}$$

$$100(59) - 900$$

$$5900 - 900$$

$$= 5000$$

h. Complete la expresión como función a trozos de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} \text{0} & \text{Si } 14 \leq x \leq 48 \\ 100(x-48) + 4000 & \text{Si } 48 \leq x \leq 53 \\ 0 & \text{Si } 53 \leq x \leq 54 \\ 100(x-54) + 4500 & \text{Si } 54 \leq x \leq 59 \end{cases}$$

~~$$100(1) + 4500$$

$$100 + 4500$$

$$= 4600$$~~

$$100(1) + 4500$$

$$100 + 4500$$

$$4600$$