ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA Y ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO

JORGE ELICER BUITRAGO LONDOÑO
DIEGO ANÍBAL MARTÍNEZ GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
Bogotá, Diciembre 2012

ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA Y AGUMENTACIÓN MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO

JORGE ELICER BUITRAGO LONDOÑO
DIEGO ANÍBAL MARTÍNEZ GONZÁLEZ

REPORTE DE INVESTIGACIÓN PARA OPTAR AL TITULO DE MAGISTER EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

ASESOR: LEONOR CAMARGO URIBE

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
Bogotá, Diciembre 2012

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado "***Actividad demostrativa y argumentación matemática en estudiantes de grado octavo***" presentado por las estudiantes:

Jorge Eliecer Buitrago Londoño - 2011185001
Diego Anibal Marrínez González - 2011185049

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con **43** puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 27 días del mes de febrero de 2013.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) Leonor Camargo
Leonor Camargo

Jurados:

Profesor(a) Martin Acosta
Martín Acosta

Profesor (a) Carmen Samper de Caicedo
Carmen Samper

1. Información General	
Tipo de documento	Tesis de Grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA Y ARGUMENTACIÓN MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES DE GRADO OCTAVO.
Autor(es)	Jorge Eliecer Buitrago Londoño Diego Aníbal Martínez González
Director	Leonor Camargo Uribe
Publicación	Bogotá D. C., Universidad Pedagógica Nacional, 2013.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas.
Palabras Claves	Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas.

2. Descripción

En esta investigación presentamos un estudio realizado con un curso de grado octavo de básica secundaria que tuvo lugar en año 2011 en la Institución Educativa Departamental Instituto Nacional de Promoción Social en Villeta Cundinamarca. El propósito es mostrar que a partir del diseño de situaciones enmarcadas dentro del constructo "actividad demostrativa" es posible darle a la geometría un redimensionamiento para rescatar su papel en el desarrollo del razonamiento geométrico y el sentido espacial de los estudiantes. La investigación se desarrolló en tres momentos: en primer lugar se planeó y se puso en marcha el experimento de enseñanza, en segundo lugar se tomó registro de la actividad desarrollada por los estudiantes durante los dos últimos problemas del experimento y por último se analizaron los datos recogidos en las transcripciones de los diálogos de los estudiantes.

3. Fuentes

Consultamos un libro, dos tesis de maestría y 20 artículos de investigación, entre los que se destacan:

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof (Juillet/Août 1999). Traducción realizada por Patricio Herbst. Reacciones y observaciones a la contribución de Paolo Boero fueron publicadas en la carta de Septiembre/Octubre 1999.

Camargo, L., Samper, C., Perry, P (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Douek, N. 1998, Some Remarks about Argumentation and Mathematical Proof and their Educational Implications, Proceedings of the CERME-I Conference, Osnabrueck.

Franco, B & Moreno, G. (2011). La argumentación como núcleo de la actividad demostrativa. Tesis para optar al título de magister en docencia de las matemáticas. Universidad Pedagógica Nacional.

Garuti, R., Boero, P., y Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *Proceedings of the 22th PME Conference* 2, 345-352.

Además se tomaron registros de audio y video a tres grupos de estudiantes durante el desarrollo de las dos últimas actividades de la secuencia de enseñanza.

4. Contenidos

1. **Presentación de la investigación:** En ésta, presentamos la justificación, la definición del problema y una revisión de antecedentes que plasma el estado del arte de los referentes teóricos para el estudio.
2. **Marco teórico:** Presentamos tres aspectos relevantes para nuestra investigación: Actividad Demostrativa, Argumentación y Unidad Cognitiva.
3. **Metodología:** Se hace una síntesis del enfoque metodológico que asumimos para la investigación, describimos la trayectoria de aprendizaje y la secuencia de enseñanza. Por último, presentamos el diseño experimental y el dispositivo analítico.
4. **Análisis:** En este apartado describimos la trayectoria que siguió cada uno de los tres grupos en el desarrollo de la actividad 6 (cuadriláteros cíclicos) y se contrasta el actuar de éstos con las acciones previstas en el diseño de la secuencia
5. **Resultados:** En este capítulo mostramos los hallazgos más interesantes de nuestra investigación a partir de un análisis cuantitativo y cualitativo de las categorías de análisis y la correlación entre éstas. Luego, rastreamos argumentos para determinar si hay unidad cognitiva en las intervenciones de los estudiantes.

5. Metodología

En este capítulo reportamos el proceso metodológico del trabajo desarrollado, orientado por las características específicas de la aproximación metodológica que asumimos para la investigación, que guarda estrecha relación con un experimento de enseñanza. En la primera parte del capítulo se describen los aspectos generales de un experimento de enseñanza. En consonancia con esta perspectiva y con el marco conceptual, posteriormente presentamos la trayectoria hipotética de aprendizaje que asumimos en este trabajo, la secuencia de enseñanza y el diseño experimental. En esta última sección describimos el contexto de aplicación, los aspectos de la implementación, las técnicas de recolección de datos y la herramienta analítica.

6. Conclusiones

Las conclusiones del trabajo las hemos organizado atendiendo diferentes aspectos. De los objetivos mencionamos en qué medida se cumplieron o no. De las hipótesis contrastamos las planteadas con los resultados obtenidos. En cuanto a los aportes teóricos, describimos las contribuciones realizadas a los constructos teóricos que han sido nuestro marco de referencia. En los aportes prácticos, sugerimos posibles ajustes a la secuencia de enseñanza para futuras réplicas. Por último, mencionamos los aportes del trabajo a nuestro desarrollo profesional y las posibles proyecciones de la investigación.

En nuestro trabajo nos propusimos diseñar, implementar y analizar un experimento de enseñanza con estudiantes de grado octavo, en el que se favoreciera el desarrollo de la justificación y argumentación por parte de los estudiantes mientras aprendían geometría. Podemos afirmar que los objetivos se cumplieron. Se llevó a cabo la secuencia de enseñanza y tenemos indicadores de que se favoreció la justificación y argumentación a medida que los estudiantes aprendían geometría. Por ejemplo, un indicador es la manera progresiva en que los estudiantes presentaban autonomía para desarrollar abducción, inducción y deducción, en la medida que se apropiaban de conceptos, hechos geométricos y desarrollaban habilidad para representar y explorar los objetos geométricos en el programa de geometría dinámica CABRI.

El diseño y puesta en práctica de la secuencia de enseñanza promovió un cambio en la manera tradicional de enseñar geometría en la institución. Este cambio está caracterizado por los siguientes elementos: siempre propusimos un problema abierto para comenzar la sesión; una vez enunciada la tarea, se destinaba un espacio de la clase para que los estudiantes trabajaran en grupo con el apoyo del programa de geometría dinámica CABRI. Después se realizaba una socialización que permitía institucionalizar los conceptos, hechos y procedimientos geométricos que surgían durante la actividad. Este contexto propició la participación de los estudiantes en el desarrollo de las actividades, rompiendo el esquema usual a partir del cual el profesor presenta la cátedra correspondiente a la temática de estudio y los estudiantes asumen un rol pasivo en el proceso. En el transcurso de la secuencia los estudiantes fueron adquiriendo progresivamente el compromiso de validar sus afirmaciones sin acudir exclusivamente a la autoridad del docente.

En consonancia con nuestra hipótesis, los resultados confirman que los estudiantes pueden aprovechar la argumentación que se despliega en el proceso de conjeturación, para obtener los argumentos que permiten construir la justificación. Por ejemplo, el diseño de la secuencia hizo de la circunferencia una herramienta versátil para pensar, explorar, validar y posteriormente desarrollar el proceso de justificación, utilizando los teoremas relacionados con este objeto como garantes teóricos para organizar una cadena deductiva.

En cuanto a la actividad demostrativa, a partir de los resultados obtenidos, mostramos que no es posible desligar las acciones de explorar y visualizar para explorar en un ambiente de geometría dinámica. Consideramos que la visualización para la exploración es una acción permanente durante la exploración, posición que tuvimos la oportunidad de debatir con la profesora Douek en su visita a Colombia, quien planteó que: *la acción de visualización implica siempre una* *exploración.*

El aporte práctico de nuestro trabajo lo constituye la secuencia de enseñanza, en la que proponemos un sistema teórico local que integra teoremas y definiciones en torno a los cuadriláteros cíclicos. Consideramos que de esta forma se organiza un conjunto de ideas para favorecer la actividad demostrativa de los estudiantes, la argumentación y la entrada al mundo teórico. Como proyecciones del trabajo es viable tomar otros contenidos de la geometría y de la matemática usando este modelo en el que se respeta un poco la manera de trabajar en matemáticas, sin perder de vista las restricciones del contexto de los estudiantes de secundaria.

Vemos la posibilidad de replicar la secuencia, teniendo en cuenta los siguientes ajustes: recomendamos diseñar actividades preliminares en las que el arrastre se use para incentivar la exploración dinámica y no sólo para revisar construcciones robustas; si bien la anticipación en la actividad 6 promueve la exploración de casos, es necesario ajustar la actividad para que los estudiantes consideren la exploración libre como un camino viable para la solución de la tarea.

En cuanto a nuestro trabajo como docentes, esta experiencia nos ha permitido modificar el ambiente de las clases, promoviendo en los estudiantes mayor participación en su desarrollo, involucrándose con acciones de validación y justificación. Como docentes titulares del colegio en el que se realizó el experimento de enseñanza, podemos reportar que los estudiantes reaccionan favorablemente a este cambio.

Finalmente, pensando en nuestra futura formación profesional, los resultados arrojados en este trabajo se convierten en evidencias empíricas que permiten plantear nuevas situaciones problema para un trabajo de doctorado. Por ejemplo, surgen inquietudes con respecto al currículo y la práctica escolar: ¿será posible abarcar el contenido de la geometría de grado octavo a partir de un sistema teórico local que gire en torno a una situación problema?

Elaborado por:	Diego Aníbal Martínez González
Revisado por:	Leonor Camargo Uribe

Fecha de elaboración del Resumen:	27	02	2013

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

El estudio que presentamos en este documento es fruto del proceso de investigación formativa que adelantamos en la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Con él se busca hacer una propuesta alternativa para la introducción de la geometría en las clases de matemáticas, en las que tradicionalmente se dan experiencias poco significativas con relación al estudio de ésta. El objetivo de la propuesta didáctica fue implementar una estrategia innovadora en las aulas de secundaria, en la que se favorezca el desarrollo de la competencia argumentativa por parte de los estudiantes mientras aprenden geometría. La investigación se realizó en la Institución Educativa Instituto Nacional de Promoción Social de Villeta (Cundinamarca) con estudiantes de grado octavo, a quienes se les invitó a participar en un experimento de enseñanza con el apoyo de la geometría dinámica. El documento está organizado en siete capítulos cuyos contenidos describimos brevemente a continuación.

En el primer capítulo damos cuenta de la delimitación del problema, incluimos la justificación del estudio y las dos hipótesis puestas en juego en la propuesta que desarrollamos en la investigación. Finalmente, presentamos una revisión de los antecedentes, que nos permitió estudiar diferentes miradas que hacen algunos autores al problema que nos concierne.

En el segundo capítulo describimos el marco teórico de la investigación. La actividad demostrativa es la aproximación que proponemos para aprender a demostrar, pues favorece la argumentación de diferentes tipos y consideramos que posibilita la continuidad entre el proceso de conjeturación y la producción de una justificación.

En el capítulo tres reportamos el proceso metodológico del trabajo desarrollado. Este se orientó por las características específicas de la aproximación que asumimos para la investigación, que guarda estrecha relación con un experimento de enseñanza. En la primera parte del capítulo describimos los aspectos generales de un experimento de enseñanza. En consonancia con esta perspectiva y con el marco conceptual, posteriormente presentamos la trayectoria hipotética de aprendizaje que asumimos en este trabajo, la secuencia de enseñanza y el diseño experimental. En esta última sección describimos el contexto de aplicación, los aspectos de la implementación, las técnicas de recolección de datos y la herramienta analítica.

En el capítulo cuatro describimos la trayectoria que siguió cada uno de los grupos de estudiantes que participó en el desarrollo de la última actividad de la secuencia de enseñanza (cuadriláteros cíclicos). Contrastamos la producción de los estudiantes con las acciones previstas en el diseño de la secuencia. A manera ilustrativa presentamos seis fragmentos de análisis.

El capítulo cinco está dedicado a presentar los resultados que consideramos de mayor interés para nuestra investigación. Tenemos en cuenta aspectos cuantitativos y cualitativos que permiten caracterizar y relacionar las categorías de análisis definidas en el marco teórico y la metodología.

En el capítulo de conclusiones presentamos reflexiones generales en torno a la metodología de investigación, la secuencia de enseñanza, los resultados obtenidos y sugerencias para una futura implementación de la secuencia.

1. PRESENTACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. JUSTIFICACIÓN

En los años 60 y 70 del siglo XX, en Colombia, se produjo una transformación de la enseñanza de las matemáticas debido al surgimiento de la "matemática moderna", en la cual se hizo énfasis en las estructuras abstractas y la profundización en el rigor lógico. Esta mirada realzó el trabajo sobre la teoría de conjuntos y el álgebra, y produjo el deterioro de la enseñanza de la geometría elemental y del pensamiento espacial. Posteriormente, en la década del 80, con la propuesta de Renovación Curricular, se consideró prioritario recuperar el sentido espacial intuitivo en el currículo de matemáticas, no sólo en lo que se refiere a la geometría. Este cambio incidió en la reaparición de la geometría en los lineamientos curriculares actuales de educación matemática (MEN, 1998). Sin embargo, en la realidad de las instituciones escolares y en particular en la Institución Educativa Departamental Instituto Nacional de Promoción Social del municipio de Villeta (Cundinamarca) aún no se da la relevancia suficiente al estudio de la geometría. Esta situación se hizo evidente cuando se realizó el Plan de Mejoramiento Institucional de 2010-2011 en el que los docentes del área de Matemáticas reconocimos que el estudio del pensamiento geométrico estaba relegado a un segundo plano y las pocas veces que se hacía alusión a objetos o hechos geométricos se hacía sólo con el propósito de auxiliar el pensamiento numérico y/o variacional.

Conscientes de este hecho, nos vinculamos a la línea de investigación propuesta por el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, cuyas investigaciones están centradas en la "actividad demostrativa" en geometría, aproximación que promueve su enseñanza a partir de la resolución de problemas, la formulación de conjeturas y su justificación. Nos impulsó el interés por promover, en la institución en la que laboramos, la enseñanza de la geometría como el grupo lo sugiere. El estudio del marco referencial del grupo de investigación nos llevó a reformular la concepción que teníamos de demostración (la enmarcábamos exclusivamente en la producción de cadenas deductivas) y a reconocer que esta mirada no tiene en cuenta actividades previas que hacen parte del proceso de creación y justificación en matemáticas. El constructo "actividad demostrativa" contempla ambos aspectos de la demostración.

La manera en que tradicionalmente se han desarrollado las clases de matemáticas en el Instituto de Promoción Social, incide en la forma en la que los estudiantes se responsabilizan de las respuestas que dan a las cuestiones matemáticas que se les plantean y en la forma en que las justifican. En general, recurren a una figura de autoridad (ni siquiera a los textos) para cuestiones de validación. Al formular el proyecto para el trabajo de grado, consideramos que un cambio en esa manera de proceder podría darse si recurríamos a la "actividad demostrativa", favoreciendo en las clases de matemáticas una actividad indagativa de los estudiantes.

Por otro lado, como la "actividad demostrativa" en geometría se enriquece con herramientas tecnológicas y, particularmente, con programas de geometría dinámica como Cabri 2D y Geogebra, vimos oportuno hacer uso de éstos gracias a la adecuación en la institución de una sala de cómputo en la que estos programas han sido instalados desde el año 2010, pero que no se habían aprovechado suficientemente. Como lo pudimos constatar en este estudio, estas herramientas resultan apropiadas para favorecer la actividad matemática porque permiten obtener diferentes representaciones que apoyan la comunicación y el razonamiento. Las opciones de arrastre posibilitan la formulación/verificación de conjeturas o la construcción de contraejemplos que permiten el rechazo/modificación de las mismas; la familiaridad e inclinación natural que tienen los estudiantes hacia este tipo de herramientas tiende un puente entre éstos y el conocimiento geométrico.

Identificar las fortalezas y debilidades que tiene la incorporación del software de geometría dinámica cuando se usa en la actividad demostrativa contribuye, por un lado, a la difusión y mayor aceptación de herramientas tecnológicas como medio didáctico en nuestro país y, por otro, permite precisar el alcance y las limitaciones que su uso tiene. El uso relativamente nuevo de esta herramienta en nuestro medio y los actuales enfoques en didáctica, demandan efectuar estudios de casos de corte longitudinal y transversal que aporten un conocimiento preciso sobre el tema.

La propuesta que desarrollamos en nuestra investigación se orientó bajo dos hipótesis:

Hipótesis 1: Mediante el diseño de situaciones para el aula que estén enmarcadas dentro del constructo "actividad demostrativa" es posible darle a la geometría un redimensionamiento para rescatar su papel en el desarrollo de la justificación y argumentación de los estudiantes. Esta propuesta se torna innovadora y puede impulsar un cambio sustancial en la forma como se trabaja la geometría en nuestra institución.

Nuestra hipótesis está en consonancia con el planteamiento de Perry, Camargo, Samper & Rojas (2006) quienes dicen que:

> Desde la perspectiva de las matemáticas, eliminar la actividad de los alumnos en torno a la demostración no es una decisión acertada, pues implica desconocer que la demostración es una característica esencial de las matemáticas. Tampoco lo es desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas, dado que la formación matemática de un individuo incluye no sólo el desarrollo de competencias específicas, sino también la consolidación de una concepción de lo que son las matemáticas y de cómo se validan sus construcciones, concepción que se logra mediante la experiencia del quehacer matemático. (p.54)

Hipótesis 2: Dado el carácter operativo de la actividad demostrativa, es posible aprovechar la argumentación que se despliega en el proceso de conjeturación, para obtener los argumentos que permiten construir la justificación.

La segunda hipótesis está apoyada en diversas investigaciones (Fujita y Jones, 2010, Boero, Garuti y Mariotti, 1996) que han mostrado la posibilidad de que exista algún tipo de continuidad entre los procesos de conjeturación y justificación. En particular, la continuidad puede tomar la siguiente forma:

> Durante la producción de la conjetura, el estudiante progresivamente elabora su conjetura a través de una actividad argumentativa intensa funcionalmente mezclada con la justificación de la verosimilitud de las otras opciones. Durante la etapa posterior de afirmación-prueba, el estudiante enlaza con este proceso de una manera coherente, la organización de algunos

> de los argumentos previamente producidos de acuerdo con una cadena lógica. (Boero, Garuti & Mariotti, 1996, p.122)

En síntesis, nuestro proyecto se justifica en la pertinencia de hacer estudios sobre el aprendizaje de la demostración porque, como lo señala Hanna (1997), la demostración está en el corazón de las matemáticas. Entonces, todo aquello que se haga para mejorar su aprendizaje es valioso y, en el caso particular de nuestra institución educativa, vimos la necesidad de promover la enseñanza de la geometría a partir de la resolución de problemas, la formulación de conjeturas y su justificación. Adicionalmente la posibilidad que se nos presentó al adelantar estudios de maestría y entrar en contacto con las investigaciones del Grupo de Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, aunado a la disposición de equipos y programas de geometría dinámica en el colegio, hizo posible desarrollar este proyecto.

1.2. PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

A partir de la situación problemática evidenciada en el Plan de Mejoramiento en el área de Matemáticas de la I.E.D Instituto Nacional de Promoción Social (año 2010-2011), de los planteamientos formulados en la sección anterior acerca de la conveniencia de incorporar en nuestras clases de geometría un enfoque que propicie el desarrollo de la argumentación y la justificación matemática y del interés investigativo del grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, en este trabajo de investigación se buscó responder a la siguiente pregunta:

¿.Qué incidencia tiene la aplicación en el aula de situaciones enmarcadas dentro del constructo "actividad demostrativa" en el aprendizaje de la justificación y la argumentación matemática en estudiantes de grado octavo y en qué medida estas situaciones favorecen la continuidad entre los procesos de conjeturación y justificación?

1.3. OBJETIVOS

Estrechamente relacionados con la pregunta de investigación, nos planteamos un objetivo general y cuatro objetivos específicos.

Objetivo general

Diseñar e implementar un experimento de enseñanza y analizar los resultados obtenidos en el marco del constructo "actividad demostrativa", con estudiantes de grado octavo de la IED Instituto Nacional de Promoción Social de Villeta (Cundinamarca), en el que se favorezca el aprendizaje de la justificación y la argumentación matemática por parte de los estudiantes mientras aprenden geometría.

Objetivos específicos

- ✓ Presentar una alternativa para la enseñanza de la geometría en grado octavo que propicie un cambio en la manera en que tradicionalmente se enseña en la institución.

- ✓ Proponer un sistema teórico local de geometría euclidiana plana (relacionado con los cuadriláteros cíclicos) enmarcado en el constructo actividad demostrativa, que posibilite la argumentación en estudiantes de grado octavo.

- ✓ Crear un ambiente de aprendizaje que enriquezca el estudio de la matemática, en particular la actividad demostrativa en geometría, aprovechando la disponibilidad del aula de informática y el software de geometría CABRI.

- ✓ Identificar posibles relaciones que surgen entre las acciones de la actividad demostrativa, los tipos de argumentos y la unidad cognitiva de teoremas.

1.4. REVISIÓN DE LA LITERATURA

Conscientes de estar trabajando sobre un terreno en el cual ya otras personas han hecho un esfuerzo creativo para producir un sustrato teórico con el cual investigar la forma de potenciar en los estudiantes la argumentación y la justificación matemática, hicimos una revisión cuidadosa de algunos documentos que nos sirvieron para elaborar el marco teórico de nuestra investigación, proponer la secuencia de aprendizaje y definir qué asuntos íbamos a analizar de los resultados obtenidos. Como producto de esta revisión queremos destacar los siguientes documentos:

Fujita, T. y Jones, K. (2010). Construcciones geométricas de los estudiantes y actividades de demostración. ¿Un caso de *unidad* cognitiva?- Proceedings of the 34 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol. 3, pp 9-16. Bello Horizonte, Brazil

Los fragmentos de episodios de clase de esta lectura ocurren en una escuela de Japón con alumnos de los primeros años de educación Básica Secundaria. El objetivo del curso, además de aprender geometría, es desarrollar en los estudiantes competencias relacionadas con la producción de conjeturas que luego puedan ser validadas dentro de un sistema teórico. Los autores resaltan la dificultad que existe en este aspecto y están muy interesados en tender un puente entre la percepción que tienen los estudiantes, cuando realizan una construcción geométrica, y la subsecuente necesidad de producir una justificación de los hechos que se involucran en la construcción realizada. Cuando se logra vincular de manera estructurada estos dos aspectos los autores hablan de “unidad cognitiva”. Para los autores, una parte importante del éxito de estos objetivos descansa en el tipo de tareas que se les propone a los estudiantes; piensan que aquellas tareas en las que los estudiantes pueden participar de los procesos de argumentación para luego proponer conjeturas, les brindan elementos para una comprensión de los procesos demostrativos.

La lectura analítica de este artículo nos hizo pensar que la presencia de unidad cognitiva en el trabajo de los estudiantes sería un indicador de que la actividad demostrativa es una herramienta adecuada para propiciar la argumentación y la justificación matemática.

Perry et al. (2006). Dos Episodios que plasman rasgos de una comunidad de práctica en la que Cabri juega un papel clave. Memorias del *III Congreso Iberoamericano de Cabri*, Bogotá.

Las autoras describen en este artículo la forma como en un curso de geometría de la carrera de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, un grupo de estudiantes, guiado por una de las investigadoras quien es docente del curso, emprende la tarea colectiva de desarrollar actividad demostrativa en el aula proponiéndose como desafío la construcción de un sistema teórico para la geometría euclidiana. Los problemas que las autoras proponen a los estudiantes son problemas abiertos en los que no hay una única vía para resolverlos, lo que favorece la heurística y la actividad de exploración. Los estudiantes pueden, por ejemplo, analizar casos y proceder por ensayo y error, o pueden hacer cálculos y tomar medidas o pueden hacer construcciones auxiliares y construcciones de referencia. Afirman las autoras que las tareas específicas están asociadas, en su mayoría, a situaciones problema cuya resolución involucra a los estudiantes en una actividad demostrativa en la que la geometría dinámica y la interacción social en el aula, gestionada por la profesora, juegan papeles esenciales.

En éste y en otros documentos de las autoras (Perry, Camargo, Samper & Rojas (2006); Samper, Camargo, Molina, Echeverry & Perry (2010); Camargo, Samper & Perry (2006)), vimos los elementos esenciales para comprender las accciones propias de la actividad demostrativa. Pudimos comprender cómo la interaccion social en el aula es determinante para lidiar con procesos de validación. Comprendimos la necesidad de plantear situaciones abiertas en las que los estudiantes tengan un ramillete de acciones posibles en el momento de la exploración con el programa de geometría dinámica.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof (Juillet/Août 1999). Traducción realizada por Patricio Herbst. Reacciones y observaciones a la contribución de Paolo Boero fueron publicadas en la carta de Septiembre/Octubre 1999.

En esta disquisición acerca del papel que tiene la argumentación en el aprendizaje de la demostración en matemáticas, el autor señala la distinción que debe hacerse entre las argumentaciones que se producen de manera espontánea y aquellas argumentaciones que requieren una fuerte mediación del docente. Para este autor, aprender a demostrar en matemáticas significa ingresar a la cultura de teoremas y teorías matemáticas. En este ámbito, resalta la importancia para la enseñanza de la demostración de distinguir entre probar como proceso y la prueba como producto. Plantea que en la selección de las tareas problemáticas se debe tener en cuenta el papel de la exploración dinámica en geometría como un terreno más “natural” que otros para la iniciación en la demostración. De igual manera afirma que las tareas deben permitir una continuidad no abrupta entre la producción de una conjetura y la producción de su prueba.

Teniendo en cuenta estos aspectos, Boero propone cinco fases para fragmentar el proceso de resolución de los problemas, en relación con los momentos de conjeturación y de validación. En las dos primeras fases, la argumentación tiene que ver con cuestionamientos de la certeza y el significado de alguna regularidad descubierta. En la tercera fase, la argumentación juega tres roles: producir argumentos para la validación, discutir su aceptabilidad y encontrar posibles vínculos que lleven de un argumento a otro. La cuarta fase tiene que ver con el control de la cadena de argumentos. En la quinta fase, la argumentación se refiere a la producción de un texto de la demostración que se ajuste a los estándares vigentes de "rigor".

La lectura de esta publicación nos proporcionó una herramienta conveniente para fragmentar los episodios de clase e introducir en el diseño de la secuencia de enseñanza situaciones problema y preguntas que permiten a los estudiantes entender el tipo de argumentación que se espera desarrollen cuando hacen argumentaciones en un proceso demostrativo en matemáticas.

Arzarello, F & Sabena, C. (2010). Control Semiótico y teórico en actividades de argumentación y prueba. Publicado en línea: 25 de Noviembre de 2010 Springer Science Business Media B.V.

En este documento se reportan los resultados relacionados con una investigación en la que se presenta a los estudiantes un contenido matemático correspondiente al cálculo diferencial e integral; la situación a analizar se da en forma gráfica. Los estudiantes, con base en sus conocimientos sobre el tema, deben determinar entre tres gráficas presentadas, cuál corresponde a la representación de una función, cuál a la derivada y cuál a la al anti derivada. El profesor, deliberadamente, enfoca su objetivo didáctico hacia lograr que los estudiantes tomen conciencia del significado matemático de sus acciones, y que a partir de esta toma de conciencia sean capaces de llevar su trabajo hacia un marco teórico apropiado.

Los autores destacan en su investigación la forma en que la argumentación de los estudiantes y sus procesos de demostración son gestionados y dirigidos por el docente de acuerdo a dos modalidades principales de control entrelazadas, lo que llaman el control semiótico y el control teórico. El primero se refiere a las decisiones sobre la selección y tratamiento de los recursos semióticos. El segundo, a la selección y aplicación de una teoría o parte de ella, a través de un grupo más o menos organizado de propiedades, algoritmos y las concepciones que los estudiantes activan para la elaboración de un argumento o prueba. Perciben una evolución desde una fase donde la atención se centra principalmente en las señales dadas, hacia una fase donde la organización lógica y teórica de la argumentación se convierte en el centro de las actividades de los estudiantes.

Además, el autor describe en detalle e ilustra el uso como herramienta de análisis, entre otros, del modelo de argumentación de Toulmin y el esquema de razonamiento abductivo, que también fueron instrumentos de análisis para nuestra investigación.

2. MARCO TEÓRICO

Consecuentes con la delimitación del problema, el primer referente teórico para nuestro trabajo lo constituye el constructo "actividad demostrativa" propuesto por el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, de la Universidad Pedagógica Nacional. A partir de la propuesta del grupo, presentamos una adaptación al constructo, que creemos pertinente para su uso en la educación básica secundaria. Ilustramos, para facilitar la comprensión de la caracterización, las acciones a las que hacemos referencia con ejemplos extraídos del trabajo realizado por nuestros estudiantes.

El segundo referente teórico es el concepto de argumentación. Nos basaremos en la caracterización hecha por Douek (1998). Además de explicitar qué entendemos por argumentación, presentamos la tipificación elaborada por el grupo de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, y una herramienta analítica, el modelo de Toulmin, para identificar la estructura de los argumentos propuestos por los estudiantes y clasificarlos. Ilustramos el uso de la herramienta con argumentos propuestos por nuestros estudiantes.

El tercer referente es el constructo teórico unidad cognitiva propuesto por Garuti, Boero & Lemut (1998), que nos es útil para analizar si en la puesta en práctica de la secuencia de enseñanza se evidencia continuidad entre los procesos de conjeturar y justificar. El diagrama 2.1 relaciona los principales aspectos de nuestro marco teórico.

2.1. ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

El trabajo que realizamos en esta investigación gravita en torno al constructo "actividad demostrativa" desarrollado por el grupo de Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional. Después de estudiar algunas de las producciones investigativas del grupo, mencionadas en la revisión de la literatura, queremos describir en esta sección qué entendemos por "actividad demostrativa" y en este contexto presentar nuestra postura frente a qué es aprender a demostrar y los procesos que intervienen en la actividad demostrativa.

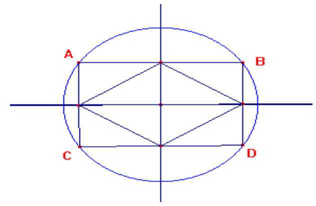
Diagrama 2.1 Referentes teóricos

Existen dos formas para que un estudiante desarrolle comprensión y aprendizaje acerca de la demostración. Una tradicional, de la cual es ejemplo la forma en la que se desarrollan algunos cursos en carrera de pregrado en matemáticas; en éstas el estudiante observa la forma en que un experto expone los teoremas más importantes de determinada teoría, basado en los axiomas de esa teoría y en las reglas de la lógica, y se asegura de entender el encadenamiento deductivo de cada premisa que compone las demostraciones de los teoremas y la forma como cada teorema encaja en la teoría. Paralelamente, y dado que en cada teoría matemática se ha obtenido una gran cantidad de resultados fruto del trabajo de siglos de muchos matemáticos, se pone a disposición del estudiante una cantidad importante de estos resultados para que él se ejercite construyendo la demostración de estos teoremas. Esta es la visión de la demostración como producto final en la que no se tiene en cuenta uno de los aspectos más difíciles y también más fecundos del trabajo en matemáticas relacionado con la formulación de conjeturas. La otra manera de acercarse a la demostración, como se expone en este estudio, incluye la producción de conjeturas; busca vincular a un mayor número de estudiantes con el trabajo real en matemáticas.

En este contexto, la “actividad demostrativa” surge como una herramienta que incluye los procesos de conjeturación y justificación, y busca, en el primero, mediante acciones como visualizar, explorar, generalizar y verificar, proporcionar criterios y generar mecanismos para que las situaciones planteadas a los estudiantes les permitan producir conjeturas. En el otro proceso, el de justificación, se espera que los argumentos que han servido de base a la producción de una conjetura, mediante acciones como explicar, probar y demostrar, permitan elaborar una justificación de la conjetura dentro de los cánones que la comunidad matemática acepta.

En la tabla 2.1.1 describimos, según nuestra interpretación de la bibliografía proporcionada por el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, las acciones de la actividad demostrativa, asociadas a los procesos de conjeturación y de justificación. Para favorecer la interpretación, ejemplificamos cada acción con producciones de nuestros estudiantes.

PROCESO DE CONJETURACIÓN	EJEMPLO EN NUESTRA INVESTIGACIÓN
Visualizar para explorar: Se realiza ésta acción cuando se obtiene información de carácter geométrico a partir de una figura. Se establecen relaciones entre lo que se observa visualmente y lo que se sabe de geometría en la figura. Se espera que mediante esta acción se puedan percibir propiedades que en una mirada desapercibida no se tendría en cuenta.	Ante la solicitud del docente de construir un cuadrilátero en el que las mediatrices de sus lados concurran, Alejandra construye un cuadrilátero utilizando cuatro veces la herramienta segmento y luego, arrastrando uno de los vértices, obtiene la apariencia de rombo. Cuando Alejandra construye tres de las mediatrices, Sebastián afirma: *¡No!, ¡no!, ¡no!, ¡no!, ¡no!* [las mediatrices no concurren] *Tocaría un cuadrado exacto.* El estudiante se basa en la visualización al hacer la exploración para decidir si el cuadrilátero construido es o no solución al problema, pues sus mediatrices no concurren.

Explorar*:* Hacer una investigación empírica sobre una representación gráfica. Puede lograrse haciendo construcciones auxiliares, manipulando sus medidas, moviéndola para lograr otra mirada, haciendo cálculos y considerando casos.	A partir de un rectángulo ABCD, Lina construye un rombo usando como vértices los puntos de corte de las mediatrices del cuadrilátero ABCD con sus lados.  Se trata de la exploración de un caso en la que los estudiantes descubren que en el rombo las mediatrices de sus lados no concurren. Los estudiantes utilizan un cuadrilátero como figura auxiliar para obtener el rombo.
Generalizar: Ocurre cuando se postula una afirmación de carácter general, de la cual se tiene certeza debido al trabajo realizado en la visualización y en la exploración.	Después de encontrar que en el cuadrado y el rectángulo las mediatrices de sus lados concurren, Felipe afirma que: *Necesitamos encontrar un [cuadrilátero] que los ángulos sean de 90 grados para garantizar que las mediatrices se corten*. La exploración estática del cuadrado y el rectángulo incita a Felipe a presuponer algunas condiciones bajo las cuales los cuadriláteros resultan ser solución a la tarea propuesta. Esta situación se refleja en una primera generalización que proponen los estudiantes con relación a los ángulos internos del cuadrilátero.
Verificar: Medir, construir y calcular, con el propósito de poner a prueba una idea, estrategia, enunciado, afirmación, conjetura establecida, cuando un cuestionamiento suscita una duda frente a ésta.	Alejandra afirma que: *Para que las mediatrices de un cuadrilátero se corten, sus lados opuestos deben ser congruentes*. Ante esta afirmación, Paula reacciona y retoma la construcción del trapecio isósceles, diciendo: *No, porque nosotros habíamos visto que en el trapecio isósceles se cortaban y, los lados paralelos no son congruentes. Entonces lo que está afirmando no sirve.* Se evidencia la acción de verificar pues se pone a prueba el resultado obtenido por Alejandra, encontrando un ejemplo que invalida la idea dada.

PROCESO DE JUSTIFICACIÓN	EJEMPLO EN NUESTRA INVESTIGACIÓN
Explicar: Consiste en justificar, basándose en la experimentación previa realizada sobre la figura, para resaltar propiedades que se han encontrado durante la exploración.	Felipe explica al profesor por qué se puede garantizar que los lados no paralelos de un cuadrilátero, que construyó con apariencia de trapecio, a partir de un triángulo isósceles truncado son congruentes, afirmando que: *Lo puedo garantizar porque era un triángulo… cuando…. Nosotros sabemos qué tipo de triángulo es. El que tiene dos lados iguales. Entonces nosotros, al trazar acá un segmento….* [señala un segmento paralelo a la base del triángulo]. Felipe usa de manera implícita el teorema de Thales para formular una explicación de validación. Identifica de manera intuitiva que los segmentos que se determinan cuando dos rectas paralelas cortan dos rectas dadas son (en este caso) congruentes.
Probar: Consiste en obtener una relación entre una afirmación y las propiedades que la justifican, en la que las conexiones no son completamente claras y están incompletas pero que tiene un carácter general y son fruto de la teoría de referencia y de lo encontrado en la exploración.	Sebastián y Felipe hacen una prueba para justificar que el punto E, de corte de las mediatrices de un cuadrilátero cíclico ABCD está a la misma distancia de todos los vértices del cuadrilátero. Felipe dice: *¡Sí! Porque todos los radios de la misma circunferencia son congruentes*. Sebastián completa el argumento de Felipe, diciendo: *¡Sí! Porque si trazáramos segmentos desde el centro a cada uno de los vértices, todos quedarían siendo radios*.
Demostrar: Es una prueba en la que hay un encadenamiento completo de afirmaciones y sus respectivas razones y obedecen a una estructura deductiva (en el sentido matemático) aceptada por los miembros de la comunidad involucrada.	Felipe y Sebastián encadenan argumentos para justificar la afirmación: *el punto de corte de las mediatrices de un cuadrilátero* [cíclico] *está a la misma distancia de cada uno de sus vértices.* Sebastián dice: *Con el método de las mediatrices. Como el punto de concurrencia es un punto que está en todas las mediatrices. Y un punto que está sobre una mediatriz está a la misma distancia de dos puntos del segmento (los extremos) donde se creó la mediatriz…*Felipe reafirma el argumento: *Como el punto está en las cuatro mediatrices, podemos justificar que está a la misma distancia de cada uno de los vértices.* En el argumento, se menciona la definición de mediatriz como garante para justificar la equidistancia. Por la trayectoria de estudio de Felipe y Sebastián durante el experimento de enseñanza, se puede inferir la intención de utilizar la propiedad transitiva que completaría el argumento deductivo.

Tabla 2.1.1 Acciones de la actividad demostrativa

2.2. ARGUMENTACIÓN

2.2.1. Qué es argumentación

Dado que este estudio está orientado por las investigaciones del grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, quienes enmarcan sus trabajos de investigación en una perspectiva sociocultural, en este estudio consideramos importante dar relevancia a las interacciones en el aula. Consideramos que es en el curso de las interacciones estudiante – estudiante y estudiante – docente que toma importancia la noción de argumentación

En consonancia con esa mirada, asumimos también el planteamiento de Douek (1998), quien define la argumentación como: *el acto de formar razones, hacer inducciones, sacar conclusiones y aplicarlas al caso en discusión*. La argumentación se utiliza para expresar el punto de vista a favor o en contra de una afirmación u opinión con respecto a un hecho.

Un ejemplo de argumentación es el de Mayra cuando afirma que: *Los cuadriláteros tienen que tener los lados opuestos congruentes para que las mediatrices de sus lados se encuentren*. Ella propone como argumento para convencer a sus compañeros que: *en el cuadrado y el rectángulo las mediatrices se encuentran y, en los dos sus lados opuestos son congruentes.* (ver figura 2.2.1a). En este caso, Mayra hace una inducción a partir de unos casos particulares que le permite defender su afirmación, aunque ésta no es correcta.

Otro ejemplo de argumentación se da cuando Paula reacciona a la afirmación de Mayra diciendo: *Si Mayra dice que tienen que ser los lados congruentes, entonces no nos serviría el trapecio isósceles (*ver figura 2.2.1b*), entonces lo que afirma Mayra no nos sirve*. Paula expone una argumentación por contraejemplo, relacionado con el cuantificador universal "*para todo*", incidiendo en la fuerza y aceptación de la generalización inicial de Mayra.

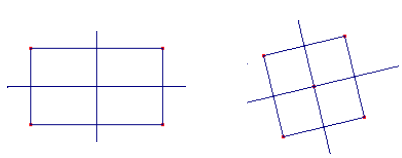


Figura 2.2.1a

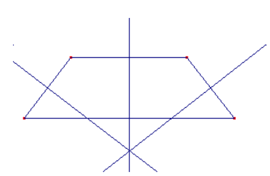


Figura 2.2.1b

2.2.2. Modelo de Toulmin

El modelo de Toulmin se convierte en nuestra herramienta para representar esquemáticamente la argumentación. Según una versión simplificada del modelo, los argumentos que conforman una argumentación se componen de tres elementos: datos, garantía y afirmación.

Afirmación: Es una proposición que se considera cierta en el proceso de argumentación y corresponde a la tesis de ésta.

Datos: Es la información en la que se basa la afirmación. Las figuras geométricas, la información que se obtiene de estas figuras a partir de la visualización y otras afirmaciones aceptadas de antemano, constituyen los datos de partida de la afirmación.

Garantía: La garantía da legitimidad al vínculo entre los datos y la afirmación, es decir, explica por qué los datos permiten llegar a la afirmación. Teniendo en cuenta el contexto en el cual se desarrolla el experimento de enseñanza, la garantía puede ser gráfica o teórica. Una garantía teórica corresponde a un hecho geométrico institucionalizado; una garantía gráfica alude a una representación gráfica de la situación.

2.2.3. Tipos de argumentos

En nuestra investigación utilizamos la estructura ternaria de los argumentos como criterio de clasificación, identificando argumentos abductivos, deductivos e inductivos. Tomamos como referencia las definiciones acordadas en el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional, con relación a cada tipo de argumento:

Argumento deductivo: Los argumentos deductivos tienen una estructura en la que se tienen unas premisas (datos) y, a partir de una proposición general que se asume como verdadera (garantía), se obtiene una conclusión. Este tipo de argumentación se puede representar de la siguiente manera:

$$(p \wedge r: p \rightarrow q) \rightarrow q$$

Un ejemplo de argumento que clasificamos como deductivo es el realizado por Felipe y Sebastián quienes ante un cuadrado ABCD inscrito en una circunferencia con centro E, afirman que: *el punto E está a la misma distancia de los vértices del cuadrilátero ABCD y, que esto es así porque todos los radios de una misma circunferencia son congruentes".*

Los datos corresponden al cuadrilátero ABCD inscrito en una circunferencia con centro en E. La garantía sería el teorema: Todos los radios de una misma circunferencia son congruentes. La afirmación es: el punto E está a la misma distancia de los vértices del cuadrilátero ABCD. En la figura 2.2.3.1 se representa el argumento de Felipe y Sebastián.

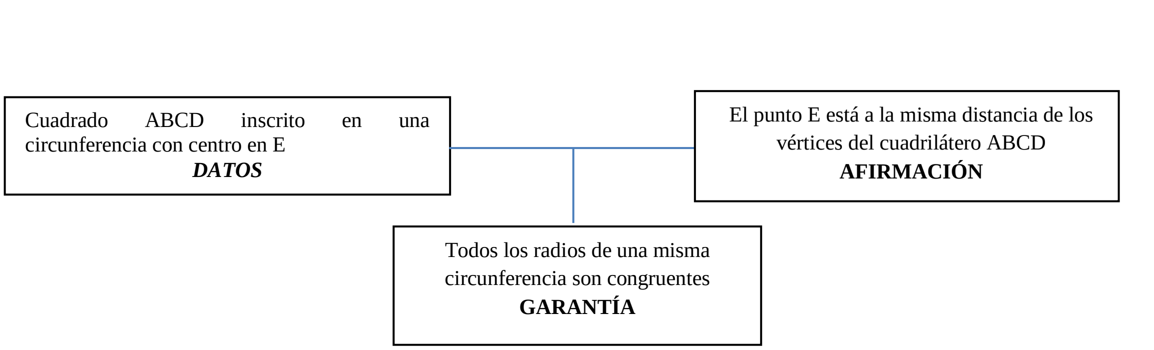


Figura 2.2.3.1

Argumento inductivo de descubrimiento: La argumentación inductiva se basa en observaciones o evidencias específicas $p1 \rightarrow q \wedge p2 \rightarrow q \wedge p3 \rightarrow q$, (donde los P_i son casos particulares) de las cuales se deriva una regla general plausible r: $p \rightarrow q$. Este tipo de argumentación se puede representar de la siguiente manera:

$$(p1 \rightarrow q \wedge p2 \rightarrow q \wedge p3 \rightarrow q,..) \text{ entonces } r: p \rightarrow q.$$

El siguiente es un ejemplo de argumentación inductiva. Después de explorar el cuadrado y el rectángulo como posible opción a la tarea de encontrar cuadriláteros en los que las mediatrices de sus lados concurran, Sebastián y Mayra concluyen que: *para que en un cuadrilátero las mediatrices concurran, los lados opuestos deben ser congruentes*. En este caso, se puede analizar que la regla de inferencia no es correcta; sin embargo, se evidencia un uso de la argumentación inductiva para llegar a una regla general plausible. Los datos son que en un cuadrado y un rectángulo las mediatrices de los lados concurren y los lados opuestos son congruentes, la afirmación es que las mediatrices concurren y la regla de inferencia que proponen es: si en un cuadrilátero los lados opuestos son congruentes, entonces sus mediatrices concurren.

Argumento abductivo: En la argumentación abductiva se pretende explicar una afirmación (q), a partir de un hecho (p). Se concluye una regla general plausible (r) p→ q. Este tipo de argumentación se puede representar de la siguiente manera:

$$(q \wedge p) \text{ entones posiblemente } p \rightarrow q.$$

Podemos ejemplificar un argumento abductivo con la intervención de Felipe, quien afirma que: *los lados no paralelos de este trapecio son congruentes* (ver Figura 2.2.3.1a), el estudiante busca apoyar la afirmación con los datos: el triángulo equilátero *ABC* truncado por el segmento *DE*, paralelo al lado *AB*. Aunque el estudiante no lo hace explícito, en este caso parece concluir la regla de inferencia: dos rectas paralelas determinan segmentos congruentes sobre dos rectas secantes con ángulos internos congruentes.

internos congruentes (ver Figura 2.2.3.1b). El esquema de Toulmin es como sigue:

Triángulo equilátero ABC truncado por un segmento paralelo a la base
DATOS

Los lados no paralelos de este trapecio son congruentes.
AFIRMACIÓN

Rectas paralelas determinan segmentos congruentes sobre dos rectas con ángulos alternos internos congruentes.
GARANTÍA

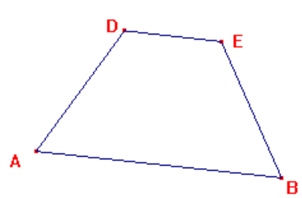


Figura 2.2.3.1ª

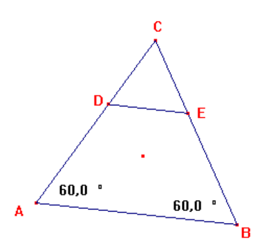


Figura 2..2.3.1b

2.3. UNIDAD COGNITIVA

En la sección 2.1. presentamos el constructo actividad demostrativa, en el que se distingue los procesos de conjeturación y justificación. En consonancia con nuestro propósito de investigación, nos interesa identificar la relación que existe entre estos dos procesos. Garuti et al (1998), introducen el constructo teórico unidad cognitiva, que se basa en la continuidad existente entre la producción de una conjetura y la posible construcción de su demostración. Coincidimos con la posición de Boero, Garuti y Mariotti, al considerar que el proceso de conjeturación no solamente sirve para llegar al hecho geométrico que se descubre, sino también a ciertas propiedades o relaciones geométricas que sirven para producir la justificación. (ver cita p. 14):

La continuidad entre la producción de una conjetura y la producción de la correspondiente prueba, se puede examinar a partir de dos puntos de vista: el contenido y la estructura. La unidad cognitiva de contenido permite identificar los elementos de contenido similares (definiciones, objetos geométricos, construcciones, entre otros) en los procesos de conjeturación y justificación. En cuanto a la unidad cognitiva estructural, Pedemonte (2007) considera que al comparar los procesos de conjeturación y prueba, resulta frecuente encontrar unidad cognitiva debido a la cantidad de elementos similares (datos, garantías y afirmaciones) del modelo de Toulmin en los dos procesos. Como consecuencia, propone el análisis desde un punto de vista estructural, identificando analogías y diferencias entre los dos procesos. Como se mencionó en la sección 2.2.3., utilizamos el modelo de Toulmin para reconocer la estructura de los argumentos de los estudiantes durante sus intervenciones en el desarrollo de las tareas propuestas en la secuencia; en consecuencia, este modelo se convierte en nuestra herramienta para facilitar el análisis de la posible continuidad estructural entre los procesos de conjeturación y justificación.

3. METODOLOGÍA

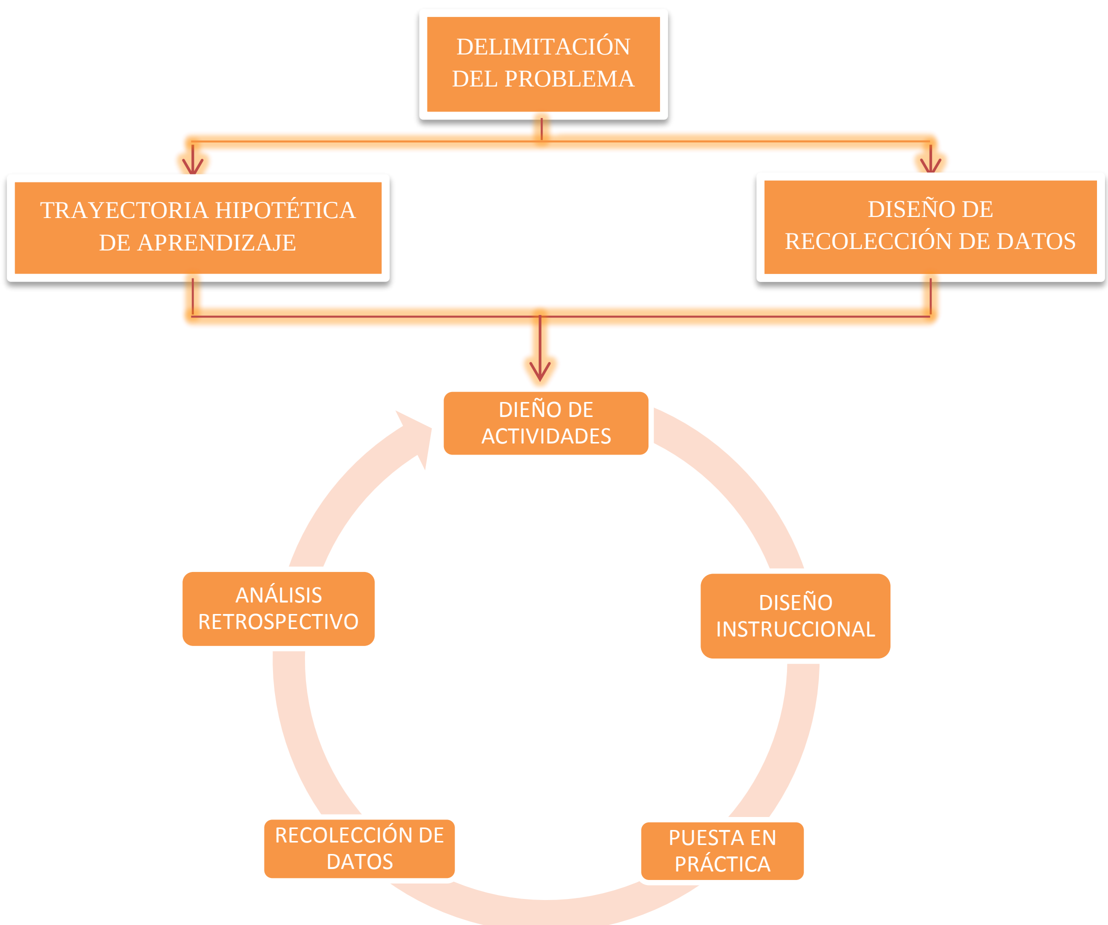
En este capítulo reportamos el proceso investigativo del trabajo desarrollado, orientado por las características específicas de la aproximación metodológica que asumimos para la investigación, que guarda estrecha relación con un experimento de enseñanza. En la primera parte del capítulo se describen los aspectos generales de un experimento de enseñanza. En consonancia con esta perspectiva y con el marco conceptual, posteriormente presentamos la trayectoria hipotética de aprendizaje que aventuramos, la secuencia de enseñanza y el diseño experimental. En la última sección describimos el contexto de aplicación, los aspectos de la implementación, las técnicas de recolección de datos y la herramienta analítica.

3.1. Aproximación Metodológica

Teniendo en cuenta la delimitación del problema y el objetivo general de la investigación, asumimos como metodología una aproximación a la perspectiva de experimento de enseñanza, enmarcada dentro del paradigma de la investigación de diseño (Cobb & Gravemeijer, 2008). Los experimentos de enseñanza se caracterizan por el diseño de una secuencia de actividades en la que los participantes son generalmente un investigador – docente, uno o más alumnos y uno o más investigadores – observadores. El docente hace parte integral del proceso de la investigación, rompiendo así la distinción usual entre investigadores, docentes y alumnos. El proceso de investigación tiene lugar a través de ciclos continuos de puesta en práctica, análisis y rediseño (Collins et al., 2004). En este proceso los investigadores hacen y refinan conjeturas sobre el aprendizaje de los estudiantes y sobre las fuentes que lo sustentan. Estas conjeturas se basan en las evidencias que van obteniendo, y en fundamentos teóricos sobre enseñanza y aprendizaje procedentes de la literatura, fuentes que actúan de manera entrelazada.

En la ejecución de los experimentos de enseñanza, Cobb & Gravemeijer (2008) distinguen tres fases: *preparación* del experimento, *experimentación* para promover el aprendizaje y *análisis* retrospectivo de los datos. En la segunda de estas fases tienen lugar las intervenciones en el aula y las sucesivas iteraciones del ciclo de tres pasos: diseño y formulación de hipótesis; intervención en el aula y recogida de datos; y análisis de los datos y revisión y reformulación de hipótesis.

En cuanto a la toma de los datos, es necesario recoger registros exhaustivos para capturar el proceso de enseñanza y aprendizaje. La minuciosidad en la recolección de datos permite analizar de forma retrospectiva el papel de ciertas variables que inicialmente pueden no haber sido consideradas pero que, posteriormente, resultan relevantes para el estudio. En el esquema 3.1.1 representamos las relaciones entre los aspectos más relevantes de la metodología de investigación.



Esquema 3.1.1 Metodología de investigación

Ubicamos nuestra investigación como una aproximación a un experimento de enseñanza porque, apoyados por los avances investigativos del grupo Aprendizaje y Enseñanza de la

Geometría, previmos dos hipótesis acerca del aprendizaje de los estudiantes (ver sección 1.1.). A partir de la hipótesis, diseñamos y llevamos a la práctica una secuencia de seis (6) actividades[1], que sufrió modificaciones motivadas por la evaluación permanente de los sucesos de la clase. Dichas modificaciones no afectaron de manera significativa el diseño de la secuencia; la mayor incidencia se presentó en el estilo de las preguntas que hacía el docente y sus intervenciones durante el desarrollo de las actividades.

En el curso de las interacciones correspondientes al último problema de la secuencia de actividades, tomamos un registro en video de las interacciones entre los estudiantes y el profesor. El análisis de las transcripciones de la interacción de tres grupos de tres estudiantes nos permitió dar cuenta del proceso de resolución del problema propuesto, la actividad demostrativa desplegada por los estudiantes e identificar si hubo o no unidad cognitiva.

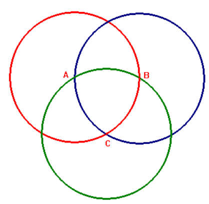
3.2. Trayectoria hipotética de aprendizaje

Teniendo presente el referente conceptual, supusimos que, mediante un esfuerzo por construir un sistema teórico local a partir de la resolución de problemas en los que se pide descubrir alguna propiedad relacionada con radios de circunferencias, la mediatriz de segmentos y los cuadriláteros cíclicos, los estudiantes producen conjeturas y establecen argumentos de plausibilidad que posteriormente pueden utilizar para desarrollar el proceso de justificación deductiva de dichas conjeturas. Específicamente, algunos teoremas relacionados con radios de circunferencias sirven de base a los estudiantes para justificar propiedades de la mediatriz, que se utilizan como garantes para justificar el teorema que afirma que en los cuadriláteros cíclicos las mediatrices concurren. Con estos elementos, los estudiantes viven una experiencia cercana a una actividad matemática genuina, al descubrir y justificar un hecho geométrico, en el marco de un sistema teórico local.

En la siguiente tabla presentamos el listado de problemas propuestos a los estudiantes en las actividades 2 a 8 y los hechos geométricos que esperábamos se institucionalizaran en cada

[1] Además de las seis actividades de la secuencia, diseñamos dos actividad preliminares de afianzamiento con el software de geometría dinámica CABRI.

sesión de clase. En la resolución del último problema esperábamos que se hiciera evidente el uso de los hechos geométricos previos para justificar deductivamente la conjetura formulada.

ACTIVIDAD	PROBLEMA	HECHOS GEOMÉTRICOS
1 Actividad: Congruencia de los radios de una circunferencia	Encontrar propiedades que cumplen los radios de una circunferencia.	Definición de circunferencia: Se define la circunferencia como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro. Propiedad de los radios de una circunferencia: ✓ Los radios de una misma circunferencia son congruentes. Definición de congruencia de segmentos: Dos segmentos son congruentes si tienen la misma longitud.
2 Actividad: Construcción de circunferencias congruentes	Reproducir en el software de geometría dinámica la siguiente figura, teniendo presente que la construcción soporte el arrastre.  Responder las preguntas: ¿Hay alguna circunferencia más grande que otra? ¿Cómo son las circunferencias?	Propiedades de las circunferencias congruentes y sus radios: ✓ Si dos circunferencias tienen radios congruentes, entonces las circunferencias son congruentes. ✓ Si dos circunferencias son congruentes, entonces sus radios son congruentes.
3 Actividad: Construcción de segmentos congruentes	Tarea 1 Construir un segmento AB y luego otro segmento congruente al segmento AB. Tarea 2 Construir un segmento AB y luego otro segmento congruente al segmento AB, con la condición que los segmentos construidos no tengan puntos en común. Tarea 3 Construir un segmento congruente a uno dado que pase por un punto C dado.	Definición de segmentos congruentes.

4 Actividad: Mediatriz de un segmento y sus propiedades.	Tarea 1: Ubicar dos puntos A y B en cualquier lugar de la pantalla ¿Es posible encontrar un punto C que cumpla la condición de que la distancia de A a C sea la misma que de B a C? ¿Existen otros puntos que cumplan esta condición? ¿Qué objeto geométrico forman todos estos puntos?	Definición de mediatriz de un segmento: lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos.
	Tarea 2: Si se tiene una recta y un punto A exterior a esa recta. Encontrar otro punto B de tal manera que la recta mencionada inicialmente resulte ser la mediatriz del segmento AB.	Propiedades de la mediatriz de un segmento: ✓ La mediatriz de un segmento pasa por el punto medio de este. ✓ Un segmento y su mediatriz son perpendiculares.
5 Actividad: Mediatrices de un triángulo	Tarea 1: Dados dos segmentos AB y BC y sus mediatrices, describir el movimiento del punto de intersección, de las mediatrices, al desplazar el punto B. Tarea 2: Encontrar alguna propiedad que cumplan las mediatrices de un triángulo ABD.	Propiedades del triángulo y sus mediatrices: ✓ Las mediatrices de un triángulo se cortan en un sólo punto. ✓ El punto de corte de las mediatrices de un triángulo equidista de sus vértices.
6 Actividad: Cuadriláteros cíclicos	Tarea 1: ¿Qué cuadriláteros de los que ustedes conocen (cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio), tienen la propiedad de que sus mediatrices se encuentran en un mismo punto? Tarea 2: Encontrar un cuadrilátero, diferente al cuadrado, al rectángulo y al trapecio isósceles, en el que se cumpla la característica de que sus mediatrices se corten en un sólo punto. ¿Qué característica tiene el punto de concurrencia de las mediatrices?	Propiedad de los cuadriláteros cíclicos y sus mediatrices: ✓ Si en un cuadrilátero las mediatrices de sus lados concurren, entonces el cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia con centro en el punto de concurrencia.

Tabla 3.2.1 Trayectoria hipotética de aprendizaje

3.3. Secuencia de enseñanza.

Con base en la trayectoria hipotética de aprendizaje, diseñamos una secuencia de enseñanza en la que buscamos prever y explicitar en detalle aspectos relacionados con la geometría euclidiana (definiciones y teoremas) y su estudio en un ambiente de geometría dinámica, que tendrían un papel protagónico en el momento del montaje. La secuencia está formada por una introducción al programa de geometría dinámica CABRI y seis actividades que invitan a resolver problemas de geometría euclidiana. En el esquema 3.3.1 página 38 y 39, se relacionan los problemas que se proponen en la secuencia con los hechos geométricos que se presume aparecen al desarrollar cada uno de los problemas.

A continuación describimos la secuencia de enseñanza, tal como quedó después de las revisiones previas a cada sesión de clase. Presentamos los objetivos de la secuencia y las actividades. Las dos primeras corresponden a tareas preliminares de afianzamiento con el software de geometría dinámica CABRI. En las demás, describimos las tareas incluidas en cada actividad, hacemos referencia al enunciado de los problemas, los logros de aprendizaje en relación con el conocimiento del programa de geometría dinámica y el conocimiento de geometría euclidiana, incluimos las preguntas orientadoras, y las posibles acciones de los estudiantes y del profesor.

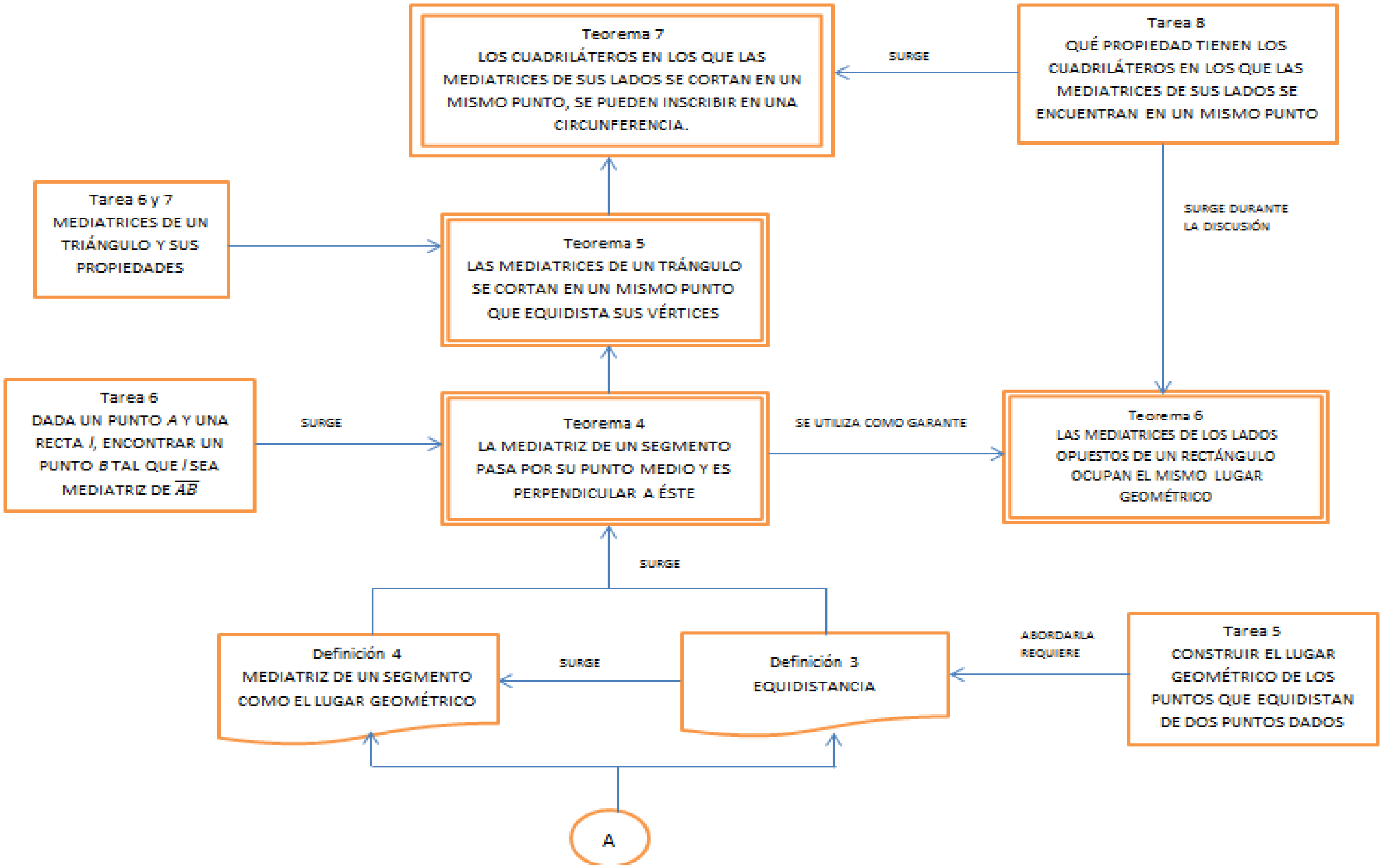
3.3.1. Objetivos de la secuencia de enseñanza

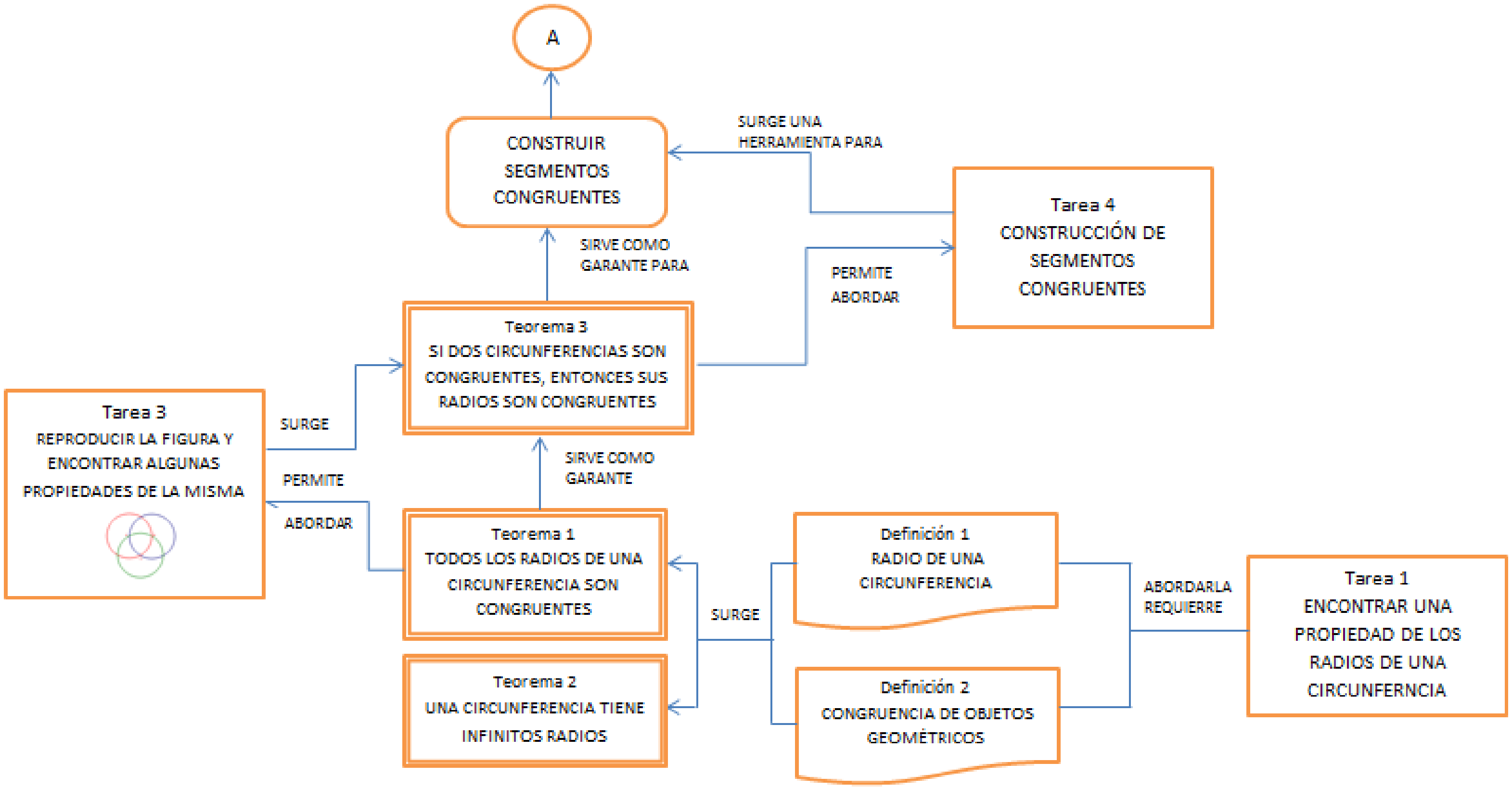
Objetivo General

Diseñar una secuencia de actividades que permita a los estudiantes desarrollar acciones propias de la actividad demostrativa en el contexto de un sistema teórico local.

Objetivos específicos

- Establecer una ruta de enunciados que permitan ir integrando hechos geométricos en un sistema teórico local.
- Propiciar un contexto de resolución de problemas abiertos que favorezcan la exploración, conjeturación, verificación y justificación de hechos geométricos por parte de los estudiantes.

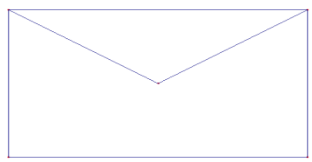

Teorema 7
LOS CUADRILÁTEROS EN LOS QUE LAS MEDIATRICES DE SUS LADOS SE CORTAN EN UN MISMO PUNTO, SE PUEDEN INSCRIBIR EN UNA CIRCUNFERENCIA.
SURGE
Tarea 8
QUÉ PROPIEDAD TIENEN LOS CUADRILÁTEROS EN LOS QUE LAS MEDIATRICES DE SUS LADOS SE ENCUENTRAN EN UN MISMO PUNTO
Tarea 6 y 7
MEDIATRICES DE UN TRIÁNGULO Y SUS PROPIEDADES
Teorema 5
LAS MEDIATRICES DE UN TRÁNGULO SE CORTAN EN UN MISMO PUNTO QUE EQUIDISTA SUS VÉRTICES
SURGE DURANTE LA DISCUSIÓN
Tarea 6
DADA UN PUNTO A Y UNA RECTA l, ENCONTRAR UN PUNTO B TAL QUE l SEA MEDIATRIZ DE $\overline{AB}$
SURGE
Teorema 4
LA MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO PASA POR SU PUNTO MEDIO Y ES PERPENDICULAR A ÉSTE
SE UTILIZA COMO GARANTE
Teorema 6
LAS MEDIATRICES DE LOS LADOS OPUESTOS DE UN RECTÁNGULO OCUPAN EL MISMO LUGAR GEOMÉTRICO
SURGE
Definición 4
MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO COMO EL LUGAR GEOMÉTRICO
SURGE
Definición 3
EQUIDISTANCIA
ABORDARLA REQUIERE
Tarea 5
CONSTRUIR EL LUGAR GEOMÉTRICO DE LOS PUNTOS QUE EQUIDISTAN DE DOS PUNTOS DADOS
A



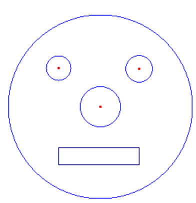
Esquema 3.3.1 Secuencia de enseñanza

3.3.2. Actividades

Actividad preliminar 1

Construcción de un sobre rectangular
Logros (De la herramienta de mediación): Introducir en la clase el uso de las herramientas del software de geometría dinámica CABRI. Introducir la noción de arrastre para mostrar los invariantes que definen y caracterizan los objetos geométricos.
Descripción de la tarea: Se propone a los estudiantes construir una figura como la que se presenta en el tablero (ver Figura 3.3.2.1), se recuerda que la construcción debe soportar el arrastre manteniendo su forma.  Figura 3.3.2.1

Actividad preliminar 2

Construcción del payaso
Logros (De la herramienta de mediación): Fortalecer en los estudiantes el uso de las herramientas del software de geometría dinámica CABRI. Introducir la noción de arrastre para mostrar los invariantes que definen y caracterizan los objetos geométricos.
Descripción de la tarea: Se propone a los estudiantes construir una figura como la que se presenta en el tablero (ver Figura 3.3.2.2). Se recuerda que la construcción debe soportar el arrastre manteniendo su forma. Esta actividad surgió como complemento a la anterior. En un comienzo no estaba prevista dentro de la secuencia; sin embargo, al realizar el análisis retrospectivo, nos dimos cuenta que los estudiantes aún no se habían apropiado de la importancia de la invarianza al arrastre para obtener construcciones representativas de un objeto geométrico o una figura en particular.  Figura 3.3.2.2

Actividad 1

<table>
<tr><td colspan="2">Congruencia de los radios de una circunferencia</td></tr>
<tr><td>Logros (Del desarrollo del sistema teórico local):
Establecer como postulado que todos los radios de una misma circunferencia son congruentes</td><td>Logros (De la herramienta de mediación):
Utilizar la opción de arrastre para justificar determinadas afirmaciones</td></tr>
<tr><td colspan="2">Descripción de la tarea: Se propone a los estudiantes construir una circunferencia, trazar radios de ésta y encontrar alguna propiedad. Se guía la discusión para que los estudiantes se den cuenta del hecho geométrico “todos los radios de una circunferencia son congruentes” para incorporarlo como postulado al sistema teórico local. La tarea se desarrolla en grupos de dos estudiantes y posteriormente se hace una socialización con todo el grupo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Enunciado de la tarea: Construya en CABRI una circunferencia, trace algunos de sus radios y encuentre una propiedad de estos[2].</td></tr>
<tr><td colspan="2">Posibles acciones de los estudiantes e intervenciones del profesor: Teniendo en cuenta el contexto institucional (en el cual el estudio de las matemáticas prioriza el trabajo aritmético y algebraico y no propicia la exploración), es posible que los estudiantes no estén familiarizados con los conceptos de circunferencia y radio de una circunferencia y no sepan cómo iniciar su exploración. Por tal razón, el docente puede introducir estas definiciones y dar algunas instrucciones y/o preguntas orientadoras, como por ejemplo: (i) construir un segmento que tenga como extremos el centro de la circunferencia y un punto de ésta, llamarlo OP. (ii) preguntarles si el segmento OP es el único segmento con extremos en el centro de la circunferencia y en un punto de ésta, y cuántos radios tiene entonces una circunferencia. Después se puede preguntar qué tienen en común los radios de una misma circunferencia y así introducirlos en la actividad.

Puede ocurrir que los estudiantes construyan una circunferencia, uno de sus radios y, mediante el arrastre, conjeturen que la circunferencia tiene sólo un radio En este caso, el profesor sugerirá que construyan otro radio y verifiquen que son diferentes, si el estudiante utiliza la opción de arrastre para superponer los radios construidos y justificar de esta manera la unicidad del radio, el docente debe establecer con los estudiantes el hecho que: dos segmentos son diferentes cuando están determinados por puntos diferentes.

Después de recordar qué es un radio y determinar que en una circunferencia se puede construir más de un radio, es posible que algunos estudiantes construyan varios radios, utilicen la opción de arrastre para superponer los radios construidos y establecer la conjetura: todos los radios una misma circunferencia son congruentes.

Luego de trabajar la actividad por grupos, el docente promoverá la socialización de las diferentes soluciones dadas por los estudiantes, y aceptaran la conjetura (todos los radios de una circunferencia son congruentes) como cierta.

CABRI ofrece la herramienta distancia y longitud, que podría ser utilizada por los estudiantes para establecer la congruencia de los radios a partir de su medida. Sin embargo, en el desarrollo del experimento de enseñanza no se insiste en el uso de esta herramienta, debido a que esta opción no favorece la exploración en el trabajo de las actividades propuestas.</td></tr>
</table>

[2] Por sugerencia del profesor Martín Acosta, el enunciado de la tarea podría formularse así: encuentre una posición del radio de manera que su longitud sea lo más grande (o pequeña) posible.

Aportes de la actividad a la construcción del sistema teórico local. • Definiciones de radio, circunferencia y congruencia. • Introducción del Postulado 1 al sistema teórico local: "Todos los radios de una circunferencia son congruentes".

Actividad 2

Construcción de circunferencias congruentes	
Logros (Del desarrollo del sistema teórico local): Establecer como conjetura: si dos circunferencias tienen radios congruentes entonces las circunferencias son congruentes. Establecer como teorema: todas las circunferencias congruentes tienen radios congruentes.	***Logros (De la herramienta de mediación):*** Afianzar el uso de la opción de arrastre como medio para explorar y verificar determinadas afirmaciones.
Descripción de la tarea: Se propone a los estudiantes reproducir una figura como la que proyecta en el tablero (ver Figura 3.3.2.3). A partir de la construcción, se introduce al sistema teórico local el Postulado 2 (un mismo segmento, usado como radio, produce circunferencias congruentes). Una vez realizada la construcción, se pide a los estudiantes que encuentren y justifiquen alguna característica de los radios de las circunferencias. La intención es incorporar el teorema 1 al sistema (si dos circunferencias son congruentes, entonces sus radios son congruentes), teorema que se puede justificar utilizando como garantía el Postulado 1. La actividad se desarrolla en grupos de dos estudiantes. Posteriormente se realiza una socialización que permite institucionalizar los resultados obtenidos.	
Enunciado de la tarea: Reproducir en CABRI la figura 3.3.2.3 (que consta de tres circunferencias congruentes) y encontrar algunas propiedades de la misma. Recuerde que al cambiar el tamaño de la figura, esta debe mantener su forma.	

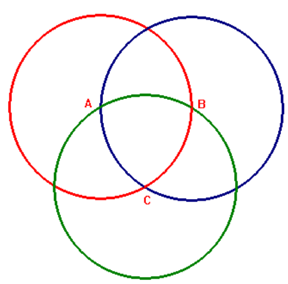
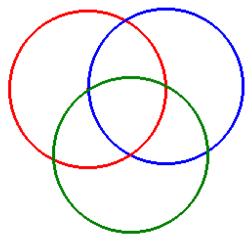
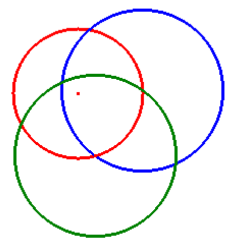


Figura 3.3.2.3

Posibles acciones de los estudiantes e intervenciones del profesor: Inicialmente, es posible que los estudiantes tracen tres circunferencias que no guarden ninguna relación de dependencia entre sí (ver figura 3.3.2.4a), pero que parezcan reproducir la Figura 3.3.2.3. El profesor puede verificar la no dependencia agrandando una de las circunferencias (ver Figura 3.3.2.4b) y, mediante cuestionamientos (referidos a las actividades preparatorias), llamar la atención sobre la condición de la invarianza al arrastre, haciendo énfasis en la relación que guardan las circunferencias construidas.



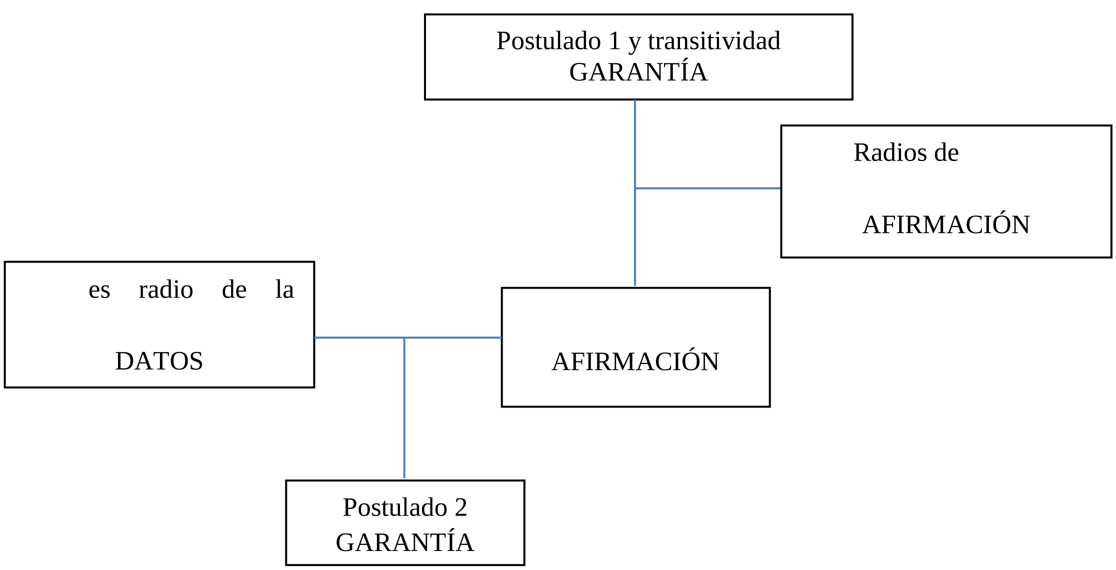
Antes de la intervención del docente
Figura 3.3.2.4a



Después de la intervención del docente
Figura 3.3.2.4b

Los estudiantes deben llegar a la reproducción de la figura de manera correcta, es decir: construir una circunferencia con centro en un punto A, luego construir la circunferencia con centro en un punto B sobre la circunferencia con centro en A y radio BA y, por último, construir la circunferencia con centro en un punto C sobre una de las intersecciones de las circunferencias A y B y radio CA o CB (Figura 3). El docente introduce cuestionamientos que permiten introducir el postulado: si dos circunferencias tienen radios congruentes entonces las circunferencias son congruentes.

Una vez reproducida la figura, se parte del hecho de que las tres circunferencias son congruentes (pues así se planteó en la tarea). Se pregunta a los estudiantes, ¿qué característica tienen los radios de estas circunferencias? Se espera que los estudiantes establezcan que los radios de las circunferencias son congruentes y utilicen el postulado 1 como garante, argumentación que se puede representar utilizando el modelo de Toulmin:



Aportes de la actividad al sistema axiomático local:

- Establecer como Postulado 2: radios congruentes determinan circunferencias congruentes.
- Establecer como Teorema 1: Si dos circunferencias son congruentes, entonces sus radios son congruentes. El Teorema se demuestra utilizando como garantía el Postulado 1.

Actividad 3

Construcción de segmentos congruentes	
Logros (Del desarrollo del sistema teórico local): Establecer como definición: Dos segmentos son congruentes cuando tienen la misma longitud	*Logros (De la herramienta de mediación):* Afianzar el uso de la opción de arrastre como medio para verificar determinadas afirmaciones

Descripción de la tarea: La actividad comienza proponiendo a los estudiantes la construcción de dos segmentos congruentes. Esta tarea se modifica en el transcurso de la sesión, dependiendo de las construcciones realizadas por los diferentes grupos. La intención final es buscar que los estudiantes construyan un segmento congruente a uno dado que pase por un punto determinado. En cada uno de grupos, se guía la discusión, con el propósito de promover la justificación de las afirmaciones dadas, utilizando el uso de los hechos geométricos obtenidos en las sesiones anteriores.

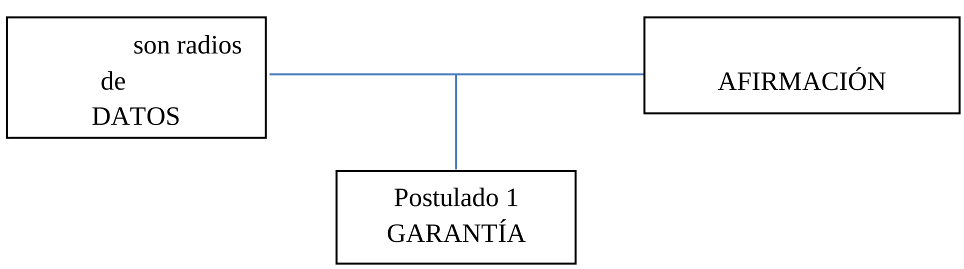
Enunciado de la tarea 1: Construir un segmento AB y luego construir otro segmento congruente a él.

Posibles acciones de los estudiantes e intervenciones del profesor: Si los estudiantes construyen un segmento, y luego, por tanteo construyen otro, perceptualmente congruente al primero, el profesor mediante cuestionamientos, debe llamar la atención sobre la condición de la invarianza al arrastre, además de insistir en la dependencia entre las construcciones. Para esto, se puede apoyar en las actividades preliminares de la secuencia, en particular las construcciones del sobre y el payaso. Si después del cuestionamiento del docente, los estudiantes aún no utilizan la opción de arrastre para validar su construcción, el docente debe intervenir directamente sobre la figura y refutarla usando el hecho de la deformación al aplicar el arrastre (ver Figura 3.3.2.5).

Antes de la intervención del docente — Después de la intervención del docente

Figura 3.3.2.5

También es posible que los estudiantes construyan un segmento AB, una circunferencia con centro en un extremo del segmento y radio AB, luego construyan otro radio de la circunferencia (ver Figura 3.3.2.6). Esta construcción se puede justificar utilizando como garante el Postulado 1, generando un esquema de argumentación de la forma:



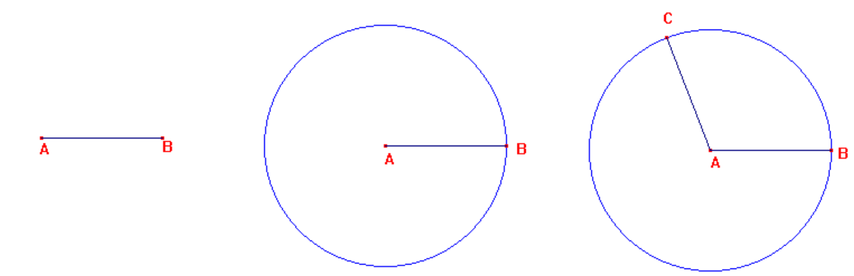


Figura 3.3.2.6

Enunciado de la tarea 2: Construir un segmento AB y luego otro segmento congruente al segmento AB, con la condición de que los segmentos construidos no tengan puntos en común.

Posibles acciones de los estudiantes e intervenciones del profesor: Se espera que los estudiantes utilicen la Figura 3.3.2.3 como apoyo para el desarrollo de esta tarea; de esta manera, es posible que surjan construcciones como las de la Figura 3.3.2.7:

Figura 3.3.2.7

A partir de estas construcciones, se puede llegar a justificar que los segmentos AB y BC son congruentes.

Si los estudiantes no se interesan por desarrollar una justificación, el docente debe plantear algunos interrogantes que permitan desarrollar una justificación deductiva. Por ejemplo: ¿por qué son congruentes?, ¿Qué me permite justificar la congruencia de los segmentos?, se espera que los estudiantes justifiquen la conjetura utilizando como garantía el Postulado 1 y/o el Teorema 1.

Enunciado de la tarea 3: Trazar un segmento AB y un punto C que no esté en el segmento; luego, construir un segmento CD congruente al segmento AB.

Posibles acciones de los estudiantes e intervenciones del profesor: Por la característica de la tarea y, teniendo presente las actividades desarrolladas en CABRI durante las sesiones anteriores, es posible que los estudiantes realicen construcciones de circunferencias congruentes anidadas, tratando de hacer coincidir el punto C con el centro de alguna de las circunferencias construidas, estrategia que permite solucionar la situación; sin embargo, los segmentos no necesariamente se mantienen congruentes al aplicar el arrastre (ver Figura 3.3.2.8). Por tal razón, se espera una intervención del docente para sugerir el uso de la herramienta compás (desconocida por los estudiantes) como apoyo para la construcción.

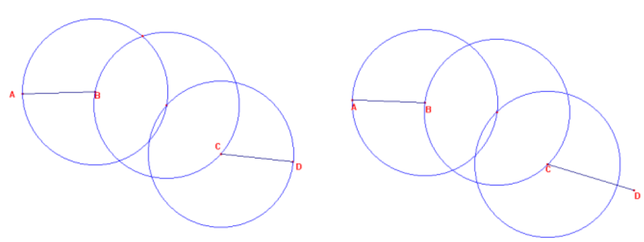


Figura 3.3.2.8

Una vez hecha la construcción, usando la opción compás, se incentivará una discusión para justificar por qué los segmentos quedan congruentes y, se hará la verificación por arrastre para garantizar que las longitudes de los dos segmentos son congruentes, aunque se modifiquen. El profesor resaltará que se está haciendo uso del Postulado 2, cuando se usa la herramienta compás.

Actividad 4

Construcción de la mediatriz de un segmento

Logros (Del desarrollo del sistema teórico local): Establecer como definición: la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Descripción de la tarea: En esta actividad se propone construir el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados A y B; después, se realiza una socialización con el propósito de caracterizar el objeto geométrico encontrado, estableciendo la definición de mediatriz de un segmento.

Enunciado de la tarea: Ubicar dos puntos A y B en cualquier lugar de la pantalla ¿Es posible encontrar un punto C que cumpla la condición de que la distancia de A a C, sea la misma que de C a B?

Posibles acciones de los estudiantes e intervenciones del profesor: Algunos estudiantes que aún no se han apropiado de la dependencia en las construcciones, puede intentar el desarrollo de la tarea por tanteo, ubicando el punto C más o menos en el punto medio del segmento AB. También se espera que utilicen la herramienta de CABRI "punto medio" que les permita encontrar el punto C.

Una vez ubicado el punto C, si los estudiantes por iniciativa propia no realizan una justificación de la afirmación: el punto C es el punto medio del segmento AB, el docente puede introducir cuestionamientos de tipo ¿Están seguros que la distancia de A a C es igual a la distancia de C a B? ¿Por qué se puede afirmar este hecho con certeza? ¿Nos puede servir de apoyo alguno de los postulados o teoremas estudiados en las sesiones anteriores?

Son varios los argumentos que pueden dar los estudiantes para contestar los interrogantes planteados; por ejemplo:

- Porque se ve, argumento que no será aceptado por el docente;
- Porque si se traza una circunferencia con centro en C, se ve que pasa por A y B, situación en la que se usa de manera implícita el Postulado 1, este tipo de argumento será tomado como válido en el proceso de justificación.

Una vez encontrado un punto C y justificada la equidistancia a los puntos A y B, se cuestionará acerca de la unicidad del punto a partir de interrogantes como: ¿Existen otros puntos que cumplan ésta condición?, ¿qué objeto geométrico forman estos puntos?

Se espera que los cuestionamientos anteriores favorezcan la exploración por parte de los estudiantes y se construya la recta formada por el conjunto de puntos que equidistan de dos puntos dados; esta búsqueda podría realizarse al tanteo (tratando de ubicar los puntos sin guardar ninguna dependencia), o construyendo dos circunferencias congruentes con centro en los puntos iniciales, radio AB y, trazando la recta que pasa por la intersección de las circunferencias.

Aportes al sistema teórico local: A partir de esta actividad, se incorpora el concepto de mediatriz al sistema teórico local:

El conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento, recibe el nombre de mediatriz.

Actividad 5

Mediatrices de un triángulo

Logros (Del desarrollo del sistema teórico local): Utilizar las definiciones y hechos geométricos del sistema teórico local para conjeturar y justificar propiedades relacionadas con el triángulo y sus mediatrices.	***Logros (De la herramienta de mediación):*** Utilizar la opción de arrastre como una herramienta eficaz para verificar propiedades de los objetos geométricos.

Descripción de la tarea: En esta actividad, se plantea una situación referida a los triángulos y sus mediatrices. La intención es que los estudiantes a partir de la exploración logren establecer la conjetura: Las mediatrices de un triángulo ABC concurren en un solo punto (llámese E). Una vez establecida la conjetura, se introducen cuestionarios que inicien un proceso de justificación por parte de los estudiantes.

Enunciado de la tarea 1: Dados dos segmentos AB y BC y sus mediatrices, describir el movimiento del punto de intersección, de las mediatrices, al desplazar el punto B.

Posibles acciones de los estudiantes e intervenciones del docente: Se espera que los estudiantes, a partir de la visualización, encuentren el lugar geométrico correspondiente a la recta mediatriz del segmento AC (ver Figura 3.3.2.9). Como en las actividades previas no se ha utilizado la herramienta traza, esta tarea resulta propicia para introducirla y utilizarla como herramienta de verificación de las respuestas dadas por los estudiantes. Si se reconoce la recta como el lugar geométrico generado, pero no se identifica la relación de ésta con respecto al segmento AC, es necesaria la intervención del docente para incorporar a la discusión la definición y propiedades de la mediatriz y derivar en el hecho esperado.

Una vez reconocido el lugar geométrico que describe el punto D como la mediatriz del segmento AC, es posible que los estudiantes no tomen la iniciativa de justificar este hecho, el docente debe intervenir e introducirlos en una ruta que permita reconocer argumentos de plausibilidad para utilizarlos posteriormente en el proceso de justificación.

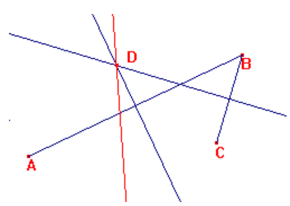
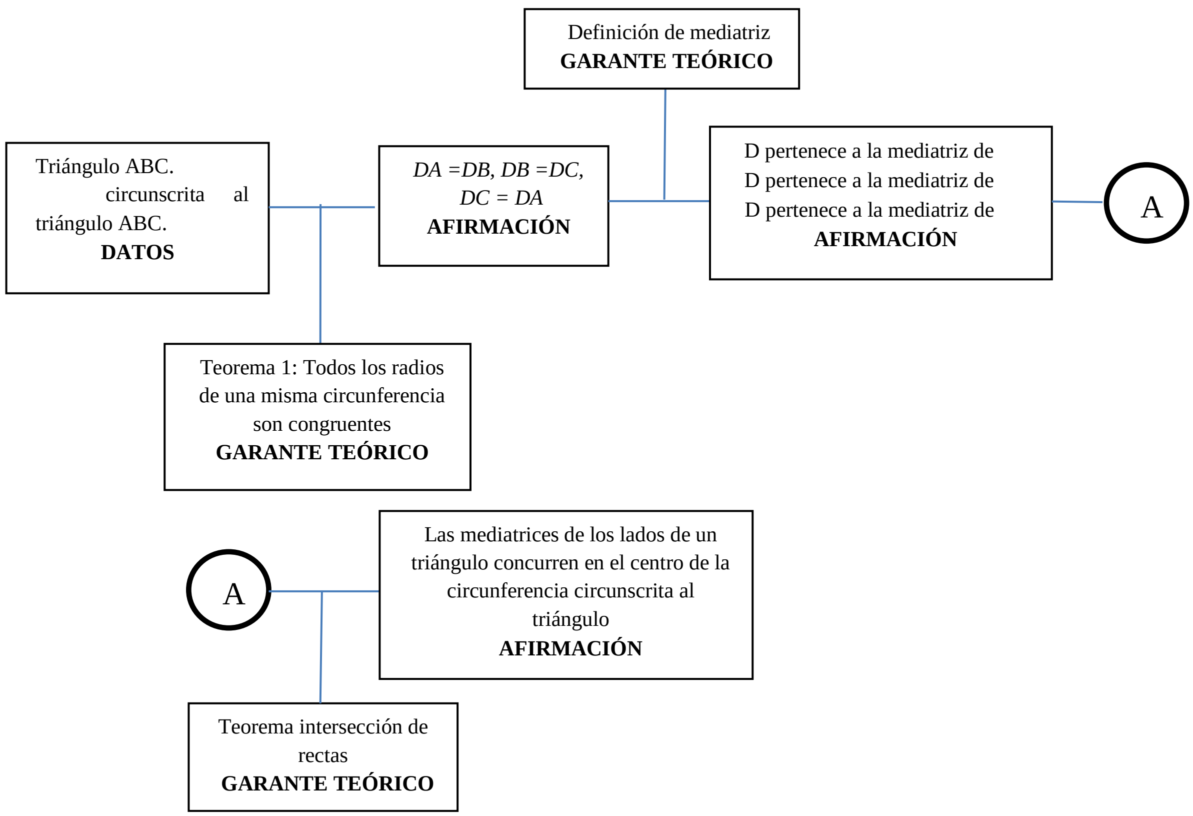


Figura 3.3.2.9

Enunciado de la tarea 2: Encontrar alguna propiedad que cumplan las mediatrices de un triángulo ABD.

Posibles acciones de los estudiantes e intervenciones del docente:

Se espera que los estudiantes afirmen que el punto de corte de las mediatrices (D) equidista de los puntos A, B y C; afirmación que se puede justificar utilizando como garante gráfico la construcción auxiliar de la circunferencia con centro en el punto D y radio DA y, como garante teórico el Teorema 1: Todos los radios de una misma circunferencia son congruentes. Estos mimos hechos, además de servir de garantes para justificar la equidistancia, permiten justificar la propiedad: Todos los triángulos se pueden inscribir en una circunferencia con centro en el punto de corte de las mediatrices. Sin embargo, la conjetura que se espera por parte de los estudiantes es diferente. Para justificar la conjetura inicial, es necesario presentar como dato el triángulo y la circunferencia circunscrita. En este caso, se puede usar como garante el Teorema 1 para justificar que el punto D equidista de los extremos de los puntos A y B y, obedeciendo la Definición 4, se puede afirmar que pertenece a la mediatriz del segmento AB. De manera análoga, se puede afirmar que el punto D pertenece a la mediatriz del segmento BC y del segmento CA. Por tanto, se concluye que las mediatrices de los lados se cortan en el punto D, este último hecho se justifica usando como garante teórico el teorema de unicidad de intersección de las rectas. Como los estudiantes no han trabajo el teorema de unicidad de intersección de las rectas durante la secuencia de actividades o su trayectoria escolar, no se exige su uso durante la justificación. Este argumento se puede representar en el siguiente esquema de Toulmin:



Actividad 6

Cuadriláteros cíclicos
Logros (Del desarrollo del sistema teórico local): Establecer como teorema el hecho geométrico: si las mediatrices de los lados de un cuadrilátero concurren en un punto D, entonces, el cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia con centro en D.
Descripción de la tarea: En esta actividad, se plantea una situación referida a los cuadriláteros cíclicos, que consideramos, favorece las acciones propias de la actividad demostrativa (visualizar, explorar, generalizar, explicar, probar y demostrar). La sesión está dividida en dos partes; en cada una de ellas se propone una tarea específica para realizar en los diferentes grupos y posteriormente hacer una socialización para compartir las construcciones y justificaciones que surgen durante el desarrollo de la tarea.
Enunciado de la tarea 1: ¿Qué cuadriláteros de los que ustedes conocen tienen la propiedad de que sus mediatrices se encuentran en un mismo punto?

Posibles acciones de los estudiantes e intervenciones del docente: La tarea se propone a la totalidad del grupo. Luego, se realiza una lista (en el tablero) de los posibles cuadriláteros en los que se pueda llegar a cumplir la propiedad de que todas las mediatrices de sus lados concurren. Se espera que los estudiantes mencionen los cuadriláteros que han trabajado durante su trayectoria escolar: cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo, trapecio. Después, el docente pedirá verificar estas suposiciones y determinar cuáles de los cuadriláteros mencionados cumplen la dicha propiedad, esta tarea se desarrolla en grupos de tres personas, luego se hará una socialización para que la totalidad de estudiantes identifique los cuadriláteros especiales en los que se cumple la condición de que sus mediatrices concurran.

En el proceso de exploración de los cuadriláteros que se supone pueden presentar la propiedad de concurrencia de las mediatrices de sus lados, se espera que los estudiantes utilicen el proceso estudiado en la actividad de la construcción del sobre, para obtener una construcción representativa del rectángulo y el cuadrado, este último, apoyados en el Teorema 1, Postulado 1 y Postulado 2. Luego, es posible que los estudiantes tracen las mediatrices de los lados del cuadrilátero (ver Figura 3.3.2.10), y a partir la observación, determinen que el rectángulo y el cuadrado son soluciones particulares al problema propuesto. También se puede presentar que algún estudiante utilice la herramienta de polígono regular para construir el cuadrado.

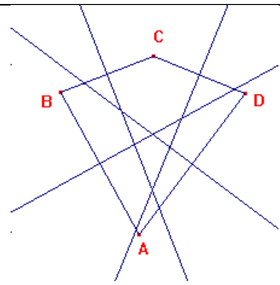
Figura 3.3.2.10

Por la trayectoria de los estudiantes con relación al manejo de las herramientas del CABRI y las propiedades de las figuras geométricas, no se espera que realicen una construcción robusta del rombo y el trapecio (en particular el trapecio isósceles); pueden utilizar la herramienta de segmento y la opción de arrastre para obtener una figura blanda de estos cuadriláteros y continuar con la exploración, al construir las mediatrices de los lados y, a partir de la visualización, descartar el rombo y aceptar el trapecio isósceles como solución al problema.

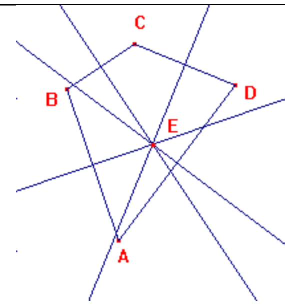
Enunciado de la tarea 2: ¿Qué otro cuadrilátero, diferente al cuadrado, al rectángulo y al trapecio isósceles, cumple la propiedad que las mediatrices de sus lados se corten en un sólo punto?

Posibles acciones de los estudiantes e intervenciones del docente: La exploración a partir del uso del arrastre que ofrece el programa CABRI, parece ser el camino más propicio que pueden seguir los estudiantes para desarrollar el proceso de conjeturación y establecer: Si las mediatrices de los lados de un cuadrilátero concurren, entonces el cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia con centro en el punto de concurrencia de las mediatrices. Para ello se espera que: construyan un cuadrilátero ABCD con la herramienta segmento y luego tracen las mediatrices de sus lados (ver Figura 3.3.2.11a). En el caso que estas no concurran, utilicen la opción de arrastre para modificar el cuadrilátero a partir de uno de sus extremos hasta obtener un cuadrilátero en el que se cumpla la condición de concurrencia de sus mediatrices (ver Figura 3.3.2.11b)[3].

[3] En comunicación personal, el profesor Martin Acosta sugiere que una vez encontrado un cuadrilátero en el que las mediatrices de sus lados concurren, resultaría interesante proponer el uso de la traza de uno de los vértices del cuadrilátero y tratar de conservar la concurrencia de las mediatrices al arrastrar otro de los vértices del cuadrilátero.



Antes de utilizar la opción de arrastre
Figura 3.3.2.11a



Después de utilizar la opción de arrastre
Figura 3.3.2.11b

Si los estudiantes no tienen iniciativa para establecer alguna propiedad entre el punto de concurrencia de las mediatrices (E) y los vértices del cuadrilátero, es necesaria la intervención del docente para interrogar al grupo e iniciarlos en la exploración que les permita identificar la propiedad de equidistancia del punto E con respecto a los puntos A, B, C y D, que puede surgir con el apoyo de la construcción auxiliar de una circunferencia con centro en E y radio EB, EA, EC o ED. (ver Figura 3.3.2.12). Esta propiedad es equivalente al hecho geométrico: si las mediatrices de los lados de un cuadrilátero ABCD concurren en un punto E, entonces el cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia con centro en E y radio EA.

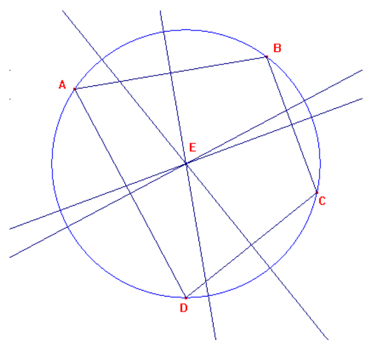
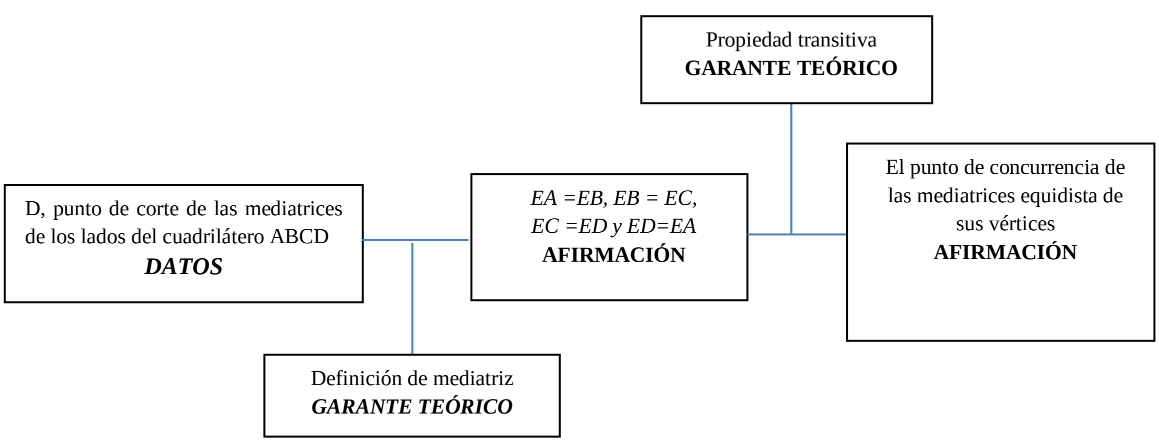


Figura 3.3.2.12

Una vez formulada la conjetura, los estudiantes pueden justificar este hecho, utilizando como datos el cuadrilátero ABCD y las mediatrices de los lados que concurren en un punto E; como garante teórico la definición de mediatriz y como una primera afirmación el hecho que *EA =EB, EB = EC, EC =ED y ED=EA;* después, a partir de la propiedad transitiva, se puede concluir que: si las mediatrices de los lados de un cuadrilátero concurren, entonces el punto de concurrencia equidista de sus vértices. Este argumento se puede representar utilizando el siguiente esquema de Toulmin.



Aportes de la actividad al sistema teórico local: Con esta actividad, se culmina la secuencia y busca dar coherencia y unidad al sistema teórico local, incorporando como último teorema:

Si las mediatrices de los lados de un cuadrilátero ABCD concurren en un punto E, entonces el cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia con centro en E y radio EA.

3.4 Diseño experimental

Después de planear la secuencia de enseñanza, realizamos un diseño experimental con el propósito de poner a prueba las hipótesis planteadas. En el diseño tuvimos en cuenta, entre otros, los siguientes factores: el contexto de aplicación, aspectos relacionados con la implementación, las técnicas de recolección de datos, la herramienta analítica y los indicadores de la presencia de actividad demostrativa y de unidad cognitiva.

3.4.1. Contexto de aplicación

El trabajo se realizó con aproximadamente 70 estudiantes de grado octavo del Instituto Nacional de Promoción Social en la zona urbana del municipio de Villeta (Cundinamarca). Uno de los dos investigadores era el profesor titular del curso y el otro actuó como observador no participante, apoyando la recolección de los datos. Junto con la asesora del trabajo, diseñamos y realizamos el análisis retrospectivo de la secuencia de enseñanza.

Como lo mencionamos en la justificación de la investigación (ver Capítulo 1), en la institución educativa en la que se implementó la secuencia, el estudio de la geometría estaba relegado a un segundo plano, ya que en las programaciones del área de matemáticas se daba prioridad al estudio de los pensamientos numérico y algebraico. La práctica de enseñanza y aprendizaje en la clase de matemáticas de la institución enfatiza el estudio de algoritmos; de esta manera, usualmente la actividad se centra en el aprendizaje de procedimientos de las operaciones aritméticas en los diferentes sistemas numéricos, los algoritmos de factorizar, resolver ecuaciones y, en los grados superiores, los algoritmos correspondientes al cálculo infinitesimal. Este modelo de clase, convierte al estudiante en un actor pasivo del proceso.

Los estudiantes no estaban familiarizados ni con las definiciones ni con los procesos de construcción de los objetos geométricos que se utilizaban en el desarrollo de las actividades. Además, la experiencia con software de geometría dinámica era nula. Teniendo en cuenta este contexto, el equipo investigador diseñó unas actividades preliminares de afianzamiento con el software de geometría.

Teniendo en cuenta el marco teórico de la actividad demostrativa, era necesario crear un ambiente de clase que favoreciera las acciones de los procesos de conjeturación y justificación y procurar que los alumnos no recurrieran a una figura de autoridad (por ejemplo el docente) para validar sus resultados.

El trabajo se realizó en el aula de informática de la institución, con disponibilidad de 15 equipos de cómputo que tienen instalado el software de geometría CABRI. El grupo de investigadores tenía la sala a su disposición en los tiempos planeados para el desarrollo de la secuencia.

3.4.2. Aspectos de la implementación

En relación a los aspectos de la implementación, es importante señalar que la secuencia de problemas se aplicó en la jornada normal de la clase. El trabajo usual de cada clase consistía en proponer a los estudiantes un problema abierto en el que se les pedía encontrar alguna propiedad de los objetos geométricos que constituyen la secuencia. En la Tabla 3.4.2.1 se muestran algunos datos y observaciones de lo ocurrido en la implementación.

Fecha de aplicación	**Actividad**	**Descripción de los sucesos principales**
29 – 09 – 2011	Actividad 1: Congruencia de los radios de una circunferencia	La actividad se desarrolla acorde a lo planeado. Durante su desarrollo surge la propiedad que proyectamos en el diseño de la secuencia: Los radios de una misma circunferencia son congruentes. Uno de los grupos presenta un argumento basado en la propiedad del arrastre que ofrece CABRI. Construyen varios radios de la circunferencia y luego los arrastran para hacerlos coincidir con uno sólo (ver Figura 3.4.2.2).

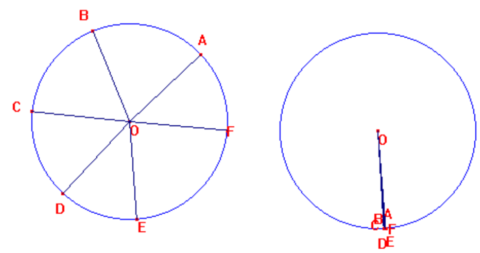
<table>
<tr><td></td><td></td><td>


Figura 3.4.2.2

Además surge una propiedad interesante, no prevista en el diseño de la secuencia; una circunferencia tiene infinitos radios; ésta afirmación se soporta utilizando un garante gráfico facilitado por el software de geometría dinámica CABRI. Los estudiantes construyen dos radios de una circunferencia y muestran que es posible construir otro entre los dos iniciales. Cuando perceptualmente resultaba difícil la construcción, amplían la circunferencia para facilitar el procedimiento (ver Figura 3.4.2.1).

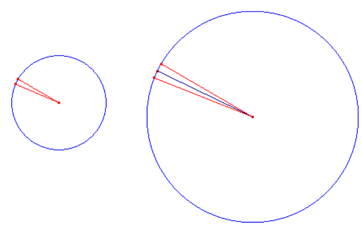


Figura 3.4.2.1
</td></tr>
<tr><td>04- 10 – 2011</td><td>Actividad 2: Construcción de circunferencias congruentes</td><td>
En los primeros intentos de reproducir la Figura 1, los estudiantes tienen dificultades para garantizar la invarianza al arrastre. Por ejemplo, la longitud de los radios de la circunferencia no dependían entre sí (ver Figura 3.4.2.3):

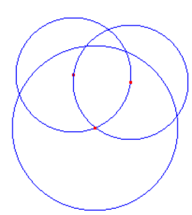
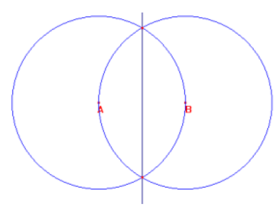


Figura 3.4.2.3

Después de llamar la atención sobre la invarianza al arrastre, los estudiantes llegan a la propiedad esperada.
</td></tr>
</table>

11 – 10 – 2011	Actividad 3: Construcción de segmentos congruentes	A los estudiantes se les dificulta respetar las hipótesis durante el proceso de construcción. En la tarea 2, en lugar de construir un segmento congruente a uno dado, construyen una circunferencia y muestran dos radios, garantizado la congruencia entre estos. Después de discutir la diferencia entre las formas de proceder, reorganizan las construcciones para encontrar un segmento congruente a uno dado, según las indicaciones de cada tarea.
18–10-2011	Actividad 4: Mediatriz de un segmento y sus propiedades.	Inicialmente, la mayoría de estudiantes aborda el problema ubicando el punto medio de manera intuitiva; sólo unos grupos utilizan la herramienta Punto medio que ofrece CABRI, para ubicar el punto que equidista de dos puntos dados. Cuando se cuestiona a los estudiantes acerca de la existencia de otros puntos que cumplan la condición, la mayoría de estudiantes comienza la búsqueda ubicando puntos sobre la pantalla que aparentemente conservan la equidistancia. Sólo uno de los grupos realizó una construcción que permitió obtener el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos dados (ver Figura 3.4.2.4).  Figura 3.4.2.4 Como en la mayoría de los grupos no se desarrolla una construcción robusta que permita obtener la recta mediatriz, es necesario realizar una socialización para institucionalizar la definición de mediatriz de un segmento como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de sus extremos y mostrar la construcción a todos los grupos. La tarea 2 se desarrolla acorde a lo previsto en el diseño de la secuencia. Se logra establecer el teorema esperado.

25 – 10 – 2011	Actividad 5: Mediatrices de un triángulo	En la tarea 1, la mayoría de los grupos identifica que el lugar geométrico que describe el punto D es una línea recta; sin embargo, no asocian la recta con la mediatriz del segmento AC, debido quizá a que nunca se pide trazar el segmento AC, hecho que pone de manifiesto la dificultad que tienen los estudiantes para utilizar construcciones auxiliares durante la exploración. Luego de institucionalizar que el lugar geométrico explorado corresponde a la mediatriz del segmento AC, todos los estudiantes retoman la construcción e identifican la propiedad de concurrencia de las mediatrices de un triángulo. En la tarea 2, sólo algunos grupos establecen la propiedad de equidistancia del punto de corte de las mediatrices con relación a los vértices del triángulo. En estos grupos, los estudiantes utilizan como garante gráfico la construcción auxiliar de una circunferencia con centro en el punto de corte y que circunscribe el triángulo.
01 – 11 – 2011	Actividad 6: Cuadriláteros cíclicos.	Tal como se planeó en la secuencia de enseñanza, la fase de anticipación promueve una exploración de casos que permite encontrar los cuadriláteros especiales en los que se cumple la propiedad de concurrencia de las mediatrices; sin embargo, esto incide en que los estudiantes no exploren cuadriláteros sin características familiares para ellos. Es importante resaltar que en la secuencia se había planeado que los estudiantes establecieran la propiedad: *Si las mediatrices de los lados de un cuadrilátero concurren, entonces el cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia con centro en el punto de corte de las mediatrices de los lados.* Los estudiantes no encontraron esta propiedad sino una equivalente: *Si las mediatrices de los lados de un cuadrilátero concurren, entonces el punto de corte equidista de los vértices del cuadrilátero.* Otros grupos, como resultado de su exploración, encuentran la propiedad recíproca: *En un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, las mediatrices de sus lados concurren.* En el siguiente capítulo hacemos un análisis más detallado de esta actividad.

Tabla 3.4.2.1

3.4.3. Técnicas de recolección de datos

La secuencia de enseñanza se implementó con los cursos de grado octavo 801, 802 y 803 de la institución. Los estudiantes trabajaron en grupos de tres, se realizaron filmaciones con tres cámaras de video, registrando el trabajo correspondiente a tres grupos de estudiantes de uno de los cursos, de los problemas cinco y seis de la secuencia. En adelante, nos referiremos a los grupos así: Grupo 1: MaPaSe, Grupo 2: BraDoLi y Grupo 3: FeSe. No se tomaron registros escritos del trabajo de los estudiantes, ya que las situaciones fueron diseñadas para ser exploradas en el programa de geometría dinámica CABRI y, los estudiantes sólo tomaban nota de los resultados que se institucionalizaban como definiciones o teoremas del sistema teórico local.

Terminada la primera revisión y análisis del material fílmico, se optó por analizar en detalle únicamente las transcripciones correspondientes a la Actividad 6, dado que el tiempo para la investigación era corto y en esta actividad era posible identificar las fases de la resolución de problemas definidas por Boero (1999), las diferentes acciones de la actividad demostrativa, argumentos de los tres tipos descritos en el marco teórico y unidad cognitiva. Se realizaron transcripciones en detalle de las grabaciones, introduciendo explicaciones con el propósito de facilitar una lectura comprensiva de éstas, sin necesidad de recurrir al video e incluyendo figuras en CABRI similares a las realizadas por los estudiantes. De las transcripciones se obtuvieron 24 fragmentos: nueve de la transcripción correspondiente al grupo MaPaSe, ocho de la correspondiente a BraDoLi y siete de la correspondiente a FeSe. Para fragmentar las transcripciones tuvimos en cuenta las siguientes fases de resolución de problemas en los que se desarrolla actividad demostrativa. Estas fases son una adaptación de la propuesta de Boero (1999).

FASES DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	
Anticipación	Aunque en las fases de resolución de problemas descritas por Boero (1999), no se menciona la anticipación, incluimos esta fase ya que la consideramos importante para que ocurra la actividad demostrativa porque actúa como catalizador que motiva y direcciona la actividad. Además permite hacer explícita la primera idea intuitiva que se tiene acerca de la situación y orienta la exploración.
Producción de una conjetura	Se explora una situación problemática, identificando regularidades y condiciones bajo las cuales tales regularidades ocurren. Además se dan argumentos para la plausibilidad de la conjetura producida.
Formulación de un enunciado	Se formula un enunciado cuya presentación corresponda a convenciones culturales compartidas.
Exploración del contenido:	Se exploran las relaciones que existen entre la hipótesis y la tesis formuladas y se identifican los argumentos apropiados para la validación teniendo como guía la teoría de referencia.
Selección y encadenamiento de argumentos teóricos:	Se realiza una exposición coherente y secuenciada de los argumentos que dan validez a la tesis.

3.4.4. Herramienta analítica

El dispositivo que se utilizó para el análisis incluye siete actividades: i) análisis de todas las videograbaciones, identificando la riqueza de cada filmación, teniendo como referente el contraste entre los resultados obtenidos y los resultados esperados; ii) transcripción exhaustiva de las tres filmaciones registradas en el desarrollo de la Actividad 6; iii) fragmentación del material, teniendo como referente las fases de resolución de problemas definidas por Boero (1999); iv) análisis de las transcripciones a partir del referente actividad demostrativa; se identificó, en las intervenciones de los estudiantes, aquellas que se corresponden con acciones propias de los procesos de conjeturación y justificación; v) identificación y caracterización de argumentos, vi) análisis de la continuidad entre el proceso de conjeturación y el proceso de justificación, teniendo como referente el constructo teórico unidad cognitiva y, vii) identificación de correlaciones entre los tres referentes analíticos (fases de resolución de problemas, actividad demostrativa, tipos de argumento). En la figura 3.4.4.1 representamos las actividades que conforman el dispositivo analítico.

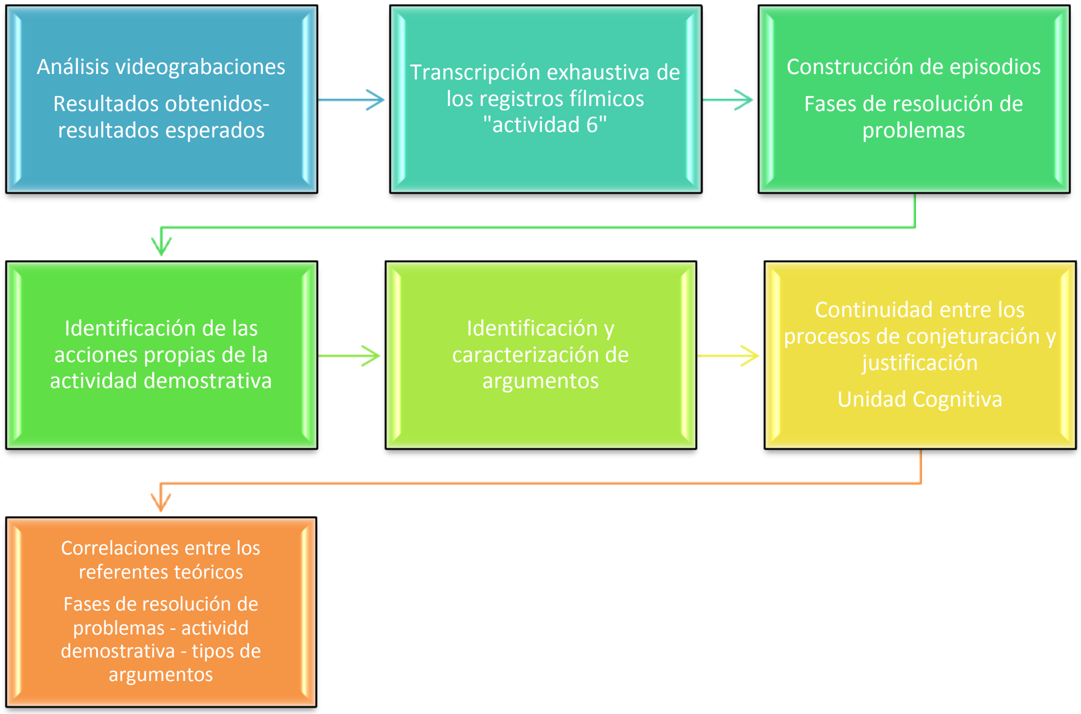


Figura 3.4.4.1

En la tabla 3.4.4.1 se resumen los referentes analíticos que utilizamos durante el proceso de análisis:

REFERENTES ANÁLITICOS			
Fases de Resolución de Problemas	**Actividad Demostrativa**		**Tipos de Argumentos**
	Proceso de conjeturación	**Proceso de Justificación**	
✓ Anticipación ✓ Producción de una conjetura ✓ Exploración del contenido ✓ Selección y encadenamiento de argumentos teóricos	✓ Visualizar para explorar ✓ Explorar ✓ Generalizar ✓ Verificar	✓ Explicar ✓ Probar ✓ Demostrar	✓ Abductivo ✓ Inductivo ✓ Deductivo

Tabla 3.4.4.1 Herramienta analítica

4. ANÁLISIS

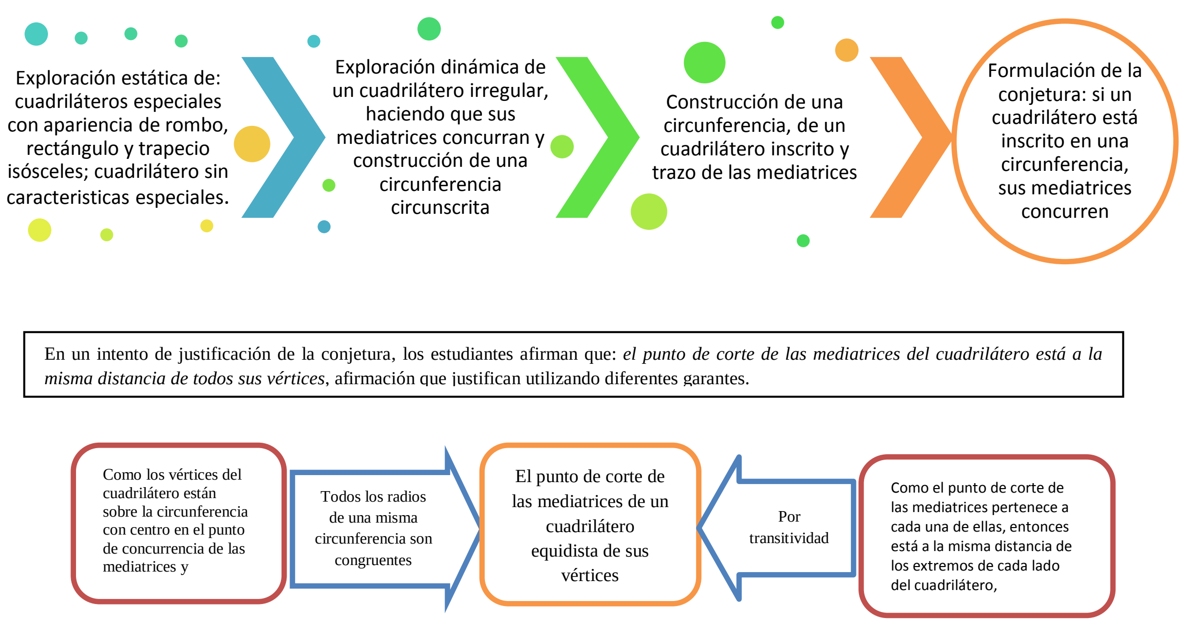
4.1. Recuento de la actividad realizada por cada grupo

En este apartado describimos la trayectoria que siguió cada uno de los tres grupos en el desarrollo de la Actividad 6 (cuadriláteros cíclicos) y se contrasta el actuar de éstos con las acciones previstas en el diseño de la secuencia.

El análisis que se presenta a continuación describe la actividad de los estudiantes una vez terminada la fase de anticipación en la que los grupos han propuesto como posibles soluciones algunos cuadriláteros particulares (cuadrado, rectángulo, rombo, etc.).

4.1.1. Grupo de Mayra, Paula y Sebastián (MaPaSe)

En el esquema 4.1.1.1 representamos la trayectoria que siguió el grupo MaPaSe durante el desarrollo de la actividad 6 “Cuadriláteros Cíclicos”



Esquema 4.1.1.1Trayectoria grupo MaPaSe

La primera aproximación que hacen los estudiantes a la tarea propuesta: encontrar un cuadrilátero en el que las mediatrices de sus lados concurran, corresponde a una exploración de casos. El grupo MaPaSe comienza la exploración construyendo un cuadrilátero con apariencia de rombo, que descarta como posible solución del problema al trazar tres de las cuatro mediatrices de los lados y observar que éstas no concurren. Luego, realizan la construcción de un cuadrilátero sin características especiales, que descartan siguiendo un procedimiento análogo al anterior. Hasta aquí, se evidencia en los estudiantes poca familiarización con la opción de arrastre que ofrece CABRI. En tercer lugar, realizan la construcción de un rectángulo, trazan las mediatrices y al percatarse de que éstas concurren, encuentran una solución al problema propuesto.

El docente intenta promover la exploración de cuadriláteros no especiales. No obstante, los estudiantes insisten en explorar cuadriláteros con características específicas. Comienzan la exploración realizando un dibujo de un cuadrilátero con apariencia de trapecio y sus mediatrices; al percatarse que éstas no concurren, utilizan la opción de arrastre para modificar el cuadrilátero, haciendo que las mediatrices concurran y obteniendo la apariencia de trapecio isósceles. Concluyen que las mediatrices de los lados del trapecio isósceles concurren.

Después de encontrar el rectángulo, el cuadrado y el trapecio isósceles como casos particulares que solucionan el problema propuesto, los estudiantes construyen un cuadrilátero irregular, utilizan la opción de arrastre y obtienen un cuadrilátero irregular en el que sus mediatrices concurran; luego, construyen la circunferencia con centro en el punto de concurrencia de las mediatrices y que pasa por uno de los vértices. Para verificar, conservan la construcción anterior en la pantalla, construyen una circunferencia, inscriben un cuadrilátero en ella y trazan sus mediatrices. A partir de la visualización, formulan la conjetura: *si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, sus mediatrices concurren*. Esta afirmación es recíproca a la conjetura que se suponía que los estudiantes establecerían durante el desarrollo de la actividad; es decir, si las mediatrices de los lados de un cuadrilátero ABCD concurren en un punto E, entonces el cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia con centro en E y radio *AE*, *AB*, *AC* ó *AD*.

Finalmente, los estudiantes utilizan argumentos del sistema teórico local tales como el teorema: todos los radios de una misma circunferencia son congruentes y la definición de mediatriz, encadenándolos mediante un razonamiento deductivo, construyendo, con ayuda del docente, la demostración de la conjetura establecida.

Al final, cuando el docente pide justificar la equidistancia del punto de concurrencia de las mediatrices a los vértices del cuadrilátero, los estudiantes seleccionan y encadenan los argumentos necesarios para demostrar la propiedad recíproca (que corresponde a la esperada en el diseño de la secuencia) a la conjetura: si las mediatrices de un cuadrilátero concurren, entonces el cuadrilátero está inscrito en una circunferencia.

4.1.2. Grupo de Brayan, Doncell y Lina (BraDoLi)

En la figura 4.1.2.1 representamos la trayectoria que siguió el grupo BraDoLi durante el desarrollo de la actividad 6 "Cuadriláteros Cíclicos"

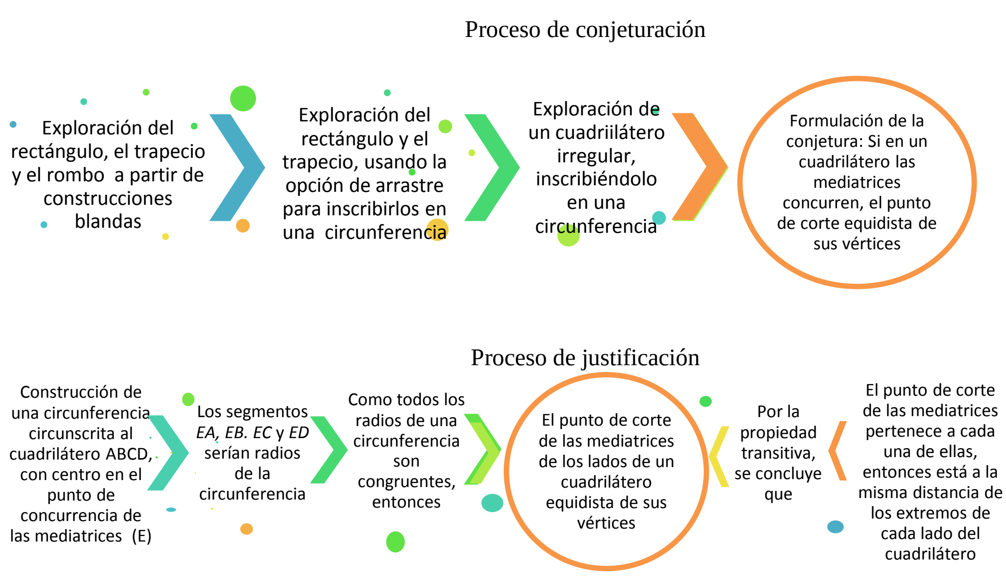


Figura 4.1.2.1 Trayectoria grupo BraDoLi

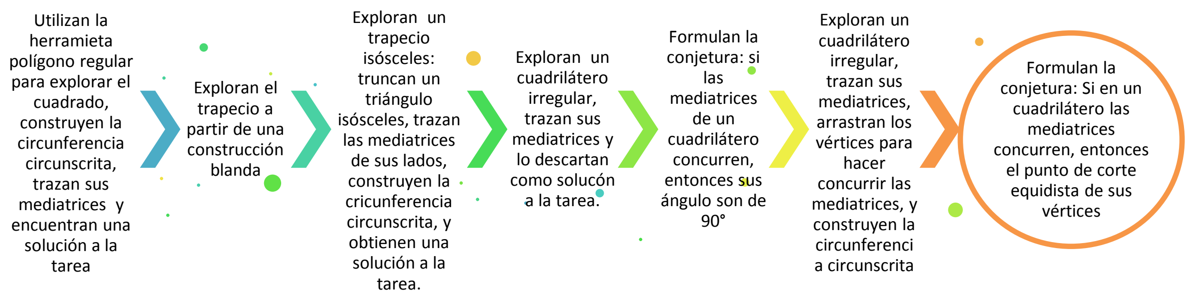
Los estudiantes de este grupo, inducidos por la anticipación, comienzan examinando algunos casos. El primero de ellos es el rectángulo, que intentan construir de manera blanda; trazan sus mediatrices y observan que no concurren. Sin embargo, no descartan el rectángulo como solución a la tarea porque sospechan que se debe a la construcción blanda. El siguiente caso examinado es la construcción blanda de un rombo, del cual concluyen que no cumple la propiedad buscada. En seguida exploran la representación blanda de un trapecio, al observar que las mediatrices de sus lados no concurren, deciden realizar una construcción robusta de la figura, usan como construcción auxiliar una circunferencia, inscriben, sucesivamente, cuadriláteros con apariencia de rectángulo y trapecio, trazan sus mediatrices y concluyen que estos dos cuadriláteros solucionan la tarea propuesta.

Los estudiantes construyen un cuadrilátero irregular, trazan sus mediatrices y utilizan la opción de arrastre para hacer que sus mediatrices concurran, pero lo descartan por no tener características especiales ni en sus lados ni en sus ángulos, continuando la exploración de cuadriláteros que presentan alguna característica particular. El profesor interviene y les hace notar que están desestimando la construcción realizada de un cuadrilátero que no tiene una propiedad especial, que no tiene un nombre particular y que sin embargo cumple la condición pedida. Los estudiantes construyen un cuadrilátero irregular, una circunferencia con centro en el interior del cuadrilátero y que pasa por uno de sus vértices; luego, utilizan la opción de arrastre para inscribir el cuadrilátero en la circunferencia, trazan sus mediatrices y visualizan que éstas se cortan en el centro de la circunferencia. La actividad realizada en esta tarea por parte de los estudiantes los lleva a conjeturar y a justificar que: si en un cuadrilátero las mediatrices de sus lados concurren, entonces el punto de concurrencia está a la misma distancia de cada uno de los vértices del cuadrilátero.

4.1.3. Grupo de Felipe y Sebastián (Fese)

En la figura 4.1.3.1 representamos la trayectoria que siguió el grupo FeSe durante el desarrollo de la actividad 6 “Cuadriláteros Cíclicos”

Proceso de conjeturación



Proceso de justificación

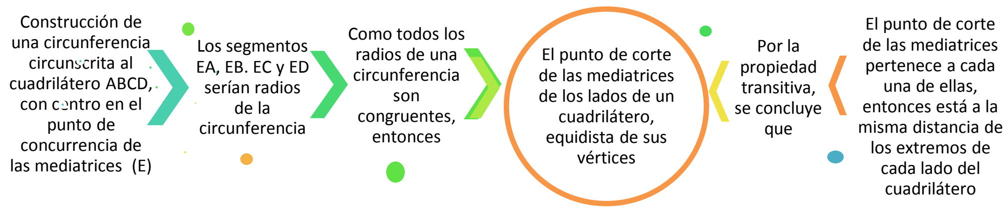


Figura 4.1.3.1 Trayectoria grupo FeSe

Los estudiantes comienzan su proceso de exploración a partir de una construcción robusta del cuadrado, que obtienen al utilizar la herramienta polígono regular, trazan la circunferencia circunscrita al cuadrado y las mediatrices de los lados. Al observar que las mediatrices concurren en un punto, concluyen que el cuadrado resulta ser una solución al problema. Luego, construyen un cuadrilátero con apariencia de trapecio, trazan sus mediatrices y al observar que éstas no concurren, descartan el trapecio como posible solución. Después, realizan la exploración del rectángulo a partir de una construcción robusta en la que parten de un segmento y rectas perpendiculares a los extremos; trazan las mediatrices de sus lados y, al percatarse de que éstas se cortan en un solo punto, construyen la circunferencia con centro en el punto de concurrencia de las mediatrices y que contiene uno de los vértices del rectángulo. Finalmente, al observar que la circunferencia contiene todos los vértices del rectángulo, concluyen que este cuadrilátero, al igual que el cuadrado, soluciona el problema propuesto. A diferencia de lo que sucedió en los grupos BraDoLi y BroPaSe, en este grupo se realizó la exploración de casos a partir de construcciones robustas.

Después del rectángulo, los estudiantes exploran un cuadrilátero no especial. La exploración comienza con la construcción de un cuadrilátero utilizando cuatro veces consecutivas la herramienta segmento y continúan con el trazo de las mediatrices de sus lados. Al percatarse que éstas no concurren, descartan la construcción y anticipan una propiedad que, según ellos, deben presentar los cuadriláteros para que se verifique la concurrencia de las mediatrices de sus lados: si los cuadriláteros tienen ángulos rectos y sus lados opuestos congruentes, entonces las mediatrices de sus lados concurren. Sin embargo, rápidamente reconocen que los únicos cuadriláteros que tienen los ángulos internos de medida 90° son el cuadrado y el rectángulo, que han sido explorados. Luego, deciden realizar la exploración de un trapecio isósceles, concluyendo que este cuadrilátero también soluciona el problema propuesto. Posteriormente, construyen un trapecio con un ángulo recto y descubren que en éste no se cumple la propiedad de concurrencia.

Al observar que los estudiantes insisten en la exploración de cuadriláteros con características especiales, el docente insinúa la exploración de cuadriláteros no especiales mediante la opción de arrastre. A partir de la construcción de un cuadrilátero cuyas mediatrices concurren gracias a que han forzado la propiedad por arrastre, los estudiantes se sumergen en una discusión acerca de las características que tiene el punto de concurrencia de las cuatro mediatrices. Afirman y justifican que el punto de concurrencia equidista de los vértices del cuadrilátero. Esta afirmación es equivalente a la esperada en el diseño de la secuencia: Si las mediatrices de los lados de un cuadrilátero concurren entonces es posible inscribirlo en una circunferencia.

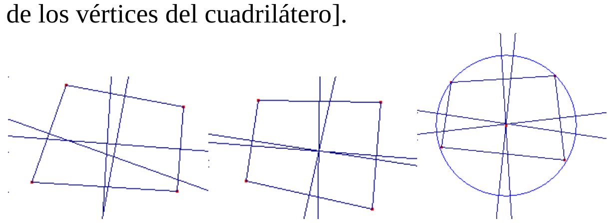
4.2 Ilustración del análisis de los fragmentos

A manera ilustrativa presentamos seis fragmentos con sus respectivos análisis (en el anexo 1, se encuentra el análisis de todos los fragmentos). En cada ejemplo se encuentra el nombre del grupo que interviene, el nombre del episodio, una descripción general, la intervención de los estudiantes y finalmente, el análisis de cada fragmento, identificando la fase de resolución de problemas correspondiente, las acciones de la actividad demostrativa y el tipo de argumentación. En los episodios en los que se identifica argumentación, utilizamos el modelo de Toulmin para esquematizar los argumentos de los estudiantes.

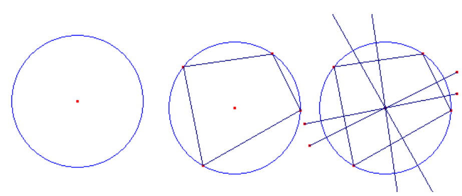
4.2.1. Grupo MaPaSe: Fragmento 7 “Exploración dinámica”

En este fragmento, los estudiantes construyen un cuadrilátero irregular y utilizan la opción de arrastre para hacer que sus mediatrices concurran. A partir de la construcción auxiliar de una circunferencia con centro en el punto de concurrencia de las mediatrices, que pasa por uno de los vértices, se favorece la visualización de algunas regularidades, hecho que les permite afirmar que si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, sus mediatrices concurren. Por último, verifican la conjetura haciendo una construcción robusta que representa la situación.

233	Profesor:	Entonces, tratemos de buscar otro cuadrilátero [diferente al cuadrado, al rectángulo y al trapecio isósceles, ya estudiados].
		[…]
235	Sebastián:	¿Hacemos uno deforme?, [El profesor] quiere ver este deforme. [Construye un cuadrilátero, las mediatrices de sus lados y comienza a utilizar la opción de arrastre para que las mediatrices se corten en un solo punto. Luego, sin dar explicaciones, construye una circunferencia con centro en el punto de corte de las mediatrices y que contienen uno de los vértices del cuadrilátero].



		[Después de unos segundos, construye una circunferencia al lado de la construcción anterior]. Hagamos un cuadrilátero, a ver que sale. [Construye un cuadrilátero inscrito en la circunferencia].
236	Alejandra:	Ahora las mediatrices.



237	Sebastián:	¡Uy!!Uy!
238	Paula:	Sí nos quedó.
239	Alejandra:	Ahora nombrémoslo. [Toma el mouse, nombra los vértices y el punto de corte de las mediatrices].
240	Paula:	¡Profesor!
		[…]
243	Profesor:	Listo. No es cuadrado, no es un rectángulo, no es un trapecio, no es un rombo. Y sin embargo, ¿qué pasó con las mediatrices?

244	Paula, Sebastián y Alejandra:	Se cortaron en un mismo punto.
		[…]
255	Profesor:	¿Probaron otro cuadrilátero diferente a ese?
256	Sebastián:	Pero, ¿se puede en la circunferencia?
257	Profesor:	Sí.
258	Sebastián:	En todos sirve. [Construye una circunferencia, un cuadrilátero inscrito en ella y sus mediatrices].
		[…]
266	Profesor:	¿Todos me sirven?
267	Sebastián:	Si ¿Lo muevo? [Arrastra uno de los vértices del cuadrilátero].
268	Profesor:	Entonces encontramos un método que genera todos de una vez.

Este fragmento se ubica en las fases de exploración y producción de una conjetura que corresponden con acciones del proceso de conjeturación de la actividad demostrativa. En busca de un cuadrilátero diferente a los ya estudiados, para responder al requerimiento del profesor, Sebastián decide probar con un cuadrilátero irregular [235]. Traza las mediatrices y, por su propia iniciativa, realiza una exploración dinámica, arrastrando los vértices hasta lograr que las mediatrices concurran. Sin explicar por qué, traza la circunferencia circunscrita. Suponemos que está buscando un método de construcción de tal tipo de cuadriláteros. Al darse cuenta que los vértices del cuadrilátero quedan sobre la circunferencia, Sebastián identifica la condición que se debe cumplir para que las mediatrices de los cuadriláteros concurran en un mismo punto, es decir, que el cuadrilátero esté inscrito en una circunferencia. Por eso decide comenzar una nueva construcción haciendo una circunferencia, construyendo un cuadrilátero inscrito y trazando las mediatrices. De esa forma verifica que su idea es correcta, hecho que lo emociona o sorprende [237] y motiva que llamen al profesor para mostrarle el resultado. Cuando éste les pregunta si hicieron la verificación con otros cuadriláteros Sebastián afirma: "Pero se puede en la circunferencia" [256], afirmación que entrevemos como una conjetura. Sin decirle explícitamente, Sebastián se refiere a la siguiente regularidad: si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, entonces sus mediatrices concurren. Es más, reafirma su idea al afirmar "en todos sirve" [258] insinuando que cualquier cuadrilátero inscrito cumple la propiedad y, cuando el profesor le plantea la duda, el estudiante pregunta si quiere que mueva alguno de los vértices para verificarlo [267], reflejando con ello que está completamente convencido de que es así.

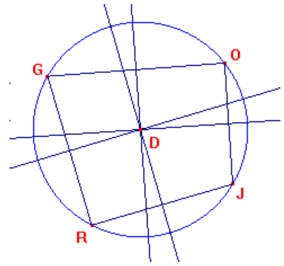
En síntesis, en el fragmento se evidencian acciones propias del proceso de conjeturación de la actividad demostrativa: exploración dinámica, visualización para explorar y formulación de una conjetura. Los estudiantes hacen una construcción blanda y utilizan la herramienta arrastre para explorar la situación y encontrar un cuadrilátero que solucione la tarea propuesta; después, a partir de una construcción robusta identifican la regularidad que permite generalizar los resultados obtenidos y proponer, de manera implícita, la conjetura: si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, entonces sus mediatrices concurren. Además, utilizan la opción de arrastre para verificar la conjetura.

No se identifica argumentación. El proceso de justificación que desarrollan los estudiantes con relación a la conjetura formulada. Se analiza en el siguiente episodio.

4.2.2. Grupo MaPaSe: Fragmento 8 "Proceso de justificación"

A partir de una exploración dinámica y la visualización, el grupo estableció que si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, entonces sus mediatrices concurren. En este episodio, los estudiantes utilizan argumentos del sistema teórico local que se pueden encadenar mediante un razonamiento deductivo, construyendo entre todos, y con ayuda del profesor, la demostración de la conjetura establecida. Además, cuando el docente introduce un cuestionamiento sobre un argumento que permita justificar la equidistancia del punto de concurrencia de las mediatrices con los vértices del cuadrilátero, los estudiantes seleccionan y encadenan los argumentos necesarios para demostrar la propiedad recíproca a la conjetura formulada, es decir: si las mediatrices de un cuadrilátero concurren, entonces el cuadrilátero está inscrito en una circunferencia.

268 Profesor: ¿Cómo justifico el hecho de que todas las mediatrices de los lados de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia se cortan en el centro de ésta? [En la pantalla de Cabri se tiene la siguiente representación]



269 Paula: Pues es que son como radios.

270 Profesor: ¿Cuáles son radios?

284 Paula: Éstos son los radios [Señala los vértices del cuadrilátero y el centro de la circunferencia]. Entonces [el punto D] está a la misma distancia de todos.

285 Profesor: ¡Ah bien! Pero… ¿puedo utilizar otro argumento para garantizar que D está a la misma distancia de R, de G, de O y de J?

286 Paula: Por transitividad, porque si la mediatriz pasa por el punto D [señala la mediatriz del segmento RG], entonces se supone que está a la misma distancia del punto R que del punto G, y así con el punto G y con el punto O.

300 Paula: Y ésta [Señala con el dedo la mediatriz del segmento JO]

302 Sebastián: Muestra que D está a la misma distancia de J que de O, y de todos porque ...

305 Alejandra: Por la transitividad…

311 Sebastián: R con G, G con O, O con J, J con R.

323 Paula: Entonces D está a la misma distancia de todos ellos [se refiere a los puntos R, G, O y J]

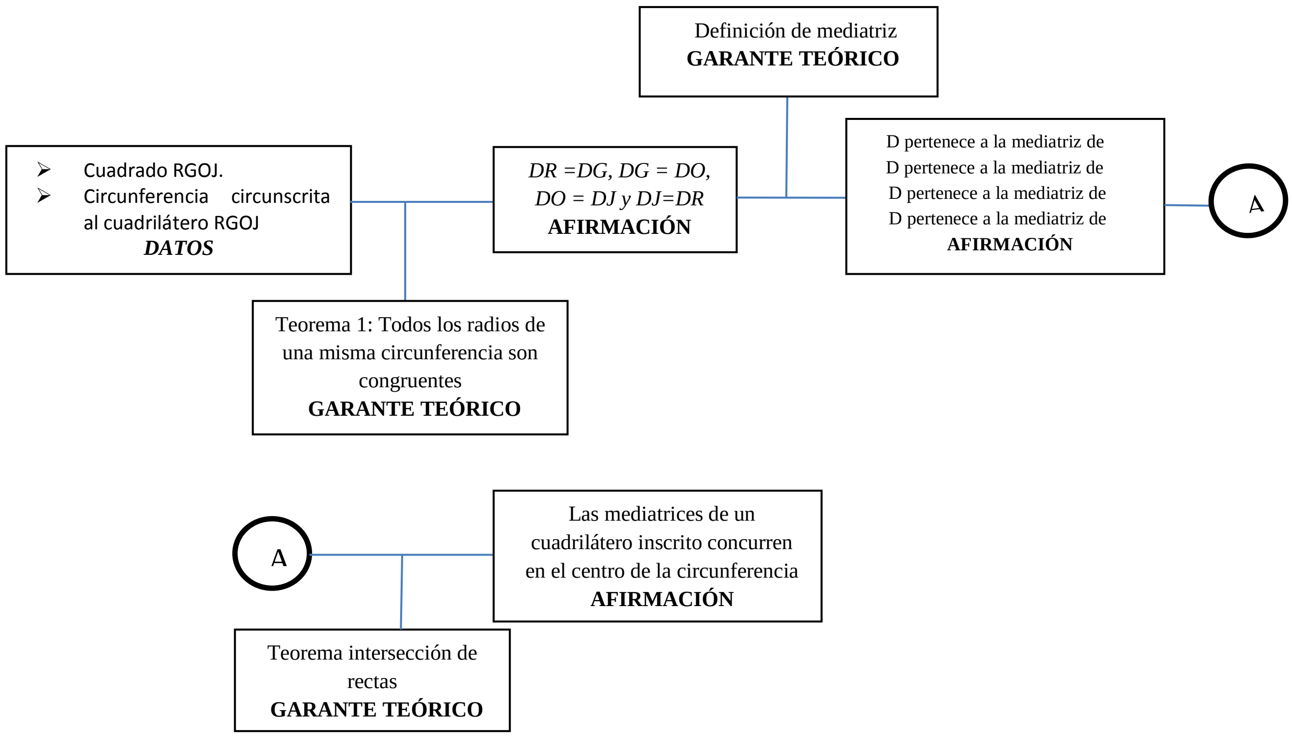
324 Profesor: Listo, vale.

Las fases de la resolución de problema que se identifican en el fragmento son: la exploración del contenido y la selección y encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva, aunque los estudiantes no los encadenan. Cuando se pide a los estudiantes una justificación de la conjetura formulada, comienzan a identificar propiedades de su sistema teórico local que les sirvan en la validación. Paula hace referencia a los radios de la circunferencia [269], expresión que nos lleva a pensar que va a valerse del teorema trabajado en la secuencia de enseñanza: Todos los radios de una circunferencia son congruentes. Efectivamente, menciona que al ser RD, GD, OD y JD radios de la circunferencia, los puntos R, G, O y J equidistan del punto D, en donde concurren las mediatrices [284]. Desafortunadamente, Paula no sigue elaborando su argumentación pues no menciona que como D equidista de R y G está en la mediatriz del lado RG, como D equidista de G y de O, está en la mediatriz del lado GO, como D equidista de O y de J, está en la mediatriz de OJ y como D equidista de J y R está en mediatriz de JR con lo cual podría concluir que D está en todas las mediatrices, por esto ellas concurren. Para impulsar a la estudiante a seguir con la argumentación el profesor hace una pregunta que lleva a los estudiantes a pensar en la situación recíproca, es decir, si lo que se tiene como dado es que D es el punto donde concurren las mediatrices, hay que probar que equidista de R, D, J y O [285]. Nuevamente Paula se aventura a comenzar a dar una explicación, secundada por Sebastián y Alejandra, refiriéndose al uso de la propiedad transitiva [286]. Ella alude a la definición de mediatriz, mencionando que los puntos de la mediatriz de un lado equidistan de los extremos y que eso mismo pasa con los puntos de las otras mediatrices [286]. En [302], [305] y [312] los estudiantes aluden a la equidistancia del punto D, a los extremos de cada segmento y a la propiedad transitiva para concluir que D equidista de los cuatro extremos y por tanto el cuadrilátero está inscrito en una circunferencia.

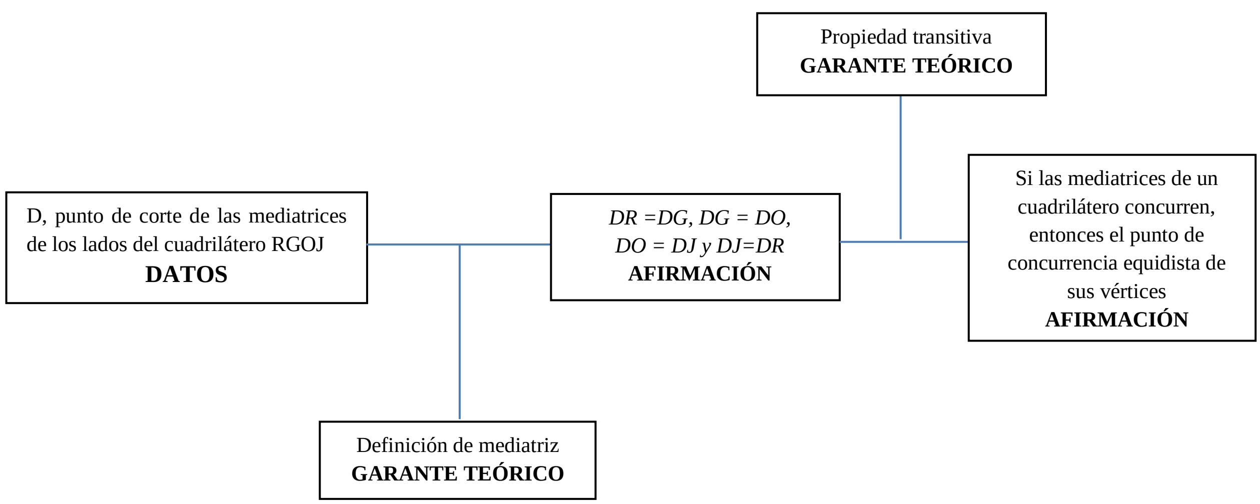
Se evidencian acciones propias del proceso de justificación. Los estudiantes seleccionan los elementos adecuados para organizar una cadena deductiva que conlleve a la justificación de la conjetura formulada. Aunque no se organizan los argumentos en una cadena deductiva que obedezca a los estándares actuales de la comunidad matemática, algunos de los garantes que se utilizan pertenecen al sistema teórico local; por tal razón, el producto que se obtiene del proceso de justificación, se puede interpretar como una demostración. Cuando el docente pide justificar la afirmación "*el punto D equidista de los vértices del cuadrilátero*" [285], implícitamente solicita la justificación de la propiedad recíproca a la conjetura formulada, es decir: si las mediatrices de los lados de un cuadrilátero concurren, entonces el cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, en este caso, los estudiantes utilizan la propiedad transitiva y la definición de mediatriz como garante para justificar la afirmación.

La cadena deductiva desarrollada por los estudiantes, no explicita la secuencia que se debe utilizar para realizar una prueba formal de la conjetura formulada. Se completaría la prueba sí se alude a la definición de mediatriz. A continuación presentamos los esquemas de Toulmin que representan los argumentos desarrollados.

Argumento 1: Si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, entonces las mediatrices de sus lados concurren en el centro de la circunferencia.



Argumento 2: Si las mediatrices de los lados de un cuadrilátero concurren, entonces el cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia con centro en el punto de concurrencia.

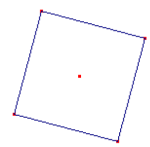


4.2.3. Grupo FeSe: Fragmento 2 "Exploración del cuadrado"

Después de descartar al trapecio como posible solución al problema, los estudiantes comienzan la exploración del cuadrado. Para obtener una construcción robusta de este cuadrilátero, utilizan la herramienta polígono regular. Construyen una circunferencia que contiene los vértices del cuadrilátero y las mediatrices de los lados del cuadrado. Por último, al observar que las mediatrices concurren en un punto (el centro de la circunferencia y del polígono regular), concluyen que el cuadrado resulta ser una solución al problema.

10 Felipe — Dibujemos un cuadrado.

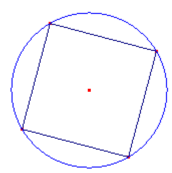
11 Sebastián — Con polígono regular [Traza un cuadrilátero usando la herramienta polígono regular].



12 Felipe — Saque las mediatrices. No, no, espere, no saquemos las mediatrices, hagamos algo más interesante.

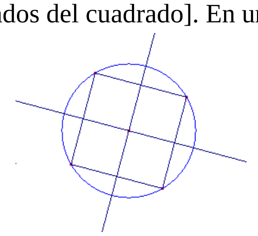
13 Sebastián — ¿Cómo qué?

14 Felipe — [Toma el mouse y traza una circunferencia con centro en el centro del polígono, y que pasa visualmente por los vértices del cuadrado]



15 Sebastián — ¡Ah!, para ver si…

16 Felipe — ¡Ah!, No. Espere. se me corrió un poquito… vuelva a hacer el círculo. Tocaba alargarlo más. [Repite la construcción de la circunferencia con centro en el centro del polígono pero esta vez hace que los vértices del cuadrado si pertenezcan a ella. Después traza las mediatrices de los lados del cuadrado]. En un cuadrado perfecto.

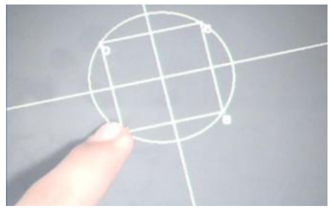


[…]

18 Profesor — Espere. O sea que… ¿Ustedes suponen que ahí las mediatrices se cortan en un solo punto?

19 Felipe — Sí. Como nosotros usamos polígono regular para hacer el cuadrado, ahí nos daba el punto centro del cuadrado. Del punto centro nosotros sacábamos una circunferencia, la cual trazábamos hasta un punto que podría… [Señala uno de los vértices del cuadrado]

		llámelo A, éste B, éste C y éste D. [Señalando los otros vértices del cuadrado] Para poder explicarlo mejor.
20	Sebastián	Sí, queda mejor.
21	Felipe	Lo trabajamos hasta el punto A. [Se refiere a que la circunferencia se construyó con centro en el centro del cuadrado y radio la medida del centro a *A*]. De este punto A, abarca también el punto B, el C y el D. Entonces ahí ya comprobamos eso.



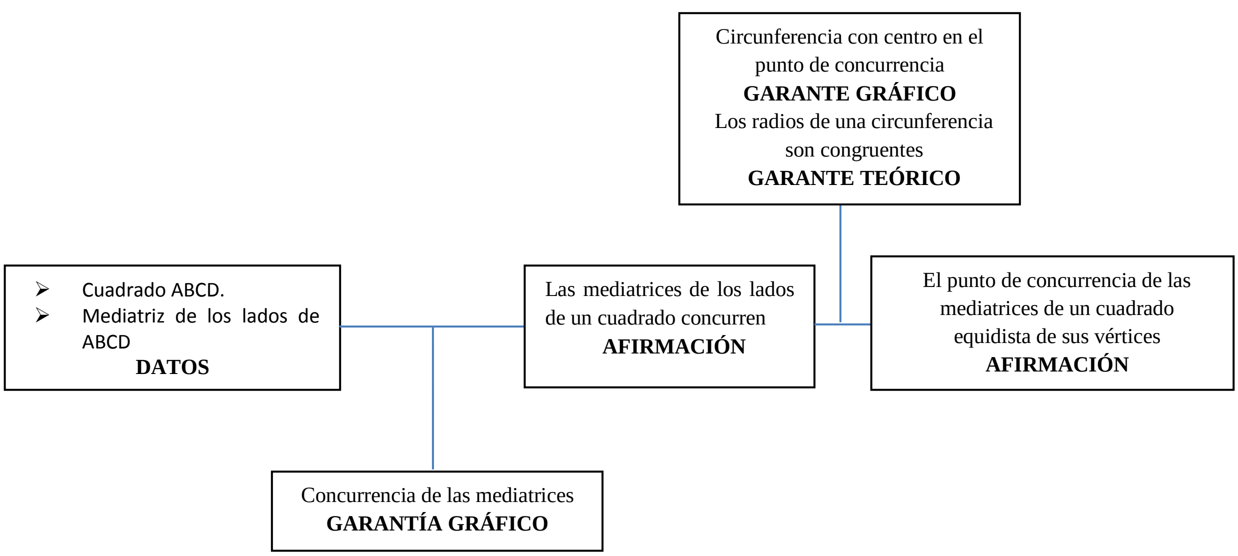
22	Sebastián	Sí. Eso queda comprobado, son como radios de la misma circunferencia.
23	Felipe	Sí, porque la misma circunferencia tiene los radios congruentes.
24	Sebastián	Y se cortan en un solo punto.
25	Felipe	Llamemos a este punto F. [Señala el centro de la circunferencia]

Este fragmento corresponde a las fases de resolución de problemas anticipación y producción de una conjetura: los estudiantes suponen como solución al problema el cuadrado, realizan una construcción robusta de este cuadrilátero, trazan las mediatrices de sus lados [11 y 16] y, usan la visualización para verificar que si cumple la condición.

La actividad de los estudiantes se puede enmarcar dentro del proceso de conjeturación: a partir de la construcción robusta de un cuadrado, logran establecer de manera implícita la conjetura: las mediatrices de los lados de un cuadrado concurren [16]. En este fragmento los estudiantes han encontrado un caso en el que se cumple la propiedad del problema propuesto. Adicionalmente, los estudiantes enriquecen la figura, espontáneamente, trazando la circunferencia circunscrita. Felipe no explica para qué hace tal circunferencia, sólo comenta que puede ser algo interesante [16]. La idea de construir la circunferencia circunscrita pudo resultar del hecho de que en Cabri, al construir el cuadrado usando la herramienta polígono regular, queda señalado el centro del cuadrado e inicialmente surge una circunferencia punteada. Una vez trazadas las mediatrices, los estudiantes se dan cuenta que éstas concurren.

Cuando el docente interviene y cuestiona a los estudiantes sobre la concurrencia de las mediatrices de los lados del cuadrado [18], Felipe y Sebastián [19-22] intentan una justificación refiriéndose a la construcción auxiliar de la circunferencia circunscrita y al hecho de que los segmentos FA, FB, FC y FD son radios de una circunferencia [22] y son congruentes [23]. Aunque no lo mencionan explícitamente, Felipe y Sebastián muestran que el punto de concurrencia de las mediatrices equidista de los cuatro vértices del cuadrado, pues coincide con el centro de la circunferencia circunscrita.

En las intervenciones [19] a [25] de Felipe y Sebastián podemos reconocer un argumento para justificar que el punto de concurrencia de las mediatrices equidista de los vértices del polígono. Felipe menciona que las mediatrices sí se cortan en un sólo punto [19, 24], que es el centro de una circunferencia con centro en F, centro del cuadrado, y radio FA. Los puntos B, C y D quedan sobre la misma circunferencia [21], por lo que FA, FB, FC y FD son radios de la misma circunferencia [22] y como los radios de una circunferencia son congruentes [23], se tiene la equidistancia.

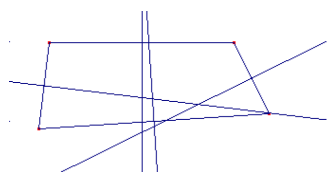


4.2.4. Grupo FeSe: Fragmento 4 “Exploración estática de un cuadrilátero no especial”

Después de reconocer que en el cuadrado y el rectángulo las mediatrices de sus lados concurren, los estudiantes comienzan la exploración de un cuadrilátero no especial, dibujan un cuadrilátero utilizando la herramienta segmento y continúan con el trazo de las mediatrices de sus lados. Al percatarse que éstas no concurren, descartan la figura y anticipan una propiedad que aparentemente deben presentar los cuadriláteros para garantizar la concurrencia de las mediatrices de sus lados.

56	Profesor	Busquemos otro cuadrilátero, diferente a los que ya hemos hecho, en el que las mediatrices de sus lados se corten en un solo punto.
57	Sebastián	¿Cuál otro podríamos hacer? [Traza un cuadrilátero cualquiera en la pantalla]

59	Felipe	[Refiriéndose a la figura ralizada por Sebastián] No pero es que eso… debe ser una figura en la que nosotros tenemos que saber qué es lo que estamos haciendo.
60	Sebastián	[Traza las mediatrices del cuadrilátero antes citado, aunque una de ellas está mal construida



61	Felipe	Espere, sí se encuentran [se refiere a las mediatrices de la figura].
		[…]
63	Sebastián	Pero no se encuentran todas en un solo punto. No nos sirve la figura.
		[…]
68	Felipe	Necesitamos encontrar un [cuadrilátero] que los ángulos sean de 90 grados.

Este fragmento se puede ubicar en la fase de resolución de problemas producción de una conjetura pues, después de haber verificado que en el cuadrado y el rectángulo las mediatrices de sus lados concurren, los estudiantes continúan la exploración con un cuadrilátero no especial que construyen con ayuda de la herramienta segmento [56]. Cuando trazan las mediatrices del cuadrilátero [60] y se percatan que están no concurren [63], descartan la figura y, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en las anteriores exploraciones de casos, formulan implícitamente la conjetura: si un cuadrilátero tiene los ángulos internos de 90° entonces las mediatrices de sus lados concurren [68].

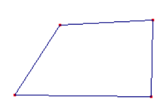
En cuanto a las acciones de la actividad demostrativa que corresponden al proceso de conjeturación, se evidencia, durante el desarrollo del fragmento, la visualización, que juega un papel primordial, pues los estudiantes se basan en ella para descartar el cuadrilátero construido como posible solución al problema propuesto [61, 63]. El proceso de exploración se puede caracterizar como una exploración estática. Felipe y Sebastián no utilizan la opción de arrastre como herramienta que les permite realizar una exploración dinámica para encontrar las invariantes que presentan los cuadriláteros. Sin embargo, la exploración estática de casos particulares los incita a presuponer algunas condiciones bajo las cuales los cuadriláteros resultan ser solución a la tarea propuesta. Esta situación se refleja en una primera generalización que proponen los estudiantes con relación a los ángulos internos del cuadrilátero [68].

En el episodio se evidencia una argumentación inductiva por parte de los estudiantes pues, a partir de los resultados obtenidos en la exploración del cuadrado y el rectángulo, determinan una regla general plausible: para que las mediatrices de un cuadrilátero concurran, los ángulos internos del cuadrilátero deben ser rectos [68]

4.2.5. Grupo FeSe: Fragmento 8 “En un cuadrilátero cíclico las mediatrices concurren”

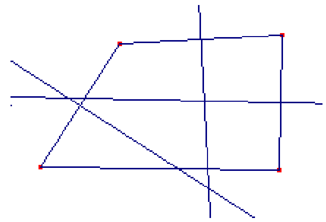
Los estudiantes, por sugerencia del profesor, usan la opción de arrastre. Construyen un cuadrilátero con la opción segmento, construyen sus mediatrices y luego mueven sus vértices intentando que las mediatrices concurran.

136	Sebastián:	Ensayemos con éste. [Traza un cuadrilátero con la herramienta segmento, sin darle condiciones específicas]
137	Felipe:	Haga uno a la loca.



[…]

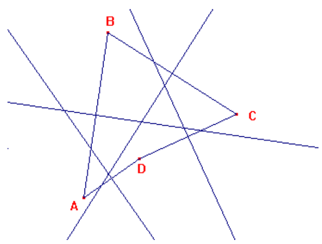
140 Sebastián: Miremos sus mediatrices a ver. [Traza dos de ellas] Hasta el momento cumplen la condición. [Traza las otras dos] No cumplieron la condición. [Borra la figura].



141 Profesor: Recuerda que tienes el arrastre.

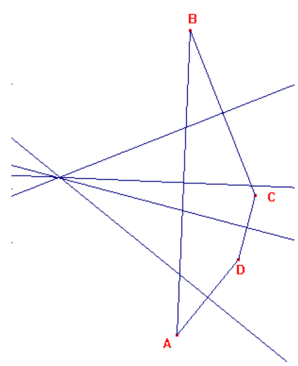
Sebastián: [El estudiante traza un cuadrilátero cualquiera, nombra los vértices, A, B, C y D y traza sus mediatrices]. No cumple la condición.

142 Felipe: Arrastre esa vaina. Arrástrelo del punto A. Ahora arrastre este [el punto D].



143 Sebastián: [Arrastra el punto C].

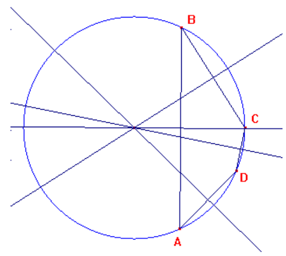
144 Felipe: Ahí no. Otro poquito… ahí. [Sebastián trata de hacer que concurran las cuatro mediatrices].



145 Sebastián: ¡Se encuentran las cuatro [mediatrices]. ¡Ahora sí!

146 Felipe: Si trazamos la circunferencia… [Traza una circunferencia con centro en el punto de concurrencia y que parece que pasa por los vértices del cuadrilátero].

147 Sebastián: ¡Sí! ¡No, espere! Acá le falta. La circunferencia no pasa exactamente por uno de los vértices, utiliza la opción de arrastre para ajustar la construcción]. Ahora sí pasa por todos los vértices.



Este fragmento se ubica en la fase de producción de una conjetura. Sebastián decide explorar un cuadrilátero sin características especiales, construyen un cuadrilátero, trazan sus mediatrices y al constatar que no concurren optan, por sugerencia del profesor, por deformarlo mediante la opción de arrastre hasta hacer que las mediatrices concurran. Una vez que lo logran, deciden inscribir el cuadrilátero en una circunferencia, quizás como mecanismo de verificación, lo que los lleva a refinar el ajuste hasta que todos los vértices quedan sobre una circunferencia con centro en el punto de concurrencia. Los estudiantes parecen asociar la concurrencia de las mediatrices con aquellos cuadriláteros que se pueden inscribir en una circunferencia.

En relación con la actividad demostrativa, en el fragmento se encuentran elementos del proceso de conjeturación. Se trata de una exploración dinámica en busca de forzar una propiedad. Por medio de la visualización, descartan que el cuadrilátero construido inicialmente sea solución al problema, al percibir que sus mediatrices no concurren [140]. La figura es aprovechada para realizar, por primera vez, una exploración dinámica de la situación y, mediante la opción de arrastre, obtienen un cuadrilátero que es solución al problema [143 – 145]. Cuando creen tener una solución, hacen una verificación mediante la construcción auxiliar de una circunferencia circunscrita [146]. Al observar que no todos los vértices del cuadrilátero yacen exactamente sobre la circunferencia, Sebastián sugiere arrastrar nuevamente los vértices para perfeccionar el cuadrilátero. [146] En este episodio, los estudiantes se aproximan a una solución satisfactoria del problema. No obstante, sus construcciones no son robustas y al realizar una exploración dinámica sobre las figuras sobre las cuales están trabajando, la propiedad buscada, que en ese momento está ante sus ojos, vuelve a desaparecer.

En este fragmento no se presenta argumentación.

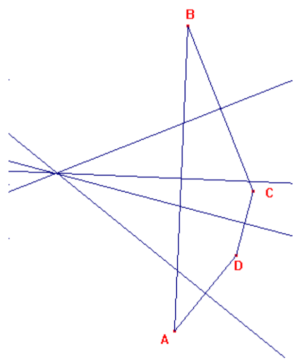
4.2.6. Grupo FeSe: Fragmento 9 “El punto de concurrencia de las mediatrices equidista de los vértices del cuadrilátero”.

A partir de la construcción de un cuadrilátero cuyas mediatrices concurren, gracias a que han forzado la propiedad por arrastre, los estudiantes se sumergen en una discusión acerca de las características que tiene el punto de concurrencia de las cuatro mediatrices. Afirman y justifican que el punto de concurrencia equidista de los vértices del cuadrilátero.

148 Profesor: ¿Encontramos otro cuadrilátero diferente del trapecio?

149 Sebastián: ¡Sí!

150 Profesor: ¿Éste, cierto? ¿Qué característica tiene este punto [señala el punto de corte de las mediatrices]?



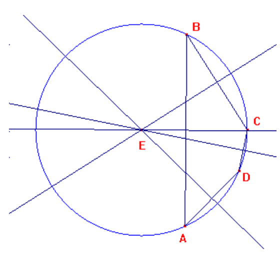
151 Felipe: Que las mediatrices se encuentran ahí.

152 Profesor: ¡Listo! Llamémoslo E. ¿Qué característica tiene el punto E?

153 Felipe: Además de que se encuentran todas las mediatrices, si nosotros trazamos una circunferencia desde el punto E hasta cualquier punto… [Vértice del cuadrilátero].

154 Sebastián: Este punto [el punto E] está a la misma distancia de todos los vértices [del cuadrilátero].

155 Profesor: ¡Ah! …¿Sí?



156 Felipe: ¡Sí! Porque todos los radios de la misma circunferencia son congruentes.

157 Sebastián: ¡Sí! Porque si trazáramos segmentos desde el centro a cada uno de los vértices, todos quedarían siendo radios.

158 Profesor: ¡Bien! Perfecto. O sea que ustedes me pueden garantizar eso. Y si no fuera por la circunferencia ¿de que otro modo me lo podrían garantizar?

159	Felipe:	Con el método de las mediatrices.
160	Sebastián:	Con el método de las mediatrices, pero tocaría pensar como […]. ¡Ya la tengo! ¡Profe! [Quién se ha retirado para otro grupo] ¡Ya la sé! Como ese [el punto E, de concurrencia] es un punto que está en todas las mediatrices. Y un punto que está sobre una mediatriz está a la misma distancia de dos puntos del segmento [los extremos] donde se creó la mediatriz.
		[…]
163	Felipe:	Como el punto está en las cuatro mediatrices, podemos justificar que está a la misma distancia de cada uno [de los vértices]

La fase de resolución de problemas que se identifica en este fragmento corresponde a la de exploración de contenido. Cuando el profesor plantea la pregunta: ¿Qué característica tiene el punto de corte de las mediatrices? [150], Felipe y Sebastián afirman que: *el punto de concurrencia [E] equidista de los vértices del cuadrilátero* [150, 151], luego comienzan a identificar argumentos apropiados que les permitan validar la afirmación. Felipe, apoyado en el garante gráfico que proporciona la circunferencia circunscrita al cuadrilátero, hace explicito el uso del Teorema 1 del sistema teórico local "*Todos los radios de la misma circunferencia son congruentes*" [156], argumentación a la que contribuye Sebastián, mencionando la pertinencia de utilizar el teorema ya que los segmentos que van desde el punto E hasta cada uno de los vértices del cuadrilátero, representan radios de la circunferencia [157]. Después de aceptar la construcción auxiliar de la circunferencia circunscrita como garante gráfico para validar la equidistancia del punto E con respecto a los vértices del cuadrilátero, el docente pregunta acerca de otra forma de justificar este hecho [158]. Felipe y Sebastián comienzan la explicación refiriéndose a la definición de mediatriz, como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento [160]. Felipe resalta la pertinencia de utilizar la definición de mediatriz como garante, teniendo en cuenta que el punto E pertenece a las cuatro mediatrices [161]. Por razones de tiempo no se logró completar la justificación. Consideramos que los estudiantes tenían la intención de utilizar la propiedad transitiva para relacionar la definición de mediatriz y el hecho de concurrencia, con la equidistancia del punto E a los vértices del cuadrilátero.

Con respecto a los procesos de la actividad demostrativa, las intervenciones de los estudiantes en este fragmento se pueden enmarcar dentro del proceso de justificación. Una vez establecida la propiedad de equidistancia del punto E a los vértices del cuadrilátero, Felipe y Sebastián seleccionan los elementos adecuados que les permiten realizar la justificación de la conjetura formulada. Algunos de los garantes que utilizan los estudiantes para justificar la afirmación pertenecen al sistema teórico local. En el primer argumento deductivo, se hace explicita la pertinencia del Teorema 1 como garante para justificar la conjetura. En el segundo argumento deductivo, se menciona la definición de mediatriz como garante para justificar la equidistancia, aunque no se hace explicita la pertinencia. Por la trayectoria de estudio de Felipe y Sebastián durante el experimento de enseñanza, se puede inferir la intencionalidad de utilizar la propiedad transitiva que completaría el argumento deductivo. Por tal razón, el producto que se obtiene del proceso de justificación se puede interpretar como una demostración.

En este fragmento se pueden identificar dos argumentos deductivos que utilizan diferentes garantes para justificar la misma conjetura: *Si las mediatrices de un cuadrilátero concurren, entonces el punto de concurrencia equidista de sus extremos*. En el primer argumento, los estudiantes aluden a que el punto de concurrencia E es el centro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero ABCD. Por tal razón, los segmentos EA, EB, EC y ED son radios de una misma circunferencia y, por el Teorema 1: "todos los radios de una misma circunferencia son congruentes", se puede deducir que el punto E equidista de los extremos de la circunferencia. En el segundo argumento, los estudiantes utilizan el hecho de que el punto de concurrencia E pertenece a todas las mediatrices y aluden a la definición de mediatriz de un segmento como lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos, argumento que no se logra terminar. La argumentación queda completa si se hace explícito el uso de la definición de mediatriz: como E pertenece a la mediatriz de AB, entonces EA = EB, como E pertenece a la mediatriz de BC, entonces EB = EC, como E pertenece a la mediatriz de CD, entonces EC = ED y, como E pertenece a la mediatriz de DA, entonces ED = EA; finalmente, por la propiedad transitiva se tiene que EA = EB = EC = ED y, por definición de equidistancia, se concluye que E equidista de A, B, C y D. A continuación presentamos el Esquema de Toulmin representando los argumentos citados.

Argumento 1:

Teorema 1: Todos los radios de una misma circunferencia son congruentes
GARANTE TEÓRICO

- Cuadrilátero ABCD.
- Mediatriz de los lados de ABCD

DATOS

Los segmentos *EA, EB, EC y ED* son radios de la circunferencia
AFIRMACIÓN

El punto de concurrencia de las mediatrices de los lados de un cuadrilátero equidista de sus vértices
AFIRMACIÓN

Circunferencia circunscrita al cuadrilátero ABCD
GARANTÍA GRÁFICO

Argumento 2:

Propiedad transitiva
GARANTE TEÓRICO

E (Punto de corte de las mediatrices), pertenece a las cuatro mediatrices
DATOS

EA = EB, EB = EC,
EC = ED, ED = EA
AFIRMACIÓN

Si las mediatrices de un cuadrilátero concurren, entonces el punto e concurrencia equidista de sus vértices
AFIRMACIÓN

Definición de mediatriz
GARANTÍA TEÓRICO

5. RESULTADOS

En este capítulo mostramos los principales hallazgos de nuestra investigación. En primer lugar rastreamos la ocurrencia de las categorías de análisis en cada uno de los fragmentos. Luego, realizamos un análisis cuantitativo y cualitativo de las categorías de análisis y las correlacionamos. Por último, buscamos la unidad cognitiva en las intervenciones de los estudiantes.

5.1. Categorías de análisis en los fragmentos

La Tabla 5.1 resume el análisis de los 22 fragmentos correspondientes a las intervenciones de los grupos MaPaSe, FeSe y BraDoLi en el desarrollo de la Actividad 6 de la secuencia de enseñanza. Diseñamos esta tabla teniendo en cuenta las categorías de análisis definidas en la sesión 3.4.4 correspondientes a las fases de resolución de problemas, las acciones de la actividad demostrativa y los tipos de argumentos.

FRAGMENTOS GRUPO MaPaSe				
	FRAGMENTO	**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**	**ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA**	**ARGUMENTACIÓN**
1	**Posibles cuadriláteros**	**Anticipación:** De manera espontánea se anticipan los posibles cuadriláteros que dan solución a la situación propuesta.	No se presenta	No se presenta
2	**Exploración del rombo y de un cuadrilátero no especial**	**Producción de una conjetura:** Se exploran dos posibles soluciones al problema	**Proceso de conjeturación: visualización para explorar y exploración**. Se descarta el rombo y un cuadrilátero no especial como posibles soluciones a la tarea.	No se presenta
3	**Estudio del rectángulo como una solución a la**	**Producción de una conjetura:** Se explora la opción del rectángulo como solución al	**Proceso de conjeturación**: **visualización para explorar, exploración y generalización**.	**Abductiva**: Intento de argumentación del hecho: las mediatrices de los lados opuestos de un rectángulo

	situación	problema	El rectángulo es una solución al problema.	coinciden.
4	**¿Cuántas mediatrices tiene un rectángulo?**	**Exploración del contenido:** Se buscan los argumentos apropiados para la validación de la conjetura: "Un rectángulo tiene dos mediatrices"	**Proceso de justificación** **Explicación de validación y prueba:** Se utiliza la figura para explicar su afirmación y posteriormente realizan una justificación parcial a partir de garantes gráficos y teóricos.	**Abductiva y Deductiva**. Se buscan los argumentos que permitan justificar posteriormente la afirmación "un rectángulo tiene dos mediatrices".
5	**En el trapecio isósceles las mediatrices también concurren**	**Producción de una conjetura**: A partir de la exploración del trapecio isósceles se produce la conjetura: "En un trapecio isósceles las mediatrices concurren.	**Proceso de conjeturación: Visualización para explorar, exploración y generalización**: Se realiza la exploración de una figura geométrica particular y se generaliza: *el trapecio isósceles es una solución al problema*. **Proceso de Justificación**: **Explicación de validación.**	**Abductiva**: La argumentación se centra en justificar el hecho de que las mediatrices de las bases de un trapecio isósceles coinciden.
6	**Contraejemplo a la conjetura: "los cuadriláteros cíclicos deben tener lados opuestos congruentes"**	**Producción de una conjetura**: y **exploración del contenido:** Se usa el trapecio como ejemplo de un cuadrilátero que tiene lados opuestos de distinto tamaño y mediatrices concurrentes.	**Proceso de conjeturación**: **generalización** de los resultados obtenidos durante la exploración de casos. **Proceso de Justificación** **Explicación de validación** a partir de los resultados empíricos obtenidos en la exploración. **Demostración** por contraejemplo.	**Inductiva:** Se generaliza a partir de resultados particulares. **Abductiva:** se buscan datos que soporten o refuten la afirmación: los cuadriláteros cíclicos deben tener lados opuestos congruentes.
7	**Exploración dinámica: en un cuadrilátero cíclico las mediatrices concurren**	**Producción de una conjetura**: Se obtiene de manera implícita la conjetura: si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia entonces sus mediatrices concurren.	**Proceso de conjeturación: Exploración, visualización para explorar y generalización**.	No se presenta
8	**Proceso de Justificación**	**Exploración del contenido y Selección y encadenamiento de argumentos teóricos en una cadena deductiva**.	**Proceso de justificación: Prueba,** Se justifica parcialmente la afirmación: si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia entonces sus mediatrices concurren.	**Abductiva y deductiva**: Se identifican y utilizan garantes del sistema teórico local que permiten justificar la conjetura propuesta y su contrarecíproca.

FRAGMENTOS GRUPO BraDoLi				
	FRAGMENTO	**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**	**ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA**	**ARGUMENTACIÓN**
1	**Exploración del cuadrilátero con apariencia de rectángulo.**	**Producción de una conjetura**: Se explora el caso del rectángulo.	**Proceso de conjeturación: Exploración y visualización para explorar** mediante una construcción blanda del rectángulo.	No se presenta
2	**Cuadrilátero con apariencia de rectángulo inscrito en una circunferencia como solución a la tarea propuesta.**	**Producción de una conjetura:** Se explora el rectángulo a partir de una construcción auxiliar.	**Proceso de conjeturación: Exploración y visualización para explorar** el caso del rectángulo mediante una construcción blanda.	No se presenta
3	**Exploración de un rombo.**	**Producción de una conjetura:** Se explora la opción del rombo como solución al problema.	**Proceso de conjeturación**: **Exploración y visualización para explorar** Se descarta el rombo como solución a la tarea.	**Abductiva**: Los estudiantes razonan por contraejemplo.
4	**Uso del arrastre para encontrar una solución.**	**Anticipación y producción de una conjetura**. Se anticipa el trapecio isósceles como solución y se realiza una exploración que los lleva a obtener una solución casual de la tarea.	**Proceso de conjeturación**: **Exploración y visualización para explorar.** Se realiza la acción de explorar a partir de una construcción blanda del trapecio isósceles.	No se presenta
5	**Producción y justificación de la conjetura: El punto de concurrencia de las mediatrices equidista de los vértices del cuadrilátero.**	**Exploración del contenido y de selección y encadenamiento de argumentos teóricos**: Se buscan argumentos en el sistema teórico local que permiten validar la conjetura: el punto de corte de las mediatrices se encuentra a la misma distancia de los vértices del cuadrilátero	**Proceso de justificación: Explicación de validación y Demostración**. Se utilizan argumentos gráficos y del sistema teórico local que permiten justifica la afirmación referente a la equidistancia del punto de corte de las mediatrices con relación a los vértices del cuadrilátero.	**Abductiva y deductiva**: Los estudiantes buscan datos gráficos y garantes que posteriormente les permite validar la afirmación.

FRAGMENTOS GRUPO FeSe				
	FRAGMENTO	**RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**	**ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA**	**ARGUMENTACIÓN**
1	**Exploración de un cuadrilátero con apariencia de trapecio.**	**Anticipación y producción de una conjetura:** Se explora el caso del trapecio.	**Proceso de conjeturación**: **Exploración y visualización para explorar**. Se explora el caso del trapecio a partir de una construcción blanda.	No se presenta
2	**Exploración del cuadrado.**	**Anticipación y producción de una conjetura**: Se formula una conjetura a partir de una figura representativa del cuadrado.	**Proceso de conjeturación: Exploración y visualización para explorar** a partir de la construcción robusta de un cuadrado.	**Abductiva.** Se buscan datos gráficos y argumentos de plausibilidad para la justificar el hecho de que en un cuadrado las mediatrices de sus lados concurren.
3	**Exploración del rectángulo.**	**Anticipación y producción de una conjetura:** Se conjetura que en el rectángulo las mediatrices concurren.	**Proceso de conjeturación: Exploración y visualización para explorar** a partir de la construcción robusta de un rectángulo.	No se presenta.
4	**Exploración estática de un cuadrilátero no especial**	**Producción de una conjetura:** Se conjetura: **“**si un cuadrilátero tiene los ángulos internos de 90° entonces las mediatrices de sus lados concurren.	**Proceso de conjeturación: Visualización para explorar y exploración**, los estudiantes se basan en ella para descartar el cuadrilátero construido como posible solución al problema propuesto. **Generalización**: a partir de los resultados obtenidos con anterioridad	**Inductiva:** A partir del estudio de los casos anteriores hacen una generalización.
5	**Exploración del trapecio isósceles**	**Anticipación y producción de una conjetura:** en la que hay una exploración de casos y se conjetura que en el trapecio isósceles las mediatrices de sus lados concurren.	**Proceso de conjeturación: Exploración, visualización para explorar y verificación**.	No se presenta.
6	**Los lados del trapecio isósceles son congruentes.**	**Exploración de contenido:** Se buscan los argumentos apropiados para validar	**Proceso de justificación: Explicación de validación** basada en el teorema de Thales.	**Abductiva y deductiva:** Los estudiantes buscan datos gráficos y garantes que les permita validar la

		la afirmación relacionada con la congruencia de los lados opuestos no paralelos del trapecio.		afirmación dada.
7	**Exploración de un trapecio no isósceles.**	**Producción de una conjetura:** mediante la exploración de un caso**:** Se descubre que en un trapecio con un ángulo recto las mediatrices de sus lados no concurren	**Proceso de conjeturación: Exploración y visualización para explorar.** Se utilizan la visualización para realizar una exploración sobre una figura.	**Argumentación abductiva:** Los estudiantes razonan por contraejemplo.
8	**En un cuadrilátero cíclico las mediatrices concurren.**	**Producción de una conjetura:** Se asocia la concurrencia de las mediatrices con aquellos cuadriláteros que se pueden inscribir en una circunferencia.	**Proceso de conjeturación**: **Exploración, visualización para explorar y generalización** Se obtiene de manera implícita la propiedad: si en un cuadrilátero las mediatrices concurren, entonces se puede inscribir en una circunferencia	No se presenta
9	**El punto de concurrencia de las mediatrices equidista de los vértices del cuadrilátero.**	**Exploración del contenido y selección y encadenamiento teóricos:** Se identifican argumentos apropiados que le permita validar la conjetura: si las mediatrices de un cuadrilátero concurren, entonces el punto de concurrencia equidista de sus extremos.	**Proceso de justificación: Demostración**. Se utilizan hechos del sistema teórico local que permiten justificar la conjetura.	**Abductiva y deductiva:** Se identifican y utilizan los datos y garantes que permiten justificar de dos formas diferentes la proposición: *Si las mediatrices de un cuadrilátero concurren, entonces el punto de concurrencia equidista de sus extremos*.

Tabla 5.1 Ocurrencia de subcategorías de análisis

5.2. Cuantificación de la presencia de las subcategorías de análisis en los fragmentos

Con base en la Tabla 5.1, en esta sesión tabulamos los resultados obtenidos en las intervenciones de los grupos MaPaSe, BraDoLi y FeSe en cuanto a la ocurrencia de las subcategorías de análisis definidas en la sesión 3.4.4.

5.2.1. Fases de resolución de problemas

En la tabla 5.2.1.1 cuantificamos la ocurrencia de las fases de resolución de problemas en el análisis de los fragmentos. Con F1, F2,…, indicamos fragmento 1, fragmento 2, etc.

Fases \ Grupos	Grupo MaPaSe	Grupo BraDoLi	Grupo FeSe	Subtotales
Anticipación	F1	F4	F1, F2, F3, F5	6
Producción de una conjetura	F2, F3, F5, F6, F7	F1, F2, F3, F4	F1, F2, F3, F4, F5, F7, F8	16
Exploración de contenido	F4, F6, F8	F5	F6, F9	6
Selección y encadenamiento de argumentos teóricos	F8	F5	F9	3

Tabla 5.2.1.1 Ocurrencia fases de resolución de problemas

Durante el desarrollo de la actividad, la fase que mayor frecuencia presenta corresponde a la Producción de una conjetura con un 51,6% del total de intervenciones. Es de notar que en los fragmentos en los que se presenta la fase de anticipación (que corresponde a un 19,3%), también se manifiesta la fase de producción de una conjetura, ya que los estudiantes suponían un cuadrilátero como posible solución a la tarea y luego realizaban la exploración de la situación que les permitiera verificar su hipótesis. Un ejemplo de esta relación se evidencia en el fragmento F2 del grupo FeSe, donde los estudiantes suponen el cuadrado, como solución al problema, luego realizan la exploración a partir de una construcción robusta de este cuadrilátero, trazan las mediatrices de sus lados y usan la visualización para verificar que el cuadrado cumple la propiedad de concurrencia de sus mediatrices.

5.2.2. Acciones de la actividad demostrativa

En la tabla 5.2.2.1 cuantificamos la ocurrencia de las acciones de la actividad demostrativa en el análisis de los fragmentos.

Acciones \ Grupos		Grupo MaPaSe	Grupo BraDoLi	Grupo FeSe	Subtotales
Proceso de conjeturación	Visualizar para explorar	F2, F3, F5, F7	F1, F2, F3, F4	F1, F2, F3, F4, F5, F7, F8	15
	Explorar	F2, F3, F5, F7	F1, F2, F3, F4	F1, F2, F3, F4, F5, F7, F8	15
	Generalizar	F3, F5, F6, F7		F4, F8	6
	Verificar	F7		F5, F8	3
Proceso de justificación	Explicar para validar	F4, F5, F6	F5	F6	5
	Probar	F4, F8			2
	Demostrar	F6	F5	F9	3

Tabla 5.2.2.1 Ocurrencia acciones de la actividad demostrativa

Las acciones de explorar y de visualizar para explorar presentaron la mayor ocurrencia durante el desarrollo de la actividad, con una frecuencia relativa de 30,6% cada una. Esto se debe a que la mayoría de las intervenciones de los estudiantes giraron en torno a la exploración de casos particulares, visualizando propiedades y regularidades de los objetos geométricos que posteriormente permitían generalizar y proponer una afirmación. Como se observa, no toda exploración implica una generalización pues cuando los estudiantes exploraron el problema a partir del ensayo y error, en varias ocasiones utilizaron construcciones blandas que no permitían obtener datos exactos de los objetos geométricos; esta situación les exigía replantear la construcción e iniciar nuevamente la exploración, hecho que incide en el decrecimiento de la ocurrencia de la acción de generalizar con respecto a las acciones de explorar y de visualizar para explorar.

Al observar las acciones específicas de explorar y visualizar para explorar, identificamos que su ocurrencia se da en los mismos fragmentos. Este resultado está en consonancia con la descripción realizada en el marco teórico, relacionada con el hecho de que la visualización es una herramienta esencial y permanente para identificar características y regularidades de los objetos y hechos geométricos que se están explorando.

El porcentaje de ocurrencia de las acciones propias del proceso de justificación es menor con respecto al porcentaje de ocurrencia de las acciones de conjeturación. Esta situación refleja lo que sucedió en la puesta en práctica de la secuencia de enseñanza. La mayoría de las veces los estudiantes no realizaban de manera autónoma una justificación de las afirmaciones que establecían durante el proceso de conjeturación, debido quizás a la manera en que tradicionalmente se desarrollaban las clases de matemáticas en la institución. Generalmente fue necesaria la intervención del docente para incitar a los estudiantes a explicar, probar o demostrar las conjeturas formuladas. Sin embargo, en la medida que se avanzó en el desarrollo de la secuencia de enseñanza, se evidenció mayor iniciativa por parte de los estudiantes para justificar sus afirmaciones.

5.2.3. Tipos de argumentos

En la tabla 5.2.3.1 cuantificamos la ocurrencia de los tipos de argumentos en el análisis de los fragmentos.

Grupos / Argumentos	Grupo MaPaSe	Grupo BraDoLi	Grupo FeSe	Subtotales
Abductivos	F3, F4, F5, F6, F8	F3, F5	F2, F6, F7, F9	11
Inductivos	F6		F4	2
Deductivos	F4, F8	F5	F6, F9	5

Tabla 5.2.3.1 Ocurrencia tipos de argumentos

La argumentación abductiva se presenta con mayor frecuencia (11 veces) que la inductiva (2 veces) y la deductiva (5 veces) en las intervenciones de los estudiantes. Una posible explicación de este hecho, puede ser que los estudiantes al anticipar que el cuadrado, el rectángulo, el trapecio y el rombo son posibles soluciones de la tarea, generaron afirmaciones que promovieron la exploración de casos y la búsqueda de datos y hechos geométricos que soportaran las afirmaciones dadas. De manera análoga, cuando se propone como tarea la búsqueda de un cuadrilátero no especial en el que las mediatrices de los lados concurran, los estudiantes establecieron varias conjeturas y buscaron los datos y hechos que les permitiera avanzar en el proceso de justificación.

La argumentación inductiva se ve favorecida gracias a la exploración de casos que realizan los estudiantes después de la fase de anticipación. Aunque no se obtienen hechos ciertos con relación a la propiedad de los cuadriláteros cíclicos, si se utiliza un razonamiento inductivo en el que a partir de unos resultados particulares se deduce una regla general plausible.

Por último, observamos que la argumentación deductiva aparece con una frecuencia relativa de 29,4%. Aunque los estudiantes no desarrollan razonamientos deductivos exhaustivos que obedezcan al lenguaje propio de la comunidad de matemáticos, caracterizamos algunas de sus intervenciones como argumentos deductivos pues, a partir de unos datos concretos, utilizaron garantías del sistema teórico local que permitieron justificar las afirmaciones que se obtenían en el proceso de conjeturación.

5.2.4. Correlaciones entre las categorías de análisis

Con el fin de establecer algunos vínculos entre las categorías de análisis utilizadas en esta investigación, diseñamos dos tablas de doble entrada con las siguientes características. En la tabla 5.2.4.1.1 cuantificamos la ocurrencia de los tipos de argumentos con relación a las Fases de Resolución de Problemas y en la tabla 5.2.4.2.1 cuantificamos la ocurrencia de los procesos que constituyen el constructo Actividad Demostrativa con relación a los tipos de argumentos.

5.2.4.1. Fases de resolución de problemas vs tipos de argumentación

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><th colspan="5">Tipos de argumentación</th></tr>
<tr><th>Abducción</th><th>Inducción</th><th>Deducción</th><th>No presenta</th><th>Totales</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Fases de resolución de problemas</td><td>Anticipación</td><td></td><td></td><td></td><td>6</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Producción de una conjetura</td><td>7</td><td>2</td><td></td><td>7</td><td>16</td></tr>
<tr><td>Exploración de contenido</td><td>5</td><td></td><td>1</td><td></td><td>6</td></tr>
<tr><td>Selección y encadenamiento de argumentos teóricos</td><td></td><td></td><td>3</td><td></td><td>3</td></tr>
<tr><td>Totales</td><td>12</td><td>2</td><td>3</td><td>13</td><td>31</td></tr>
</table>

Tabla 5.2.4.1.1 Resolución de problemas vs tipos de argumentación

En la tabla se observa que en la fase de anticipación no se presenta argumentación, resultado que está en concordancia con la descripción de esta fase de resolución de problemas, en la que los estudiantes suponen soluciones a una determinada tarea sin presentar datos o hechos geométricos que las soporten. Además, se observa que la argumentación abductiva e inductiva se ven favorecidas en la fase de producción de una conjetura; no obstante, durante la exploración de contenido también emergen argumentaciones de tipo abductivo, teniendo en cuenta que durante esta fase los estudiantes buscan los datos y/o las garantías adecuadas que permitan explicar las conjeturas formuladas. Por último, observamos que en la selección y encadenamiento de argumentos teóricos, se favorece exclusivamente la argumentación deductiva.

5.1.4.2. Actividad demostrativa vs tipos de argumentación

		Tipos de argumentación				
		Abducción	**Inducción**	**Deducción**	**No presenta**	**Totales**
Actividad Demostrativa	**Proceso de conjeturación**	6	2		8	16
	Proceso de justificación	5		5		10
	Totales	11	2	5	8	26

Tabla 5.1.4.2.1

En la tabla se puede observar que en el proceso de conjeturación se favorece la argumentación abductiva e inductiva y, en el proceso de justificación, se ve favorecida la argumentación de tipo abductiva y deductiva. Aunque en la tabla no se detalla, consideramos importante aclarar que la ocurrencia de argumentación abductiva en el proceso de justificación, corresponde específicamente a la acción de explicar para validar, mientras que la ocurrencia de argumentación deductiva en este proceso se corresponde con las acciones de probar y demostrar.

5.3. Unidad cognitiva

Una de las hipótesis que planteamos en la justificación de este estudio alude a la identificación de unidad cognitiva en el trabajo de los estudiantes. En el marco teórico describimos que la argumentación que se despliega en los procesos de conjeturación y justificación se puede analizar desde dos puntos de vista: contenido y estructura. En esta sección realizamos un análisis de la presencia de unidad cognitiva en las intervenciones de los estudiantes durante el desarrollo de la actividad seis.

En cada grupo identificamos la presencia de unidad cognitiva de contenido y estructura en los fragmentos en los que los estudiantes exploran y justifican las propiedades de los cuadriláteros cíclicos.

En el caso del grupo FeSe, se puede observar que los estudiantes, para construir un cuadrado y verificar si las mediatrices de sus lados concurren, usan la herramienta polígono regular del programa de geometría dinámica CABRI, que permite ver momentáneamente una circunferencia circunscrita al cuadrado y deja en la pantalla el centro de la circunferencia. Esta circunstancia es utilizada por los estudiantes para trazar la circunferencia, trazar las mediatrices de los lados y concluir que en el cuadrado las mediatrices concurren. Durante la exploración del rectángulo, inscriben este polígono en una circunferencia con centro en el punto de corte de las mediatrices y verifican que el rectángulo queda inscrito en la circunferencia. De manera análoga proceden en la exploración de un cuadrilátero no especial, después de utilizar la opción de arrastre para hacer concurrir las mediatrices de los lados del cuadrilátero, trazan una circunferencia con centro en el punto de concurrencia de las mediatrices y que pasa por uno de los vértices del cuadrilátero, observando que éste queda inscrito en la circunferencia, hecho que les permite establecer la afirmación: *el punto de corte de las mediatrices de un cuadrilátero está a la misma distancia de sus vértices*.

En el proceso de justificación, la circunferencia circunscrita se convierte en el garante gráfico, que posteriormente permite utilizar el teorema: todos los radios de una misma circunferencia son congruentes, como garante teórico para demostrar la conjetura. Además, después de que la circunferencia permite establecer la equidistancia del punto de corte de las mediatrices con los vértices del cuadrilátero, los estudiantes asocian este hecho con la definición de mediatriz y construyen una argumentación deductiva, que permite demostrar la conjetura utilizando garantes teóricos.

En los grupos MaPaSe y BraDoLi la unidad cognitiva se presenta de manera similar que en el grupo FeSe. En los tres grupos, el trabajo sistemático con la circunferencia, convierte este objeto geométrico en una herramienta de exploración, verificación y validación, es decir, está presente tanto en el proceso de conjeturación como en el de justificación.

6. CONCLUSIONES

Las conclusiones del trabajo las hemos organizado atendiendo diferentes aspectos. En cuanto a los objetivos mencionamos en qué medida se cumplieron o no. En cuanto a las hipótesis, las contrastamos con los resultados obtenidos. En cuanto a los aportes teóricos, describimos las contribuciones realizadas a los constructos teóricos que han sido nuestro marco de referencia. En cuanto a los aportes prácticos, sugerimos posibles ajustes a la secuencia de enseñanza para futuras réplicas. Por último, mencionamos los aportes del trabajo a nuestro desarrollo profesional y las posibles proyecciones de la investigación.

En nuestro trabajo nos propusimos diseñar, implementar y analizar un experimento de enseñanza con estudiantes de grado octavo, en el que se favoreciera el desarrollo de la justificación y argumentación por parte de los estudiantes mientras aprendían geometría. Podemos afirmar que los objetivos se cumplieron. Se llevó a cabo la secuencia de enseñanza y tenemos indicadores de que se favoreció la justificación y argumentación a medida que los estudiantes aprendían geometría. Por ejemplo, un indicador es la manera progresiva en que los estudiantes presentaban autonomía para desarrollar abducción, inducción y deducción, en la medida que se apropiaban de conceptos, hechos geométricos y desarrollaban habilidad para representar y explorar los objetos geométricos en el programa de geometría dinámica CABRI.

El diseño y puesta en práctica de la secuencia de enseñanza promovió un cambio en la manera tradicional de enseñar geometría en la institución. Este cambio está caracterizado por los siguientes elementos: siempre propusimos un problema abierto para comenzar la sesión; una vez enunciada la tarea, se destinaba un espacio de la clase para que los estudiantes trabajaran en grupo con el apoyo del programa de geometría dinámica CABRI. Después se realizaba una socialización que permitía institucionalizar los conceptos, hechos y procedimientos geométricos que surgían durante la actividad. Este contexto propició la participación de los estudiantes en el desarrollo de las actividades, rompiendo el esquema usual a partir del cual el profesor presenta la cátedra correspondiente a la temática de estudio y los estudiantes asumen un rol pasivo en el proceso. En el transcurso de la secuencia los estudiantes fueron adquiriendo progresivamente el compromiso de validar sus afirmaciones sin acudir exclusivamente a la autoridad del docente.

En consonancia con nuestra hipótesis, los resultados confirman que los estudiantes pueden aprovechar la argumentación que se despliega en el proceso de conjeturación, para obtener los argumentos que permiten construir la justificación. Por ejemplo, el diseño de la secuencia hizo de la circunferencia una herramienta versátil para pensar, explorar, validar y posteriormente desarrollar el proceso de justificación, utilizando los teoremas relacionados con este objeto como garantes teóricos para organizar una cadena deductiva.

En cuanto a la actividad demostrativa, a partir de los resultados obtenidos, mostramos que no es posible desligar las acciones de explorar y visualizar para explorar en un ambiente de geometría dinámica. Consideramos que la visualización para la exploración es una acción permanente durante la exploración, posición que tuvimos la oportunidad de debatir con la profesora Douek en su visita a Colombia, quien planteó que: *la acción de visualización implica siempre una exploración.*

El aporte práctico de nuestro trabajo lo constituye la secuencia de enseñanza, en la que proponemos un sistema teórico local que integra teoremas y definiciones en torno a los cuadriláteros cíclicos. Consideramos que de esta forma se organiza un conjunto de ideas para favorecer la actividad demostrativa de los estudiantes, la argumentación y la entrada al mundo teórico. Como proyecciones del trabajo es viable tomar otros contenidos de la geometría y de la matemática usando este modelo en el que se respeta un poco la manera de trabajar en matemáticas, sin perder de vista las restricciones del contexto de los estudiantes de secundaria.

Vemos la posibilidad de replicar la secuencia, teniendo en cuenta los siguientes ajustes: recomendamos diseñar actividades preliminares en las que el arrastre se use para incentivar la exploración dinámica y no sólo para revisar construcciones robustas; si bien la anticipación en la actividad 6 promueve la exploración de casos, es necesario ajustar la actividad para que los estudiantes consideren la exploración libre como un camino viable para la solución de la tarea.

En cuanto a nuestro trabajo como docentes, esta experiencia nos ha permitido modificar el ambiente de las clases, promoviendo en los estudiantes mayor participación en su desarrollo, involucrándose con acciones de validación y justificación. Como docentes titulares del colegio en el que se realizó el experimento de enseñanza, podemos reportar que los estudiantes reaccionan favorablemente a este cambio.

Finalmente, pensando en nuestra futura formación profesional, los resultados arrojados en este trabajo se convierten en evidencias empíricas que permiten plantear nuevas situaciones problema para un trabajo de doctorado. Por ejemplo, surgen inquietudes con respecto al currículo y la práctica escolar: ¿será posible abarcar el contenido de la geometría de grado octavo a partir de un sistema teórico local que gire en torno a una situación problema?

7. REFERENCIAS

Arzarello, F & Sabena, C. (2010). Semiotic and theoretic control in argumentation and proof. *Springer Science*, 77, 189-206. doi: 10.1007/s10649-010-9280-3.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof.*

Boero, P., Garuti, R., & Mariotti, M. (1996): Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. *Proceedings of PME-XX*, Valencia, 2, 121-128.

Camargo, L., Samper, C. & Perry, P (2006). *Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica.* Bogotá, Colombia. Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Douek, N. (1998). Some Remarks about Argumentation and Mathematical Proof and their Educational Implications. En I. Schwank (Ed.), *European Research in Matehematics Education* (pp.125-139). Osnabrueck.

Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *Proceedings of the 22th PME Conference* 2, 345-352.

Hanna, G. (1997). Il valore permanente della dimostrazione. *La matematica e la sua didattica*,3, 236-252. Recuperado de http://www.oise.utoronto.ca/˜ghanna/ pme96pfr.html.

Fujita, T. & Jones, K. (2010). Construcciones geométricas de los estudiantes y actividades de demostración. ¿ Un caso de unidad cognitiva? *Proceedings of the 34 th Conference of* *the international group for the psychology of mathematics education.* 3, 9-16. Bello Horizonte, Brazil

Marrades, R. & Gutiérrez, A. (2001). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.

M.E.N. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/article-116042.html.

M.E.N. (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Recuperado de www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C. & Rojas, C. (2006) *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L. (2006). Dos episodios que plasman rasgos de una comunidad de práctica en la que cabri juega un papel clave. Ponencia presentada al III Congreso Iberoamericano de Cabri, Bogotá, Colombia.

Pedemonte, B. (2001). Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education PME-25*, 4, 33–40. Utrecht, Holanda.

Samper, C., Camargo, L., & Leguizamón, C. (2003). *Como promover el razonamiento en el aula por medio de la geometría*. Bogotá, Colombia: Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Camargo, L., Molina, O., Echeverry A. & Perry, P. (2010), *Geometría dinámica: medio para el establecimiento de condicionalidad lógica*. Bogotá, Colombia: Editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

ANEXO 1

ANALISIS DE LOS FRAGMENTOS

GRUPO MaPaSe

<u>Fragmento 1: Posibles cuadriláteros</u>

Este fragmento corresponde a la primera aproximación que hacen los estudiantes al problema propuesto cuando en plenaria, de manera intuitiva y sin el apoyo del programa de geometría dinámica, sugieren posibles cuadriláteros para los cuales las mediatrices concurren.

5	Profesor:	Voy a pensar en cuáles cuadriláteros yo puedo llegar a suponer, que las mediatrices se corten en un mismo punto ¿En cuáles cuadriláteros puede llegar a pasar que las mediatrices se corten en un mismo punto?
6	Felipe:	En un cuadrado perfecto.
7	Profesor:	En un cuadrado, bueno, una opción [apunta la propuesta en el tablero].
8	Alejandra:	Rombo.
9	Profesor:	En un rombo.
10	Paula:	Rectángulo.
11	Felipe:	Trapecio.
12	Profesor:	Listo, vale. Tengo cuatro opciones. Me dicen: yo supongo sin aún utilizar Cabri, que las mediatrices se cortan en un solo punto en un cuadrado, o supongo que en un rombo, supongo que en un rectángulo y también lo supongo en un trapecio. […]

El fragmento se ubica en la Fase de Anticipación del proceso de resolución del problema pues, la respuesta de los estudiantes está basada en una primera intuición. Ellos sugieren, de manera espontánea, como posibles cuadriláteros que dan respuesta al problema: cuadrado, rombo, trapecio y rectángulo [6, 8, 9, 11].

Es una fase importante en la actividad demostrativa de los estudiantes pues, genera motivación, reto y deseo de explorar. Sin embargo, en la resolución específica de este problema, la anticipación condujo a los estudiantes a hacer una exploración por casos, desestimando la exploración dinámica. Esto puede deberse a la falta de costumbre de los estudiantes en el trabajo con figuras dinámicas, hecho que los lleva a pensar en los cuadriláteros que conocen y no en un cuadrilátero en general.

En el fragmento no se identifica argumentación alguna. Los estudiantes proponen opciones, pero ninguno aventura una explicación. Probablemente esto se debe a que no se ha constituido la norma de explicar todo aquello que se afirma. Tampoco el profesor pide una explicación [12] pues su intención es proponer una comparación posterior entre lo que se anticipa y lo que se obtiene, para impulsar la justificación.

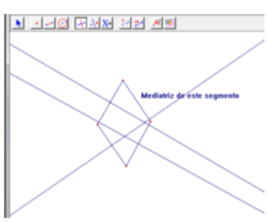
Fragmento 2: Exploración del rombo y de un cuadrilátero no especial

Una vez hecha la anticipación, en la que los estudiantes proponen al cuadrado, el rectángulo, el rombo y el trapecio como posibles soluciones al problema, los estudiantes comienzan a trabajar en Cabri. Sebastián, Alejandra y Paula deciden comenzar por un cuadrilátero con apariencia de rombo y después estudian un cuadrilátero sin características especiales. Además de construir los cuadriláteros, trazan tres mediatrices en cada uno y descartan ambas opciones como posibles soluciones al problema.

12 Profesor: […] Ahora viene la actividad. Vamos a encontrar… que es parte de la tarea de hoy… vamos a buscar un cuadrilátero en el cual las mediatrices de sus lados se corten en un solo punto.

13 Paula: El rombo… el rombo… haga el rombo [se dirige a Alejandra, quien controla el mouse.].

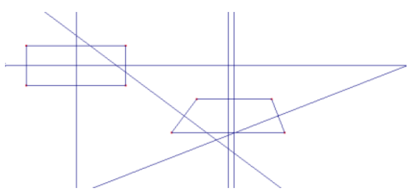
14 Alejandra: [Construye un cuadrilátero utilizando la herramienta segmento y luego, arrastrando uno de los vértices, obtiene la apariencia de rombo. Luego construye tres de las mediatrices].



15 Sebastián: [Tan pronto Alejandra termina de construir la tercera mediatriz] ¡No!, ¡no!, ¡no!, ¡no!, ¡no!. Tocaría un cuadrado exacto. Haga un cuadrado perfecto.

16 Alejandra: [Dibuja un cuadrilátero no especial, traza tres mediatrices y lo borra al ver que éstas no se cortan en un solo punto].

[…]

25	Profesor:	¿Qué hicimos?
26	Paula:	Hicimos un rombo, pero no… no, las mediatrices no se cortan en el mismo punto.
37	Profesor:	Espérate, déjame ver el [segundo] cuadrilátero que hicieron; de pronto con la gráfica yo puedo entender un poquito más.
38	Paula:	Haga cuatro líneas normales [se refiere a segmentos], como hizo ahorita. El primero que usted hizo [se dirige a Alejandra].
42	Alejandra:	[Construye un cuadrilátero irregular, utilizando exclusivamente la herramienta segmento].
45	Profesor:	Bien, y ustedes me dijeron que en ese no servía.
46	Sebastián:	No
47	Profesor:	Y, ¿Cómo comprobaron que no?
48	Sebastián:	Hicimos las mediatrices
49	Profesor:	Déjame ver.
50	Alejandra:	[Construye las cuatro mediatrices de los lados del cuadrilátero] 
51	Profesor:	Si perfecto, ¿qué pasó ahí?
52	Sebastián:	No se unen en el mismo punto.
53	Profesor:	No se cortaron.
54	Paula:	No se cortan en el mismo punto [se refiere a las mediatrices].
55	Profesor:	Bien, entonces, esa opción la descartaron ¿cierto?
56	Paula:	Sí.

El fragmento corresponde a la Fase de Exploración. Los estudiantes proponen dos posibles soluciones al problema, construyen figuras representativas y usan la visualización [15] para descartar las dos opciones al observar que tres de las mediatrices no concurren [15, 16, 26]. Al ser cuestionados por el profesor deciden repetir la segunda construcción y corroborar que un cuadrilátero sin características especiales no cumple la condición.

En la actividad demostrativa que llevan a cabo los estudiantes, la visualización juega un papel esencial. Los estudiantes se basan en ella al hacer la exploración para decidir si el cuadrilátero construido es solución al problema. No hacen construcciones auxiliares ni toman medidas porque con sólo trazar tres mediatrices, se dan cuenta que éstas no concurren.

<u>Fragmento 3: Rectángulo como una solución a la situación.</u>

Después de reconocer empíricamente (usando el programa de geometría dinámica) que las mediatrices de un rombo no concurren, los estudiantes realizan la construcción robusta de un rectángulo apoyándose en una de las tareas previas en la que se les pidió que construyeran un sobre de carta que soportase el arrastre. Trazan las mediatrices de este rectángulo y al percatarse de que las mediatrices concurren, concluyen que han resuelto el problema propuesto.

16	Paula:	[Después de descartar el rombo como posible solución]. ¡Ah!, pues nos toca hacer un rectángulo, ¿se acuerda del sobre?, porque si no, no queda igual. [Probablemente Paula intenta llamar la atención de Alejandra y Sebastián para usar las herramientas de Cabri que usaron al construir un sobre que superó la prueba del arrastre; comienza a construir un cuadrilátero haciendo un segmento, luego hace las rectas perpendiculares al segmento que pasan por los extremos, después construye un segmento con extremos sobre las perpendiculares y aparentemente paralelo al segmento original; por último, construye las mediatrices de dos lados opuestos del cuadrilátero].
21	Sebastián:	¡Ya!,! ya!, ¡ya! Es la misma, [le insinúa que las mediatrices de dos lados opuestos coinciden]. Y ahora de los [otros] lados.
22	Paula:	[Señala uno de los lados del cuadrilátero sobre el cual no se ha construido aún la mediatriz].
23	Alejandra:	[Construye las mediatrices de los lados indicados por Paula y Sebastián].
24	Sebastián:	¡Ya! Profe.

30	Paula:	Hicimos un…
31	Alejandra:	Un cuadrado.
32	Paula:	Pero hicimos algo de cuatro lados y ya.
33	Profesor:	¿Qué es algo de cuatro lados?
34	Sebastián y Paula:	Cuadrilátero.
35	Paula:	Un cuadrilátero pero no, no…
36	Sebastián:	Exacto, porque si la medida de este lado es igual a ésta [hace referencia a los lados opuestos de un rectángulo], la mediatriz va hacer la misma

Ubicamos este fragmento en la fase de resolución de problemas denominada exploración de la situación: los estudiantes proponen una solución al problema, construyen una figura con las propiedades correspondientes a la posible solución y usan la visualización para verificar si ésta cumple la condición.

En lo que se refiere a la actividad demostrativa, encontramos en este fragmento una exploración estática basada en un caso, en la que a partir de la construcción robusta de un rectángulo, se logra establecer la conjetura "las mediatrices de los lados de un rectángulo concurren". La figura construida tiene carácter general pues los estudiantes la ven como representativa de cualquier rectángulo. En este fragmento los estudiantes creen haber resuelto el problema porque han encontrado un caso en el que se cumple la propiedad. Es evidente que no están acostumbrados a buscar más de una solución, por lo que, en cuanto encuentran una figura en la que las mediatrices concurren, abandonan la exploración.

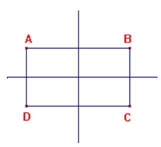
En la intervención de Sebastián [36] encontramos un intento de argumentación. Sebastián aventura una explicación sobre el por qué en el rectángulo las mediatrices coinciden. Para ello se refiere a la igualdad de las medidas de los lados opuestos del rectángulo. La argumentación incluye como información dada, el que los lados opuestos del rectángulo son congruentes. Parece que Sebastián usará este hecho para explicar la coincidencia de las mediatrices de los lados opuestos y de allí se pudiera inferir que como son sólo dos mediatrices, ellas concurren porque las rectas no paralelas se cortan en un solo punto. Pero Sebastián no elabora suficientemente su argumento.

Se hubiera podido enriquecer la discusión, aludiendo a la equidistancia del punto de concurrencia de las mediatrices a cada uno de los vértices del cuadrilátero con el propósito de resaltar el invariante que tienen los cuadriláteros cíclicos.

<u>Fragmento 4: ¿Cuántas mediatrices tiene un rectángulo?</u>

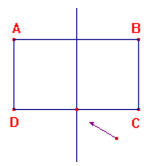
Cuando el profesor cuestiona a los estudiantes acerca de la construcción que permite conjeturar que las mediatrices de los lados de un rectángulo concurren, se presenta un diálogo alrededor del número de mediatrices que tiene un rectángulo. Se produce un intento de establecer una argumentación para justificar por qué son dos rectas mediatrices.

57	Profesor:	¿Qué hicieron?
58	Paula:	Un rectángulo.
		[…]
61	Profesor:	Listo, bien, y en el rectángulo ¿qué pasaba?
62	Paula:	Que ahí sí se cortan las mediatrices.
65	Profesor:	Esta mediatriz [señala con el marcador una de las mediatrices construidas por los estudiantes en Cabri] ¿de quién es?
66	Sebastián:	De ambas, del [lado] de abajo y del [lado] de arriba [de los lados del rectángulo que perceptualmente son horizontales]
67	Profesor:	¿Cuáles lados?
68	Alejandra:	[Nombra los vértices del rectángulo ABCD]. Listo profe.

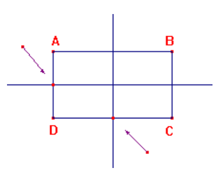


71	Profesor:	Entonces en el rectángulo ¿cuántas mediatrices puedo trazar?
72	Paula, Sebastián y Alejandra:	Cuatro.
73	Profesor:	Pero ¿de qué me doy cuenta?
74	Paula:	Pues que quedan como dos.
75	Sebastián:	Que sólo quedan dos.
76	Profesor:	¡Ah!… que quedan como dos, ¿Por qué quedan como dos?
77	Sebastián:	Porque… porque un rectángulo tiene…dos.
78	Paula:	Dos lados iguales.
79	Sebastián:	Dos lados iguales, entonces…, entonces se le hace la mediatriz de la…del lado del abajo y va a ser igual que el de arriba.

80	Profesor:	¿Ustedes están de acuerdo con eso?
81	Paula y Alejandra:	Sí.
82	Profesor:	Bien, entonces parece que el rectángulo me sirve… [Dirigiéndose a todo el curso].
180	Profesor:	[Dibuja un rectángulo ABCD en el tablero] ¿Qué hicimos?
181	Sebastián:	Las mediatrices.
182	Paula:	Pues pasaba lo mismo que con el cuadrado, hicimos la mediatriz del segmento BA.
183	Profesor:	Sí [construye la mediatriz del segmento BA].
184	Paula:	El punto medio de [el segmento] CD también estaba entre la mediatriz, se encontraba entre la mediatriz.
185	Profesor:	¡Ah!, el punto medio de [el segmento] CD pertenece a esta mediatriz [señala la mediatriz de AB y construye el punto medio de CD],



		Entonces ¿qué pasaba con la mediatriz de CD?
186	Sebastián :	Era la misma.
187	Paula:	Que es, es… la misma…porque además era perpendicular a AB [hace referencia a que la mediatriz del segmento AB es perpendicular al segmento DC].
188	Profesor:	¿Y de estos? [Señala los segmentos AD y BC].
189	Sebastián:	Pasaba lo mismo.
190	Paula:	En ese también se creo la mediatriz…
191	Profesor:	Sí…, se creo la mediatriz…[Construye la mediatriz del segmento BC en el tablero].



192	Paula:	…Y el punto medio de AD se encontraba en la mediatriz y la mediatriz era perpendicular a BC.

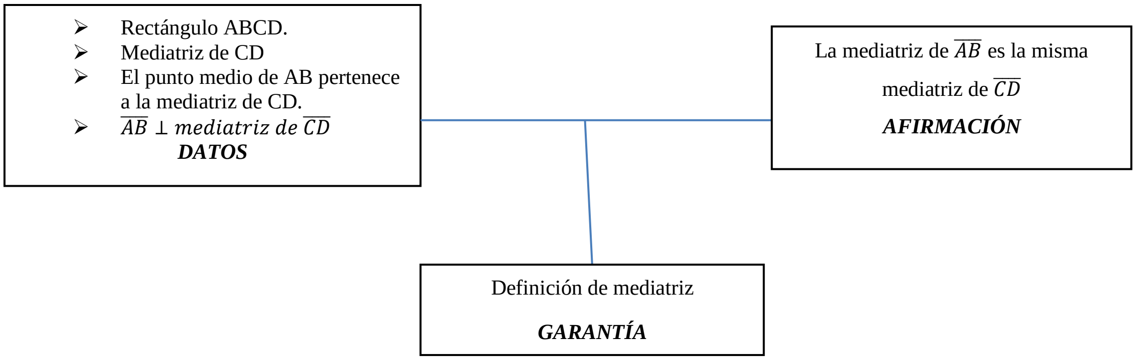
Aunque la pregunta por el número de rectas mediatrices de un rectángulo se aleja de la resolución del problema, incluimos el fragmento como dato en la investigación porque es un indicador de la actividad demostrativa que experimentan los estudiantes, que se da como parte del proceso de resolución del problema, y en donde los estudiantes tienen la posibilidad de elaborar argumentos matemáticos.

Ubicamos el fragmento como ejemplo del proceso de justificar, que surge después de la construcción de un rectángulo y sus mediatrices. Al hacer la construcción, los estudiantes visualizan que sólo hay dos mediatrices y proponen una conjetura: “si un cuadrilátero es un rectángulo entonces las mediatrices de los lados opuestos coinciden”.

A partir de los cuestionamientos del docente, los estudiantes inician un proceso de justificación, organizando la información obtenida en una argumentación de carácter deductivo. En las intervenciones [74] y [75] Paula y Sebastián formulan como conclusión que el rectángulo sólo tiene dos rectas mediatrices. El profesor les pide justificar este hecho [76] dando lugar a un proceso de construcción de la justificación. Paula y Sebastián mencionan, como dado, que el rectángulo tiene los lados opuestos de igual medida [77, 78]. Posteriormente, cuando el profesor propone la discusión a todo el grupo, Paula continúa elaborando la justificación al mencionar, como conclusión parcial, que el punto medio de un lado del rectángulo, DC, está en la mediatriz del lado opuesto, AB [184], probablemente usando como garante la figura construida. Y en la intervención [187] agrega que la mediatriz de un lado del rectángulo, AB, es perpendicular al lado opuesto, DC, probablemente también usando como garante la figura construida en Cabri. De esta forma, Paula menciona las dos propiedades que tiene la mediatriz de un segmento: pasa por el punto medio y es perpendicular a éste. Aunque ella no lo menciona, de allí se puede concluir, por el teorema de la mediatriz, que la mediatriz de AB también es mediatriz de CD.

Aunque el garante usado para concluir que la mediatriz de un lado del rectángulo es perpendicular al lado opuesto y pasa por su punto medio es gráfico, observamos dos argumentos deductivos encadenados, aunque no completos e identificamos el uso de propiedades incluidas en el teórico local. Sin embargo, desde el punto de vista formal, es necesario justificar algunas hipótesis que se derivan de la observación; por ejemplo, el hecho de que la mediatriz de $\overline{AB}$ contienen al punto medio de $\overline{BC}$ y es perpendicular a éste [intervención 184]. A continuación, presentamos la argumentación de Paula y Sebastián (representada en el modelo de Toulmin)

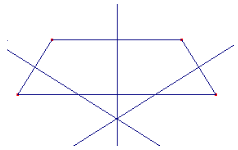
Esquema de argumentación Paula y Sebastián:



<u>Fragmento 5: En el trapecio isósceles las mediatrices también concurren</u>

En este fragmento el docente intenta promover en los estudiantes la exploración de cuadriláteros no especiales en los que las mediatrices de sus lados concurran. Sin embargo, los estudiantes insisten en explorar cuadriláteros con características especiales. Al analizar un cuadrilátero con apariencia de trapecio y arrastrar los vértices para que éste quede con apariencia de trapecio isósceles, concluyen que las mediatrices de los lados del trapecio isósceles concurren.

197	Profesor:	Busquemos otro cuadrilátero en el cual las mediatrices de los lados se corten en un solo punto [escribe el enunciado en el tablero].
205	Paula:	El trapecio.
206	Profesor:	Pues miremos entonces el trapecio, puede ser otro, no sé.
207	Sebastián:	[Construye un cuadrilátero, similar a un trapecio, con la herramienta segmento y la opción arrastre, luego traza las mediatrices de los lados paralelos; se da cuenta que las mediatrices no coinciden]. No, nos quedó mal. [Utiliza la opción de arrastre para modificar el cuadrilátero, haciendo que las mediatrices coincidan. Así, el cuadrilátero queda con apariencia de trapecio isósceles].
208	Paula:	Construya las otras dos mediatrices.
209	Sebastián:	[Construye las mediatrices].

210	Paula:	Pero mire que se cortan por acá [señala el punto de corte fuera del interior del cuadrilátero] 
211	Sebastián:	No importa, todas se cortan en un mismo punto.
214	Profesor:	¿Qué pasó?
215	Sebastián:	Hicimos con el trapecio y también [señala el punto de corte de las mediatrices].
218	Profesor:	Bien, se cortaban en el trapecio. Les voy a preguntar algo: ¿cuántas mediatrices puedo ver ahí?
219	Paula:	Tres.
220	Profesor:	¿Por qué solamente puedo ver tres mediatrices?
221	Paula:	Porque el punto medio de este segmento pertenece a la mediatriz de este segmento. [Se refiere a los segmentos paralelos].

En este fragmento, la actividad de los estudiantes se centra en las fases de anticipación, exploración de casos y producción de una conjetura. Los estudiantes anticipan que en el trapecio las mediatrices de sus lados concurren [206], construyen un cuadrilátero con apariencia de trapecio, y encuentran las mediatrices de dos lados opuestos.

La actividad demostrativa se centra en el proceso de exploración por medio de la visualización y la exploración dinámica. Al darse cuenta que las mediatrices del trapecio construido no concurren, arrastran uno de los vértices del cuadrilátero hasta hacer casi coincidir las mediatrices; visualizan que los lados respectivos son paralelos, pero no se dan cuenta que los lados no paralelos son prácticamente congruentes. Trazan las otras dos mediatrices y arrastran los vértices del trapecio hasta que las cuatro mediatrices concurren (dos de ellas coinciden), quedando un cuadrilátero con apariencia de trapecio isósceles [207]. Si bien los estudiantes no utilizan el formato condicional si-entonces para redactar sus conjeturas, entre líneas se puede interpretar la formulación de la conjetura: si un cuadrilátero es trapecio isósceles, entonces las mediatrices de estos lados deben concurrir. A pesar de que Paula objeta la construcción como solución al problema porque las mediatrices concurren en el exterior del trapecio [210], Sebastián está seguro de haber obtenido una solución [211].

Los estudiantes no se preguntaron por las propiedades del cuadrilátero que hicieran posible la concurrencia de las mediatrices ni el profesor les pidió hacer una justificación. En ese sentido, no encontramos una argumentación en el fragmento. Sin embargo, se constituye en un dato interesante del trabajo pues es la primera vez que los estudiantes usan espontáneamente la función de arrastre para modificar el cuadrilátero hasta lograr la configuración deseada. El uso del arrastre los llevó a una configuración que no habían anticipado, el trapecio isósceles, y a darse cuenta que no era necesaria la coincidencia de dos pares de mediatrices ni que el punto de concurrencia estuviera en el interior del cuadrilátero.

Fragmento 6: Argumentación por contraejemplo

En este fragmento se evidencia una argumentación por contraejemplo. Sebastián y Alejandra proponen una anticipación acerca del tipo de cuadriláteros para los cuáles las mediatrices concurren, que es refutada inmediatamente por Paula, usando uno de los cuadriláteros explorados durante el trabajo previo.

222	Profesor:	Busquen un cuadrilátero, ya no el cuadrado que es algo especial; ya no el rectángulo que es algo especial; ya no el trapecio ¿No habrá otro cuadrilátero diferente a estos especiales? En el cual yo pueda garantizar que las mediatrices…
223	Sebastián:	Yo pensaría que en todos se puede, que en todos [los cuadriláteros] se cortan [en un solo punto].
224	Profesor:	¿Qué en cualquier cuadrilátero se puede? ¿Tú que dices Brochero¿ ¿En cualquier cuadrilátero que yo haga, las mediatrices se cortan?
225	Alejandra:	Desde que tengan los lados congruentes.
226	Paula:	No, porque estos no son congruentes [hace referencia a los lados paralelos del trapecio isósceles]. Si ella dice que tienen que ser los lados congruentes, entonces no nos serviría el trapecio, entonces lo que está afirmando no sirve.

El fragmento corresponde a la fase de anticipación. Dos estudiantes creen haber encontrado la regularidad de los cuadriláteros cuyas mediatrices concurren, proponiendo que se trata de los cuadriláteros cuyos lados son congruentes [223, 225]. La anticipación es descartada por Paula quien les muestra el caso del trapecio isósceles, a manera de contraejemplo [226].

Acerca de la actividad demostrativa, aunque los estudiantes no utilizan el formato condicional para expresar su idea, en las intervenciones de Sebastián [223] y Alejandra [225], se evidencia la intención de generalizar los resultados obtenidos en las exploraciones previas, hecho que nos lleva a pensar que están en un proceso de conjeturación.

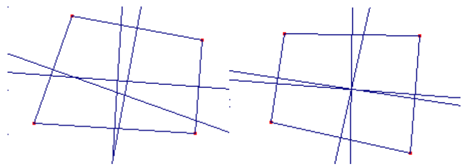
Con relación a la argumentación, Paula pone a prueba la generalización de Sebastián y Alejandra mostrando un ejemplo que refuta la afirmación [226]. Es una argumentación mediante un contraejemplo, que en matemáticas es aceptada como una demostración. Ésta se relaciona con el cuantificador universal, y aparece cuando se quiere probar que una conjetura (proposición) del tipo $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ es falsa. En cuyo caso, se busca un elemento *a* para el cual $p(a) \rightarrow q(a)$ sea verdadera, *p(a)* sea verdadera, pero *q(a)* sea falsa.

<u>Fragmento 7: Exploración dinámica</u>

En este fragmento, los estudiantes construyen un cuadrilátero irregular y utilizan la opción de arrastre para hacer que sus mediatrices concurran. A partir de una construcción auxiliar (una circunferencia con centro en el punto de concurrencia de las mediatrices y que pasa por uno de los vértices) se favorece la visualización de algunas regularidades, hecho que les permite afirmar que si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, sus mediatrices concurren. Verifican la conjetura haciendo una construcción robusta.

233	Profesor:	Entonces, tratemos de buscar otro cuadrilátero [diferente al cuadrado, al rectángulo y al trapecio isósceles, ya estudiados].
		[…]

235 Sebastián: ¿Hacemos uno deforme?, [El profesor] quiere ver este deforme. [Construye un cuadrilátero, las mediatrices de sus lados y comienza a utilizar la opción de arrastre para que las mediatrices se corten en un solo punto. Luego, sin dar explicaciones, construye una circunferencia con centro en el punto de corte de las mediatrices y que contienen uno de los vértices del cuadrilátero].



[Después de unos segundos, construye una circunferencia, al lado del cuadrilátero]. Hagamos un cuadrilátero, a ver que sale. [Construye un cuadrilátero inscrito en la circunferencia].

236 Alejandra: Ahora las mediatrices.

237 Sebastián: ¡Uy!!Uy!

238 Paula: Sí nos quedó.

239 Alejandra: Ahora nombrémoslo. [Toma el mouse, nombra los vértices y el punto de corte de las mediatrices].

240 Paula: ¡Profesor!

243 Profesor: Listo. No es cuadrado, no es un rectángulo, no es un trapecio, no es un rombo. Y sin embargo, ¿qué pasó con las mediatrices?

244 Paula, Sebastián y Alejandra: Se cortaron en un mismo punto.

255 Profesor: ¿Probaron otro cuadrilátero diferente a ese?

256 Sebastián: Pero se puede en la circunferencia.

257 Profesor: Sí.

258 Sebastián: En todos sirve. [Construye una circunferencia, un cuadrilátero inscrito en ella y sus mediatrices].

266 Profesor: ¿Todos me sirven?

267 Sebastián: Si, ¿lo muevo? [Arrastra uno de los vértices del cuadrilátero].

268 Profesor: Entonces encontramos un método que genera todos de una vez.

Este fragmento se ubica en las fases de exploración y producción de una conjetura que se corresponden con acciones del proceso de conjeturación, de la actividad demostrativa. En busca de un cuadrilátero diferente a los ya estudiado, para responder al requerimiento del profesor […], Sebastián decide probar con cuadrilátero irregular [235]. Traza las mediatrices y, por su propia iniciativa, realiza una exploración dinámica, arrastrando los vértices hasta lograr que las mediatrices concurran. Sin explicar por qué, traza la circunferencia circunscrita. Suponemos que está buscando un método de construcción de tal tipo de cuadriláteros. Al darse cuenta que los vértices del cuadrilátero quedan sobre la circunferencia, Sebastián identifica la condición que se debe cumplir para que las mediatrices de los cuadriláteros concurran en un mismo punto, es decir, que el cuadrilátero esté inscrito en una circunferencia. Por eso decide comenzar una nueva construcción haciendo una circunferencia, construyendo un cuadrilátero inscrito y trazando las mediatrices. De esa forma verifica que su idea es correcta, hecho que lo emociona o sorprende [237] y motiva que llamen al profesor para mostrarle el resultado. Cuando éste les pregunta si hicieron la verificación con otros cuadriláteros Sebastián afirma: “Pero se puede en la circunferencia” [256], afirmación que entrevemos como una conjetura. Sin decirle explícitamente, Sebastián se refiere a la siguiente regularidad: si un cuadrilátero esta inscrito en una circunferencia, entonces sus mediatrices concurren. Es más, reafirma su idea al afirmar “en todos sirve” [258] insinuando que cualquier cuadrilátero inscrito cumple la propiedad y, cuando el profesor le plantea la duda, el estudiante pregunta si quiere que mueva alguno de los vértices para verificarlo [267], reflejando con ello que está completamente convencido de que es así.

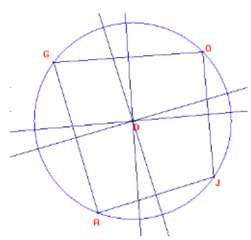
En síntesis, en el fragmento se evidencian acciones propias del proceso de conjeturación de la actividad demostrativa: exploración dinámica, visualización para explorar y formulación de una conjetura. Los estudiantes hacen una construcción blanda y utilizan la herramienta arrastre para explorar la situación y encontrar un cuadrilátero que solucione la tarea propuesta; después, a partir de una construcción robusta identifican la regularidad que permite generalizar los resultados obtenidos y proponer, de manera implícita, la conjetura: si un cuadrilátero esta inscrito en una circunferencia, entonces sus mediatrices concurren. Además, utilizan la opción de arrastre para verificar la conjetura.

En el fragmento no se identifica argumentación, el proceso de justificación que desarrollan los estudiantes con relación a la conjetura formulada, se analiza en el siguiente episodio.

Fragmento 8: Proceso de justificación

A partir de una exploración dinámica y la visualización, se estableció que si un cuadrilátero esta inscrito en una circunferencia, entonces sus mediatrices concurren. En este episodio, los estudiantes utilizan argumentos del sistema teórico local que se pueden encadenar mediante un razonamiento deductivo, construyendo entre todos, y con ayuda del profesor, la demostración de la conjetura establecida. Además, cuando el docente introduce un cuestionamiento sobre un argumento que permita justificar la equidistancia del punto de concurrencia de las mediatrices con los vértices del cuadrilátero, los estudiantes seleccionan y encadenan los argumentos necesarios para demostrar la propiedad recíproca a la conjetura formulada, es decir: si las mediatrices de un cuadrilátero concurren, entonces el cuadrilátero está inscrito en una circunferencia.

268	Profesor:	¿Cómo justifico el hecho de qué todas las mediatrices de los lados de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia se cortan en el centro de ésta? [En la pantalla de Cabri se tiene la siguiente representación]



269	Paula:	Pues es que son como radios.
270	Profesor:	¿Cuáles son radios?
284	Paula:	Estos son los radios [Señala los vértices del cuadrilátero y el centro de la circunferencia]. Entonces [el punto D] está a la misma distancia de todos.
285	Profesor:	¡Ah bien! Pero… ¿puedo utilizar otro argumento para garantizar que D está a la misma distancia de R, de G, de O y de J?
286	Paula:	Por transitividad, porque si la mediatriz pasa por el punto D [señala la mediatriz del segmento RG], entonces se supone que está a la misma distancia del punto R que del punto G, y así con el punto G y con el punto O.
300	Paula:	Y ésta [Señala con el dedo la mediatriz del segmento JO]
302	Sebastián:	Muestra que D esta a la misma distancia de J que de O, y de todos porque ...
305	Alejandra:	Por la transitividad…
311	Sebastián:	R con G, G con O, O con J, J con R.

323 Paula: Entonces D esta a la misma distancia de todos ellos [se refiere a los puntos R, G, O y J]

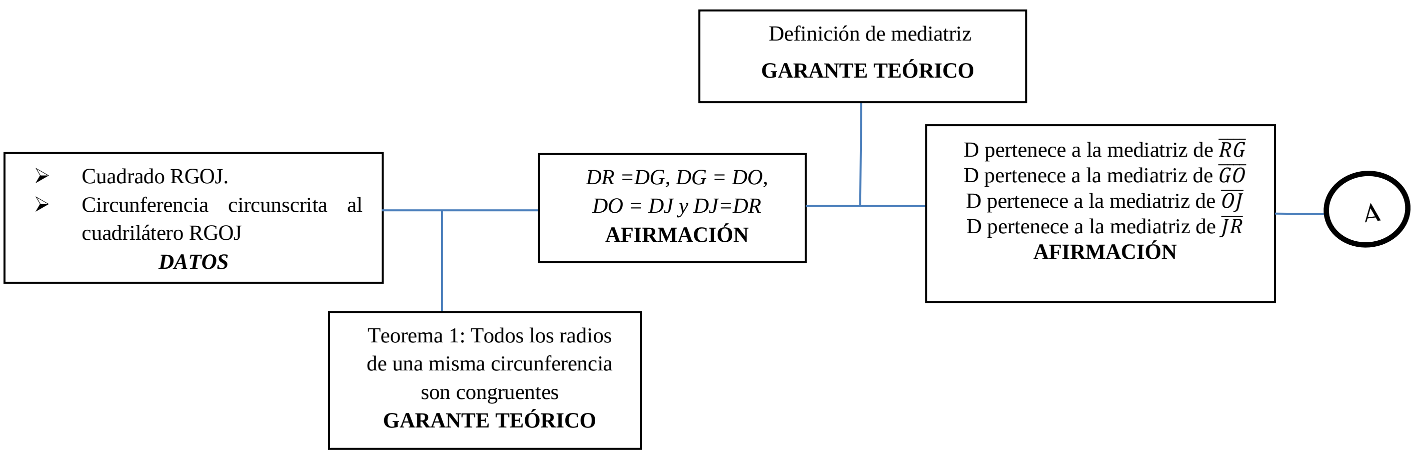
324 Profesor: Listo, vale.

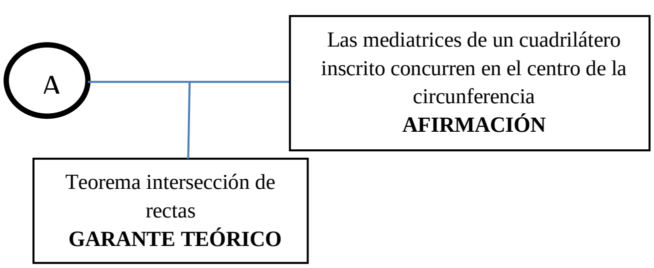
Las fases de la resolución de problema que se identifican en el fragmento son: La exploración del contenido y la selección y encadenamiento de argumentos teóricos coherentes en una cadena deductiva, aunque la actividad de los estudiantes no llega hasta el encadenamiento. Cuando se pide a los estudiantes una justificación de la conjetura formulada, comienzan a identificar propiedades de su sistema teórico local que les sirvan en la validación. Paula hace referencia a los radios de la circunferencia [269], expresión que nos lleva a pensar que va valerse del teorema trabajado en la secuencia de enseñanza: Todos los radios de una circunferencia son congruentes. Efectivamente, menciona que al ser RD, GD, OD y JD radios de la circunferencia, los puntos R, G, O y J equidistan del punto D, en donde concurren las mediatrices [284]. Desafortunadamente, Paula no sigue elaborando su argumentación pues no menciona que como D equidista de R y G está en la mediatriz del lado RG, como De equidista de G y de O, está en la mediatriz del lado GO, como D equidista de O y de J, está en la mediatriz de OJ y como D equidista de J y R está en mediatriz de JR con lo cual podría concluir que D está en todas las mediatrices, por lo que ellas concurren. Para impulsar a la estudiante a seguir con la argumentación el profesor hace una pregunta que lleva a los estudiantes a pensar en la situación recíproca, es decir, si lo que se tiene como dado es que D es el punto donde concurren las mediatrices y hay que probar que equidista de R, D, J y O [285]. Nuevamente Paula se aventura a comenzar a dar una explicación, secundada por Sebastián y Alejandra, refiriéndose al uso de la propiedad transitiva [286]. Ella alude a la definición de mediatriz, mencionando que la mediatriz de un lado equidista de los extremos y que eso mismo pasa con otros mediatriz [286]. En [302], [305] y [312] los estudiantes aluden a la equidistancia de los extremos y a la propiedad transitiva para concluir que D equidista de los 4 extremos y por tanto el cuadrilátero está inscrito en una circunferencia.

Se evidencian acciones propias del proceso de justificación. Los estudiantes seleccionan los elementos adecuados para organizar una cadena deductiva que conlleve a la justificación de la conjetura formulada. Aunque no se organizan los argumentos en una cadena deductiva que obedezca a los estándares actuales de la comunidad matemática, algunos de los garantes que se utilizan pertenecen al sistema teórico local; por tal razón, el producto que se obtiene del proceso de justificación, se puede interpretar como una demostración. Cuando el docente pide justificar la afirmación "*el punto D equidista de los vértices del cuadrilátero*" [285], implícitamente solicita la justificación de la propiedad recíproca a la conjetura formulada, es decir: si las mediatrices de los lados de un cuadrilátero concurren, entonces el cuadrilátero esta inscrito en una circunferencia, en este caso, los estudiantes utilizan la propiedad transitiva y la definición de mediatriz como garante para justificar la afirmación.

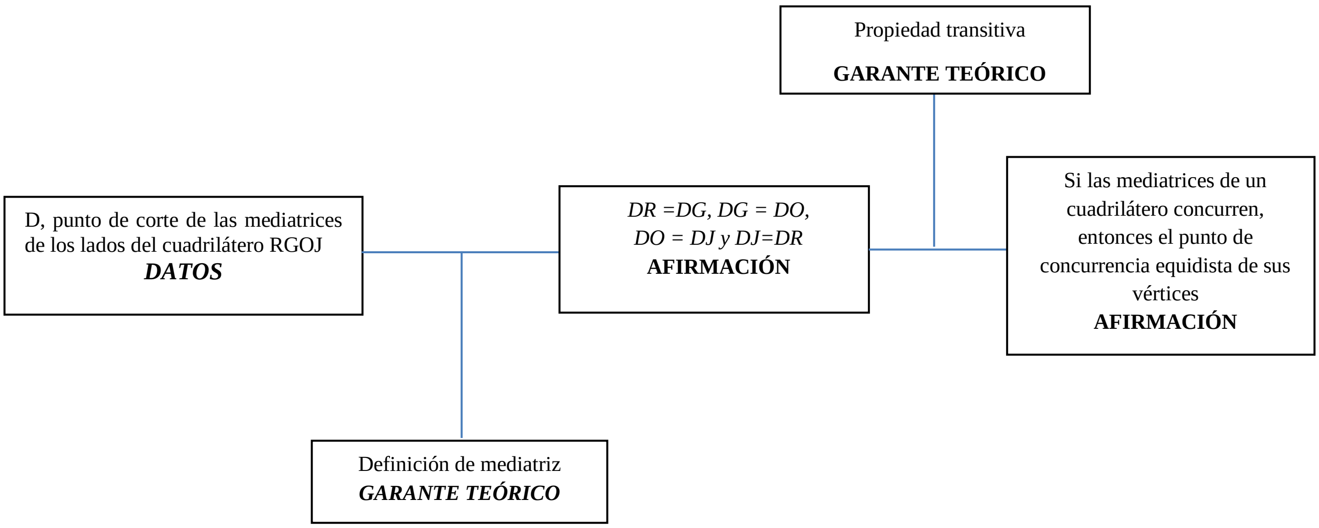
La cadena deductiva desarrollada por los estudiantes, no explicita la secuencia que se debe utilizar para realizar una prueba formal de la conjetura formulada. Se completaría la prueba sí se alude a la definición de mediatriz. A continuación presentamos los esquemas de Toulmin que representan los argumentos desarrollados.

Argumento 1: Si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, entonces las mediatrices de sus lados concurren en el centro de la circunferencia.





Argumento 2: Si las mediatrices de los lados de un cuadrilátero concurren, entonces el cuadrilátero se puede inscribir en una circunferencia con centro en el punto de concurrencia.

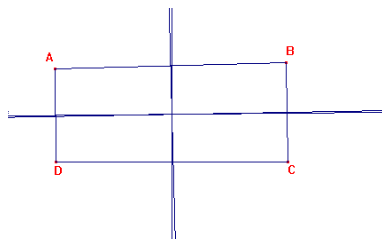


GRUPO BraDoLi

Fragmento 1: Exploración del cuadrilátero con apariencia de rectángulo

Después de hacer la anticipación en plenaria, sobre una posible respuesta al problema propuesto, y proponer el cuadrado, el rectángulo, el rombo y el trapecio, como posibles cuadriláteros en los que las mediatrices de sus lados concurren, los estudiantes comienzan la exploración utilizando el software de geometría dinámica Cabri. La primera construcción corresponde a un cuadrilátero con apariencia similar a la de un rectángulo, pero con lados opuestos no exactamente paralelos. Después de trazar las mediatrices de los lados del cuadrilátero y observar que éstas no concurren, descartan la exploración sobre esta figura e intentan utilizar un procedimiento que les permita obtener la construcción robusta del rectángulo, exploración de la que desisten rápidamente al no recordar los pasos de la construcción.

1	Profesor:	Vamos a encontrar un cuadrilátero en el cual las mediatrices de sus lados se corten en un solo punto.
2	Brayan:	[Construye el cuadrilátero ABCD y las mediatrices de los lados AB y AD]
3	Leidy:	¿Qué está haciendo?
3	Brayan:	Las mediatrices.
4	Leidy:	Ya hizo la mediatriz de ese [lado AB] y ese [lado AD], ahora haga la de éste [señala el lado BC] y éste [señala el lado DC]
5	Brayan:	[Construye las mediatrices que indica Leidy]



6	Profesor:	Déjame ver, hicimos el cuadrilátero, trazamos las mediatrices…
7	Leidy, Brayan y Lina:	Sí
8	Profesor:	¿Se cortan en un solo punto?
9	Leidy, Brayan y Lina:	Sí
10	Profesor:	¿Están seguros?
11	Lina:	Sí
12	Brayan y Leidy:	No [Borran el cuadrilátero ABCD].
16	Brayan:	[Es] como hicimos…la carta esa, ¿se acuerda? [En una actividad previa, los estudiantes aprendieron el procedimiento que permite la construcción robusta de un rectángulo, cuando intentaban construir un sobre para una carta].
17	Lina:	[Construye un segmento AB y traza dos rectas, una por cada extremo del segmento sin garantizar la perpendicularidad al segmento AB].
18	Leidy:	No, venga [Borra la construcción de Lina, y el grupo abandona la idea de la construcción robusta del rectángulo]

Este fragmento corresponde a la fase de exploración de casos. Los estudiantes deciden considerar el caso del rectángulo, para lo cual construyen un cuadrilátero ABCD con apariencia de rectángulo y trazan sus mediatrices [2]. A partir de la visualización y de los cuestionamientos del docente sobre la figura construida [8, 10], observan que las mediatrices no concurren [12]. Parecería que asumen que el problema es de construcción por lo que deciden realizar una figura a partir de un procedimiento que permite obtener un rectángulo. El procedimiento que usan los estudiantes se estudió en una sesión previa (construcción del sobre).

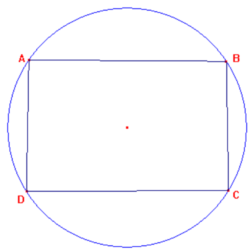
En cuanto a la actividad demostrativa, los estudiantes realizan una exploración centrada en la construcción de un rectángulo. Para ello, intentan construir un rectángulo ABCD y sus mediatrices. Cuando el docente los cuestiona acerca del corte de las mediatrices, en un primer momento afirman que las mediatrices se cortan en un solo punto [9, 11]. No obstante, al visualizar con más detalle la figura construida, observan que las mediatrices no concurren [12] y deciden perfeccionar la figura. A diferencia del trabajo en papel y lápiz en donde se tiene la costumbre de trabajar con figuras hechas a mano alzada y se aceptan figuras aproximadas, el trabajar con Cabri hace que los estudiantes procuren una construcción más exacta, en donde se visualice la concurrencia de las mediatrices de manera explícita, para poder afirmarla. Desafortunadamente no recuerdan el procedimiento y abandonan la exploración del rectángulo.

En este fragmento no hay lugar a la argumentación pues los estudiantes no se preguntan por qué el cuadrilátero construido no cumple la propiedad, o porque el rectángulo sí la cumpliría.

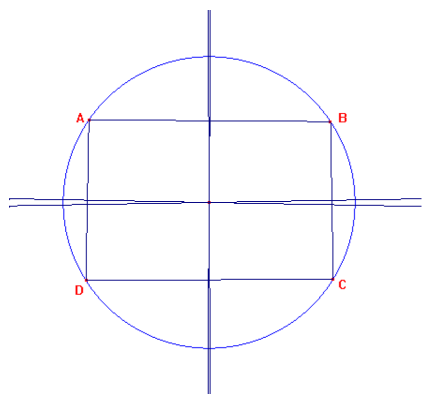
<u>Fragmento 2: Rectángulo “inscrito en una circunferencia”</u>

En un nuevo intento por construir un rectángulo de manera robusta, después de abandonar la idea de utilizar la propiedad de perpendicularidad de sus lados, Leidy utiliza como construcción auxiliar una circunferencia, inscribe un cuadrilátero con apariencia de rectángulo, traza sus mediatrices y observa que estas concurren en el centro de la circunferencia. Sin darse cuenta, Leidy encuentra la la solución a la tarea propuesta. Cuando el docente cuestiona al grupo sobre el carácter general de la construcción, los estudiantes hacen referencia a la figura construida, y no aprovechan la exploración dinámica del cuadrilátero inscrito.

18	Leidy:	[Construye una circunferencia y un cuadrilátero inscrito con apariencia de rectángulo].
19	Brayan:	Nombre las puntas… los vértices.



20	Leidy:	[Nombra los vértices del cuadrilátero, deja el mouse a Lina] Construya la mediatriz.
21	Lina:	[Construye las mediatrices de los lados del cuadrilátero inscrito].
22	Leidy:	Se cortan en este punto. Profe…



23	Profesor:	¿Qué paso?
24	Leidy y Brayan:	Profe, [Señala el centro de la circunferencia], aquí se cortan en un solo punto.
25	Profesor:	Y, ¿cómo lo hicieron? [pasan unos segundos] ¿Qué hicieron primero?
26	Lina:	Primero hicimos el punto A, el punto B, el punto C y el punto D
27	Profesor:	Si, y luego, ¿Qué hicieron? Espera, ven revisamos la construcción. Yo vi que hicieron primero una circunferencia, luego un punto, otro punto, el cuadrilátero, hicieron las mediatrices, y se cortaban. Listo, y ¿habrá otro cuadrilátero diferente a éste que me sirva?
28	Leidy:	Sí, [se dirige a Brayan] haga el rombo.

Este fragmento corresponde a la fase de exploración de la situación. Al explorar el caso del rectángulo como posible solución a la tarea, los estudiantes inscriben un cuadrilátero ABCD con apariencia de rectángulo [18, 19], en una circunferencia; después construyen las mediatrices de los lados y observan que éstas se cortan en un mismo punto, el centro de la circunferencia. De forma casual, los estudiantes realizan una construcción que reúne los elementos esenciales correspondientes a la generalización de la tarea propuesta, el cuadrilátero ABCD inscrito en la circunferencia [18, 19, 21]. No obstante, al visualizar el cuadrilátero ABCD como un rectángulo, no utilizan la opción de arrastre para realizar una exploración dinámica de la figura e identificar el cuadrilátero inscrito como solución general de la tarea [28]. Este hecho manifiesta que los estudiantes aún no están familiarizados con las posibilidades de exploración dinámica que proporciona el entono de geometría dinámica Cabri. Además, como ellos estaban intentando usar la circunferencia para garantizar que el cuadrilátero construido fuera un rectángulo, no se fijan en alguna propiedad del cuadrilátero relacionada con el hecho de estar inscrito en la circunferencia. Por eso, no identifican regularidades que permitan formular una conjetura de manera general [28]. Simplemente consideran que han logrado construir un rectángulo y constatan que en ese caso, las mediatrices concurren.

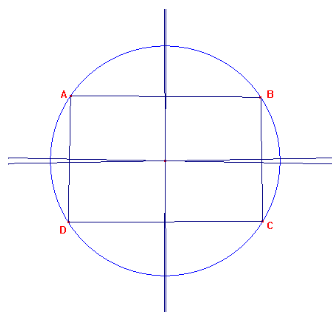
En cuanto a la actividad demostrativa, en el fragmento se encuentra una exploración estática, a partir de una construcción no robusta de un cuadrilátero con apariencia de rectángulo, que les permite a los estudiantes afirmar que éste es solución al problema Los estudiantes visualizan la concurrencia de las mediatrices, se dan por satisfechos al verificar que efectivamente en el rectángulo las mediatrices concurren, pero no ligan la concurrencia con la inscripción del rectángulo en la circunferencia. Tampoco realizan una verificación de las propiedades del rectángulo para constatar que efectivamente es una posible solución al problema.

No se aprecia actividad argumentativa. Los estudiantes no buscan una justificación de la concurrencia. Tampoco se preguntan por qué en este caso las mediatrices de lados opuestos no coinciden. Cuando el profesor insinúa la búsqueda de otro cuadrilátero, quizás pretendiendo que los estudiantes usen el arrastre, los estudiantes abandonan la construcción y comienzan una nueva exploración.

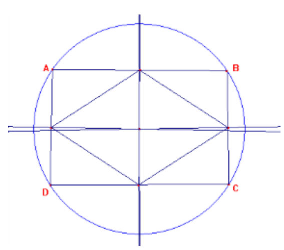
Fragmento 3: Exploración del rombo

En este fragmento, los estudiantes utilizan una figura previamente construida para explorar si el rombo cumple la condición de que las mediatrices de los lados concurran. La figura constaba de un cuadrilátero ABCD con apariencia de rectángulo, inscrito en una circunferencia, y sus mediatrices. Los estudiantes usan los cortes de las mediatrices con los lados del cuadrilátero ABCD como vértices de otro cuadrilátero que consideran un rombo y asumen que las intersecciones se encuentran en los puntos medios de los lados del cuadrilátero ABCD. Trazan las mediatrices y descartan el rombo como posible solución a la tarea.

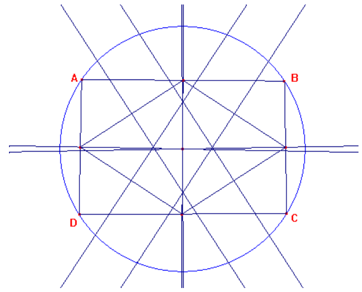
27	Profesor:	¿Habrá otro cuadrilátero diferente a éste [señala un cuadrilátero inscrito con apariencia de rectángulo] en el que las mediatrices de sus lados concurran?



28	Leidy:	Sí, [se dirige a Brayan quien tiene el control del mouse] haga el rombo.
29	Profesor:	Y, ¿No puedo utilizar la construcción [hecha] para encontrar otro cuadrilátero? [Después de esta intervención, el profesor se retira a interactuar con otro grupo].
30	Leidy:	Sí, el rombo.
31	Lina:	[Construye un cuadrilátero usando como vértices los puntos de corte de las mediatrices del cuadrilátero ABCD con los lados].



32	Leidy:	Ahora tracemos las mediatrices [construye las mediatrices de los lados del cuadrilátero con apariencia de rombo].



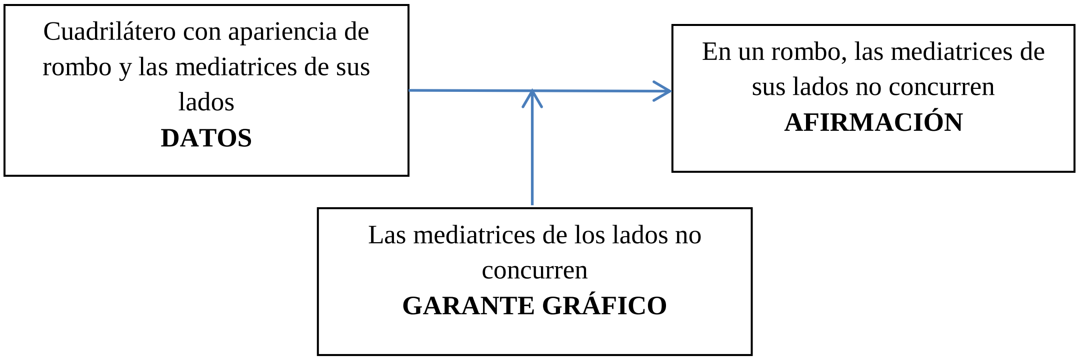
No, ese no sirve, porque no se encuentran todas las mediatrices en un mismo punto.

33 Brayan: Profe, no se pudo.

Caracterizamos este fragmento como una exploración de un caso en la que los estudiantes descubren que en el rombo las mediatrices de sus lados no concurren. Después de construir el cuadrilátero que resulta de unir lo que consideran los puntos medios de los lados del cuadrilátero con apariencia de rectángulo y trazar las mediatrices de sus lados, descartan esta opción al observar que las mediatrices no concurren [32, 33]. En la exploración los estudiantes hacen uso de la propiedad de mediatriz que afirma que ésta pasa por el punto medio del segmento correspondiente.

Con respecto a la actividad demostrativa, los estudiantes utilizan la visualización para realizar la exploración y determinar que en el rombo no se verifica que las mediatrices de sus lados concurran. A pesar de no contar con una construcción robusta del rectángulo, utilizan este cuadrilátero como figura auxiliar para obtener el rombo. Aunque no se hace explícito en el fragmento, esta construcción se puede justificar utilizando criterios de congruencia de triángulos que permiten establecer una cadena argumentativa para comprobar la congruencia de los lados del cuadrilátero inscrito en el rectángulo.

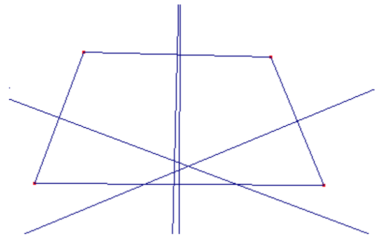
Los estudiantes hacen una argumentación por contraejemplo para descartar el rombo como posible solución a la tarea. De manera implícita, al comienzo del fragmento se hace la anticipación: en el rombo las mediatrices de los lados concurren [28], hipótesis que se pone a prueba realizando la construcción de un rombo y sus mediatrices [31, 32], por último, utilizando la visualización, los estudiantes concluyen que el rombo no cumple la propiedad de los cuadriláteros cíclicos [33]. El esquema argumentativo sería como el siguiente:



<u>Fragmento 4: Uso del arrastre para encontrar una solución</u>

En este fragmento, los estudiantes continúan buscando cuadriláteros conocidos cuyas mediatrices de los lados concurran. En particular trabajan con un cuadrilátero que tiene apariencia de trapecio isósceles, pues es la figura prototípica que recuerdan. No obstante, no están familiarizados con una construcción robusta de la figura, por lo que se valen de diversas estrategias para realizar la construcción, una de las cuales consiste en inscribir un cuadrilátero con apariencia de trapecio en una circunferencia. Esto los lleva a encontrar, sin darse cuenta, una solución al problema, solución que descartan por no ser el prototipo de trapecio que buscan. Al final del episodio, mediante la intervención del profesor se dan cuenta de que el cuadrilátero no tiene que tener una forma particular para que las mediatrices concurran.

45	Profesor:	Busquemos otro cuadrilátero, en el cual usted pueda ver las cuatro mediatrices diferentes [se refiere a un cuadrilátero en el que las mediatrices no coincidan.]
46	Brayan:	¡Ah!, El que habíamos hecho
47	Leidy:	Profe, […] ¿el trapecio ya lo comprobaron?
48	Profesor:	Pues, busquen trapecio u otro [cuadrilátero], necesito es otro cuadrilátero, diferente a esos [señala los que están relacionados en el tablero], a ver si se cumple.
49	Lina:	[Construye un cuadrilátero con apariencia de trapecio isósceles utilizando la herramienta segmento].
50	Leidy:	No [es solución], porque no tiene los lados iguales.
51	Lina:	[Construye las mediatrices de los lados]



52 Leidy: No tiene los lados iguales, por eso no se cortan.

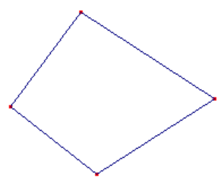
53 Profesor: Bien, ¿Se cortaron?

54 Leidy: No. Pero profe, es porque están desiguales los lados.

55 Profesor: Pero entonces busquemos…

56 Leidy: Tenemos que tener dos lados iguales.

57 Lina: Entonces hagamos… [Borra la figura construida y hace un cuadrilátero utilizando la herramienta polígono].



58 Leidy: ¿Qué es eso?

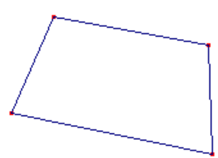
59 Lina: Tiene cuatro lados.

60 Leidy: Pero no son iguales.

61 Lina: ¿Usted cómo sabe?

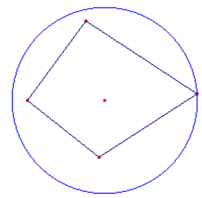
62 Leidy: Porque a simple vista se ve.

63 Lina: [Modifica la figura con la opción de arrastre, intentando dar la apariencia de trapecio isósceles].



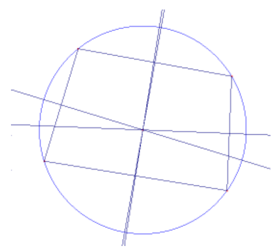
64 Brayan: Tiene que estar a la misma distancia.

65 Lina: Para medir, hagamos esto [Construye una circunferencia con centro en el interior del cuadrilátero; uno de los vértices del cuadrilátero queda en la circunferencia]



66 Brayan: No… tienen que ser el centro, el punto medio.

67 Lina: Este punto [un vértice del cuadrilátero] debe quedar aquí [en la circunferencia], este punto [otro vértice] debe quedar aquí [en la circunferencia]y este punto [otro vértice] debe quedar aquí [en la circunferencia. Arrastra los vértices del cuadrilátero para que todos queden ubicados sobre la circunferencia y construye las mediatrices]



68 Leidy: ¿O sea que se encuentran? No se pueden encontrar, no hay una [figura] que sea así… [realiza una seña con las manos que no se ve en el video. Parece que se refiere a que el cuadrilátero construido no tiene forma de rectángulo, ni de paralelogramo, ni de trapecio]. [Los estudiantes abandonan la construcción].

69 Brayan: [Observa al grupo que tiene al lado en donde el profesor y los estudiantes están analizando un trapecio]. Ese era el que estábamos haciendo. [Se refiere al trapecio que están construyendo y discutiendo con el profesor en otro grupo][Borra la construcción, dejando accidentalmente la circunferencia; al lado hace un cuadrilátero con apariencia de trapecio].

70 Leidy: ¡Profesor! Estábamos haciendo éste [le muestra un cuadrilátero con apariencia de trapecio] pero es que no se como se llama.

71 Profesor: Yo no les pedí que fuera una figura especial. Solo les pedí una condición. ¿Cuál condición?

72 Leidy: ¿Qué tuvieran los lados iguales?

73 Profesor: No. Yo dije "vamos a construir un cuadrilátero que…

74 Leidy: Que las mediatrices se corten en un mismo punto.

75 Profesor: Esa fue mi condición. Yo lo quiero ver.

79	Lina:	[Traza las mediatrices en el cuadrilátero construido por Brayan y utiliza la opción de arrastre para tener un cuadrilátero que cumple la condición. Aunque tiene trazada una circunferencia en la pantalla, no la usa para inscribir el cuadrilátero] Ese.
82	Profesor:	Ese cuadrilátero me sirve ¿Se cortan en un mismo punto las mediatrices?
83	Estudiantes:	Sí.
93	Profesor:	¿Tiene algo especial ese cuadrilátero? Es decir…
94	Brayan:	No.

Con relación a las fases de resolución de problemas, la actividad de los estudiantes se centra en las fases de anticipación, exploración de casos y de exploración libre. Inicialmente, los estudiantes consideran como posible solución al trapecio, uno de los cuadriláteros que se propuso al comenzar la clase [47]; Construyen un cuadrilátero con apariencia de trapecio [49]. Antes de trazar las mediatrices, Leidy afirma que el cuadrilátero construido no es solución al problema porque no tiene lados iguales [50]. A pesar de lo dicho por Leidy, Lina continúa la exploración construyendo las mediatrices del cuadrilátero [51] y como éstas no concurren Leidy vuelve a mencionar que la explicación de la no concurrencia es que los lados del cuadrilátero no son iguales. Cuando el profesor les pregunta si las mediatrices se cortaron [53], Leidy específica que tiene que haber dos lados iguales [56]. Quizás Leidy está pensando que la solución se restringe a rectángulos. A continuación borran la figura y Lina propone reiniciar la exploración a partir de un cuadrilátero construido con la opción polígono [57]. Su sugerencia es objetada por Leidy, quien insiste que en el cuadrilátero tiene que tener lados iguales [60] . Aunque Lina intenta obtener una configuración como la del trapecio isósceles, tiene dificultades para lograr que los lados no paralelos sean congruentes [63]. Brayan le indica que los lados no paralelos deben ser iguales [64]. Entonces Lina sugiere recurrir a una circunferencia, como mecanismo de control de las longitudes de los lados. Por ello, traza una circunferencia con centro en el interior del polígono y con uno de los vértices del cuadrilátero sobre ella [65]. Arrastran los vértices hasta hacerlos coincidir con puntos de la circunferencia y trazan las mediatrices. [67]. Como los vértices no son realmente puntos de la circunferencia, el cuadrilátero no es un caso especial y no se visualiza la concurrencia exacta de las mediatrices, Leidy descartar la figura, refiriéndose a que no es una figura conocida ni sus mediatrices concurren [68]. El grupo decide abandonar la exploración y, al no saber qué hacer, deciden observar al grupo de al lado, en donde el profesor y los estudiantes analizan un trapecio. Brayan decide hacer un cuadrilátero y arrastrar los vértices para que tenga apariencia de trapecio, llaman al profesor y le preguntan el nombre del cuadrilátero. [70]. El profesor les pregunta por la propiedad que están buscando y Leidy se refiere a la igualdad de los lados [74], confirmando que ella tiene esa como hipótesis, aunque no ha podido descartarla ni confirmarla. Mediante una exploración dinámica, usando la opción de arrastre, los estudiantes logran un cuadrilátero con apariencia de trapecio en el que las mediatrices concurren [67]. Es decir, logran una solución al problema, pero no hacen una generalización.

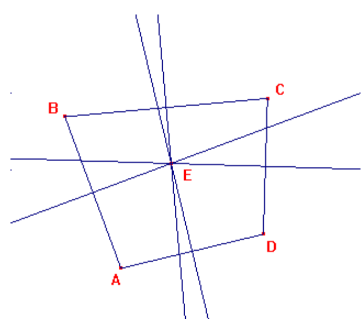
En cuanto a la actividad demostrativa, en el fragmento se encuentran varios elementos de la exploración en busca de un invariante. Por medio de la visualización, descartan que los cuadriláteros iniciales construidos sean solución al problema, al percibir que sus mediatrices no concurren y aceptan que el último cuadrilátero sí es solución al problema. También descartan, mediante la visualización que el cuadrilátero construido por Lina [57] tiene lados congruentes. En la exploración se combinan las estrategias de exploración por casos estática y dinámica, al intentar construir un trapecio isósceles. Adicionalmente, se hace uso de una construcción auxiliar para intentar controlar las longitudes de los lados. Probablemente los estudiantes quieren hacer uso del hecho geométrico de la congruencia de los radios de una circunferencia pues Brayan señala que el centro de la circunferencia debe quedar “en el punto medio” quizás refiriéndose a que debe equidistar de los vértices del cuadrilátero. A pesar de la riqueza de la exploración, y de que los estudiantes hacen una configuración que les hubiera permitido llegar a la propiedad general, cuando deciden inscribir el cuadrilátero en una circunferencia, les faltó avanzar hacia una construcción robusta de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia y sus mediatrices, para llegar a la solución general. En cuanto a la conjeturación, en este fragmento se observa un avance respecto de los anteriores pues Leidy aventura una hipótesis que podría ser considerada una especie de conjetura: si el cuadrilátero tiene dos lados iguales, sus mediatrices concurren. Su conjetura es verificada con la última construcción y, por lo menos hasta el momento, no parece que Leidy tuviera elementos para modificarla.

A pesar de aventurar una especie de conjetura, en el fragmento no se observa argumentación alguna a favor ni en contra de la idea de Leidy.

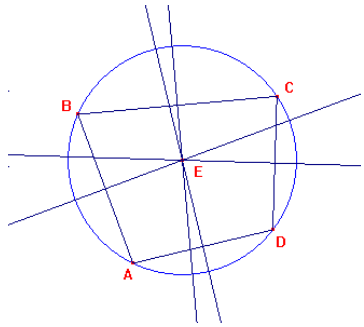
<u>Fragmento 5: Proceso de justificación</u>

Después de utilizar la exploración dinámica para encontrar un cuadrilátero sin características especiales en el cual se verifica la propiedad de concurrencia de las mediatrices de sus lados, los estudiantes establecen que el punto de concurrencia se encuentra a la misma distancia de los vértices del cuadrilátero. Esta afirmación pone en juego la definición de circunferencia como lugar geométrico pues se utiliza como garante gráfico para justificar dicha equidistancia. En este episodio se puede observar como los estudiantes, con ayuda del profesor, utilizan argumentos del sistema teórico local para construir un razonamiento deductivo que justifica la conjetura: si en un cuadrilátero las mediatrices de sus lados concurren, entonces el punto de concurrencia está a la misma distancia de cada uno de los vértices del cuadrilátero.

105	Profesor:	¿Qué característica tiene el punto de concurrencia de las mediatrices?
106	Lina:	Pues que el punto E [punto de concurrencia de las mediatrices] está a la misma distancia del segmento AB.



107	Profesor:	¿Del segmento AB?
108	Brayan:	De los puntos A, B, C y D. Entonces el punto E esta dependiendo de las mediatrices y como…[Traza la circunferencia con centro en el punto E y que pasa por los vértices del cuadrilátero]



112	Leidy:	¡Um! Sí. Sería: el punto E está a la misma distancia de los puntos A, B, C y D.
113	Profesor:	Bueno. Eso es lo que ustedes me dicen. ¿Cómo se podría demostrar?
114	Brayan:	Con una circunferencia.
115	Lina:	No. Además por que si…
116	Profesor:	No. Pero, espérate, primero vamos a escuchar el argumento de Brayan.
117	Brayan:	Pues, yo hice una circunferencia… que se puede ver que las mediatrices se unen en un solo punto. Entonces hicimos una circunferencia en ese punto para ver si estaba a la misma distancia de los otros puntos.
118	Profesor:	¿Y lo puedo garantizar por?
119	Brayan:	Por la circunferencia.
121	Leidy:	Porque estos serían radios de la circunferencia. Porque este punto [señala el punto B]está dependiendo de la circunferencia… el radio de aquí hasta aquí [radio BE] sería el mismo que de aquí hasta aquí [radio AE]
		[…]
126	Lina:	Porque todos los radios que se trazan en una circunferencia son iguales.
127	Profesor:	Bien. Si no utilizamos ahora ese argumento de la circunferencia, ¿Qué otro hecho se puede utilizar para garantizar que el punto E está a la misma distancia de los vértices?
128	Leidy:	Porque en la mediatriz del segmento AB, cualquier punto que se trace dentro de esa mediatriz está a la misma distancia de A que de B; en la mediatriz del segmento BC, cualquier punto que esté en la mediatriz del segmento BC, está a la misma distancia de B que de C.
131	Lina:	Cualquier punto que esté en la mediatriz del segmento CD, está a la misma distancia de D que de C.

132	Brayan:	Cualquier punto que esté en la mediatriz del segmento DA, está a la misma distancia de D que de A. Todas las distancias son iguales
141	Lina:	Que todos los puntos que se tracen dentro de la mediatriz van a tener la misma distancia de todos los puntos.
143	Profesor:	¿y por qué?
147	Lina:	Si E está a la misma distancia de A que de B, esta a la misma distancia de B que de C, que de C que de D y que de D que de A. Entonces como dijo el profesor: si yo tengo la misma plata suya [señalando a Brayan] y él [Brayan] tiene la misma plata de ella [Leidy], entonces por lo general, yo [Lina] tengo la misma plata que ella [Leidy]. Es como igual, E está a la misma distancia de A, B, C D ¡Y Ya!

Las fases de resolución de problemas que se identifican en este fragmento corresponden a la exploración del contenido y selección y encadenamiento de argumentos teóricos. Los estudiantes, con ayuda del profesor hacen dos intentos de encadenamiento de argumentos de manera deductiva.. Después de que se ha encontrado un cuadrilátero no especial que soluciona la tarea propuesta, se pide a los estudiantes mencionar alguna propiedad del punto de concurrencia de las mediatrices (punto E). Brayan afirma que los puntos A, B, C y D se encuentran a la misma distancia de E [108] y que ese punto está dependiendo de las mediatrices. Construye una circunferencia con centro en E y verifica que ésta pasa por los puntos A, B, C y D. Al hacerlo, Leidy confirma la equidistancia de E a cada punto. Además de hacer una verificación, Brayan usa la circunferencia para esbozar una explicación de la equidistancia, utilizando el teorema 1 trabajado en la secuencia de enseñanza: Todos los radios de una circunferencia son congruentes. Es decir, Brayan usa como garante visual que AE, BE, CE y DE son radios de una circunferencia y por lo tanto las distancias de E a todos ellos son las mismas [117 y 120] Lina y Leidy contribuyen a la argumentación, haciendo explicito el uso del teorema 1 en sus intervenciones: "*el radio BE sería el mismo que el radio AE"* [121], porque "*todos los radios que se trazan en un circunferencia son iguales*" [126]. Para los estudiantes, el garante gráfico que proporciona la circunferencia con centro en E y que contiene los puntos A, B, C y D, resulta suficiente para justificar la equidistancia y no se animan a buscar otra forma de justificar este hecho utilizando argumentos que proporciona el sistema teórico local, en este caso, la definición y propiedades de la mediatriz. Como el docente percibe falta de autonomía para continuar con el proceso de justificación, pregunta acerca de otra forma de justificar la equidistancia [127]. Brayan, Leidy y Lina comienzan a dar una explicación, refiriéndose a la definición de la mediatriz de un segmento como el conjunto de puntos que equidistan de los extremos de éste, mencionando que cualquier punto de la mediatriz de $\overline{AB}$ esta a la misma distancia de A que de B, cualquier punto de la mediatriz de $\overline{BC}$ esta a la misma distancia de B que de C [128], cualquier punto de la mediatriz de $\overline{CD}$ esta a la misma distancia de C que de D [131] y, cualquier punto de la mediatriz de $\overline{DA}$ esta a la misma distancia de D que de A [132]. Por último, completan la justificación utilizando la propiedad transitiva a partir de una analogía con un caso real [147].

Se evidencian acciones propias del proceso de justificación. Los estudiantes seleccionan los elementos adecuados para organizar una deducción que conlleve a la justificación de la conjetura formulada. Aunque no se organizan los argumentos en una cadena deductiva que obedezca a los estándares actuales de la comunidad matemática, algunos de los garantes que utilizan pertenecen al sistema teórico local; por ejemplo: Teorema 1 Todos los radios de una circunferencia son congruentes y, la Definición 4 Mediatriz de un segmento como lugar geométrico. Por tal razón, el producto que se obtiene del proceso de justificación, se puede interpretar como una demostración.

Con respecto a la argumentación, en las intervenciones de Leidy, Brayan y Lina, se puede identificar los datos, garantes y afirmaciones que permiten utilizar el modelo de Toulmin para representar el razonamiento de los estudiantes. Leidy [112] afirma que el punto E está a la misma distancia de los puntos A, B, C y D, esta propiedad la justifican los estudiantes utilizando como dato la representación gráfica del cuadrilátero ABCD y las mediatrices de sus lados y, como garantes, la construcción de la circunferencia circunscrita a ABCD y el Teorema 1 del sistema teórico local.

Cuadrilátero ABCD en el que las mediatrices de sus lados concurren
DATOS

El punto de concurrencia de las mediatrices del cuadrilátero ABCD equidista de sus vértices
AFIRMACIÓN

Construcción de la circunferencia circunscrita a ABCD
GARANTE GRÁFICO
Teorema 1: Todos los radios de una circunferencia son congruentes
GARANTE TEÓRICO

Además de los garantes utilizados en el esquema deductivo anterior para justificar la afirmación "el punto E está a la misma distancia de los puntos A, B, C y D", los estudiantes utilizan como garante la definición de mediatriz y la propiedad transitiva, lo que permite desarrollar un proceso deductivo sin utilizar garantes gráficos, haciendo uso exclusivamente de las propiedades que brinda el sistema teórico local. Esta argumentación se puede representar en el siguiente esquema:

Cuadrilátero ABCD en el que las mediatrices de sus lados concurren
DATOS

El punto de concurrencia de las mediatrices del cuadrilátero ABCD equidista de sus vértices
AFIRMACIÓN

- Definición de mediatriz de un segmento como lugar geométrido
- Propiedad transitiva

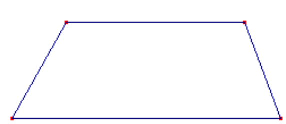
GARANTE TEÓRICO

GRUPO FeSe

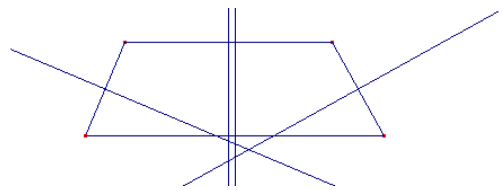
Fragmento 1: Exploración del cuadrilátero con apariencia de trapecio

En este fragmento los estudiantes realizan una primera exploración para solucionar la tarea propuesta por el docente, que consiste en buscar un cuadrilátero en el cual las mediatrices de sus lados concurran. Los estudiantes comienzan su proceso de exploración construyendo un cuadrilátero con apariencia de trapecio, trazan sus mediatrices y al observar que estas no concurren, descartan el trapecio como posible solución.

1	Profesor	Voy a pensar en cuales cuadriláteros yo puedo llegar a suponer o a prever, que las mediatrices de sus lados se cortan en un mismo punto.
2	Felipe	Hagamos el experimento con este. [Toma el mouse y construye un cuadrilátero con apariencia de trapecio, usando la herramienta segmento].



3	Sebastián	En un trapecio. [Traza las mediatrices del cuadrilátero con apariencia de trapecio]. No en un trapecio no.



El fragmento se puede ubicar en la fase de producción de una conjetura: exploración. Los estudiantes comienzan a enfrentar el problema mediante la exploración de casos. Proponen comenzar estudiando el caso del trapecio, realizan la construcción de una figura representativa [2] del trapecio, trazan las mediatrices de sus lados [3] y, a partir de la visualización [3], descartan la opción del trapecio al observar que las mediatrices no concurren.

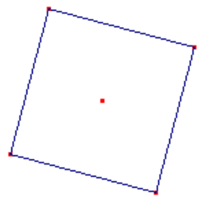
En el proceso de conjeturación los estudiantes realizan una visualización apoyados en una construcción blanda. Una vez construido un cuadrilátero con apariencia de trapecio y construidas sus mediatrices, los estudiantes visualizan que éstas no concurren y descartan al trapecio como posible solución.

No se realiza una argumentación.

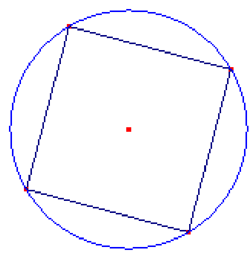
Fragmento 2: Exploración del cuadrado

Después de descartar el trapecio como posible solución al problema, los estudiantes comienzan la exploración del cuadrado. Para obtener una construcción robusta de este cuadrilátero, utilizan la herramienta polígono regular. Construyen una circunferencia que contiene los vértices del cuadrilátero y las mediatrices de los lados del cuadrado. Por último, al observar que las mediatrices concurren en un punto (el centro de la circunferencia y del polígono regular), concluyen que el cuadrado resulta ser una solución al problema.

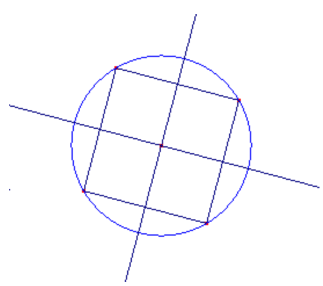
10	Felipe	Dibujemos un cuadrado.
11	Sebastián	Con polígono regular [Traza un cuadrilátero usando la herramienta polígono regular].



12	Felipe	Saque las mediatrices. No, no, espere, no saquemos las mediatrices, hagamos algo más interesante.
13	Sebastián	¿Cómo que?
14	Felipe	[Toma el mouse y traza una circunferencia con centro en el centro del polígono, y que pasa visualmente por los vértices del cuadrado]

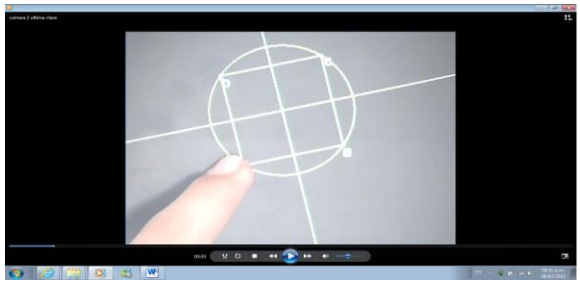


15	Sebastián	¡Ah!, para ver si…
16	Felipe	¡Ah!, No. Espere. se me corrió un poquito… vuelva a hacer el círculo. Tocaba alargarlo más. [Repite la construcción de la circunferencia con centro en el centro del polígono pero esta vez hace que los vértices del cuadrado si pertenezcan a ella. Después traza las mediatrices de los lados del cuadrado]. En un cuadrado perfecto.



18	Profesor	Espere. O sea que… ¿Ustedes suponen que ahí las mediatrices se cortan en un solo punto?
19	Felipe	Sí. Como nosotros usamos polígono regular para hacer el cuadrado, ahí nos daba el punto centro del cuadrado. Del punto centro nosotros sacábamos una circunferencia, la cual trazábamos hasta un punto que podría… [Señala uno de los vértices del cuadrado] llámelo A, este B, este C y este D. [Señalando los otros vértices del cuadrado] Para poder explicarlo mejor.
20	Sebastián	Sí, queda mejor.

21 Felipe — Lo trabajamos hasta el punto A. [Se refiere a que la circunferencia se construyó con centro en el centro del cuadrado y radio la medida del centro a *A*]. De este punto A, abarca también el punto B, el C y el D. Entonces ahí ya comprobamos eso.



22 Sebastián — Sí. Eso queda comprobado, son como radios de la misma circunferencia.

23 Felipe — Sí, por que la misma circunferencia tiene los radios congruentes.

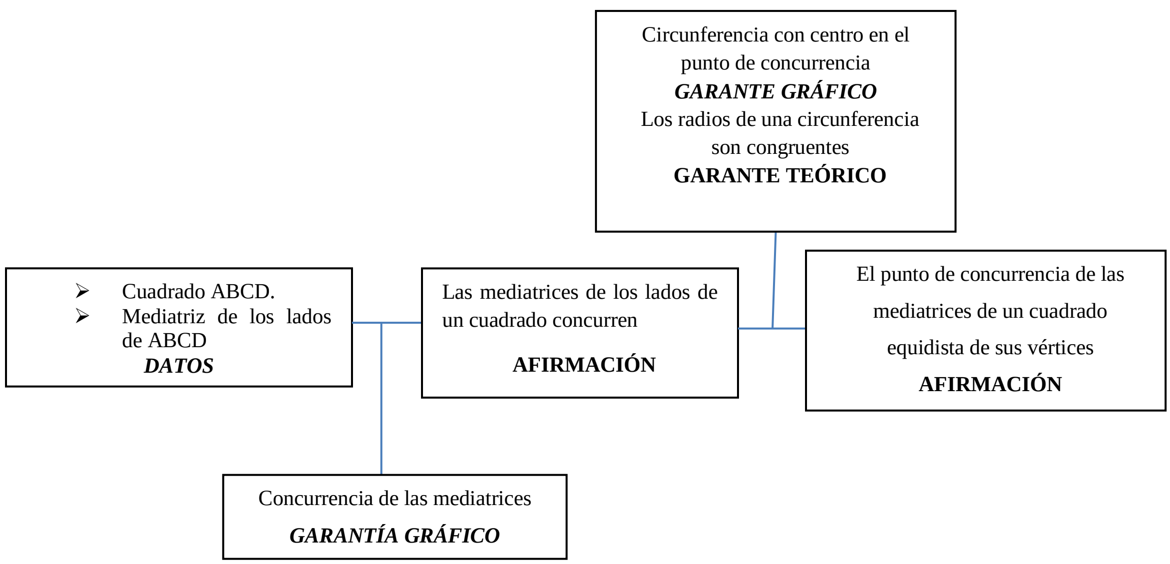
24 Sebastián — Y se cortan en un solo punto.

25 Felipe — Llamemos a este punto F. [Señala el centro de la circunferencia]

Este fragmento corresponde a la fase de resolución de problemas denominada producción de una conjetura: los estudiantes proponen una solución al problema, construyen un cuadrado y las mediatrices de sus lados [11 y 16] y, usan la visualización para verificar que si cumple la condición.

La actividad de los estudiantes se puede enmarcar dentro del proceso de conjeturación: a partir de la construcción robusta de un cuadrado, se logra establecer de manera implícita la conjetura: las mediatrices de los lados de un cuadrado concurren [16]. En este fragmento los estudiantes han encontrado un caso en el que se cumple la propiedad del problema propuesto. Adicionalmente, los estudiantes enriquecen la figura, espontáneamente, trazando la circunferencia circunscrita. Felipe no explica para qué hace tal circunferencia, sólo comenta que puede ser algo interesante [16]. La idea de construir la circunferencia circunscrita pudo resultar del hecho de que en Cabri, al construir el cuadrado usando la herramienta polígono regular, queda señalado el centro del cuadrado. Una vez trazadas las mediatrices, los estudiantes se dan cuenta que éstas concurren. Cuando el docente interviene y cuestiona a los estudiantes sobre la concurrencia de las mediatrices de los lados del cuadrado [18], Felipe y Sebastián [19-22] intentan una justificación refiriéndose a la construcción auxiliar de la circunferencia circunscrita y al hecho de que los segmentos FA, FB, FC y FD son radios de una circunferencia [22] y son congruentes [23]. Aunque no lo mencionan explícitamente, Felipe y Sebastián muestran que el punto de concurrencia de las mediatrices equidista de los cuatro vértices del cuadrado, pues coincide con el centro de la circunferencia circunscrita.

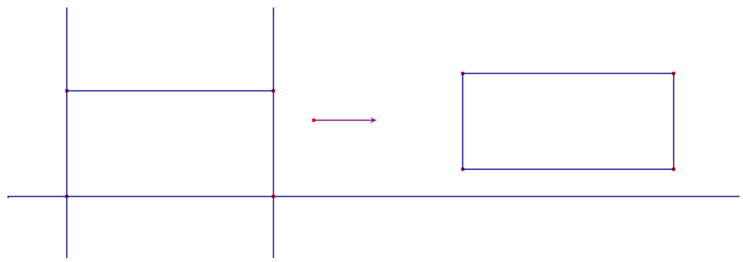
En las intervenciones 19 a 25 de Felipe y Sebastián podemos reconocer un argumento para justificar que el punto de concurrencia de las mediatrices equidista de los vértices del polígono. Felipe menciona que las mediatrices si se cortan en un sólo punto [19, 24], que es el centro de una circunferencia con centro en F, centro del cuadrado, y radio FA. Los puntos B, C y D quedan sobre la misma circunferencia [21], por lo que FA, FB, FC y FD son radios de la misma circunferencia [22] y como los radios de una circunferencia son congruentes [23], se tiene la equidistancia.



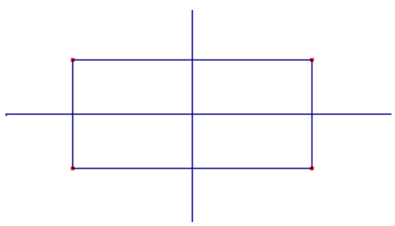
<u>Fragmento 3: Exploración del rectángulo</u>

Una vez que los estudiantes han reconocido que en el cuadrado las mediatrices de sus lados se cortan en un solo punto deciden explorar el rectángulo para ver si cumple la condición que da solución al problema planteado. Comienzan la exploración realizando la construcción robusta del rectángulo y las mediatrices de sus lados. Al percatarse de que las mediatrices de sus lados se cortan en un solo punto, construyen la circunferencia con centro en el punto de concurrencia de las mediatrices y que contiene uno de los vértices del rectángulo. Finalmente, al observar que la circunferencia contiene todos los vértices del rectángulo, concluyen que este cuadrilátero, al igual que el cuadrado, soluciona el problema propuesto.

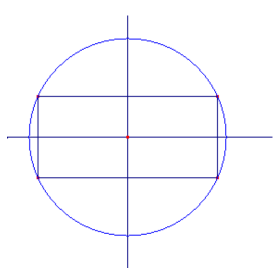
26	Felipe	Intentemos hacerlo con un rectángulo. [Construye un rectángulo usando rectas perpendiculares].



29	Sebastián	Listo.
30	Felipe	Ahora vamos a trazar las mediatrices. [Construye las mediatrices con la herramienta mediatriz]



31	Sebastián	Se encuentran las cuatro en un solo punto.
32	Felipe	En el punto centro. Haga la circunferencia aquí. [Se refiere a trazar una circunferencia con centro en el punto de concurrencia de las mediatrices y que pase por uno de los vértices del rectángulo].
35	Sebastián	[Construye una circunferencia con centro en el punto de concurrencia de las mediatrices y que contiene uno de los vértices del rectángulo].



48	Felipe	¡También!

49	Sebastián	También pasa por todos [los vértices]. Este nos sirve también para el ejercicio que nos pusieron.

Este fragmento se ubica en la fase de resolución de problemas denominada producción de una conjetura: los estudiantes proponen explorar una figura específica y usan la visualización para verificar si ésta cumple la condición.

Teniendo en cuenta el marco de referencia de la actividad demostrativa, este fragmento corresponde a una exploración estática basada en un caso, en la que a partir de la construcción robusta de un rectángulo [26, 29], al trazar las mediatrices y visualizar que concurren, establecen de manera implícita, la conjetura: las mediatrices de los lados de un rectángulo concurren [31]. Además, los estudiantes utilizan una construcción auxiliar que les permite visualizar la equidistancia del punto de concurrencia a los vértices del rectángulo. Mencionan que el punto de concurrencia de las mediatrices corresponde al centro de una circunferencia que circunscribe el rectángulo [49]. La construcción de la circunferencia circunscrita parece constituirse en un elemento de comprobación de la concurrencia de las mediatrices. Este hecho permite a los estudiantes un primer acercamiento a la invariante que presentan los cuadriláteros cuyas mediatrices concurren.

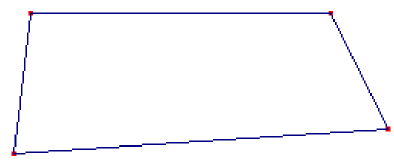
Desafortunadamente los estudiantes no elaboran una argumentación para explicar para qué hacen la circunferencia circunscrita o porque en los rectángulos las mediatrices concurren.

Fragmento 4: Exploración estática de un cuadrilátero no especial

Después de reconocer que en el cuadrado y el rectángulo las mediatrices de sus lados concurren, los estudiantes comienzan la exploración de un cuadrilátero no especial. La exploración comienza con la construcción de un cuadrilátero utilizando la herramienta segmento y continúa con el trazo de las mediatrices de sus lados, al percatarse que éstas no concurren, descartan la construcción y anticipan una propiedad que aparentemente deben pres entar los cuadriláteros para que se verifique la concurrencia de las mediatrices de sus lados.

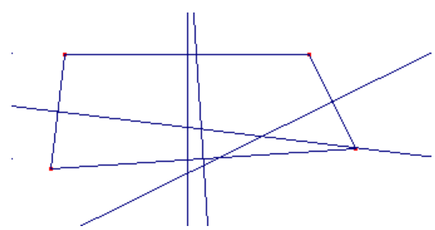
56 Profesor: Busquemos otro cuadrilátero, diferente a los que ya hemos hecho, en el que las mediatrices de sus lados se corten en un solo punto.

57 Sebastián: ¿Cuál otro podríamos hacer? [Traza un cuadrilátero cualquiera en la pantalla]



59 Felipe: [Refiriéndose a la figura construida por Sebastián] No pero es que eso… debe ser una figura en la que nosotros tenemos que saber que es lo que estamos haciendo.

60 Sebastián: [Traza las mediatrices del cuadrilátero antes citado, aunque una de ellas está mal construida.



61 Felipe: Espere, sí se encuentran [se refiere a las mediatrices de la figura].

63 Sebastián: Pero no se encuentran todas en un solo punto. No nos sirve la figura.

68 Felipe: Necesitamos encontrar una [cuadrilátero] que los ángulos sean de 90 grados.

Este fragmento se puede ubicar en la fase de resolución de problemas producción de una conjetura pues, después de haber verificado que en el cuadrado y el rectángulo las mediatrices de sus lados concurren, los estudiantes continúan la exploración con un cuadrilátero no especial que construyen con ayuda de la herramienta segmento [56]. Cuando trazan las mediatrices del cuadrilátero [60] y se percatan que éstas no concurren [63], descartan la figura y, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en las anteriores exploraciones de casos, formulan implícitamente la conjetura: si un cuadrilátero tiene los ángulos internos de 90° entonces las mediatrices de sus lados concurren [68].

En cuanto a las acciones de la actividad demostrativa que corresponden al proceso de conjeturación se evidencian durante el desarrollo del fragmento la visualización, que juega un papel primordial, pues los estudiantes se basan en ella para descartar el cuadrilátero construido como posible solución al problema propuesto [61, 63]. El proceso de exploración se puede caracterizar como una exploración estática, Felipe y Sebastián no utilizan la opción de arrastre como herramienta que les permita realizar una exploración dinámica para encontrar las invariantes que presentan los cuadriláteros solución. Sin embargo, la exploración estática de casos particulares los incita a presuponer algunas condiciones bajo las cuales los cuadriláteros resultan ser solución a la tarea propuesta, esta situación se refleja en una primera generalización que proponen los estudiantes con relación a los ángulos internos del cuadrilátero [68].

No se aprecia argumentación alguna.

<u>Fragmento 5: Exploración del trapecio isósceles</u>

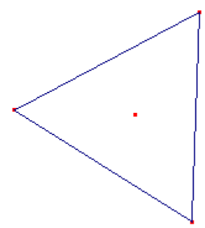
Al desarrollar la exploración con un cuadrilátero no especial y descartarlo como solución al problema propuesto, los estudiantes anticipan que para que las mediatrices de los lados del cuadrilátero concurran, los ángulos deben ser de 90°. Sin embargo, rápidamente reconocen que los únicos cuadriláteros que tienen los ángulos internos de 90° son el cuadrado y el rectángulo, que han sido explorados con anterioridad. Después, deciden realizar la exploración de un trapecio isósceles, que lo construyen a partir de un triángulo equilátero, trazan las mediatrices de sus lados y, al percatarse que estas concurren, determinan que el trapecio isósceles también soluciona el problema propuesto.

69	Felipe:	Necesitamos encontrar uno [cuadrilátero], que los ángulos sean de 90 grados. Pero es que los dos de noventa grados son el rectángulo y el cuadrado. ¿Qué otra podemos hacer?... La otra sería: primero trazar un segmento [traza un segmento] y tendríamos ya el primer lado, de esto podríamos sacar una recta paralela. ¡Ah!, no, pero es que si saco una recta paralela ya tendría un rectángulo.

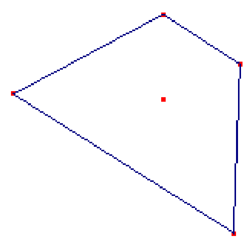
80 Sebastián: Exactamente. Ya se cual nos podría servir [Muestra con sus manos la forma de un trapecio isósceles].

85 Felipe: Tracemos un triángulo y le mochamos la punta.

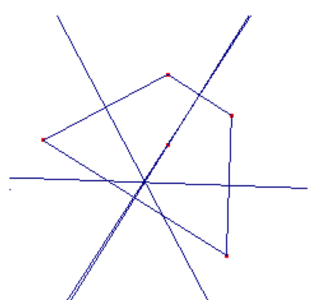
86 Sebastián: Sí. Pues construyámoslo con polígono regular. [Traza un triángulo equilátero con la herramienta polígono regular] Le podemos quitar una punta.



87 Felipe Bueno, técnicamente le estamos poniendo un segmento. [Traza un segmento con extremos en dos lados del triángulo y visualmente paralelo al tercer lado].

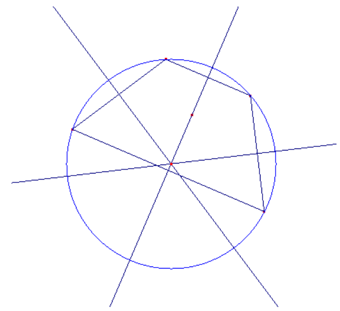


88 Felipe: Pero es un trapecio raro. Ahora vamos con la herramienta mediatriz. [Traza las cuatro mediatrices del cuadrilátero].



91 Sebastián Hasta el momento se están encontrando.

92 Felipe Acá se encontraron. El estudiante selecciona la opción circunferencia e intenta trazar una circunferencia con centro en el punto en el que parece concurren las mediatrices].



En este fragmento, la actividad de los estudiantes se centra en la fase de producción de una conjetura en la que hay una exploración de casos. En la búsqueda de cuadriláteros que cumplan la condición de concurrencia de las mediatrices de sus lados, Sebastián anticipa que en el trapecio isósceles posiblemente se cumpla la propiedad [82]. Esto porque han descartado que tenga que tener ángulos de 90° pero no que tenga lados paralelos.

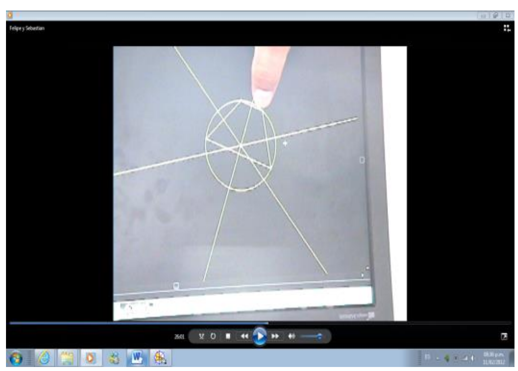
La actividad demostrativa se centra en el proceso de conjeturación por medio de la visualización, la exploración y la verificación. Al anticipar que el trapecio isósceles puede llegar a cumplir con la propiedad de concurrencia de sus mediatrices [82], los estudiantes utilizan una construcción auxiliar apoyada en un triángulo equilátero [86], en el que trazan un segmento aparentemente paralelo a uno de los lados del triángulo y con extremos en los otros lados del mismo. Este proceso les permite obtener una figura representativa del trapecio isósceles, trazan las mediatrices de sus lados [90] y a partir de la visualización, encuentran que estas se cortan en un mismo punto, situación que les permite proponer el trapecio isósceles como una solución al problema. Como un mecanismo de verificación los estudiantes trazan la circunferencia circunscrita.

No llevan a cabo argumentación alguna.

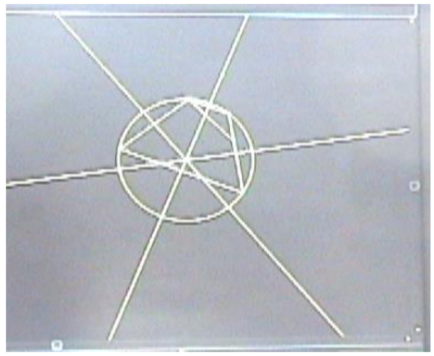
Fragmento 6: Los lados del trapecio isósceles son congruentes.

En el fragmento cinco, uno de los estudiantes propone el trapecio isósceles como solución al problema, aunque no recuerda el nombre. Hace una descripción de la figura con sus manos. Uno de sus compañeros se idea una forma de construirlo, que consiste en truncar un triángulo equilátero. En la construcción realizada, sin embargo, no usan rectas paralelas ni miden con el compás, sino que realizan una construcción blanda ubicando un segmento perceptualmente paralelo a una de las bases del triángulo equilátero. En este fragmento se genera una discusión en torno a la búsqueda de una justificación del por qué, al truncar un triángulo equilátero con una recta paralela a una de sus bases, se forma un trapecio isósceles. Más específicamente, el profesor pregunta a los estudiantes qué características tiene el cuadrilátero para que dos de sus lados sean congruentes.

100	Profesor:	¿Qué pasó?
101	Sebastián:	Hicimos como una especie de triángulo y le quitamos la punta. Le pusimos un segmento. Después pusimos un segmento aquí, otro aquí y otro aquí. [El estudiante explica que construyeron un triángulo equilátero y lo truncaron para obtener un trapecio isósceles].
104	Profesor:	¿Puedo preguntar algo? ¿Qué característica tiene este segmento de acá? [Se refiere al segmento con el que los estudiantes han truncado el triángulo equilátero. En la figura, lo señala con el dedo.]. ¿Por qué lo ubicaron así? [Mueve el dedo en dirección paralela al lado opuesto del triángulo]. ¿No lo hubieran podido poner así ¿por ejemplo? [Mueve el dedo señalando una dirección oblicua al lado opuesto del triángulo]



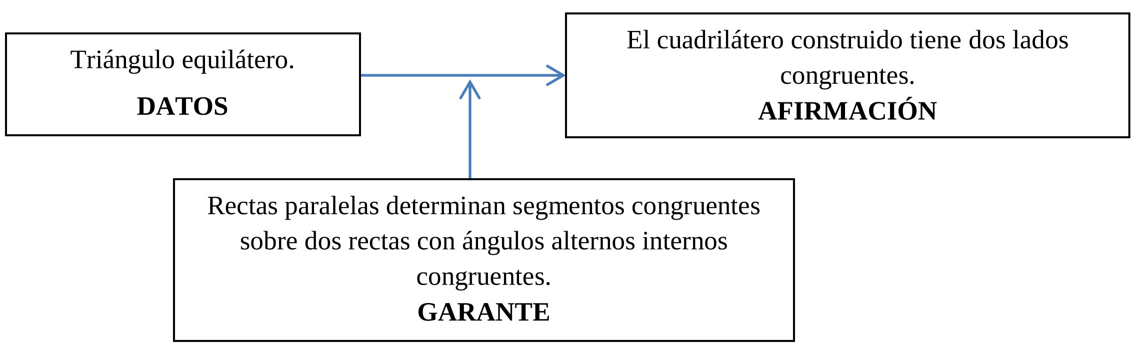
106	Felipe:	Nosotros lo que intentábamos es encontrar un cuadrilátero… Estos dos tienen la misma medida [Señala los lados “no paralelos” del cuadrilátero con apariencia de trapecio isósceles.]. 0 sea, son congruentes.
109	Profesor:	Entonces yo voy a hacer algo…[Toma el mouse y sobre el cuadrilátero que han trazado los estudiantes, traza un segmento evidentemente no paralelo al lado opuesto del triángulo



110	Sebastián:	Ya no quedan congruentes.
112	Profesor:	¡Ah! Entonces ¿Qué característica tiene este segmento? [Se refiere al segmento con el que los estudiantes han truncado el triángulo equilátero.]
113	Felipe:	Que el segmento está perpendicular… está paralela a esta línea [Señala la “base mayor” del cuadrilátero con apariencia de trapecio] entonces… es lo que puedo decir.
114	Profesor:	¡Um! O sea que tú dices que este segmento…
115	Felipe:	Es paralelo a la línea de abajo.
118	Profesor:	Bien, entonces son paralelos y eso te garantiza que son congruentes estos dos lados. Y, ¿qué figura formaste ahí?
119	Sebastián:	Es como una especie dé trapecio.
120	Profesor :	Este trapecio tiene los lados no paralelos, que son estos dos, [los señala] congruentes, ¿cierto? ustedes me lo dijeron. Ese trapecio se denomina trapecio isósceles.

En este fragmento la actividad de los estudiantes, presenta elementos de la fase de producción de una conjetura en lo que respecta a la exploración, pues los estudiantes están investigando si cierto tipo de cuadriláteros cumplen la propiedad. Al proponer la construcción de un trapecio isósceles, el profesor les pide justificar qué elementos de la construcción garantizan que tenga dos lados congruentes. [107]. Gracias a una construcción auxiliar realizada sobre la figura que están analizando [109] los estudiantes se dan cuenta que el segmento que trunca el triángulo debe ser paralelo al lado opuesto para obtener un trapecio con lados congruentes [110, 111, 113, 115].En cuanto a la actividad demostrativa, encontramos acciones del proceso de justificación. A petición del profesor, los estudiantes buscan cómo justificar que los lados no paralelos del trapecio construido al truncar un triángulo equilátero son congruentes. Felipe, inducido por la acción que realiza el profesor sobre la figura usa, de manera implícita, el teorema de Thales para formular una explicación de validación. Identifica de manera intuitiva que los segmentos que se determinan cuando dos rectas paralelas cortan dos rectas dadas son (en este caso) congruentes. Y es consciente que si las rectas no son paralelas, la propiedad ya no se cumple.

En este episodio hay una argumentación de tipo abductivo por parte de los estudiantes: Felipe afirma que los lados no paralelos del trapecio isósceles son congruentes, toma como datos para su afirmación el triángulo equilátero que construye con la herramienta polígono del programa Cabri, presenta como garante el hecho de que ha truncado el triángulo equilátero con un segmento paralelo a una de las bases del triángulo. El esquema de Toulmin es como sigue:



Fragmento 7: Exploración de un trapecio no isósceles.

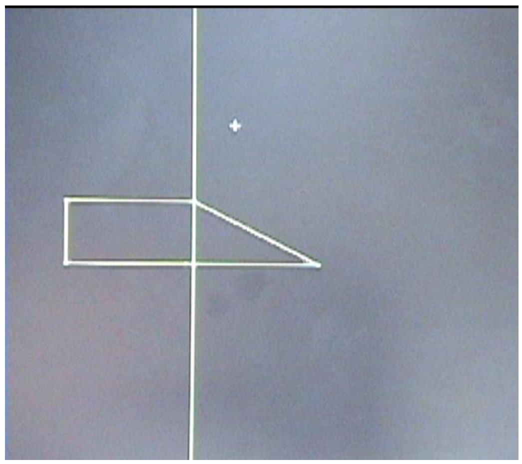
En el fragmento anterior los estudiantes han explorado el trapecio isósceles, la figura prototípica que conocen de los trapecios. En este fragmento, los estudiantes siguen trabajando sus construcciones alrededor de cuadriláteros especiales, o que tienen alguna característica especial, ya sean sus ángulos o sus lados. En este fragmento construyen un trapecio con un ángulo recto y descubren que en él la propiedad buscada no se cumple.

122	Profesor:	Ya hemos encontrado el cuadrado, el rectángulo y el trapecio isósceles en los cuales se cumple la propiedad de concurrencia de las mediatrices de sus lados. Ahora, busquemos otro cuadrilátero en el cual se cumpla esta propiedad.

127 Felipe: Bueno, ya descubrimos que ese [trapecio isósceles] sirve. Ahora vamos a otro, cree un nuevo archivo.

128 Sebastián: ¿Qué podríamos hacer en este?

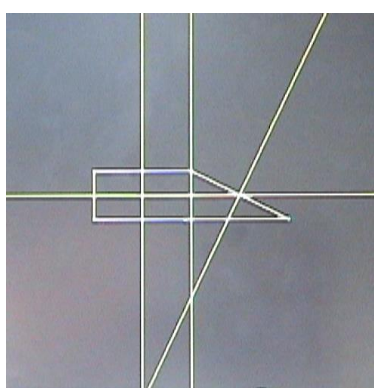
129 Felipe: ¿Cuál es un cuadrilátero que no sea…? Recta paralela y ahora recta perpendicular. [Construye un segmento, luego una recta paralela a éste por un punto externo y una recta perpendicular al segmento por el mismo punto. Une la construcción para obtener un trapecio con un ángulo recto y traza la mediatriz de uno de los lados paralelos]



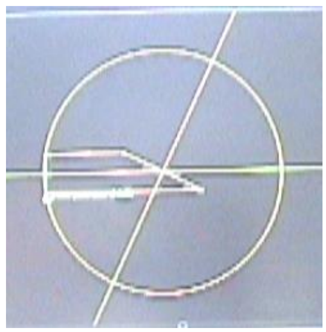
130 Sebastián: […] está mediatriz ya no nos sirve ahí. [la borra]

131 Felipe: No, ella ya no nos sirve porque no es el punto de centro. [Se refiere a que la mediatriz no pasa por el punto medio del lado opuesto].

132 Sebastián: Ahora podemos hacer mediatriz [Traza las cuatro mediatrices del trapecio, aunque una de ellas no le queda bien trazada].



133	Felipe:	No va a cumplir la… [condición]. Éstas no se encuentran nunca porque, que sean paralelas van solas [No se cortan].
134	Sebastián:	Se van a encontrar no más dos. Borre todo lo que hicimos.
135	Felipe:	Pero espere… [Borra las mediatrices de los lados paralelos de la figura y traza una circunferencia con centro en la intersección de las otras dos mediatrices y que pasa por dos vértices del cuadrilátero. Sería nomás estos dos [se refiere a los vértices por los que pasa la circunferencia que construyó. Borra toda la figura].



Este fragmento corresponde a la fase producción de una conjetura, mediante la exploración de un caso los estudiantes descubren que en un trapecio con un ángulo recto las mediatrices de sus lados no concurren. Después de construir un trapecio con un ángulo recto y trazar las mediatrices de sus lados, descartan esta opción al observar que dos mediatrices son paralelas [133] y afirman que a lo más se cortarán dos de ellas [134].

Con respecto a la actividad demostrativa, los estudiantes se encuentran en el proceso de conjeturación. Utilizan la visualización para realizar una exploración sobre una figura. Se dan cuenta, inicialmente, que la mediatriz de uno de los lados paralelos no pasa por el punto medio del lado opuesto, lo que lleva a Felipe a afirmar que en la figura construida no se cumple la propiedad [131]. Después, se dan cuenta que dos de las mediatrices son paralelas y concluyen que no se van a cortar [133]. Y, finalmente, intentan trazar una circunferencia circunscrita al cuadrilátero con centro en el corte de dos mediatrices, pero observan que sólo dos vértices quedan en la circunferencia trazada [135]. Determinan que en el trapecio construido no se verifica que las mediatrices de sus lados concurran. A diferencia del fragmento anterior, los estudiantes en este fragmento realizan una construcción robusta del trapecio utilizando como figura auxiliar un rectángulo.

La argumentación de los estudiantes en este fragmento es por contraejemplo: En su exploración subyace la hipótesis de la concurrencia de las mediatrices del trapecio, al realizar la construcción y trazar las mediatrices, mediante la observación rechazan la hipótesis.

El cuadrilátero co
la condición.

Trapecio con uno de sus ángulos recto.

DATOS

Las mediatrices no concurren.

En la argumentación de la no concurrencia de las mediatrices del trapecio isósceles, subyace una argumentación relacionada con las dos mediatrices paralelas del trapecio [133]: los estudiantes están usando implícitamente la idea de que las rectas paralelas no se cortan, es decir, si dos rectas son paralelas, entonces no se cortan. El garante es la definición de paralelismo.

Dos de las mediatrices del trapecio son paralelas.
DATOS

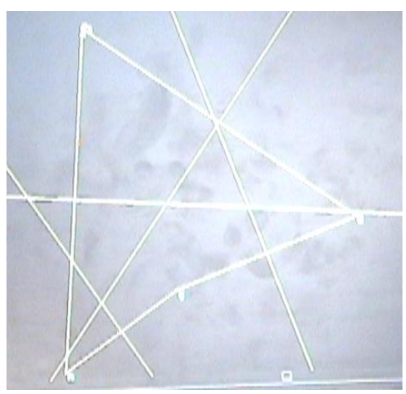
Las mediatrices no se cortan.
AFIRMACIÓN

Definición de paralelismo.
GARANTE

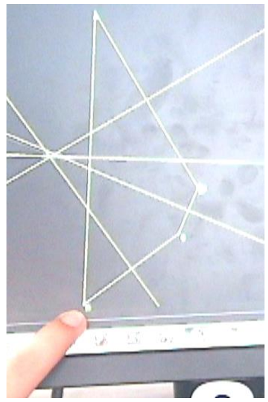
Fragmento 8: En un cuadrilátero cíclico las mediatrices concurren.

Los estudiantes, por sugerencia del profesor, usan la opción de arrastre. Construyen un cuadrilátero con la opción segmento, construyen sus mediatrices y luego mueven sus vértices intentando que las mediatrices concurran.

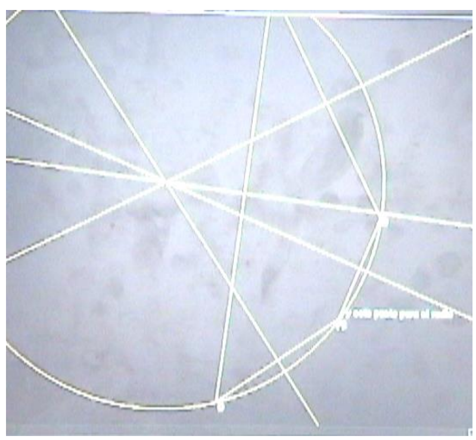
136	Sebastián:	Ensayemos con éste. [Traza un cuadrilátero con la herramienta segmento, sin darle condiciones específicas]
137	Felipe:	Haga uno a la loca.
140	Sebastián:	Miremos sus mediatrices a ver. [Traza dos de ellas] Hasta el momento cumplen la condición. [Traza las otras dos] No cumplieron la condición [Borra la figura].
141	Profesor:	Recuerda que tienes el arrastre.
	Sebastián:	[El estudiante traza un cuadrilátero cualquiera, nombra los vértices, A, B, C y D y traza sus mediatrices]. No cumple la condición.
142	Felipe:	Arrastre esa vaina. Arrástrelo del punto A. Ahora arrastre este [el punto D].



143	Sebastián:	[Arrastra el punto C].



144	Felipe:	Ahí no. Otro poquito… ahí. [Sebastián trata de hacer que concurran las cuatro mediatrices].
145	Sebastián:	Se encuentran las cuatro [mediatrices]. ¡Ahora sí!
146	Felipe:	Si trazamos la circunferencia… [Traza una circunferencia con centro en el punto de concurrencia y que parece que pasa por los vértices del cuadrilátero
147	Sebastián:	¡Sí! ¡No, espere! Acá le falta. [La circunferencia no pasa exactamente por uno de los vértices, utiliza la opción de arrastre para ajustar la construcción]. Ahora sí pasa por todos los vértices.



Este fragmento se ubica en la fase de producción de una conjetura. Sebastián decide explorar un cuadrilátero sin características especiales. Construyen un cuadrilátero, trazan sus mediatrices y al constatar que no concurren, optan por sugerencia del profesor, deformarlo mediante la opción de arrastre hasta hacer que las mediatrices concurran. Una vez que logran que las mediatrices concurran, deciden inscribir el cuadrilátero en una circunferencia, quizás como mecanismo de verificación, lo que los lleva a refinar el ajusta hasta que todos los vértices quedan sobre una circunferencia con centro en el punto de concurrencia. Los estudiantes parece asocian la concurrencia de las mediatrices con aquellos cuadriláteros que se pueden inscribir en una circunferencia.

En relación con la actividad demostrativa, en el fragmento se encuentran elementos del proceso de conjeturación. Se trata de una exploración dinámica en busca de forzar una propiedad. Por medio de la visualización, descartan que el cuadrilátero construido inicialmente sea solución al problema, al percibir que sus mediatrices no concurren [140]. La figura es aprovechada para realizar, por primera vez, una exploración dinámica de la situación y, mediante la opción de arrastre, obtienen un cuadrilátero que es solución al problema [143 - 145]. Cuando creen tener una solución, hacen una verificación mediante la construcción auxiliar de una circunferencia circunscrita [146]: Al observar que no todos los vértices del cuadrilátero yacen exactamente sobre la circunferencia, Sebastián sugiere arrastrar nuevamente los vértices para perfeccionar el cuadrilátero [146]. En este episodio, los estudiantes se aproximan a una solución satisfactoria del problema, no obstante, sus construcciones no son robustas y al realizar una exploración dinámica sobre las figuras sobre las cuales están trabajando, la propiedad buscada, que en ese momento está ante sus ojos, vuelve a desaparecer.

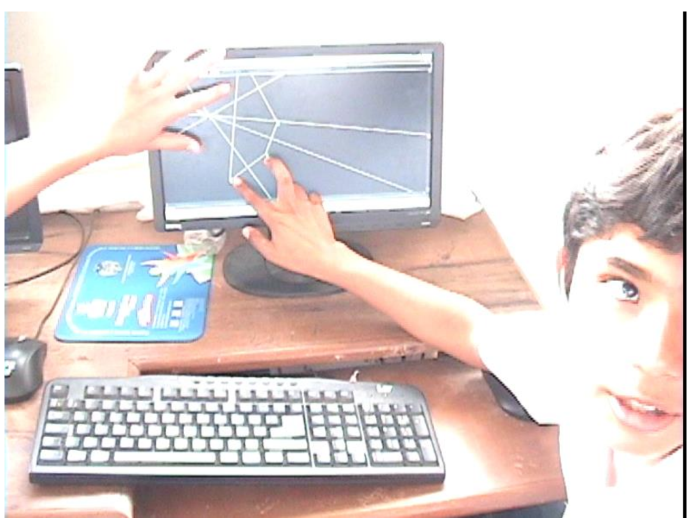
No hay argumentación.

<u>Fragmento 9: El punto de concurrencia de las mediatrices equidista de los vértices del cuadrilátero.</u>

A partir de la construcción de un cuadrilátero cuyas mediatrices concurren gracias a que han forzado la propiedad por arrastre, los estudiantes se sumergen en una discusión acerca de las características que tiene el punto de concurrencia de las cuatro mediatrices. Afirman y justifican que el punto de concurrencia equidista de los vértices del cuadrilátero.

148	Profesor:	¿Encontramos otro cuadrilátero diferente del trapecio?
149	Sebastián:	¡Sí!

150	Profesor:	¿Éste, cierto? ¿Qué característica tiene este punto [señala el punto de corte de las mediatrices]?
151	Felipe:	Que las mediatrices se encuentran ahí.
152	Profesor:	¡Listo! Llamémoslo E. ¿Qué característica tiene el punto E?
153	Felipe:	Además de que se encuentran todas las mediatrices, si nosotros trazamos una circunferencia desde el punto E hasta cualquier punto… [Vértice del cuadrilátero].
154	Sebastián:	Este punto [el punto E] está a la misma distancia de todos los vértices [del cuadrilátero].
155	Profesor:	¡Ah! …¿Sí?
156	Felipe:	¡Sí! Porque todos los radios de la misma circunferencia son congruentes.
157	Sebastián:	¡Sí! Porque si trazáramos segmentos desde el centro a cada uno de los vértices, todos quedarían siendo radios.
158	Profesor:	¡Bien! Perfecto. O sea que ustedes me pueden garantizar eso. Y si no fuera por la circunferencia ¿de que otro modo me lo podrían garantizar?
159	Felipe:	Con el método de las mediatrices.
160	Sebastián:	Con el método de las mediatrices, pero tocaría pensar como. ¡Ya la tengo! ¡Profe! [Quién se ha retirado para otro grupo] ¡Ya la se! Como ese [el punto de concurrencia] es un punto que está en todas las mediatrices. Y un punto que está sobre una mediatriz está a la misma distancia de dos puntos del segmento [los extremos] donde se creó la mediatriz.



163	Felipe:	Como el punto esta en las cuatro mediatrices, podemos justificar que está a la misma distancia de cada uno [de los vértices]

La fase de resolución de problemas que se identifica en este fragmento corresponde a la de exploración de contenido. Cuando el profesor plantea la pregunta: ¿Qué característica tiene el punto de corte de las mediatrices? [150], Felipe y Sebastián afirman que el punto de concurrencia [E] equidista de los vértices del cuadrilátero [150, 151] y comienzan a identificar argumentos apropiados que les permita validar la afirmación. Felipe, apoyado en el garante gráfico que proporciona la circunferencia circunscrita al cuadrilátero, hace explicito el uso del teorema 1 del sistema teórico local "*Todos los radio de la mima circunferencia son congruentes*" [157], argumentación a la que contribuye Sebastián, mencionando la pertinencia de utilizar el teorema ya que los segmentos que van desde el punto E hasta cada uno de los vértices del cuadrilátero, representan radios de la circunferencia [158]. Después de aceptar la construcción auxiliar de la circunferencia circunscrita como garante gráfico para validar la equidistancia del punto E con respecto a los vértices del cuadrilátero, el docente pregunta acerca de otra forma de justificar este hecho [158]. Felipe y Sebastián comienzan la explicación refiriéndose a las mediatrices, en particular, la definición de mediatriz como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento [160], Felipe resalta la pertinencia de utilizar la definición de mediatriz como garante, teniendo en cuenta que el punto E pertenece a las cuatro mediatrices [161]. Por razones de tiempo no se logro completar la justificación, consideramos que los estudiantes tenían la intención de utilizar la propiedad transitiva para relacionar la definición de mediatriz y el hecho de concurrencia, con la equidistancia del punto E a los vértices del cuadrilátero.

Con respecto a los procesos de la actividad demostrativa, las intervenciones de los estudiantes en este fragmento se pueden enmarcar dentro del proceso de justificación. Una vez establecida la propiedad de equidistancia del punto E a los vértices del cuadrilátero, Felipe y Sebastián seleccionan los elementos adecuados que les permite realizar la justificación de la conjetura formulada. Algunos de los garantes que utilizan los estudiantes para justificar la afirmación pertenecen al sistema teórico local, en el primer argumento deductivo, se hace explicita la pertinencia del teorema 1 como garante para justificar la conjetura, en el segundo argumento deductivo, se menciona la definición de mediatriz como garante para justificar la equidistancia, aunque por razones de tiempo no se hace explicita la pertinencia, por la trayectoria de estudio de Felipe y Sebastián durante el experimento de enseñanza, se puede inferir la intencionalidad de utilizar la propiedad transitiva que completaría el argumento deductivo. Por tal razón, el producto que se obtiene del proceso de justificación, se puede interpretar como una demostración.

En este fragmento se pueden identificar dos argumentos deductivos que utilizan diferentes garantes para justificar la misma conjetura: *Si las mediatrices de un cuadrilátero concurren, entonces el punto de concurrencia equidista de sus extremos*. En el primer argumento, los estudiantes aluden a que el punto de concurrencia E es el centro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero ABCD, por tal razón, los segmentos EA, EB, EC y ED son radios de una misma circunferencia y, por el teorema 1: "todos los radios de una misma circunferencia son congruentes", se puede deducir que el punto E equidista de los extremos de la circunferencia. En el segundo argumento, los estudiantes utilizan el hecho de que el punto de concurrencia E pertenece a todas las mediatrices y aluden a la definición de mediatriz de un segmento como lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos, argumento que no se logra terminar por razones de tiempo, la argumentación queda completa si se hace explícito el uso de la definición de mediatriz: como E pertenece a la mediatriz de $\overline{AB}$, entonces EA = EB, como E pertenece a la mediatriz de $\overline{BC}$, entonces EB = EC, como E pertenece a la mediatriz de $\overline{CD}$, entonces EC = ED y, como E pertenece a la mediatriz de $\overline{DA}$, entonces ED = EA; finalmente, por la propiedad transitiva se tiene que EA = EB = EC = ED y, por definición de equidistancia, se concluye que E equidista de A, B, C y D. A continuación presentamos el Esquema de Toulmin representando los argumentos citados.

Argumento 1:

Teorema 1: Todos los radios de una misma circunferencia son congruentes
GARANTE TEÓRICO

- Cuadrado ABCD.
- Mediatriz de los lados de ABCD

DATOS

Los segmentos *EA, EB, EC y ED* son radios de la circunferencia
AFIRMACIÓN

Si las mediatrices de un cuadrilátero concurren, entonces el punto de concurrencia equidista de sus vértices

AFIRMACIÓN

Circunferencia circunscrita al cuadrilátero ABCD
GARANTÍA GRÁFICO

Argumento 2:

Propiedad transitiva
GARANTE TEÓRICO

E (Punto de corte de las mediatrices), pertenece a las cuatro mediatrices

DATOS

EA = EB, EB = EC, EC = ED, ED = EA
AFIRMACIÓN

El punto de concurrencia de las mediatrices de un cuadrado equidista de sus vértices
AFIRMACIÓN

Definición de mediatriz
GARANTÍA TEÓRICO

TRANSCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE LOS CUADRILÁTEROS CICLICOS

EN EL GRUPO MaPaSe

Fecha: 28 de noviembre de 2011

Lugar: Sala de informática IED Instituto Nacional de Promoción Social Villeta

Docentes: Diego Aníbal Martínez González

Jorge Eliecer Buitrago Londoño

Estudiantes: Paula Barrera

Sebastián Torres

Alejandra Brochero

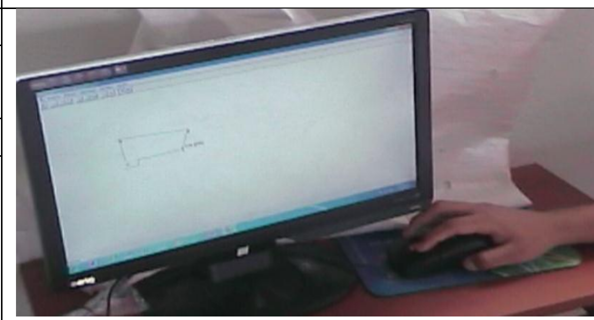
Problema:

¿en cuáles cuadriláteros puede llegar a pasar que las mediatrices se corten en un mismo punto?

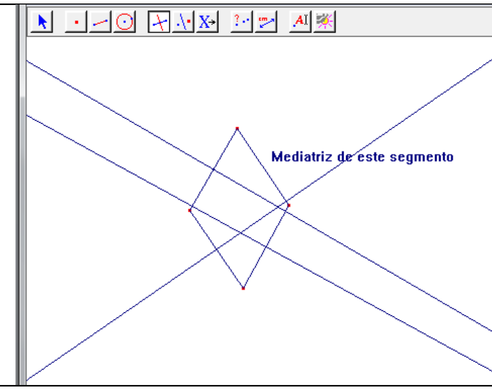
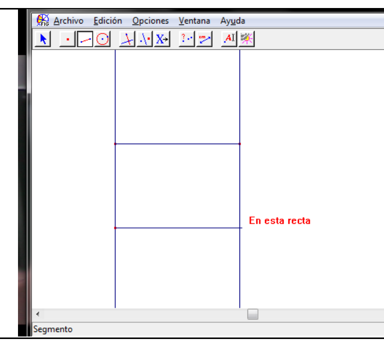
Objetivo:

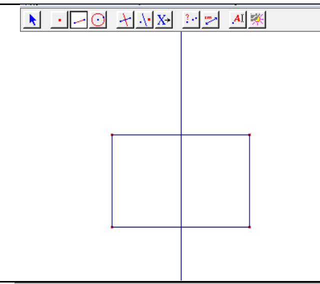
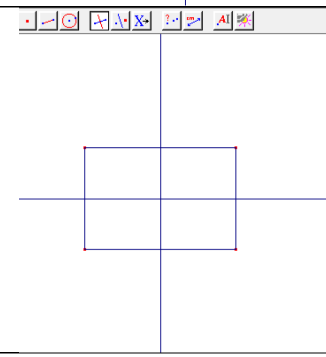
Identificar las características de un cuadrilátero en el cual las mediatrices de sus lados se cortan en un mismo punto.

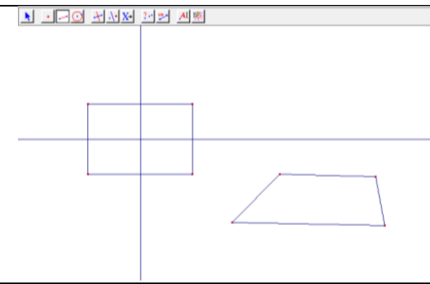
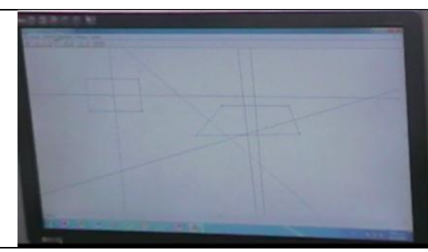
Desarrollo de la sesión.

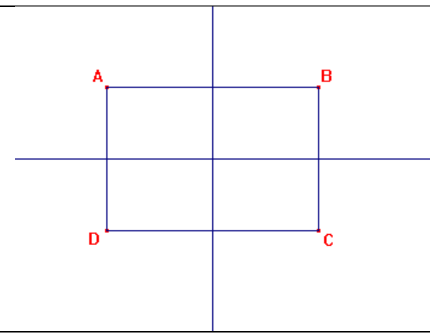
N°		INTERVENCIÓN	ILUSTRACIÓN
1	Profe Diego	Construyan un cuadrilátero ABCD	
2	Alejandra	[Construye el cuadrilátero utilizando la herramienta segmento]	
3	Paula	[Nombra los vértices del cuadrilátero]	
4	Sebastián	Mayúscula [Recuerda a Paula que los vértices se nombran con letras mayúsculas]	
5	Profesor	¿Listo?, bien, ahora sin el cabri, sin el cabri, nos olvidamos del cabri. Voy a pensar en mediatrices, voy a pensar en los tipos de cuadriláteros que hay, y voy a	

		pensar en cuáles cuadriláteros yo puedo llegar a suponer o a prever que las mediatrices se corten en un mismo punto, ¿en cuáles cuadriláteros puede llegar a pasar que las mediatrices se corten en un mismo punto?	
6	Felipe	En un cuadrado perfecto	
7	Profesor Diego	En un cuadrado, bueno una opción [apunta las opciones en el tablero]	
8	Alejandra	Rombo	
9	Profesor Diego	En un rombo	
10	Paula	Rectángulo	
11	Felipe	Trapecio	
12	Profesor Diego	Listo vale, tengo cuatro opciones. Me dicen: yo supongo sin aún utilizar el cabri, que las mediatrices se cortan en un solo punto o en un cuadrado, o supongo que en un rombo, supongo que en un rectángulo y también lo supongo que en un trapecio. Ahora viene la actividad, vamos a encontrar… que es parte del ejercicio de hoy, de la tarea de hoy… vamos a buscar un cuadrilátero en el cual las mediatrices de sus lados se corten en un solo punto, vamos a buscarlo, un cuadrilátero en el cual las mediatrices de sus lados se corten en un solo punto.	
13	Paula	El rombo, el rombo, haga el rombo [se dirige a la estudiantes que maneja el computador (Alejandra)]	

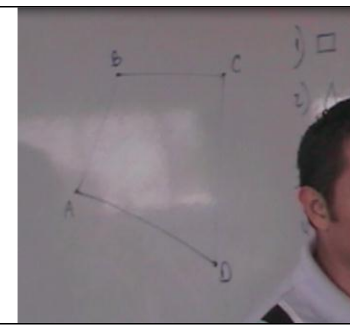
14	Alejandra	[Deja a un lado la construcción inicial y construye un cuadrilátero utilizando la herramienta segmento y luego arrastrando uno de los vértices obtiene la apariencia de rombo en el cuadrilátero construido. Luego construye tres de las mediatrices]	
15	Sebastián	[Tan pronto Alejandra termina de construir la tercera mediatriz] No, no, no, no, no, tocaría un cuadrado exacto. Haga un cuadrado perfecto	
16	Alejandra	[Abandona la figura y, al lado, comienza a construir un cuadrilátero haciendo un segmento]	
17	Paula	¡Ah!, pues nos toca hacer un rectángulo, ¿se acuerda del sobre?, porque si no, no queda igual. [probablemente Paula intenta llamar la atención de Alejandra para que use las herramientas de Cabri que usaron al construir un sobre ue superó la prueba del arrastre].	
18	Alejandra	[construye las perpendiculares al segmento por cada extremo y un segmento con extremos en las perpendiculares y que parece ser paralelo al segmento]	
19	Paula	Tocaba hacer acá la perpendicular [le indica a Paula que para el segmento debería haber usado la opción	

		perpendicular], bueno ya deje así, haga las mediatrices	
20	Alejandra	[Termina la construcción el rectángulo y oculta las rectas perpendiculares; luego construye las mediatrices de dos lados opuestos del cuadrilátero; aquellos que perceptualmente son paralelos]	
21	Sebastián	Ya, ya, ya, es la misma, y ahora de los lados	
22	Paula	[señala uno de los lados del cuadrilátero sobre el cual no se ha construido aún la mediatriz]	
23	Sebastián	Alejandra construye …. Ya profe	
24	Profe	¿Qué hicimos?	
25	Paula	Hicimos un rombo, pero no, no, las mediatrices no se cortan en el mismo punto	
26	Profesor	Ah, bien, bien, déjame ver el rombo	
27	Paula, Sebastián y Alejandra	Lo borramos	
28	Profesor	¡Ah! bueno listo, el rombo lo descartaron, ¿qué más?	
29	Paula	Hicimos un…	
30	Alejandra	Un cuadrado	
31	Paula	Pero hicimos algo de cuatro lados y ya	
32	Profesor	¿Qué es algo de cuatro lados?	
33	Sebastián y Paula	Cuadrilátero	
34	Paula	Un cuadrilátero pero no, no	

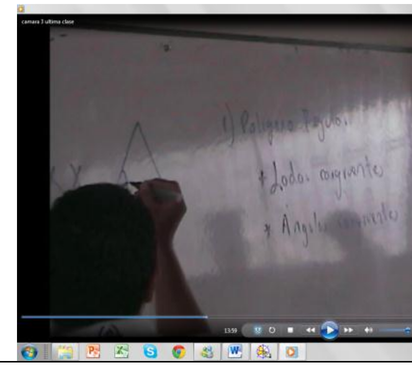
35	Sebastián	Exacto, porque si la medida de este lado es igual a esta [hace referencia a los lados opuestos de un rectángulo], la mediatriz va hacer la misma	
36	Profesor	Espérate, déjame ver el cuadrilátero que hicieron, de pronto con la gráfica yo puedo entender un poquito más.	
37	Paula	Haga cuatro líneas normales, como hizo ahorita	
38	Sebastián	Toca hacer un cuadrado exacto	
39	profesor	No, lo que hicieron ahorita que ustedes me dijeron: hicimos después un cuadrilátero…	
40	Sebastián	El cuadrado el cuadrado exacto	
41	Paula	El primero que usted hizo [se dirige a Alejandra]	
42	Sebastián	No, haga el cuadrado exacto [Se dirige a Alejandra, al observar que comienza la construcción de un cuadrilátero irregular]	
43	Alejandra	[construye el cuadrilátero irregular]	
44	Profesor	Bien, y ustedes me dijeron que en ese no	
45	Sebastián	No	
46	Profesor	Y.. ¿cómo…?, ¿Cómo comprobaron que no?	
47	Sebastián	Hicimos las mediatrices	
48	Profesor	Déjame ver	
49	Alejandra	[construye las mediatrices de los lados del cuadrilátero]	
50	Profesor	Si perfecto, ¿qué paso ahí?	
51	Sebastián	No se unen en el mismo punto	
52	Profesor	No se cortaron…	
53	Paula	No se cortan en el mismo punto [se refiere a las mediatrices]	
54	Profesor	Bien, entonces, esa la descartaron ustedes ¿cierto?	

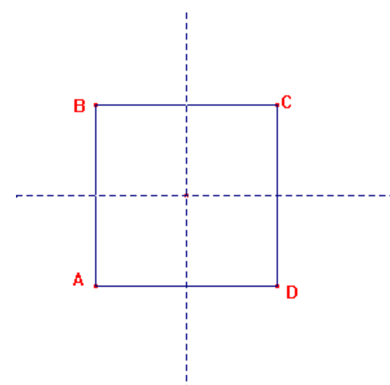
55	Paula	Si	
56	Profesor	Dejémoslo hasta ahí, no me lo vayan a borrar, por favor no me borren ese. Entonces, ¿después qué hicieron?	
57	Paula	Un rectángulo	
58	Profesor	Un rectángulo	
59	Paula	Con…, pues para qué quedara hicimos la construcción del sobre	
60	Profesor	Ah, hicieron la construcción del sobre. Listo bien, y en el rectángulo ¿qué pasaba?	
61	Paula	Que ahí si se cortan en un…	
62	profesor	¿Las mediatrices?	
63	Paula	Si, las mediatrices	
64	Profesor	Pero espera, les voy hacer una pregunta: Esta mediatriz ¿de quién es? [señala con el marcador una de las mediatrices construidas por los estudiantes]	
65	Sebastián	De ambas, de ambas, del de abajo y del de arriba	
66	Profesor	Ah…., ¿cuáles lados?, es que sabe cuál es el problema, que no nombraron los lados, por eso estoy como perdido	
67	Alejandra	[Nombra los vértices del rectángulo ABCD]	
68	Profesor	[se va por unos minutos a trabajar con otro grupo de estudiantes]	
69	Alejandra	Listo profe	
70	Profesor	Listo, o sea que en el rectángulo ¿cuántas mediatrices puedo trazar?	
71	Paula, Sebastián y Alejandra	Cuatro	
72	Profesor	Pero ¿ qué me doy cuenta?	
73	Paula	Pues que quedan como dos	
74	Sebastián	Que sólo quedan dos	
75	Profesor	Ah… que quedan como dos, ¿Por qué quedan como dos?	
76	Sebastián	Porque… porque un rectángulo tiene…dos	

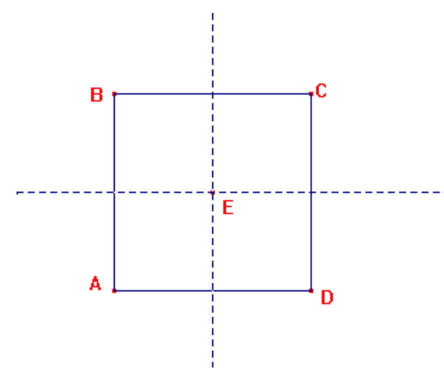
77	Paula	Dos lados iguales	
78	Sebastián	Dos lados iguales, entonces…, entonces se le hace la mediatriz de la…del lado del abajo y va a ser igual que el de arriba	
79	Profesor	¿Ustedes están de acuerdo con eso?	
80	Paula y Alejandra	Si	
81	Profesor	Bien, entonces parece que e rectángulo me sirve, ahí un punto de intersección, nombrémoslo	
82	Alejandra	[intenta nombrar el punto de intersección de las mediatrices]	
83	Sebastián	Venga yo lo hago	
84	Profesor	Cuando vas a hacer un punto de intersección, te pregunta ¿de quién?, de esta recta y esta recta [señala las mediatrices que se intersecan]. Llamémoslo el punto E.	
SOCIALIZACIÓN			
85	Profesor	Bueno, vamos a ver. El grupo de Paula dice: profe, el rombo no me sirve	
86	Sebastián	No, el rombo si sirve pero debe ser perfecto	
87	Profesor	¿Rombo perfecto?	
88	Sebastián	Debe estar…cómo le digo…	
89	Profesor	Espera aclaramos eso, ahora dice torres	
90	Sebastián	El rombo sirve pero debe estar exacto	
91	Profesor	¿Cómo así exacto?	
92	Sebastián	Pues…, con todos los lados iguales	
93	Profesor	Ah, pero un rombo tienen todos los lados iguales, ¿cuál es la condición del rombo para que sea rombo? Qué tenga sus lados…	
94	Sebastián	Iguales	
95	Profesor	Entonces, ¿a qué te refieres con rombo exacto?	
96	Sebastián	Por ejemplo mire el que usted hizo [señala una de las figuras construidas en el tablero]	

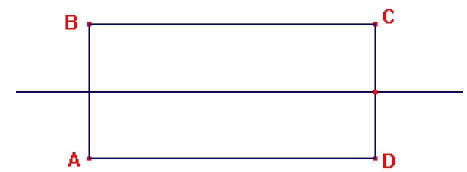
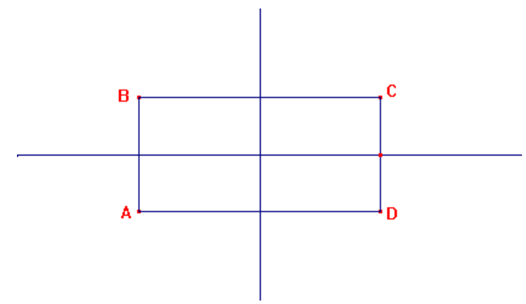
97	Profesor	¿Este? [señala el rombo]	
98	Sebastián	No, no, no, el otro el otro	
99	Profesor	¿Este? [señalado el cuadrilátero construido con todos sus lados de diferente longitud]	
100	Sebastián	Ese, ese no es exacto porque…	
101	Profesor	Pero no es un rombo	
102	Sebastián	¿Entonces?	
103	Profesor	Es un cuadrilátero, entonces parece que el rombo como tal no cumple la condición, recordemos como se define rombo: un rombo es una figura de cuatro lados, que tiene una condición, ¿cuál es la condición para que sea rombo?	
104	Paula	Que todos sus lados sean iguales	
105	Profesor	Que todos sus lados…	
106	Estudiantes	Sean iguales	
107	Profesor	Bueno, congruentes para geometría. ¿Esto es un rombo?, así a simple vista [señala el cuadrilátero ABCD], algo así, digámoslo así, bien construido, esto si es un rombo [señala el rombo construido en el tablero]. El rombo lo descartamos, Garzón, cuál fue el primero que encontraste	
108	Felipe	El cuadrado	
109	Profesor	El cuadrado, o sea, para Garzón el cuadrado si es, ¿cómo lo construyó el cuadrado?	
110	Sebastián	Un polígono regular	
111	Felipe	Utilizamos un polígono irregular, buscamos la forma en la que era de cuatro lados, nombramos los lados y sacamos las mediatrices	
112	Profesor	Espera, estamos todos siguiendo a Garzón [se dirige a los	

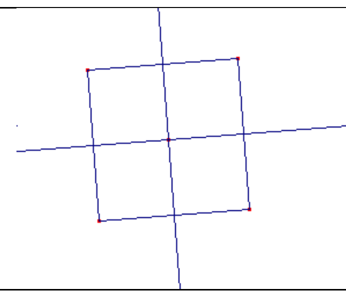
		demás grupos] ¿qué hizo primero?	
113	Felipe	Primero utilizamos la herramienta polígono irregular y creamos el cuadrado	
114	Profesor	Utilizamos la herramienta polígono regular [apunta en el tablero]. Chicos, la herramienta polígono regular y pues hablemos un poquito de esto, pues traemos a la clase todos estos conceptos ¿qué es un polígono regular?, ¿qué es un polígono regular? [se mantiene en silencia por unos segundos la clase] ¿por qué creen que el cuadrado lo puedo hacer con la herramienta de polígono regular?	
115	Sebastián	Porque sus lados son iguales	
116	Profesor	Un polígono regular vendría a ser una figura que tiene una característica ¿Cuál? [señala a Sebastián]	
117	Sebastián	Sus lados son congruentes	
118	Profesor	Lados congruentes bien [apunta en el tablero]. Chicos, pero entonces viene otra pregunta, ¿el rombo es un polígono regular? Les voy a dar la respuesta, no, no es un polígono regular, porque aparte de tener lados congruentes, para que sea polígono regular debe tener otra condición, ¿qué otra condición tiene el cuadrado? ¿qué otra característica tiene el cuadrado que lo hace polígono regular? ¿qué otra característica tiene el cuadrado que lo hace polígono regular?	
119	Paula	Que los vértices son de 90°	
120	Profesor	¿Los vértices?, bueno los vértices serían ángulos no, los ángulo …	
121	Paula	Son de 90°	
122	Profesor	Ah, en el cuadrado todos los ángulos…	
123	Paula	Son rectos	
124	Profesor	Son de 90°, o sea vienen a ser ángulos que…	
125	Felipe y Sebastián	Congruentes	

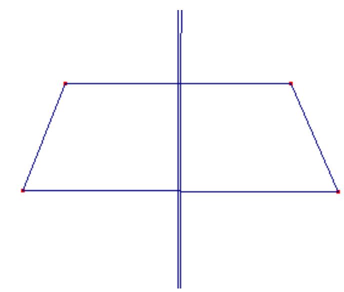
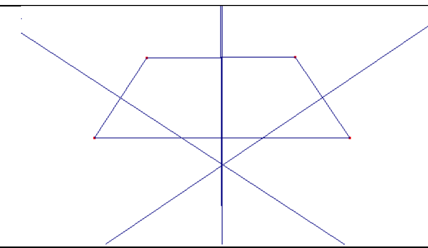
126	Profesor	Todos rectos, todos vienen a ser congruentes, o sea que un rombo ¿puede ser un polígono regular?	
127	Sebastián	No	
128	Profesor	Los ángulo no son congruentes, así, a simple vista yo puedo casi que identificar que éste ángulo es mayor que este ángulo cierto[se apoya en la figura construida en el tablero], así como a simple vista. Ah bien, entonces volvemos a la situación, volvemos al cuadrilátero con sus mediatrices. Bien, utilice la herramienta polígono regular, esa me generó el polígono regular de cuatro lados que se llama cómo	
129	Felipe y Sebastián	Cuadrado	
130	Profesor	Cuadrado [construye el cuadrado en el tablero]. Bueno, hagamos el acto de fe que tenemos acá un cuadrado, ¿qué hicieron Garzón después?	
131	Sebastián	Seleccionamos la herramienta mediatriz	
132	Profesor	Seleccionamos una herramienta que se llamó…	
133	Sebastián	Mediatriz	
134	Profesor	¿Con esa herramienta qué hizo?	
135	Felipe	Sacamos la mediatriz de dos lados	
136	Profesor	De sólo dos lados, ¿de cuáles?	
137	Felipe	De BC y BA	
138	Profesor	La mediatriz para por donde [no construye la mediatriz hasta que los estudiantes recuerdan las condiciones que debe tener una recta para que sea mediatriz de un segmento dado]	
139	Felipe	Por el centro de BC	
140	Paula	Punto medio	
141	Profesor	Y ¿cómo va la mediatriz?	

142	Felipe	Una línea recta	
143	Profesor	Y a parte de ser recta, cómo es con el segmento… [se refiere al segmento BC]	
144	Sebastián	Perpendicular	
145	Profesor	Esta la encontraron, ¿cuál otra encontraron?	
146	Felipe y Sebastián	La del segmento AB	
147	Profesor	[Construye la mediatriz correspondiente al segmento AB], esta la encontraron, bien vale. Y ¿qué pasó?	
148	Sebastián	Pues nos dimos cuenta que como esos dos lados son iguales, lado AB es igual al segmento BC	
149	Profesor	AB y BC [señalando los lados en el tablero]	
150	Sebastián	Como un cuadrado tiene todos sus lados iguales, la mediatriz del segmento AB y el segmento BC sería la misma.	
151	Profesor	Ah espérate, volvamos al ejercicio, voy hacer lo que tú me dices: Este segmento [resalta el segmento BC] tiene una mediatriz, ¿cuál es? Esta mediatriz [resalta la mediatriz correspondiente al segmento BC]. Este segmento [resalta el segmento AB] tiene una mediatriz, ¿cuál es? Esta mediatriz [resalta la mediatriz correspondiente al segmento AB]. Hasta ahí vamos bien, ¿qué pasa con la mediatriz de éste segmento [señalando el segmento AD] y este segmento [señalando el segmento DC]?	
152	Sebastián	Son iguales	
153	Felipe	Son las mismas de las de los otros dos segmentos	
154	Profesor	O sea, la del segmento AD ¿quién viene a ser?	
155	Felipe	La de BC	
156	Profesor	Todos de acuerdo con eso, ¿si?. Si yo busco la mediatriz del segmento AD, dicen ellos, es la misma que la del segmento BC	

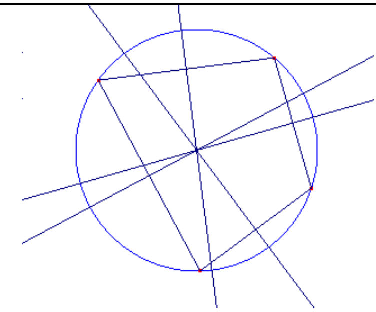
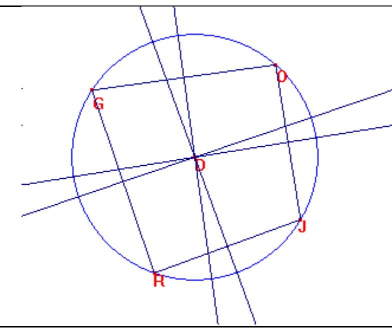
157	Sebastián	No es la misma pero si pasa por el mismo lado	
158	Profesor	Y la de éste segmento [señala el segmento CD]	
159	Estudiantes	Es la misma que la del segmento AB	
160	Profesor	¿Todos de acuerdo?	
161	Estudiantes	Si	
162	Profesor	Y entonces, ¿Qué encontraron?	
163	Felipe	Después de eso nosotros creamos un punto donde esta la intersección de ambas mediatrices	
164	Profesor	¿De ambas?	
165	Sebastián	De todas	
166	Felipe	De las mediatrices	
167	Profesor	[Dibuja el punto de intersección en el tablero]	
168	Felipe	De ahí trazamos una circunferencia…	
169	Espérate	¿Cómo se llamo ese punto?	
170	Felipe	E	
171	Profesor	Bien, parecía que el cuadrado cumplía la condición y el argumento está dado ya: porque la mediatriz de ésta lado [señala el lado BC] es la misma de éste lado [señala el lado AD] y de éste lado la misma de éste lado [señala los lados AB y CD]. Los que no están de acuerdo, los que creen que la pueden refutar, pueden comprobar en su programa y verificar si el cuadrado cumple las condiciones. Bien, hay otro (ya sé que el cuadrado si y el rombo no), otro que me sirva.	
172	Sebastián T	El rectángulo	
173	Profesor	¿ME servía el rectángulo?	
174	Sebastián T	Sí	
175	Profesor	¿con qué argumento?	
176	Leidy	Porque los ángulos son congruentes	
177	Profesor	Rectángulo tiene ángulos congruentes, ¿Quién lo comprobó?	
178	Paula	Pues pasaba lo mismo que con el cuadrado porque…	

179	Profesor	[construye el rectángulo ABCD en el tablero] ¿Qué hicimos?	
180	Sebastián	Las mediatrices	
181	Paula	Pues pasaba lo mismo que con el cuadrado, que el punto ...la…hicimos la mediatriz del segmentos BA	
182	Profesor	Sí [construye la mediatriz del segmento BA]	
183	Paula	El punto medio de CD también estaba entre la mediatriz, se encontraba entre la mediatriz	
184	Profesor	Ah, el punto medio de CD pertenece a esta mediatriz [señala la mediatriz de AB y construye el punto medio de CD], entonces ¿qué pasaba con la mediatriz de CD?	
185	Sebastián T	Era la misma	
186	Paula	Que es, es… la misma…	
187	Profesor	¿Y de estos? [señalando los segmentos AD y BC]	
188	Sebastián T	Pasaba lo mismo	
189	Paula	En ese también se creo la mediatriz…	
190	Profesor	Si, se creo la mediatriz [construye la mediatriz del segmento BC en el tablero]	
191	Paula	…Y el punto medio de AD se encontraba en la mediatriz	
192	Profesor	Bien, o sea que con el rectángulo puedo usar un argumento similar al que use en el cuadrado. O sea que el rectángulo también sirvió. ¿Alguien probó el trapecio?	
193	Natalia	Sí nosotras	
194	Profesor	Y ¿Qué pasó con el trapecio? [se acerca al grupo y observa la gráfica] ah, pero es que… hay una condición particular del trapecio, ya vamos para allá con el trapecio particular que hicieron las compañeras. Chicos, ya encontramos que el cuadrado nos sirve, ya encontré que el rectángulo me sirve, ya encontré que ¡ojo!, hice un rombo y ese rombo no me sirvió, no puedo descartar todos los rombos, es más, vemos que un cuadrado por su definición también es un rombo,¡ cierto	

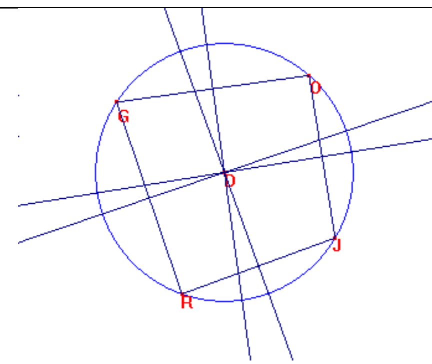
		que sí!, sí porque un cuadrado tiene todos sus lados iguales…	
195	Felipe	La única diferencia es la medida de sus ángulos	
196		Lo que lo hace cuadrado, por encima de ser rombo es que tiene sus ángulos congruentes. Chicos, bien, volvemos a mi ejercicio, quiero que encuentre otro cuadrilátero, diferente a los que ya hemos hecho, que no sea rectángulo, que no sea cuadrado, en el que las mediatrices se corten en un solo punto. Busquemos otro cuadrilátero en el cual las mediatrices de los lados se corten en un solo punto [escribe el enunciado en el tablero].	
TRABAJO EN GRUPO			
197	Paula	Busquemos con el rombo, haga un cuadrado [se dirige a Alejandra]	
198	Alejandra	[Construye el cuadrado con la herramienta polígono regular]	
199	Paula	Ahora, tracemos las mediatrices	
200	Sebastián	No, porque sería el mismo cuadrado	
201	Alejandra	[construye las mediatrices del cuadrado]	
202	Sebastián	LA misma, porque es un cuadrado volteado	
203	Profesor	Déjame ver lo que estamos haciendo. Bien, ahora el ejercicio es: buscar un cuadrilátero, cualquier cuadrilátero, necesito que ese cuadrilátero tenga la condición de que las mediatrices se corten en un solo punto. Ya encontré el cuadrado, me sirve, el rectángulo me sirve, será qué habrá otro diferente al cuadrado y el	

		rectángulo, en el cual yo pueda garantizar que las mediatrices se corten en un solo punto	
204	Paula	El trapecio	
205	Profesor	Pues miremos entonces el trapecio, puede ser otro, no sé.	
206	Sebastián	[Construye un cuadrilátero, similar al trapecio isósceles, con la herramienta segmento y la opción arrastre, luego encuentra las mediatrices de los lados paralelos] no, nos quedo mal [realiza el comentario al darse cuenta que las mediatrices no coinciden]. Pues hagamos un cuadrado y lo extendemos [insiste en la construcción del trapecio isósceles utilizando exclusivamente la herramienta segmento y la opción de arrastre]	
207	Paula	Construya las mediatrices	
208	Sebastián	[Construye las mediatrices]	
209	Paula	Pero mire que se cortan por acá [señala el punto de corte fuera del interior del cuadrilátero]	
210	Sebastián	No importa, todas se cortan en un mismo punto	
211	Paula	Hagamos un rombo	
212	Sebastián	[Construye el rombo utilizando exclusivamente la herramienta segmento y la opción de arrastre]	
213	Profesor	¿Qué pasó?	
214	Sebastián	Hicimos con el trapecio y también [señala el punto de corte delas mediatrices]	
215	Profesor	Y ¿cómo hicieron ese trapecio?, déjame ver que hicieron, esa construcción, ¿cómo la hicieron?	
216	Sebastián	Con segmentos [comienza a construir de nuevo el trapecio]	
217	Profesor	No, no, no, no hay necesidad, aquí hay una opción, se la	

		voy a mostrar [indica el procedimiento para utilizar la herramienta revisar construcción] Bien, se cortaban en el trapecio. Les voy a preguntar algo a ustedes entonces: ¿cuántas mediatrices puedo ver ahí?	
218	Paula	Tres	
219	Profesor	¿Por qué solamente puedo ver tres mediatrices?	
220	Paula	Porque el punto medio de este segmento pertenece a la mediatriz de este segmento. [se refiere a los segmentos paralelos]	
221	Profesor	Ah ya, bien, entonces yo quiero ahora que ustedes me busquen un cuadrilátero, ya no es el cuadrado que es algo especial, ya no el rectángulo que es algo especial, ya no el trapecio que es algo especial, Un cuadrilátero…Será que solamente en estos cuadriláteros especiales se cumple. No habrá otro cuadrilátero diferente a estos especiales que nombramos ahí, en el cual yo pueda garantizar que las mediatrices.	
222	Sebastián	Yo pensaría que en todos se pueden, que en todos se cortan	
223	Profesor	¡Que en cualquier cuadrilátero se puede!. Tú que dices Brochero, ¿en cualquier cuadrilátero que yo haga las mediatrices se cortan?	
224		Desde que tengan los lados congruentes	
225	Paula	No, porque estos no son congruentes, si ella dice que tienen que ser los lados congruentes, entonces no nos serviría el trapecio, entonces lo que esta afirmando no sirve	
226	Profesor	¿Quedaste convencida? [se dirige a Alejandra]	
227	Alejandra	Sí	
228	profesor	¿Por qué quedaste convencida?	
229	Alejandra y Sebastián	Porque hicimos el trapecio y…	

230	Profesor	Entonces no necesito que los lados sean …	
231	Alejandra	Iguales.	
232	Profesor	Entonces, tratemos de buscar otro cuadrilátero…	
233	Paula	Pero tal ves que sea, que este bien construido porque nosotros hicimos así como cuatro lados y…	
234	Sebastián T	Hacemos uno deforme, quiere ver este deforme [construye un cuadrilátero, las mediatrices de sus lados y comienza a utilizar la opción de arrastre para que las mediatrices se corten en un solo punto]. Hagamos un cuadrilátero… a ver que sale [construye una circunferencia y un cuadrilátero inscrito en ella]	
235	Alejandra	Ahora las mediatrices	
236	Sebastián	Uy, uy,	
237	Paula	Si nos quedo	
238	Alejandra	Ahora nombrémoslo, nómbrelo no [toma el mouse, nombra los vértices y el punto de corte de las mediatrices].	
239	Paula	Profesor	
240	Profesor	Pero este cuadrilátero ¿qué es? [se refiere al cuadrilátero que inscrito], es un cuadrado, es un rectángulo	
241	Sebastián	ES un cuadrilátero inventado, es uno inventado	
242	Profesor	Listo, es un cuadrilátero cualquiera, no es cuadrado, no es un rectángulo, no es un trapecio, no es un rombo, es un cuadrilátero cualquier. Y sin embargo, ¿qué pasó con las mediatrices?	
243	Paula, Sebastián y	Se cortaron en un mismo punto	

	Alejandra		
244	Profesor	Ah ya, hace falta que sea cuadrado, hace falta que sea rectángulo, hace falta que sea especial. Bien, les puedo preguntar algo, ¿Cómo encontraron ese cuadrado? O sea, hicieron un cuadrilátero cualquiera y…	
245	Paula	Pues, trazamos una circunferencia y entonces el dijo, hagamos un cuadrilátero…	
24	Profesor	Ah, primero trazaron la circunferencia, y luego trazaron el cuadrilátero	
247	Paula y Sebastián	Si	
248	Profesor	Y luego?	
249	Paula y Sebastián	Trazamos las mediatrices	
250	Profesor	Y les dio que sí?	
251	Sebastián, Paula y Alejandra	Sí	
252	Profesor	O sea que con este me sirvió?	
253	Sebastián, Paula y Alejandra	Sí	
254	Profesor	Probaron otro cuadrilátero diferente a ese	
255	Sebastián	Pero, se puede en la circunferencia	
256	Profesor	Sí, ahí mismo a ver, déjame ver	
257	Sebastián T	En todos sirve	
258	Profesor	¿En todos?	
259	Sebastián T	En todos de la circunferencia, mire, ¿cuál le hago?	
260	Profesor	El que quiera	
261	Paula y Alejandra	Uno que no sea especial	
262	Sebastián	[Construye una circunferencia, un cuadrilátero inscrito en ella y sus mediatrices]	
263	Profesor	Y ¿dónde se cortan?, ¿en qué punto se cortan?	
264	Paula y Sebastián	En el centro de la circunferencia	
265	Profesor	Y ¿Todos me sirven?	

266	Sebastián	Si, ¿lo muevo?... [arrastra uno de los vértices del cuadrilátero]	
267	Profesor	Ah, todos me sirven, o sea que encontramos un método que me genera a mi todos de una vez. Pueden justificar eso, ¿cómo justifico yo el hecho de qué entonces todos estos [se refiere a las mediatrices] se cortan en el centro de la circunferencia?	
268	Paula	Pues es que son como radios	
269	Profesor	¿Cuáles son radios?	
270	Sebastián	Las mediatrices	
271	Profesor	¿Son radios?	
272	Sebastián	Podría ser radio de la circunferencia	
273	Profesor	Pero si la mediatriz es una recta, no tiene extremos	
274	Paula	Entonces no.	
275	Profesor	¿Cómo se llama este punto? [señala el punto de intersección de las mediatrices]	
276	Alejandra	D, el punto D	
277	Profesor	¿Qué características tiene ese punto D?, ¿qué propiedad tiene?	
278	Sebastián	Que siempre va a estar a la misma distancia	
279	Paula	Que esta a la misma distancia del punto [señala el punto R]	
280	Sebastián	Del segmento RG	
281	Profesor	¿Del segmento?	
282	Paula y Sebastián	No, del punto	
283	Paula	Estos son los radios [Señala los vértices del cuadrilátero], entonces esta a la misma distancia de todos	

TRANSCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE LOS CUADRILÁTEROS CICLICOS GRUPO BRADOLI

Fecha: 28 de noviembre de 2011

Lugar: Sala de informática IED Instituto Nacional de Promoción Social Villeta (rosita)

Docente: Diego Aníbal Martínez González

Jorge Eliecer Buitrago Londoño

Estudiantes

Leidy Doncel

Lina Casteblanco

Brayan Barona

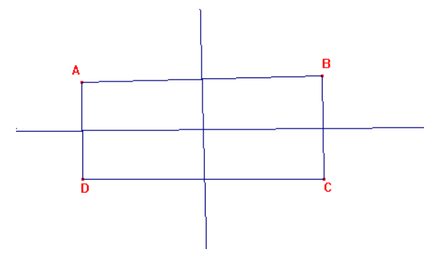
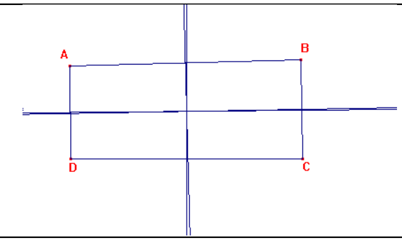
Problema

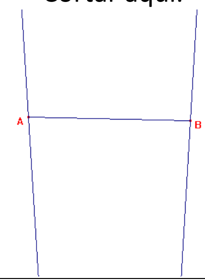
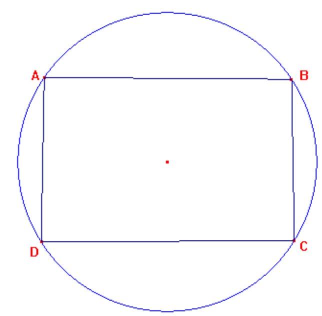
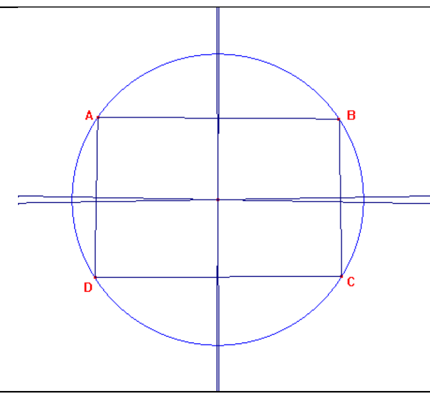
¿En cuáles cuadriláteros puede llegar a pasar que las mediatrices se corten en un mismo punto?

Objetivo

Identificar las características de un cuadrilátero en el cual las mediatrices de sus lados se cortan en un mismo punto

Desarrollo de la sesión

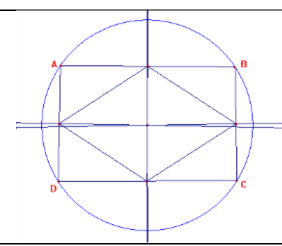
N°				OBSERVACIONES
1	Brayan	[Construye el cuadrilátero ABCD y las mediatrices de los lados AB y AD]		
2	Leidy	¿Qué está haciendo?		
3	Brayan	Las mediatrices		
4	Leidy	Ya hizo la mediatriz de ese y ese [se refiere a las mediatrices de los lados AB y AD], ahora haga la de este y este [señala los lados BC y DC]		
5	Brayan	[Construye las mediatrices que indica Leidy]		Al no ser un cuadrilátero como el que ellos esperan es decir el rectángulo.
6	Profesor	Déjame ver, hicimos el cuadrilátero, trazamos las mediatrices…		
7	Leidy, Brayan y Lina	Sí		
8	Profesor	¿Se cortan en un solo punto?		
9	Leidy, Brayan y Lina	Si		
10	Profesor	¿Están seguros?		
11	Lina	Si		
12	Brayan y Leidy	No		
13	Profesor	¿Están seguros que se cortan en un solo punto?, es que no veo con claridad el punto donde se cortan		
14	Leidy	Profe, ¿acá se puede construir un cuadrado perfecto?	Posiblemente cortar aqui	
15	Profesor	Pues sí hay opciones, pero como tal no necesito utilizarla	aqui	

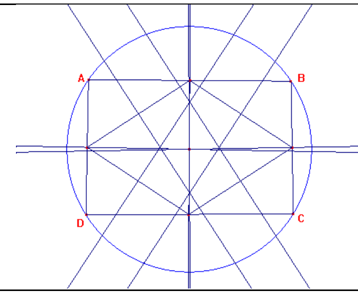
16	Brayan	[Elimina el cuadrilátero ABCD],…como hicimos…la carta esa, se acuerda	Pegar a manera de descripción la descripcion	
17	Lina	[Construye un segmento AB y traza dos rectas, una por cada extremo del segmento AB, sin embargo, las rectas son construidas sin garantizar la perpendicularidad]	Cortar aquí. 	
18	Leidy	No, venga [Borra la construcción de Lina, construye una circunferencia y un cuadrilátero inscrito]		Preguntarle a lina o indagar por que traza la circunferencia. Robusta no es la fiigura por que. Dibuja un rectángulo
19	Brayan	Nombre las puntas, los vértices		
20	Leidy	Construya la mediatriz, que pase por el punto medio		
21	Lina	[Construye las mediatrices de los lados del cuadrilátero inscrito]		
22	Leidy	Se cortan en este punto. Profe…		
23	Profesor	¿Qué paso?		
24	Leidy y Brayan	Profe aquí se cortan en un solo punto [señalan el		

		centro de la circunferencia]		
25	Profesor	Y, ¿cómo lo hicieron? [luego de unos segundos de silencio, continúo la indagación] ¿Qué hicieron primero?		
26	Lina	Primero hicimos el punto A, el punto B, el punto C y el punto D		
27	Profesor	Si, y luego, ¿Qué hicieron?, espera, venga revisamos la construcción. Yo vi que hicieron primero una circunferencia, luego un punto, otro punto, el cuadrilátero, hicieron las mediatrices, y se cortaban. Listo, y…¿habrá otro cuadrilátero diferente a este que me sirva?	No usaron la opción de arrastre para explorar el cuadrilátero cíclico.	

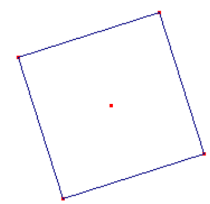
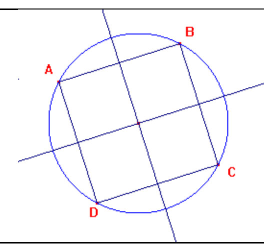
Leidy había construido un cuadrilateo ciclcio y tenia las mediatreices cuando ele profiesor les pido hacer otro con base en ese lo que hicieron fue inscribir en el cuadrado.

Es una exploración fallida que solo hace que descur bran que un rombo no es un cuadrilátero cíclico.

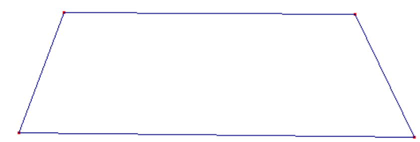
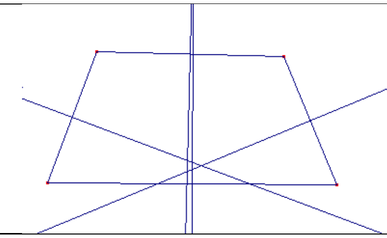
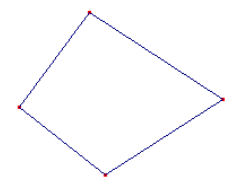
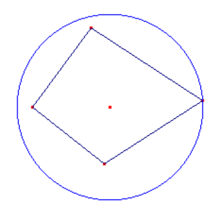
28	Leidy	Sí, [se dirige a Brayan] haga el rombo		
29	Profesor	Y… ¿no puedo utilizar la construcción para encontrar otro cuadrilátero? [Luego se va]		
30	Leidy	Sí, el rombo		
31	Lina	[Construye un cuadrilátero inscrito en el cuadrilátero ABCD]		

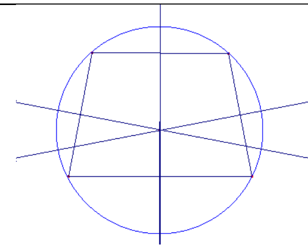
32	Leidy	Ahora tracemos las mediatrices. No, ese no sirve, porque no se encuentran todas las mediatrices en un mismo punto		

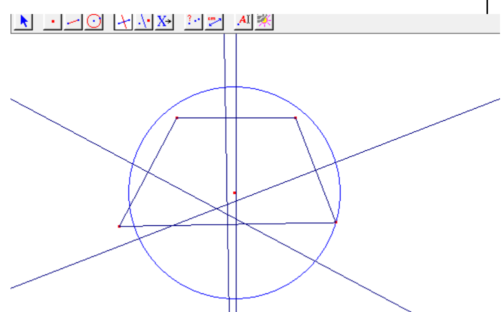
33	Brayan	Profe, no se pudo		

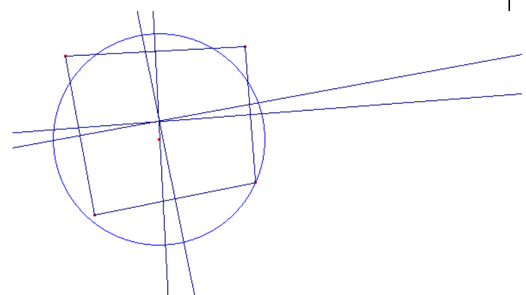
Comienza la primera socialización, ya esta registrada en la transcripción de Paula, Sebastián y Alejandra. Al finalizar se propone la tarea 2: Encontrar otro cuadrilátero en el que las mediatrices de los lados se corten en un solo punto.				
34	Brayan	[Construye un cuadrado utilizando la herramienta polígono regular]		
35	Leidy	Pero esa fue la que él hizo		
36	Brayan	No, no, ya la tenemos [construye una circunferencia circunscrita al polígono anterior, traza las mediatrices de los lados del cuadrilátero y nombra los puntos]		
37	Leidy	Ese sí cumplía la condición.		
38	Brayan	Espere, ¿que fue lo que hicimos?, hicimos un polígono regular, hicimos la circunferencia,		

		nombramos los puntos y pudimos ver que…		
39	Leidy	Profe		
40	Profesor	¿Qué paso?		
41	Leidy	Profe, pudimos ver que …		
	Profesor	¿Eso qué es?, ¿Ese polígono qué es?		
42	Leidy y Brayan	Un rombo, ese rombo si cumple la condición		
43	Profesor	Ese rombo cumple la condición…		
44	Leidy	Sí		
45	Profesor	Si, bien, pero aquí otra vez tengo algo particular, esta mediatriz [señala la mediatriz del segmento BC] coincide con esta mediatriz [señala la mediatriz del segmento AD] y esta mediatriz [señala la mediatriz del segmento AB] coincide con esta mediatriz [señala la mediatriz del segmentos DC] y entonces en últimas, digámoslo así, que las mediatrices están, o sea, dos vienen a ser la misma recta, las otras dos una misma recta. Entonces me queda algo parecido al rectángulo y al cuadrado..		
		Busquemos otro, otro cuadrilátero, en el cual usted pueda ver las cuatro mediatrices diferentes		
46	Brayan	¡Ah!, el que habíamos hecho		
47	Leidy	Profe, y en el último, en el cuarto, ¿el trapecio ya los comprobaron?		
48	Profesor	Pues, busquen trapecio u otro, necesito es otro cuadrilátero, diferentes a esos [señala los que están relacionados en el tablero], a ver si se cumple		

49	Lina	[Construye un cuadrilátero utilizando la herramienta segmento].		
50	Leidy	No, porque no tiene los lados iguales.		Anticipación
51	Lina	[Construye las mediatrices de los lados]		
52	Leidy	No tiene los lados iguales por eso no se cortan		
53	Profesor	Bien, ¿Se cortaron?		
54	Leidy	No. Pero profe, es porque están desiguales los lados		
55	Profesor	Pero entonces busquemos…		
56	Leidy	Tenemos que tener dos lados iguales		
57	Lina	Entonces hagamos…[construye un polígono utilizando la herramienta polígono]		
58	Leidy	¿Qué es eso?		
59	Lina	Tiene cuatro lados		
60	Leidy	Pero no son iguales		
61	Lina	¿Usted cómo sabe?		
62	Leidy	Porque a simple vista se ve		
63	Lina	[modifica la figura con la opción de arrastre, intentando dar la apariencia de trapecio isósceles]		
64	Brayan	Tiene que estar a la misma distancia		
65	Lina	Para medir hagamos esto [construye una circunferencia con centro en el interior del cuadrilátero]		
66	Brayan	No… tienen que ser el centro, el punto medio		
67	Lina	[Construye la circunferencia con centro en el interior del cuadrilátero y que pase por uno de los vértices del mismo] este punto debe quedar aquí, este punto debe quedar aquí y este punto debe		

		quedar aquí [inscribe el cuadrilátero en la circunferencia y construye las mediatrices]		
68	Leidy	O sea que se encuentran. no, no se pueden encontrar, no hay una que sea así… [realiza una seña con las manos que no se ve en el video] [los estudiantes abandonan la construcción]		

69	Brayan	Ese era el que estábamos haciendo [Se refiere al trapecio que están construyendo y discutiendo con el profesor en otro grupo]		
70	Leidy	Profesor. Estábamos haciendo este [un cuadrilátero con apariencia de trapecio] pero es que no se como se llama.		
71	Profesor	Bueno. Yo no necesito tampoco que se sea una figura particular. Yo no les pedí que fuera una figura especial. Yo no les pedí que fuera un cuadrado, ni que fuera un trapecio, ni que fuera un rectángulo; yo nunca les pedí eso. Les pedí un cuadrilátero cualquiera, así no fuera especial. Solo	tachar	

		les pedí una condición. ¿Cuál condición?		
72	Leidy	¿Qué tuvieran los lados iguales?		
73	Profesor	No…yo dije vamos a construir un cuadrilátero que..		
74	Leidy	Que las mediatrices se corten en un mismo punto		
75	Profesor	Esa fue mi condición. Yo lo quiero ver.		
76				
77	~~Lina~~	~~Pues está el cuadrado.~~		
78	~~Profesor~~	~~Si. Pero quiero ver otro cuadrilátero en el cual las mediatrices se crucen en un mismo punto.~~		
79	Lina	[Utiliza la opción de arrastre para tener un cuadrilátero que cumple la condición] Ese.		
~~80~~	~~Profesor~~	~~¡Uy! Pero espera. Parece que no. [señala que hay una mediatriz ligeramente separada del punto de corte]~~		
~~81~~	~~Lina~~	~~Corrige la construcción~~		
82	Profesor	Ese cuadrilátero me sirve. Se cortan en un mismo punto las mediatrices		
83	Estudiantes	Si.		
~~84~~	~~Profesor~~	~~La pregunta es: ¿Ese cuadrilátero es especial? O sea ¿Es un cuadrado?~~		
~~85~~	~~Estudiantes~~	~~No.~~		
~~86~~	~~Leidy~~	~~No. Porque no tiene los lados iguales.~~		
~~87~~	~~Profesor~~	~~¿Es un rombo?~~		

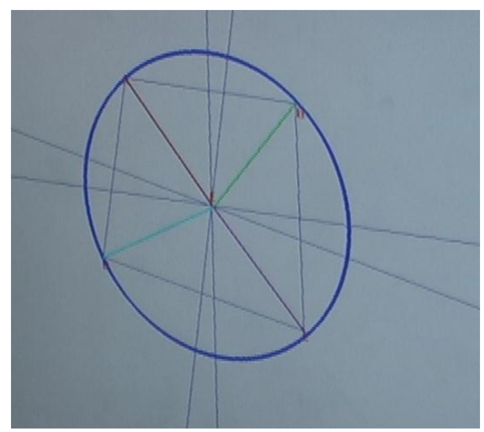
~~88~~	~~Leidy~~	~~No~~		
~~89~~	~~Profesor~~	~~¿Es un rectángulo?~~		
~~90~~	~~Estudiantes~~	~~No.~~		
~~91~~	~~Profesor~~	~~¿Es un trapecio?~~		
~~92~~	~~Estudiantes~~	~~No.~~		
93	Profesor	¿Tiene algo especial ese cuadriláero? Es decir ~~¿Tiene algo que ustedes conozcan de los especiales?~~		
94	Brayan	No.		
~~95~~	~~Profesor~~	~~¡Bien! Entonces me corté ahí. [se refiere al punto de concurrencia de las mediatrices] ¿Qué paso con esa circunferencia? ¿Por qué trazaron esa circunferencia?~~		
~~96~~	~~Lina~~	~~[Borra la circunferencia de la figura]~~		
~~97~~	~~Profesor~~	~~¿Y porque la vas a borrar, solo porque te dije que porque la pusiste ahí?~~		
~~98~~	~~Niñas~~	~~Risas.~~		
~~99~~	~~Profesor~~	~~Bueno. ¡Listo! Me sirve. Nombra me los puntos.~~		
~~100~~	~~Lina~~	~~[Nombra los vértices del cuadrilátero y el punto de concurrencia de las mediatrices]~~		
101	Profesor	¡Listo! Dejémoslo hasta ahí. Voy a preguntarles a ustedes algo entonces. ¿Se cortaron en un solo punto?	Este fragmento comienza cuando los estudiantes tienen un cuadrilátero que cumple la condición, que inicialmente estaba inscrito y pierde la inscripción cuando utilizan el arrastre, por lo tanto borraron esa circunferencia	
102	Lina	Si.		
~~103~~	~~Profesor~~	~~El punto se llama ¿Cómo?~~		
~~104~~	~~Lina~~	~~E.~~		
105	Profesor	La pregunta ahora es la siguiente. ¿Ese punto qué		

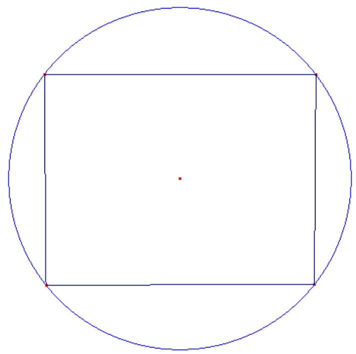
		característica tiene?		
106	Lina	Pues que el punto E está a la misma distancia del segmento AB.		
107	Profesor	¿Del segmento AB?		
108	Brayan	De los puntos A, B, C y D. Entonces el punto E esta dependiendo de las mediatrices y como…[Traza la circunferencia con centro en el punto E y que pasa por los vértices del cuadrilátero]		
109	Profesor	¡No! Pero, espera. Volvamos a la primera afirmación. Vamos propiedad por propiedad. ¿Sí? ¿Qué el punto E esta a la misma distancia de quién? Me dijo Varona[Brayan]		
110	Brayan	De A, B, de los segmentos AB, BC, CD…		
111	Profesor	¡Ojo! ¿Me esta afirmando que el punto[de concurrencia] está a la misma distancia del segmento?		
112	Leidy	¡Um! Si. Sería: el punto E está a la misma distancia de los puntos A, B, C y D.		
113	Profesor	Bueno. Eso es lo que ustedes me dicen. Me lo demuestran. ¿Cómo me lo demuestran?		
114	Brayan	Con una circunferencia.		
115	Lina	No. Además por que si…		
116	Profesor	No. Pero, espérate, primero vamos a escuchar el argumento de Brayan		
117	Brayan	Pues, yo hice una circunferencia que se puede ver que las mediatrices se unen en un solo punto. Entonces hicimos una circunferencia en ese punto para ver si estaba a la misma distancia de los otros puntos.		
118	Profesor	¿Y lo puedo garantizar por?		
~~119~~	~~Brayan~~	~~Por la circunferencia.~~		
~~120~~	~~Profesor~~	~~¿Y por qué lo puedo garantizar?~~		

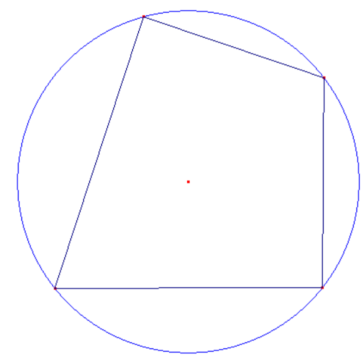
121	Leidy	Porque estos [señala con el dedo sobre una de las mediatrices]serían radios de la circunferencia.		
122	Profesor	¿Cuáles?		
123	Leidy	Las mediatrices.		
124	Profesor	¿Serían radios de la circunferencia las mediatrices? O sea que este es un radio. [señala con el dedo a lo largo de toda la recta mediatriz]		
125	Leidy	No. Sería hasta aquí. [hasta el borde de la circunferencia] Y como este punto [señala el punto B]está dependiendo de la circunferencia… el radio de aquí hasta aquí [radio BE] sería el mismo que de aquí hasta aquí [radio AE]		
126	Lina	Porque todos los radios que se trazan en una circunferencia son generados de la misma manera.	Interpretación: son congruentes	
127	Profesor	Bien. O sea que con eso ustedes me garantizan que el punto E. Y yo ya quedé convencido. Perfecto. No utilicemos ahora ese argumento de la circunferencia, sino otro hecho para garantizar que el punto E está a la misma distancia de los vértices. ¿Cuál es el otro hecho?		
128	Leidy	Profe, porque la mediatriz del segmento AB, cualquier punto que se trace dentro de esa mediatriz está a la misma distancia de A que de B.		
129	Profesor	Si. Y que pasa. Entonces ya sé que está a la misma distancia de A que de B. Perfecto. Ya hable de A y de B. ¿Y de los otros como hablo		
130	Leidy	De los otros. Pues… que la mediatriz del segmento BC, cualquier punto que esté en la mediatriz del segmento BC, está a la misma distancia de B que de C.		
131	Lina	cualquier punto que esté en la mediatriz del segmento CD, está a la misma distancia de D que		

		de C.		
132	Brayan	cualquier punto que esté en la mediatriz del segmento DA, está a la misma distancia de D que de A. [Señala incorrectamente la mediatriz del segmento AB]		
133	Profesor	¿Cuál es la mediatriz de AB?		
134	Brayan	Ésta. [señalando incorrectamente y corrigiendo después] ¡No! Ésta.		
135	Profesor	Y ¿Por qué ésta y no ésta? [Señalando las dos rectas que podrían considerarse mediatrices del segmento AD]		
136	Lina	Porque ésta es mediatriz de BC.		
137	Leidy	Porque es que ésta [señalando la mediatriz de AD] pasa por el punto medio de AD		
138	Profesor	¿Le creen?		
139	Brayan	Si.		
140	Profesor	Entonces ahora si que puedo hacer, que puedo decir.		
141	Lina	Que todos los puntos que se tracen dentro de la mediatriz va a tener la misma distancia de todos los puntos.		
142	Brayan	Que todas las distancias son iguales		
143	Profesor	¿y por que?		
144	Brayan	Porque lo comprobamos.		
145	Profesor	¿Por qué?... ¡Ya me lo dijeron!		
146	Lina	Por lo de los radios.		
147	Lina	De nuevo. Entonces es. Si E esta a la misma distancia de A que de B, por lo general tiene que estar a la misma distancia de B que de C, que de C que de D y que de D que de A. Porque es lo transitorio. Si pudimos comprobar que E está a la		

		misma distancia de A que de B. Entonces como dijo el profesor: si yo tengo la misma plata suya [señalando a Brayan] y él [Brayan] tiene la misma plata de ella[Leidy], entonces por lo general, yo [Lina] tengo la misma plata que ella [Leidy]. Es como igual. ¡Y Ya!		
148	Profesor	[Volviendo de otro grupo] Ustedes encontraron un cuadrilátero cualquiera. ¿Cierto? Sin ninguna condición especial		
149	Lina	Cierto.		
150	Profesor	Ese cumple la condición que sus mediatrices se encuentran en el mismo punto que llamaron E. Y tenían un argumento para decir ¿Por qué eso pasaba?		
151	Leidy	El argumento es que todos los radios de una circunferencia son congruentes		

152	Profesor	Bien. Entonces yo les pregunto ¿que característica tiene ese cuadrilátero que tienen ustedes en la pantalla que hace que las mediatrices se encuentren en el mismo punto?		
153	Leidy	Que los puntos [señala los vértices del cuadrilátero] están sobre la circunferencia.		
154	Profesor	¿Cómo me comprobarías eso en otra figura? Has otra figura y muéstrame que eso se cumple.		
155	Leidy	En los triángulos se cumple.		
156	Profesor	Si en los triángulos. ¿Y en los cuadriláteros?		
157	Leidy	En el rectángulo se cumple, en el trapecio se cumple, en el rombo no se cumple.		
158	Profesor	¿Todos los rombos?		
159	Leidy	Algunos rombos.		

160	Lina	Es que en algunos rombos las mediatrices parece que fueran dos pero es una sola.		
161	Profesor	Tu me dices que los cuadriláteros en los que las mediatrices se cortan, sus vértices están sobre una circunferencia. ¿Podrías hacer un diagrama que muestre eso?		
162	Lina	[Traza una circunferencia en la pantalla e intenta construir sobre el un cuadrilátero con apariencia de cuadrado]		
163	Profesor	¿Tienes que dibujarlo especial? O la condición que tu me decías es ¿cuál?		
164	Leidy	Que los vértices estén sobre la circunferencia.		
165	Profesor	Y ¿tienes que dibujarlo cuadrado o podría ser cualquiera?		
166	Leidy	Cualquiera		
167	Lina	[Usa el arrastre para deformar el cuadrilátero]		

				
168	Profesor	Entonces según tu afirmación si trazara las mediatrices… ¿Qué pasaría?		
169	Leidy	Se cortan en un punto		
170	Profesor	No las has trazado todavía ¿cierto? Pero tu dices que si las trazaras se cortarían en un mismo punto.		
171	Lina	[construye las mediatrices comprobando que se cortan en un mismo punto]		
172	Socialización.			

TRANSCRIPCIÓN DEL PROBLEMA DE LOS CUADRILÁTEROS CICLICOS

EN EL GRUPO FESE

Fecha: 28 de noviembre de 2011

Lugar: Sala de informática IED Instituto Nacional de Promoción Social Villeta

Docente: Diego Aníbal Martínez González

Jorge Eliecer Buitrago Londoño

Estudiantes: Felipe Garzón.

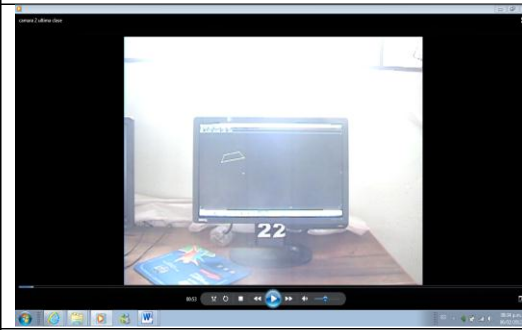
Sebastián Bolaños.

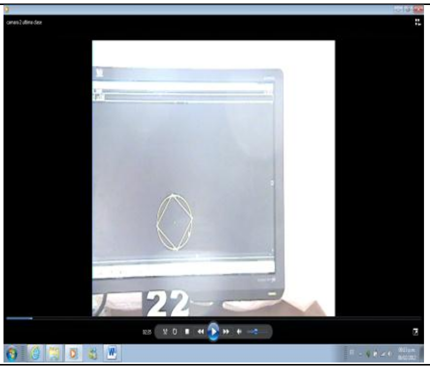
Problema:

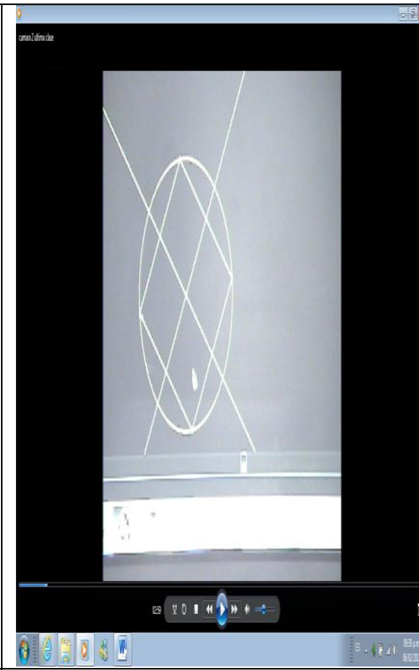
¿En cuáles cuadriláteros puede llegar a pasar que las mediatrices se corten en un mismo punto?

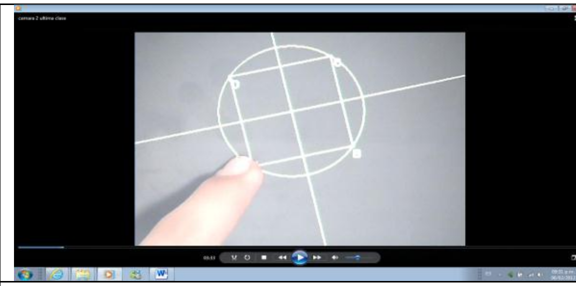
Objetivo: Identificar las características de un cuadrilátero en el cual las mediatrices de sus lados se cortan en un mismo punto.

N°			Imagen
1	Profesor	Trazar cualquier cuadrilátero, no tienen que reproducir	Es muy importante haber llamado al cuadrilátero abcd

		el que yo construí acá, cada uno puede construir su cuadrilátero. Vamos a llamarlo ABCD. ¿Listo?	por que asi es fácil refereenciar el proceso para todos los estudiantes.
2	Felipe	Haga los segmentos… [se dirige a Sebastián]Ah, no, métase a polígono irregular, métase en polígono. Ahora búsquele que tenga cuatro lados. No, doce, no tanto, ¿seis? Venga [Toma el mouse por su compañero][Traza un cuadrilátero usando la herramienta segmento.] Aclarar lo que mk del Jorge escribió mal	
3	Profesor	~~Ahora, sin el Cabri, sin el Cabri, nos olvidamos del Cabri. Voy a pensar en mediatrices. ¿Si? Voy a pensar en mediatrices. Voy a pensar en los tipos de cuadriláteros que hay. Y~~ voy a pensar en cuales cuadriláteros yo puedo llegar a suponer o a prever, que de pronto en cuales cuadriláteros las mediatrices se cortan en un mismo punto.	
~~4~~	~~Felipe~~	~~En un cuadrado.~~	
~~5~~	~~Sebastian~~	~~Si; en un cuadrado.~~	
6	Felipe	Pero hagamos el experimento con este. [Se refiere al cuadrilátero trazado previamente]Figura del numeral 2.	
~~7~~	~~Profesor~~	~~¿En cuáles?~~	
8	Felipe	En un cuadrado perfecto. En un trapecio. [Traza las mediatrices del trapecio] No en un trapecio no.	Felipe hizo un cuadrilátero cualquiera y lo descarto comentar para el fragmento uno
~~9~~	~~Profesor~~	~~Listo. Vale. Tengo cuatro opciones, me dicen, yo supongo sin aún utilizar el Cabri que las mediatrices se~~	~~Comentar a manera de isntruccion~~

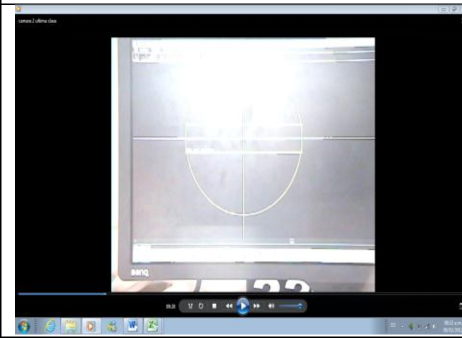
		~~cortan en un solo punto o en un cuadrado o supongo que en un rombo, o supongo que en un rectángulo o supongo que en un trapecio. Ahora viene la actividad, vamos a encontrar, es parte del ejercicio de hoy, del problema. ..~~ Vamos a encontrar un cuadrilátero en el cual las mediatrices de sus lados se corten en un solo punto. Vamos a buscarlo	
10	Felipe	Dibujemos un cuadrado.	
11	Sebastian	Con polígono regular.[Traza un cuadrilátero usando la herramienta polígono regular]	
12	Felipe	Saque las mediatrices. No, no, espere, no saquemos las mediatrices, hagamos algo más interesante.	
13	Sebastian	¿Cómo que?	
14	Felipe	[Toma el mouse y traza una circunferencia con centro en el centro del polígono]	
15	Sebastian	Primero para ver. Si.	
16	Felipe	Ah, no espere, se me corrió un poquito vuelva a hacer el círculo. Tocaba alargarlo más.[Traza la circunferencia con centro en el centro del polígono y esta vez hace que la circunferencia pase por uno de los vértices del cuadrado.]	

17	Felipe	En un cuadrado perfecto[Traza las mediatrices del cuadrado]	
18	Profesor	Espere. O sea que¿ ustedes suponen que ahí las mediatrices se cortan en un solo punto?	
19	Felipe	Si. Como nosotros usamos polígono irregular para hacer el cuadrado, ahí nos daba el punto centro del cuadrado. Del punto centro nosotros sacábamos una circunferencia, la cual trazábamos hasta un punto que podría…[señala uno de los vértices del cuadrado] llámelo A, este B, este C y este D.[Señalando los otros vértices del cuadrado] Para poder explicarlo mejor.	
20	Sebastian	Si queda mejor.	

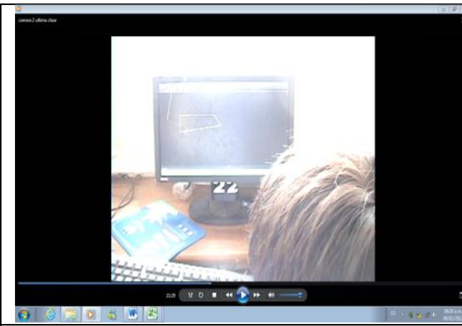
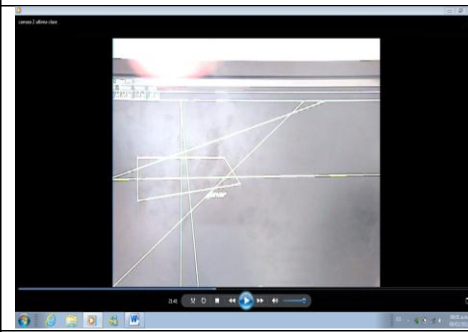
21	Felipe	Lo trabajamos hasta el punto A. De este punto A, abarca también el punto B, el C y el D. Entonces ahí ya comprobamos eso.	
22	Sebastian	Si eso queda comprobado, son como radios de la misma circunferencia.	Aquí los estudiantes están armando un argumeto espontáneamente.
23	Felipe	Si, por que la misma circunferencia tiene los radios congruentes	
24	Sebastian	Y se cortan en un solo punto.	
25	Felipe	Llamemos a este punto F[Señala el centro de la circunferencia]	

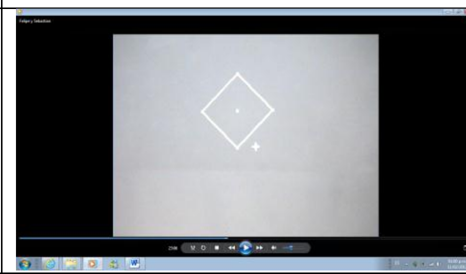
26	Felipe	Intentemos hacerlo con un rectángulo. Alargue ese para formar un rectángulo[Se refiere al cuadrado que han construido con la herramienta polígono regular]	
27	Sebastian	No se deja alargar.	
28	Felipe	[Borra el polígono regular y Construye un rectángulo usando rectas perpendiculares]	
29	Sebastina	Listo.	
30	Felipe	Ahora vamos a trazar las mediatrices. [Trazan las mediatrices]	
31	Sebastian	Se encuentran las cuatro en un solo punto.	
32	Felipe	En el punto centro.	
33	Felipe	Cree mejor primero el punto.[Se refiere a ponerle nombre al punto de concurrencia de las cuatro mediatrices del rectángulo. El estudiante tiene dificultad para nombrar el punto debido a que le	

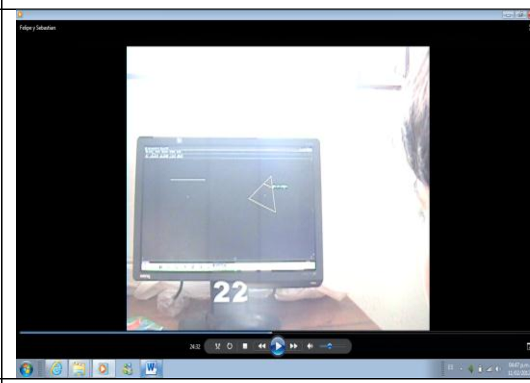
		aparecen cuatro rectas en este lugar.]	
34	Felipe.	Haga la circunferencia aquí.[se refiere a trazar una circunferencia con centro en el punto de concurrencia de las mediatrices y que pase por los vértices del rectángulo.	
35	Felipe	Pues se supone que… ¡mire! Nosotros encontramos el punto centro de esa. [Se refiere al cuadrado al que examinaron inicialmente la propiedad pedida]	
36	Sebastian	Pues es que el punto centro de estas cuatro mediatrices... [Se refiere al punto de concurrencia de las mediatrices del cuadrado]	
37	Felipe	No; son dos mediatrices nomas, solo que esta… [señala una de las mediatrices del cuadrado] ahí hay dos mediatrices.	Sacarlo aparte para relacionarlo con el del primer grupo.
38	Felipe	Pero usted sabe que se colocan las cuatro, sigue siendo la misma por que es una recta que sigue.[Las mediatrices se traslapan]	
39	Sebastian	…Y como es un cuadrado perfecto.	
40	Felipe	Pues sabemos que en un cuadrado perfecto si se puede. Ahora intentemos con el rectángulo.	
41	Felipe	Pues se supone que también.	
42	Sebastian	[Construye un rectángulo usando perpendiculares]	
43	Felipe	Saque las mediatrices	
44	Felipe	Ahora saque las mediatrices de este y de este. [Se refiere a solo dos lados adyacentes del rectángulo.	
45	Felipe	Ahora una circunferencia. [Con centro en el punto de concurrencia y que pasa por los vértices del rectángulo]	
46	Felipe	Creemos primero el punto. Cree un punto en la interceccón. La intersección de esta recta y esta recta. [Se refiere a las dos mediatrices que trazaron]	
47	Felipe	Ahora saque la circunferencia del punto de	

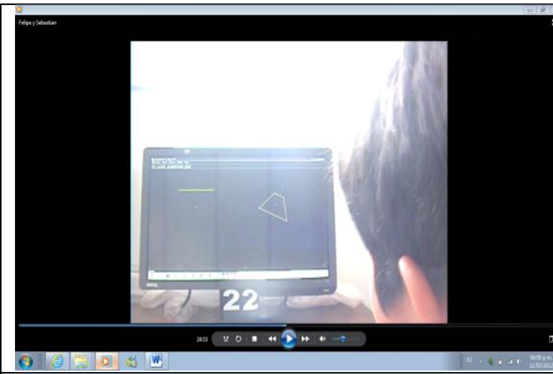
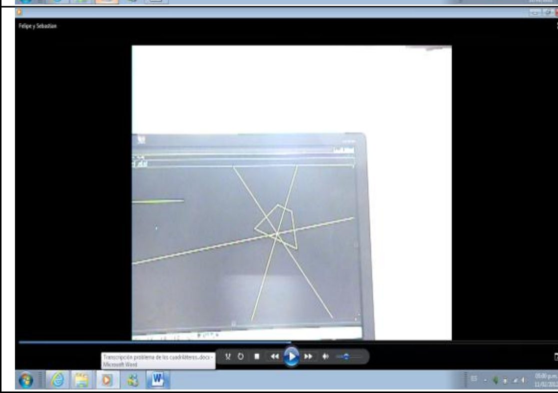
		intersección.	
48	Felipe	También	
49	Sebastian	También pasa por todos. [Los vértices]	
50	Felipe	~~¡Uy! ¡Qué desgracia!~~	
51	Felipe	~~Ahora nombrémoslos cada uno [Los vértices]~~	
52	Sebastian	~~Este nos sirve también para el ejercicio que nos pusieron.~~	

~~53~~	~~Profesor~~	~~¿Qué se ha encontrado hasta ahora?~~	
~~54~~	~~Felipe~~	~~Un cuadrado perfecto y un rectángulo?~~	
~~55~~	~~Profesor~~	~~Recordemos el problema planteado. Estamos buscando cuadriláteros en los que las mediatrices se corten en un solo punto. [Se realiza la socialización con lo hecho hasta ahora en los tres grupos]~~	
56	Profesor	~~Chicos. ¡Bien! Volvamos a mi ejercicio~~. Quiero que encuentren otro cuadrilátero, diferente a los que ya hemos hecho. ~~Que no sea cuadrado, que no sea rectángulo en el que las mediatrices de los lados se corten en un solo punto. Ya encontré varios, el cuadrado, el rectángulo… Busquemos otro.~~	
57	Sebastian	¿Cuál otro podríamos hacer?	

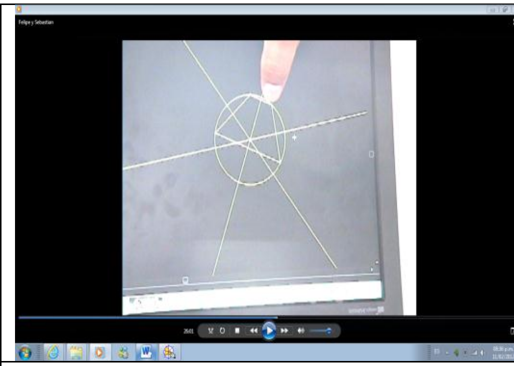
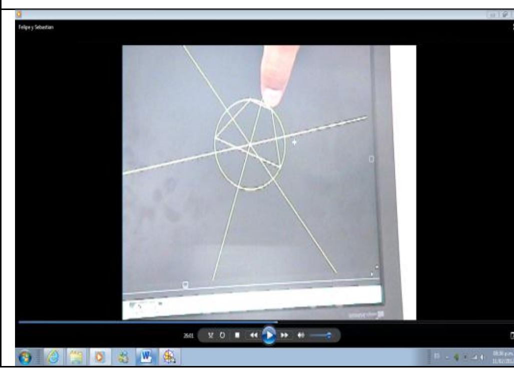
58	Sebastian	[Traza un cuadrilátero cualquiera en la pantalla]	
59	Felipe	[refiriéndose a la figura construida por sebastian] No pero es que eso [el problema propuesto]es una figura en la que nosotros tenemos que saber que es lo que estamos haciendo.	
60	Sebastian	[Traza las mediatrices del cuadrilátero antes citado. Le queda una recta que no corresponde a una mediatriz]	
61	Felipe	Espere si se encuentran [se refiere a las mediatrices de la figura]	
62	Felipe	~~Es que usted saca demasiadas mediatrices~~. Solo necesitamos esta, porque estas dos son las que pasan por el este [21:48][Borra las mediatrices del cuadrilátero y la recta que no corresponde a una mediatriz.]	
63	Sebastian	Pero por lo tanto no se encuentran todas en un solo punto.	
64	Felipe	Bueno, si nosotros, uhm… si,	

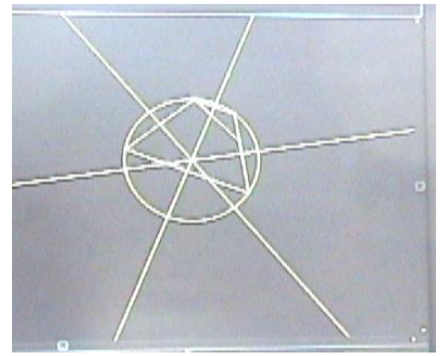
65	Sebastian	No se encuentran en un solo punto. Volvamos a hacer lo que hicimos a ver.	
66	Sebastian	Mediatriz de este segmento, mediatriz de este segmento, mediatriz de este segmento, son tres mediatrices, y de esta. No se encuentran todas en un mismo punto. [Traza las cuatro mediatrices del cuadrilátero que tiene en la pantalla]	
67	Sebastian	No nos sirve la figura.	
68	Feipe	Necesitamos encontrar una [cuadrilátero] que los ángulos sean de 90 grados.	
69	*Felipe*	*Pero es que las dos de noventa grados son el rectángulo y el cuadrado. ¿Qué otra podemos hacer?*	
70	*Sebastian*	*No se.*	
71	Felipe	De noventa grados… Hagamos un cuadrado al lado.	
72	Sebastian	Un cuadrado ¿Qué?	
73	Felipe	Ésta, esta figura. [Busca entre los diferentes archivos que tienen abiertos] ¡Ay! No joda que usted borró la figura que hizo.	
74	Sebastian	¿Cómo?	
75	Felipe	[En un archivo en blanco construye un cuadrado con la opción polígono regular.]	
76	Sebastian	Lo mismo que el cuadrado. Como si fuera un rombo [por la posición del cuadrado]	
77	Sebastián	No creo que sirva porque el cuadrado ya lo hicimos.	
78	Sebastián	¿Qué otra se le ocurre a usted?	

79	Felipe	La otra sería: primero trazar un segmento [traza un segmento] y tendríamos ya el primer lado, de esto podríamos sacar una recta paralela. ¡Ah!, no, pero es que si saco una recta paralela ya tendría un rectángulo.	
80	Sebastián	Exactamente.	
81	Felipe	Entonces saquemos…	
82	Sebastián	No. ya se cual… [toma el mouse pero luego indica gestualmente con las manos] nos podría servir. Esta de acá, dos líneas que lleguen hasta acá y cruza.[Muestra con sus manos la forma de un trapecio isósceles de altura mayor que su base menor y con la base menor en la parte inferior de la pantalla] Sería un cuadrilátero.	
83	Felipe	Uhm, si, sería casi un… si. Espere entonces intentamos.	
84	Sebastián	Pues, tendrían que ser perfectas esas líneas.	
85	Felipe	Para eso podemos hacer esto: paralelas. ¡Ah! No, no, espere, tracemos una perpendicular… no. Tracemos un triángulo y le mochamos la punta.	
86	Sebastian	Si. Pues construyámoslo con polígono regular.[Traza un triángulo equilátero] Le podemos quitar una punta.	
87	Felipe	Bueno, técnicamente le estamos poniendo un segmento. [Traza un segmento con extremos en dos lados del triángulo y visualmente paralelo al tercer lado.]	
88	Felipe	No. Pero es un trapecio raro.	

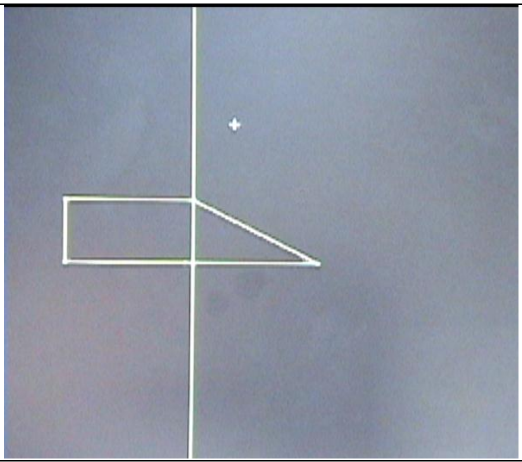
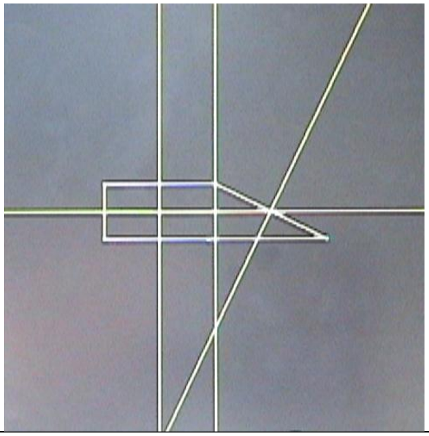
89	Felipe	[Intenta borrar el vértice superior del triángulo, pero al percatarse que se borra todo el triángulo, primero remarca el cuadrilátero formado y luego si elimina el triángulo.]	
90	Felipe	Ahora vamos con la herramienta mediatriz.[Traza las cuatro mediatrices del cuadrilátero.	
91	Sebastian	Hasta el momento se están encontrando.	
92	Felipe	Acá se encontraron. Pero es que como se llama esta vaina. Este es el punto. [El estudiante selecciona la opción circunferencia e intenta trazar una circunferencia con centro en el punto en el que parece concurren las mediatrices]	
93	Sebastian	No, no, le salió la verdad. Ese punto no es [El programa le pregunta al estudiante cual será el centro de la circunferencia, ante lo cual el estudiante no comprende la pregunta, dado que visualmente solo hay un punto en ese	

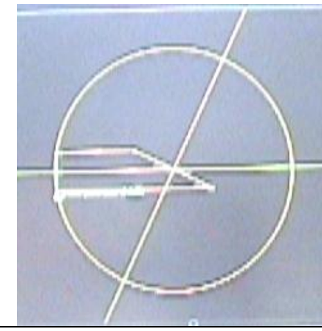
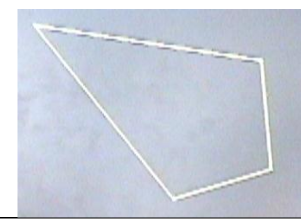
		lugar.]	
94	Felipe	Primero cree el punto [Se refiere a usar la opción punto del menú para determinar un punto sobre la intersección de las rectas.]	
95	Sebastian	[Toma el puntero, con la opción circunferencia del menú y selecciona recta cuando el programa le pregunta en donde ubicará el centro de la circunferencia] Punto en… la recta	
96	Felipe	No, no, no, no.	
97	Sebastian	No, primero creemos el punto [toma la opción punto del menú y crea un punto en la intersección de dos de las mediatrices del cuadrilátero con el cual están trabajando.] … la intersección de esta recta y esta recta	
98	Felipe	Ahora de ese punto saque la circunferencia	
99	Sebastián	[Traza una circunferencia con centro en el punto construido y uno de los vértices del cuadrilátero para el radio.]	
100	Profesor	¿Qué paso?	
101	Sebastián	Hicimos como una especie de triángulo y le quitamos la punta. Le pusimos un segmento. Después pusimos un segmento aquí, otro aquí y otro aquí.[Se refiere a la construcción construida]	
102	Felipe	Hicimos un triángulo y le quitamos la punta	
103	Sebastián	No le quitamos, le pusimos un segmento.	

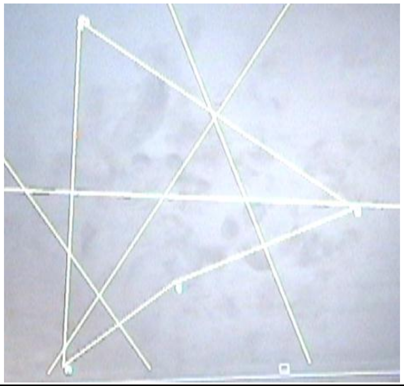
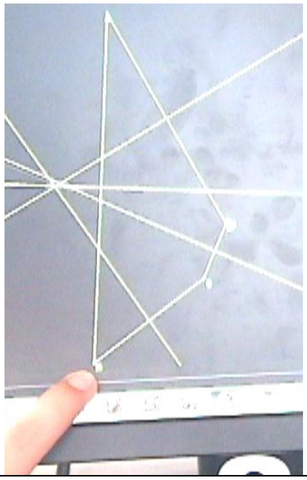
104	Profesor	¿Puedo pregunta algo?¿Qué característica tiene este segmento de acá?[Se refiere al segmento con el que los estudiantes han truncado el triángulo equilátero.]	
105	Profesor	Osea, ¿Porqué lo ubicaron así?[Paralelo a la base del triángulo] No lo hubieran podido poner así ¿por ejemplo?[Oblicuo en relación a la base del triángulo]	
106	Felipe	Nosotros lo que intentábamos es encontrar un cuadrilátero. Entonces como nosotros tenemos la definición de cuadrilátero es que tenga cuatro lados. Entonces nosotros lo primero que hicimos fue este, estos dos tienen la misma medida.[Señala los lados “no paralelos” del cuadrilátero con apariencia de trapecio isósceles.] o sea son congruentes	
107	Profesor	Y ¿Por qué lo pueden garantizar?	
108	Felipe	Lo puedo garantizar por que era un triángulo… cuando… dele mostrar. Nosotros sabemos que tipo de triángulo es. El que tiene dos lados iguales. Entonces nosotros al trazar acá un segmento ?[Se refiere al segmento con el que los estudiantes han truncado el triángulo equilátero.], estos dos conservan la misma propiedad de ser dos segmentos congruentes	

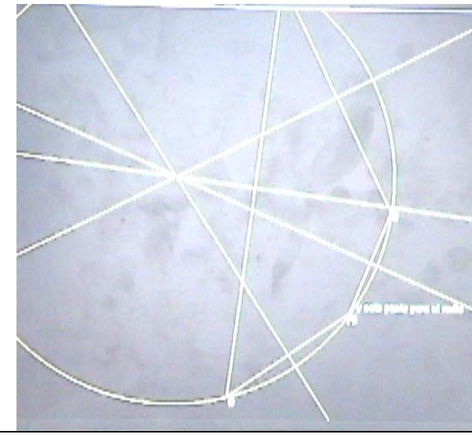
109	Profesor	Va nuevamente la pregunta: Tu colocaste un punto acá y trazaste un segmento desde aquí hasta aquí [Se refiere al segmento con el que los estudiantes han truncado el triángulo equilátero] y me dices que eso te garantiza que estos dos son congruentes .[Señala los lados "no paralelos" del cuadrilátero con apariencia de trapecio isósceles.] Entonces yo voy a hacerte algo [Toma el mouse y sobre el cuadrilátero que han trazado los estudiantes traza un segmento con extremos sobre los "lados no paralelos del trapecio" (con apariencia de no ser paralelo a " la base del trapecio)	
110	Sebastian	Ya no quedan congruentes.	
111	Felipe	Ya no serían.	
112	Profesor	¡Ah! Entonces ¿Qué característica tiene este segmento? [Se refiere al segmento con el que los estudiantes han truncado el triángulo equilátero. Borra el segmento que el profesor ha trazado sobre la construcción]	
113	Felipe	Que el segmento está perpendicular… está paralela a esta línea [Señala la " base mayor" del cuadrilátero con apariencia de trapecio] entonces es lo que puedo decir.	
114	Profesor 27:17	¡Um! Osea que tu dices que este segmento…	
115	Felipe	Es paralela a la línea de abajo.	
116	Profesor	¿ y eso me garantiza entonces que estos son congruentes?	
117	felipe	¡Si! nosotros tenemos este venga voltéelo un poquito Sebastián no tanto colóquelo medio recto eso	
118	Profesor 27:37	Bueno dejémoslo hasta ahí, yo te voy a creer que son paralelos y eso te garantiza que son congruentes estos dos lados ¿cierto? entonces ¿que figura formaste ahí?	

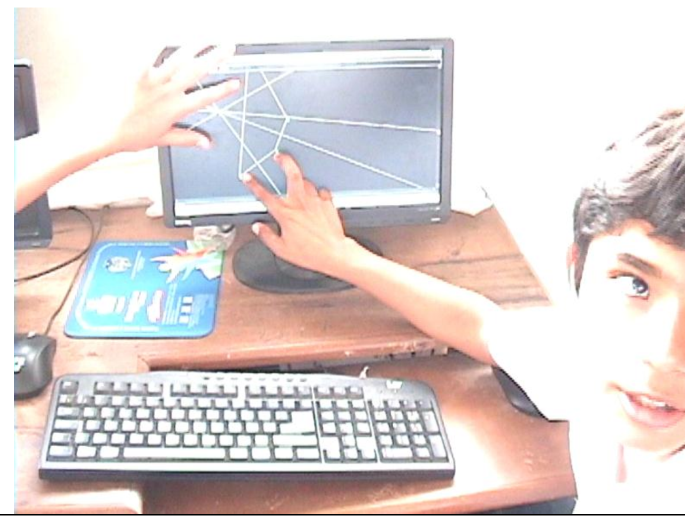
119	Sebastian	Es como una especie dé trapecio	
120	Profesor 27:56	Y es mas les voy a colaborar, este trapecio tiene los lados no paralelos, que son estos dos, [los señala] congruentes, ¿cierto? ustedes me lo dijeron. Ese trapecio tiene un nombre se los voy a decir. Se llama trapecio isósceles. ¿si? Entonces ustedes me dicen que con el trapecio isósceles se cumple la condición. ¡ah! Bien o sea que yo puedo ahorita decirle a los compañeros… ¿Qué puedo decirle a los compañeros?	
121	Sebastián	Que el trapecio cumple la condición.	
122	Profesor	Busquemos otro cuadrilátero. Ya hemos encontrado hartos, cuadrado, hemos encontrado el rectángulo, hemos encontrado el trapecio isósceles. Ahora busquemos otro cuadrilátero en el cual se cumpla la condición.	
123	Felipe 28:34	Sáquele el ángulo a cada uno de estos.[quiere decir que use la herramienta medida para encontrar la medida de los ángulos del cuadrilátero que tienen en la pantalla] Sáquele cuanto mide cada uno.	
124	Profesor	Lo otro, Garzón, [Felipe] ya hemos buscado cuadriláteros especiales, el cuadrado es un cuadrilátero especial, tiene varias condiciones, un rectángulo es un cuadrilátero especial, un trapecio es un cuadrilátero especial; ¿será que solamente se cumple la condición en cuadriláteros especiales?	
125	Sebastinan	¿Será que sí? o ¿será que no?	
126	Profesor 29:06	¿Será que solamente tiene que ser cuadrilátero especial para que cumpla la condición?	
127	Felipe	Bueno, ya descubrimos que ese [se refiere al trapecio isósceles] ahora vamos a otro, cree un nuevo archivo.	
128	Sebastian	¿Qué podríamos hacer en este?	
129	Felipe	Cual es un cuadrilátero que no sea… recta paralela y	

		ahora recta perpendicular [construye nuevamente un rectángulo usando esta vez, además de la herramienta rectas perpendiculares, la herramienta rectas paralelas. Traza la mediatriz de uno de los segmentos horizontales. Traza un segmento desde uno de los vértices del rectángulo hasta el punto de intersección del segmento y su mediatriz. Formando la figura que se muestra]	
130	Sebastián	Ahora si nos sirve. Y está mediatriz ya no nos sirve ahí. [la borra]	
131	Felipe	No, ella ya no nos sirve porque no es el punto de centro.	
132	Sebastián	Ahora podemos hacer mediatriz [Traza las cuatro mediatrices]	
133	Felipe	No va a cumplir la esta [condición]. Esta no se encuentran nunca porque, que sean paralelas van	

		solas.	
134	Sebastián 33:33	Se van a encontrar no más dos.Borre todo lo que hicimos.	
135	Felipe	Pero espere… [Borra las mediatrices de los lados paralelos de la figura y traza una circunferencia con centro en la intersección de las otras dos mediatrices y que pasa por los lados del cuadrilátero que forman ángulo de 90 grados] Sería no más estos dos [se refiere a los vértices por los que pasa la circunferencia que construyó. Borra toda la figura]	
136	Sebastían	Ensayemos con éste. [Traza un cuadrilátero con la herramienta segmento y sin darle condiciones específicas]	
137	Felipe	Haga uno a la loca.	
138	Sebastián	Tiene cuatro lados, es un cuadrilátero.	
139	Felipe	No espere, eso no es tan a la loca, espere, ¿Cómo es que se llamaba esa figura? Nosotros ya la habíamos visto. Hay una figura como en estilo de punta de flecha	
140	Sebastián	Miremos sus mediatrices a ver. [Traza dos de ellas] Hasta el momento cumplen la condición. [Traza las otras dos] No cumplieron la condición.[Borra la figura]	
141	Profesor	Recuerda que tienes el arrastre. Lo que estaba haciendo Sebastián me parecía bueno. Tenía un cuadrilátero, le trazo las mediatrices [El estudiante traza un cuadrilátero cualquiera y le traza sus	

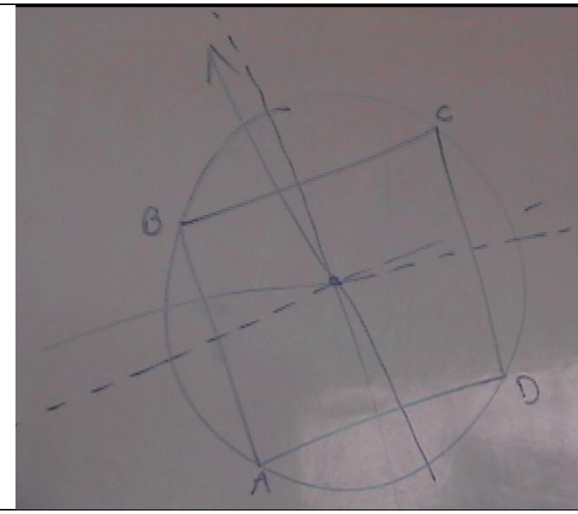
		mediatrices]. No cumple la condición, pero tienes el arrastre, nómbrale los vértices y usa el arrastre.	
142	Felipe	Arrastre esa vaina. Arrástrelo del punto A. Ahora arrastre este [el punto D]	
143	Sebastián	[Arrastra el punto C]	
144	Felipe	Ahí. No. Otro poquito, ahí. [Sebastián trata de hacer que concurran las cuatro mediatrices]	
145	Sebastián	¡Se encuentran los cuatro ahora sí!	
146	Felipe	Si trazamos la circunferencia… [Traza una	

		circunferencia con centro en el punto de concurrencia y que pasa por los vértices del cuadrilátero]	
147	Sebastián	¡Sí! ¡No! Acá le falta [no pasa exactamente por uno de los vérties]	
148	Profesor	Bueno. Vuelvo acá, con ustedes. Que pasó ¿Encontramos otro cuadrilátero?¿Diferente del trapecio?	
149	Sebastián	¡Sí!	
150	Profesor	¿éste cierto? Y ¿encontraron un punto…?¿Este es el punto de corte cierto? ¿Qué característica tiene este punto de corte?	
151	Felipe	Que las mediatrices se encuentran ahí.	
152	Profesor	¡Listo! Llamémoslo E. Para ponerle algún nombre. Ahora les voy a preguntar ¿Qué característica tiene el punto E?	
153	Felipe	Ademas de que se encuentran todas las mediatrices. Si nosotros trazamos una circunferencia desde el punto E, hasta cualquier punto… [vértice del cuadrilátero]	
154	Sebastián	Está que está [el punto E] a la misma distancia de todos los vértices.	

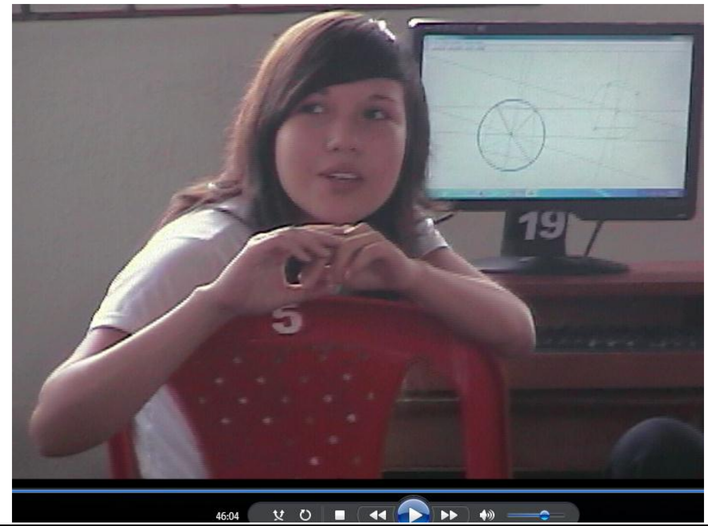
155	Profesor	¡Ah! …¿Sí?	
156	Felipe	¡Sí! Porque todos los radios de la misma circunferencia son congruentes.	
157	Sebastián	¡Sí! Porque si trazáramos segmentos desde el centro a cada uno de los vértices, todos quedarían siendo radios.	
158	Profesor	¡Bien! Perfecto. O sea que ustedes me pueden garantizar eso. Y si no fuera por la circunferencia ¿de que otro modo me lo podrían garantizar?	
159	Felipe	Con el método de las mediatrices.	
160	Sebastián	Con el método de las mediatrices, pero tocaría pensar como.	
161	Felipe	Eso ya nos lo habían explicado la clase pasada. Que utilizando las mediatrices también se podía.	
162	Sebastián	¡Ya la tengo! ¡Profe! [Quién se ha retirado para otro grupo] ¡Ya la se! Como ese [el punto de concurrencia] es un punto que está en todas las mediatrices. Y un punto que está sobre una mediatriz esta a la misma distancia de dos puntos de un segmento [los extremos]donde se creo la mediatriz.	
163	Felipe	Como el punto esta en las cuatro mediatrices, podemos justificar que está a la misma distancia de cada uno[de los vértices]	

164	Profesor	Entonces ustedes hasta el momento encontraron que ese cuadrilátero cumple la condición: Sus mediatrices se cruzan en el mismo punto. Ahora la pregunta es ¿Cuáles son los cuadriláteros que tienen esa propiedad?	
165	Sebastián	Los especiales y los no especiales.	
166	Profesor	¿Cuáles son los no especiales?	
167	Felipe	Sáquele los ángulos al éste [se refiere a encontrar la medida de los ángulos del cuadrilátero]	
168	Sebastián	Los no especiales son los que tienen sus ángulos diferentes.	
169	Felipe	Pero al sumarlos [los ángulos] nos tiene que dar algo. El cuadrado cada lado [ángulo] tenía 90, [grados] noventa más noventa, 180 y más otros 180, 360. Entonces si de pronto esto nos da 360, podemos justificarlo.	
170	socialización		
171	Profesor	Vea lo que pasó aquí en este grupo. Vean lo que paso en el grupo de Paula, Vean lo que paso en el grupo de Linares y vean lo que paso en el grupo de las Villamizar. Ya comprobamos que sirve para los cuadrados [se refiere a que se cumple la propiedad], me sirve para los rectángulos, y ya comprobamos por ahí que me sirve para uno que otro rombo especial, que venían a ser cuadrados y me servían para ¿quién?	
172	Felipe	Trapecios especiales	
173	Profesor 44:18	Pero yo les pregunté después busquemos un cuadrilátero cualquiera. ¿Qué encontramos? ¿Qué hicimos? ¿Quién me cuenta?	
174	Sebastián Torres	En una circunferencia todos los cuadriláteros quedan contenidos.	
175	Profesor	Escuchemos a torres. ¿Qué hicieron acá? [En el grupo	

		de Sebastían]	
176	Sebastián Torres	Hicimos una circunferencia y…	
177	Profesor	Voy a hacerlo acá [En el tablero con el marcador traza una circunfernecia]	
178	Sebastián Torres	… y trazamos un cuadrilátero cualquiera.	
179	Profesor	¿un cuadrilátero cualquiera? [Traza un cuadrilátero que no queda inscrito en la circunferencia]	
180	Sebastián Torres	No, no. Con los vértices sobre la circunferencia	
181	Profesor	¡Ah! ¿Qué condición sin ser cuadriláteros especiales debía cumplir? ¿El cuadrilátero estaba en donde?	
182	Sebastián Torres	El cuadrilátero estaba trascrito [inscrito]en la circunferencia.	
183	Profesor	El cuadrilátero estaba inscrito en la circunferencia. ¿Algo así Torres? [Traza un cuadrilátero inscrito en la circunferencia y nombra sus vértices] Lo nombramos: A,B,C y D [Los vértices del cuadrilátero] ¿Y ustedes ya me aseguraron que ese cumplía la condición?¿Y como miraron?	
184	Sebastián Torres	Hicimos las mediatrices y siempre se cortaban en el centro de la circunferencia.	
185	Profesor	¡Ah! Hacemos mediatriz acá, la mediatriz acá, la mediatriz acá y la mediatriz acá. [Traza “las mediatrices de su dibujo”]	

			
186	Sebastián Torres	Entonces se podría decir que… como las letras…[Los vértices]	
187	Paula	Los puntos.	
188	Sebastián Torres	Los puntos son radios de la E [centro de la circunferencia]	
189	Profesor	¿Los puntos son radios?	
190	Sebastián	Los segmentos	
191	Profesor	¿Cuáles segmentos?	
192	Leidy	Los segmentos que trazamos desde el punto medio de la circunferencia hasta uno de los puntos inscritos.	
193	Profesor	¿Hasta cada vértice?	
194	Leidy	Si.	
195	Profesor	[Describe con sus manos los radios de la circunferencia que se pueden formar usando como extremos los vértices del cuadrilátero inscrito. Referido a la figura de la línea 185]O sea que este es un radio, este es un radio, este es un radio y este es un radio. Entonces que pasaba con los puntos B, C, D, A.	

196	Leidy	Que están a la misma distancia del punto E.	
197	Profesor	¿Y por qué?	
198	Leidy	Porque todos los radios de la misma circunferencia miden lo mismo.	
199	Profesor	Perfecto. Pero esperáte es que se me hace algo raro aquí, porque yo les pedí el favor a ustedes de que hicieran un cuadrilátero y busquemos que las mediatrices se encuentren en un solo punto. Y el ¿qué hizo primero?	
200	Sebastián Torres	Trace una circunferencia.	
201	Profesor	La circunferencia. Ustedes también [se refiere al grupo de Leidy y Lina].	
202	Leidy	No	
203	Profesor	¿ustedes que hicieron?	
204	Lina	Hicimos una figura que tuviera cuatro lados	
205	Profesor	O sea un ¿que?	
206	Lina	Un cuadrilátero.	
207	Profesor	¡Ah! Bien. Y luego ¿qué hicieron?	
208	Lina	Trazamos las mediatrices.	
209	Profesor	¿y se cortaban?	
210	Lina	Sí.	
211	Profesor	De una vez en un solo punto.	
212	Lina	No	
213	Profesor	Y después que hicieron.	
214	Lina	Para arreglarla tuvimos que mover los puntos	
215	Profesor	Arrastrarlos, cuadrarlos. Es decir que este grupo [El de Sebastián torres] primero trazó la circunferencia y luego sobre ella el cuadrilátero, y en este grupo [El de Lina] hicieron primero el cuadrilátero y lo cuadraron.	
216	Lina	Y después la circunferencia	
217	Sebastián Torres	No creo que les haya salido exacto el cuadrilátero a la circunferencia.	

218	Leidy	No nos salió exacto pero luego con la circunferencia, tratamos de que lo hiciera.	
219	Profesor	¿Cómo lo cuadraron que hicieron para que les diera exacto?	
220	Leidy	Pusimos los puntos sobre la circunferencia transcrita	
221	Paula	Así, no queda el cuadrilátero trascrito	
222	Profesor	Quieres decir que no queda el cuadrilátero inscrito. Es verdad [a todo el grupo] no queda.	
223	Leidy	¡Si! Ahí pudimos ver que cualquier punto inscrito en la circunferencia que pertenezca a una figura sus mediatrices se encuentran en un mismo punto que es el punto E [El centro de la circunferencia]	
224	Profesor	Y ustedes Garzón [Felipe] ¿Qué encontraron?	
225	Felipe	Nosotros primero hicimos un cuadrilátero y le sacamos las mediatrices a cada una.	
226	Sebastián	Y luego lo empezamos a mover hacia diferentes lados hasta que se cruzaran las mediatrices. Y después colocamos ese punto y lo llamamos E y desde ahí	

		trazamos una circunferencia hasta cualquiera de los vértices	
227	Profesor	¿Y donde quedaban todos los puntos?	
228	Felipe	Inscritos en la circunferencia.	
229	Profesor	O sea que la misma propiedad ¿Cierto?	
230	Todos	¡Si!	
231	Profesor	Entonces ya todos podemos decir algo. ¿Qué pasa con los cuadriláteros en los que las mediatrices se cortan en un solo punto.	
232	Felipe	Se pueden inscribir en una circunferencia.	
233	Profesor	Lo voy a escribir: Los cuadriláteros en los que las mediatrices de sus lados se cortan en un solo punto, se pueden inscribir en una circunferencia. Propiedad ¿Cierto? Y ¿están ustedes de acuerdo? ¿lo creen? ¡Listo!	
234			