ACTA
ACADEMIAE PAEDAGOGICAE AGRIENSIS
NOVA SERIES TOM. XXVIII.

AZ ESZTERHÁZY KÁROLY FŐISKOLA
TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

REDIGIT—SZERKESZTI
ORBÁN SÁNDOR, V. RAISZ RÓZSA

SECTIO MATHEMATICAE

TANULMÁNYOK A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL

REDIGIT—SZERKESZTI
KISS PÉTER, MÁTYÁS FERENC

EGER, 2001

$\boxed{\text{EMT}_E\text{X—JAT}_E\text{X}}$

A kiadásért felelős:
az Eszterházy Károly Főiskola főigazgatója
Technikai szerkesztő: Hoffmann Miklós
Tördelőszerkesztő: Nagyné Bertalan Ágnes
Megjelent: 2001. december Példányszám: 70

Készült: PR-editor Kft. nyomdája, Eger
Ügyvezető igazgató: Fülöp Gábor

ACTA
ACADEMIAE PAEDAGOGICAE AGRIENSIS
NOVA SERIES TOM. XXVIII.

AZ ESZTERHÁZY KÁROLY FŐISKOLA
TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

REDIGIT—SZERKESZTI
ORBÁN SÁNDOR, V. RAISZ RÓZSA

SECTIO MATHEMATICAE

TANULMÁNYOK A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL

REDIGIT—SZERKESZTI
KISS PÉTER, MÁTYÁS FERENC

EGER, 2001

$\boxed{\text{EMT}_{\text{E}}\text{X—JAT}_{\text{E}}\text{X}}$

A kiadásért felelős:
az Eszterházy Károly Főiskola főigazgatója
Technikai szerkesztő: Hoffmann Miklós
Tördelőszerkesztő: Nagyné Bertalan Ágnes
Megjelent: 2001. december Példányszám: 70

Készült: PR-editor Kft. nyomdája, Eger
Ügyvezető igazgató: Fülöp Gábor

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **28** *(2001) 3–11*

ON PRODUCTS AND SUMS OF THE TERMS OF LINEAR RECURRENCES

Péter Kiss & Ferenc Mátyás (Eger, Hungary)

Abstract. For a fixed integer $m\geq 2$, let $\left\{G_n^{(i)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $(1\leq i\leq m)$ be linear recursive sequences of integers, $\Pi_{x_1,x_2,\ldots,x_m}=G_{x_1}^{(1)}G_{x_2}^{(2)}\cdots G_{x_m}^{(m)}$ and let $x=\max\limits_{1\leq i\leq m}(x_i)$. In the paper it is proved, under some restrictions, that there are effectively computable constants c and n_0 such that $\left|s-\Pi_{x_1,x_2,\ldots,x_m}\right|>e^{c\cdot x}$ if s is an integer having fixed prime factors only, $x>n_0$ and $x_j>\gamma\cdot x$ for any $1\leq j\leq m$ with a fixed real number $0<\gamma<1$. Similar result can be obtained if we replace the pruduct of the terms by their sum.

AMS Classification Number: 11B39, 11J86.

Keywords: linear recursive sequence, linear forms in logarithms.

1. Introduction

Let the linear recurrences $G^{(i)}=\left\{G_n^{(i)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ $(i=1,2,\ldots,m;\ m\geq 2)$ of order k_i be defined by the recursion

$$G_n^{(i)}=A_1^{(i)}G_{n-1}^{(i)}+A_2^{(i)}G_{n-2}^{(i)}+\ldots+A_{k_i}^{(i)}G_{n-k_i}^{(i)}\quad(n\geq k_i\geq 2), \tag{1}$$

where the initial values $G_j^{(i)}$ and the coefficients $A_{j+1}^{(i)}$ $(j=0,1,\ldots,k_i-1)$ are rational integers. Denote the distinct roots of the characteristic polynomial

$$g^{(i)}(x)=x^{k_i}-A_1^{(i)}x^{k_i-1}-\ldots-A_{k_i}^{(i)} \tag{2}$$

of the sequence $G^{(i)}$ defined in (1) by $\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)},\ldots,\alpha_{t_i}^{(i)}$ $(t_i\geq 2)$, and suppose that

$$A_{k_i}^{(i)}\left(\left|G_0^{(i)}\right|+\left|G_1^{(i)}\right|+\ldots+\left|G_{k_i-1}^{(i)}\right|\right)\neq 0$$

Research supported by the Hungarian OTKA Foundation, No. T 032898 and T 29330.

for any i $(1 \leq i \leq m)$. It is known that there exist uniquely determined polynomials $p_j^{(i)}(x) \in \mathbf{Q}(\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots, \alpha_{t_i}^{(i)})[x]$ $(j = 1, 2, \ldots, t_i)$ of degree less than the multiplicity $m_j^{(i)}$ of the roots $\alpha_j^{(i)}$ such that for $n \geq 0$

$$G_n^{(i)} = p_1^{(i)}(n)\left(\alpha_1^{(i)}\right)^n + p_2^{(i)}(n)\left(\alpha_2^{(i)}\right)^n + \ldots + p_{t_i}^{(i)}(n)\left(\alpha_{t_i}^{(i)}\right)^n . \tag{3}$$

In that special case when $g^{(i)}(x)$ has a dominant root, say $\alpha_i = \alpha_1^{(i)}$, that is, when the multiplicity of α_i is 1 and $|\alpha_i| > \left|\alpha_j^{(i)}\right|$ for $j = 2, 3, \ldots, t_i$, then $|\alpha_i| > 1$, since $\left|A_{k_i}^{(i)}\right| \geq 1$, and $p_1^{(i)}(n)$ in (3) is a constant which will be denoted by a_i. In this case

$$G_n^{(i)} = a_i\left(\alpha_i\right)^n + p_2^{(i)}(n)\left(\alpha_2^{(i)}\right)^n + \ldots + p_{t_i}^{(i)}(n)\left(\alpha_{t_i}^{(i)}\right)^n , \tag{4}$$

where we suppose that $a_i \neq 0$.

We say $G^{(1)}$ to be the dominant sequence among the sequences $G^{(i)}$ $(1 \leq i \leq m)$ if $g^{(1)}(x)$ has a dominant root α_1 and the inequalities $|\alpha_1| > \left|\alpha_j^{(i)}\right|$ hold for any $(i, j) \neq (1, 1)$, where $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq j \leq t_i$.

T. N. Shorey and C. L. Stewart [13] investigated the connection between the sequences defined by (4) and perfect powers, then A. Pethő [11], [12] and P. Kiss [6] proved important results in this field. Recently, some similar multiplicative and additive problems have been solved by B. Brindza, K. Liptai and L. Szalay [3], L. Szalay [14], P. Kiss and F. Mátyás [8-9] and F. Mátyás [10]. All of the authors show, under some restrictions, that if a term (product or sum of terms) of linear recurrences is a perfect power then the exponent of the power is bounded above.

The problem is similar when we want to consider those sequences $G^{(i)}$ where the terms of $G^{(i)}$ have given prime factors only. Let $p_1, p_2, \ldots, p_r$ be given distinct rational primes and let

$$S = \left\{s \in \mathbf{Z} \ : \ s = \pm p_1^{e_1} \ldots p_r^{e_r}, \quad 0 \leq e_i \in \mathbf{N}\right\} . \tag{5}$$

K. Győry, P. Kiss and A. Schinzel [4] showed that if G_x is a term of Lucas or Lehmer (special second order) recurrences then

$$G_x \in S \tag{6}$$

holds only for finitely many sequences and finitely many integers x. K. Győry [5] improved this result.

P. Kiss [6] proved that if $G^{(1)}$ is defined by (4) then, under some conditions, $\left|G_x^{(1)} - s\right| > e^{c'x}$ for all integers $s \in S$ and $x > n'$, where c' and n' are effectively computable positive constants depending only on the pimes $p_1, p_2, \dots, p_r$ and $G^{(1)}$.

P. Kiss gave a summation of the results concerning this topic in [7], where among others there were cited two theorems (Theorem 3 and Theorem 6) without proofs hoping that the paper containing the proofs had already appeared. Unfortunately, because of some technical reasons, these proofs can appear only in this paper. So the purpose of this paper is to restate the above theorems and to present their proofs. These theorems generalize and extend the result of P. Kiss [6] for the products (and the sums) of terms of linear recurrences defined by (3) and (4).

2. Results

For brevity we introduce the following abbreviations:

$$\Pi_{x_1, x_2, \dots, x_m} = \prod_{i=1}^{m} G_{x_i}^{(i)} \tag{7}$$

and

$$\Sigma_{x_1, x_2, \dots, x_m} = \sum_{i=1}^{m} G_{x_i}^{(i)}, \tag{8}$$

where $x_1, x_2, \dots, x_m$ are positive integers. The following two theorems will be proved.

Theorem 1. *Let γ be a real number with $0 < \gamma < 1$ and let S be the set of integers defined by (5). Suppose that for any $1 \le i \le m$ the polynomial $g^{(i)}(x)$ defined by (2) has a dominant root $\alpha_i = \alpha_1^{(i)}$ and the sequence $G^{(i)}$ is defined by (4). Then there exist positive real numbers c_0 and n_0 such that if $x = \max\limits_{1 \le i \le m} (x_i) > n_0$,*

$$\prod_{i=1}^{m} a_i \alpha_i^{x_i} \notin S \quad \text{and} \quad x_i > \gamma x \quad \text{for } 1 \le i \le m, \tag{9a and 9b}$$

then

$$|s - \Pi_{x_1, x_2, \dots, x_m}| > e^{c_0 x} \tag{10}$$

for any $s \in S$ and positive integers $x_1, x_2, \dots, x_m$. The constants c_0 and n_0 are effectively computable positive numbers depending only on γ, the primes $p_1, p_2, \dots, p_r$ and the parameters of the sequences $G^{(i)}$ $(1 \le i \le m)$.

Corollary. *Under the conditions of Theorem 1,* $\Pi_{x_1,x_2,\ldots,x_m} \notin S$ *if* $x = \max_{1\le i\le m}(x_i) > n_0$.

Theorem 2. *Let* $G^{(i)}$ $(1 \le i \le m,\ 2 \le m)$ *be sequences defined by (3) if* $2 \le i \le m$ *and by (4) if* $i = 1$ *and let* S *be the set of integers defined by (5). Suppose that* $G^{(1)}$ *is the dominant sequence (with the dominant root* $\alpha_1 = \alpha_1^{(1)}$*) among the sequences* $G^{(i)}$ $(1 \le i \le m)$*. Then there exist positive real numbers* c_1 *and* n_1 *such that if*

$$a_1\alpha_1^{x_1} \notin S \quad \text{and} \quad x_1 > \max_{2\le i\le m}(x_i), \tag{11a and 11b}$$

then

$$|s - \Sigma_{x_1,x_2,\ldots,x_m}| > e^{c_1 x_1}$$

for any $s \in S$ *and positive integers* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *satisfying the condition* $x_1 > n_1$*. The constants* c_1 *and* n_1 *are effectively computable positive numbers depending only on the primes* $p_1, p_2, \ldots, p_r$ *and the parameters of the sequences* $G^{(i)}$ $(1 \le i \le m)$*.*

Corollary. *Under the conditions of Theorem 2,* $\Sigma_{x_1,x_2,\ldots,x_m} \notin S$ *if* $x_1 > n_1$*.*

3. Lemmas and Proofs

To prove the theorems we need the following auxiliary results.

Lemma 1. *Let*

$$\Lambda = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot log\omega_1 + \gamma_2 \cdot log\omega_2 + \cdots + \gamma_n \cdot log\omega_n,$$

where the γ'*s and* ω'*s denote algebraic numbers* ($\omega_i \neq 0$ or 1)*. We assume that not all the* γ'*s are zero and that the logarithms mean their principal values. Suppose that* ω_i *and* γ_i *have heights at most* $M_i(\ge 4)$ *and* $B(\ge 4)$*, respectively, and that the field generated by the* ω'*s and* γ'*s over the rational numbers has degree at most* d*. If* $\Lambda \neq 0$*, then*

$$|\Lambda| > (B\Omega)^{-C\Omega\cdot\log\Omega'},$$

where

$$\Omega = \log M_1 \cdot \log M_2 \cdots \log M_n, \quad \Omega' = \Omega / \log M_n$$

and $C = (16nd)^{200n}$*. If* $\gamma_0 = 0$ *and* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ *are rational integers, then*

$$|\Lambda| > B^{-C\Omega\log\Omega'}.$$

Proof. It is a result of A. Baker [1]. (We mention that this result was improved by A. Baker and G. Wüstholz [2], but we do not calculate the exact values of the constants thus we use only the result of Lemma 1.)

Lemma 2. *Let γ be a real number with $0 < \gamma < 1$, $\Pi_{x_1,x_2,\dots,x_m}$ be an integer defined by (7) and $G^{(i)}$ $(1 \le i \le m,\ 2 \le m)$ be sequences defined by (4), that is, for any $1 \le i \le m$ the polynomial $g^{(i)}(x)$ has a dominant root $\alpha_i = \alpha_1^{(i)}$. If $x_i > \gamma\cdot\max(x_1, x_2, \dots, x_m)$, then there are effectively computable positive constans c_2 and n_2 depending only on the sequences $G^{(i)}$ and γ, such that*

$$\Pi_{x_1,x_2,\dots,x_m} = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i\alpha_i^{x_i}\right)(1+\varepsilon),$$

where $|\varepsilon| < e^{-c_2 x}$ for any $x = \max(x_1, x_2, \dots, x_m) > n_2$.

Proof. For the proof see Lemma 2 in [9].

After these lemmas we present the proofs of the theorems. We mention that the constants c_i and n_i $(i \ge 2)$ shall always denote effectively computable positive real numbers depending on γ, the primes $p_1, p_2, \dots, p_r$ and the parameters of the recurrences. One can compute their explicit values similarly as in [9-10].

Proof of Theorem 1. Suppose that the conditions of the theorem are fulfiled and

$$(12) \qquad |s - \Pi_{x_1,x_2,\dots,x_m}| \le e^{c_0' x}$$

with a suitable constant $c_0' > 0$ and sufficiently large x. By Lemma 2,

$$(13) \qquad \Pi_{x_1,x_2,\dots,x_m} = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i\alpha_i^{x_i}\right)(1+\varepsilon),$$

where $|\varepsilon| < e^{-c_2 x}$ if $x > n_2$. On the other hand, by (9b),

$$(14) \qquad \left|\prod_{i=1}^{m} a_i\alpha_i^{x_i}\right| = e^{\sum_{i=1}^{m}\log|a_i| + \sum_{i=1}^{m} x_i\log|\alpha_i|} > e^{\sum_{i=1}^{m}\log|a_i| + \gamma x\sum_{i=1}^{m}\log|\alpha_i|} > e^{c_3 x}$$

if $x > n_3$. Using (13) and (14), from (12) we can get the inequalities

$$\left|\frac{s}{\prod_{i=1}^{m} a_i\alpha_i^{x_i}} - (1+\varepsilon)\right| \le \frac{e^{c_0'}}{\prod_{i=1}^{m} |a_i\alpha_i^{x_i}|} < e^{(c_0'-c_3)x} = e^{-c_4 x}$$

if $c_0' < c_3$. From this estimation, with $|\varepsilon| < e^{-c_2 x}$,

$$(15)\qquad \left| \frac{s}{\prod_{i=1}^{m} a_i \alpha_i^{x_i}} \right| < 1 + |\varepsilon| + e^{-c_4 x} < 1 + e^{-c_5 x}$$

follows if $x > n_4$, which implies that

$$|s| < \left(1 + e^{-c_5 x}\right) \prod_{i=1}^{m} |a_i \alpha_i^{x_i}| < \left(1 + e^{-c_5 x}\right) e^{\sum_{i=1}^{m} \log|a_i| + x \sum_{i=1}^{m} \log|\alpha_i|} < e^{c_6 x},$$

if $x > n_5$. Since by (5), using the notation $y = \max_{1 \le i \le r}(e_i)$,

$$e^{c_6 x} > |s| = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i} \ge \prod_{i=1}^{r} 2^{e_i} \ge 2^y = e^{y \cdot \log 2},$$

therefore

$$(16)\qquad y = \max_{1 \le i \le r}(e_i) < c_7 x.$$

Let $\lambda = \left| \log \left| \frac{s}{\prod_{i=1}^{m} a_i \alpha_i^{x_i}} \right| \right|$. It is clear by (9a) that $\lambda \ne 0$, while by (15) and the properties of the logarithm function,

$$(17)\qquad 0 < \lambda < \log\left(1 + e^{-c_5 x}\right) < e^{-c_5 x}.$$

Now we give a lower estimation for

$$\lambda = \left| \sum_{i=1}^{r} e_i \log p_i - \sum_{i=1}^{m} \log|a_i| - \sum_{i=1}^{m} x_i \log|\alpha_i| \right|.$$

Since the numbers $p_i, |a_i|$ and $|\alpha_i|$ are algebraic ones with bounded heights, further on the numbers e_i and x_i are bounded above by $c_7 x$ (see (16)) and x, respectively, thus by Lemma 1

$$(18)\qquad \lambda > e^{-c_8 \log x}.$$

(17) and (18) imply that

$$c_5 x < c_8 \log x,$$

that is,

$$\frac{x}{\log x} < c_9,$$

but this is a contradiction if $x > n_6$. Therefore the inequality (10) of the theorem holds with $0 < c_0 < c_3$ and $n_0 = \max\limits_{2 \le i \le 6} (n_i)$.

Proof of Theorem 2. Using the estimation

$$|a_1 \alpha_1^{x_1}| = e^{\log|a_1| + x_1 \log|\alpha_1|} > e^{c_{10} x_1} \tag{19}$$

if $x_1 > n_7$, suppose that

$$|s - \Sigma_{x_1, x_2, \ldots, x_m}| \le e^{c_1' x_1} \tag{20}$$

with a suitable constant $0 < c_1' < c_{10}$ and sufficiently large x_1.

Using (4) for $G^{(1)}$ and (3) for $G^{(i)}$ $(2 \le i \le m)$, then

$$\Sigma_{x_1, x_2, \ldots, x_m} = a_1 \alpha_1^{x_1} \left(1 + \sum_{j=2}^{t_1} \frac{p_j^{(1)}(x_1)}{a_1} \left(\frac{\alpha_j^{(1)}}{\alpha_1} \right)^{x_1} \right. \tag{21}$$

$$\left. + \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{t_i} \frac{p_j^{(i)}(x_i)}{a_i} \frac{\left(\alpha_j^{(i)}\right)^{x_i}}{\alpha_1^{x_1}} \right) = a_1 \alpha_1^{x_1} (1 + \varepsilon_1)$$

for any $x_1 > n_8$, where $|\varepsilon_1| < e^{-c_{11} x_1}$, since $x_1 > \max\limits_{2 \le i \le m} (x_i)$ and $|\alpha_1| > \left|\alpha_j^{(i)}\right|$ for any $(i, j) \ne (1, 1)$. From (20), by (19) and (21), we get that

$$\left| \frac{s}{a_1 \alpha_1^{x_1}} - (1 + \varepsilon_1) \right| \le \frac{e^{c_1' x_1}}{|a_1 \alpha_1^{x_1}|} < \frac{e^{c_1' x_1}}{e^{c_{10} x_1}} = e^{(c_1' - c_{10}) x_1} = e^{-c_{12} x_1},$$

if $x_1 > n_9$. This implies the inequalities

$$\left| \frac{s}{a_1 \alpha_1^{x_1}} \right| < 1 + |\varepsilon_1| + e^{-c_{12} x_1} < 1 + e^{-c_{13} x_1} \tag{22}$$

if $x_1 > n_{10}$. From this we can get

$$|s| < |a_1 \alpha_1^{x_1}| \left(1 + e^{-c_{13} x_1}\right) < e^{c_{14} x_1},$$

if $x_1 > n_{11}$. According to (5) and the notation $y = \max_{1\leq i\leq r}(e_i)$,

$$e^{c_{14}x_1} > |s| = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i} \geq 2^y = e^{y\log 2},$$

that is,

$$y = \max_{1\leq i\leq r}(e_i) < c_{15}x_1. \tag{23}$$

Let $\lambda = \left|\log\left|\frac{s}{a_1\alpha_1^{x_1}}\right|\right|$. By (11a), $\lambda \neq 0$. From (22) we can obtain an upper estimation for λ, as follows:

$$0 < \lambda < \log\left(1 + e^{-c_{13}x_1}\right) < e^{-c_{13}x_1}. \tag{24}$$

To construct a lower estimation for λ we apply Lemma 1 for

$$\lambda = \left|\sum_{i=1}^{r} e_i \log p_i - \log|a_1| - x_1\log|\alpha_1|\right|.$$

We can similarly get, as in the proof of Theorem 1, that

$$\lambda > e^{-c_{16}\log x_1}. \tag{25}$$

Making a comparison between (24) and (25), we get

$$c_{13}x_1 < c_{16}\log x_1,$$

from which

$$\frac{x_1}{\log x_1} < c_{17} \tag{26}$$

follows. This proves the theorem, since (26) is a contradiction if $x_1 > n_{12}$, that is, the theorem holds with $0 < c_1 < c_{10}$ and $n_1 = \max_{7\leq i\leq 12}(n_i)$.

The statements of the corollaries are obvious by the theorems.

References

[1] BAKER, A., A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms II., *Acta Arithm.*, **24** (1973), 33–34.

[2] BAKER, A., WÜSTHOLTZ, G., Logarithmic forms and group varietes, *J. Reine Angew. Math.*, **442** (1993), 19–62.

[3] Brindza, B., Liptai, K. and Szalay, L., On products of the terms of linear recurrences, Number Theory, Eds.: Győry – Pethő – Sós, Walter de Gruyter, Berlin – New York, (1998), 101–106.

[4] Győry, K., Kiss, P. and Schinzel, A., A note on Lucas and Lehmer sequences and their applications for diophantine equations, *Colloq. Math.*, **45** (1981), 75–80.

[5] Győry, K., On some arithmetical properties of Lucas and Lehmer numbers, *Acta Arithm.*, **40** (1982), 369–373.

[6] Kiss, P., Differences of the terms of linear recurrences, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **20** (1985), 285–293.

[7] Kiss, P., Results concerning products and sums of terms of linear recurrences, *Acta Acad. Agriensis Sectio Math.*, **27** (2000), 1–7.

[8] Kiss, P. and Mátyás, F., Perfect powers from the sums of terms of linear recurrences, *Periodica Mathematica Hungarica*, **42 (1-2)** (2001), 163–168.

[9] Kiss, P. and Mátyás, F., Product of terms of linear recurrences, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **37 (3-4)** (2001), 355–362.

[10] Mátyás, F., On the difference of perfect powers and sums of terms of linear recurrences, *Riv. Mat. Univ. Parma*, **(6) 3** (2000),77–85.

[11] Pethő, A., Perfect powers in second order linear recurrences, *J. Number Theory*, **15** (1982), 5–13.

[12] Pethő, A., Full cubes in the Fibonacci sequence, *Publ. Math. Debrecen*, **30** (1983), 117–127.

[13] Shorey, T. N. and Stewart, C. L., On the Diophantine equation $ax^{2t} + bx^t y + cy^2 = d$ and pure powers in recurrence sequences, *Math. Scand.*, **52** (1982), 24–36.

[14] Szalay, L., A note on the products of the terms of linear recurrences, *Acta Acad. Paed. Agriensis*, **24** (1997), 47-53.

Péter Kiss and Ferenc Mátyás
Károly Eszterházy College
Department of Mathematics
H-3301 Eger, P.O.B. 43.
Hungary
e-mail: kissp@ektf.hu
e-mail: matyas@ektf.hu

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **28** *(2001) 13–19*

REAL NUMBERS THAT HAVE GOOD DIOPHANTINE APPROXIMATIONS OF THE FORM r_{n+1}/r_n

Andreas Dress & Florian Luca (Bielefeld & Morelia)

Abstract. In this note, we show that if α is a real number such that there exist a constant c and a sequence of non-zero integers $(r_n)_{n\geq 0}$ with $\lim_{n\to\infty}|r_n| = \infty$ for which $\left|\alpha - \frac{r_{n+1}}{r_n}\right| < \frac{c}{|r_n|^2}$ holds for all $n \geq 0$, then either $\alpha \in \mathbb{Z}\setminus\{0, \pm 1\}$ or α is a quadratic unit. Our result complements results obtained by P. Kiss who established the converse in Period. Math. Hungar. 11 (1980), 281-187.

AMS Classification Number: 11J04, 11J70

1. Introduction

Let α be a real number. In this paper, we deal with the topic of approximating α by rationals. It is well known that there exist a constant c and two sequences of integers $(u_n)_{n\geq 0}$ and $(v_n)_{n\geq 0}$ with $v_n > 0$ for all $n \geq 0$ and v_n diverging to infinity (with n) such that

$$\left|\alpha - \frac{u_n}{v_n}\right| \leq \frac{c}{v_n^2} \tag{1}$$

holds for all $n \geq 0$. By work of Hurwitz (see [5]), one can take $c := 1/\sqrt{5}$ and the above constant is well known to be best-possible for $\alpha := \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Several papers in the literature deal with the question of approximating α by rationals u_n/v_n requiring u_n and v_n to satisfy (1) as well as some additional conditions. For example, if α is irrational and a, b and k are integers with $k > 1$, then there exist a constant c and two sequences of integers $(u_n)_{n\geq 0}$ and $(v_n)_{n\geq 0}$ with $v_n > 0$ and v_n diverging to infinity such that

$$\left|\alpha - \frac{u_n}{v_n}\right| < \frac{c}{v_n^2} \quad \text{and} \quad u_n \equiv a \pmod{k}, \;\; v_n \equiv b \pmod{k} \tag{2}$$

The second author's research was partially sponsored by the Alexander von Humboldt Foundation.

holds for all $n \geq 0$. The best-possible constant c in (2) is $k^2/4$ in case a and b are not both divisible by k (see [3] and [4]).

If α is algebraic and $\mathcal{P}$ is a fixed finite set of prime numbers, then Ridout [10] inferred from Roth's work [11] that one cannot approximate α too well by rational numbers u/v where either u or v is divisible only by primes from $\mathcal{P}$. More precisely, for every given $\epsilon > 0$, the inequality

$$\left|\alpha - \frac{u}{v}\right| < \frac{1}{v^{1+\epsilon}} \tag{3}$$

has only finitely many integer solutions $(u,\ v)$ with $v > 0$ and either u or v divisible by primes from $\mathcal{P}$, only.

A different type of question was considered by P. Kiss in [6] and [7] (see also [8] and [9]). In [6], it was shown that if α is a quadratic unit with $|\alpha| > 1$, then there exist a constant c and a sequence of integers $(r_n)_{n\geq 0}$ with $|r_n|$ diverging to infinity such that

$$\left|\alpha - \frac{r_{n+1}}{r_n}\right| < \frac{c}{|r_n|^2} \tag{4}$$

holds for all $n \geq 0$. In [7] it was shown that, in fact, a statement similar to (4) holds for both α and α^s where $s \geq 2$ is some positive integer: There exist a constant c and a sequence of integers $(r_n)_{n\geq 0}$ with $|r_n|$ diverging to infinity such that both

$$\left|\alpha - \frac{r_{n+1}}{r_n}\right| < \frac{c}{|r_n|^2} \quad \text{and} \quad \left|\alpha^s - \frac{r_{n+s}}{r_n}\right| < \frac{c}{|r_n|^2} \tag{5}$$

hold for all $n \geq 0$.

An explicit description of a sequence $(r_n)_{n\geq 0}$ satisfying inequalities (5) above was also given in [7]: Let

$$f = X^2 + AX + B \quad (A, B \in \mathbf{Z})$$

be the minimal polynomial of α over $\mathbf{Q}$. Let β be the other root of f. Since α is a unit, $|B| = |\alpha\beta| = 1$ must hold which implies that the sequence

$$r_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \qquad n \geq 1 \tag{6}$$

fulfills the inequalities (5) for all n with $c := 2\sum_{i=0}^{s-1} |\alpha|^i |\beta|^{s-1-i}$.

One may ask if one can characterize all real numbers α for which there exist a constant c and a sequence of integers $(r_n)_{n\geq 0}$ with $|r_n|$ diverging to infinity such that inequality (4) or, respectively, inequalities (5) hold for all $n \geq 0$. From the above remarks, we saw that quadratic units α with $|\alpha| > 1$ have these properties. Moreover, the sequence $r_n := \alpha^n$ $(n \geq 1)$ shows that integers α with $|\alpha| > 1$ also belong to this class. It seems natural therefore to inquire if there are any other candidates α satisfying the above conditions. The perhaps not too surprising, answer is no. Our exact result is the following.

Theorem 1. *Let α be a real number.*

(i) Assume that there exist $\epsilon > 0$ and a sequence of integers $(r_n)_{n\geq 0}$ with $|r_n|$ diverging to infinity such that

$$\left|\alpha - \frac{r_{n+1}}{r_n}\right| < \frac{1}{|r_n|^{\frac{3}{2}+\epsilon}} \tag{7}$$

holds for all $n \geq 0$. Then, α is a real algebraic integer of absolute value larger than 1 and of degree at most 2. Moreover, if α is irrational, then the absolute value of its norm is smaller than $\sqrt{|\alpha|}$.

(ii) Assume, moreover, that there exist a constant c and a sequence of integers $(r_n)_{n\geq 0}$ with $|r_n|$ diverging to infinity such that

$$\left|\alpha - \frac{r_{n+1}}{r_n}\right| < \frac{c}{|r_n|^2} \tag{8}$$

holds for all $n \geq 0$. Then α is a quadratic unit or a rational integer different from 0 or ± 1.

The following result characterizes real numbers α for which - as in (5) - two different powers can be well approximated by rationals.

Theorem 2. *Let α be a real number. Assume that there exist two coprime positive integers s_1 and s_2, two positive integers t_1 and t_2, a real number $\epsilon > 0$, and a sequence of integers $(r_n)_{n\geq 0}$ with $|r_n|$ diverging to infinity with n such that*

$$\left|\alpha^{s_i} - \frac{r_{n+t_i}}{r_n}\right| < \frac{1}{|r_n|^{\frac{3}{2}+\epsilon}} \tag{9}$$

hold for all $n \geq 0$ and for both $i = 1$ and 2. Then, either $\alpha \in \mathbf{Z}\backslash\{0, \pm 1\}$ or α is quadratic irrational with norm smaller than $\sqrt{|\alpha|}$ in absolute value. If moreover α is irrational and there exists a constant c with

$$\left|\alpha^{s_1} - \frac{r_{n+t_1}}{r_n}\right| < \frac{c}{r_n^2}, \tag{10}$$

then α is a quadratic unit.

The proofs of both Theorems 1 and 2 are based on the following result which follows right away from our recent work [1] and [2].

Theorem DL. *Let $(r_n)_{n\geq 0}$ be a sequence of integers with $|r_n|$ diverging to infinity.*

(i) Assume that

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|r_n^2 - r_{n+1}r_{n-1}|}{\sqrt{|r_n|}} < \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{11}$$

Then, the sequence $\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)_{n\geq 0}$ *is convergent to a limit* α *that is a non-zero algebraic integer of degree at most 2. If* α *is irrational, then its norm is smaller than* $\sqrt{|\alpha|}$*. Moreover, there exists* $n_0 \in \mathbf{N}$ *such that* $(r_n)_{n\geq n_0}$ *is binary recurrent.*

(ii) If

$$|r_n^2 - r_{n+1}r_{n-1}| < c \tag{12}$$

holds for some constant c *and all* n*, then* α *is a quadratic unit or a non-zero integer.*

We point out that in our work [1] and [2], we gave more precise descriptions for both the sequences $(r_n)_{n\geq 0}$ satisfying (11) or (12), respectively, and the limit $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n}$, but the above Theorem DL suffices for our present purposes. We now proceed to the proofs of Theorems 1 and 2.

2. The Proofs

Proof of Theorem 1. We will prove (i) in detail and we will only sketch the proof of (ii).

(i) By replacing the sequence $(r_n)_n$ by the sequence $\left((-1)^n r_n\right)_n$ and α by $-\alpha$ if $\alpha < 0$, we may assume $\alpha \geq 0$ and $r_n > 0$ for all $n \geq 0$. By letting n tend to infinity in (7), we get $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n}$. Since r_n diverges to infinity, we must have $\alpha \geq 1$. We now show that $\alpha > 1$. Indeed, if $\alpha = 1$, then inequality (7) becomes

$$\left|1 - \frac{r_{n+1}}{r_n}\right| < \frac{1}{r_n^{\frac{3}{2}+\epsilon}},$$

or

$$|r_{n+1} - r_n| < \frac{1}{r_n^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \leq 1,$$

therefore $r_{n+1} = r_n$ for all $n \geq 0$. This contradicts the fact that r_n diverges to infinity. Hence, $\alpha > 1$.

Now let δ be a real number with $1 < \delta < \alpha$, note that $\gamma := 2\alpha - \delta$ exceeds α, and choose n_0 such that

$$r_n^{\frac{3}{2}+\epsilon} > \frac{1}{\alpha - \delta}$$

holds for all $n \geq n_0$. From inequality (7), we get that

$$\delta r_n < r_{n+1} < \gamma r_n \tag{13}$$

holds for all $n \geq n_0$. From inequalities (7) for n and $n+1$ and the triangular inequality, we get

$$\frac{|r_{n+1}^2 - r_n r_{n+2}|}{r_n r_{n+1}} = \left|\frac{r_{n+1}}{r_n} - \frac{r_{n+2}}{r_{n+1}}\right| < \left|\alpha - \frac{r_{n+1}}{r_n}\right| + \left|\alpha - \frac{r_{n+2}}{r_{n+1}}\right| < \left(\frac{1}{r_n^{\frac{3}{2}+\epsilon}} + \frac{1}{r_{n+1}^{\frac{3}{2}+\epsilon}}\right),$$

or

$$\text{(14)} \qquad \frac{|r_{n+1}^2 - r_{n+2} r_n|}{\sqrt{r_{n+1}}} < \frac{1}{r_n^\epsilon} \cdot \sqrt{\frac{r_{n+1}}{r_n}} + \frac{1}{r_{n+1}^\epsilon} \cdot \left(\frac{r_n}{r_{n+1}}\right).$$

Using inequality (13) in (14), we get

$$\text{(15)} \qquad \frac{|r_{n+1}^2 - r_{n+2} r_n|}{\sqrt{r_{n+1}}} < \frac{c_1}{r_n^\epsilon} + \frac{c_2}{r_{n+1}^\epsilon}$$

for all $n \geq n_0$, where $c_1 = \sqrt{\gamma}$ and $c_2 = 1/\delta$. We now let n tend to infinity in (15) and get

$$\text{(16)} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|r_n^2 - r_{n+1} r_{n-1}|}{\sqrt{r_n}} = 0 < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Consequently, the conclusion of part (i) of Theorem 1 follows from part (i) of Theorem DL.

The remaining assertions of part (ii) now follow from putting $\epsilon := 1/2$ in (15) and invoking $r_{n+1}/r_n < \gamma$ as well as part (ii) of Theorem DL.

Theorem 1 is therefore established.

Remark 1. The occurence of $\epsilon > 0$ in the exponent in inequality (7) is unnecessary. A closer investigation of the arguments used in the proof of Theorem 1 shows that the conclusion of part (i) of Theorem 1 remains valid if inequality (7) is replaced by the weaker inequality

$$\text{(7')} \qquad \left|\alpha - \frac{r_{n+1}}{r_n}\right| < \frac{1-\epsilon}{\sqrt{2}(\sqrt{|\alpha|} + 1/|\alpha|)} \cdot \frac{1}{r_n^{\frac{3}{2}}}.$$

Remark 2. Assume that α is a real number such that the hypotheses of either part (i9 or part (ii) of Theorem 1 are fulfilled. Using the full strength of our results from [1] and [2], we can infer that if α is an integer, then $(r_n)_{n\geq 0}$ is a geometrical progression of ratio α from some n on. However, if α is quadratic and the hypotheses of part (ii) of Theorem 1 are fulfilled, we can only infer that $(r_n)_{n\geq 0}$ is binary recurrent from some n on, and that its charateristic equation is precisely the minimal polynomial of α over $\mathbf{Q}$. However, we cannot infer that $(r_n)_{n\geq 0}$ is the

Lucas sequence of the first kind for α given by formula (6), mostly because the constant c appearing in inequality (8) is arbitrary. Of course, if one imposes that the constant c appearing in inequality (8) is small enough (for example, $c = 1/2$), then the rational numbers r_{n+1}/r_n are exactly the convergents of α, therefore r_n is indeed given by formula (6) for all n (up to some linear shift in the index n).

Proof of Theorem 2. If one replaces the sequence $(r_n)_{n\geq 0}$ by the sequence $(R_n)_{n\geq 0} = (r_{nt_1})_{n\geq 0}$, then the first inequality (9) together with part (i) of Theorem 1 show that α^{s_1} is an algebraic integer, different than 0 or ± 1, of degree at most 2. Similarly, if one replaces the sequence $(r_n)_{n\geq 0}$ by the sequence $(R_n)_{n\geq 0} = (r_{nt_2})_{n\geq 0}$, then the second part of inequality (9) together with part (ii) of Theorem 1 show that α^{s_2} is an algebraic integer, different that 0 or ± 1, of degree at most 2.

From here on, all we need to establish is that α is itself algebraic of degree at most 2. Assume that this is not so and let $K := \mathbf{Q}[\alpha]$ and $K_i := \mathbf{Q}[\alpha^{s_i}]$ for $i = 1,\ 2$. Since s_1 and s_2 are coprime, we get that $K = \mathbf{Q}[\alpha^{s_1},\ \alpha^{s_2}]$. Moreover, we must have $[K_i : \mathbf{Q}] = 2$ for both $i = 1$ and 2, i.e. K is a biquadratic real extension of $\mathbf{Q}$ and $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}) \cong \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$. Hence, there exist two non-trivial elements σ_1 and σ_2 in $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ with $\sigma_i(\alpha^{s_i}) = \alpha^{s_i}$, i.e.

$$1 = \frac{\sigma_i(\alpha^{s_i})}{\alpha^{s_i}} = \left(\frac{\sigma_i(\alpha)}{\alpha}\right)^{s_i} \tag{17}$$

for $i = 1,\ 2$. Since K is a real field and σ_i is non-trivial, formula (17) implies that $\sigma_i(\alpha) = -\alpha$ for $i = 1,\ 2$. Hence, $\sigma_1(\alpha) = \sigma_2(\alpha)$, which implies $\sigma_1 = \sigma_2$. But this is a contradiction. The remaining of the assertions of Theorem 2 follow from Theorem 1.

Theorem 2 is therefore established.

Acknowledgements

Work by the second author was done while he visited Bielefeld. He would like to thank the Graduate College Strukturbildungsprozesse and the Forschungsschwerpunkt Mathematisierug there for their hospitality and the Alexander von Humboldt Foundation for support.

References

[1] Dress, A., Luca, F., Unbounded Integer Sequences $(A_n)_{n\geq 0}$ with $A_{n+1}A_{n-1} - A_n^2$ Bounded are of Fibonacci Type, to appear in the *Proceedings of ALCOMA99*.

[2] Dress, A., Luca, F., A Characterization of Certain Binary Recurrence Sequences, to appear in the *Proceedings of ALCOMA99*.

[3] ELSNER, C., On the Approximation of Irrationals by Rationals, *Math. Nachr.* **189** (1998), 243–256.

[4] ELSNER, C., On Diophantine Approximations with Rationals restricted by Arithmetical Conditions, *Fibonacci Quart.* **38** (2000), 25–34.

[5] HURWITZ, A., Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationalle Brüche, *Math. Ann.* **39** (1891), 279–284.

[6] KISS, P., A diophantine approximative property of the second order linear recurrences, *Period. Math. Hungar.* **11** (1980), 281–287.

[7] KISS, P., On a simultaneous approximation problem concerning binary recurrence sequences, preprint, 2000.

[8] KISS, P., TICHY, R.F., A discrepancy problem with applications to linear recurrences I, *Proc. Japan Acad. (ser. A)* **65** (1989), 135–138.

[9] KISS, P., TICHY, R.T., A discrepancy problem with applications to linear recurrences II, *Proc. Japan Acad. (ser. A)* **65** (1989), 191–194.

[10] RIDOUT, D., Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **4** (1957), 125–131.

[11] ROTH, K.F., Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **2** (1955), 1–20, corrigendum 168.

Andreas Dress
Mathematics Department
Bielefeld University
Postfach 10 01 31
33 501 Bielefeld, Germany
e-mail: dress@mathematik.uni-bielefeld.de

Florian Luca
Instituto de Matemáticas de la UNAM
Campus Morelia
Apartado Postal 61-3 (Xangari), CP 58089
Morelia, Michoácan, Mexico
e-mail: fluca@matmor.unam.mx

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **28** *(2001) 21–26*

APPROXIMATION BY QUOTIENTS OF TERMS OF SECOND ORDER LINEAR RECURSIVE SEQUENCES OF INTEGERS

Sándor H.-Molnár (Budapest, Hungary)

Abstract. In the paper real quadratic algebraic numbers are approximated by the quotients of terms of appropriate second order recurrences of integers.

AMS Classification Number: 11J68, 11B39

Keywords: Linear recurrences, approximation, quality of approximation.

1. Introduction

Let $G = G(A, B, G_0, G_1) = \{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a second order linear recursive sequence of rational integers defined by recursion

$$G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2} \qquad (n > 1)$$

where A, B and the initial terms G_0, G_1 are fixed integers with restrictions $AB \neq 0$, $D = A^2 + 4B \neq 0$ and not both G_0 and G_1 are zero. It is well-known that the terms of G can be written in form

$$G_n = a\alpha^n - b\beta^n, \tag{1}$$

where α and β are the roots of the characteristic polynomial $x^2 - Ax - B$ of the sequence G and $a = \frac{G_1 - G_0\beta}{\alpha - \beta}$, $b = \frac{G_1 - G_0\alpha}{\alpha - \beta}$ (see e. g. [7], p. 91).

Throughout this paper we assume $|\alpha| \geq |\beta|$ and the sequence is non-degenerate, i. e. α/β is not a root of unity and $ab \neq 0$. We may also suppose that $G_n \neq 0$ for $n > 0$ since in [1] it was proved that a non-degenerate sequence G has at most one zero term and after a movement of indices this condition can be fulfilled.

In the case $D = A^2 + 4B > 0$ the roots of the characteristic polynomial are real, $|\alpha| > |\beta|, (\beta/\alpha)^n \to 0$ as $n \to \infty$ and so by (1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = \alpha$ follows [6]. In [2] and [3] the quality of the approximation of α by quotients G_{n+1}/G_n was considered. In [3] it was proved that if G is a non-degenerate second order linear recurrence with $D > 0$, and c and k are positive real numbers, then

$$\left|\alpha - \frac{G_{n+1}}{G_n}\right| < \frac{1}{c|G_n|^k}$$

holds for infinitely many integer n if and only if

(i) $k < k_0$ and c is arbitrary,

(ii) or $k = k_0$ and $c < c_0$,

(iii) or $k = k_0$, $c = c_0$ and $B > 0$,

(iv) or $k = k_0, c = c_0, B < 0$ and $b/a > 0$,

where $k_0 = 2 - \frac{\log|B|}{\log|\alpha|}$ and $c_0 = \frac{\sqrt{D}^{k_0-3}}{|a|^{k_0-1}|b|}$.

If $D < 0$ then α and β are non real complex numbers with $|\alpha| = |\beta|$ and by (1) we have $\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{1-(b/a)(\beta/\alpha)^{n+1}}{1-(b/a)(\beta/\alpha)^n}$. But $|\beta/\alpha| = 1$, thus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{G_{n+1}}{G_n}$ does not even exist. The approximation of $|\alpha|$ by rationals of the form $|G_{n+1}/G_n|$ was considered e.g. in [3], [4] and [5]. In [3] it was proved that if G is a non-degenerate second order linear recurrence with $D < 0$ and initial values $G_0 = 0, G_1 = 1$, then there exists a constant $c_1 > 0$, depending only on the sequence G, such that $\left||\alpha| - \left|\frac{G_{n+1}}{G_n}\right|\right| < \frac{c_1}{n}$ for infinitely many n.

In this paper the root α of the characteristic polynom of the sequence G will not be approximated by the quotients G_{n+1}/G_n, but by G_{n+1}/H_n, where H is an appropriately chosen second order linear recursive sequence. We can always give a better approximation for $|\alpha|$ if $D < 0$, and for α in the most cases if $D > 0$ as it was given by the authors in [3]. This can be achieved by the approximation of the numbers of the quadratic number field $\mathbf{Q}(\alpha)$ when $D > 0$. The theorems in [3] can only approximate quadratic algebraic integers. Since at least one real quadratic algebraic integer α can be found for any real quadratic algebraic number γ, such that $\gamma \in \mathbf{Q}(\alpha)$, our theorem can adequately approximate any irrational quadratic algebraic number, independently whether it is an algebraic integer or not. We are going to illustrate the above statement and its applicability to non-real complex quadratic algebraic numbers.

2. Result

We prove the following theorem:

Theorem. *Let A and B be rational integers with the restrictions $AB \neq 0$ and $D = A^2 + 4B > 0$ is not a perfect square. Denote by α and β the roots of equation $x^2 - Ax - B = 0$, where $|\alpha| > |\beta|$. Let $t = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}\alpha \in \mathbf{Q}(\alpha)$ with integers $s, q > 0, p \neq 0$ and r. Define the numbers k_0 and c_0 by*

$$k_0 = 2 - \frac{\log|B|}{\log|\alpha|} \quad \textit{and} \quad c_0 = \left|\frac{\sqrt{D}}{qsB}\right|^{k_0-1} \cdot \frac{1}{|psB|}$$

and let k and c be positive real numbers. Then with linear recurrences $G(A, B, qr, psB)$ and $H(A, B, 0, qsB)$ the inequality

$$\left|t - \frac{G_{n+1}}{H_n}\right| < \frac{1}{c|H_n|^k}$$

holds for infinitely many integer n if and only if
(i) $k < k_0$ and c is arbitrary,
(ii) or $k = k_0$ and $c \leq c_0$.
(Note that $k_0 > 0$ since $|B| = |\alpha\beta| < \alpha^2$.)

Corollary. *Since $t = \frac{r}{s} + \frac{p}{q}\alpha$ is an irrational number, then*

$$\left|t - \frac{G_{n+1}}{H_n}\right| < \frac{1}{cH_n^2}$$

holds with some $c > 0$ for infinitely many n if and only if $|B| = 1$.

3. Examples

1^{st} **Example.** $t = \alpha$ is a real quadratic algebraic integer. Let $G(4, 19, G_0, G_1)$, where $G_0, G_1 \in Z$ not both G_0 and G_1 are zero. The characteristic equation is $x^2 - 4x - 19 = 0$ and $\alpha = (4 + \sqrt{92})/2$. If approximation is done according to [3], the quality of approximation $k_0 = 2 - \frac{\log 19}{\log \alpha} = 0.4634845713\ldots$

The equation $92 = A^2 + 4B$ can be written in an infinite variety forms: $\ldots, 2^2 + 4 \cdot 22, 4^2 + 4 \cdot 19, 6^2 + 4 \cdot 14, 8^2 + 4 \cdot 7, 10^2 - 4 \cdot 2, 12^2 - 4 \cdot 13, \ldots$. Using $|B|$ of minimum value $\alpha_1 = \frac{10+\sqrt{100-8}}{2} \Rightarrow A = 10, B = -2, \quad \alpha \in \mathbf{Q}(\alpha_1), \alpha = \alpha_1 - 3$. $G(10, -2, -3, -2)$, $H(10, -2, 0, -2)$ and thus $k_0 = 2 - \frac{\log|-2|}{\log|\alpha_1|} = 1,696248791\ldots$.

2^{nd} **Example.** t is a real quadratic non-algebraic integer. Let t be the root of larger absolute value of the equation $36x^2 - 894x + 1399 = 0$. The roots of $x^2 - 894x + 36 \cdot 1399 = x^2 - 894x + 50364 = 0$ are α_1 and β_1. Since $t = \frac{1}{36}\alpha_1$, i.e. $t \in \mathbf{Q}(\alpha_1)$, we can approximate t. $k_0 = 2 - \frac{\log|B|}{\log|\alpha_1|} = 0,3902074312\ldots$, $c_0 = 0,002251014\ldots$.

Since $D = 894^2 - 4 \cdot 36 \cdot 1399 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot (43^2 - 4)$, $\sqrt{D} = 2 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{(43^2 - 4)}$, it follows that $t \in \mathbf{Q}(\alpha)$ is also true for the root α of $x^2 - 43x + 1 = 0$. Indeed, $t = \frac{5}{3} + \frac{1}{2}\alpha$ and thus $G(43, -1, 10, -3)$, $H(43, -1, 0, -6)$. If we approximate α by the quotients G_{n+1}/H_n, we get $k_0 = 2, c_0 = 2,386303511\ldots$, and thus $\left|t - \frac{G_{n+1}}{H_n}\right| < \frac{1}{cH_n^2} < \frac{1}{\sqrt{5}H_n^2}$ holds for infinitely many n.

3^{rd} **Example.** t' is a non-real quadratic algebraic integer.

Let $t' = \alpha_1$, where α_1 is the root of $x^2 + 3x + 10 = 0$, i. e. $|\alpha_1| = \left|\frac{-3+i\sqrt{31}}{2}\right| = \sqrt{10}$. Since $|\alpha_1| = \sqrt{10} = \frac{6+\sqrt{36+4}}{2} - 3 \Rightarrow |\alpha_1| \in \mathbf{Q}(\alpha)$, where α is a root of $x^2 - 6x - 1 = 0$ and $|\alpha_1| = \alpha - 3$. Calculating with the sequences $G(6,1,-3,1)$ and $H(6,1,0,1)$, $k_0 = 2$ and $c_0 = \sqrt{40}$ and thus $\left||\alpha_1| - \left|\frac{G_{n+1}}{H_n}\right|\right| < \frac{1}{2\sqrt{10}H_n^2}$. This approximation is the best.

4^{th} **Example.** α is a complex, non-algebraic quadratic integer. $4x^2 + 5x + 6 = 0$, $|\alpha_1| = \left|\frac{-5-\sqrt{25-96}}{8}\right|$, $|\alpha_1| = \frac{\sqrt{24}}{4} = \frac{1}{2}\frac{4+\sqrt{4^2+4\cdot 2}}{2} - 1 = \frac{1}{2}\alpha - 1$, where α is root of the equation $x^2 - 4x - 2 = 0$. $A = 4, B = 2, G(4,2,-2,2)$ and $H(4,2,0,4)$, $k_0 = 2 - \frac{\log|2|}{\log|\alpha|} = 1,535669821\ldots, c_0 = 0,5573569115\ldots$. Calculating with the sequences $G^\star(4,2,-1,1)$ and $H^\star(4,2,0,2), k_0^\star = k_0, c_0^\star = 2^{k_0}\cdot c_0 = 1,615905915\ldots$.

Proof of Theorem. By (1) we can write $G_{n+1} = a_1\alpha^{n+1} - b_1\beta^{n+1}$ and $H_n = a\alpha^n - b\beta^n$ for any $n \geq 0$, where

$$a_1 = \frac{G_1 - G_0\beta}{\alpha - \beta} = \frac{psB - qr\beta}{\alpha - \beta}, \qquad b_1 = \frac{psB - qr\alpha}{\alpha - \beta},$$

$$a = \frac{qsB - 0\beta}{\alpha - \beta} = \frac{qsB}{\alpha - \beta}, \qquad b = \frac{qsB}{\alpha - \beta}.$$

Suppose that for an integer $n > 0$ and the positive real numbers c and k we have

$$\left|t - \frac{G_{n+1}}{H_n}\right| < \frac{1}{c|H_n|^k}. \tag{2}$$

Substituting the explicit values of the terms of the sequences and using the equality

$$at - a_1\alpha = \frac{qsB}{\alpha - \beta}\left(\frac{r}{s} + \frac{p}{q}\alpha\right) - \frac{psB - qr\beta}{\alpha - \beta} = 0, \tag{3}$$

$$\left|t - \frac{G_{n+1}}{H_n}\right| = \left|t - \frac{a_1\alpha^{n+1} - b_1\beta^{n+1}}{a\alpha^n - b\beta^n}\right| = \left|\frac{(at - a_1\alpha)\alpha^n - (bt - b_1\beta)\beta^n}{a\alpha^n - b\beta^n}\right|$$

$$= \left|\frac{(bt - b_1\beta)\beta^n}{H_n}\right|$$

follows.

Therefore using the equality $a = b$, inequality (2) can be written in the form

$$1 > c\,|H_n|^k \cdot \left|t - \frac{G_{n+1}}{H_n}\right| = c\,|H_n|^{k-1}\,|(bt - b_1\beta)\beta^n| \tag{4}$$

$$= c\,|a\alpha^n|^{k-1}\left(1 - \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)^{k-1} \cdot |\beta^n|\,|bt - b_1\beta|$$

$$= c|a|^{k-1}\left(|\alpha|^{k-1}|\beta|\right)^n |bt - b_1\beta| \left|1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|^{k-1}$$

Since $\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$ and $\alpha \cdot \beta = -B$, this inequality holds for infinitely many n only if $|\beta||\alpha|^{k-1} = |B||\alpha|^{k-2} < 1$, that is if $k \leq 2 - \frac{\log|B|}{\log|\alpha|} = k_0$ and in the case $k = k_0$ we need

$$c \leq \frac{1}{|a|^{k_0-1}|bt - b_1\beta|}.$$

By (3) and by $a = b$ it follows that $|bt - b_1\beta| = \left|b\frac{a_1\alpha}{a} - b_1\beta\right| = |a_1\alpha - b_1\beta| = |G_1| = |psB|$.

Therefore using the fact that $\alpha - \beta = \sqrt{D}$

$$c \leq \left|\frac{\sqrt{D}}{qsB}\right|^{k_0-1} \frac{1}{|psB|} = c_0$$

Thus by (4) we obtain that (2) holds for infinitely many n if $k < k_0$ or $k = k_0$ and $c \leq c_0$. (If $\frac{\beta}{\alpha} > 0$ then for any sufficiently large n, else for any sufficiently large even n.)

References

[1] Kiss, P., Zero terms in second order linear recurrences, *Math. Sem. Notes (Kobe Univ.)*, **7** (1979), 145-152.

[2] Kiss, P., A Diophantine approximative property of the second order linear recurrences, *Period. Math. Hungar.*, **11** (1980), 281-287.

[3] Kiss, P. and Sinka, Zs., On the ratios of the terms of second order linear recurrences, *Period. Math. Hungar.*, **23** (1991), 139-143.

[4] Kiss, P. and Tichy, R. F., A discrepancy problem with applications to linear recurrences I., *Proc. Japan Acad.* **65**, No. 5 (1989) 135-138.

[5] Kiss, P. and Tichy, R. F., A discrepancy problem with applications to linear recurrences I., *Proc. Japan Acad.* **65**, No. 6 (1989), 191-194.

[6] Mátyás, F., On the quotients of the elements of linear recursive sequences of second order, *Mat. Lapok* **27** (1976/79), 379-389. (In Hungarian)

[7] Niven, I. and Zuckerman, H. S., An introduction to the theory of numbers, Wiley, New York, 1960.

Sándor H.-Molnár
BGF. PSZFK.
Department of Mathematics
Buzogány str. 10.
1149 Budapest, Hungary

LINEAR RECURRENCES AND ROOTFINDING METHODS

Ferenc Mátyás (Eger, Hungary)

Abstract. Let A,B,G_0 and G_1 be fixed complex numbers, where $AB(|G_0|+|G_1|)\neq 0$. Denote by α and β the roots of the equation $\lambda^2-A\lambda+B=0$ and suppose that $|\alpha|>|\beta|$. The sequence $\left\{W_{n,d}^{(k)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ is defined by $W_{n,d}^{(k)}=\left(a^k\alpha^{nk+d}-b^k\beta^{nk+d}\right)/(\alpha-\beta)$, where $k\geq 1$ and $d\geq 0$ are fixed integers, $a=G_1-\beta G_0\neq 0$ and $b=G_1-\alpha G_0$. In this paper, using new identities of the sequence $\left\{W_{n,d}^{(k)}\right\}_{n=0}^{\infty}$, an other proof is presented for the Newton–Raphson and Halley transformations (accelerations) of the sequence $\left\{W_{n,d}^{(k)}/W_{n,0}^{(k)}\right\}_{n=0}^{\infty}$. It is also shown that the (transformed) sequences obtained by the secant, Newton–Raphson, Halley and Aitken transformations of the sequence $\left\{W_{n,d}^{(k)}/W_{n,0}^{(k)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ tend to α^d in order of $\mathrm{o}\left(W_{n,d}^{(k)}/W_{n,0}^{(k)}-\alpha^d\right)$.

AMS Classification Number: 11B39, 65B05.

Keywords: linear recursive sequences, rootfinding methods, accelerations of convergence.

1. Introduction

Let the n^{th} $(n\geq 2)$ term of the sequence $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ be defined by the recursion

$$G_n=AG_{n-1}-BG_{n-2},$$

where A,B,G_0 and G_1 are fixed complex numbers and $AB(|G_0|+|G_1|)\neq 0$. If it is needed then the notation $G_n(A,B,G_0,G_1)$ is also used. For example, the n^{th} term of the Fibonacci sequence is $F_n=G_n(1,-1,0,1)$. The abbreviations $U_n=G_n(A,B,0,1)$ and $V_n=(A,B,2,A)$ will also be very useful for us.

Let α and β be the roots of the equation $\lambda^2-A\lambda+B=0$ $(\alpha+\beta=A,\ \alpha\beta=B)$ and suppose that $|\alpha|>|\beta|$. By the well known Binet formula we get that the explicit form of the term $G_n(A,B,G_0,G_1)$ is

$$G_n(A,B,G_0,G_1)=\frac{a\alpha^n-b\beta^n}{\alpha-\beta}\quad (n\geq 0), \tag{1}$$

Research supported by the Hungarian OTKA Foundation No. T 032898.

where $a = G_1 - \beta G_0$, $b = G_1 - \alpha G_0$ and suppose that $a \neq 0$. For example, $U_n = (\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)$ and $V_n = \alpha^n + \beta^n$ if $\alpha, \beta = \left(A \pm \sqrt{A^2 - 4B}\right)/2$.

Z. Zhang [7] has defined the sequence $\left\{W_{n,d}^{(k)}(A, B, G_0, G_1)\right\}_{n=0}^{\infty}$ in the following manner.

(2) $$W_{n,d}^{(k)}(A, B, G_0, G_1) = \left(\alpha^k + \beta^k\right) W_{n-1,d}^{(k)} - \alpha^k \beta^k W_{n-2,d}^{(k)} \quad (n \geq 2),$$

where $k \geq 1$ and $d \geq 0$ are fixed integers, while

$$W_{0,d}^{(k)}(A, B, G_0, G_1) = \frac{a^k \alpha^d - b^k \beta^d}{\alpha - \beta}, \quad W_{1,d}^{(k)}(A, B, G_0, G_1) = \frac{a^k \alpha^{k+d} - b^k \beta^{k+d}}{\alpha - \beta}.$$

For brevity, we write $W_{n,d}^{(k)}$ instead of $W_{n,d}^{(k)}(A, B, G_0, G_1)$.

It is obvious that α^k and β^k are the roots of the equation

$$\lambda^2 - (\alpha^k + \beta^k)\lambda + \alpha^k \beta^k = \lambda^2 - V_k \lambda + B^k = 0$$

and $|\alpha| > |\beta|$ implies $|\alpha^k| > |\beta|^k$. Using the Binet formula for (2) we get that

$$W_{n,d}^{(k)} = \frac{\left(W_{1,d}^{(k)} - \beta^k W_{0,d}^{(k)}\right) \alpha^{nk} - \left(W_{1,d}^{(k)} - \alpha^k W_{0,d}^{(k)}\right) \beta^{nk}}{\alpha^k - \beta^k},$$

from which

(3) $$W_{n,d}^{(k)} = \frac{a^k \alpha^{nk+d} - b^k \beta^{nk+d}}{\alpha - \beta}$$

yields for $n \geq 0$. It can be seen that $W_{n,d}^{(k)}$ is a generalization of G_n because e. g.

$$G_n = G_n(A, B, G_0, G_1) = W_{n,0}^{(1)}(A, B, G_0, G_1).$$

If $W_{n,0}^{(k)} \neq 0$ then let

(4) $$R_{n,d}^{(k)} = \frac{W_{n,d}^{(k)}}{W_{n,0}^{(k)}}.$$

By (3), $a \neq 0$ and $|\alpha| > |\beta|$, one can easily prove that

$$\lim_{n \to \infty} R_{n,d}^{(k)} = \alpha^d,$$

i. e. the sequence $\left\{R_{n,d}^{(k)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ tends to the root α^d of the polynomial

$$f(\lambda) = \lambda^2 - (\alpha^d + \beta^d)\lambda + \alpha^d\beta^d = \lambda^2 - V_d\lambda + B^d. \tag{5}$$

Recently, many authors have studied the connection between recurrences and iterative transformations. The main idea is to consider such sequence transformations T of the convergent sequence $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ into the sequence $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$, where $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ converges more quickly to the same limit X. Thus, one can investigate the properties of these transformations or the accelerations of the convergence. We say that $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ converges more quickly to X than $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ if $T_n - X = o(X_n - X)$, i. e. if $\lim\limits_{n\to\infty} ((T_n - X) / (X_n - X)) = 0$.

The most known four sequence transformations to accelerate the convergence of a sequence are the secant $S(X_n, X_m)$, Newton–Raphson $N(X_n)$, Halley $H(X_n)$ and Aitken transformation $A(X_n, X_m, X_t)$, namely if $\{X_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{R_{n,d}^{(k)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ and $X = \alpha^d$ (i. e. the root of $f(\lambda) = 0$ in (5)), then

$$S(X_n, X_m) = \frac{X_n X_m - B^d}{X_n + X_m - V_d}, \tag{6}$$

$$N(X_n) = \frac{X_n^2 - B^d}{2X_n - V_d}, \tag{7}$$

$$H(X_n) = \frac{X_n^3 - 3B^d X_n + V_d B^d}{3X_n^2 - 3V_d X_n + V_d^2 - B^d}, \tag{8}$$

$$A(X_n, X_m, X_t) = \frac{X_n X_t - X_m^2}{X_n - 2X_m + X_t}, \tag{9}$$

where we assume that division by zero does not occur. (The formulae (6)-(9) can be obtained from (5) using the known forms of the transformations S, N, H and A, or they can be found in [4] p. 366 and p. 369.)

Some results from the recent past: G. M. Phillips [5] proved that if $r_n' = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ then $A(r_{n-t}', r_n', r_{n+t}') = r_{2n}'$. J. H. McCabe and G. M. Phillips [3] generalized this for $r_n'' = \frac{U_{n+1}}{U_n}$, and they also proved that $S\left(r_n'', r_m''\right) = r_{n+m}''$ and $N(r_n'') = r_{2n}''$. M. J. Jamieson [1] investigated the case $r_n'' = \frac{F_{n+d}}{F_n}$ for $d > 1$. J. B. Muskat [4], using the notations $r_n = \frac{U_{n+d}}{U_n}$ and $R_n = \frac{V_{n+d}}{V_n}$ $(d > 1)$, proved that

(10)
(a) $S(r_n, r_m) = r_{n+m}$, $\qquad S(R_n, R_m) = r_{n+m}$,
(b) $N(r_n) = r_{2n}$, $\qquad N(R_n) = r_{2n}$,

(c) $H(r_n) = r_{3n}$, $H(R_n) = R_{3n}$,
(d) $A(r_{n-t}, r_n, r_{n+t}) = r_{2n}$, $A(R_{n-t}, R_n, R_{n+t}) = r_{2n}$.

Similar results were obtained for special second order linear recurrences in [2] by F. Mátyás, while Z. Zhang ([7],[8]) stated and partially proved that

$$(11)\qquad \begin{aligned} &(a)\ S\left(R^{(k)}_{n,d}, R^{(k)}_{m,d}\right) = R^{(2k)}_{(n+m)/2,d}, \quad (2|n+m),\\ &(b)\ N\left(R^{(k)}_{n,d}\right) = R^{(2k)}_{n,d},\\ &(c)\ H\left(R^{(k)}_{n,d}\right) = R^{(3k)}_{n,d},\\ &(d)\ A\left(R^{(k)}_{n-t,d}, R^{(k)}_{n,d}, R^{(k)}_{n+t,d}\right) = R^{(2k)}_{n,d}. \end{aligned}$$

It is easy to see that (11) implies (10) if $k = 1, G_0 = 0, G_1 = 1$ or $k = 1, G_0 = 2, G_1 = A$. We mention that R. B. Taher and M. Rachidi [6] investigated the so-called ε-algorithm to the ratio of the terms of linear recurrences of order $r \geq 2$.

The purpose of this paper is to present some new properties of the sequence $\left\{W^{(k)}_{n,d}\right\}_{n=0}^{\infty}$ (see Lemma 1 and Lemma 2) and, using them, to give new proofs for (11)/(b) and (c), since Z. Zhang, using some other properties proven by him, presented the proof for only the cases (11)/(a) and (d) in [7] and [8]. We also show that the transformations S, N, H and A creat such sequences from $\left\{R^{(k)}_{n,d}\right\}_{n=0}^{\infty}$ which tend to α^d in order of $o\left(R^{(k)}_{n,d} - \alpha^d\right)$.

2. Results

Applying the notations introduced in this paper, assume that $k \geq 1$ and $d \geq 0$ are fixed integers, in (1) $AB\left(|G_0| + |G_1|\right) \neq 0, a \neq 0$ and $|\alpha| > |\beta|$. We always assume that division by zero does not occur. First we formulate two lemmas.

Lemma 1. *Let n and m be non-negative integers with the same parity. Then*

$$(a)\quad W^{(k)}_{n,d}W^{(k)}_{m,d} - W^{(k)}_{n,0}W^{(k)}_{m,0}B^d = W^{(2k)}_{\frac{n+m}{2},d}U_d,$$

$$(b)\quad W^{(k)}_{n,d}W^{(k)}_{m,0} + W^{(k)}_{m,d}W^{(k)}_{n,0} - W^{(k)}_{n,0}W^{(k)}_{m,0}V_d = W^{(2k)}_{\frac{n+m}{2},0}U_d.$$

Lemma 2. *Let n be a non-negative integer. Then*

$$(a)\ W^{(k)}_{n,d}W^{(2k)}_{n,d} - W^{(k)}_{n,0}W^{(2k)}_{n,0}B^d = W^{(3k)}_{n,d}U_d,$$

$$(b)\ W^{(2k)}_{n,d}W^{(k)}_{n,0} - W^{(2k)}_{n,0}W^{(k)}_{n,0} + W^{(k)}_{n,d}W^{(2k)}_{n,0} = W^{(3k)}_{n,0}U_d.$$

Theorem 1. *Let n be a non-negative integer. Then*

(a) $N\left(R_{n,d}^{(k)}\right)=R_{n,d}^{(2k)}$,

(b) $H\left(R_{n,d}^{(k)}\right)=R_{n,d}^{(3k)}$.

The following theorem implies that the transformations S, N, H and A produce such sequences from the sequence $\left\{R_{n,d}^{(k)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ which tend very quickly to α^d.

Theorem 2. *Let $l>k\geq 1$ be fixed integers. Then*

$$R_{n,d}^{(l)}-\alpha^d=o\left(R_{n,d}^{(k)}-\alpha^d\right).$$

Corollary. *Theorem 1 and (11) show that the transformations S,N,A and H transform $R_{n,d}^{(k)}$ into $R_{n,d}^{(2k)}$ and into $R_{n,d}^{(3k)}$, respectively, thus Theorem 2 implies that all of the mentioned transformations give accelerations of the convergence.*

3. Proofs of Lemmas and Theorems

Proof of Lemma 1. Because of the similarity of the proofs we present only the proof of part (a). Using the explicit form (3) of $W_{n,d}^{(k)}$, we write

$$W_{n,d}^{(k)}W_{m,d}^{(k)}-W_{n,0}^{(k)}W_{m,0}^{(k)}B^d=\frac{(a^k\alpha^{nk+d}-b^k\beta^{nk+d})(a^k\alpha^{mk+d}-b^k\beta^{mk+d})}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$-\frac{(a^k\alpha^{nk}-b^k\beta^{nk})(a^k\alpha^{mk}-b^k\beta^{mk})\alpha^d\beta^d}{(\alpha-\beta)^2}=\cdots=\frac{\alpha^d-\beta^d}{\alpha-\beta}$$

$$\cdot\frac{a^{2k}\alpha^{\frac{n+m}{2}2k+d}-b^{2k}\beta^{\frac{n+m}{2}2k+d}}{\alpha-\beta}=U_dW_{\frac{n+m}{2},d}^{(2k)}.$$

Proof of Lemma 2. Here we also give only the proof of part (a). By (3)

$$W_{n,d}^{(k)}W_{n,d}^{(2k)}-W_{n,0}^{(k)}W_{n,0}^{(2k)}B^d=\frac{(a^k\alpha^{nk+d}-b^k\beta^{nk+d})(a^{2k}\alpha^{2nk+d}-b^{2k}\beta^{2nk+d})}{(\alpha-\beta)^2}$$

$$-\frac{(a^k\alpha^{nk}-b^k\beta^{nk})(a^{2k}\alpha^{2nk}-b^{2k}\beta^{2nk})\alpha^d\beta^d}{(\alpha-\beta)^2}=\cdots=\frac{\alpha^d-\beta^d}{\alpha-\beta}$$

$$\cdot\frac{a^{3k}\alpha^{3nk+d} - b^{3k}\beta^{3nk+d}}{\alpha-\beta} = U_d W_{n,d}^{(3k)}.$$

Proof of Theorem 1. (a) By (7) and (4)

$$N\left(R_{n,d}^{(k)}\right) = \frac{\left(\frac{W_{n,d}^{(k)}}{W_{n,0}^{(k)}}\right)^2 - B^d}{\frac{2W_{n,d}^{(k)}}{W_{n,0}^{(k)}} - V_d} = \frac{\left(W_{n,d}^{(k)}\right)^2 - \left(W_{n,0}^{(k)}\right)^2 B^d}{2W_{n,d}^{(k)}\cdot W_{n,0}^{(k)} - \left(W_{n,0}^{(k)}\right)^2 V_d}.$$

Applying Lemma 1 in the case $n = m$, we have

$$N\left(R_{n,d}^{(k)}\right) = \frac{U_d\cdot W_{n,d}^{(2k)}}{U_d\cdot W_{n,0}^{(2k)}} = R_{n,d}^{(2k)}.$$

(b) By the Halley transformation (8) and (4)

$$H\left(R_{n,d}^{(k)}\right) = \frac{\left(R_{n,d}^{(k)}\right)^3 - 3B^d R_{n,d}^{(k)} + V_d B^d}{3\left(R_{n,d}^{(k)}\right)^2 - 3V_d R_{n,d}^{(k)} + V_d^2 - B^d}$$

$$= \frac{\left(W_{n,d}^{(k)}\right)^3 - 3B^d W_{n,d}^{(k)}\left(W_{n,0}^{(k)}\right)^2 + V_d B^d\left(W_{n,0}^{(k)}\right)^3}{3\left(W_{n,d}^{(k)}\right)^2 W_{n,0}^{(k)} - 3V_d W_{n,d}^{(k)}\left(W_{n,0}^{(k)}\right)^2 + (V_d^2 - B^d)\left(W_{n,0}^{(k)}\right)^3}$$

$$= \frac{W_{n,d}^{(k)}\left(\left(W_{n,d}^{(k)}\right)^2 - B^d\left(W_{n,0}^{(k)}\right)^2\right) - B^d W_{n,0}^{(k)}\left(2W_{n,d}^{(k)}W_{n,0}^{(k)} - V_d\left(W_{n,0}^{(k)}\right)^2\right)}{W_{n,0}^{(k)}\left(\left(W_{n,d}^{(k)}\right)^2 - B^d\left(W_{n,0}^{(k)}\right)^2\right) + \left(W_{n,d}^{(k)} - V_d W_{n,0}^{(k)}\right)\left(2W_{n,d}^{(k)}\cdot W_{n,0}^{(k)} - V_d\left(W_{n,0}^{(k)}\right)^2\right)}.$$

The numerator and the denominator of the last fraction, by Lemma 1, can be rewritten as

$$U_d\left(W_{n,d}^{(2k)} - B^d W_{n,0}^{(k)} W_{n,0}^{(2k)}\right)$$

and

$$U_d\left(W_{n,0}^{(k)} W_{n,d}^{(2k)} + \left(W_{n,d}^{(k)} - V_d W_{n,0}^{(k)}\right) W_{n,0}^{(2k)}\right),$$

respectively. From these, by Lemma 2,

$$H\left(R_{n,d}^{(k)}\right) = \frac{U_d^2 W_{n,d}^{(3k)}}{U_d^2 W_{n,0}^{(3k)}} = R_{n,d}^{(3k)}$$

follows.

Proof of Theorem 2. To prove the theorem we have to show that

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_{n,d}^{(l)} - \alpha^d}{R_{n,d}^{(k)} - \alpha^d} = 0.$$

Applying (4) and (3), we get that

$$\frac{R_{n,d}^{(l)} - \alpha^d}{R_{n,d}^{(k)} - \alpha^d} = \frac{W_{n,d}^{(l)} - \alpha^d W_{n,0}^{(l)}}{W_{n,d}^{(k)} - \alpha^d W_{n,0}^{(k)}} \frac{W_{n,0}^{(k)}}{W_{n,0}^{(l)}} = \dots$$

$$= \left(\frac{b}{a}\right)^{l-k} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n(l-k)} \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^k \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{nk}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^k \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{nl}},$$

from which, by $|\alpha| > |\beta|$ and $l > k \geq 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_{n,d}^{(l)} - \alpha^d}{R_{n,d}^{(k)} - \alpha^d} = 0$$

follows.

References

[1] JAMIESON, M. J., Fibonacci numbers and Aitken sequences revisited, Amer. Math. Monthly, **97** (1990), 829–831.

[2] MÁTYÁS, F., Recursive formulae for special continued fraction convergents, *Acta Acad. Paed. Agriensis Sect. Mat.*, **26** (1999), 49–56.

[3] MCCABE J. H. AND PHILLIPS, G. M., Aitken sequences and generalized Fibonacci numbers, *Math. Comp.*, **45** (1985), 553–558.

[4] MUSKAT, J. B., Generalized Fibonacci and Lucas sequences and rootfinding methods, *Math. Comp.*, **61** (1993), 365–372.

[5] PHILLIPS, G. M., Aitken sequences and Fibonacci numbers, *Amer Math. Monthly*, **91** (1984), 354–357.

[6] TAHER R. B. AND RACHIDI, M., Application of the ε- algirithm to the ratio of r-generalized Fibonacci sequences, *The Fibonacci Quarterly*, **39** (2001), 22–26.

[7] ZHANG, Z., A class of sequences and the Aitken transformation, *The Fibonacci Quarterly* , **36** (1998), 68–71.

[8] Zhang, Z., Generalized Fibonacci sequences and a Generalization of the Q-Matrix, *The Fibonacci Quarterly*, **37** (1999), 203–207.

Ferenc Mátyás
Károly Eszterházy College
Department of Mathematics
Leányka str. 4.
H-3300 Eger, Hungary
e-mail: matyas@ektf.hu

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **28** *(2001) 35–42*

MULTIPLICATIVE FUNCTIONS SATISFYING A CONGRUENCE PROPERTY IV.

Bui Minh Phong (Budapest, Hungary)

Abstract. It is proved that if an integer-valued completely multiplicative function f with $f(n) \neq 0$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ and a polynomial $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k \in \mathbf{Q}[x]$ satisfy the relation

$$A_P P(E) f(n+m) \equiv A_P P(E) f(n) \pmod{m}$$

for a suitable non-zero integer A_P and for all $n, m \in \mathbf{N}$, where

$$P(E) f(n) = a_0 f(n) + a_1 f(n+1) + \cdots + a_k f(n+k),$$

then there is a non-negative integer α such that $f(n) = n^\alpha$ for all $n \in \mathbf{N}$. A similar result is true for $P(x) = (x-1)^k$ and a multiplicative function f.

AMS Classification Number: 11A07, 11A25.

Keywords: multiplicative functions, congruence properties, characterization of arithmetical functions.

1. Introduction

An arithmetical function $f (f(n) \not\equiv 0)$ is said to be multiplicative if $(n, m) = 1$ implies

$$f(nm) = f(n) f(m),$$

and it is called completely multiplicative if this equation holds for all positive integers n and m. Let $\mathcal{M}$ and $\mathcal{M}^*$ be the set of all integer-valued multiplicative and completely multiplicative functions, respectively. Throughout this paper we apply the usual notations, i.e. $\mathcal{P}$ denotes the set of primes, $\mathbf{N}$ the set of positive intgers and $\mathbf{Q}$ the set of rational numbers, respectively.

The problem concerning the characterization of some arithmetical functions by congruence properties was studied by several authors. The first result of this type was found by M. V. Subbarao [9], namely he proved in 1966 that if $f \in \mathcal{M}$ satisfies the relation

$$f(n+m) \equiv f(n) \pmod{m} \tag{1}$$

for all $n, m \in \mathrm{N}$, then $f(n)$ is a power of n with non-negative integer exponent. In [4] among others we extended this result by proving that if $f \in \mathcal{M}$ and (1) holds for all $n \in \mathrm{N}$ and for all $m \in \mathcal{P}$, then $f(n)$ also is of the same form. For further results and generalizations of the above problem we refer the papers [1] and [4]-[8].

Let

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k \quad (a_k \neq 0)$$

be an arbitrary polynomial with integer coefficients. In the space of the sequences $\{x_1, x_2, \ldots\}$ let E, I, Δ denote the operators defined by the following relations

$$Ex_n = x_{n+1}, \quad Ix_n = x_n, \quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

For the polynomial $P(x)$ and the function $f(n)$ we have

$$P(E)f(n) = a_0 f(n) + a_1 f(n+1) + \cdots + a_k f(n+k).$$

For any fixed subsets A, B of N we shall denote by $\mathcal{K}_P(A, B)$ the set of all $f \in \mathcal{M}$ for which

$$P(E)f(n+m) \equiv P(E)f(n) \pmod{m} \tag{2}$$

holds for all $n \in A$ and $m \in B$. It is obvious that

$$\varphi_a(n) = n^a \tag{3}$$

is a solution of (2) for every non-negative integer a and for every triplet (P, A, B). In the case $P(x) = 1$, for example, from the result of [4], we have

$$\mathcal{K}_P(\mathrm{N}, \mathcal{P}) = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_a, \ldots\}$$

and

$$\mathcal{K}_P(\mathcal{P}, \mathrm{N}) = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_a, \ldots\},$$

where $\varphi_a(n)$ is defined in (3).

We are interested for a characterization of those triplets (P, A, B) for which

$$\mathcal{K}_P(A, B) = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_a, \ldots\} \tag{4}$$

is satisfied. In [5]-[6] we proved that (4) holds for the following two cases:

$$P(x) = (x-1)^k \quad (k \in \mathrm{N}), \quad A = \mathrm{N}, \quad B = \mathcal{P}, \tag{a}$$

$$(b) \qquad P(x) = x^M - 1 \quad (M \in \mathrm{N}), \quad A = \mathrm{N}, \quad B = \mathcal{P}.$$

Hence we apply the method of I. Kátai [2]-[3] to prove the following.

Theorem 1. *Let $f \in \mathcal{M}^*$ with condition*

$$f(n) \neq 0 \quad \text{for all} \quad n \in \mathrm{N}. \tag{5}$$

Let $P(x)$ be a non-zero polynomial with rational coefficients for which there exists a suitable non-zero integer A_P such that

$$A_P P(E) f(n+m) \equiv A_P P(E) f(n) \pmod{m} \tag{6}$$

for all $n \in \mathrm{N}$ and $m \in \mathrm{N}$. Then there is a non-negative integer α such that

$$f(n) = n^\alpha \quad \text{for all} \quad n \in \mathrm{N}. \tag{7}$$

We mention that in the special case $P(x) = (x-1)^k$, Theorem 1 is true under the assumption $f \in \mathcal{M}$.

Theorem 2. *Let $f \in \mathcal{M}$ and let $A \neq 0$, $k \geq 0$ be integers. If $\Delta^k f(n)$ satisfies the relation*

$$A\Delta^k f(n+m) \equiv A\Delta^k f(n) \pmod{m} \tag{8}$$

for all $n \in \mathrm{N}$ and $m \in \mathrm{N}$, then (7) holds.

2. Proof of Theorem 2

In the proof of Theorem 2 we shall use the following results.

Lemma 1. *Let $f(n)$ be an integer-valued arithmetic function and let $k \in \mathrm{N}$, $Q \in \mathrm{N}$. If $\Delta^k f(n)$ satisfies the relation*

$$\Delta^k f(n+Q) \equiv \Delta^k f(n) \pmod{Q} \tag{9}$$

for all $n \in \mathrm{N}$, then for $s = 1, 2, \ldots, k$

$$\Delta^{k-s} f(n+tQ) - \Delta^{k-s} f(n) \equiv \sum_{j=0}^{s-1} \binom{n-1}{j} \Delta_f^{k-s+j}(Q,t) \pmod{Q} \tag{10}$$

holds for all $n \in \mathbf{N}$, $t \in \mathbf{N}$, *where*

$$\Delta_f^i(Q,t) := \Delta^i f(1+tQ) - \Delta^i f(1) \quad (i = 0, 1, \ldots).$$

Furthermore, if Q *is a prime, then* (9) *implies that*

$$\Delta_f^{k-s}(Q,t) \equiv \sum_{j=0}^{[\frac{s-1}{Q}]} \binom{t}{j+1} \Delta_f^{k-s+jQ}(Q,1) \pmod Q \tag{11}$$

holds for all $t \in \mathbf{N}$, *where* $[x]$ *denotes the largest integer not exceeding* x.

This lemma and its proof can be found in [5] (see Lemma 1-2).

Lemma 2. *Let* $\alpha \in \mathbf{N}$ *and* $f \in \mathcal{M}$. *If*

$$f(n + p^\alpha) \equiv f(n) \pmod p \tag{12}$$

for all $n \in \mathbf{N}$ *and* $p \in \mathcal{P}$, *then* $f \in \mathcal{M}^*$ *and for each* $q \in \mathcal{P}$

$$f(q) = q^{a(q)},$$

where $a(q) \geq 0$ *is an integer.*

This lemma is indentical to Lemma 3 in [5].

Now we prove Theorem 2.

Assume that $f \in \mathcal{M}$ and (8) is true for all $n, m \in \mathbf{N}$. First we shall prove that there exists an $\alpha \in \mathbf{N}$ such that (12) holds for all $n \in \mathbf{N}$ and for all $p \in \mathcal{P}$. If $k = 0$, then (12) is obviously true.

Assume that $k \geq 1$ be an integer. Let α be a fixed positive integer such that

$$p_0 := \max(|A|, k-1) < 2^{\alpha-1} \tag{13}$$

Since

$$A\Delta^k f(n) = \Delta^k (Af(n)),$$

by (8) it follows that

$$\Delta^k(Af(n + p^{\alpha-1})) \equiv \Delta^k(Af(n)) \pmod{p^{\alpha-1}}$$

holds for all $n \in \mathbf{N}$ and for all $p \in \mathcal{P}$. Thus, by using Lemma 1 and (13), for $s = 1, 2, \ldots, k$ we have

$$\Delta^{k-s} f(n + tp^{\alpha-1}) - \Delta^{k-s} f(n) \equiv \sum_{j=0}^{s-1} \binom{n-1}{j} \Delta_f^{k-s+j}(p^{\alpha-1}, t) \pmod p \tag{14}$$

holds for all $n, t \in \mathbf{N}$, $p \in \mathcal{P}$. Applying (14) in the case $n = 1 + ip^{\alpha-1}$ and $t = 1$, one can deduce from (13) that

$$\Delta^{k-s} f(1+(i+1)p^{\alpha-1}) - \Delta^{k-s} f(1+ip^{\alpha-1}) \equiv \sum_{j=0}^{s-1} \binom{ip^{\alpha-1}}{j} \Delta_f^{k-s+j}(p^{\alpha-1}, 1)$$

$$\equiv \Delta_f^{k-s}(p^{\alpha-1}, 1) \pmod{p}, \tag{15}$$

since it is obvious that for a prime p

$$\binom{ip^{\alpha-1}}{j} \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{if} \quad 1 \le j < p^{\alpha-1}.$$

From (15) we infer that

$$\Delta_f^{k-s}(p^{\alpha-1}, t) \equiv t\Delta_f^{k-s}(p^{\alpha-1}, 1) \pmod{p},$$

and so

$$\Delta_f^0(p^{\alpha-1}, p) \equiv \Delta_f^1(p^{\alpha-1}, p) \equiv \cdots \equiv \Delta_f^{k-1}(p^{\alpha-1}, p) \equiv 0 \pmod{p} \tag{16}$$

holds for all $p \in \mathcal{P}$. By using (14) with $k = s$ and $t = p$, (16) implies (12). Thus, (12) is proved.

Now, from Lemma 2 we have $f \in \mathcal{M}^*$ and

$$f(q) = q^{a(q)} \tag{17}$$

for each $q \in \mathcal{P}$, where $a(q) \ge 0$ is an integer.

It is clear from (8) that

$$\Delta^k f(n+p) \equiv \Delta^k f(n) \pmod{p}$$

for all $n \in \mathbf{N}$ and $p \in \mathcal{P}$ satisfying the condition $p > |A|$. By using (11) in the case $k = s$, we have

$$f(1+tp) - f(1) \equiv t\,(f(1+p) - f(1)) \pmod{p} \tag{18}$$

for all $t \in \mathbf{N}$ and for every prime $p > p_0 := \max(|A|, k-1)$, because $\left[\frac{k-1}{p}\right] = 0$ for $p \ge k$. Considering $t = p + 2$ and taking account (18) we get

$$(f(1+p) - 1)^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

and so by (18) we have

$$f(1+tp)-f(1)\equiv 0 \pmod p \tag{19}$$

for all $t\in\mathbf{N}$ and for every prime $p>p_0$.

Let q,r be distinct primes and let $a(q)\geq a(r)$. Then there is a prime p such that

$$p>\max(p_0,q^{a(q)-a(r)}) \quad \text{and} \quad qr^s-1\equiv 0 \pmod p$$

for some positive integer s. Using (19), we have $f(qr^s)\equiv f(1)=1 \pmod p$ and

$$f(qr^s)=q^{a(q)}r^{sa(r)}\equiv q^{a(q)-a(r)} \pmod p,$$

which implies $a(p)=a(q)=\alpha$. Hence, $f(n)=n^\alpha$ for all $n\in\mathbf{N}$. This completes the proof of Theorem 2.

3. Proof of Theorem 1

Let $f\in\mathcal{M}^*$ and $f(n)\neq 0$ for all $n\in\mathbf{N}$. We denote by I_f the set of all polinomials P with rational coefficients for which there exists a suitable non-zero integer A_P such that

$$A_PP(E)f(n+m)\equiv A_PP(E)f(n) \pmod m$$

holds for all $n,m\in\mathbf{N}$. By our assumption (6), we have $I_f\neq\emptyset$. It is clear to check that

(i) $cP(x)\in I_f$ for every $P\in I_f$, $c\in\mathbf{Q}$

(ii) $P(x)+P'(x)\in I_f$ for every P, $P'\in I_f$

(iii) $xP(x)\in I_f$ for every $P\in I_f$. Thus, (i)-(iii) show that I_f is an ideal in $\mathbf{Q}[x]$.

Let

$$S(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_kx^k \quad (c_k=1)$$

be a polynomial of minimum degree in I_f. If $k=0$, then Theorem 1 follows from Theorem 2. In the following we assume that $k\geq 1$. Let

$$S(x)=(x-\theta_1)\dots(x-\theta_k).$$

From the fundamental theorem of symmetric polynomials it follows that for a fixed integer $s\geq 1$ the polynomial

$$\prod_{j=1}^{k}\frac{x^s-\theta_j^s}{x-\theta_j}$$

has rational coefficients, consequently

$$Q_s(x^s) = (x^s - \theta_1^s) \dots (x^s - \theta_k^s) \in I_f.$$

Then, by the definition of I_f there is a non-zero integer A_s such that

$$A_s Q_s(E^s) f(n+m) \equiv A_s Q_s(E^s) f(n) \pmod{m} \tag{20}$$

for all $n, m \in \mathbf{N}$. On the other hand, by using the fact $f \in \mathcal{M}^*$, we have

$$Q_s(E^s) f(sn) = f(s) Q_s(E) f(n). \tag{21}$$

Therefore, (20) and (21) imply that

$$A_s Q_s(E^s) f\left[s(n+m)\right] \equiv A_s Q_s(E^s) f(sn) \pmod{sm}$$

and

$$A_s f(s) Q_s(E) f(n+m) \equiv A_s f(s) Q_s(E) f(n) \pmod{sm} \tag{22}$$

for all $n, m \in \mathbf{N}$. Since $f(s) \neq 0$ and $f(s)$ is an integer, (22) shows that $Q_s(x) \in I_f$. Thus

$$\delta(x) = (S(x),\ Q_s(x)) \in I_f$$

and so $\deg \delta(x) = k$, $S(x) = Q_s(x)$. This implies that

$$\{\theta_1, \dots, \theta_k\} = \{\theta_1^s, \dots, \theta_k^s\}$$

for all $s \in \mathbf{N}$, consequently

$$\theta_1 = \dots = \theta_k = 1 \quad \text{and} \quad S(x) = (x-1)^k.$$

Thus, Theorem 1 follows directly from Theorem 2.

References

[1] IVÁNYI, A., On multiplicative functions with congruence property, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös, Sect. Math.* **15** (1972), 133-137.

[2] KÁTAI, I., On arithmetic functions with regularity properties, *Acta Sci. Math.*, **45** (1983), 253-260.

[3] KÁTAI, I., Multiplicative functions with regularity properties I, *Acta Math. Hungar.*, **42** (1983), 295-308.

[4] PHONG, B. M., Multiplicative functions satisfying a congruence property, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **26** (1991), 123-128.

[5] PHONG, B. M., Multiplicative functions satisfying a congruence property II., *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös, Sec. Math.* **33** (1990), 253-259.

[6] PHONG, B. M., Multiplicative functions satisfying a congruence property III., *Publ. Math. Debrecen* **39**/1 - 2 (1991), 149-153.

[7] PHONG, B. M., Multiplicative functions satisfying a congruence property V, *Acta Math. Hungar.*, **62** (1993), 81-87.

[8] PHONG, B. M. AND FEHÉR, J., Note on multiplicative functions satisfying congruence property, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös, Sect. Math.* **33** (1990), 261-265.

[9] SUBBARAO, M. V., Arithmetic functions satisfying congruence property, *Canad. Math. Bull.*, **9** (1966), 143-146.

Bui Minh Phong
Department of Computer Algebra
Eötvös Loránd University
Pázmány Péter sét. 1/D
H-1117 Budapest, Hungary
e-mail: bui@compalg.inf.elte.hu

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **28** *(2001) 43–53*

ON THE STABILITY OF A SUM FORM FUNCTIONAL EQUATION OF MULTIPLICATIVE TYPE

Imre Kocsis (Debrecen, Hungary)

Abstract. The stability of a so-called sum form functional equation arising in information theory is proved under certain conditions.

1. Introduction

A function a is additive, a function $M : [0,1] \to \mathbf{R}$ is multilpicative, and a function $l : [0,1] \to \mathbf{R}$ is logarithmic if $a(x+y) = a(x) + a(y)$ for all $x, y \in \mathbf{R}$, $M(xy) = M(x)M(y)$ for all $x, y \in]0,1[$, $M(0) = 0$, $M(1) = 1$, and $l(xy) = l(x)+l(y)$ for all $x, y \in]0,1]$, $l(0) = 0$, respectively.

We define the following sets of complete probability distributions

$$\Gamma_n = \Big\{(p_1, \dots, p_n) \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\Big\}$$

and

$$\Gamma_n^0 = \Big\{(p_1, \dots, p_n) \in]0,1[^n : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\Big\}$$

Through the paper I and Δ_n shall denote $[0,1]$ or $]0,1[$ and Γ_n or Γ_n^0, respectively.

Let $n \geq 3$ and $m \geq 3$ be fixed integers, $M_1, M_2 : I \to \mathbf{R}$ be fixed multiplicative functions and $f : I \to \mathbf{R}$ be an unknown function. The functional equation

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(p_i q_j) = \sum_{i=1}^{n} M_1(p_i) \sum_{j=1}^{m} f(q_j) + \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \sum_{j=1}^{m} M_2(q_j) \tag{1.1}$$

which holds for all $(p_1, \dots, p_n) \in \Delta_n$ and $(q_1, \dots, q_m) \in \Delta_m$ plays important role in the characterization of information measures.

The general solution of (1.1) is known when M_1 or M_2 is different from the identity function. The $M_1(x) = M_2(x) = x$, $x \in I$ case will be excluded from our investigations, too. In the closed domain case, when the multiplicative functions are power functions, the general solution was given by L. Losonczi and Gy. Maksa in [8].

Theorem 1. *Let $n \geq 3$ and $m \geq 3$ be fixed integers, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 1$ or $\beta \neq 1$, $M_1(p) = p^\alpha$, $M_2(p) = p^\beta$, $p \in [0,1]$, $0^\alpha = 0^\beta = 0$. The general solution of equation (1.1) is*

$$f(p) = a_1(p) + C(p^\alpha - q^\beta), \quad p \in [0,1] \quad \text{if} \quad \alpha \neq \beta$$
$$f(p) = a_2(p) + p^\alpha l(p), \quad p \in [0,1] \quad \text{if} \quad \alpha = \beta \neq 1$$

where a_1 and a_2 are additive functions, $a_1(1) = a_2(1) = 0$, l is a logarithmic function, and $c \in \mathbf{R}$.

In the open domain case the general solution of (1.1) was given by B. R. Ebanks, P. Kannappan, P. K. Sahoo, and W. Sander in [2]:

Theorem 2. *Let $n \geq 3$ and $m \geq 3$ be fixed integers, $M_1, M_2 :]0,1[\to \mathbf{R}$ be fixed multiplicative functions, M_1 or M_2 is different from the identity function. The general solution of equation (1.1) is*

$$f(p) = a_1(p) + C(M_1(p) - M_2(p)), \quad p \in]0,1[\quad \text{if} \quad M_1 \neq M_2$$
$$f(p) = a_2(p) + M_1(p)l(p) - b, \quad p \in]0,1[\quad \text{if} \quad M_1 = M_2$$

where a_1 and a_2 are additive functions, $a_1(1) = 0$, l is a logarithmic function, $c \in \mathbf{R}$, and

$$b = a_2(1) = 0, \quad \text{if} \quad M_1 = M_2 \notin \{0,1\},$$
$$b = \frac{a_2(1)}{nm}, \quad \text{if} \quad M_1 = M_2 = 0,$$
$$b = \frac{a_2(1)}{nm}(n+m-1), \quad \text{if} \quad M_1 = M_2 = 1.$$

Applying the methods used in the proof of Theorem 1 in Losonczi-Maksa [8] with arbitrary multiplicative functions (which are not both identity functions) instead of power functions we have the following generalization of Theorem 1.

Theorem 3. *Let $n \geq 3$ and $m \geq 3$ be fixed integers, $M_1, M_2 : [0,1] \to \mathbf{R}$ be fixed multiplicative functions, M_1 or M_2 is different from the identity function. Then the general solution of equation (1.1) is*

$$f(p) = a_1(p) + C(M_1(p) - M_2(p)), \quad p \in [0,1] \quad \text{if} \quad M_1 \neq M_2$$
$$f(p) = a_2(p) + M_1(p)l(p), \quad p \in [0,1] \quad \text{if} \quad M_1 = M_2$$

where a_1 and a_2 are additive functions, $a_1(1) = a_2(1) = 0$, l is a logarithmic function and $c \in \mathbf{R}$.

For the problem of the stability of functional equations in Hyers-Ulam sense we refer to the survey paper of Hyers and Rassias [4]. By the stability problem for equation (1.1) we mean the following: Let $n \geq 3$ and $m \geq 3$ be fixed integers, $M_1, M_2 : I \to \mathbf{R}$ be fixed multiplicative functions, and $0 \leq \varepsilon \in \mathbf{R}$ be fixed. Prove or disprove that the functions $f : I \to \mathbf{R}$ satisfying the funtional inequality

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(p_i q_j) - \sum_{i=1}^{n} M_1(p_i)\sum_{j=1}^{m} f(q_j) - \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\sum_{j=1}^{m} M_i(q_j)\right| \leq \varepsilon \tag{1.2}$$

for all $(p_1, \ldots, p_n) \in \Delta_n$ and $(q_1, \ldots, q_m) \in \Delta_m$ are the sum of a solution of (1.1) and a bounded function.

The stability of equation (1.1) on closed domain, when the multiplicative functions are power functions was proved in Kocsis-Maksa [6].

Theorem 4. *Let $n \geq 3$ and $m \geq 3$ be fixed integers, $\varepsilon, \alpha, \beta \in R$, $\varepsilon \geq 0$, $\alpha \neq 1$ or $\beta \neq 1$. If the function $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ satisfies the inequality (1.2) for all $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n$ and $(q_1, \ldots, q_m) \in \Gamma_m$ then there exists an additive function a, a logarithmic function $l : [0,1] \to \mathbf{R}$, a bounded function $B : [0,1] \to \mathbf{R}$, and $C \in \mathbf{R}$ such that $a(1) = 0$ and*

$$f(p) = a(p) + C(p^\alpha - q^\beta) + B(p), \quad p \in [0,1] \quad \text{if} \quad \alpha \neq \beta,$$
$$f(p) = a(p) + p^\alpha l(p) + B(p), \qquad p \in [0,1] \quad \text{if} \quad \alpha = \beta \neq 1.$$

In this paper we deal with the stability of (1.1) on closed domain and on open domain when the functions M_1 and M_2 are arbitrary multiplicative functions (M_1 or M_2 is different from the identity function).

We notice that the condition $n = m$ or $(n \neq m)$ is essential in the open domain case when zero probabilities are excluded, while it is not essential in the closed domain case.

The basic tool for the proof of the stability theorems is the stability of the sum form functional eqation

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(p_i) = 0, \tag{1.3}$$

where $n \geq 3$ is a fixed integer, $\varphi : I \to \mathbf{R}$ is an unknown function and (1.3) holds for all $(p_1, \ldots, p_n) \in \Delta_n$. The general solution of equation (1.3) in the closed domain case was given by L. Losonczi and Gy. Maksa in [8] and in the open domain case by L. Losonczi in [7]. In both cases the general solution of (1.3) is

$$\varphi(p) = a(p) - \frac{a(1)}{n}, \quad p \in I, \tag{1.4}$$

where a is an additive function.

The stability problem for equation (1.3) was solved by Gy. Maksa in [10] on closed domain and by I. Kocsis in [5] on open domain.

Lemma 1. (Maksa [10]) *Let $n \geq 3$ be a fixed integer and $0 \leq \varepsilon \in \mathbf{R}$ be fixed. If the function $\varphi : [0,1] \to \mathbf{R}$ satisfies the inequality*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \varphi(p_i)\right| \leq \varepsilon, \tag{1.5}$$

for all $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n$, then there exist an additive function A and a bounded function $B : [0,1] \to \mathbf{R}$ such that $B(0) = 0$, $|B(p)| \leq 18\varepsilon$, and

$$\varphi(p) - \varphi(0) = A(p) + B(p), \qquad p \in [0,1].$$

Lemma 2. (Kocsis [5]) *Let $n \geq 3$ be a fixed integer and $0 \leq \varepsilon \in \mathbf{R}$ be fixed. If the function $\varphi :]0,1[\to \mathbf{R}$ satisfies (1.5) for all $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n^0$, then there exist an additive function A and a bounded function $B : [0,1] \to \mathbf{R}$ such that $|B(p)| \leq 220\varepsilon$, and*

$$\varphi(p) = A(p) - \frac{A(1)}{n} + B(p), \qquad p \in]0,1[\,.$$

In what follows the following two lemmata will also be needed.

Lemma 3. *Let A is an additive function, $M : I \to \mathbf{R}$ is a multiplicative function $B : I \to \mathbf{R}$ is a bounded function, and $c \in \mathbf{R}$.*

If $A(x) = M(x) + c$ for all $x \in I$ then

$$A(x) = dx, x \in \mathbf{R}$$

for some $d \in \mathbf{R}$ and

$$M(x) = 0 \quad or \quad M(x) = x, \ x \in I.$$

If $A(x) = M(x) + B(x)$ for all $x \in I$ then

$$A(x) = dx, x \in \mathbf{R}$$

for some $d \in \mathbf{R}$ and

$$M(x) = 0 \quad or \quad M(x) = x^{\alpha}, \ x \in I$$

for some $0 \leq \alpha \in \mathbf{R}$.

Proof. If $A(x) = M(x) + c$ for all $x \in I$ then, because of $A(x) = M(\sqrt{x})^2 + c \geq c$, A is bounded below on I. Thus $A(x) = dx$, $x \in \mathbf{R}$ for some $d \in \mathbf{R}$. (See Aczél [1].) Therefore $M(x) = dx - c$, $x \in I$. Since M is multiplicative we have that $c = 0$ and $d \in \{0, 1\}$.

If $A(x) = M(x) + B(x)$ for all $x \in I$ we have similarly that $A(x) = dx$, $x \in \mathbf{R}$ for some $d \in \mathbf{R}$ and $M(x) = dx - B(x)$, $x \in I$. Thus M is bounded on I that is $M(x) = 0$ or $M(x) = x^\alpha$,$x \in I$, for some $0 \leq \alpha \in \mathbf{R}$.

Lemma 4. *Let $M_1, M_2 : I \to \mathbf{R}$ be fixed multiplicative functions, $M_1 \neq M_2$, A be an additive function and $c \in \mathbf{R}$. If $M_1(x) - M_2(x) = A(x) + c$ holds for all $x \in I$ then M_1 and M_2 are zero or identity functions of I.*

Proof. Let $a \in I, M_1(a) \neq M_2(a)$. Then from the equations

$$M_1(x) - M_2(x) = A(x) + c \tag{1.6}$$

and

$$M_1(a)M_1(x) - M_2(a)M_2(x) = A(ax) + c$$

we get that

$$M_2(x) = \frac{1}{M_1(a) - M_2(a)} A(ax) - \frac{M_1(a)}{M_1(a) - M_2(a)} A(x) + \frac{c(1 - M_1(a))}{M_1(a) - M_2(a)},$$

that is, there exist an additive function A^* and a constant $c^* \in \mathbf{R}$ such that $M_2(x) = A^*(x) + c^*$ for all $x \in I$. Thus, by Lemma 3, M_2 is zero or identity function of I. Furthermore, by (1.6), we have the same for M_2.

2. The main results

We present two generalizations of Theorem 4. The following theorem says that the functional equation (1.1) is stable on the closed domain.

Theorem 5. *Let $n \geq 3$ and $m \geq 3$ be fixed integers, $0 \leq \varepsilon \in \mathbf{R}$ be fixed and $M_1, M_2 : [0,1] \to \mathbf{R}$ be fixed multiplicative functions, M_1 or M_2 is different from the identity function. If the function $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ satisfies the inequality (1.2) for all $(p_1, \ldots, p_n) \in \Gamma_n$ and $(q_1, \ldots, q_m) \in \Gamma_m$ then there exists an additive function a, a logarithmic function $l : [0,1] \to \mathbf{R}$, a bounded function $B : [0,1] \to \mathbf{R}$, and $C \in \mathbf{R}$ such that*

$$f(p) = a(p) + C(M_1(p) - M_2(p)) + B(p), \quad p \in [0,1] \quad \text{if} \quad M_1 \neq M_2,$$
$$f(p) = a_2(p) + M_1(p)l(p) + B(p), \quad p \in [0,1] \quad \text{if} \quad M_1 = M_2.$$

The following theorem states that the functional equation (1.1) is stable on the open domain when $n = m \geq 3$ and $M_1 \neq M_2$.

Theorem 6. *Let $n = m \geq 3$ be a fixed integer, $0 \leq \varepsilon \in \mathbf{R}$ be fixed and $M_1, M_2 :]0,1[\to \mathbf{R}$ be fixed multiplicative functions, $M_1 \neq M_2$. If the function $f :]0,1[\to \mathbf{R}$ satisfies the inequality (1.2) for all $(p_1, \dots, p_m)$, $(q_1, \dots, q_m) \in \Gamma_m^0$ then there exists an additive function a, a bounded function $B :]0,1[\to \mathbf{R}$, and $C \in \mathbf{R}$ such that*

$$f(p) = a(p) + C(M_1(p) - M_2(p)) + B(p), \quad p \in]0,1[.$$

The proofs of Theorem 5 and Theorem 6 are based on the following arguments. In the closed and open domain case we use Lemma 1 and Lemma 2, respectively.

Applying Lemma 1 or Lemma 2 for the function

$$\varphi(p, Q) = \sum_{j=1}^{m} (f(pq_j) - M_1(p)f(q_j) - f(p)M_2(q_j))$$

with fixed $Q = (q_1, \dots, q_m) \in \Delta_m$ (1.2) implies that

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} (f(pq_j) - M_1(p) \sum_{j=1}^{m} f(q_j) - f(p) \sum_{j=1}^{m} M_2(q_j)) \\ = A_1(p, Q) + b_1(p, Q) + L_1(Q) \end{aligned} \tag{2.1}$$

holds for all $p \in I$, where $A_1 : \mathbf{R} \times \Delta_m \to \mathbf{R}$ is additive in its first variable and $b_1 : \mathbf{R} \times \Delta_m \to \mathbf{R}$ is bounded. In the closed domain case $L_1(Q) = mf(0) - f(0) \sum_{j=1}^{m} M_2(q_j)$ particulary. Let $P = (p_1, \dots, p_m) \in \Delta_m, p \in I$, write pp_i instead of p in (2.1), $i = 1 \dots m$ and add up the equations we obtained. Thus we get

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} (f(pp_iq_j) - M_1(p) \sum_{i=1}^{m} M_1(p_i) \sum_{j=1}^{m} f(q_j) \\ - \sum_{i=1}^{m} f(pp_i) \sum_{j=1}^{m} M_2(q_j)) = A_1(p, Q) + \sum_{i=1}^{m} b_1(pp_i, Q) + mL_1(Q). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Write now P instead of Q in (2.1) to obtain

$$\sum_{i=1}^{m} f(pp_i) - M_1(p) \sum_{i=1}^{m} f(p_i) - f(p) \sum_{i=1}^{m} M_2(p_i)) = A_1(p, P) + b_1(p, P) + L_1(P),$$

that is,

$$\sum_{i=1}^{m} f(pp_i) = M_1(p)\sum_{i=1}^{m} f(p_i) - f(p)\sum_{i=1}^{m} M_2(p_i)) + A_1(p,P) + b_1(p,P) + L_1(P).$$

Putting this into (2.2) and collecting the terms symmetric in P and Q on the left hand side we get

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} f(pp_iq_j) - f(p)\sum_{i=1}^{m} M_2(p_i)\sum_{j=1}^{m} M_2(q_j)\\
&\quad = M_1(p)\left[\sum_{i=1}^{m} M_1(p_i)\sum_{j=1}^{m} f(q_j) + \sum_{i=1}^{m} f(p_i)\sum_{j=1}^{m} M_2(q_j)\right]\\
&\quad + A_1(p,P)\sum_{j=1}^{m} M_2(q_j)) + b_1(p)\sum_{j=1}^{m} M_2(q_j)) + L_1(p)\sum_{j=1}^{m} M_2(q_j))\\
&\quad + A_1(p,Q) + \sum_{i=1}^{m} b_1(pp_i,Q) + mL_1(Q).
\end{aligned}$$

Since the right hand side is also simmetric in P and Q we have

$$\begin{aligned}
&A_1(p,P)\left[\sum_{j=1}^{m} M_2(q_j) - 1\right] - A_1(p,Q)\left[\sum_{i=1}^{m} M_2(p_i) - 1\right]\\
&\quad = M_1(p)\left[\sum_{j=1}^{m} M_1(q_j)\sum_{i=1}^{m} f(p_i) + \sum_{i=1}^{m} M_2(p_i)\sum_{j=1}^{m} f(q_j)\right.\\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^{m} M_1(p_i)\sum_{j=1}^{m} f(q_j) - \sum_{j=1}^{m} M_2(q_j)\sum_{i=1}^{m} f(p_i)\right]\\
&\quad - L_1(Q)\sum_{i=1}^{m} M_2(p_i) - L_1(P)\sum_{j=1}^{m} M_2(q_j)\\
&\quad + b_1(p,Q)\sum_{i=1}^{m} M_2(p_i) - b_1(p,P)\sum_{i=j}^{m} M_2(q_j)\\
&\quad + \sum_{j=1}^{m} b_1(pq_j,P) - \sum_{i=1}^{m} b_1(pp_i,Q) + mL_1(P) - mL_1(Q).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

The left hand side of (2.3) is aditive in p, while the right hand side can be written in the form $M_1(p)F_1(P,Q)+F_2(p,P,Q)+F_3(P,Q)$, where F_2 is bounded. Applying Lemma 3 with fixed $P,Q\in\Delta_m$ we get that

$$\begin{aligned}A_1(p,P)\left[\sum_{j=1}^m M_2(q_j)-1\right]-A_1(p,Q)\left[\sum_{i=1}^m M_2(p_i)-1\right]\\=p\left(A_1(1,P)\left[\sum_{j=1}^m M_2(q_j)-1\right]-A_1(1,Q)\left[\sum_{i=1}^m M_2(p_i)-1\right]\right)\end{aligned}\tag{2.4}$$

futhermore M_1 is a bounded multiplicative function or

$$\sum_{i=1}^m (M_1(p_i)-M_2(p_i))\ \sum_{j=1}^m f(q_j)=\sum_{j=1}^m (M_1(q_j)-M_2(q_j))\ \sum_{i=1}^m f(p_i).\tag{2.5}$$

If (2.5) holds then, by (1.4), and by Lemma 4 we have that

$$M_1=M_2 \qquad \text{or}$$

$$M_1(p)=p^\alpha,\ M_2(p)=p^\beta,\quad p\in I,\ 0\le\alpha\in\mathbf{R},\ 0\le\beta\in\mathbf{R}.\tag{2.6}$$

Proof of Theorem 5. In the case $M_1\neq M_2$, by (2.6), we can apply Theorem 4.

The case $M_1=M_2$. If the functions M_1 and M_2 are power functions we can apply Theorem 4 again. Suppose now that M_1 is not a power function.

Fix $Q=(q_1,\dots,q_m)\in\Gamma_m$ for which $\sum_{j=1}^m M_1(q_j)\neq 1$ (exists such a Q) and let

$$a(x)=\frac{A_1(x,Q)-xA_1(1,Q)}{1-\sum_{j=1}^m M_1(q_j)},\qquad x\in\mathbf{R}.\tag{2.7}$$

Then a is additive and $a(1)=0$. From (2.4) we get that

$$A_1(p,P)=pA_1(1,P)+a(p)(1-\sum_{i=1}^m M_1(p_i)),\tag{2.8}$$

while from (2.1), with $p=1$ and $P=Q$, it follows that

$$A_1(1,P)=[f(0)-f(1)]\sum_{i=1}^m M_1(p_i)-mf(0)-b_1(1,P),\tag{2.9}$$

where $p \in [0,1]$, $P \in \Gamma_m$. Equations (2.8) and (2.9) imply that

$$
\begin{aligned}
A_1(p,P) &= a(p)\left(1 - \sum_{i=1}^{m} M_1(p_i)\right) \\
&\quad + p\left([f(0) - f(1)]\sum_{i=1}^{m} M_1(p_i) - mf(0) - b_1(1,P)\right)
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

After some calculations we have that

$$
\begin{aligned}
&\left(b_1(p,P) - p[f(1) + (m-1)f(0) + b_1(1,P)]\right)\sum_{j=1}^{m} M_1(q_j) \\
&\quad = \left(b_1(p,Q) - p[f(1) + (m-1)f(0) + b_1(1,Q)]\right)\sum_{i=1}^{m} M_1(p_i) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{m} b_1(pq_j, P) - \sum_{j=1}^{m} b_1(pp_i, Q) + p[b_1(1,Q) - b_1(1,P)].
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

Since the right hand side of (2.11) is bounded in Q, while $\sum_{j=1}^{m} M_1(q_j)$ is not, we have

$$
b_1(p,P) = p[b_1(1,P) + f(1) + (m-1)f(0)], \quad p \in [0,1], \ P \in \Gamma_m. \tag{2.12}
$$

By (2.11), it follows from (2.1) that

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} \big(h(pq_j) - M_1(p)h(q_j) - h(p)M_1(q_j) + h(0)M_1(q_j) \\
&\quad - p[h(0) - h(1)]M_1(q_j) - h(0) - [h(1) - h(0)]pq_j\big) = 0,
\end{aligned}
$$

where $h(p) = f(p) - a(p)$, $p \in [0,1]$. Applying Lemma 1 we get that

$$
\begin{aligned}
&h(pq) - M_1(p)h(q) - M_1(q)h(p) + h(0)M_1(q) - p[h(0) \\
&\quad - h(1)]M_1(q) - h(0) - pq[h(1) - h(0)] + M_1(p)h(0) = A_2(p,q)
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

$p, q \in [0,1]$, where $A_2 : [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{R}$ is additive in its second variable. Define the function H on $[0,1]$ by $H(p) = h(p) - h(0)$. Thus (2.13) can be written in the form

$$
H(pq) - M_1(p)H(q) - M_1(q)h(p) + H(1)pM(q) = A_2(p,q). \tag{2.14}
$$

A calculation shows that the function $G : [0,1]^2 \to \mathbf{R}$ defined by

$$
G(p,q) = H(p,q) - M_1(p)h(q) - M_1(q)H(p) \tag{2.15}
$$

satisfies the equation

$$G(pq,r)+M(r)G(p,q)=G(p,qr)+M(p)G(q,r), \quad p,q,r\in[0,1]. \tag{2.16}$$

From (2.14) and (2.15) we have that $G(p,q)=A_2(p,q)-H(1)M(q)$. With (2.16) this implies that

$$A_2(p,qr)-A_2(pq,r)+M_1(p)A_2(q,r)=M_1(r)[A_2(p,q)-H(1)(pq-M_1(p)q)].$$

The left hand side is additive in the variable r and the multiplicative function M_1 is not the identity function so $A_2(p,q)=H(1)(p-M_1(p))q$ thus (2.14) goes over into

$$H(pq)-H(1)pq=M_1(p)(H(q)-H(1)q)+M_1(q)(H(p)-H(1)p), \tag{2.17}$$

where $p,q\in[0,1]$. Let $l:[0,1]\to\mathbf{R}$, $l(0)=0$ and

$$l(p)=\frac{H(p)-H(1)p}{M_1(p)}, \qquad p\in[0,1].$$

Then (2.17) shows that l is a logarithmic function and for all $p\in[0,1]$ we have

$$f(p)=a(p)+h(p)=a(p)+H(p)+h(0)=a(p)+M(p)l(p)+H(1)p+h(0).$$

With $B(p)=H(1)p+h(0), p\in[0,1]$ we obtain the statement of the theorem.

Proof of Theorem 6. Here $n=m, M_1\neq M_2$ and, by (2.6), M_1 and M_2 are power functions, that is, $M_1(p)=p^\alpha, M_2(p)=p^\beta$, $p\in]0,1[$ for some $0\le\alpha\in\mathbf{R}$, $0\le\beta\in\mathbf{R}$. Interchanging P and Q in (1.2) and applying the triangle inequality we have

$$\left|\sum_{j=1}^{m}(q_j^\alpha-q_j^\beta)\sum_{i=1}^{m}f(p_i)-\sum_{i=1}^{m}(p_i^\alpha-p_i^\beta)\sum_{j=1}^{m}f(q_j)\right|\le 2\varepsilon. \tag{2.18}$$

By Lemma 2 we get

$$f(p)=A(p)+c_1p^\alpha+c_2p^\beta+b(p), \qquad p\in]0,1[,$$

where A is an additive function, $b:]0,1[\to\mathbf{R}$ is a bounded function, and $c_1,c_2\in\mathbf{R}$. With the definitions

$$a(p)=A(p)-pA(1), \qquad p\in\mathbf{R}$$

$$B(p)=b(p)+pA(1)+(c_1+c_2)p^\alpha, \qquad p\in]0,1[$$

and

$$C=-c_2$$

our theorem is proved.

Remark. It is clear from the paper that some open problem remains connected with the stability of equation (1.1). For example the case $M_1=M_2$ or $M_1\neq M_2$ *and* $n\neq m$. The stability problem is essentially solved in the open domain case.

References

[1] ACZÉL, J., Lectures on Functional Equations and Thier Applications, *Academic Press New York and London*, 1966.

[2] EBANKS, B. R., KANNAPPAN, P. , SAHOO P. K. AND SANDER W., Characterizations of sum form information measures on open domain, *Aequ. Math.* **54** (1997), 1–30.

[3] GER R., The singular case in the stability behaviour of linear mappings, *Grazer Math. Ber.* **316** (1991), 59–70.

[4] HYERS, D. H. AND RASSIAS, T. M., Approximate homomorfisms, *Aequ. Math.* **44** (1992), 125–153.

[5] KOCSIS, I., Stability of a sum form functional equation on open domain, *Publ. Math. Debrecen* **57** (2000)(1–2), 135–143.

[6] KOCSIS, I. AND MAKSA, GY., The stability of a sum form functional equation arising in information theory, *Acta Math. Hungar.* **79** (1–2) (1998), 53–62.

[7] LOSONCZI, L., Functional equation of sum form, *Publ. Math. Debrecen* **32** (1985), 56–71.

[8] LOSONCZI, L. AND MAKSA, GY., The general solution of a functional equation of information theory, —it Glasnik Mat. **16** (36) (1981), 261–266.

[9] LOSONCZI, L. AND MAKSA, GY., On some functional equations of the information theory, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **39** (1982), 73–82.

[10] MAKSA, GY., On the stability of a sum form equation, *Results in Mathematics* **26** (1994), 342–347.

Imre Kocsis
University of Debrecen
Institute of Mathematics and Informatics
4010 Debrecen P.O. Box 12.
Hungary
e-mail: kocsisi@tech.klte.hu

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **28** *(2001) 55–60*

ON VERY POROSITY AND SPACES OF GENERALIZED UNIFORMLY DISTRIBUTED SEQUENCES

Béla László (Nitra, Slovakia) & János T. Tóth (Ostrava, Czech Rep.)

Abstract. In the paper the porosity structure of sets of generalized uniformly distributed sequences is investigated in the Baire's space.

AMS Classification Number: Primary 11J71, Secondary 11K36, 11B05

Keywords: Uniform distribution, Baire space, porosity

1. Introduction and definitions

In [4] the concept of uniformly distributed sequences of positive integers mod m ($m \geq 2$) and uniformly distributed sequences of positive integers in **Z** is introduced (see also [1], p. 305).

We recall the notion of Baire's space S of all sequences of positive integers. This means the metric space S endowed with the metric d defined on $S \times S$ in the following way.

Let $x = (x_n)_1^\infty \in S$, $y = (y_n)_1^\infty \in S$. If $x = y$, then $d(x, y) = 0$ and if $x \neq y$, then

$$d(x, y) = \frac{1}{\min\{n : \ x_n \neq y_n\}}.$$

In [2] is proved that the set of all uniformly distributed sequences of positive integers is a set of the first Baire category in (S, d). In the present paper we shall generalize this result to the space of all real sequences.

Denote by (s, d) the metric space of all sequences of real numbers with d Baire's metric.

In the sequel we use the following well-known result of H. Weyl:

Theorem A. *The sequence $x = (x_n)_1^\infty \in s$ is uniformly distributed* (mod 1) *if and only if for each integer $h \neq 0$ the equality*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0$$

This research was supported by the Czech Academy of Sciences GAAV A 1187 101.

holds (cf. [3], p. 7).

Denote

$$\mathcal{U} = \{x = (x_n)_1^\infty \in s;\ (x_n)_1^\infty \text{ is u. d. mod } 1\},$$

hence from Theorem A we have

$$\mathcal{U} = \left\{ x = (x_n)_1^\infty \in s;\ \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0 \text{ for each integers } h \neq 0 \right\}.$$

We now give definitions and notation from the theory of porosity of sets (cf. [5]-[7]). Let (Y, ϱ) be a metric space. If $y \in Y$ and $r > 0$, then denote by $B(y,r)$ the ball with center y and radius r, i.e.

$$B(y,r) = \{x \in Y : \varrho(x,y) < r\}.$$

Let $M \subseteq Y$. Put

$$\gamma(y,r,M) = \sup\{t > 0 : \quad \exists_{z\in Y} \quad [B(z,t) \subseteq B(y,r)] \wedge [B(z,t) \cap M = \emptyset]\}.$$

Define the numbers:

$$\bar{p}(y,M) = \lim_{r\to 0_+} \sup \frac{\gamma(y,r,M)}{r}, \quad \underline{p}(y,M) = \lim_{r\to 0_+} \inf \frac{\gamma(y,r,M)}{r}.$$

Obviously the numbers $\bar{p}(y,M)$, $\underline{p}(y,M)$ belong to the interval $[0,\ 1]$.

A set $M \subseteq Y$ is said to be porous (c-porous) at $y \in Y$ provided that $\bar{p}(y,M) > 0$ ($\bar{p}(y,M) \geq c > 0$). A set $M \subseteq Y$ is said to be σ-porous (σ-c-porous) at $y \in Y$ if $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ and each of the sets M_n ($n = 1, 2, \ldots$) is porous (c-porous) at y.

Let $Y_0 \subseteq Y$. A set $M \subseteq Y$ is said to be porous, c-porous, σ-porous and σ-c-porous in Y_0 if it is porous, c-porous, σ-porous and σ-c-porous at each point $y \in Y_0$, respectively.

If M is c-porous and σ-c-porous at y, then it is porous and σ-porous at y, respectively.

Every set $M \subseteq Y$ which is porous in Y is non-dense in Y. Therefore every set $M \subseteq Y$ which is σ-porous in Y, is a set of the first category in Y. The converse is not true even in $\mathbf{R}$ (cf. [6]).

A set $M \subseteq Y$ is said to be very porous at $y \in Y$ if $\underline{p}(y,M) > 0$ and very strongly porous at $y \in Y$ if $\underline{p}(y,M) = 1$ (cf. [7] p. 327). A set M is said to be very (strongly) porous in $Y_0 \subseteq Y$ if it is very (strongly) porous at each $y \in Y$.

Obviously, if M is very porous at y, it is porous at y, as well. Analogously, if M is very strongly porous at y, it is 1-porous at y.

Further, a set $M \subseteq Y$ is said to be uniformly very porous in $Y_0 \subseteq Y$ provided that there is a $c > 0$ such that for each $y \in Y_0$ we have $\underline{p}(y, M) \geq c$ (cf. [7], p. 327). In agreement with the previous terminology and in analogy with the notion of σ–porosity, we introduce the following notions. A set $M \subseteq Y$ is said to be uniformly σ–very porous in $Y_0 \subseteq Y$ provided that $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ and there is a $c > 0$ such that for each $y \in Y_0$ and each $n = 1, 2, \ldots$ we have $\underline{p}(y, M_n) \geq c$.

2. Main Result

In this part of the paper we shall study the set of all uniformly distributed (mod 1) sequences in the space (s, d).

Evidently for an integer $h > 0$ we have

$$\mathcal{U} \subset S^{(h)} = \left\{ x = (x_n)_1^\infty \in s;\ \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i h x_n} = 0 \right\} \subseteq \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{n=r}^{\infty} F(k, n)$$

for every $k = 1, 2, \ldots,$ where

$$F(k, n) = \left\{ x = (x_n)_1^\infty \in s;\ \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i h x_j} \right| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Denote

$$F^*(k, r) = \bigcap_{n=r}^{\infty} F(k, n) \text{ for } k = 1, 2, \ldots, r = 1, 2, \ldots$$

First, for $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ let us denote

$$S^{(h)}(f) = \left\{ x = (x_n)_1^\infty \in s;\ \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i h f(x_n)} = 0 \right\}$$

and similarly

$$\mathcal{U}(f) = \left\{ x = (x_n)_1^\infty \in s;\ (f(x_n))_1^\infty \text{ is u. d. mod 1} \right\}.$$

The next theorem implies, that the set $S^{(h)}$ is σ–very porous in (s, d). (Hence, it follows that σ–very porous in $\mathcal{U}$ too, see Corollary 2.)

Theorem. *Let $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be a function. Then the set $S^{(h)}(f)$ is uniformly σ–very porous in (s, d).*

Proof. For $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ and $k = 1, 2, \ldots$ denote by

$$F(f,k,n) = \left\{ x = (x_n)_1^\infty \in s; \quad \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i h f(x_j)} \right| \le \frac{1}{k} \right\}.$$

Then we have

$$S^{(h)}(f) \subset \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{n=r}^{\infty} F(f,k,n).$$

Let

$$F^*(f,k,r) = \bigcap_{n=r}^{\infty} F(f,k,n).$$

Choose $r \in \mathbf{N}$ fixed. Let $\varepsilon > 0$ and $x \in s$. Further let $\delta > 0$ be such that $\delta < \frac{1}{r}$. Then there exists a positive integer l such that $\frac{1}{l} \le \delta < \frac{1}{l-1}$, (consequently $l > r$). Obviously $S^{(h)}(f) \subseteq \bigcup_{r=1}^{\infty} F^*\left(f, 2 + \left[\frac{3}{\varepsilon}\right], r\right)$. Therefore it suffices to prove

$$\underline{p}\left(x, F^*\left(f, 2 + \left[\frac{3}{\varepsilon}\right], r\right)\right) \ge \frac{1}{2}.$$

Choose a sequence $y \in s$ as follows:

$$y_j = \begin{cases} \mathrm{x}_j, & \text{for } \; j = 1, 2, \ldots, l, \\ \mathrm{b}, & \text{for } \; j > l, \end{cases}$$

where b is constant. Evidently $y \in B\left(x, \frac{1}{l}\right)$ and $B\left(y, \frac{1}{[(2+\varepsilon)l]+1}\right) \subset B\left(x, \frac{1}{l}\right)$. We will show

$$B\left(y, \frac{1}{[(2+\varepsilon)l]+1}\right) \cap F^*\left(f, 2 + \left[\frac{3}{\varepsilon}\right], r\right) = \emptyset.$$

Let $z \in B\left(y, \frac{1}{[(2+\varepsilon)l]+1}\right)$. Then we have

$$\left| \frac{1}{[(2+\varepsilon)l]+1} \sum_{j=1}^{[(2+\varepsilon)l]+1} e^{2\pi i h f(z_j)} \right| \ge \left| \frac{1}{[(2+\varepsilon)l]+1} \sum_{j=l+1}^{[(2+\varepsilon)l]+1} e^{2\pi i h f(z_j)} \right|$$

$$- \left| \frac{1}{[(2+\varepsilon)l]+1} \sum_{j=1}^{l} e^{2\pi i h f(z_j)} \right| \ge \frac{[(2+\varepsilon)l]+1-l}{[(2+\varepsilon)l]+1} - \frac{1}{[(2+\varepsilon)l]+1}$$

$$> \frac{(2+\varepsilon)l - 2l}{[(2+\varepsilon)l]+1} \ge \frac{\varepsilon l}{(2+\varepsilon)l+1} = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon+\frac{1}{l}} > \frac{\varepsilon}{\varepsilon+3} = \frac{1}{\frac{3}{\varepsilon}+1} > \frac{1}{\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]+2},$$

thus $z \notin F^*(f, 2 + \left[\frac{3}{\varepsilon}\right], r)$. Then

$$\frac{\gamma(x, \delta, F^*(f, 2 + \left[\frac{3}{\varepsilon}\right], r))}{\delta} \geq \frac{\frac{1}{[(2+\varepsilon)l]+1}}{\frac{1}{l-1}} \geq \frac{l-1}{(2+\varepsilon)l+1},$$

(i.e.)

$$\underline{p}\left(x, F^*\left(f, 2 + \left[\frac{3}{\varepsilon}\right], r\right)\right) \geq \frac{1}{2+\varepsilon}$$

and letting $\varepsilon \to 0$ we obtain the required inequality.

Remark. Since the set $F^*(f, 2 + \left[\frac{3}{\varepsilon}\right], r)$ is closed in s, for each $x \in s \backslash F^*\left(f, 2 + \left[\frac{3}{\varepsilon}\right], r\right)$ holds

$$p\left(x, F^*\left(f, 2 + \left[\frac{3}{\varepsilon}\right], r\right)\right) = 1.$$

Corollary 1. *Let $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ be a function. Then the set $U(f)$ is uniformly σ–very porous in (s, d).*

Corollary 2. *The set $S^{(h)}$ is uniformly σ–very porous in (s, d) for every h positive integers.*

Proof. It follows from the fact that the function $f(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$.

References

[1] KUIPERS – NIEDERREITER, H., Uniform distribution of sequences, Wiley, New York, (1974).

[2] LÁSZLÓ, V. – ŠALÁT, T., Uniformly distributed sequences of positive integers in Baire's space, *Math. Slovaca* **41. no 3** (1991), 277 – 281.

[3] LÁSZLÓ, V. – ŠALÁT, T., The structure of some sequences spaces, and uniform distribution (mod 1), *Periodica Math. Hung.*, **Vol. 10(1)** (1979), 89 – 98.

[4] NIVEN, I., Uniform distribution of sequences of integers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **98** (1961), 52 – 61.

[5] TKADLEC, J., Construction of some non–σ–porous sets of real line, *Real Anal. Exch.*, **9** (1983 – 84), 473 – 482.

[6] ZAJÍČEK, L., Sets of σ–porosity and sets of σ–porosity (q), *Čas. pěst. mat.*, **101** (1976), 350 – 359.

[7] ZAJÍČEK, L., Porosity and σ–porosity, *Real Anal. Exch.*, **13** (1987 - 88), 314 - 350.

Béla László
Department of Algebra and Number Theory
Constantine Philosopher University
Tr. A. Hlinku 1.
949 74 Nitra, Slovakia
e-mail: blaszlo@ukf.sk

János T. Tóth
Department of Mathematics
Faculty of Sciences
University of Ostrava
30. Dubna, 22
70 103 Ostrava
Czech Republik
e-mail: toth@osu.cz

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **28** *(2001) 61–68*

ON THE DERIVATIVES OF A SPECIAL FAMILY OF B-SPLINE CURVES

Miklós Hoffmann (Eger, Hungary)

Abstract. This paper is devoted to the geometrical examination of a family of B-spline curves resulted by the modifiaction of one of their knot values. These curves form a surface, the other parameter lines of which are the paths of the points of the original curve at a fixed parameter value. The first and second derivatives of these curves are examined yielding geometrical results concerning their tangent lines and osculating planes.

AMS Classification Number: 68U05

1.Introduction

B-spline and NURBS curves are well-known and widely used description methods in computer aided geometric design today. The data structure of these curves are very simple, containing control points, knot values and - in terms of NURBS curves - weights. The modification of the control points and the weights has well-known effects on the curves (see e.g.[9]), while more sophisticated possibilities of curve modification by these data can be found in [1], [3], [4], [8], [10].

The modification of the knot values also affects the shape of the curves, but this effect has been examined only numerically. Some geometrical aspects of the behavior of a B-spline or NURBS curve modifying one of its knot values have been described recently in [5], [6], [7]. The purpose of this paper is to extend these geometrical representations by examining the curves around the parameter value of the modified knot.

Definition. The curve $\mathrm{s}(u)$ defined by

$$\mathrm{s}(u) = \sum_{l=0}^{n} N_l^k(u)\mathrm{d}_l \qquad u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]$$

is called B-spline curve of order k (degree $k-1$), where $N_l^k(u)$ is the l^{th} normalized B-spline basis function, for the evaluation of which the knots $u_0, u_1, \ldots, u_{n+k}$ are

This research was sponsored by the Hungarian Scientific Research Foundation (OTKA) No. F032679 and FKP No.0027/2001.

necessary. The points $\mathbf{d}_i$ are called control points or de Boor-points, while the polygon formed by these points is called control polygon.

Definition. The j^{th} span of the B-spline curve can be written as

$$\mathbf{s}_j(u) = \sum_{l=j-k+1}^{j} \mathbf{d}_l N_l^k(u), \quad u \in [u_j, u_{j+1}).$$

Modifying the knot u_i, the point of this span associated with the fixed parameter value $\tilde{u} \in [u_j, u_{j+1})$ will move along the curve

$$\mathbf{s}_j(\tilde{u}, u_i) = \sum_{l=j-k+1}^{j} N_l^k(\tilde{u}, u_i)\,\mathbf{d}_l, \quad u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}].$$

Hereafter, we refer to this curve as the *path* of the point $\mathbf{s}_j(\tilde{u})$. In [5] and [6] Juhász and Hoffmann proved important properties of these paths, among which the most important is the following

Theorem 1. *Modifying the knot value $u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$ of the k^{th} order B-spline curve, the points of the spans $\mathbf{s}_{i-k+1}(u), \ldots, \mathbf{s}_{i+k-2}(u)$ moves along rational curves. The degree of these paths decreases symmetrically from $k-1$ to 1 as the indices of the spans getting farther from i, i.e. the paths $\mathbf{s}_{i-m}(\tilde{u}, u_i)$ and $\mathbf{s}_{i+m-1}(\tilde{u}, u_i)$ are rational curves of degree $k-m$ with respect to u_i, $(m = 1, \ldots, k-1)$.*

Beside these paths we can also consider the one-parameter family of B-spline curves

$$\mathbf{s}(u, \tilde{u}_i) = \sum_{l=0}^{n} \mathbf{d}_l N_l^k(u, \tilde{u}_i), \quad u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]$$

yielded by the modification of the knot value u_i. In trems of these curves another property has been proved by Juhász and Hoffmann (see [6]), namely the family of these curves has an envelope, which is also a B-spline curve.

Theorem 2. *The family of the k^{th} order B-spline curves $\mathbf{s}(u, u_i)$, $(k > 2)$ has an envelope. The envelope is also a B-spline curve of order $(k-1)$ and can be written in the form*

$$\mathbf{b}(v) = \sum_{l=i-k+1}^{i-1} \mathbf{d}_l N_l^{k-1}(v), \ v \in [v_{i-1}, v_i],$$

where $v_j = u_j$ if $j < i$ and $v_j = u_{j+1}$ otherwise, that is the i^{th} knot value is removed from the knot vector u_j of the original curves.

Hence two families of curves have been received, the paths of the points and the B-spline curves themselves. These two families of curves can be considered as parameterlines of the surface patch

$$\mathbf{s}(u, u_i) = \sum_{l=0}^{n} \mathbf{d}_l N_l^k (u, u_i), \quad u \in [u_{k-1}, u_{n+1}], \quad u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}).$$

The envelope mentioned above in Theorem 2. is a curve on this surface, but the parameter lines behave in a singular way at the points of that curve. We have seen that it is an envelope of the family of B-spline curves. In the next sections, where we will restrict our consideration to the cubic case ($k = 4$) the derivatives of the two families of curves will be computed in the points of the quadratic envelope by the help of which we will prove, that this curve is also the envelope of the paths and both families have the same osculating plane at every point of this envelope, which plane is also the plane of the envelope itself.

2. The derivatives of the curves

Let the knot value u_i of a cubic B-spline curve defined above be modified. At first the family of B-spline curves will be considered, the derivatives of which can be calculated by a well-known iterative formula, which can be found e.g. in [9]:

$$\frac{\partial \mathbf{s}_i}{\partial u} = \sum_{l=i-3}^{i} \mathbf{d}_l 3 \left(\frac{1}{u_{l+3} - u_l} N_l^3(u, u_i) - \frac{1}{u_{l+4} - u_{l+1}} N_{l+1}^3(u, u_i) \right) \tag{1}$$

Using this rule the first derivatives of the coefficients are

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{i-3}^4}{\partial u} =& -3 \frac{1}{u_{i+1} - u_{i-2}} \frac{u_{i+1} - u}{u_{i+1} - u_{i-1}} \frac{u_{i+1} - u}{u_{i+1} - u_i}, \\
\frac{\partial N_{i-2}^4}{\partial u} =& 3 \left(\frac{1}{u_{i+1} - u_{i-2}} \frac{u_{i+1} - u}{u_{i+1} - u_{i-1}} \frac{u_{i+1} - u}{u_{i+1} - u_i} \right. \\
& \left. - \frac{1}{u_{i+2} - u_{i-1}} \left(\frac{u - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}} \frac{u_{i+1} - u}{u_{i+1} - u_i} + \frac{u_{i+2} - u}{u_{i+2} - u_i} \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} \right) \right), \\
\frac{\partial N_{i-1}^4}{\partial u} =& 3 \left(\frac{1}{u_{i+2} - u_{i-1}} \left(\frac{u - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}} \frac{u_{i+1} - u}{u_{i+1} - u_i} + \frac{u_{i+2} - u}{u_{i+2} - u_i} \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{u_{i+3} - u_i} \frac{u - u_i}{u_{i+2} - u_i} \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i} \right), \\
\frac{\partial N_i^4}{\partial u} =& 3 \frac{1}{u_{i+3} - u_i} \frac{u - u_i}{u_{i+2} - u_i} \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i}.
\end{aligned}$$

The second derivatives of these curves can also be calculated applying the equation (1) iteratively for the basis functions of degree 3. The second derivatives are

$$\frac{\partial^2 \mathbf{s}_i}{\partial u^2} = \sum_{l=i-3}^{i} \mathbf{d}_l \frac{\partial^2 N_l^4}{\partial u^2}$$

where the coefficients are

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 N_{i-3}^4}{\partial u^2} =& -3\frac{1}{u_{i+1}-u_{i-2}}\left(-\frac{1}{u_{i+1}-u_{i-1}}\frac{u_{i+1}-u}{u_{i+1}-u_i} - \frac{u_{i+1}-u}{u_{i+1}-u_{i-1}}\frac{1}{u_{i+1}-u_i}\right),\\
\frac{\partial^2 N_{i-2}^4}{\partial u^2} =& 3\frac{1}{u_{i+1}-u_{i-2}}\left(-\frac{1}{u_{i+1}-u_{i-1}}\frac{u_{i+1}-u}{u_{i+1}-u_i} - \frac{u_{i+1}-u}{u_{i+1}-u_{i-1}}\frac{1}{u_{i+1}-u_i}\right)\\
&-3\frac{1}{u_{i+2}-u_{i-1}}\left(\frac{1}{u_{i+1}-u_{i-1}}\frac{u_{i+1}-u}{u_{i+1}-u_i} - \frac{u-u_{i-1}}{u_{i+1}-u_{i-1}}\frac{1}{u_{i+1}-u_i}\right.\\
&\left.-\frac{1}{u_{i+2}-u_i}\frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i} + \frac{u_{i+2}-u}{u_{i+2}-u_i}\frac{1}{u_{i+1}-u_i}\right),\\
\frac{\partial^2 N_{i-1}^4}{\partial u^2} =& 3\frac{1}{u_{i+2}-u_{i-1}}\left(\frac{1}{u_{i+1}-u_{i-1}}\frac{u_{i+1}-u}{u_{i+1}-u_i} - \frac{u-u_{i-1}}{u_{i+1}-u_{i-1}}\frac{1}{u_{i+1}-u_i}\right.\\
&\left.-\frac{1}{u_{i+2}-u_i}\frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i} + \frac{u_{i+2}-u}{u_{i+2}-u_i}\frac{1}{u_{i+1}-u_i}\right)\\
&-3\frac{1}{u_{i+3}-u_i}\frac{1}{u_{i+2}-u_i}\frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i} - 3\frac{1}{u_{i+3}-u_i}\frac{u-u_i}{u_{i+2}-u_i}\frac{1}{u_{i+1}-u_i},\\
\frac{\partial^2 N_i^4}{\partial u^2} =& 3\left(\frac{1}{u_{i+3}-u_i}\frac{1}{u_{i+2}-u_i}\frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i} + \frac{1}{u_{i+3}-u_i}\frac{u-u_i}{u_{i+2}-u_i}\frac{1}{u_{i+1}-u_i}\right).
\end{aligned}$$

Now the other family of curves, namely the paths will be considered. The first derivative of this family is

$$\frac{\partial \mathbf{s}_i}{\partial u_i} = \sum_{l=i-3}^{i} \mathbf{d}_l \frac{\partial N_l^4}{\partial u_i},$$

where the coefficients are

$$\frac{\partial N_{i-3}^4}{\partial u_i} = \frac{u_{i+1}-u}{u_{i+1}-u_{i-2}}\frac{u_{i+1}-u}{u_{i+1}-u_{i-1}}\frac{u_{i+1}-u}{(u_{i+1}-u_i)^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_{i-2}^4}{\partial u_i} =& \frac{u-u_{i-2}}{u_{i+1}-u_{i-2}}\frac{u_{i+1}-u}{u_{i+1}-u_{i-1}}\frac{u_{i+1}-u}{(u_{i+1}-u_i)^2}\\ &+ \frac{u_{i+2}-u}{u_{i+2}-u_{i-1}}\left(\frac{u-u_{i-1}}{u_{i+1}-u_{i-1}}\frac{u_{i+1}-u}{(u_{i+1}-u_i)^2}\right.\\ &\left.+\frac{u_{i+2}-u}{(u_{i+2}-u_i)^2}\frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i}+\frac{u_{i+2}-u}{u_{i+2}-u_i}\frac{u-u_{i+1}}{(u_{i+1}-u_i)^2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_{i-1}^4}{\partial u_i} =& \frac{u-u_{i-1}}{u_{i+2}-u_{i-1}}\left(\frac{u-u_{i-1}}{u_{i+1}-u_{i-1}}\frac{u_{i+1}-u}{(u_{i+1}-u_i)^2}\right.\\ &\left.+\frac{u_{i+2}-u}{(u_{i+2}-u_i)^2}\frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i}+\frac{u_{i+2}-u}{u_{i+2}-u_i}\frac{u-u_{i+1}}{(u_{i+1}-u_i)^2}\right)\\ &+\frac{u_{i+3}-u}{(u_{i+3}-u_i)^2}\frac{u-u_i}{u_{i+2}-u_i}\frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i}\\ &+\frac{u_{i+3}-u}{u_{i+3}-u_i}\left(\frac{u-u_{i+2}}{(u_{i+2}-u_i)^2}\frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i}+\frac{u-u_i}{u_{i+2}-u_i}\frac{u-u_{i+1}}{(u_{i+1}-u_i)^2}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_{i}^4}{\partial u_i} =& \frac{u-u_{i+3}}{(u_{i+3}-u_i)^2}\frac{u-u_i}{u_{i+2}-u_i}\frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i}\\ &+\frac{u-u_i}{u_{i+3}-u_i}\left(\frac{u-u_{i+2}}{(u_{i+2}-u_i)^2}\frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i}+\frac{u-u_i}{u_{i+2}-u_i}\frac{u-u_i}{(u_{i+1}-u_i)^2}\right).\end{aligned}$$

The second dertivatives of these paths are the following

$$\frac{\partial^2 \mathbf{s}_i}{\partial u_i^2} = \sum_{l=i-3}^{i} \mathbf{d}_l \frac{\partial^2 N_l^4}{\partial u_i^2},$$

where the coefficient functions are large polynomials thus, for the sake of brevity they are not presented here.

2. New results

Using the derivatives of the preceeding section the following theorems can be proved (in these proofs the Maple software was applied for the evaluation and simplification of polynomials):

Theorem 3. *If we consider the surface* $\mathbf{s}_i(u, u_i), u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]$, $u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1})$ *then the envelope of the family of B-spline curves* $\mathbf{s}_i(u, \tilde{u}_i)$ *is also the envelope of the family of paths* $\mathbf{s}_i(\tilde{u}, u_i)$ *at the points corresponding to* $u = u_i$.

Proof. It is sufficient to prove, that the two families of curves have points and tangent lines on common at the points corresponding to the parameter value $u = u_i$. If we fix the parameters $u = \tilde{u}$ and $u_i = \tilde{u}_i$ then a member of both families of curves has been selected. Substituting these parameters to both of the curves the existence of the common point $\mathbf{s}_i(\tilde{u}, \tilde{u}_i) = \mathbf{s}_i(\tilde{u}, \tilde{u}_i)$ immediately follows. For the proof of the common tangent lines the first derivatives of these curves will be used. Substituting the parameter $u = u_i$ to the coefficients after some calculations one can receive, that

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial N_{i-3}^4}{\partial u_i}\right|_{u=u_i} &= -\frac{1}{3}\left.\frac{\partial N_{i-3}^4}{\partial u}\right|_{u=u_i} = \frac{1}{u_{i+1}-u_{i-2}}\frac{u_{i+1}-u_i}{u_{i+1}-u_{i-1}},\\
\left.\frac{\partial N_{i-2}^4}{\partial u_i}\right|_{u=u_i} &= -\frac{1}{3}\left.\frac{\partial N_{i-2}^4}{\partial u}\right|_{u=u_i} = \frac{1}{u_{i+1}-u_{i-1}}\left(\frac{u_i-u_{i-2}}{u_{i+1}-u_{i-2}} - \frac{u_{i+2}-u_i}{u_{i+2}-u_{i-1}}\right),\\
\left.\frac{\partial N_{i-1}^4}{\partial u_i}\right|_{u=u_i} &= -\frac{1}{3}\left.\frac{\partial N_{i-1}^4}{\partial u}\right|_{u=u_i} = -\frac{1}{u_{i+1}-u_{i-1}}\frac{u_i-u_{i-1}}{u_{i+2}-u_{i-1}},\\
\left.\frac{\partial N_{i}^4}{\partial u_i}\right|_{u=u_i} &= \left.\frac{\partial N_{i}^4}{\partial u}\right|_{u=u_i} = 0,
\end{aligned}
$$

which yield, that

$$
\left.\frac{\partial \mathbf{s}_i(u, u_i)}{\partial u}\right|_{u=u_i} = -\frac{1}{3}\left.\frac{\partial \mathbf{s}_i(u, u_i)}{\partial u_i}\right|_{u=u_i}
$$

i.e. the curves have also tangent lines on common at the points of the envelope.

With the help of the second derivatives of the coefficient functions the osculating plane of these curves can also be examined.

Theorem 4. *The osculating planes of the two families of curves* $\mathbf{s}_i(u, \tilde{u}_i)$ *and* $\mathbf{s}_i(\tilde{u}, u_i)$ *coincide at every point of the envelope and this plane is that of the three control points* $\mathbf{d}_{i-3}, \mathbf{d}_{i-2}, \mathbf{d}_{i-1}$ *for every* u_i.

Proof. The osculating plane is uniquely defined by the first and second derivatives of the curve. Since Theorem 3 holds for the first derivatives it is sufficient to prove that the second derivatives of these curves are also parallel to each other. Using the second derivatives of the coefficient functions and substituting the parameter value $u = u_i$ the following result can be obtained:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 N_{i-3}^4}{\partial u_i{}^2}\right|_{u=u_i} &= \frac{1}{3}\left.\frac{\partial^2 N_{i-3}^4}{\partial u^2}\right|_{u=u_i} = 2\frac{1}{u_{i+1}-u_{i-2}}\frac{1}{u_{i+1}-u_{i-1}}, \\
\left.\frac{\partial^2 N_{i-2}^4}{\partial u_i{}^2}\right|_{u=u_i} &= \frac{1}{3}\left.\frac{\partial^2 N_{i-2}^4}{\partial u^2}\right|_{u=u_i} = 2\frac{-u_{i+1}+u_{i-2}-u_{i+2}+u_{i-1}}{\left(-u_{i+2}+u_{i-1}\right)\left(u_{i+1}-u_{i-1}\right)\left(-u_{i+1}+u_{i-2}\right)}, \\
\left.\frac{\partial^2 N_{i-1}^4}{\partial u_i{}^2}\right|_{u=u_i} &= \frac{1}{3}\left.\frac{\partial^2 N_{i-1}^4}{\partial u^2}\right|_{u=u_i} = 2\frac{1}{\left(u_{i+1}-u_{i-1}\right)\left(u_{i+2}-u_{i-1}\right)}, \\
\left.\frac{\partial^2 N_{i}^4}{\partial u_i{}^2}\right|_{u=u_i} &= \left.\frac{\partial^2 N_{i}^4}{\partial u^2}\right|_{u=u_i} = 0,
\end{aligned}$$

which immediately yield, that

$$\left.\frac{\partial^2 \mathbf{s}_i\left(u,u_i\right)}{\partial u^2}\right|_{u=u_i} = \frac{1}{3}\left.\frac{\partial^2 \mathbf{s}_i\left(u,u_i\right)}{\partial u_i{}^2}\right|_{u=u_i}.$$

Hence the osculating planes of the two families of curves coincide at the parameter values $u = u_i$. Moreover, the second derivatives do no depend on u_i, and using the notations

$$A := \frac{\partial^2 N_{i-3}^4}{\partial u_i{}^2}, \qquad B := \frac{\partial^2 N_{i-1}^4}{\partial u_i{}^2}$$

they can be written in the form

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^2 \mathbf{s}_i\left(u,u_i\right)}{\partial u_i{}^2}\right|_{u=u_i} &= A\left(\mathbf{d}_{i-3}-\mathbf{d}_{i-2}\right)+B\left(\mathbf{d}_{i-2}-\mathbf{d}_{i-1}\right), \\
\left.\frac{\partial^2 \mathbf{s}_i\left(u,u_i\right)}{\partial u^2}\right|_{u=u_i} &= \frac{1}{3}A\left(\mathbf{d}_{i-3}-\mathbf{d}_{i-2}\right)+\frac{1}{3}B\left(\mathbf{d}_{i-2}-\mathbf{d}_{i-1}\right).
\end{aligned}$$

This means that these derivative vectors are in the plane of the control points $\mathbf{d}_{i-3}, \mathbf{d}_{i-2}, \mathbf{d}_{i-1}$ for every u_i. The same holds for the first derivative vectors since the envelope is a quadratic B-spline curve (a parabola) defined by these control points and it has common tangent lines with both of the families of the curves at $u = u_i$. This yields, that the osculating planes of the curves coincide with the plane of the three control points mentioned above for every u_i.

4. Further Research

Some geometrical aspects of the modification of a knot value of a cubic B-spline curve have been discussed. Defining a special surface with two families of curves it turned out that these two families have the same envelope at a certain parameter value and even the osculating planes coincide. This plane is a constant plane and defined by three control points of the original B-spline curve. Natural extensions of these results would be desired for B-spline curves of arbitrary degree, but the derivatives of these curves in the direction u_i should be calculated by recursive formulae of the derivatives of the basis functions and these formulae have not been found yet.

References

[1] AU, C. K., YUEN, M. M. F., *Unified approach to NURBS curve shape modification*, computer–Aided Design, **27**, 85–93 (1995).

[2] BOEHM, W., *Inserting new knots into B-spline curves*, Computer–Aided Design, **12**, 199–201 (1980).

[3] FOWLER, B., BARTELS, R., *Constraint-based curve manipulation*, IEEE Computer Graphics and Applications, **13**, 43–49 (1993).

[4] JUHÁSZ, I., *Weight-based shape modification of NURBS curves*, Computer Aided Geometric Design, **16**, 377–383 (1999).

[5] JUHÁSZ, I., *A shape modification of B-spline curves by symmetric translation of two knots*, Acta Acad. Paed. Agriensis, **27**, (to appear) (2001).

[6] JUHÁSZ, I., HOFFMANN, M., *The effect of knot modifications on the shape of B-spline curves*, Journal for Geometry and Graphics (to appear) (2001)

[7] HOFFMANN, M., JUHÁSZ, I., *Shape control of cubic B-spline and NURBS curves by knot modifications*, in:Banissi, E. et al.(eds):Proc. of the 5^{th} International Conference on Information Visualisation, London, IEEE Computer Society Press, 63-68 (2001)

[8] PIEGL, L., *Modifying the shape of rational B-splines. Part 1: curves*, Computer-Aided Design, **21**, 509–518 (1989).

[9] PIEGL, L., TILLER, W., *The NURBS book*,Springer–Verlag, (1995).

[10] SÁNCHEZ-REYES, J., *A simple technique for NURBS shape modification*, IEEE Computer Graphics and Applications, **17**, 52–59 (1997).

Miklós Hoffmann
Károly Eszterházy College
Department of Mathematics
H-3300 Eger, Hungary
Leányka str. 4.
e-mail: hofi@ektf.hu

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **28** *(2001) 69–77*

A SHAPE MODIFICATION OF B-SPLINE CURVES BY SYMMETRIC TRANSLATION OF TWO KNOTS

Imre Juhász (Miskolc, Hungary)

Abstract. We study the effect of the symmetric translation of knots u_i and u_{i+2k-3} on the shape of B-spline curves. We examine when the points of the $i+k-2^{th}$ arc of the curve move along straight line segment. Quadric and cubic special cases are studied in detail along with the rational case.

1. Introduction

B-spline curve and especially its rational counterpart has become a de facto standard for the description of curves in nowadays CAD systems. A rational B-spline curve is uniquely determined by its degree, control points, weights and knot values. The shape of the curve can continuously be modified by means of its control points, weights and knots. The effect of control points and weights along with their shape modification opportunities are well known. There are numerous publications dealing with different aspects of the topic, cf. [1], [2], [5], [7-9]. For the time being, knot-based shape modifications of B-spline curves are not elaborated, in the related comprehensive books only uniform parametrization is emphasized due to its easy to evaluate formulae, but neither the theoretical nor the application issues of knot-based modifications are described.

In this paper we use the usual definition of normalized B-spline functions and curves as follows:

Definition 1. The recursive function $N_j^k(u)$ given by the equations

$$N_j^1(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u \in [u_j, u_{j+1}), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$N_j^k(u) = \frac{u-u_j}{u_{j+k-1}-u_j} N_j^{k-1}(u) + \frac{u_{j+k}-u}{u_{j+k}-u_{j+1}} N_{j+1}^{k-1}(u)$$

is called normalized B-spline basis function of order k (degree $k-1$). The numbers $u_j \leq u_{j+1} \in \mathbf{R}$ are called knot values or simply knots, and $0/0 \doteq 0$ by definition.

Definition 2. The curve $\mathbf{s}(u)$ defined by

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{l=0}^{n} N_l^k(u)\,\mathbf{d}_l, \ u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]$$

is called B-spline curve of order k (degree $k-1$), where $N_l^k(u)$ is the l^{th} normalized B-spline basis function of order k, for the evaluation of which the knots $u_0, u_1, \ldots, u_{n+k}$ are necessary. Points $\mathbf{d}_i$ are called control points or de Boor points, while the polygon formed by these points is called control polygon.

The j^{th} arc of this curve has the form

$$\mathbf{s}_j(u) = \sum_{l=j-k+1}^{j} \mathbf{d}_l, \; u \in [u_j, u_{j+1}), \; (j = k-1, \ldots, n).$$

The modification of knot u_i effects the arcs $\mathbf{s}_j(u)$, $(j = i-k+1, i-k+2, \ldots, i+k-2)$. An arbitrarily chosen point of such an arc, corresponding to the parameter value $\tilde{u} \in [u_j, u_{j+1})$ describes the curve

$$\mathbf{s}_j(\tilde{u}, u_i) = \sum_{l=j-k+1}^{j} \mathbf{d}_l N_l^k(\tilde{u}, u_i), \; u_i \in [u_{i-1}, u_{i+1}]$$

which we refer to as the *path* of the point $\mathbf{s}_j(\tilde{u})$. In [6] we have proved the following theorem.

Theorem 1. *Paths $\mathbf{s}_{i-z-1}(\tilde{u}, u_i)$ and $\mathbf{s}_{i+z}(\tilde{u}, u_i)$ are rational curves in u_i of degree $k-z-1$, $(z = 0, 1, \ldots, k-2)$.*

The derivative of these paths for $k = 4$ is studied in [4]. An important corollary of the above theorem, that will be used in this paper as well, is :

Corollary 1. *Paths of the arcs $\mathbf{s}_{i-k+1}(\tilde{u}, u_i)$ and $\mathbf{s}_{i+k-2}(\tilde{u}, u_i)$ are straight line segments that are parallel to the sides $\mathbf{d}_{i-k}, \mathbf{d}_{i-k+1}$ and $\mathbf{d}_{i-1}, \mathbf{d}_i$, respectively.*

In this paper we show some interesting properties of B-spline curve modifications obtained by the symmetric translation of knots u_i and u_{i+2k-3}.

2. Symmetric translation of knots u_i and u_{i+2k-3}

We study how points of a B-spline curve move, i.e. what will the paths be like, when knots u_i and u_{i+2k-3} are symmetrically translated. By symmetric translation of knots u_i and u_j, $(i<j)$ we mean the $u_i+\lambda$, $u_j-\lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$ type modification. In order to preserve the monotony of knot values λ can not take any value but it has to be within the range $[-c,c]$, $c=\min\{u_i-u_{i-1}, u_{i+1}-u_i, u_j-u_{j-1}, u_{j+1}-u_j\}$. Under the circumstances, the $i+k-2^{\text{th}}$ arc of the B-spline curve, that is effected by both u_i and u_{i+2k-3}, has the form

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s}_{i+k-2}(u) &= \sum_{l=i-1}^{i+k-2} \mathbf{d}_l N_l^k(u) \\
&= \sum_{l=i+1}^{i+k-4} \mathbf{d}_l N_l^k(u) + \left(N_i^{k-1}(u) + \frac{u_{i+k}-u}{u_{i+k}-u_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(u) \right) \mathbf{d}_i \\
&+ \left(\frac{u-u_{i+k-3}}{u_{i+2k-4}-u_{i+k-3}} N_{i+k-3}^{k-1}(u) + N_{i+k-2}^{k-1}(u) \right) \mathbf{d}_{i+k-3} \\
&+ \frac{u_{i+k-1}-u}{u_{i+k-1}-u_i} N_i^{k-1}(u)\left(\mathbf{d}_{i-1}-\mathbf{d}_i\right) \\
&+ \frac{u-u_{i+k-2}}{u_{i+2k-3}-u_{i+k-2}} N_{i+k-2}^{k-1}(u)\left(\mathbf{d}_{i+k-2}-\mathbf{d}_{i+k-3}\right).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Further on we examine the B-spline curves $\mathbf{s}_{i+k-2}(u,\lambda)$ and their paths obtained by the substitution $u_i = u_i+\lambda$ and $u_{i+2k-3} = u_{i+2k-3}-\lambda$.

Theorem 2. *Paths $\mathbf{s}_{i+k-2}(u,\lambda), \lambda \in [-c,c]$ are straight line segments, if and only if, the equality $u_{i+k-1}-u_i = u_{i+2k-3}-u_{i+k-2}$ is satisfied.*

Proof. In expression (1) only the coefficients of the terms $(\mathbf{d}_{i-1}-\mathbf{d}_i)$ and $(\mathbf{d}_{i+k-2}-\mathbf{d}_{i+k-3})$ depend on λ, the rest of the sum can be considered as a constant translation vector which we denote by $\mathbf{p}$.

(i) If $\delta = u_{i+k-1}-u_i = u_{i+2k-3}-u_{i+k-2}$ then $1/(\delta-\lambda)$ can be factored out, thus we obtain a straight line of the form

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s}_{i+k-2}(u,\lambda) = \mathbf{p} + \frac{1}{\delta-\lambda} \big(& (u_{i+k-1}-u) N_i^{k-1}(u)\left(\mathbf{d}_{i-1}-\mathbf{d}_i\right) \\
& + (u-u_{i+k-2}) N_{i+k-2}^{k-1}(u)\left(\mathbf{d}_{i+k-2}-\mathbf{d}_{i+k-3}\right) \big).
\end{aligned}
$$

(ii) If $u_{i+k-1}-u_i \neq u_{i+2k-3}-u_{i+k-2}$ then the rational curve (1) (in λ) has two points at infinity, one at $\lambda = u_{i+k-1}-u_i$, and another at $\lambda = u_{i+2k-3}-u_{i+k-2}$, therefore the curve can not be a straight line.

It is worth having a closer look at two special cases of the above theorem.

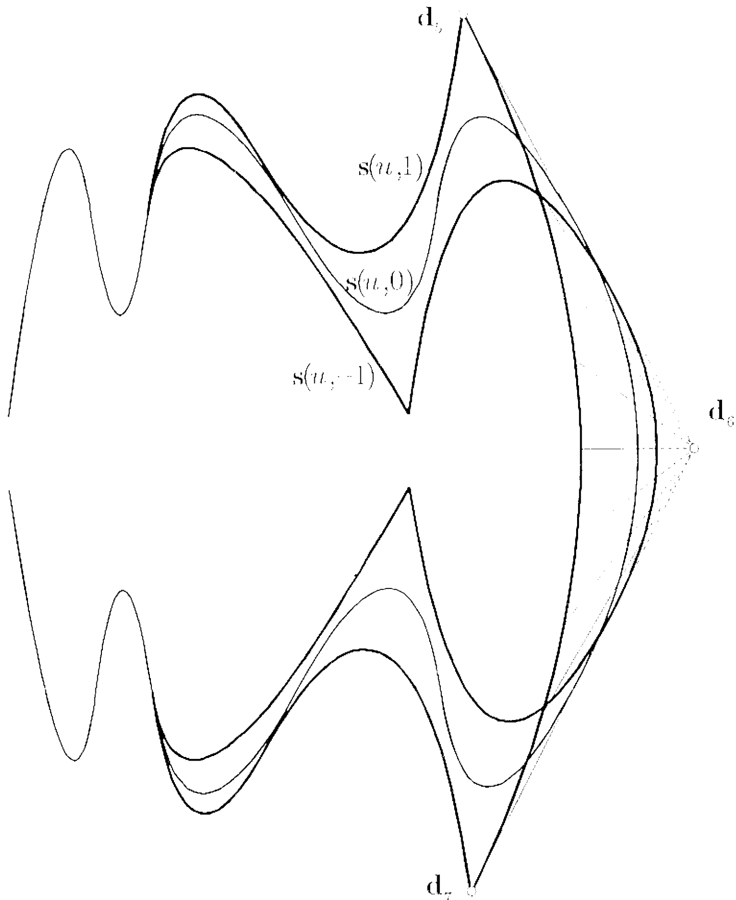


Figure 1: The effect of the symmetric modification of knots u_i and u_{i+3} on the shape of a quadratic B-spline curve, with the indication of paths of the arc $\mathbf{s}_{i+1}(u)$ $(n = 12, k = 3, i = 6, \lambda \in [-1, 1])$.

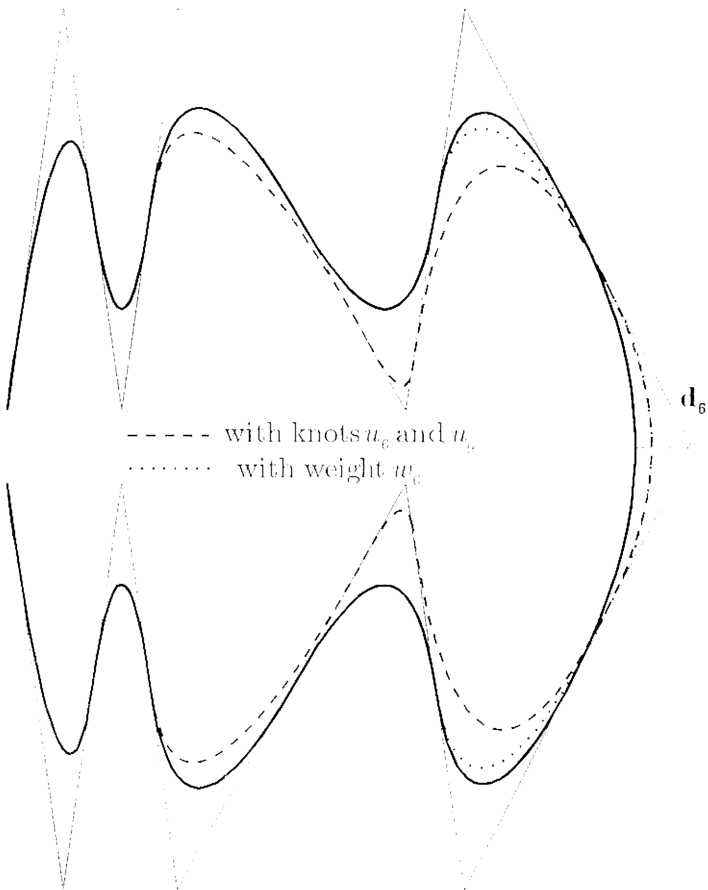


Figure 2: A comparison of two constrained shape modifications gained by the modification of two knots, and by the alteration of a weight ($n = 12, k = 3, i = 6$).

2.1. Case $k = 3$

In this case the arc $\mathbf{s}_{i+1}(u, \lambda)$ can be written in the form

$$\mathbf{s}_{i+1}(u, \lambda) = \mathbf{d}_i + \frac{u_{i+2} - u}{u_{i+2} - u_i - \lambda} N_i^2(u)(\mathbf{d}_{i-1} - \mathbf{d}_i) + \frac{u - u_{i+1}}{u_{i+3} - \lambda - u_{i+1}} N_{i+1}^2(u)(\mathbf{d}_{i+1} - \mathbf{d}_i).$$

Obviously, paths of its points are elements of the pencil of lines the base point of which is $\mathbf{d}_i$, provided $u_{i+2} - u_i = u_{i+3} - u_{i+1}$, cf. Fig. 1. (This special case can be found in [3] as well, along with other knot-based shape modifications.)

This means that the symmetric translation of knots u_i and u_{i+2k-3} pulls from / pushes toward the control point $\mathbf{d}_i$ points of the arc $\mathbf{s}_{i+1}(u)$ along straight lines. Therefore this shape modification effect is similar to the one obtained by the alteration of the weigh w_i (the weight of the control point $\mathbf{d}_i$). However, these two shape modification methods are not substitutes of each other. The main difference is that only shape of arcs $\mathbf{s}_i(u), \mathbf{s}_{i+1}(u), \ldots, \mathbf{s}_{i+k-1}(u)$ are modified when w_i is changed, whereas with the symmetric translation of knots u_i and u_{i+2k-3} arcs $\mathbf{s}_{i-k+1}(u), \mathbf{s}_{i-k+2}(u), \ldots, \mathbf{s}_{i+3k-5}(u)$ are modified, i.e. in the latter case a much larger portion of the curve is altered. The difference between these two shape modification methods are illustrated in Fig. 2.

2.2. Case $k = 4$

In this case the arc $\mathbf{s}_{i+2}(u, \lambda)$ is of interest which has the form

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_{i+2}(u, \lambda) = & \left(\frac{u_{i+4} - u}{u_{i+4} - u_{i+1}} N^3_{i+1}(u) + N^3_i(u) \right) \mathbf{d}_i \\
& + \left(\frac{u - u_{i+1}}{u_{i+4} - u_{i+1}} N^3_{i+1}(u) + N^3_{i+2}(u) \right) \mathbf{d}_{i+1} \\
& + \frac{u_{i+3} - u}{u_{i+3} - u_i - \lambda} N^3_i(u) (\mathbf{d}_{i-1} - \mathbf{d}_i) \\
& + \frac{u - u_{i+2}}{u_{i+5} - \lambda - u_{i+2}} N^3_{i+2}(u) (\mathbf{d}_{i+2} - \mathbf{d}_{i+1}).
\end{aligned}$$

The coefficients of $\mathbf{d}_i$ and $\mathbf{d}_{i+1}$ are non-negative and sum to 1, i.e. the constant part of the sum is a convex linear combination of the control points $\mathbf{d}_i$ and $\mathbf{d}_{i+1}$. Therefore paths of the arc are straight line segments the extension of which intersect the side $\mathbf{d}_i$, $\mathbf{d}_{i+1}$ at its inner points moreover, they are parallel to the plane determined by the directions $\mathbf{d}_{i-1} - \mathbf{d}_i$ és $\mathbf{d}_{i+2} - \mathbf{d}_{i+1}$, provided $u_{i+3} - u_i = u_{i+5} - u_{i+2}$ holds, cf. Fig. 3. If the directions $\mathbf{d}_{i-1} - \mathbf{d}_i$ and $\mathbf{d}_{i+2} - \mathbf{d}_{i+1}$ are parallel then the paths form a pencil of parallel lines.

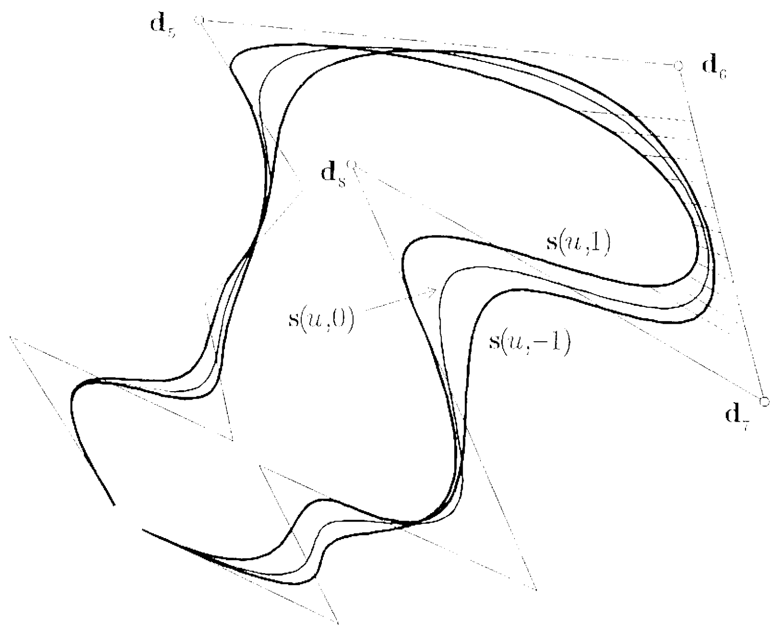


Figure 3: Shape modification of a cubic B-spline curve by means of a symmetric translation of knots u_i and u_{i+5}. Paths of points of the arc $\mathbf{s}_{i+2}(u)$ are also shown along with their extensions which intersect the side $\mathbf{d}_6$, $\mathbf{d}_7$ of the control polygon $(n = 12, k = 4, i = 6, \lambda \in [-1, 1])$.

3. Rational B-spline curves

The rational equivalents of the results of Section 2 can easily be found utilizing the fact that any rational B-spline (NURBS) curve can be obtained as a central projection of an integral (non-rational) B-spline curve. More precisely, the rational B-spline curve in $\mathbf{R}^d$

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{l=0}^{n} w_l \mathbf{d}_l \frac{N_l^k(u)}{\sum_{j=0}^{n} w_j N_j^k(u)}, u \in [u_{k-1}, u_{n+1}]$$

specified by control points $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n$, weights $w_0, w_1, \ldots, w_n$ ($w_i \geq 0$) and knots $(u_0, u_1, \ldots, u_{n+k})$, ($d = 2, 3$), can be produced by projecting the integral B-spline curve, determined by the same knots and the control points

$$\begin{bmatrix} w_0 \mathbf{d}_0 \\ w_0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \mathbf{d}_1 \\ w_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} w_n \mathbf{d}_n \\ w_n \end{bmatrix}$$

in $\mathbf{R}^{d+1}$, from the origin onto the hyperplane $w = 1$.

Thus rational B-spline curves inherit those properties of integral B-spline curves that are invariant under central projection. Therefore Theorem 2 is valid for rational B-spline curves either. Properties of the case $k = 3$ remains valid, since central projection preserves incidence and straight lines. The case $k = 4$ changes in part, since central projection does not preserve parallelism. For this reason, points of the arc $\mathbf{s}_{i+2}(u)$ move along straight line segments, the extension of which intersect the side $\mathbf{d}_i$, $\mathbf{d}_{i+1}$ at its inner points moreover, intersect the line determined by the point of homogeneous coordinates $(w_{i-1}\mathbf{d}_{i-1} - w_i\mathbf{d}_i, w_{i-1} - w_i)$ and $(w_{i+2}\mathbf{d}_{i+2} - w_{i+1}\mathbf{d}_{i+1}, w_{i+2} - w_{i+1})$. (This line is the vanishing line of the plane direction of Subsection 2.2 in this central projection.)

4. Conclusions

In this paper we have examined the shape modification effect of the symmetric translation of knots u_i and u_{i+2k-3}. We proved that this symmetric translation moves points of the arc $\mathbf{s}_{i+k-2}(u)$ along straight line segments, if and only if, $u_{i+k-1} - u_i = u_{i+2k-3} - u_{i+k-2}$ holds. We studied the $k = 3$ and $k = 4$ special cases in detail, and carried over the results to rational B-spline curves as well. Further research is needed on the simultaneous modification of knots to reveal their shape modification possibilities.

References

[1] Au, C. K., Yuen, M. M. F., Unified approach to NURBS curve shape modification, *Computer-Aided Design*, **27** (1995), 85–93.

[2] Fowler, B., Bartels, R., Constraint–based curve manipulation, *IEEE Computer Graphics and Applications*, **13** (1993), 43–49.

[3] Hoffmann, M., Juhász, I., Shape Control of Cubic B-spline and NURBS Curves by Knot Modifications, in Banissi, E., Khosrowshahi, F., Srafraz, M., Ursyn, A. (Eds.) Proceedings of the Fifth International Conference on Information Visualisation, 25-27 July 2001, London, England, IEEE Computer Society, 63-68.

[4] HOFFMANN, M., On the derivatives of a special family of B-spline curves, *Acta Acad. Paed. Agriensis*, **27**, (2001) (to appear).

[5] JUHÁSZ, I., Weight–based shape modification of NURBS curves, *Computer Aided Geometric Design*, **16** (1999), 377–383.

[6] JUHÁSZ, I., HOFFMANN, M., The effect of knot modifications on the shape of B-spline curves, *Journal for Geometry and Graphics*, (2001) (to appear).

[7] PIEGL, L., Modifying the shape of rational B-splines. Part 1: curves, *Computer-Aided Design*, **21** (1989), 509–518.

[8] PIEGL, L., TILLER, W., The NURBS book, Springer-Verlag, 1995.

[9] SÁNCHEZ-REYES, J., A simple technique for NURBS shape modification, *IEEE Computer Graphics and Applications*, **17** (1997), 52–59.

Imre Juhász
Department of Descriptive Geometry
University of Miskolc
Egyetemváros
H-3515 Miskolc, Hungary
e-mail: agtji@gold.uni-miskolc.hu

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **28** *(2001) 79–86*

POWER INTEGRAL BASES IN MIXED BIQUADRATIC NUMBER FIELDS

Gábor Nyul (Debrecen, Hungary)

Abstract. We give a complete characterization of power integral bases in quartic number fields of type $K = \mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ where m, n are distinct square-free integers with opposite sign. We provide a list of all fields of this type up to discriminant 10^4 in increasing order of discriminants containing field indices, minimal indices and all elements of minimal index.

AMS Classification Number: 11D57, 11Y50

Keywords: quartic number fields, power integral bases

1. Introduction

Let K be an algebraic number field of degree n. The index of a primitive element $\alpha \in \mathbf{Z}_K$ is defined by

$$I(\alpha) = (\mathbf{Z}_K^+ : \mathbf{Z}[\alpha]^+).$$

The existence of *power integral bases* $\{1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ is a classical problem of algebraic number theory. The element α generates a power integral basis if and only if $I(\alpha) = 1$ (for related results cf. [1]). If the number field K admits power integral bases, it is called *monogeneous.* We recall that the *minimal index* of a number field K is the minimum of the indices of all primitive integers in the field. The *field index* is the greatest common divisor of the indices of all primitive integers of the field.

Let m, n be distinct square-free integers. Biquadratic fields of type $K = \mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ were considered by several authors. K. S. Williams [6] described an integral basis of K. T. Nakahara [5] proved that infinitely many fields of this type have power integral bases, on the other hand for any given N there are infinitely many fields of this type with field index 1 but minimal index $> N$, consequently without power integral basis.

M. N. Gras and F. Tanoe [4] gave necessary and sufficient conditions for biquadratic fields to have power integral basis. In fact they characterized all mixed biquadratic fields having power integral basis and established further necessary conditions for totally real biquadratic fields to have power integral basis. Using the integral bases I. Gaál, A. Pethő and M. Pohst [3] formulated the corresponding index forms and gave an algorithm for determining all generators of power integral bases in the totally real case by solving systems of simultaneous Pellian equations.

To complete the above theory of power integral bases in biquadratic fields our purpose is to *describe all generators of power integral bases* in mixed biquadratic number fields. The most interesting point is that it turns out, that surprisingly the coordinate vectors (with respect to the integral basis of [6]) of the generators of power integral bases in mixed biquadratic number fields are contained in a finite set of *constant vectors* for all these fields. We also provide a table of mixed biquadratic fields in increasing order of discriminants up to 10^4 displaying the field index, minimal index and all elements of minimal index.

2. Index form equation in mixed biquadratic fields

To fix our notation we shortly recall the integral bases and corresponding index forms of biquadratic number fields with mixed signature.

Let m, n be distinct square-free rational integers (not equal to 1), let $l = (m, n) > 0$ and let m_1, n_1 be defined by $m = lm_1$, $n = ln_1$. By K. S. Williams' result [6] all mixed biquadratic number fields can be given in the form $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ so that the parameters belong to one of the following cases:

Case 1:	$m > 0$,	$n < 0$,	$m \equiv 1 \pmod 4$,	$n \equiv 1 \pmod 4$,
			$m_1 \equiv 1 \pmod 4$,	$n_1 \equiv 1 \pmod 4$.
Case 2:	$m > 0$,	$n < 0$,	$m \equiv 1 \pmod 4$,	$n \equiv 1 \pmod 4$,
			$m_1 \equiv 3 \pmod 4$,	$n_1 \equiv 3 \pmod 4$.
Case 3/A:	$m > 0$,	$n < 0$,	$m \equiv 1 \pmod 4$,	$n \equiv 2 \pmod 4$.
Case 3/B:	$m < 0$,	$n > 0$,	$m \equiv 1 \pmod 4$,	$n \equiv 2 \pmod 4$.
Case 4/A:	$m > 0$,	$n < 0$,	$m \equiv 2 \pmod 4$,	$n \equiv 3 \pmod 4$.
Case 4/B:	$m < 0$,	$n > 0$,	$m \equiv 2 \pmod 4$,	$n \equiv 3 \pmod 4$.
Case 5/A:	$m > 0$,	$n < 0$,	$m \equiv 3 \pmod 4$,	$n \equiv 3 \pmod 4$.
Case 5/B:	$m < 0$,	$n < 0$,	$m \equiv 3 \pmod 4$,	$n \equiv 3 \pmod 4$.

and the integral bases are given by

Case 1: $\left\{1, \dfrac{1+\sqrt{m}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{n}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{m_1 n_1}}{4}\right\}$.

Case 2: $\left\{1, \dfrac{1+\sqrt{m}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{n}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{m_1 n_1}}{4}\right\}$.

Cases 3/A and 3/B: $\left\{1, \dfrac{1+\sqrt{m}}{2}, \sqrt{n}, \dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{m_1 n_1}}{2}\right\}$.

Cases 4/A and 4/B: $\left\{1, \sqrt{m}, \sqrt{n}, \dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{m_1 n_1}}{2}\right\}$.

Cases 5/A and 5/B: $\left\{1, \sqrt{m}, \dfrac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{m_1 n_1}}{2}\right\}$.

The integral basis enables one to construct the corresponding index forms (cf. e.g. [2]):
Case 1:

$$\left(l(x_2+\frac{x_4}{2})^2-\frac{n_1}{4}x_4^2\right)\left(l(x_3+\frac{x_4}{2})^2-\frac{m_1}{4}x_4^2\right)\left(n_1(x_3+\frac{x_4}{2})^2-m_1(x_2+\frac{x_4}{2})^2\right).$$

Case 2:

$$\left(l(x_2-\frac{x_4}{2})^2-\frac{n_1}{4}x_4^2\right)\left(l(x_3+\frac{x_4}{2})^2-\frac{m_1}{4}x_4^2\right)\left(n_1(x_3+\frac{x_4}{2})^2-m_1(x_2-\frac{x_4}{2})^2\right).$$

Cases 3/A and 3/B:

$$\left(lx_2^2-n_1x_4^2\right)\left(l(x_3+\frac{x_4}{2})^2-\frac{m_1}{4}x_4^2\right)\left(n_1(2x_3+x_4)^2-m_1x_2^2\right).$$

Cases 4/A and 4/B:

$$\left(\frac{l}{2}(2x_2+x_4)^2-\frac{n_1}{2}x_4^2\right)\left(2lx_3^2-\frac{m_1}{2}x_4^2\right)\left(2n_1x_3^2-\frac{m_1}{2}(2x_2+x_4)^2\right).$$

Cases 5/A and 5/B:

$$\left(l(2x_2+x_3)^2-n_1x_4^2\right)\left(lx_3^2-m_1x_4^2\right)\left(\frac{n_1}{4}x_3^2-m_1(x_2+\frac{x_3}{2})^2\right).$$

As it is well-known (see e.g. [1]) $K=\mathbf{Q}(\sqrt{m},\sqrt{n})$ admits power integral bases if and only if the *index form equation*

$$I(x_2,x_3,x_4)=\pm 1 \quad (\text{in } \ x_2,x_3,x_4\in\mathbf{Z}) \tag{1}$$

is solvable, where $I(x_2,x_3,x_4)$ is the index form given above. Moreover, all generators of power integral bases are of the form

$$\alpha=x_1+x_2\omega_2+x_3\omega_3+x_4\omega_4$$

where $\{1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$ is the integral basis of K, (x_2,x_3,x_4) is a solution of the index form equation (1) and $x_1\in\mathbf{Z}$ is arbitrary.

Our main theorem characterizes the cases when K has power integral bases and describes all generators of power integral bases. M. N. Gras and F. Tanoe [4] has already described the monogeneous mixed biquadratic fields. Our main point is to show that the solutions of the index form equations in monogeneous mixed biquadratic fields belong to a *finite set of constant vectors*. Especially, the coordinates of the generators of power integral bases are explicitely given and *do not depend on the parameters m,n,l.*

Theorem. *Let $K = \mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ be a mixed biquadratic number field represented in one of the forms listed above.*

In cases 1, 2 and 3/A there are no power integral bases.

In the other cases the necessary and sufficient condition of the existence of power integral bases in K is

Case 3/B: $m_1 = -1$, $l - 4n_1 = -1$ *(and by the assumption $n_1 > 0$).*

Case 4/A: $m_1 = 2$, $n_1 = -1$, $l = 1$, *so $m = 2$ and $n = -1$.*

Case 4/B: $m_1 = -2$, $l - n_1 = \pm 2$ *(and by the assumption $n_1 > 0$).*

Case 5/A: $n_1 = -1$, $4l - m_1 = 1$ *(and by the assumption $m_1 > 0$).*

Case 5/B: $l = 1$, $n_1 - m_1 = \pm 4$ *(and by the assumption $m_1, n_1 < 0$).*

The solutions of the index form equation corresponding to the above integral basis are

Case 3/B		$(x_2, x_3, x_4) = (1, 1, -2), (1, -1, 2)$,
Case 4/A		$(x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1), (1, 0, -1)$,
Case 4/B		$(x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 1), (1, 0, -1)$,
Case 5/A	$m = 3$, $n = -1$	$(x_2, x_3, x_4) = (1, -2, 1), (1, -2, -1)$, $(0, 1, 0), (1, -1, 0)$,
Case 5/A	*other fields*	$(x_2, x_3, x_4) = (1, -2, 1), (1, -2, -1)$,
Case 5/B		$(x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 0), (1, -1, 0)$.

Note that if (x_2, x_3, x_4) is a solution then so also is $(-x_2, -x_3, -x_4)$ but we include only one of them.

Proof of the Theorem. In each case we solve equation (1) using the relevant index form. In each case the index form splits into three factors taking integer values, hence all factors must be equal to ± 1. We detail some tipical cases, the others are similar to deal with.

Case 1. We have $m_1 > 0$, $n_1 < 0$, $m_1 \equiv 1 \pmod 4$, $n_1 \equiv 1 \pmod 4$. Set $\widetilde{n}_1 = |n_1| > 0$.

The first factor of the index form is non-negative. Multiplying by 4 we get

$$l(2x_2 + x_4)^2 + \widetilde{n}_1 x_4^2 = 4.$$

On the left hand side both terms are non-negative integers, hence we have to consider the following five cases (a. to e.):

(a) $l(2x_2 + x_4)^2 = 0$, $\widetilde{n}_1 x_4^2 = 4$

By $l > 0$, we have $2x_2 + x_4 = 0$, that is $2 \mid x_4$. On the other hand $(\widetilde{n}_1, x_4^2) = (1, 4), (4, 1)$, and x_4 is even which imply $\widetilde{n}_1 = 1$, that is $n_1 = -1$. Then we obtain $n_1 \not\equiv 1 \pmod 4$, a contradiction, hence in case a there are no solutions.

(b) $l(2x_2 + x_4)^2 = 1$, $\widetilde{n}_1 x_4^2 = 3$

This is only possible if $l=1$, $2x_2+x_4=\pm 1$, $\tilde{n}_1=3$ (that is $n_1=-3$) and $x_4^2=1$. If $x_4=1$, then $x_2=0$ or $x_2=-1$; if $x_4=-1$, then $x_2=0$ or $x_2=1$. Then the third factor of the index form is not positive, hence it is equal to -1:

If $x_2=0$, $x_4=1$ or $x_2=-1$, $x_4=1$, then $-3\left(x_3+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{m_1}{4}=-1$, that is $3(2x_3+1)^2+m_1=4$. The first term is non-negative, not greater than 4, divisible by 3 and odd, hence it is equal to 3. Then $3(2x_3+1)^2=3$ and $m_1=1$, hence $2x_3+1=\pm 1$, $x_3=0$ or $x_3=-1$.

If $x_2=0$, $x_4=-1$ or $x_2=1$, $x_4=-1$, then $-3\left(x_3-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{m_1}{4}=-1$, that is $3(2x_3-1)^2+m_1=4$. Similarly as above it follows that the first term is 3 and $m_1=1$, $x_3=0$ or $x_3=1$.

The remaining cases are $(x_3,x_4)=(0,1),(-1,1),(0,-1),(1,-1)$. Considering the second factor we get $\frac{l}{4}-\frac{m_1}{4}=\pm 1$. On the other hand we have $l=m_1=1$, hence $\frac{l-m_1}{4}=0$. It means that there are no solutions in case b, either.

The cases
(c) $l(2x_2+x_4)^2=2$, $\tilde{n}_1x_4^2=2$,
(d) $l(2x_2+x_4)^2=3$, $\tilde{n}_1x_4^2=1$,
(e) $l(2x_2+x_4)^2=4$, $\tilde{n}_1x_4^2=0$
are much simpler to consider.

Hence in case 1 there are no power integral bases.

Cases 2, 3/A, 3/B are similar to consider.

Case 4/A. Now we have $m_1>0$, $n_1<0$. Let $\tilde{n}_1=|n_1|>0$.

The third factor is non-positive, so multiplying by -2 we get

$$4\tilde{n}_1x_3^2+m_1(2x_2+x_4)^2=2.$$

The first term is non-negative, less than or equal to 2 and divisible by 4, hence only $4\tilde{n}_1x_3^2=0$ and $m_1(2x_2+x_4)^2=2$ are possible. These imply $x_3=0$, $m_1=2$ and $2x_2+x_4=\pm 1$. Then the second factor is $-x_4^2=-1$, that is $x_4=\pm 1$. If $x_4=1$, then $x_2=0$ or $x_2=-1$, and if $x_4=-1$, then $x_2=0$ or $x_2=1$. The remaining cases are $(x_2,x_4)=(0,1),(-1,1),(0,-1),(1,-1)$. Considering the first factor we get $\frac{l}{2}-\frac{n_1}{2}=\pm 1$. But $l>0$, $n_1<0$, so $\frac{l-n_1}{2}>0$, hence $\frac{l-n_1}{2}=1$, that is $l-n_1=2$. On the other hand, by $l,n_1\in\mathbf{Z}$, we get $l\geq 1$, $n_1\leq -1$, hence $l-n_1\geq 2$. In this inequality the equation holds, so we have $l=1$, $n_1=-1$. Summarizing, in this case $l=1$, $m_1=2$, $n_1=-1$ and the solutions of the index form equation are $(x_2,x_3,x_4)=\pm(0,0,1),\pm(1,0,-1)$.

Case 4/B. In this case $n_1>0$, $m_1<0$, and set $\tilde{m}_1=|m_1|>0$.

Now the second factor is not negative, hence it is equal to 1. If we multiply it by 2, we get

$$4lx_3^2 + \widetilde{m}_1 x_4^2 = 2.$$

On the left hand side the first term is equal to 0, because it is non-negative, not greater than 2 and divisible by 4, which implies $4lx_3^2 = 0$, $\widetilde{m}_1 x_4^2 = 2$. From these we get $x_3 = 0$, $\widetilde{m}_1 = 2$ (that is $m_1 = -2$), $x_4 = \pm 1$. Then the third factor is $(2x_2 + x_4)^2 = 1$, hence $2x_2 + x_4 = \pm 1$. If $x_4 = 1$, then $x_2 = 0$ or $x_2 = -1$; if $x_4 = -1$, then $x_2 = 0$ or $x_2 = 1$. In the remaining cases $((x_2, x_4) = (0,1), (-1,1), (0,-1), (1,-1))$ the first factor is $\frac{l}{2} - \frac{n_1}{2} = \pm 1$, that is $l - n_1 = \pm 2$. Summarizing, we get $m_1 = -2$, $l - n_1 = \pm 2$ and the solutions of the index form equation in this case are $(x_2, x_3, x_4) = \pm(0,0,1), \pm(1,0,-1)$.

Cases 5/A, 5/B can be discussed in a similar way.

In each case it is simple to verify by substitution that the triples (x_2, x_3, x_4) obtained above are indeed solutions of the index form equation.

3. Description of the table

We present a list of all mixed biquadratic fields up to discriminant 10^4. In this table D_K, m_K, μ denote the discriminant, the field index and the minimal index, respectively. They are followed by the solutions of $I(x_2, x_3, x_4) = \pm\mu$, that is the coordinates of the elements of minimal index. If (x_2, x_3, x_4) is a solution then so also is $(-x_2, -x_3, -x_4)$ but we list only one of them. To construct the table we used [6] (integral basis, D_K), [2] (to calculate m_K). In order to determine the minimal index μ we took the multiplies $k \cdot m_K$ of m_K until the index form equation with right hand side $\pm k \cdot m_K$ had solutions. In [3] the authors provided a similar list of totally real biquadratic fields. These computations were performed in MAPLE and took just a few minutes.

D_K	m_1	n_1	l	m_K	μ	(x_2, x_3, x_4)
144	3	-1	1	1	1	(1, -2, 1), (1, -1, 0), (0, 1, 0), (1, -2, -1)
225	-3	5	1	2	2	(0, 1, -1), (0, 0, 1), (1, 0, -1), (1, 1, -1)
256	2	-1	1	1	1	(0, 0, 1), (1, 0, -1)
400	-1	-5	1	1	1	(0, 1, 0), (1, -1, 0)
441	-1	7	3	2	2	(0, 1, -1), (1, 0, 1), (1, -1, 1), (0, 0, 1)
576	-3	2	1	1	4	(0, 1, -1), (0, 0, 1)
576	-1	2	3	1	3	(1, 1, -1), (1, 0, -1), (1, 0, 1), (1, -1, 1)
784	7	-1	1	1	2	(1, -1, 0), (0, 1, 0)
1089	-1	11	3	2	4	(3, -1, 2), (1, 1, -2)
1225	-7	5	1	2	6	(0, 1, -1), (1, 1, -1), (1, 0, -1), (0, 0, 1)
1521	-3	13	1	2	10	(2, 1, -1), (2, 0, -1), (1, 0, 1), (1, -1, 1)
1600	5	-2	1	1	4	(0, 1, -1), (0, 0, 1)
1600	1	-2	5	1	4	(0, 1, -1), (0, 0, 1)
1936	11	-1	1	1	3	(1, -1, 0), (0, 1, 0)
2304	6	-1	1	1	5	(0, 1, -1), (0, 1, 1), (1, -1, -1), (1, 1, -1)
2304	-2	3	1	1	1	(1, 0, -1), (0, 0, 1)
2601	-3	17	1	2	20	(0, 1, -1), (1, -1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, -1), (1, 1, -1), (0, 0, 1)
2704	-1	-13	1	1	3	(0, 1, 0), (1, -1, 0)
3025	-11	5	1	2	12	(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, 1, -1), (1, 0, -1)
3136	-7	2	1	1	8	(0, 1, -1), (0, 0, 1)
3136	-1	2	7	1	1	(1, -1, 2), (1, 1, -2)
3249	-1	19	3	2	14	(1, 0, -1), (2, -1, 1), (1, 1, -1), (2, 0, 1)
3600	15	-1	1	1	4	(1, -1, 0), (0, 1, 0), (2, -4, 1), (2, -4, -1)
3600	3	-5	1	1	2	(1, -1, 0), (0, 1, 0)
3600	3	-1	5	1	12	(0, 1, -1), (1, -1, 1), (0, 1, 1), (1, -1, -1)
4624	-1	-17	1	1	4	(0, 1, 0), (1, -1, 0)
4761	-1	23	3	2	8	(2, -1, 1), (1, 0, -1), (2, 0, 1), (1, 1, -1)
5776	19	-1	1	1	5	(1, -1, 0), (0, 1, 0)
5929	-1	11	7	2	4	(2, -1, 2), (0, 1, -2)
6400	10	-1	1	1	21	(0, 1, -1), (1, 1, -1), (1, -1, -1), (0, 1, 1)
6400	2	-5	1	1	3	(1, 0, -1), (0, 0, 1)
6400	2	-1	5	3	3	(1, 0, -1), (0, 0, 1)
7056	1	-7	3	1	18	(1, -1, 0), (0, 1, 0)
7056	1	-3	7	1	31	(1, 0, -1), (1, 0, 1)
7056	-1	-21	1	1	5	(0, 1, 0), (1, -1, 0)
7569	-3	29	1	2	26	(3, 1, -1), (2, -1, 1), (3, 0, -1), (2, 0, 1)
7744	-11	2	1	1	12	(0, 0, 1), (0, 1, -1)
7744	-1	2	11	3	3	(1, -1, 2), (1, 1, -2)
8281	-7	13	1	2	20	(1, 1, 0), (1, -1, 0)
8464	23	-1	1	1	6	(1, -1, 0), (0, 1, 0)
8649	-1	31	3	2	10	(2, -1, 1), (2, 0, 1), (1, 0, -1), (1, 1, -1)
9025	-19	5	1	2	24	(1, 1, 0), (1, -1, 0)

References

[1] Gaál, I., Power integer bases in algebraic number fields, *Annales Univ. Sci. Budapest Sect. Comp.*, **18** (1999), 61–87.

[2] Gaál, I., Pethő, A. and Pohst, M., On the indices of biquadratic number fields having Galois group V_4, *Arch. Math.*, **57** (1991), 357–361.

[3] Gaál, I., Pethő, A. and Pohst, M., On the resolution of index form equations in biquadratic number fields, III. The bicyclic biquadratic case, *J. Number Theory*, **53** (1995), 100–114.

[4] Gras, M. N. and Tanoe, F., Corps biquadratiques monogénes, *Manuscripta Math.*, **86** (1995), 63–79.

[5] Nakahara, T., On the indices and integral bases of non–cyclic but abelian biquadratic fields, *Archiv. der Math.*, **41** (1983), 504–508.

[6] Williams, K. S., Integers of biquadratic fields, *Canad. Math. Bull.*, **13** (1970), 519-526.

Gábor Nyul
Institute of Mathematics and Informatics
University of Debrecen
H-4010 Debrecen Pf.12., Hungary
e-mail: gnyul@dragon.klte.hu

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **28** *(2001) 87–91*

THE CONDITION FOR GENERALIZING INVERTIBLE SUBSPACES IN CLIFFORD ALGEBRAS

Nguyen Canh Luong (Hanoi, Vietnam)

Abstract. Let $\mathcal{A}$ be a universal Clifford algebra induced by m-dimensional real linear space with basis $\{e_1,e_2\ldots,e_m\}$. The necessary and sufficient condition for the subspaces of form $L_1=lin\{e_0,e_1,\ldots,e_m,e_{m+1},\ldots,e_{m+s}\}$ to be invertible is $m\equiv 2 \pmod 4$, $s=1$ and $e_{m+1}=e_{12\ldots m}$ (see [2]). In this paper we improve this assertion for the subspaces of the form $L=lin\{e_0,e_{A_1},\ldots,e_{A_m},e_{A_{m+1}},\ldots,e_{A_{m+s}}\}$, where $A_i\subseteq\{1,2,\ldots,m\}$ $(i=1,2,\ldots,m+s)$.

1. Introduction

Let V_m be an $m-$dimensional ($m \geq 1$) real linear space with basis $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Consider the 2^m-dimensional real space $\mathcal{A}$ with basis

$$E = \{e_\emptyset, e_{\{1\}}, \ldots, e_{\{m\}}, e_{\{1,2\}}, \ldots, e_{\{m-1,m\}}, \ldots, e_{\{1,2,\ldots,m\}}\},$$

where $e_{\{i\}} := e_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$.

In the following, for each $K = \{k_1, k_2, \ldots, k_t\} \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ we write $e_K = e_{k_1k_2\ldots k_t}$ with $e_\emptyset = e_0$, and so

$$E = \{e_0, e_1, \ldots, e_m, e_{12}, \ldots, e_{m-1m}, \ldots, e_{12\ldots m}\}.$$

The product of two elements $e_A, e_B \in E$ is given by

$$(1) \qquad e_Ae_B = (-1)^{\sharp(A\cap B)}(-1)^{p(A,B)}e_{A\triangle B}; \quad A, B \subset \{1, 2, \ldots, m\},$$

where

$$\begin{cases} p(A,B) = \sum\limits_{j\in B} p(A,j), \\ p(A,j) = \sharp\{i \in A : i > j\}, \\ A \triangle B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) \end{cases}$$

and $\sharp A$ denotes the number of elements of A.

Each element $a = \sum\limits_A a_A e_A \in \mathcal{A}$ is called a Clifford number. The product of two Clifford numbers $a = \sum\limits_A a_A e_A$; $b = \sum\limits_B b_B e_B$ is defined by the formula

$$ab = \sum_A \sum_B a_A b_B e_A e_B.$$

It is easy to check that in this way $\mathcal{A}$ is turned into a linear associative non-commutative algebra over $\mathbf{R}$. It is called the Clifford algebra over V_m.

It follows at once from the multiplication rule (1) that $e_\emptyset$ is identity element, which is denoted by e_0 and in particular

$$e_i e_j + e_j e_i = 0 \text{ for } i \neq j; \quad e_j^2 = -1 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

and

$$e_{k_1 k_2 \ldots k_t} = e_{k_1} e_{k_2} \ldots e_{k_t}; \quad 1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_t \leq m.$$

The involution for basic vectors is given by

$$\bar{e}_{k_1 k_2 \ldots k_t} = (-1)^{\frac{t(t+1)}{2}} e_{k_1 k_2 \ldots k_t}.$$

For any $a = \sum\limits_A a_A e_A \in \mathcal{A}$, we write $\bar{a} = \sum\limits_A a_A \bar{e}_A$. For any Clifford number $a = \sum\limits_A a_A e_A$, we write $|a| = \left(\sum\limits_A a_A^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. Result and Proof

We use the following definitions.

(i) An element $a \in \mathcal{A}$ is said to be invertible if there exists an element a^{-1} such that $aa^{-1} = a^{-1}a = e_0$; a^{-1} is said to be the inverse of a.

(ii) A subspace $X \subset \mathcal{A}$ is said to be invertible if every non-zero element in X is invertible in $\mathcal{A}$.

(iii) $L(u_1, u_2, \ldots, u_n) = lin\{u_1, u_2, \ldots u_n\}, u_i \in \mathcal{A} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$.

It is well-known (see [1]) that for any special Clifford number of the form $a = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i e_i \neq 0$ we have $a^{-1} = \frac{\bar{a}}{|a|^2}$. So $L(e_0, e_1, \ldots, e_m)$ is invertible, and if $m \equiv 2 \pmod 4$ (see [2]), then every $a = \sum\limits_{i=0}^{m+1} a_i e_i \neq 0$, where $e_{m+1} = e_{12\ldots m}$ is invertible and $a^{-1} = \dfrac{\bar{a}}{|a|^2}$. So $L(e_0, e_1, \ldots, e_m, e_{m+1})$ is invertible.

We shall need the following lemmas.

Lemma 1. (see Lemma 1 [3]) *If $L(e_{A_1}, e_{A_2}, \dots, e_{A_k})$, where $e_{A_i} \in E, e_{A_i} \neq e_{A_j}$ for $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, is invertible if and only if $L(e_{A_1}\bar{e}_{A_k}, e_{A_2}\bar{e}_{A_k}, \dots, e_{A_k}\bar{e}_{A_k})$ is invertible.*

By Lemma 1 we shall study subspaces of $\mathcal{A}$ in the form $L(e_0, e_{A_1}, \dots, e_{A_l})$.

Lemma 2. (see Lemma 3 [3]) $L(e_0, e_{A_1}, \dots, e_{A_l})$, $e_{A_i} \in E, e_{A_i} \neq e_{A_j}$ *for $i \neq j$, is invertible if and only if*

$$e_{A_i}\bar{e}_{A_j} + e_{A_j}\bar{e}_{A_i} = 0 \text{ for } i \neq j, \quad i, j \in \{0, 1, 2, \dots, m\}, \text{ where } e_{A_0} = e_0.$$

Lemma 3. (see Theorem [3]) *If $L(e_0, e_{A_1}, e_{A_2}, \dots, e_{A_l})$, $e_{A_i} \in E, e_{A_i} \neq e_{A_j}$ for $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots l\}$ is invertible, then*

(i) $l \leq m + 1$.

(ii) *If $l = m + 1$, then*

$$\text{either } e_{A_l} = e_{A_1}e_{A_2}\dots e_{A_{l-1}} \qquad \text{or} \qquad e_{A_l} = -e_{A_1}e_{A_2}\dots e_{A_{l-1}}.$$

The purpose of this paper is to prove the following.

Theorem. *$L(e_0, e_{A_1}, \dots, e_{A_m}, e_{A_{m+1}}, \dots, e_{A_{m+s}})$ is invertible if and only if the following conditions simultaneously hold:*

(1) $e_{A_i}\bar{e}_{A_j} + e_{A_j}\bar{e}_{A_i} = 0$ *for* $i \neq j \quad i, j \in \{0, 1, 2, \dots m\}$, *where* $e_{A_0} = e_0$,

(2) $m \equiv 2 \pmod 4$,

(3) $s = 1$,

(4) *Either* $e_{A_{m+1}} = e_{A_1}e_{A_2}\dots e_{A_m}$ *or* $e_{A_{m+1}} = -e_{A_1}e_{A_2}\dots e_{A_m}$.

Proof. First we prove the sufficiency. From $e_{A_i}\bar{e}_{A_j} + e_{A_j}\bar{e}_{A_i} = 0$ for $i \neq j$, $i, j \in \{0, 1, \dots m\}$ we have

$$\bar{e}_{A_i}\bar{e}_{A_j} + \bar{e}_{A_j}\bar{e}_{A_i} = 0 \text{ and } e_{A_i} + \bar{e}_{A_i} = 0 \text{ for } i \neq j, \quad i, j \in \{1, \dots m\}.$$

We shall prove that $e_{A_k}\bar{e}_{A_{m+1}} + e_{A_{m+1}}\bar{e}_{A_k} = 0$ for $k \in \{0, 1, \dots m\}$. For $k = 0$, by $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$ and by $m \equiv 2 \pmod 4$, we get that

$$\begin{aligned} e_0\bar{e}_{A_{m+1}} + e_{A_{m+1}}\bar{e}_0 &= \overline{e_{A_1}e_{A_2}\dots e_{A_m}} + e_{A_1}e_{A_2}\dots e_{A_m} \\ &= \bar{e}_{A_m}\bar{e}_{A_{m-1}}\dots\bar{e}_{A_1} + e_{A_1}e_{A_2}\dots e_{A_m} \\ &= (-1)^m e_{A_m}e_{A_{m-1}}\dots e_{A_1} + e_{A_1}e_{A_2}\dots e_{A_m} \end{aligned}$$

$$= (-1)^m(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} e_{A_1}e_{A_2}\dots e_{A_m} + e_{A_1}e_{A_2}\dots e_{A_m}$$

$$= -e_{A_1}e_{A_2}\dots e_{A_m} + e_{A_1}e_{A_2}\dots e_{A_m} = 0.$$

For $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ we have

$$e_{A_k}\bar{e}_{A_{m+1}} + e_{A_{m+1}}\bar{e}_{A_k} = e_{A_k}\bar{e}_{A_m}\dots\bar{e}_{A_k}\dots\bar{e}_{A_1} + e_{A_1}\dots e_{A_k}\dots e_{A_m}\bar{e}_{A_k}$$

$$= (-1)^{m-k}\bar{e}_{A_m}\dots e_{A_k}\bar{e}_{A_k}\dots\bar{e}_{A_1} + (-1)^{m-k}e_{A_1}\dots e_{A_k}\bar{e}_{A_k}\dots e_{A_m}$$

$$= (-1)^{m-k}\left[(-1)^{m-1}e_{A_m}\dots e_{A_{k+1}}e_{A_{k-1}}\dots e_{A_1} + e_{A_1}\dots e_{A_{k-1}}e_{A_{k+1}}\dots e_{A_m}\right]$$

$$= (-1)^{m-k}\Big[-(-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} e_{A_1}\dots e_{A_{k-1}}e_{A_{k+1}}\dots e_{A_m}$$

$$+ e_{A_1}\dots e_{A_{k-1}}e_{A_{k+1}}\dots e_{A_m}\Big] = 0.$$

Take $0 \neq a = a_0e_0 + \sum\limits_{i=1}^{m+1} a_ie_{A_i} \in L(e_0, e_{A_1}, \dots e_{A_m}, e_{A_{m+1}})$.

Let $a^{-1} = \dfrac{1}{|a|^2}\left(a_0e_0 + \sum\limits_{i=1}^{m+1} a_i\bar{e}_{A_i}\right)$. Then

$$a \cdot a^{-1} = \frac{1}{|a|^2}\left(a_0e_0 + \sum_{i=1}^{m+1} a_ie_{A_i}\right)\left(a_0e_0 + \sum_{i=1}^{m+1} a_j\bar{e}_{A_j}\right)$$

$$= \frac{1}{|a|^2}\left[a_0^2e_0 + a_0\left(\sum_{i=1}^{m+1} a_ie_{A_i} + \sum_{j=1}^{m+1} a_j\bar{e}_{A_j}\right) + \sum_{i=1}^{m+1} a_i^2e_{A_i}\bar{e}_{A_i}\right.$$

$$\left. + \sum_{i<j} a_ia_j(e_{A_i}\bar{e}_{A_j} + e_{A_j}\bar{e}_{A_i})\right] = \frac{1}{|a|^2}\left(\sum_{i=0}^{m+1} a_i^2\right)e_0 = e_0.$$

Similarly, one can check the equality $a^{-1} \cdot a = e_0$.

Now we prove the necessity. By Lemma 2 we have $e_{A_i}\bar{e}_{A_j} + e_{A_j}\bar{e}_{A_i} = 0$ for $i \neq j$; $\quad i, j \in \{0, 1, \dots, m\}$ and by Lemma 3 we get that $s = 1$ and

$$\text{either} \quad e_{A_{m+1}} = e_{A_1}e_{A_2}\dots e_{A_m} \quad \text{or} \quad e_{A_{m+1}} = -e_{A_1}e_{A_2}\dots e_{A_m}.$$

We shall prove that $m \equiv 2 \pmod 4$. From $e_{A_i}\bar{e}_{A_j} + e_{A_j}\bar{e}_{A_i} = 0$ for $i \neq j$; $i, j \in \{0, 1, \dots, m\}$ one gets

$e_{A_i} + \bar{e}_{A_i} = 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Hence either $\sharp A_i = 4p_i + 1$ or $\sharp A_i = 4p_i + 2$ $(p_i \in I\!N)$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. So $e_{A_i} e_{A_i} = -e_0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Let $m \equiv 0 \pmod 4$ or $m \equiv 3 \pmod 4$. Choosing $a = e_0 + e_{A_{m+1}}$ and $b = e_0 - e_{A_{m-1}}$ we find

$$ab = e_0 + e_{A_{m+1}} - e_{A_{m+1}} - e_{A_{m+1}} e_{A_{m+1}} = e_0 - e_{A_1} \ldots e_{A_m} . e_{A_1} \ldots e_{A_m}$$

$$= e_0 - \left[(-1)^m (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} e_0\right] = e_0 - (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} e_0 = e_0 - e_0 = 0.$$

Hence the non-zero numbers a and b are not invertible.

Let $m \equiv 1 \pmod 4$. Choosing $a = e_{A_1} + e_{A_{m+1}}$ and $b = e_{A_1} - e_{A_{m+1}}$ we get

$$ab = (e_{A_1} + e_{A_{m+1}})(e_{A_1} - e_{A_{m+1}})$$

$$= e_{A_1} e_{A_1} - e_{A_1} e_{A_{m+1}} + e_{A_{m+1}} e_{A_1} - e_{A_{m+1}} e_{A_{m+1}}$$

$$= -e_0 - e_{A_1} e_{A_1} e_{A_2} \ldots e_{A_m} + e_{A_1} e_{A_2} \ldots e_{A_m} e_{A_1} - (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} e_0$$

$$= e_{A_2} \ldots e_{A_m} + (-1)^{m-1} e_{A_1} e_{A_1} e_{A_2} \ldots e_{A_m} = e_{A_2} \ldots e_{A_m} - e_{A_2} \ldots e_{A_m} = 0.$$

Hence a and b are not invertible. So $m \equiv 2 \pmod 4$. The theorem is proved.

References

[1] F. Brackx, R. Delanghe and F. Sommen, *Clifford Analysis*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne, 1982.

[2] N. C. Luong and N. V. Mau, *On Invertibility of Linear Subspaces Generating Clifford Algebras*, Vietnam Journal of Mathematics, 25:2(1997) 133-140.

[3] Nguyen Canh Luong, *Remark on the Maximal Dimension of Invertible Subspaces in the Clifford Algebras*, Proceeding of the Fifth Vietnamese Conference, 145-150.

Nguyen Canh Luong
Department of Mathematics
University of Technology of Hanoi
Hanoi, F105-Nha C14, 1 Dai Co Viet
Vietnam
e-mail: ncluong@hn.vnn.vn

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **28** *(2001) 93–97*

THE LIE AUGMENTATION TERMINALS OF GROUPS

Bertalan Király (Eger, Hungary)

Abstract. In this paper we give necessary and sufficient conditions for groups which have finite Lie terminals with respect to commutative ring of non-zero characteristic m, where m is a composite number.

AMS Classification Number: 16D25

1. Introduction

Let R be a commutative ring with identity, G a group and RG its group ring and let $A(RG)$ denote the *augmentation ideal* of RG, that is the kernel of the ring homomorphism $\phi : RG \to R$ which maps the group elements to 1. It is easy to see that as R-module $A(RG)$ is a free module with the elements $g - 1\,(g \in G)$ as a basis. It is clear that $A(RG)$ is the ideal generated by all elements of the form $g - 1$ $(g \in G)$.

The Lie powers $A^{[\lambda]}(RG)$ of $A(RG)$ are defined inductively: $A(RG) = A^{[1]}(RG)$, $A^{[\lambda+1]}(RG) = [A^{[\lambda]}(RG), A(RG)]\cdot RG$, if λ is not a limit ordinal, and $A^{[\lambda]}(RG) = \bigcap\limits_{\nu<\lambda} A^{[\nu]}(RG)$ otherwise, where $[K, M]$ denotes the $R-$submodule of RG generated by $[k, m] = km - mk, k \in K, m \in M$, and for $K \subseteq RG, K\cdot RG$ denotes the right ideal generated by K in RG (similarly $RG\cdot K$ will denote the left ideal generated by K). It is easy to see that the right ideal $A^{[\lambda]}(RG)$ is a two-sided ideal of RG for all ordinals $\lambda \geq 1$. We have the following sequence

$$A(RG) \supseteq A^2(RG) \supseteq \dots$$

of ideals of RG. Evidently there exists the least ordinal $\tau = \tau_R[G]$ such that $A^{[\tau]}(RG) = A^{[\tau+1]}(RG)$ which is called the *Lie augmentation terminal* (or *Lie terminal* for simple) of G with respect to R.

In this paper we give necessary and sufficient conditions for groups which have finite Lie terminal with respect to a commutative ring of non-zero characteristic.

*Research supported by the Hungarian National Foundation for Scientific Research Grant, No T025029.

2. Notations and some known facts

If H is a normal subgroup of G, then $I(RH)$ (or $I(H)$ for short) denotes the ideal of RG generated by all elements of the form $h-1$ ($h \in H$). It is well known that $I(RH)$ is the kernel of the natural epimorphism $\overline{\phi}: RG \to RG/H$ induced by the group homomorphism ϕ of G onto G/H. It is clear that $I(RG) = A(RG)$.

Let F be a free group on the free generators $x_i (i \in I)$, and ZF be its integral group ring (Z denotes the ring of rational integers). Then every homomorphism $\phi: F \to G$ induces a ring homomorphism $\overline{\phi}: ZF \to RG$ by letting $\overline{\phi}(\sum n_y y) = \sum n_y \phi(y)$, where $y \in F$ and the sum runs over the finite set of $n_y y \in ZF$. If $f \in ZF$, we denote by $A_f(RG)$ the two-sided ideal of RG generated by the elements $\overline{\phi}(f)$, $\phi \in \mathrm{Hom}(F, G)$, the set of homomorphism from F to G. In other words $A_f(RG)$ is the ideal generated by the values of f in RG as the elements of G are substituted for the free generators x_i-s.

An ideal J of RG is called a *polynomial ideal* if $J = A_f(RG)$ for some $f \in ZF$, F a free group.

It is easy to see that the augmentation ideal $A(RG)$ is a polynomial ideal. Really, $A(RG)$ is generated as an $R-$module by the elements $g-1$ ($g \in G$), i.e. by the values of the polynomial $x-1$.

Lemma 2.1. ([2], Corollary 1.9, page 6.) *The Lie powers $A^{[n]}(RG)(n \geq 1)$ are polynomial ideals in RG.*

We use the following lemma, too.

Lemma 2.2. ([2] Proposition 1.4, page 2.) *If $f \in ZF$, then f defines a polynomial ideal $A_f(RG)$ in every group ring RG. Further, if $\theta: RG \to KH$ is a ring homomorphism induced by a group homomorphism $\phi: G \to H$ and a ring homomorphism $\psi: R \to K$, then*

$$\theta(A_f(RG)) \subseteq A_f(KH).$$

(It is assumed that $\psi(1_R) = 1_K$, where 1_R and 1_K are identity of the rings R and K, respectively.)

Let $\overline{\theta}: RG \to R/LG$ be an epimorphism induced by the ring homomorphism θ of R onto R/L. By Lemma 2.1 $A^{[n]}(RG)(n \geq 1)$ are polynomial ideal and from Lemma 2.2 it follows that

$$\overline{\theta}(A^{[n]}(RG)) = A^{[n]}(R/LG). \tag{1}$$

Let p be a prime and n a natural number. In this case let's denote by G^{p^n} the subgroup generated by all elements of the form g^{p^n} ($g \in G$).

If K, L are two subgroups of G, then we denote by (K, L) the subgroup generated by all commutators $(g, h) = g^{-1}h^{-1}gh$, $g \in K$, $h \in L$.

The n^{th} term of the lower central series of G is defined inductively: $\gamma_1(G) = G, \gamma_2(G) = G'$ is the derived group (G, G) of G, and $\gamma_n(G) = (\gamma_{n-1}(G), G)$. The normal subgroups $G_{p,k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ is defined by

$$G_{p,k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (G')^{p^n} \gamma_k(G).$$

We have the following sequence of normal subgroups $G_{p,k}$ of a group G

$$G = G_{p,1} \supseteq G_{p,2} \supseteq \ldots \supseteq G_p,$$

where $G_p = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_{p,k}$.

In [1] the following theorem was proved.

Theorem 2.1. *Let R be a commutative ring with identity of characteristic p^n, where p a prime number. Then*

1. $\tau_R[G] = 1$ *if and only if* $G = G_p$,
2. $\tau_R[G] = 2$ *if and only if* $G \neq G' = G_p$,
3. $\tau_R[G] > 2$ *if and only if* G/G_p *is a nilpotent group whose derived group is a finite p-group.*

3. The Lie augmentation terminal

It is clear, that if G is an Abelian group, then $A^{[2]}(RG) = 0$. Therefore we may assume that the derived group $G' = \gamma_2(G)$ of G is non-trivial.

We considere the case $\operatorname{char} R = m = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s} (s \geq 1)$. Let $\Pi(m) = \{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ and $R_{p_i} = R/p_i^{n_i}R$ $(p_i \in \Pi(m))$. If $\overline{\theta}$ is the homomorphism of RG onto $R_{p_i}G$, then by (1)

$$\overline{\theta}(A^{[n]}(RG)) = A^{[n]}(R_{p_i}G) \tag{2}$$

and

$$A^{[n]}(R_{p_i}G) \cong (A^{[n]}(RG) + p_i^{n_i}RG)/p_i^{n_i}RG. \tag{3}$$

Theorem 3.1. *Let G be a non-Abelian group and R be a commutative ring with identity of non-zero characteristic $m = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_s^{n_s} (s \geq 1)$ Then the Lie augmentation terminal of G with respect to R is finite if and onli if for every $p_i \in \Pi(m)$ one of the following conditions holds:*

1. $G = G_{p_i}$
2. $G \neq G' = G_{p_i}$
3. G/G_{p_i} is a nilpotent group whose derived group is a finite p_i-group.

Proof. Let $p_i \in \Pi(m)$ and let one of the conditions hold: $G = G_{p_i}$ or $G \neq G' = G_{p_i}$ or G/G_{p_i} is a nilpotent group whose derived group is a finite p_i-group. From (2),(3) and Theorem 2.1 it follows, that for every $p_i \in \Pi(m)$ there exists $k_i \geq 1$ such that

$$A^{[k_i]}(R_{p_i}G) = A^{[k_i+1]}(R_{p_i}G) = \dots,$$

where $R_{p_i} = R/p_i^{n_i}R$. If

$$k = \max_{i=1}^{s}\{k_i\},$$

then

$$A^{[k]}(R_{p_i}G) = A^{[k+1]}(R_{p_i}G) = \dots$$

for all $p_i \in \Pi(m)$.

Since $A^{[n]}(R_{p_i}G) \cong (A^{[n]}(RG) + p_i^{n_i}RG)/p_i^{n_i}RG$ for all n and every $p_i \in \Pi(m)$, then from the previous isomorphism it follows, that an arbitrary element $x \in A^{[k]}(RG)$ can be written as

$$x = x_i + p_i^{n_i}a_i,$$

where $x_i \in A^{[k+1]}(RG), a_i \in RG$. If $m_i = m/p_i^{n_i}$, then $m_i x = m_i x_i$ since $m_i p_i^{n_i}$ is zero in R. We have

$$\left(\sum_{p_i \in \Pi(m)} m_i\right) x = \sum_{p_i \in \Pi(m)} m_i x_i.$$

Obviously m_i and $p_i^{n_i}$ are coprime numbers and for all $p_i \in \Pi(m)$ $p_i^{n_i}$ divides m_j for $j \neq i$. Therefore $\sum_{p_i \in \Pi(m)} m_i$ and the characteristic m of the ring R are coprime numbers. Consequently $\sum_{p_i \in \Pi(m)} m_i$ is invertible in R. So

$$x = a \sum_{p_i \in \Pi(m)} m_i x_i,$$

where $a \sum_{p_i \in \Pi(m)} m_i = 1$. Hence $x \in A^{[k+1]}(RG)$ and $x \in A^{[k]}(RG) = A^{[k+1]}(RG)$.

Conversely. Let $\tau_R(G) = n \geq 1$, i.e. $A^{n-1}(RG) \neq A^n(RG) = A^{n+1}(RG) = \dots$. Then for every prime $p_i \in \Pi(m)$

$$A^{k-1} \neq A^{[k]}(R_{p_i}G) = A^{[k+1]}(R_{p_i}G) = \dots$$

holds for a suitable $k \leq n$ and Theorem 2.1 completes the proof.

References

[1] KIRÁLY, B., The Lie augmentation terminals of a groups, *Acta Acad. Paed. Agriensis, Sect. Math.* (1995-96), 63–69.

[2] PASSI, I. B., Group ring and their augmentation ideals, *Lecture notes in Math.*, **715**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

Bertalan Király
Károly Eszterházy College
Department of Mathematics
H-3300 Eger, Hungary
Leányka str. 4.
e-mail: kiraly@ektf.hu

DIDACTICAL PAPERS

(In Hungarian)

MÓDSZERTANI CIKKEK

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **28** *(2001) 101–106*

A MATEMATIKAI KÉPESSÉGEK MÉRÉSE KONTROLL- ÉS VERSENYHELYZETBEN

Orosz Gyuláné (Eger, Hungary)

Abstract. This paper is about two motivated situations. We show that what kind of situation is better for pupils to give more efficiant achivement. It was examined by using test papers among elementary schools pupils from 5th to 8th grades. Our results prove that the controlled situation was better than competition one.

1. A kutatás háttere

A pszichopedagógiai irodalomban a tanulási tevékenység olyan motivációs szempontú kutatásai, melyek precízebb kutatási eszközökre támaszkodnak, aránylag kis számúak. Ennek oka valószínűleg a kutatás metodikai nehézségében rejlik. „Az iskolai tanulás motivációjára irányuló kutatások többsége a tanulót mozgósító indítékok és késztetések vizsgálatára korlátozódik. A legtöbb pszichológus a motiváció fogalmát használva nem azokra a tényezőkre és helyzetekre utal, amelyekkel a motivációs állapot létrehozható a tanulóban, hanem a motiváció többnyire retroaktív vizsgálat révén kimutatható indítékaira vonatkoztatja, alábecsülve ily módon a tanulás és motiváció elválaszthatatlan dinamikus kapcsolatát" — összegzi Lazar A. (1980). Kutatásunk az iskolai helyzetek (a mindennapi tevékenységtől elvonatkoztatva, mint pl. kontrollhelyzet, versenyhelyzet) motivációs tényezőinek feltárásához kíván hozzájárulni. Azokra a lehetőségekre próbálunk rávilágítani, amelyek a tanulásra jellemző motivációs helyzetek létrehozására alkalmasak és elősegítik a belső indítékok mozgósítását, fokozását, a belső feszültség kialakítását. Kutatásunk alapját Lazar A.: Motivációs helyzetek, tanulási eredmények (1980) munkája képezte. Az általa vizsgált motivációs helyzetek közül mi csupán két terület elemzésével foglalkozunk, választ keresve arra a kérdésre, hogy a matematikatanulás eredményességét hogyan befolyásolja a kontroll- illetve a versenyhelyzet.

2. A mérés eszköze, résztvevői

A két motivációs helyzet összehasonlító elemzésére az 1999-es tanévben Mezőcsáton megrendezett *Többet ésszel* ... matematikaverseny teremtett lehetőséget. A tanulók évfolyamok szerinti teljesítménye (5—8. osztály) biztosította a **versenyhelyzet** mint motivációs helyzet tanulási eredményét. A versenyre szerkesztett feladatlapokat, javítási útmutatókat felhasználva elvégeztük a mérést

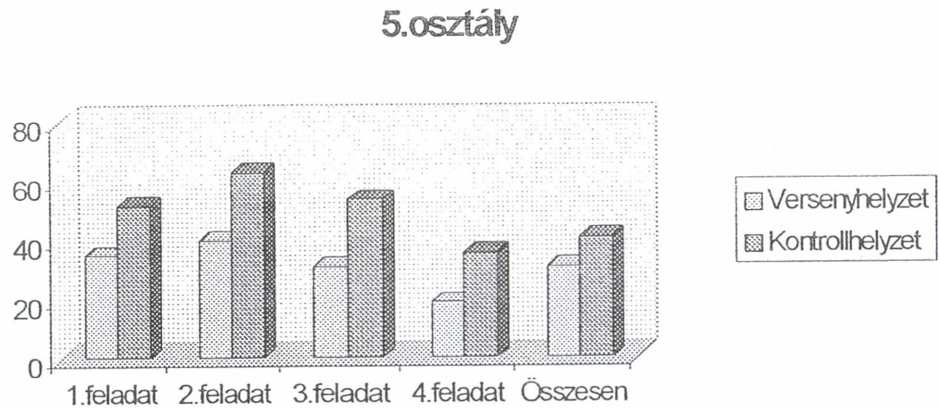
kontrollhelyzetben is. A kontroll motivációs helyzetet úgy biztosítottuk, hogy a feladatlapokat előre kiosztottuk a tanulóknak azzal az utasítással, hogy azokat otthoni munkában oldják meg. Az elvégzett munkájukat a következő napon a matematikaórán ellenőrizni fogjuk.

Mivel a versenyen matematikából jó képességű tanulók vettek részt (tanáraik szerint jó képességűnek tartott), ezért tagozatos osztályokat vontunk be a kontrollhelyzetű mérésünkbe: Általános Iskola, Uszód (108 fő), Református Általános Iskola, Mezőcsát (73 fő), Általános Iskola, Szeghalom (154 fő).

A **mérésünk célja** a tanulók teljesítményének összehasonlítása, a különböző motivációs helyzetek hatékonysági sorrendjének megállapítása évfolyamonként.

3. Az 5. osztályos tanulók teljesítménye a két motivációs helyzetben

Az 5. **osztályos tanulók** az aritmetikai gondolkodást mérő feladatban (1.) 35%-os teljesítményt nyújtottak a versenyen, és jelentős javulás (17%) következett be a kontrollhelyzetben mért teljesítményükben. Az induktív gondolkodást mérő 2. feladatban jobb teljesítményt nyújtottak a versenyen is, de ebben a feladatban is jelentős (14%-os) javulás mutatkozik a kontroll motivációs helyzet javára. A legnagyobb különbség a tanulók teljesítményében a problémamegoldó gondolkodást mérő 3. feladatban mutatkozik (23%). A geometriai számításokhoz kapcsolódó 4. feladatban még mindig igen alacsony a tanulók teljesítménye, de itt is 17%-os az eltérés, amely a 1. ábráról leolvasható.

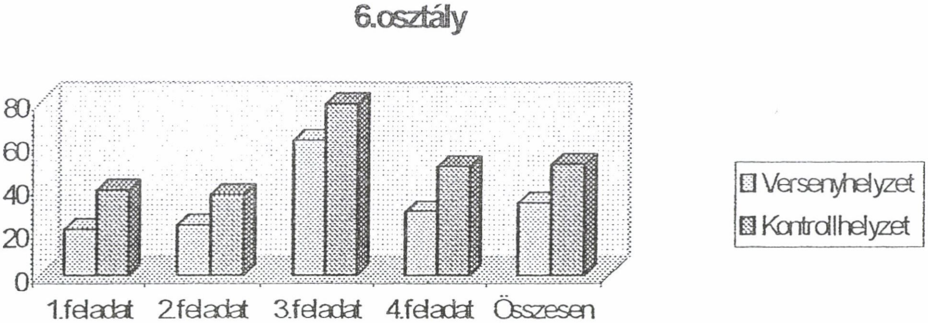


1. ábra

4. A 6. osztályos tanulók teljesítménye a két motivációs helyzetben

A **6. osztályos** tanulók két motivációs helyzetben mért teljesítményénél is hasonló eltéréseket kaptunk, mint az 5. osztályosoknál. A legjelentősebb javulást a problémamegoldó gondolkodást mérő 4. feladat esetén tapasztaltuk. A legkisebb különbség itt is az induktív gondolkodást mérő 2. feladatnál mutatkozik, de még ez is jelentősnek (14%) mondható (2. ábra).

A két osztály között mutatkozó hasonló eltérések feltételezésünk szerint abból adódhatnak, hogy a feladatok analógiás feladatok voltak. A matematikai képességek azonos, illetve közel azonos területeit mérték mindkét osztálynál. A gyakorlati életből vett problémához kapcsolódik az első feladat. Az alacsony teljesítményszintet feltételezésünk szerint a szöveg megértése okozta. A tanulók figyelmetlenül olvasták el a feladatot, s ez okozta az elkövetett hibákat. Tapasztalataink szerint ez a korosztály jellemzően kivonatolja a számokat a szöveges feladatokból és azokkal végzi a műveleteket. Nem veszik figyelembe a szövegben lévő adatok közötti összefüggéseket, mert azok elemzésére nem fordítanak elegendő időt.

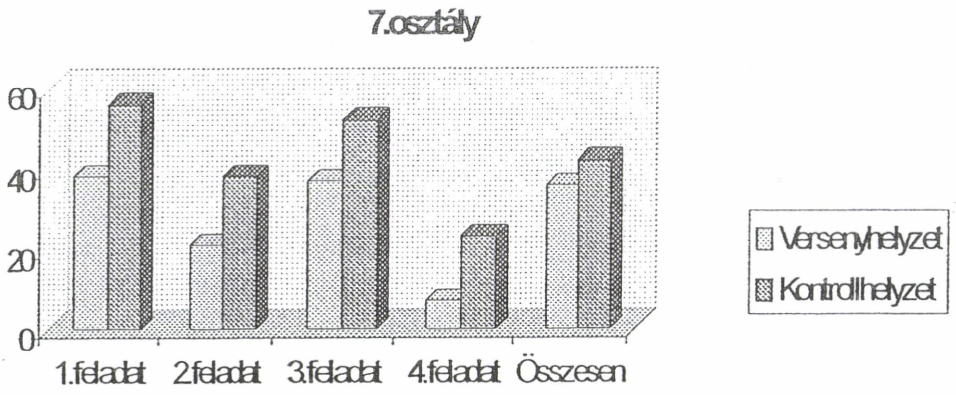


2. ábra

5. Az 7. osztályos tanulók teljesítménye a két motivációs helyzetben

A **7. osztályos** eredményekről elmondható, hogy a teljesítmények közötti különbségek nagyobbak minden feladat esetén verseny- és kontrollhelyzetben egyaránt. A nagyobb eltérés azt jelzi számunkra, hogy a matematikai képességeket nagyobb érzékenységgel méri a 7. osztályos feladatsor, mint az 5—6. osztályos. Meglepő, hogy a problémamegoldó gondolkodást mérő 4. feladatban még a versenyhelyzetben is igen alacsony teljesítmény született (7%). Feltételezzük, hogy ennek oka az lehet, hogy a szokásos iskolai feladatok között ritkán fordulnak elő ilyen problémák. Ennek ellenére számottevő javulást mutat a kontrollhelyzetben nyújtott teljesítménynívó. Mindez azt jelenti, hogy a különböző motivációs helyzetekben a tanulók matematikai képességei különböző mértékben fejlődnek. Fontos információt nyújthatnak ezek az adatok a szaktanár számára a feladatsorok tervezésekor. Minden feladatnál elmondható, hogy differenciáltak a teljesítmények a helyzeteket illetően.

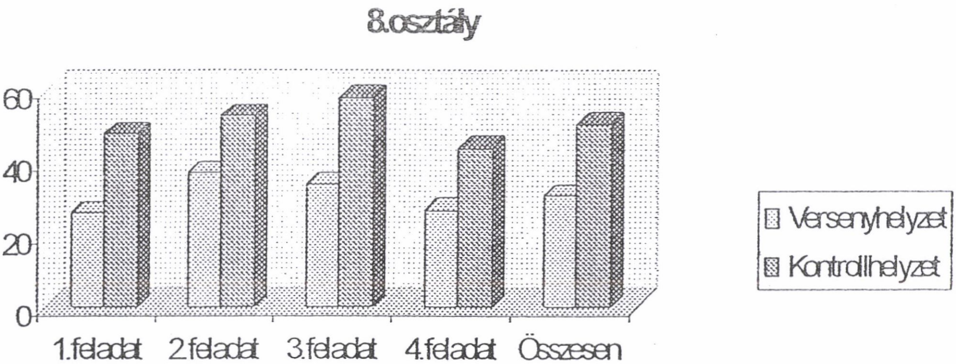
Összességében megállapíthatjuk, hogy a kontrollhelyzetben mért teljesítmények jobbak, mint a versenyhelyzetben mértek (3. ábra).



3. ábra

6. A 8. osztályos tanulók teljesítménye a két motivációs helyzetben

A 8. osztályos tanulók teljesítményeiről hasonló megállapításokat tehetünk, mint az előző osztályok esetében. Eltéréseket is láthatunk, amelyek közül említést érdemel az a tény, hogy a problémamegoldó gondolkodást mérő 1. és 3. feladatban kontrollhelyzetben és versenyhelyzetben jelentősebb javulás (22%) mutatkozik, mint az alsóbb évfolyamoknál (4. ábra).



4. ábra

7. Összegzés

A két motivációs helyzetben elért teljesítményekről megállapíthatjuk, hogy az 5., 6., 7. és 8. osztályos tanulók kontrollhelyzetben egyértelműen jobb eredményt értek el, mint versenyhelyzetben. A teljesítményeket kétmintás t-próbával ellenőriztük, amely minden osztály esetén szignifikáns ($p < 0,001$).

Minden évfolyamnál egyértelmű javulás mutatkozott a kontroll motivációs helyzet javára. A tehetséggondozó munka gyakorlatában a módszerek megválasztásánál célszerű figyelembe venni a különböző helyzetek differenciált hatékonysági sorrendjét.

Végeztünk méréseket monoton- és játékos helyzetben is. Az adatok feldolgozása során igen erős eltérések adódtak azonos képességű differenciált helyzetben dolgozó tanulók teljesítményeiben. Ezek részletes elemzésével következő tanulmányunkban foglalkozunk.

Irodalom

[1] Ketskeméthy László & Izsó Lajos, Az SPSS for windows programrendszer alapjai, Felhasználói és oktatói segédlet, Partner Bt. Budapest, 2000.

[2] Lazar A., Motivációs helyzetek, tanulási eredmények, Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

[3] Orosz Gyuláné, Matematikai képességek fejlődését befolyásoló tényezők, PhD értekezés, Debrecen, 2001.

[4] Takács Gábor—Takács Gáborné : A tanulói motiváció erősítése az alapfokú matematika tanításban. *Matematika tanítása*, 3. szám, (1988).

Orosz Gyuláné
Károly Eszterházy College
Department of Mathematics
Leányka str. 4.
H-3300 Eger, Hungary
e-mail: ogyne@ektf.hu

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae 28 *(2001) 107–113*

FELSŐ TAGOZATOS DISZKALKULIÁS TANULÓK SEGÍTÉSE

Szilák Aladárné (Eger, Hungary)

Abstract. Hilfe für die discalculierischen Schüler, die von 5. bis 8. Klasse besuchen. Die Abhandlung faβt die auserschulische Entwicklungsmöglichkeiten der discalculierischen Schüler zusammen, die die von 5. bis 8. Klasse besuchen. Die Essay stellt die Planung, Methoden, Mittel, Ergebnisse der lehrplanlich wohlbegründete Beschäftigungen vor.

1. A téma választásáról

A matematikatanárnak nemcsak tehetséges, jó és átlagos képességű tanítványai vannak, hanem nagyon gyengék is, akik tartós segítségre szorulnak. Ez utóbbiak matematikatanulási nehézségekkel küszködnek, s a szakirodalom diszkalkuliásoknak nevezi őket. Egyre több olyan iskola van, ahol az ilyen gyerekeket tanórán kívüli, speciális fejlesztő foglalkozásokon próbálják felzárkóztatni az osztályfoknak megfelelő minimumszintre. Alsó tagozaton többnyire a logopédusok végzik ezt a munkát, felső tagozaton a matematikatanárok tudnak szakszerűen foglalkozni ezekkel a tanulókkal. Mivel a matematika tanításán túl speciális módszerekre, eszközökre, fejlesztésekre épül a terápia, több felkészülést igényel a tanártól is. A tanárképzés során matematika tantárgypedagógiából a képzési anyag túlzsúfoltsága, az idő rövidsége miatt sajnos keveset foglalkozunk ezzel a problémával. Több matematika szakos hallgatóval szakdolgoztunk viszont ezen a területen eredményesen. Korábbi cikkünkben [5] bemutattuk a diszkalkulia jellemzőit, a vizsgálati szempontokat. A pedagógiai vizsgálathoz feladatlapokat készítettünk 5., 6. osztályos tanulóknak természetes számok, egész számok, törtek témákhoz. A vizsgálatokat diszkalkulia-gyanús tanulókon elvégeztük, a diszkalkuliára jellemző hibákat összegyűjtöttük. E tanulmányban a felzárkóztató, fejlesztő munkánkat, valamint e munkánk során szerzett tapasztalatainkat szeretnénk összefoglalni.

2. A fejlesztő, felzárkóztató foglalkozások tantervi háttere

(a) Különleges bánásmódot igénylő, tanulási nehézségekkel küzdő (más fogyatékos) tanulók iskolai fejlesztésének elvei:

A Nemzeti Alaptanterv a más fogyatékos tanulók (diszlexiás, diszgráfiás, diszortográfiás, diszkalkuliás, hiperaktív) iskolai oktatásának is alapdokumentuma, amely a kerettanterveken és a pedagógiai programokon keresztül szabályozza a fejlesztés és a tanítás céljait, tartalmait. A NAT alkalmazását a diszkalkuliás tanulók esetében a "Fogyatékos tanulók iskolai oktatásának tantervi irányelvei" (2. számú melléklet a 23/1997. (VI.4.) MKM rendelethez) segíti, amely meghatározza:

— A NAT minimális követelményeinek módosítási lehetőségeit;

— a műveltségi tartalmak kijelölésekor egyes területek elhagyásának vagy egyszerűsítésének, illetve új területek bevonásának lehetőségeit;

— a tananyagátadás és a fejlesztés szokásosnál nagyobb mértékű időbeli meghosszabbításának lehetőségeit.

(b) A NAT és a kerettantervek alkalmazása a helyi tantervek készítésénél:

A részképességzavar tüneteit mutató tanulók sajátos fejlesztésének elvei nem indokolják a NAT követelményeinek a módosítását. A tanulók e csoportja ugyanis képes a minimum követelményeket teljesíteni. Tanulási zavaraik a Közoktatási Törvény adta lehetőségeken belül kezelhetők. A diszkalkuliás tanulók esetében a matematika műveltségterület minimális követelményeinek a teljesítése kompenzációs lehetőségeket, speciális módszereket, meghosszabbított tanítási időt, gyógypedagógiai segítséget feltételez.

A vizsgált tanulók hibáit, hiányosságait és a fentieket figyelembe véve általunk kidolgozott helyi tanterv-részlet alapján terveztük meg a fejlesztő foglalkozásokat 5., 6. osztályra. Mivel a számolási nehézségek (zavarok) a legjellemzőbbek az ilyen tanulókra, így a megfelelően kialakított számfogalom, a bővülő számkörben a műveletek végzése és begyakorlottsága alapfeltétele a továbbhaladásuknak. A helyi tantervben éltünk a tananyagátadás időbeli meghosszabbításának lehetőségével is. Így diszkalkuliás tanulóink körülbelül 8. osztályra jutnak el egy olyan minimum szintre, amely egy átlagos képességű tanulónál 6. osztály végén elvárható. Nagyon fontos lenne, hogy a fejlesztő terápiák programjai minden olyan iskola pedagógiai programjainak tartalmi elemeivé válnának, ahová más fogyatékos (pl. diszkalkuliás) tanulók nagyobb létszámban (10 százalék) járnak.

(c) Helyi tanterv-részlet:

Tantervi célok, feladatok, fejlesztések:

— Olyan szintű ismeretek közvetítése a cél, amelyek a mindennapi élethelyzetekben előforduló matematikai feladatok önálló megoldását lehetővé teszik.

— Jártasság kialakítása a műveletek végzésében a racionális számok halmazában.

— Pozitív attitűd kialakítása a számok világához.

— Az analógiás gondolkodás, az elvonatkoztatás, az általánosítás előkészítése, segítése változatos tárgyi tevékenységekkel, tapasztalatszerzéssel.

Tananyag; 5., (6.) osztály:

(1) Számfogalom, számköri ismeretek:

— A természetes számkör bővítése 1000-ig (10000-ig).
— A tízes számrendszer 1000-ig (10000-ig).
— A számok írása, olvasása, helyük a számegyenesen.
— A számok egyes, tízes, százas szomszédai.
— Negatív számok fogalma, ábrázolásuk a számegyenesen.
— A tört fogalma, előállítása tevékenységgel, törtszám írása, olvasása, törtek összehasonlítása.

(2) Műveletek:

— Szóbeli összeadás, kivonás, pótlás kerek százasokkal (ezresekkel).
— Szorzó-, bennfoglaló táblák.
— Írásbeli összeadás, kivonás háromjegyű (négyjegyű) számokkal.
— Összeg, különbség változásai.
— Két-, és háromjegyű számok szorzása egy, majd kétjegyű szorzóval.
— Két-, háromjegyű számok osztása egyjegyű osztóval.
— Egész számok összeadása, kivonása, szorzás, osztás eszközzel.
— Műveletek törtekkel: azonos nevezőjű, illetve könnyen azonos nevezőjűvé alakítható törtek összeadása, kivonása.
— Törtek összehasonlítása, az egyszerűsítés, bővítés előkészítése.

Követelmények:

— Legyen biztos számfogalma ezres (tízezres) számkörben.
— Értse a negatív szám, törtszám fogalmát.
— Tudjon készségszinten összeadni, kivonni szóban ezres számkörben.
— Tudja a szorzó-, bennfoglaló táblákat készségszinten.
— Legyen jártas az írásbeli szorzásban, osztásban egyjegyű szorzó és osztó esetén.
— Legyen jártas a természetes számok nagyság szerinti összehasonlításában ezres (tízezres) számkörben.
— Tudjon különbségsorozatot folytatni mindkét irányban.

Megjegyezzük, hogy a fenti tanterv szerint tanuló diszkalkuliás tanulók tanórai munkájának irányítása, szervezése sok feladatot ró a matematikatanárra, ugyanis jelentős hátrányban vannak a többi társukhoz képest.

3. A diszkalkulia foglalkozások tervezése

(a) A foglalkozások célja, feladatai:

Vizsgálataink igazolták, hogy a számolási nehézségek, zavarok nagyon jellemzőek a diszkalkuliás tanulókra. Sajnos felső tagozaton is matamatikatanulási nehézségei lesznek az olyan gyerekeknek, akiknek alsó tagozaton gondjai voltak. Az ott megkezdett terápiát folytatni kell. Matematika szakos főiskolai hallgatóink, akik ezt a témát válsztották szakdolgozatként erre a fejlesztő munkára készültek fel. Jó lenne, ha az iskolákban minél több matametikatanár tudna foglalkozni a diszkalkuliás tanulókkal. Annál is inkább fontos a tanárok képzése, továbbképzése ezen a területen, mert nem jogszerű kisegítő iskolába, gyógypedagógiai intezetbe tanácsolni a tanulási zavarokkal küzdő (diszlexiás, diszkalkuliás, diszgráfiás stb.) gyerekeket, mivel tanításuknak, tanulásuknak helye az általános iskola, középiskola.

A foglalkozások célja: A diszkalkuliás gyerek felzárkóztatása az osztályfoknak megfelelő minimum szintre, hogy visszakerülhessen a tanórai munkába.

Mesterházi Zsuzsa szerint: "A speciális diszkalkulia foglalkozások célja a matematika tanulásához szükséges biztos alapok megteremtése, a megfelelő képességek fejlesztése, jártasságok, készségek kialakítása, jól begyakorolt, s később az elvonatkoztatásra alkalmas eszközrendszer kidolgozása, s legfőképpen azon belső feltételek megteremtése a gyermekekben, amelyek a matematika tanulásához nélkülözhetetlenek." [4]

A foglalkozások feladatai:

— Érzékelés, észlelés, figyelem, emlékezet, gondolkodás és beszéd fejlesztése.
— Saját testen, síkban, térben, időben való tájékozódás segítése.
— A számfogalmak kialakítása N-ben, Z-ben, Q-ban.
— A műveletek és inverzeiknek értelmezése, szóbeli, írásbeli műveletvégzések technikájának kialakítása.
— Szöveges feladatok megoldásának előkészítése.
— Az absztrahálás folyamatának előkészítése sok kísérlettel, tárgyi tevékenységgel, tapasztalatszerzéssel.
— Motiválás sok eszközzel, érdekes, játékos feladatokkal, a szorongás oldása.

Megjegyezzük, hogy a fenti feladatok a tantervi tartalmak és követelmények minimumára vonatkoznak, és ez a számolás. Ha ezt a tanuló nem tudja készség szinten, akkor bonyolultabb matematikai ismeretek tanításának semmi értelme, erdménye nincs. Nagyon alapos munkát, aprólékos kidolgozást, körültekintést igényel egy diszkalkuliás tanulóval való foglalkozás. Sajnos az eredmény nem mindig lesz látványos és maradandó. A diszkalkuliás tanulók zöme szinte soha nem tud elszakadni az eszközeitől (pl. ujjszámolás), újabb számhalmaz tanulmányozása további megpróbáltatások elé állítja, és kezdődhet minden majdnem előlről. Lehet, hogy a természetes számok halmazában már el tud ugyan igazodni, de az egész számok, törtek csak csoda folytán lenne problémamentes.

Nem minden foglalkozáson fordul elő egyenlő súllyal minden feladatkör. A feladatterületek arányát mindig az adott rövid távú fejlesztési cél határozza meg.

(b) A foglalkozások szervezése, tartalma, módszerei, eszközei:

Azt tapasztaltuk, hogy tanulónként különbözőek a matematikatanulási nehézségek, így egyszerre egy-két tanulóval lehet csak foglalkozni tanórán kívül, heti 2-3 alkalommal, 20-25 perces időtartamban.

Amikor összeállítottuk a foglalkozások tervezeteit pontosan tudtuk, hogy kiket fogunk fejleszteni, és tanulóinknak melyek a legsúlyosabb hiányosságai. A helyi tanterv-részlet alapján a tananyagot három modulba (természetes számok, egész számok, törtek) soroltuk. E modulok egymástól teljesen elváltak, egyikről a másikra való hivatkozásokat nem tartottuk szerencsésnek, ugyanis a diszkalkuliások analógiás gondolkodásának gyengesége miatt az egymásba épülés nehezítette volna a munkánkat. Megvizsgált és kiszűrt tanulóinknál minden modulhoz kapcsolódva több területen találtunk fejlesztési feladatokat. Így a természetes számokhoz a szóbeli műveletvégzések, az egész számokhoz az összeadás-kivonás (összevonás), törtekhez a pozitív törtek összehasonlítása (rendezése) került kidolgozásra, fejlesztésre. Egy-egy feladatot 10-12 foglalkozás keretében 6 hét alatt próbáltunk teljesíteni.

A tanulók 5., 6., 7. osztályosak voltak, ugyanakkor a tananyag és a követelmények pl. a természetes számokhoz kapcsolódva 3. osztályos gyerekhez méretezett. Az egyes foglalkozások feladatai pl. a szóbeli műveletvégzések terápiáján az alábbiak voltak: szóbeli összeadás; szóbeli összeadás és kivonás műveletének kapcsolata; szóbeli kivonás; szóbeli szorzás; szóbeli szorzás és osztás műveletének kapcsolata; szóbeli osztás; szóbeli műveletek gyakorlása.

Minden foglalkozást részletesen megterveztünk, mely tervek az egyes foglalkozások konkrét példáinak leírásán túl tartalmazták a fejlesztési feladatokat, módszereket, taneszközöket. Mivel a cikk terjedelme nem teszi lehetővé az egyes foglalkozások részletes leírását, így röviden összefoglaljuk azokat a módszereket, speciális eszközöket, amelyeket alkalmaztunk: Sok szemléltetés, tárgyi tevékenység, tapasztalatszerzés, gyakorlás az eszközökkel, ismétlés, motiválás játékos feladatokkal. Taneszközeink között helyt kapott minden olyan tárgyi modell, eszköz (helyiértéktáblák, művelettáblák, számkártyák, korongok, képösszerakók, számológép, számítógép, szorobán, feladatlapok, munkalapok stb.), amely közelebb vitte diszkalkuliás tanulóinkat a tőlük elvárható ismeretek megszerzéséhez. Mindegyik modullal az alábbi fejlesztéseket próbáltuk megvalósítani:

— Analizáló, szintetizáló képesség fejlesztése.
— Az analógiás gondolkodás fejlesztése, a transzfergyengeség kiküszöbölése.
— Figyelmetlenség, fáradékonyság leküzdése, rövidtávú emlékezet fejlesztése.
— Kommunikációs képesség javítása.
— Az induktív következtetés, mint gondolkodási módszer előkészítése.

4. Eredményeink és további fejlesztési terveink

A fejlesztő foglalkozásokat egri és vidéki iskolákban tanítási gyakorlatok során próbáltuk ki. Időnk rövidsége miatt mindhárom modult egy-egy tanulóval. Az eredmények várakozásunkon felüliek voltak. A kapott feladatokat tanári segítség nélkül, szinte hibátlanul oldották meg a gyerekek. Segédeszközt (művelettábla, helyiértéktábla, applikációs modell stb.) több esetben használtak, de az ezektől való elszakadást még nem várhattuk el. Mivel sok bátorítást, érdekes, játékos feladatokat kaptak, a "számolási szorongásaik" megszüntek. Szóbeli matematikai kifejezőképességük javult. Figyelmük—mivel csak velük foglalkoztunk—a matematikai feladatok felé irányult. Hamar elfáradtak, így a 20—25 perces foglalkozási időt nem lehetett megnyujtani.

Mivel ezek a tanulók 5., 6., 7. osztályosként a matematika órákon is részt kell, hogy vegyenek, további feladatainknak tartjuk a diszkalkuliás tanulók tanórai integrálásának (foglalkoztatásának) kidolgozását, a szintentartás lehetőségeit az egész tanéven keresztül végzendő, tanórán kívüli fejlesztő foglalkozásokkal párhuzamosan. Eddigi munkánk eredményei is azt mutatják, hogy végső megoldásként nem azt kell megcélozni, hogy ezek a gyerekek a "kisegítő iskolákban" végezzék tanulmányaikat, hanem az általános iskolában szakképzett tanárok segítségével sajátítsák el a tőlük elvárható matematikai alapműveltséget.

Irodalom

[1] Czeglédy I.—Orosz Gyné.—Szalontai T.—Szilák Ané.: Matematika tantárgypedagógia I., főiskolai jegyzet, Calibra Kiadó, Budapest, (1994).

[2] Dékány J.: Kézikönyv a diszkalkulia felismeréséhez és terápiájához, BGGYTF, Budapest, (1995).

[3] Grissemann H.—Weber A.: Speciális számolási zavarok, okok és terápia, Hans Huber Kiadó, Bern, (1982).

[4] Mesterházi Zs.: Diszkalkuliáról pedagógusoknak, BGGYTF, Budapest, (1996).

[5] SZILÁK ALADÁRNÉ: Matematikatanulási nehézségek, diszkalkulia. Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Math. **27** (2000), 113-123

Szilák Aladárné
Károly Eszterházy College
Department of Mathematics
Leányka str. 4.
H-3300 Eger, Hungary
e-mail: szilakne@ektf.hu

Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae **28** *(2001) 115–131*

FŐISKOLAI HALLGATÓK NÉZETEI A MATEMATIKAOKTATÁSRÓL

Orosz Gyuláné & Sashalminé Kelemen Éva (Eger, Hungary)

Abstract. The purpose of this paper is to give our student's belive about mathematics education. It consists of a short survey of the research work which deals with the students' view. We show the participants and the equipments. Our results are based on opened and closed questions.

1. Elméleti alapok

A tanárok és a tanulók matematikáról alkotott nézeteinek kulcsszerepe van azon kutatásokban, amelyek próbálják feltárni a tanárok és a tanulók matematikához való viszonyulását. A tanulói vélemények feltárására főleg az elmúlt évtizedekben került sor.

A. H. Schoenfeld (1989) vizsgálatai kimutatták, hogy az algoritmusok és műveletek ismerete nem garantálja szükségszerűen a matematikai problémák megoldásának sikerességét. A feladatok megoldásakor a teljesítményt más tényezők is befolyásolják, mint például a lelkiállapot vagy a megoldási módszer típusa. Rámutatott továbbá, hogy a matematika hatékony elsajátításának gátja lehet az a „hiedelemrendszer", amely a gyerekekben él a matematikáról és annak oktatásáról.

F. K. Lester (1989) szerint ezek a „hiedelmek" alakítják ki az egyén szubjektív nézeteit önmagáról, a matematikáról, a problémamegoldásról. A szubjektív (tapasztalaton alapuló) implicit tudás (és érzelem) az összetevője az egyén matematikáról alkotott véleményének. A tudatos hiedelmek azonban különböznek az ún. primitív hiedelmektől, amelyek általában öntudatlanok. Az egyén hiedelmeinek spektruma rendkívül széles, és komponensei befolyásolják egymást.

T. F. Green (1971) például a hiedelmek látszólagos logikus struktúrájáról beszél. Az egyén hiedelmei egy hiedelemrendszerben csoportosulnak, amely keveredik az egyén tudásrendszerével. A hidelemrendszert a továbbiakban úgy fogjuk tekinteni, mint egy matematikai szemléletet, mely a matematikatanítás szempontjából talán informatívabb.

A. H. Schoenfeld (1989) a „matematikai világnézet" kifejezést találta megfelelőnek. A további kutatók Erkki Pehkonen és Günter Törner (1996) ezt a kifejezést csiszolták. Szerintük az egyén matematikai szemlélete hiedelmek és elméletek széles skálájából tevődik össze, amelyeket az alábbi négy fő kategóriába sorolnak:

1. a matematikáról kialakított nézetek,
2. a matematikán belül önmagunkról kialakított nézetek,

3. a matematika tanításáról kialakított nézetek,
4. a matematikatanulásról kialakított nézetek.

R. Borasi (1990) megállapítja, hogy a hiedelmek igen erősen befolyásolják azt, hogy a gyerekek hogyan tanulják és használják a matematikát, s éppen ezért gátat is szabhatnak az effektív tanulásnak. Szerinte azok a tanulók, akiknek szigorú és negatív irányú véleményük van a matematikaoktatásról, könnyen passzívvá válnak, a megértésnél erősebben hangsúlyozzák a memória szerepét a matematika tanulásában. Ugyanakkor a matematikatanulásban szerzett tapasztalataik is befolyásolják, formálják véleményüket.

M. L. Frank (1985) a matematikáról alkotott nézeteket olyan szabályozórendszerként ábrázolja, amelyen belül az egyén gondolkodik és cselekszik, másrészt befolyásolja a matematikai teljesítményét. Egy diák számára a matematika elsősorban a számításokat jelenti, amely valószínűleg az általános iskola egyoldalú, számolásorientált tanításának következménye. Azokat a feladatokat, amelyek bonyolultabb gondolkodási műveleteket igényelnek, a diák csak nehezen vagy egyáltalán nem tudja megoldani. A társadalmi hiedelmi rendszer mint háttértényező központi szerepet játszik a tanulók gondolkodásában és cselekedeteiben. A matematika terén szerzett korábbi tapasztalataik nem befolyásolják őket tudatosan. A matematikatanulás során a motiváció és a követelményrendszer nem kapcsolódik mindig matematikai nézeteikhez.

R. G. Underhill (1988) a vélemények hálójáról beszél. A matematikatanárnak, az osztálytársaknak, barátoknak, szülőknek, rokonoknak megvan a saját elképzelése a matematika oktatásáról, tanulásáról. Ezek a nézetek különböző mértékben és eltérő módon befolyásolják a diákok véleményét. A tanulói vélemények feltárása azért szükséges, mert a diákok véleményének ismerete lehetőséget teremt a tanároknak arra, hogy jobban megértsék a tanulók gondolkodását és cselekedeteit, illetve segítsék őket a tanulásban. A metakognitív képességek között vannak olyan kapcsolatok, melyek szerves részét képezik az őket befolyásoló hiedelemrendszernek.

E. Pehkonen (1994) a hiedelmek egy másik megközelítéséről beszél, mivel az ember matematikáról kialakult szemlélete a nézetein keresztül tükröződik, így pontos képet kaphatunk a matematikatanulásban szerzett tapasztalatairól, és közvetve értékelhetjük tudását. A diákok véleménye kifejezheti a tanításukban nyert tapasztalataikat, tehát általánosságban a tanárok és tanulók nézeteiben tükröződik az egész iskolarendszer működése és az egyén társadalmi érzékenysége is. Ha célul tűzzük ki a matematikaoktatás fejlesztését, számításba kell vennünk a diákok és a tanárok véleményét is. A gondot általában a tapasztalt tanárok merev hozzáállása és megrögzött tanítási módszerei jelenthetik, melyek gátat szabhatnak a változtatásoknak. Az is előfordulhat, hogy a diákok hozzáállása nem megfelelő, vagy a fejlesztéshez szükséges feltételek nem adottak. Ha a diákoknak merev szokásaik vannak a matematikatanulással kapcsolatban, akkor egy másik megközelítés valószínűleg zavarni fogja őket. Éppen ezért véleményüknek központi szerepe van, ha változtatni akarunk az oktatásukon.

A. G. Thompson (1992) azt vizsgálja, hogy a tanulók szemlélete hogyan fejlődik, és milyen tényezők hatnak leginkább a fejlődésre. Szerinte a fejlődést legalább három szinten (0, 1, 2) a következő kérdésekre korlátozva kell vizsgálni:

(a) Mi a matematika?

(b) Hogyan tanítják, illetve tanulják a matematikát?

(c) Mi a tanár, illetve a diákok szerepe, feladata?

(d) Mik az objektív értékelés kritériumai?

A szinteket a következő példával érzékeltethetjük: Az alsó tagozatosak arra a kérdésre, hogy „Mi a matematika?" valószínűleg a következő választ adnák: „a matematika számolás". Ők helyezkednek el tehát az elemi szinten (0 szint). Egy egyetemistától vagy egy matematikustól a következőhöz hasonló választ várnánk: „a matematika nem más, mint különböző, egymással szorosan összefüggő fogalmak, állítások, műveletek stb. komplex rendszere". Ők állnak tehát a legmagasabb szinten (2). Habár Thompson szintekről beszél, nem tekinthetők azoknak, mivel kizárják egymást. Úgy értelmezhetjük, hogy mindegyik feltételezi az előzőt.

A kutatások többsége a tanulók matematikáról kialakított szemléletének megismerésére és jellemzésére törekszik (statikus szint), néhány vizsgálat azonban a vélemények összetevői közötti korrelációt vizsgálja (dinamikus szint).

Saját kutatásunkban célul tűztük ki főiskolai hallgatóink matematikaoktatásról kialakított véleményének feltárását. Egy korábbi vizsgálatunk 8. osztályos tanulók szemléletének megismerésére irányult. Dolgozatunkban ismertetjük a tanulók és tanárjelöltek véleménystruktúrája közötti korrelációt.

2. A főiskolai hallgatók nézeteinek feltárása kérdőíves módszerrel

A tanulói nézetek feltárására irányuló nemzetközi vizsgálatokba Magyarország (1991) is bekapcsolódott és akkor hetedik osztályos gyerekek vettek részt a mérésben. E. Pehkonen professzor javaslatára saját kutatásunkban megismételtük a mérést a nyolcadikosok körében. A fejlődéslélektan szerint ebben az életkorban már kellő kritikai érzékkel szemlélik a gyerekek a körülöttük lévő világot, és megbízhatóbban tudnak véleményt formálni az őket ért hatásokról. A professzor segítségével eredményeinket össze tudtuk hasonlítani a finn és a korábbi magyar vizsgálatok eredményeivel.

Az adatgyűjtés során kézenfekvőnek tűnt, hogy végezzük el a méréseket a tanárszakos főiskolai hallgatóink körében is.

(a) A vizsgálatok résztvevői

A 2000-2001-es tanévben a mérésbe összesen 182 hallgatót vontunk be az Eszterházy Károly Főiskoláról az alábbiak szerint.

— számítástechnika (I. évfolyam, 37 fő),

— gazdaságismeret (I. évfolyam, 31 fő),

— gazdálkodási (I. évfolyam, 28 fő),
— matematika (I. évfolyam, 36 fő),
— matematika (II. évfolyam, 30 fő),
— matematika (III. évfolyam, 8 fő),
— matematika (IV. évfolyam, 12 fő),

(b) A vizsgálatok eszköze

Mint a korábbi vizsgálatainkban, most is B. Zimmermann, a német matematikaoktatás egyik kutatója által összeállított kérdőívet használtuk, amelyet egy német—finn közös vizsgálathoz fejlesztettek ki (Pehkonen és Zimmermann, 1990). A kérdőívnek alapvetően két része van. Az első kérdés 32 itemből áll, ötfokú egyetértési skálán megfogalmazható értékítéleteket tükröz a matematikaoktatás különböző aspektusairól. (A 32 item előtt ez áll: „Az igazi matematikaoktatáshoz hozzátartozik ...", és ezután jön a 32 befejező mondatrész; a skálán az 1 = teljesen egyetértek, a 2 = egyetértek, a 3 = nem tudom, a 4 = nem értek egyet, az 5 = egyáltalán nem értek egyet, tehát minél kisebb a válaszok összegzéséből adódó átlag, a gyerekek annál inkább egyetértenek a kijelentés második részével. Az egyes itemek megfogalmazását az eredmények bemutatásakor láthatjuk majd részletesebben.

A kérdőív másik része két nyílt kérdést tartalmaz. Ezek egyike a matematika tanításáról szerzett jó és rossz tapasztalatok saját szavakkal történő megfogalmazására kéri a gyerekeket, a másik pedig azt kérdezi, hogy milyen matematikatanítást szeretnének.

3. A hallgatók nézetei a zárt kérdésekre adott válaszok alapján

Minthogy a kérdőíven igen sok kérdés volt, a kompakt elemzéshez a faktoranalízis statisztikai módszerét alkalmaztuk (a finn és a korábbi magyar vizsgálathoz hasonlóan). Megpróbáltuk feltárni, hogy milyen tényezőkben fogható meg a hallgatók matematikaoktatásáról kialakult véleménye.

Az elsődleges analízissel a vélemények 11 faktorból álló csoportosítása adódott, amely nehezen interpretálható. Az adatok feldolgozását az SPSS 9.0 verziójával végeztük. A másodrendű faktoranalízis ötre redukálta a faktorok számát. A következő interpretálásban a faktorok elemeihez a két faktoranalízisből kapott faktorsúlyok szorzatát rendeltük hozzá. Ezzel a módszerrel az alábbi faktorsúlyokat és véleménystruktúrát kaptuk a hallgatók válaszainak adataiból. A válaszoknak a statisztika módszerével rendezett struktúrája azt mutatja meg, hogy milyen átfogóbb jellemzőkkel írhatók le a sok válasszal körülírt vélemények és milyen dominanciával szerepelnek az egyes válaszok.

(a) Az A faktor

Az igazi matematikaoktatáshoz hozzátartozik ...	
18. ... az, hogy annyi hasonló feladat legyen, amennyi csak lehetséges.	$0,57 \cdot 0,33 = 0,19$
3. ... a mechanikus számolás.	$0,71 \cdot 0,21 = 0,15$
32. ... az, hogy minden esetben a tanár mondja meg pontosan, hogy a gyerekeknek mit kellene csinálniuk.	$0,59 \cdot 0,39 = 0,23$
29. ... az, hogy annyi gyakorlás legyen, amennyi csak lehetséges.	$0,55 \cdot 0,39 = 0,21$
17. ... az, hogy az olyan különböző témák, mint a százalékszámítás, a geometria, az algebra, teljesen külön legyenek tanítva, ezeknek semmi közük egymáshoz.	$0,58 \cdot 0,36 = 0,21$
27. ... az, hogy a gyerekek önállóan oldják meg a feladatokat, tanári segítség nélkül.	$0,74 \cdot 0,32 = 0,24$

Ez a faktor azt jelzi, hogy a hallgatók a matematikatanulást elsősorban önállóan végzett számoláscentrikus tevékenységnek vélik.

(b) A B faktor

Az igazi matematikatanításhoz hozzátartozik ...	
16. ... az, hogy mindig minden pontosan be legyen bizonyítva.	$0,59 \cdot 0,22 = 0,13$
26. ... az, hogy a feladatok megoldása során a tanár magyarázzon meg minden lépés pontosan.	$0,60 \cdot 0,44 = 0,26$
30. ... az, hogy minden gyerek a saját lehetőségeihez képest mindent megértsen.	$0,60 \cdot 0,40 = 0,24$
5. ... az, hogy mindig mindent olyan pontosan kell kifejezni, amennyire csak lehet.	$0,70 \cdot 0,28 = 0,20$
8. ... az, hogy szigorú fegyelmet követel.	$0,62 \cdot 0,30 = 0,19$
13. ... az, hogy a gyerekek kérdésekkel és problémákkal jöhessenek elő, és azokat meg is beszéljék az órán.	$0,60 \cdot 0,38 = 0,23$
11. ... az, hogy minden gyerek megértse.	$0,61 \cdot 0,57 = 0,35$
31. ... az, hogy a gyerekek időnként csoportokban dolgozzanak együtt.	$0,61 \cdot 0,46 = 0,28$

Ez a faktor azt mutatja, hogy a matematikaoktatásban a megértésnek, a pontosságnak, a bizonyosságnak a jelentőségét hangsúlyozzák a hallgatók.

(c) A C faktor

Az igazi matematikaoktatáshoz hozzátartozik ...

28. ... különböző tárgyak (pl. egy doboz) megépítése és a velük való munka.	$0,63 \cdot 0,31 = 0,20$
6. ... az ábrák rajzolása.	$0,62 \cdot 0,41 = 0,25$
14. ... a zsebszámológép használata.	$0,67 \cdot 0,28 = 0,19$
19. ... az, hogy olyan feladatokkal foglalkozzunk, amelyeknek gyakorlati hasznuk van.	$0{,}53 \cdot 0,28 = 0,15$
15. ... az, hogy a tanár rögtön segítsen, ha a tanulónak nehézsége támad.	$0,64 \cdot 0,52 = 0,33$

Ezeknek a válaszoknak az egy faktorban való dominanciája azt mutatja, hogy a hallgatók véleménye szerint a matematikatanításnak a konkrét dolgokra kell építenie.

(d) A D faktor

Az igazi matematikaoktatáshoz hozzátartozik ...

7. ... az, hogy a helyes választ mindig gyorsan kell megtalálni.	$0,58 \cdot 0,37 = 0,21$
2. ... az, hogy a helyes válasz mindig fontosabb, mint a megoldás menete.	$0,62 \cdot 0,34 = 0,21$
12. ... az, hogy sok mindent tanuljunk meg fejből.	$0,63 \cdot 0,45 = 0,28$
10. ... az, hogy mindig van olyan megoldási menet, amelyet pontosan kell követnünk ahhoz, hogy biztosan eljussunk az eredményhez.	$0,52 \cdot 0,27 = 0,14$
24. ... az, hogy rendszerint nem csak egy megoldási mód van.	$0,60 \cdot 0,17 = 0,10$
4. ... az, hogy a gyerekek időnként találgathatnak, megsejthetnek, próbálgathatnak.	$0,67 \cdot 0,24 = 0,16$

Ezeknek a kijelentéseknek az összetartozása azt jelzi, hogy a hallgatók a matematikaoktatást teljesítménycentrikusnak ítélik meg.

(e) Az E faktor

Az igazi matematikaoktatáshoz hozzátartozik ...

9. ... a szöveges feladatok megoldása.	$0,59 \cdot 0,38 = 0,22$
22. ... a terület- és térfogatszámítás (pl. a téglalap területe, a kocka térfogata).	$0,66 \cdot 0,42 = 0,28$
1. ... a fejben számolás.	$0,56 \cdot 0,48 = 0,27$

23. ... az, hogy sok erőfeszítést jelent a gyerekeknek.	$0,64 \cdot 0,13 = 0,08$
20. ... az, hogy csak a matematikában tehetséges gyerekek tudják megoldani a legtöbb feladatot.	$0,55 \cdot 0,46 = 0,25$
25. ... a játékok tanulása is.	$0,70 \cdot 0,55 = 0,39$
21. ... az, hogy nem mindig szórakoztató.	$0,68 \cdot 0,19 = 0,13$

Ebbe a faktorba azok a vélemények kerültek, amelyek a matematikaoktatás tartalmi aspektusait hangsúlyozzák és azok, amelyekkel a hallgatók a matematika tanulását komoly erőfeszítésként és kemény munkaként értékelik.

Ez az öt faktor jellemzi együttesen, hogy milyen alapokra épül a hallgatóknak a matematika oktatására vonatkozó véleményformálása.

A faktor: Önálló, számoláscentrikus tevékenység

B faktor: Fontos a megértés, a bizonyosság, pontosság

C faktor: Konkrét dolgokra építsen

D faktor: Teljesítménycentrikusság

E faktor: Erőfeszítés, kemény munka.

Az eredmények összehasonlítására azt az eljárást alkalmaztuk, hogy a faktorsúlyokkal súlyozott pontátlagok alapján kiszámítottunk egy súlyozott „faktorátlagot" és szórást, majd t-próbával megnéztük, hogy szignifikánsak-e a különbségek az így kapott átlagok között.

		átlag	szórás	t-érték
A faktor	T	1,239	0,257	−7,313
	H	0,571	0,123	4,873 **
B faktor	T	0,593	0,177	5,857 ***
	H	0,435	0,413	−0,454
C faktor	T	0,983	0,263	0,924
	H	0,482	0,198	−2,457 **
D faktor	T	0,649	0,225	9,952 ***
	H	0,520	0,398	−0,072
E faktor	T	0,441	0,224	1,497
	H	0,580	0,437	−0,061

(T = Tanuló, H = Hallgató)

A táblázat azt mutatja, hogy a saját vizsgálataink szerint az A, a B, C és a D faktorokban szignifikáns különbség van a tanulók és a tanárjelöltek véleményében. Egy korábbi vizsgálat szerint az A és a C faktorban szignifikánsak az eredmények. A hallgatók matematika oktatásáról alkotott képében meghatározó tényező az önálló, számításcentrikus tevékenység. Hangsúlyozzák a konkrét dolgok jelentőségét a matematikaoktatásban, amely szükségszerűen egy gyakorlatorientált és realisztikus oktatás iránti igényt valószínűsít.

4. A hallgatók nézetei a nyílt kérdésekre adott válaszaik alapján

A kérdőívek másik része két nyílt kérdést tartalmaz. Kíváncsiak voltunk arra, hogy az általános-, közép- és főiskolai tanulmányaik során milyen jó vagy rossz tapasztalatokat szereztek és ezek alapján milyen matematikaoktatást szeretnének. A válaszokból, mint majd látni fogjuk, sok hasznosítható megállapítás, javaslat kiolvasható.

A hallgatók egy része külön megfogalmazta az egyes iskolatípusok szerinti tapasztalatait, így az egyes szempontoknál szereplő összes válasz nem azt jelenti, hogy a 187 kérdőívből pl. az (a) 1.-t 123-an választották, hiszen egy hallgató ezt mindhárom iskolatípusnál megjelölhette.

Az első kérdés a matematikaoktatásuk során szerzett jó és rossz tapasztalataikra vonatkozott.

(a) Jó tapasztalatok a matematika tanulása során

Erre a kérdésre a 187 hallgatóból 27 nem válaszolt. Az általános iskolások körében az 1998-99-es tanévben elvégzett felmérés kategóriáit vettük figyelembe, de a válaszokat szétbontottuk iskolatípusok szerint. Több válasz esetén új szempontokat is beiktattunk.

	Ált.isk.	Középisk.	Főisk.	Nem szétbontott	Összes
1. Jó tanári magyarázat, segítőkészség	41	40	10	32	123
2. Sikerélménye van a tanulónak	7	1	0	8	16
3. Érdekes, érdekesek a feladatok	8+4	0	0	1	9+4
4. Sok gyakorlás	2	2	1	3	8
5. A matematika hasznosítható a mindennapi életben	1	1	0	5	7
6. Szemléltetőeszközök használata	6	0	0	0	6
7. Jó alapozás	0	1	0	3	4
8. Fejleszti a logikus gondolkodást	0	1	0	3	4
9. Megérti az anyagot	0	1	0	2	3
10. Csoportokban oktattak	3	0	0	0	3
11. A matematika logikus, rendszerezett, az anyagok egymásra épülnek	0	0	0	2	2

Összességében a jó tapasztalatokról sokkal kevesebbet írtak, mint a rosszról. Az általános iskolai felméréshez hasonlóan itt is tapasztalható, hogy a tantárgyhoz való viszonyulást mennyire a tanár személyisége határozza meg. Nagyon sok válasz kezdődik úgy, hogy „Jó általános (vagy középiskolai) matematika tanárom volt.", azaz a jó (a (b) részben a rossz) tapasztalataikat a tanár személyéhez kötik. A legtöbbjük számára, (ugyanúgy, mint az általános iskolásoknál) a legfontosabb a jól magyarázó, segítőkész tanár.

Az **általános iskolai oktatásnál** feltűnően hangsúlyozzák annak pozitív vonásaként az érdekességet, játékosságot.

A **középiskolában** a tanárhoz való kötődést mutatja, hogy egy hallgató a tanára miatt jött a főiskolára.

A **főiskolai oktatásnál** kiemelik hogy a tanárok jól képzettek (2 hallgató), jó a képzés (2 hallgató). Nincs mód arra, hogy a fenti szempontok szerint nem kategorizálható válaszokat mind ismertessük, de a legérdekesebbeket „kimazsoláztuk".

„A matematika tantárgy azért okoz sok örömet, mert „rendszerint" elég megérteni, nincs szükség annak hosszas tanulására." (I. matematika)

„Nem sok elméleti tudással is lehet feladatokat megoldani".(I. matematika)

„A matematikát nem csak tanulni, hanem érteni is kell. Az értéssel nem lenne gond, de tanulni is kellene."(I. gazdaságismeret)

Nem mindenki választotta szét az (a), (b) és (c) részeket, volt olyan, aki a (c)-re vonatkozó óhaját itt írta le, s volt olyan is, aki a tanárokra vonatkozó rossz véleményét kifejezve az (a) ponthoz csak ennyit írt: „Általában kevés a jó matek tanár."

(b) Rossz tapasztalatok a matematika tanulása során

Erre a kérdésre 19-en nem válaszoltak, ketten írták azt, hogy nem voltak ilyen tapasztalataik, egy hallgató válasza pedig „Nem jellemző, szeretem a matekot." volt.

	Ált.isk.	Középisk.	Főisk.	Nem szétbontott	Összes
1. A tanár rosszul magyaráz	3	13	6	15	37
2. Kevés idő jut a magyarázatra, ill. a feladatok megoldására, gyakorlásra	1+1	1+3	2+5	1+6	5+15
3.Csoportbontás hiánya, a gyengék lemaradnak, a jók unatkoznak	2	7	3	5	17
4. Sok dolog nem hasznosítható a gyakorlatban, ezért fölösleges megtanulni	0	2	6	9	17
5. Alapok hiánya	3	9	0	4	16
6. Rossz matematika tanár	3	3	0	6	12
7. Nem értik	2	4	5	1	12
8. Nem mindig szórakoztató	2	0	1	5	8
9. A számonkérés irreálisan magas szintje	0	1	1	6	8
10. A tanár kivételez a diákkal, igazságtalanul osztályoz	2	1	0	4	7
11. Túl nagy a stressz, félelemben telnek az órák	1	0	2	0	3
12 Elmarad a házi feladat ellenőrzése	0	1	0	1	2

Ennél a kérdésnél méginkább előtérbe került a tanár személye. Nem csak a kifejezetten rossz tanárra való hivatkozásnál jelenik meg (12 hallgató), hanem a rossz tanári magyarázat (37 válasz), valamint a fegyelmezés, (2), az órák rossz légköre (3), a kivételezés (7) említésekor is a tanárra hivatkoznak (összesen 51 válasz). Néhányan részletesen is kifejtették a *tanáraikkal kapcsolatos negatív véleményüket*, melyekből kiragadtunk néhányat évfolyamok szerinti bontásban. Az *elsőéveseknél* meglehetősen sok elmarasztaló megjegyzést találtunk, ami érthető, hiszen nekik még frissek az általános és középiskolai emlékeik. Negatív vonásként jelentkezik pl. „a tanár túlzott bohóckodása az órán" vagy „ ... órákon a saját életét és problémáit mesélte a tanulás rovására."

Érdekes, hogy a *másodévesek* közül többen is kiemelik a tanári magyarázat jelentőségét: „Az, hogy egy tanár tudja a tananyagot, még nem jelenti azt, hogy el is tudja magyarázni." (Egy másik hallgató szinte szó szerint ugyanezt írta, de még hozzátette: „Sajnos sok tanár ezzel nincs tisztában.")

A *harmad- és negyedévesek* valószínűleg már saját tanítási tapasztalataikat is belefoglalták véleményükbe: „A tanár sokat tud, de nem tudja átadni, nem érti a gyerekek problémáját, nem az ő nyelvükön beszél." „Általános iskolában a tanárt sokszor nem érdekli, hogy a gyerek nem érti a feladatot, feladja házi feladatnak. Ez legtöbbször annak tulajdonítható, hogy ő sem biztos benne." Egyetlen negyedéves hallgató választotta szét a tanítót és a tantárgyat: „Csak a tanár személyiségéből adódott rossz tapasztalatom, de ez minden tantárgyra jellemző." A rossz matematikatanár jellemzői között felsorolták még az alábbiakat: türelmetlenség, könyvből diktálja az anyagot, kiabál, „állandóan veszekedett", „mást csinálnak az órán". Érdekes külön kezelni a *nem matematika szakosok válaszait* (összesen 96 fő), hiszen ők (főleg a számítástechnika szakos hallgatók) csak „kényszerűségből" tanulnak a főiskolán matematikát, s ez a tárgy néhányuknak nagy nehézséget okoz. Nem meglepő, ha a következőkhöz hasonló megállapításokat olvasunk: „Középiskolában sok óránk elmaradt, ugráltunk az anyagban, nem értettem, nem szerettem." „Tapasztalataim során a középiskolában manapság a tanár a táblánál megold egy pár példát, lehadarja az anyagot és ha a diák megérti, akkor megérti, ha nem akkor nem." „A gyerekek túl sokszor hallják, hogy nehéz tárgy, ezért eleve így állnak hozzá még mielőtt megismernék, s erre sajnos sok tanár még rá is tesz." Végül néhány érdekes, elgondolkodtató, mosolyogtató idézet: „Ordítozással nem lehet elérni, hogy a diák értse és tanulja a matematikát." „Középiskolában nemi különbséget tett a tanár: Egy lány nem érthet a matekhoz." „Általános iskolában a tanár diktatórikus módszerekkel tanított, néha még a személyiségi jogokat is megsértette. Matematika órán mindenki rettegett, senki sem szerette a matematikát, gátlások alakultak ki." (Ez a diák a középiskolai tanulmányairól pozitív dolgokat írt, feloldódtak a gátlásai, megszerette, izgalmasnak találta a matematikát!) Nézzünk most néhány olyan megállapítást, melyek az egyes iskolatípusokra vonatkoznak, és vagy a felsorolt pontokat egészítik ki, vagy nem sorolhatók be egyik kategóriába sem.

Általános iskola: „Általános és középiskolában túlságosan sikerorientált, aki nem érti meg az elején, az lemarad." "Sokszor nem az önálló és egyéni gondolkodást díjazták, hanem csak az órán tanult megoldási módszert." Egy hallgató azt emeli ki, hogy „Nincs elég játék, nem szerettetik meg a gyerekekkel."

Középiskola: „Szakközépiskolában inkább a gyakorlatot oktatják, sok a hiányosság." „Az elméletet nem tanították meg eléggé, és nem is követelték meg." A gyakorlás hiányát emeli ki egy hallgató: „Tudásunk nem rögzül mélyen, csak többnyire addig tudjuk, míg megírjuk a felmérőket, utána elfelejtjük."

Főiskola: A középiskola és a felsőoktatás közti átmenet nehézségét egy negyedéves hallgató fogalmazta meg a legtömörebben: „Az a mély víz nagyon mély volt." Többen írták azt, hogy a főiskolai oktatók nagy tudásúak, de nem mindenki tudja átadni a tudását. Az elsőéves matematika szakosoknak nehézséget okoz az elméleti anyag tanulása: „Nagyon sok elméletet kell tanulni, amit sokszor hosszas tanulás után sem lehet megérteni." A leggyakrabban előforduló negatívum még a gyakorlás hiánya: „Túl sietősen és felszínesen tanítanak, viszont alaposan és részletbemenően követelnek. Nem figyelnek az oktatók arra, hogy értik-e a hallgatók az anyagot!" (II. matematika) „Több elemi matematika óra kellene."

Az elsőéves gazdálkodás szakosok véleménye: „Elég gyors a tempó és sok mindent nehéz megérteni." „A főiskolán teljesen mást tanítanak matematika címszó alatt, mint középiskolában. Elvont definíciók, tételek, számomra teljesen értelmetlen. A feladatoknak és az elméletnek nincs közük egymáshoz."

Az elsőéves számítástechnika szakosokra általában a gyengébb matematikatudás jellemző,(néhányan úgy jelentkeznek erre a szakra, hogy nem is tudják, hogy nekik a főiskolán ezt a tárgyat is kell tanulniuk) s a hiányos alapokra nehéz építeni. Ezt fogalmazta meg egy hallgató : „Rossz, hogy vannak középiskolai hiányosságaim, ezért egyes részeket nem szeretek, bár az előadás alapján megértem az anyagot."

(c) A hallgatók válaszai a „Milyen matematikatanítást szeretnél?" kérdésre

A felmérés második nyílt kérdésében arra vártunk választ, hogy a hallgatók az eddigi jó, vagy rossz tapasztalataik alapján milyen matematikaoktatást képzelnek el. A válaszokat a már idézett általános iskolai felmérés alapján csoportosítottuk, de új szempontokkal is kiegészítettük azokat. Sokan több elvárást is leírtak, így a számadatok itt sem a válaszlapok számához mérhetők, csak az egyes szempontok fontossági sorrendjére utalnak. A válaszok nagy része nem tartalmaz iskolatípus szerinti bontást.

Nem válaszolt 26 hallgató, egy pedig azt írta, hogy nem tudja megfogalmazni, ketten félreértették, a matematikáról írtak, nem az oktatásáról. Értékelhető választ így 153 felmérő tartalmazott.

	Ált. isk.	Közép-isk.	Főisk.	Nem bontott	Összes
1. Sok gyakorlás legyen (több típusfeladat)	0	0	1	33	34
2. A tanár többet magyarázzon (érthetően)	0	0	0	28	28
3. Sok legyen az életben hasznosítható gyakorlati feladat	0	0	1	24	25
4. Tanulóközpontú, szórakoztató, érdekes	0	0	1	11	12
5. A feladatok legyenek érthetőek, könnyűek, érdekesek, játékosak	1	0	0	9	10
6. Személyre szabott munkatempó legyen	0	0	0	9	9
7. Elégedett vagyok a mostanival	0	0	7	2	9
8. Szeressék a matematikát	0	1	0	6	7
9. Kevesebb elméletet tanítsanak	0	0	3	4	7
10. Az alapok megtanítása	2	2	0	2	6
11. Többet kellene foglalkozni a gyengébb tanulókkal	0	0	0	6	6
12. Fontos a tanár, diák jó kapcsolat (barátibb)	0	0	0	6	6
13. Legyen csoportmunka	1	1	0	3	5
14. Alapos, érthetőbb, lassúbb	0	0	0	5	5
15. Szemléltetőeszközök használata	0	0	0	5	5
16. Több elméletet tanítsanak	2	2	0	0	4
17. Számítógép segítségével tanulhassanak	0	0	1	1	2
18. Logikus gondolkodásra tanítás	0	0	0	2	2
19. A házi feladat ellenőrizve legyen	0	0	0	2	2
20. Sok önálló munka legyen	0	0	0	2	2

Általában a hallgatók elvárásaikat nem bontották le iskolatípusokra. Főleg a nem tanár szakosokra jellemző, hogy elképzeléseiket a főiskolai matematika oktatásra fogalmazták meg. Ők elégedettek (7) a jelenlegi oktatással, de több gyakorlást, több órát is (a 34 összes válaszból 28-an) szeretnének, valamint gyakorlatban használható feladatokat (25-ből 18-an).

Több helyen is megjelennek a *tanár személyiségével* kapcsolatos elvárások. A legfontosabb , hogy jól magyarázzon: (28) ezzel kapcsolatos megállapításokból idézünk néhányat. „olyan tanárok tanítsanak, akik magyarázni is tudnak." Szeretnék, hogy a tanár „érthetően, ne „magaslati nyelven" magyarázza el az anyagot"; „ne csak „feldobálja" a táblára a példát". Konkrét elvárást fogalmaz meg a következő: „A tanár ne a kevesekhez viszonyítson, de ne pazarolja az időt mások felzárkóztatására sem, a középutat találja meg, amely ritkán sikerül." A tanár legyen „Szigorú, de igazságos, emberséges." „Ha egy tanár úgy megy be az órájára, hogy azt gondolja, ez a csoport nem tud semmit, úgy is lesz" (Egy középiskolai magyar tanár); keserű tapasztalatait foglalhatta így össze az elsőéves matematika szakos diák. Feltűnő, hogy mennyire fontosnak tartják, hogy *az oktatás érdekes legyen* (12). Előfordulnak még a következő jelzők is: szórakoztató, hasznos, játékos, dinamikus, kreatív, egyértelmű, logikus, következetes, legyen lendülete, ritmusa. Egy III. évfolyamos hallgató írja: „Hatékonyat, ahol a megszerzett ismeret be van gyakorolva, hosszú ideig tárolható." „Vidám matematika órákat!" írja egy IV éves tanárjelölt, s ez a legtömörebb összefoglalása annak, amit többen is megfogalmaztak az órák légköréről. Csak a legtalálóbbat idézzük: „Szerintem egy jó matematika óra nem a feszültségtől csendes." Érdekes, hogy nem csak a tanár szakosak tartották fontosnak azt, hogy a diákok szeressék a matematikát (7). „Jó lenne eltüntetni azt az elgondolást, hogy a matematikát csak utálni, vagy szeretni lehet. Közelebb kellene vinni mindenkihez." fogalmazta meg találóan egy elsős matematika szakos.

A matematika tanítás tartalmi részére, az elmélet, gyakorlat kapcsolatára vonatkozó kívánságokból idézünk néhányat. „Az általános- és középiskolában is több elméletet kellene tanítani, elősegítve azokat, akik ezzel szeretnének továbbtanulni." „Általános iskolában jó alapok legyenek, középiskolában legyen sok gyakorlás, főiskolán sok az elmélet, kevés idő jut a gyakorlásra, pedig fontos lenne, mindenki csak magol és nem ért semmit." Nem véletlen, hogy az előző mondatokat elsőéves hallgatók írták, ugyanis több megállapításukból is kiderül, hogy mennyire nehéz az átállás a középiskola és a főiskola között. Még az általában jobb eredményekkel bekerülő gazdaságelmélet szakosoknak is gondot okoz a definíciók, tételek, bizonyítások megértése és megtanulása.

Lényegesnek tartják a *csoportbontást, a képességek szerinti haladást.* „Kis létszámú osztályok legyenek." „Minden gyerek a képességeinek megfelelő osztályban tanulja a matematikát. "Fontos a gyengék felzárkóztatása, legyen jó csoport, rossz csoport."

Végül nézzünk néhány, a legfontosabb kívánalmakat kifejező idézetet: „A tanárok elsődlegesen értsenek a matematikához, szeressék azt és normálisan elő tudják adni." (I. évf. matematika) A „tapasztalt" negyedévesek óhajai: „Az alapvető dolgokat meg kell tanítani a képességekhez mérten a legjobban, amit nem kell

„tökéletesen” megtanítani, tudják a gyerekek, hogy hol tudnak utánanézni, még ha nem is jegyzik meg pontosan.” „Jobb a kevesebbet rendesen, mint a sokat sehogy.”

Nagyon találóak az elsőéves, (nem tanár szakos!) gazdaságismeretes hallgatók megállapításai: „Az ideális matekórát egy lelkes tanár tartaná, akivel érdekes példákat gyors tempóban oldanánk.” „Azt hiszem, az a legfontosabb, hogy a tanár és a diák ismerjék egymást és tudják mire képesek mindketten. Nekem fontos, hogy szimpatizáljam a tanárral és így szívesebben is járok be órára. Ez a szimpatizálás nem azt jelenti, hogy feltétlenül olyan ember a jó tanár, akinél nem az elsődleges a leadandó anyag (pl. elviccelődi az órát), hanem igenis egy olyan személyiség, aki azért a „markában tartja” a csoportot, lehet mindig érezni rajta, hogy ő a „főnök” (persze az nem jó, ha ő mindig azt érezteti, mert akkor a diákból belülről jövő tisztelet a visszájára fordulhat), és még az is fontos, hogy a diák érezze azt, hogy mikor visszatekint egy a mögötte álló időszakra, akkor elkönyvelhesse magában, hogy azért csak gyarapodott abban az időszakban ami mögötte van (nem súlyra értem POÉN) és ez a személyes tapasztalatomból kiindulva ez a legjobb érzések egyike amit az iskola nyújthat.”

5. Összegzés

A megkérdezett hallgatók általában komolyan vették a válaszadást, az viszont elgondolkodtató, hogy elég sokan nem a kérdésre válaszoltak; félreértették, vagy egyéni sérelmeiket sorolták föl. Nagyon sok volt a nyelvtanilag helytelenül (állítmány egyes- alany többes számban, vagy fordítva), illetve értelmetlenül megfogalmazott mondat. Elég elszomorító, hogy az érettségizett diákok egy részének ilyen nehézséget okozzon három-négy értelmes mondat megfogalmazása. Az (a), (b), (c) pontokra adott válaszok alapján a következőket lehet kiemelni:

1. *Nagyon fontos a tanár személyisége.* A hallgatók által leírt, meglehetősen sok, rossz tapasztalat alapján felvetődik az a gondolat, hogy nem kellene-e tanárok munkájának felügyeletét, a tanári munka ellenőrzését hatékonyabban megoldani? Ez annál is inkább előtérbe kerülhet, mivel a tanárszakokra sajnos nem a legjobb képességű diákok jelentkeznek, s a végzősök egy része (a jobbik) nem a pályán fog elhelyezkedni. Ez a jelenség előbb-utóbb az oktatás színvonalának a csökkenéséhez vezet.

2. *Népszerűsíteni kell a matematikát.* A fenti idézetekből is kiderült, hogy mennyire fontosnak tartják, hogy a tanulók szeressék a tárgyat, ne eleve félelemmel közeledjenek hozzá.

3. *Életszerű, praktikus, érdekes feladatokkal érdekessé kell tenni a matematika órákat.*

4. *A jó alapozás (a továbbtanulóknak jó elméleti alapok) fontossága.* Főleg a főiskolai oktatásra vonatkozó megjegyzésekben olvasható, hogy milyen „kudarcélménye” van annak, aki a hiányos ismeretei miatt nem tud fölzárkózni. (Fél kimenni

a táblához). Érdekes, hogy mennyire a középiskolai módszer folytatását várják a főiskolán is. (Legyenek játékos feladatok, a tanár szerettesse meg az anyagot, stb.) Főleg az elsőévesek (és a nem tanár szakosak) nehezen állnak rá az elméleti anyag tanulására. Hangsúlyozzák a gyengébbekkel való törődés, a felzárkóztatás fontosságát. A középiskola segíthetne, ha tudatosítaná a tanulókban (főleg a felsőoktatásban majd matematikát tanulókban), hogy a matematikát tanulni is kell!

Irodalom

[1] Borassi, R., The Invisible Hand Operating in Mathematics instruction: Students Conceptions and Expectations. In: Teaching and Learning Mathematics in the 1990s. Yearbook 1990 (ed: T. J. Cooney), 174–182, Reston (VA):NCTM.

[2] Frank, M. L., Problem solving and Mathematical Beliefs. Arithm. Teacher **35** **(5)**, (1988), 32–34.

[3] Green, T. F., The Activities of Teaching. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, (1971).

[4] Lester, F. K., Garofalo, J. & Kroll, D. L., Self-Confidence, Interest, Beliefs, and Metacognition: Key Influences on Problem Solving Behavior. In: McLeod & Adams (eds). (1989), 75–88.

[5] Pehkonen, E., Zimmermann, B., Problem Fields in Mathematics Teaching and their Connection to the Development of Teaching and Pupils' Motivation. Department of Teacher Education University of Helsinki, Research Report 86., in Finnish, (1990).

[6] Pehkonen, E., Problem fields in mathematics teaching. Department of Teacher Education University of Helsinki, Helsinki, (1992).

[7] Pehkonen, E., On Differences in Pupils' Conceptions about Mathematics Teaching. *The Matehematics Educator*, 5, vol 1., Georgia, (1994).

[8] Pehkonen, E. & Tompa, K., Matematikaoktatás a tanulók szemével Magyarországon és Finnországban. *Szemle*, (1994), 39—46.

[9] Pehkonen, E. & Törner, G., Introduction to the theme Mathematical beliefs. *ZDM International Reviews on Mathematical Education*, **4**, (1996), Freiburg.

[10] Schoenfeld, A. H., Mathematical Problem Solving. Orlando (F.), Academic Press, (1985).

[11] Schoenfeld, A. H., Explorations of Students' Mathematical Beliefs and Behavior. J Res. Math. Educ. **20** (4),(1989), 338–355.

[12] Thompson, A. G., Theachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In: Grouws (ed.) (1992), 127–146.

[13] UNDERHILL, R. G., Mathematics Learners' Beliefs: A Review. Focus on Learning Problems in Mathematics **10 (1)**, (1988a), 55–69.

[14] UNDERHILL, R. G., Mathematics Learners' Beliefs: Review and Reflections. Focus on Learning Problems in Mathematics **10 (3)**, (1988b), 43–58.

Orosz Gyuláné & Sashalminé Kelemen Éva
Károly Eszterházy College
Department of Mathematics
Leányka str. 4.
H-3300 Eger, Hungary
ogyne@ektf.hu
saske@ektf.hu

Contents

Didactical papers (In Hungarian)