ACTA
ACADEMIAE PAEDAGOGICAE AGRIENSIS
NOVA SERIES TOM. XXII.

AZ ESZTERHÁZY KÁROLY TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA
TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

REDIGIT—SZERKESZTI
PÓCS TAMÁS, V. RAISZ RÓZSA

SECTIO MATEMATICAE

TANULMÁNYOK A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL

REDIGIT—SZERKESZTI
KISS PÉTER, RIMÁN JÁNOS

EGER, 1994

ACTA
ACADEMIAE PAEDAGOGICAE AGRIENSIS

NOVA SERIES TOM. XXII.

AZ ESZTERHÁZY KÁROLY TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA
TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

REDIGIT—SZERKESZTI
PÓCS TAMÁS, V. RAISZ RÓZSA

SECTIO MATEMATICAE

TANULMÁNYOK A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL

REDIGIT—SZERKESZTI
KISS PÉTER, RIMÁN JÁNOS

EGER, 1994

Az $f(n+a)+f(n+b)+f(2n-1)+f(2n+1)=c$ egyenlet teljesen additív megoldásai

PHAM VAN CHUNG

Abstract. (Completely additive solutions of the equation $f(n+a)+f(n+b)+f(2n-1)+f(2n+1)=c$) I. Kátai [1] proved that if a, b are positive integers and f_1, f_2, f_3 are completely additive functions satisfy

$$f_1(n-a)+f_2(n)+f_3(n+b)=0$$

for every $n \geq a+1$, then for every prime $p > \max\{3, a+b\}$ the values $f_1(p)$, $f_2(p)$, $f_3(p)$ are determined by the collection of the values $f_1(q)$, $f_2(q)$, $f_3(q)$ taken on at primes $q \leq \max\{3, a+b\}$.

Our purpose in this paper is to consider solutions of those completely additive functions which satisfy

$$f(n+a)+f(n+b)+f(2n-1)+f(2n+1)=c$$

for all integers $n > \max\{-a,-b,c\}$, where $a, b \in Z$; $c \in \mathbf{R}$. By using I. Kátai's method we show that in the case $|a|, |b| \leq 5$ with the choice of some values n and solving a linear equation system one conclude $c=0$ and $f=0$.

A természetes számok halmazán értelmezett függvényeket számelméleti vagy aritmetikai függvényeknek nevezzük. Ebben a cikkben függvényen mindig számelméleti függvényt értünk.

Definíció. Az f számelméleti függvényt additívnek nevezzük, ha

$$f(ab)=f(a)+f(b)$$

minden $(a,b)=1$ számpárra.

Ha a fenti összefüggés minden a, b természetes számra érvényes, akkor teljesen additív függvényről beszélünk.

Ismert tény, hogy ha $n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_k^{t_k}$, akkor additív f-re $f(1)=0$ és $f(n)=f(p_1^{t_1})+\ldots+f(p_k^{t_k})$. Látható, hogy ezeket a függvényeket a prímhatvány helyeken felvett értékeik teljesen meghatározzák, teljesen additív esetben pedig már a prím helyeken felvett értékek.

Kátai Imre bebizonyította, hogy ha f_1, f_2, f_3 teljesen additív függvények és

$$f_1(n-a)+f_2(n)+f_3(n+b)=0$$

fennállnak minden $n \geq a+1$ egész számra, akkor minden p prímszámra, amelyre $p > \max\{3, a+b\}$, az $f_1(p)$, $f_2(p)$, $f_3(p)$ előállíthatók az $f_1(q)$, $f_2(q)$ és $f_3(q)$ értékek lineáris kombinációjaként, ahol $q \leq \max\{3, a+b\}$ prím (lásd. [1]).

Mi alkalmazni fogjuk a fenti cikkben használt módszert és vizsgáljuk a következő kérdést: „Melyek azok az f teljesen additív függvények, amelyekre

$$f(n+a)+f(n+b)+f(2n-1)+f(2n+1)=c \quad \{a,b\in\mathbf{Z},\ c\in\mathbf{R}\}."$$

Mint látjuk majd, bármely $|a| \leq 5$, $|b| \leq 5$ pár esetén alkalmas n értékeket behelyettesítve egyértelműen megoldható egyenletrendszert kapunk, ahonnan $f(p)=0$ következik az első néhány prímre. Ez a feltétel elégséges, hogy $f \equiv 0$ következzen, mint a következő tétel mutatja.

1. Tétel. Legyen f teljesen additív függvény, $a,b \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{R}$. Tegyük fel, hogy

$$f(2n-1)+f(2n+1)+f(n+a)+f(n+b)=c \tag{1}$$

teljesül minden $n > \max\{-a,-b,0\}$ természetes számra. Ha $f(p)=0$ fennáll minden

$$p \leq M(a,b) = \max\{2\,|b|+3, 2\,|a|+3\}$$

prímre, akkor $f \equiv 0$.

BIZONYÍTÁS. A feltételek miatt létezik n_0 pozitív egész szám, melyre

$$1 \leq 2n_0-1, 2n_0+1, n_0+a, n_0+b \leq M(a,b).$$

Így

$$0 = f(2n_0-1)+f(2n_0+1)+f(n_0+a)+f(n_0+a)=c$$

tehát $c=0$.

Legyen $q > M = M(a,b)$ tetszőleges prímszám és továbbá tegyük fel, hogy minden $p<q$ prímre $f(p)=0$. Bebizonyítjuk, hogy $f(q)=0$.

Az (1)-ből az $n=\frac{q-1}{2}$ helyettesítéssel

$$f(q-2)+f(q)+f\left(\frac{q-1}{2}+a\right)+f\left(\frac{q-1}{2}+b\right)=0.$$

Mivel $q > M(a,b)$ miatt

$$\max\left\{\frac{q-1}{2}+a, \frac{q-1}{2}+b, q-2\right\} < q\,,$$

így az indukciós feltétel miatt a fenti egyenlőségből $f(q) = 0$ következik.

Az előző tétel felhasználásával bebizonyíthatjuk a következő állítást.

2. Tétel. Ha $|a|, |b| \leq 5$ és (1) fenáll minden $n > \max\{-a,-b,0\}$ esetén, akkor

$$f \equiv 0.$$

BIZONYÍTÁS. Az alábbiakban megadjuk, hogy adott a és b értékek esetén mely értékeket kell az (1) egyenletbe helyettesíteni, hogy az additivitást felhasználva olyan egyenletrendszert kapjunk, amelyben $p \leq M(a,b) \leq 13$ prímszámokon felvett függvényértékek az ismeretlenek, és $(-c)$ is ismeretlenként szerepel. A kapott homogén lineáris egyenletrendszer mátrixa négyzetes, így csak triviális megoldása van, ha a determinánsa nem 0. Így $c = 0$ és $f(p) = 0$ minden $p \leq 13$ prímre.

Most térjünk rá a konkrét a és b esetekre. $a = b = 0$ esetén az (1) a következő alakban írható:

$$2f(n) + f(2n-1) + f(2n+1) = c. \tag{2}$$

Legyenek

$x_1 = f(2)$ $\quad x_2 = f(3)$ $\quad x_3 = f(5)$ $\quad x_4 = f(7)$

$x_5 = f(11)$ $\quad x_6 = f(13)$ $\quad x_7 = -c$

Az n=1,2,3,4,5,6 és 7 választásokkal a (2)-ből a következő 7 ismeretlenes egyenletrendszer adódik:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
 & & x_2 & & & & & & & & & + & x_7 & = & 0 \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & & & + & x_7 & = & 0 \\
 & & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & & + & x_7 & = & 0 \\
4x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & & & + & x_7 & = & 0 \\
 & & 2x_2 & + & 2x_3 & & & + & x_5 & & & + & x_7 & = & 0 \\
2x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & + & x_6 & + & x_7 & = & 0 \\
 & & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & & & + & x_6 & + & x_7 & = & 0
\end{array}$$

Az egyenletrendszer determinánsa -18, így pedig csak triviális megoldása van, azaz $f(p) = 0$ valamennyi $p \leq 13$ prímre és $c = 0$. Az 1. Tétel alapján innen $f \equiv 0$ következik.

A további $|a| \leq 5$, $|b| \leq 5$ esetekre a helyettesítendő n értékeket a következő táblázat tartalmazza. (Megjegyezzük, hogy néhány esetben elegendő a $p \leq 7$ prímekre megmutatni, hogy $f(p) = 0$.)

	b=-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
a=-5	6,7,13,17, 32,38,122	6,7,8,13, 25,32,38	6,7,8,13,17, 25,38,59	6,7,13,17, 32,38,122	6,7,8,9,10, 13,17,25,122	6,7,8,9,13, 10,17,25,32	6,7,8,13,17, 25,32,38,59	6,7,8,9,10, 13,25,32,38	6,7,8,13,17, 25,32,122	6,7,8,13,32, 38,59,60	6,7,8,13,17, 25,59,80
-4		5,6,7,8,13, 17,25,38	5,6,7,8,13, 17,25,38	5,6,7,8,13, 17,32,38	5,6,7,8,9,13, 17,10,25	5,6,7,8,13, 17,25,32	5,6,7,8,13, 17,32,38	5,6,7,8,13, 25,32,38	5,6,7,8,13, 17,25,32	5,6,7,8,13, 17,32,35	5,6,7,8,13, 17,25,59
-3			4,5,6,7,8, 13,17,25	4,5,6,7,13, 17,38	4,5,6,7,8, 13,17,25	4,5,6,7,8, 13,17,25	4,5,6,7,13, 13,17,38	4,5,6,7,8, 13,25,38	4,5,6,7,8, 13,17,25	4,5,6,7,8, 13,17,38	4,5,6,7,8, 13,17,25
-2			7,13,17	3,5,4,6,32, 17,122	3,4,5,13, 13,32	3,4,5,6,7, 7,13,17	3,4,5,6, 7,13,17	3,4,5,6, 7,13,17	3,4,5,6, 7,13,17	3,4,5,6, 7,17,38	3,4,5,6, 7,13,17
-1					2,3,4,5, 6,7,13	2,3,4,5, 6,7,13	2,3,4,5, 6,7,13	2,3,4,5, 6,7,13	2,3,4,5,6, 7,13	2,3,4,5,6, 7,122	2,3,4,5, 6,7,13
0						n=1,2,3,4, n=5,6,7 D=-18	1,2,3,5, 6,7,13	1,2,3,5, 6,7,13	1,2,3,4,5, 6,7	1,2,3,4,5, 6,7	1,2,3,4,5, 6,7
1							1,2,3,4, 13	1,2,3,4, 13	1,2,3,4, 13	1,2,3,4, 17	1,2,3,4, 13
2								1,2,3,4,13	1,2,3,4,13 D=17	1,2,3,4,5,38	1,2,3,4,13
3									1,2,3,4,13	1,2,3,4,5,17	1,2,3,4,13
4										1,2,3,4,122	1,2,3,4,5,17
5											1,2,3,4,13

Irodalom

[1] I. KÁTAI, Arithmerical functions satisfying some relations, *Acta Sci. Math.*, **55** (1991), 249–268

[2] A. SÁRKÖZY, On multiplicative arithmetic functions satisfying a linear recursion, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **(1989)** 79–104

A magasabb rendű fixpontokról

SZEPESSY BÁLINT

Abstract. (On the fix point of higher order) Let $f(x)$ be a continuons real valued function on the interval $[a,b]$ which maps the interval onto itself. The functions

$$f_0(x)=x,\ f_1(x)=f(x),\ f_2(x)=f\big(f(x)\big),\dots,f_n(x)=f\big(f_{n-1}(x)\big)$$

are called the 0^{th}, 1^{st}, $\dots, n^{th}$ iterated functions of the base function $f(x)$.

If $f(c)=c$, then the point c is said to be the fix point of first order of the function $f(x)$. If $f_n(c)\neq c$ $(n=1,2\dots,r_{-1})$ but $f_r(c)=c$, then the point c is the fix point of order r of the function $f(x)$.

In this paper the following statement is proved: Let $f(x)$ be a base function on the interral $[a,b]$ and $[c,d]$ be a subinterval of $[a,b]$. If there exist such two disjoint subintervals of $[c,d]$, which are maped onto the interval $[c,d]$ by the function $f(x)$, then the function $f(x)$ has a fix point of arbitrary high order.

1. Bevezetés

Legyen $f(x)$ az $[a,b]$ $(a<b)$ zárt intervallumon értelmezett olyan egyértékű valós függvény, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

1. $f(x)$ az adott szakasz minden belső pontjában folytonos, a kezdő és a végpontban jobbról, illetve balról folytonos;

2. $f(x)$ az $[a,b]$ intervallumot önmagára képezi le;

3. nincs olyan részintervalluma az adott szakasznak, amelyben $f(x)=$ $=$ constans teljesül.

Az $f(x)$ függvényt iterációs alapfüggvénynek nevezzük az adott intervallumon. Az

$$f_0(x)=x,\ f_1(x)=f(x),\ f_2(x)=f\big(f(x)\big),\dots,f_n(x)=f\big(f_{n-1}(x)\big),\dots$$

függvényeket az $f(x)$ függvény 0-dik, első, második, $\dots$, n-edik (n-edrendű), $\dots$ iterált függvényeinek (iteráltjainak) nevezzük. Az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételekből teljes indukcióval egyszerűen igazolható, hogy az $f_n(x)$ $(n=2,3\dots)$ függvények is mind rendelkeznek az 1., 2., 3. tulajdonságokkal. Teljesülnek az $f_{n+m}(x)=f_n\big(f_m(x)\big)=f_m\big(f_n(x)\big)$ azonosságok.

Bármely $x_0(\in [a,b])$ pontnak létezik az $x_{n+1} = f(x_n)$ képlettel alkotott $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ iterációs pontsorozata, és minden n-re $x_n \in [a,b]$. Az x_n pontot az x_0 pont n-edrendű (n-edik) iteráltjának vagy rákövetkezőjének nevezzük.

Az $f(x)$ görbe grafikus képének alkalmazásával bármely x_0-pont x_1 rákövetkezőjét úgy kapjuk meg, hogy az x_0 pontot az abszcisszatengelyre merőlegesen a görbére vetítjük, és a vetületen át párhuzamost húzunk az abszcisszatengellyel, ez a párhuzamos az $y = x$ „átlót" az x_1 abszcisszájú pontban metszi.

Ha x' pont iterációs pontsorozatának x_0 eleme, akkor x' pontot az x_0 pont inverz-iteráltjának vagy megelőzőjének nevezzük. Ha n a legkisebb természetes szám, amelyre $f_n(x') = x_0$, akkor n-edrendű vagy n-edik inverz-iteráltról beszélünk. Az ilyen x' pontot így jelöljük: $x' = x_{-n}$.

Valamely x_0 pont elsőrendű inverz-iteráltját grafikus eljárással úgy kapjuk, hogy az x_0 pontot az abszcisszatengelyre merőlegesen az átlóra vetítjük és a vetületen át párhuzamost húzunk az abszcisszatengellyel, a párhuzamos és az $f(x)$ közös pontjai x_{-1} abszcisszájúak.

Ha $[c,d]$ (c<d) az $[a,b]$ szakasz egy részszakasza, akkor pontjainak első iteráltjai is egy szakaszt alkotnak; jele: $[c,d]_1$. (Nyilvánvaló ugyanis, hogy $[c,d]_1 = [\min f(x); \max f(x)]$ ha $c \leq x \leq d$). A $[c,d]$ szakasz n-edik iteráltján a $[c,d]_n = ([c,d]_{n-1})_1$ intervallumot értjük.

Ha f(c)=c, akkor a c pontot az $f(x)$ függvény elsőrendű fixpontjának nevezzük. Ha $f_n(c) \neq c \quad n = 1, 2, \ldots, r-1$ esetén, de $f_r(c) = c$, akkor c pont az $f(x)$ függvény r-edrendű fixpontja. Az r-edrendű fixpontok az $y = f_r(x)$ görbe és az $y = x$ átló metszéspontjainak vetületei az abszcisszatengelyen.

Felmerül a kérdés, hogy milyen iterációs alapfüggvények esetén vannak tetszőlegesen magas rendszámú fixpontok.

Tien-Yien Li és James Yorke bebizonyította a következő tételt:

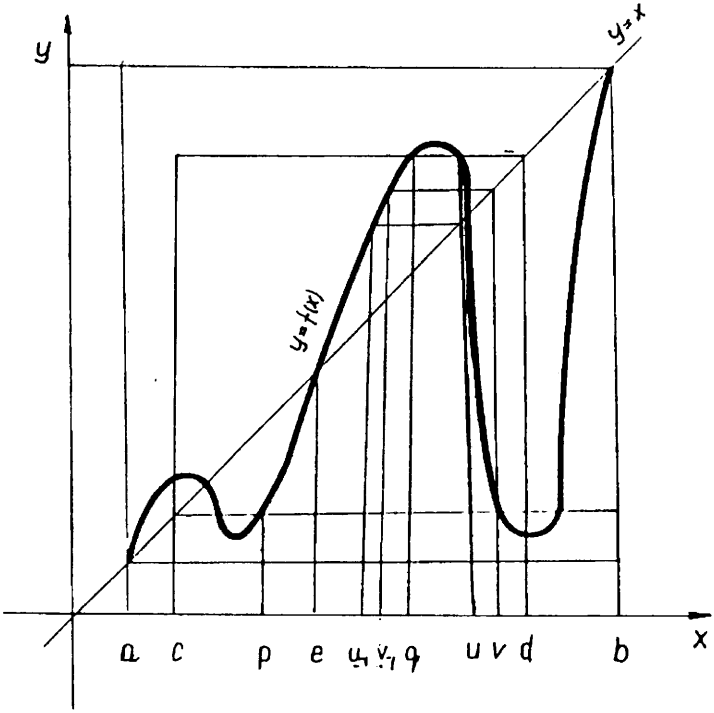
Legyen $f(x)$ az $[a,b]$ szakaszon értelmezett iterációs alapfüggvény. Ha van az $[a,b]$ szakaszban olyan e pont, amelyre $e_3 \leq e < e_1 < e_2$ (vagy $e_3 \geq e > e_1 > e_2$) relcációk teljesülnek, akkor az $f(x)$ függvénynek van bármilyen magasrendű fixpontja (ahol e_1, e_2, e_3 az e pont első, második és harmadik iterált pontja).

A tételben szereplő e pont létezésének az eldöntése sokszor nem könnyű feladat, ezért — de elméleti szempontból is — érdeklődésre tarthat számot a következő tétel.

2. A magasabb rendű fixpontokról

Tétel. Legyen $f(x)$ az $[a, b]$ zárt intervallumon értelmezett iterációs alapfüggvény; legyen továbbá $[c, d]$ részszakasza az $[a, b]$ szakasznak. Ha van a $[c, d]$ szakaszban két olyan diszjunkt részszakasz amelyeket a függvény az egész $[c, d]$ szakaszra képezi le, akkor az $f(x)$ függvénynek van bármilyen magas rendű fixpontja.

BIZONYÍTÁS. Legyen a feltételekben szereplő két szakasz $[p, q] = \delta$ és $[u, v] = \mu$ $(c \leq p < q < u < v \leq d)$. Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy δ és μ diszjunkt szakaszoknak nincs olyan valódi része, amelyet $f(x)$ a $[c, d]$ szakaszra képez le. Tehát egyik szakasz sem rövidíthető meg az említett leképezési tulajdonság megtartásával.



1. ábra

Így az

$$1.\ f(p) = c, \text{ és akkor } f(q) = d;$$
$$2.\ f(p) = d, \text{ és akkor } f(q) = c;$$

3. $f(u) = d$, és akkor $f(v) = c$;
4. $f(u) = c$, és akkor $f(v) = d$

lehetőségnek megfelelően az 1,3, 2,3, 1,4, 2,4, esetpárok az összes lehetséges előfordulásokat kimerítik.

Először az 1,3 esetpárral foglalkozunk (1. ábra)

Ekkor van a δ szakaszban olyan e elsőrendű fixpont, amelytől jobbra $f(x) >$ $> x$, hacsak $x \leq q$, azaz $f(x)$ az $[e,q]$ szakaszban minden értéket felvesz e és d között. A tétel állítása egyszerűen nyerhető, ha igaz a következő.

1.1. Segédtétel. A tétel feltevési mellett az 1,3 esetben (de az 1,4 esetben is) bármely n természetes szám esetén van a μ szakasznak n-edrendű inverz-iterált szakasza az $(e,q]$ szakaszban. Az így keletkező μ_{-n} .sorozat elemei közös belső pontot nem tartalmazó szakaszok.

Az 1.1. segédtétel bizonyítása. Először azt látjuk be, hogy ha $[u,v] = \mu$ tetszőleges részszakasza az $[e,d]$ szakasznak, akkor mindig van $\mu_{-1} \subset [e,q]$ szakasz amelyre $(\mu_{-1})_1 = \mu$.

Mivel az $[e,q]$ szakaszban $f(x)$ minden értéket felvesz e és d között és $e \leq u < v \leq d$, ezért mind az u, mind a v pontnak van az $[e,q]$ szakaszban (legalább egy-egy) inverz-iterált pontja. Tekintsük a v pont $[e,q]$ szakaszbeli inverz-iteráltjai közül azt, amelynek abszcisszája a legkisebb és jelöljük ezt v_{-1}-gyel. Tehát $v_{-1} = \min\limits_{e<x\leq q} \{x\}$, $f(x) = v$. Az u pontnak az $[e,q]$ szakaszbeli inverz-iterált pontjai közül a v_{-1}-től balra, a hozzá legközelebb esőt választva legyen ennek abszcisszája u_{-1}, azaz $u_{-1} = \max\limits_{e\leq x<v_{-1}} \{x\}$, $f(x) = u$.

Könnyű megmutatni, hogy a $\mu_{-1} = [u_{-1}, v_{-1}]$ szakasz első iteráltja az $[u,v]$ szakasz. Ismert ugyanis, hogy az $[a,b]$ valamely zárt ε részszakaszának első iteráltja a $[\min\limits_{x\in\varepsilon} f(x)\,;\ \max\limits_{x\in\varepsilon} f(x)]$ szakasz. Márpedig $\min\limits_{x\in\mu_{-1}} f(x) =$ $= f(u_{-1}) = u$, hiszen ha a μ_{-1} szakasz belsejében lenne olyan r pont hogy $f(r) \leq u_{-1}$ teljesül, akkor — az $f(x)$ függvény $[e,q]$ szakaszbeli folytonossága következtében — lenne olyan s pont is, amelyre $f(s) = u$ teljesül $r \leq s < v_{-1}$, ellentétben azzal, hogy $u_{-1} = \max\limits_{e\leq x<v_{-1}} \{x\}\,, f(x) = u$. Hasonlóképpen látható be az is, hogy $\max\limits_{x\in\mu_{-1}} f(x) = f(v_{-1}) = v$. Tehát $(\mu_{-1})_1 = [u_{-1}, v_{-1}]_1 = [u,v] = \mu$ teljesül.

Ennek megfelelően a μ szakaszból kiindulva képezhetjük a μ_{-1} szakaszt, majd eljárásunkat folytatva a μ_{-1} szakaszból kiindulva a μ_{-2} szakaszt, ...; s így előáll a μ_{-n} $(n = 1, 2, \ldots)$ végtelen szakaszsorozat, amelyre $(\mu_{-n})_1 =$ $= \mu_{-(n-1)}$.

Még azt kell megmutatni, hogy bármely két ilyen inverziterált szakasznak nincs közös belső pontja. Ezt indirekt bizonyítással mutatjuk meg.

Tegyük fel, hogy μ_{-n} és $\mu_{-(n+k)}$ (k pozitív egész) olyan szakaszpár, amelynek mind a két szakaszában közös belső pontok vannak, akkor e pontok első iteráltjai a μ_{-n+1} és a μ_{-n-k+1} szakaszok közös pontjai lesznek, és folytatva eljárásunkat azt nyerjük, hogy a $(\mu_{-n})_n = \mu$ és a $\mu_{-n-k+n} = \mu_{-k}$ is közös belső ponttal rendelkező szakaszok. Ez azonban lehetetlen, mert μ-nak nincs q-tól balra eső pontja, μ_{-k}-nak pedig minden belső pontja q-tól balra van.

Ezzel a segédtételt bebizonyítottuk.

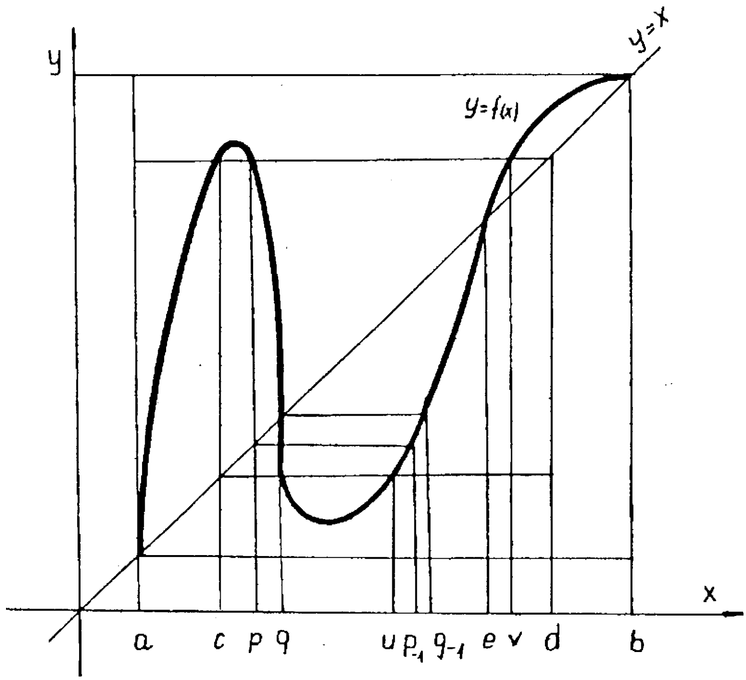
Ezután a tétel bizonyítását a következőképpen folytathatjuk. A segédtétel szerint kialakított μ_{-n} szakaszsorozatra nézve $(\mu_{-n})_n = \mu$ és így $(\mu_{-n})_{n+1} = \mu_1 = [c,d]$. Az $f_{n+1}(x)$ függvény tehát a μ_{-n} szakaszt a $[c,d]$ szakaszra képezi le, amiből következik, hogy vannak olyan $s,t \in \mu_{-n}$ pontok, amelyekben $f_{n+1}(x)$ rendre a c és a d értéket veszi fel; $f_{n+1}(s) = c$, $f_{n+1}(t) = d$. E két pont által határolt μ_{-n}-ben fekvő $[\min\{s,t\};\max\{s,t\}]$ szakaszban az $f_{n+1}(x) - x$ (folytonos) függvény minden értéket felvesz az $f_{n+1}(s) - s = c - s$ és az $f_{n+1}(t) - t = d - t$ értékek között. Mivel ezek különböző előjelűek, ezért van az $f_{n+1}(x) - x$ függvénynek μ_{-n}-ben 0-helye; azaz van olyan r pont amelyre $f_{n+r}(r) = r$ teljesül. Ez a pont tehát legfeljebb $(n+1)$-edrendű fixpont. Hogy éppen $n+1$ a rendszáma, az abból következik, hogy az r, r_1, r_2, r_3, $\ldots$, r_{n-1}, r_n pontok rendre a $\mu_{-n}, \mu_{-n+1}, \mu_{-n+2}$, $\mu_{-n+3}, \ldots, \mu_{-1}, \mu$ szakaszok belső pontjai, s ezek közös belső pont nélküli szakaszok. Így az $r, r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, r_n$ sorozat pontjai között nincsenek egybeesők. Ebben az esetben a tétel bizonyítását befejeztük.

Foglalkozzunk ezután az 1,4 esetpárral.

Az 1,4 esetpár esetén a bizonyítás úgy végezhető el, hogy az 1,3 esetpárhoz hasonlóan az $[e,q]$ szakaszban ugyanolyan $\mu_{-1} = [u_{-1} v_{-1}], \mu_{-2}, \ldots, \mu_{-n}, \ldots$ végtelen intervallum-sorozatot képezünk, amelynek elemei páronként diszjunktak, s amelyekre teljesül, hogy $(\mu_{-(n+1)})_1 = \mu_{-n}$ (n=0,1,2,...,). A $\mu_{-n} = [u_{-n}, v_{-n}]$ szakaszban az $f_{n+1}(x)$ iterált függvény minden $[c,d]$ szakaszbeli értéket felvesz, mert $f_{n+1}(u_{-n}) = f(u) = c$; $f_{n+1}(v_{-n}) =$ $= f(v) = d$ és $f_{n+1}(x)$ folytonos ebben a szakaszban, ezért $f_{n+1}(x) - x = 0$ egyenletnek van megoldása; legyen ez $\overline{x}$. Mivel $(\overline{x})_1 \in \mu_{-(n-1)}; (\overline{x})_2 \in$ $\in \mu_{-(n-2)}; \ldots, (\overline{x})_n \in \mu$, ezért az $\overline{x}, (\overline{x})_1, (\overline{x})_2, \ldots, (\overline{x})_n$ iterált pontok páronként különbözőek; vagyis $\overline{x}$ $(n+1)$-edrendű fixpont.

A 2,3 és a 2,4 esetpár is egymáshoz hasonlóan tárgyalható, ezért csak a 2,4 esetpárt részletezzük.

Az $f(x)$ függvény $[u,v]$ szakaszbeli folytonossága által most ebben az $[u,v] = \mu$ szakaszban van olyan e elsőrendű fixpont, amelytől balra $f(x) < x$, hacsak $x \geq u$. Tehát $f(x)$ minden értéket felvesz c és e között (2. ábra).



2. ábra

A tétel bizonyítását most megszakítjuk és megmutatjuk, hogy igaz az 1.1. segédtételhez analóg segédtétel.

1.2. Segédtétel. A tétel föltevései mellett bármely (természetes) n szám esetén van a δ szakasznak n-edrendű inverz-iterált szakasza az $[u, e]$ szakaszban. Az így előállítható δ_{-n} sorozat elemei közös belső pontot nem tartalmazó szakaszok.

Az 1.2. segédtétel bizonyítása. Most is először azt látjuk be, hogy ha a $[p, q] = \delta$ tetszőleges részszakasza a $[c, e]$ szakasznak, akkor mindig van $\delta_{-1} \subset [u, e]$, amelyre $(\delta_{-1})_1 = \delta$.

Mivel $c \leq p < q < e$ és $f(x)$ az $[u, e]$ szakaszban minden értéket felvesz c és e között, ezért mind a p, mind a q pontnak van az $[u, e]$ szakaszban inverz-iterált pontja. Tekintsük a p pont $[u, e]$ szakaszbeli inverz-iteráltjai közül azt amelynek az abszcisszája a legnagyobb és jelöljük ezt p_{-1}-gyel; $p_{-1} = \max\limits_{u<x\leq e} \{x\}$, $f(x) = p$. A q pontnak az $[u, e]$ szakaszbeli inverz-iteráltjai közül a p_{-1}-től jobbra a hozzá legközelebb esőt választva, jelöljük ennek

abszcisszáját q_{-1}-gyel; $q_{-1} = \min_{p_{-1}<x\leq e} \{x\}$, $f(x) = q$. Legyen $[p_{-1}; q_{-1}] = \delta_{-1}$.

Éppúgy bizonyítható be mint az 1.1. segédtétel esetében, hogy $(\delta_{-1})_1 = \delta$.

Most már a δ szakaszból kiindulva képezhetjük — az előzőek szerint — a δ_{-1}; majd ebből kiindulva a δ_{-2} szakaszt,..., az így előálló δ_{-n} $(n = 1, 2\dots)$ szakaszsorozatra $(\delta_{-n})_1 = \delta_{-(n-1)}$. Mint az 1.1. segédtételnél, úgy itt is indirekt bizonyítással igazolható, hogy bármely két ilyen inverz-iterált szakasznak nincs közös belső pontja. Éppúgy megmutatható mint 1.1-nél, hogy ha δ_{-n} és δ_{-n-k} állításunkkal ellentétben olyan szakaszpár, amelynek mindkét szakaszában vannak közös belső pontok, akkor δ és δ_{-k} is közös belső pontú szakaszok. Ez esetünkben azért lehetetlen, mert δ-nak nincs u-tól jobbra eső; δ_{-k}-nak pedig nincs u-tól balra eső belső pontja. Ezzel az 1.2. segédtételt bebizonyítottuk.

Ezután ebben az esetben a tétel bizonyítása — az 1.2. segédtétel szerint kialakított δ_{-n} szakaszsorozattal — szó szerint úgy folytatható és fejezhető be, mint az 1,3 esetpár esetén.

Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Irodalom

[1] A. RALSTON, A first course in numerical analysis, Mc Graw-Hill Inc., New York, (1969)

[2] B. BARNA, Über die Iteration reeller Funktionen I., *Publ. Math. Debrecen*, **7** (1960), 16–47.

[3] B. BARNA, Über die Iteration reeller Funktionen II., *Publ. Math. Debrecen*, **13** (1966), 167–172.

[4] B. BARNA, Berichtigung zur Arbeit, Über die Iterationen reeller Funktionen II., *Publ. Math. Debrecen*, **20** (1973), 281–282.

[5] B. BARNA, Über die Iteration reeller Funktionen III., *Publ. Math. Debrecen*, **22** (1979), 267–278.

[6] L. BERG (Rostock), Über irreguläre Iteratione folgen, *Publ. Math., Debrecen*, **17** (1971), 112–115.

[7] TIEN-YIEN LI and L. JAMES A. YORKE, Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly* (10) **82** (1975), 985–992.

A Fibonacci-szósorozatok egy általánosítása II.

ZAY BÉLA*

Abstract. (A generalization of the Fibonacci word-sequences, II.) In [5] we generalized the Fibonacci word-sequences which were investigated by J. C. Turner in [3] and we proved some theorems connected with them. In this paper we continue the investigation of these generalized word sequences. Under certain special conditions we determine the density of certain fixed words in the terms of word sequences.

A dolgozat tárgya az [5]-ben vizsgált szósorozatok további tanulmányozása.

J. C. Turner [2]-ban Fibonacci-szósorozatnak nevezte és $F(W_1, W_2)$-vel jelölte azt a szósorozatot, melynek első két eleme W_1, W_2, az n $(n > 2)$-edik elemét pedig az $n-2$-edik és $n-1$-edik elemének egymás mellé írásával képezzük. [5]-ben ezen sorozat bizonyos általánosításaival foglalkoztunk, amit most folytatunk a következő jelölések használata mellett.

Legyenek s és k rögzített pozitív egészek, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ az $x_1, \dots x_s$ betűk halmaza. Jelöljük $W(X)$-el az X-beli betűkből, ezek egymás mellé írásával képezett összes szó halmazát és $\overline{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)$-sal a $W(X)$ k-szoros Descartes szorzatának, $W^k(X)$-nek egy tetszőleges elemét.

Legyen minden i $(1 \le i \le k)$-re $f_i(\overline{w})$ a $W^k(X)$-et $W(X)$-be képező leképezés olyan, hogy minden $\overline{w} \in W^k(X)$-re

$$(1) \qquad f_i(\overline{w}) = \begin{cases} w_k, & \text{ha } i = 1, \\ w_1 w_2 \dots w_{i-1} w_k, & \text{ha } 2 \le i \le k \ . \end{cases}$$

Legyenek továbbá minden i $(1 \le i \le k)$-re és n pozitív egészre a $P_{n,i}(\overline{w})$ olyan $W^k(X)$-et $W(X)$-be képező leképezések, melyeket

$$(2) \qquad P_{n,i}(\overline{w}) = \begin{cases} w_i, & \text{ha } n = 1, \\ f_i(P_{n-1,1}(\overline{w}), P_{n-1,2}(\overline{w}), \dots, P_{n-1,k}(\overline{w})), & \text{ha } n > 1 \end{cases}$$

definiál minden $\overline{w} \in W^k(X)$-re!

$$(3) \qquad H_n(\overline{w}) = \begin{cases} h(\overline{w}), & \text{ha } n = 1, \\ H_{n-1}(f_1(\overline{w}), f_2(\overline{w}), \dots, f_k(\overline{w})), & \text{ha } n > 1 \end{cases}$$

* A dolgozat az OTKA 1641. sz. pályázat támogatásával készült.

leképezést, ahol $h(\overline{w})$ a $W^k(X)$-nek a $W(X)$-be való olyan leképezése, amelyet minden $\overline{w} \in W^k(X)$-re a

$$(4) \quad h(\overline{w}) = h(w_1, w_2, \ldots, w_k) = w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots w_{i_r}, (1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_r \leq k) .$$

képletet definiál.

Megjegyezzük, hogy az [5] 2. Tételében bizonyítottuk, hogy

$$(5) \qquad H_n(\overline{w}) = h(P_{n,1}(\overline{w}), P_{n,2}(\overline{w}), \ldots, P_{n,k}(\overline{w}))$$

így $h(\overline{w}) = w_i$ esetén, $H_n(\overline{w}) = P_{n,i}(\overline{w})$ adódik, minden $n \geq 1$-re, i $(1 \leq i \leq$ $\leq k)$-re és $\overline{w} \in W^k(X)$-re.

Bizonyos speciális esetekben vizsgálni fogjuk a rögzített $w_1 = v_1$, $w_2 =$ $= v_2$, ..., $w_k = v_k$ szavak (azaz $\overline{w} = (\overline{v}) = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$) és a (3) által meghatározott $H = \{H_n(\overline{w})\}_{n=1}^{\infty}$ szósorozatban a különböző betűk és szavak eloszlását, ezért bevezetjük a következő jelöléseket: Ha v a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ szavakból konkatenációval (egymás mellé írással) készített szó, akkor minden i $(1 \leq i \leq i \leq k)$-re $L_i(V)$ jelentse azt, hogy v_i hányszor fordul elő v-ben, $D_m(v)$ pedig azt, hogy x_m betű hányszor fordul elő v-ben $(1 \leq m \leq s)$! A v „szóhosszát" (azaz a $\sum_{i=1}^{k} L_i(v)$ összeget) jelölje $L(v)$, a v „betűhosszát" (azaz a $\sum_{m=1}^{s} D_m(v)$ összeget) pedig $D(v)$!

Abban az általános esetben, amikor

$$f_i(\overline{w}) = f_i(w_1, w_2, \ldots, w_k) = w_{j_{1,i}}, w_{j_{2,i}}, \ldots, w_{j_{p_i,i}}$$

ahol minden i $(1 \leq i \leq k)$-re p_i rögzített poszitív egész és $1 \leq j_{m,i} \leq k$ minden m $(1 \leq m \leq p_i)$ és minden i $(1 \leq i \leq k)$ egész számra, [1]-ben igazoltuk a következő tételt:

Az

$$\begin{aligned} L_j(H) &= \{L_j(H_n((\overline{v})))\}_{n=1}^{\infty}, D_m(H) = \\ &= \{D_m(H_n((\overline{v})))\}_{n=1}^{\infty}, L(H) = \{L(H_n(\overline{v}))\}_{n=1}^{\infty} \end{aligned}$$

és $D(H) = \{D(H_n(\overline{v}))\}_{n=1}^{\infty}$ közös $F_k(x)$ karakterisztikus polinommal rendelkező lineáris rekurzív sorozatok, ahol

$$(6) \qquad F_k(x) = \det(c_{ij}), c_{ij} = \begin{cases} -L_i\left(f_j(\overline{v})\right), & \text{ha } 1 \leq i \neq j \leq k, \\ x - L_i\left(f_j(\overline{v})\right), & \text{ha } 1 \leq i = j \leq k. \end{cases}$$

Abban a speciális esetben, amikor az $f_i(\overline{w})$ leképezések az (1) által meghatározottak, a karakterisztikus polinomról, illetve annak gyökeiről egy kicsit többet tudunk igazolni.

1. Tétel. Az $L_j(H)$, $D_m(H)$, $L(H)$ és $D(H)$ lineáris rekurzív sorozatok közös karakterisztikus polinomja minden j $(1 \leq j \leq k)$-re és m $(1 \leq m \leq s)$-re

$$f_k(x) = x^k - (x+1)^{k-1}, \tag{7}$$

továbbá $F_k(x)$-nek k különböző $\beta_i = {\alpha_i}^{k-1}$, $1 \leq i \leq k$ gyöke van, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ az $f(x) = x^k - x^{k-1} - 1$ polinom gyökei.

H. R. Ferguson [1] majd később C. E. Hoggatt és K. Alladi [2] igazolták, hogy az $f(x) = x^k - x^{k-1} - 1$ polinom gyökei különbözőek, és létezik közöttük olyan α_1, amely az összes többinél nagyobb abszolút értékű.

Ismert a Descartes-féle előjelszabály: Valós együtthatós egyenletben a pozitív gyökök p szám (ha többszörös gyök van, akkor többszörösséggel számolva) legfeljebb annyi, mint az együtthatók sorozatában az előjelváltozások t száma, továbbá $t-p$ mindig páros.

Ezt $f(x) = x^k - x^{k-1} - 1$-re alkalmazva $t = 1$ és így $p \leq t$ és $t-p$ párossága miatt $p = 1$, azaz éppen 1 pozitív valós gyöke van. Ez pedig éppen α_1, azaz (a fenntiek szerint létező) az összes többinél nagyobb abszolút értékű gyök. Hiszen ha ez az α_1 nem valós gyök lenne akkor $f(\overline{\alpha}_1) = 0$, $\mid \alpha_1 \mid = \mid \overline{\alpha}_1 \mid$ és $\alpha_1 \neq \overline{\alpha}_1$ miatt α_1 nem lenne az összes többinél nagyobb abszolút értékű. $f(x)$ egyetlen pozitív valós x gyökére az $(x-1)x^{k-1} = 1$ egyenlőségből adódóan $x > 1$ teljesül, viszont ha: $x \leq 0$ és $(x-1)x^{k-1} = 1$ akkor $\mid x \mid < 1$, tehát a pozitív valós gyök a legnagyobb abszolút értékű.

A Descartes-féle előjelszabályból adódik, hogy $f_k(x) = x^k - (x+1)^{k-1}$-nek is csak egyetlen pozitív valós gyöke van. Ez a $\beta_i = {\alpha_i}^{k-1}$ $i = 1, 2, \ldots$, k-ra összefüggés miatt csak $\beta_1 = \alpha_1^{k-1}$ lehet. Tehát minden i $(2 \leq i \leq k)$-ra teljesül a

$$\beta_1 > \mid \beta_i \mid \tag{8}$$

egyenlőtlenség. Ennek segítségével be fogjuk bizonyítani a 2. Tételt, amely speciális $v_1, v_2, \ldots, v_k$ szavakból képzett $\{P_{n,i}(\overline{v})\}_{n=1}^{\infty}$ szósorozatokban az egyes szavak illetve betűk előfordulási arányát határozza meg.

2. Tétel. Jelölje β_1 az $f_k(x) = x^k - (x+1)^{k-1}$ polinom pozitív valós gyökét, s az $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ betűhalmaz elemeinek számát és y egy rögzített, $x \leq y \leq k$ természetes számot! Ha egy $\overline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ vektorra

$$L(v_i) = \begin{cases} 0 \text{ (azaz } v_i \neq 0 \text{ üres szó)}, & \text{ha } i \leq i \leq y, \\ 1 \text{ (azaz } v_i \neq 0), & \text{ha } y < i \leq k, \end{cases} \tag{9}$$

és minden m $(1 \le m \le s)$-re a_m jelöli az

$$a_m = D_m(v_k)\beta_1^{-1} + \sum_{j=1}^{k-1} D_m(v_{k-j})\beta_1^{-2}(1+\beta_1^{-1})^{j-1}$$

összeget, akkor léteznek a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{k-j}(P_{n,i}(\overline{v}))}{L\,(P_{n,i}(\overline{v}))} = \begin{cases} \beta_1^{-1}, & \text{ha } j = 0, \\ \beta_1^{-2}(1+\beta_1^{-1})^{j-1}, & \text{ha } 1 \le j \le k \end{cases} \tag{10}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_m\,(P_{n,1}(\overline{v}))}{D\,(P_{n,1}(\overline{v}))} = \frac{a_m}{\sum\limits_{m=1}^{s} a_m}$$

határértékek.

Az 1. Tétel bizonyítása. Az (1)-ből

$$L_i\,(f_j(\overline{v})) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 1 \le j \le i < k, \\ 1, & \text{ha } (1 \le i < j \le k) \quad \text{vagy} \quad (i \le j \le i = k) \end{cases} \tag{11}$$

adódik, amit (6)-ba behelyettesítve

$$F_k(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & x & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \end{vmatrix}.$$

Innen $F_1(x)$-et és $F_2(x)$-et kifejtve könnyen belátható, hogy $k = 1$ és $k = 2$-re teljesül (11). Tegyük fel, hogy (11) teljesül $k-1$-re $(k \ge 3)$, majd fejtsük ki az $F_k(x)$ determinánst az első oszlopa szerint! Ekkor

$$F_k(x) = xF_{k-1}(x) + (-1)^{k+2} \begin{vmatrix} -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ x & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & x & \dots & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & x & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x & -1 \end{vmatrix} \tag{12}$$

adódik, ahol az egyenlet jobboldalán szereplő detemrinánsok rendje $k-1$.

Vonjuk ki rendre $i = k-1$-re, $k-2$-re, ..., 2-re a (12)-beli $(k-1)$-edrendű determináns i-edik oszlopából az $(i-1)$-edik oszlopát! A kapott determináns főátlója fölött csupa zérus áll, így a determináns értéke a főátlóban levő elemek szorzata, azaz $(-1)(-x-1)^{k-2}$, amit $F_{k-1}(x)=x^{k-1}-(x+1)^{k-2}$-vel együtt (12)-be behelyettesítve adódik (11).

Mivel minden i $(1 \leq i \leq k)$-re

$$f(\alpha_i)=\alpha_i^k-\alpha_i^{k-1}-1=0,$$

és ebből következően

$$F\left(\alpha_i^{k-1}\right)=\left(\alpha_i^{k-1}\right)^k-\left(\alpha_i^{k-1}+1\right)^{k-1}=\left(\alpha_i^{k-1}\right)^k-\left(\alpha_i^k\right)^{k-1}=0\,,$$

ezért $\beta_i=\alpha_i^{k-1}$ minden i $(1\leq i\leq k)$-re gyöke $F_k(x)$-nek.

Ha $\beta_i=\beta_j$ egyenlőség teljesülne valamely $1\leq i\neq j\leq k$-ra, akkor

$$\alpha_i^k-1=\alpha_i^{k-1}=\alpha_j^{k-1}=\alpha_j^k-1\,,$$

ahonnan az

$$\alpha_i^k=\alpha_j^k$$

egyenlőség következne, amelynek mind a két oldalát $\alpha_i^{k-1}=\alpha_j^{k-1}$-el elosztva $\alpha_i=\alpha_j$ adódna, tehát $\beta_i\neq\beta_j$ és $\beta_1=\alpha_1^{k-1}>|\beta_i|$, minden i $(1<i\leq k)$-re.

A 2. Tétel bizonyításánál szükségünk lesz néhány lemmára. A következőkben előbb ezeket fogjuk megfogalmazni és igazolni.

1. Lemma. Minden $n\geq j+2$ pozitív egész számra és tetszőleges $\overline{v}\in W(X)$-re

$$L_{k-j}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right)=\begin{cases} L\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right)\,, & \text{ha } j=0,\\ \sum\limits_{i=0}^{j-1}\left(L_j\left(f_i(\overline{v})\right)L_i\left(H_{n-1}(\overline{v})\right)\right)\,, & \text{ha } 1\leq j\leq k.\end{cases} \tag{13}$$

BIZONYÍTÁS. (5)-ből a $h(\overline{w})=w_1$ speciális esetben $H_n(\overline{v})=P_{n,1}(\overline{v})$ következik, minden $n\geq 1$-re. Továbbá (1) alapján minden $i,j(1\leq i,j\leq k)$-re

$$L_j\left(f_i(\overline{v})\right)=\begin{cases}0, & \text{ha } 1\leq i\leq j\leq k-1,\\ 1, & \text{ha } 1\leq j\leq i-1 \quad \text{vagy} \quad j=k.\end{cases} \tag{14}$$

A H és $L_j(H)$ sorozatok definíciójából közvetlenül adódik

$$L_j\left(H_n(\overline{v})\right)=\begin{cases} L_j\left(h(\overline{v})\right)\,, & \text{ha } n=1\,,1\leq j\leq k,\\ \sum\limits_{i=1}^{k}L_j\left(f_i(\overline{v})\right)L_i\left(H_{n-1}(\overline{v})\right)\,, & \text{ha } n>1\,,1\leq j\leq k.\end{cases} \tag{15}$$

(14) és (15)-ből kapjuk, hogy:

$$
\begin{aligned}
L_{k-1}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) &= L_k\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right),\\
L_{k-2}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) &= L_{k-1}\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + \left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right),\\
&\vdots\\
L_{k-j}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) &= L_{k-j+1}\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + \ldots +\\
&\quad + L_{k-1}\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + \left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right),\\
&\vdots\\
L_1\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) &= L_2\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + \ldots +\\
&\quad + L_{k-1}\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + L_k\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right),\\
L_k\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) &= L_1\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + L_2\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + \ldots +\\
&\quad + L_{k-1}\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + L_k\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

A (16) egyenletrendszer utolsó sorából

$$
L_k\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) = \sum_{i=1}^{k} L_i\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) = L\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right)
\tag{17}
$$

következik, amiből a (16) első sorát felhasználva

$$
L_{k-1}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) = L\left(P_{n-2,1}(\overline{v})\right)
$$

adódik, azaz $j = 0$-ra és $j = 1$-re igazoltuk (13)-at.

Tegyük fel, hogy $2 \leq j < k$ és minden t $(1 \leq t < j)$-re és $m \geq t+1$-re

$$
\begin{aligned}
L_{k-1}\left(P_{m,1}(\overline{v})\right) &= \sum_{i=0}^{t-1} \binom{t-1}{i} L_k\left(P_{m-i,1,1}(\overline{v})\right) =\\
&= \sum_{i=0}^{t-1} \binom{t-1}{i} L\left(P_{m-i-2,1}(\overline{v})\right)!
\end{aligned}
\tag{18}
$$

A (16) egyenletrendszer j-edik sorából a $(j-1)$-ediket kivonva

$$
L_{k-j}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) - L_{k-(j-1)}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) = L_{k-(j-1)}\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right)
$$

ahonnan (18)-at $t = j-1$, $m = n-1$, illetve $m = n$-re alkalmazva

$$
\begin{aligned}
L_{k-j}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) &= L_{k-(j-1)}\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + L_{k-(j-1)}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) =\\
&= \sum_{i=0}^{j-2} \binom{j-2}{i} L_k\left(P_{n-i-2,1}(\overline{v})\right) + \sum_{i=0}^{j-2} \binom{j-2}{i} L_k\left(P_{n-i-1,1}(\overline{v})\right)
\end{aligned}
$$

következik, amiből a binomiális együtthatók ismert tulajdonságait és (17)-et felhasználva:

$$
\begin{aligned}
L_{k-j}\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) &= L_k\left(P_{n-j,1}(\overline{v})\right) + L_k\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + \\
&+ \sum_{i=0}^{j-3}\left(\binom{j-2}{i} + \binom{j-2}{i+1}\right) L_k\left(P_{n-i-2,1}(\overline{v})\right) = \\
&= L_k\left(P_{n-j,1}(\overline{v})\right) + L_k\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + \sum_{i=0}^{j-3}\binom{j-1}{i+1} L_k\left(P_{n-(i+2),1}(\overline{v})\right) = \\
&= \binom{j-1}{j-1} L_k\left(P_{n-j,1}(\overline{v})\right) + \binom{j-1}{0} L_k\left(P_{n-1,1}(\overline{v})\right) + \\
&+ \sum_{i=1}^{j-2}\binom{j-1}{i} L_k\left(P_{n-i-1,1}(\overline{v})\right) = \\
&= \sum_{i=0}^{j-1}\binom{j-1}{i} L_k\left(P_{n-i-1,1}(\overline{v})\right) = \sum_{i=0}^{j-1}\binom{j-1}{i} L\left(P_{n-i-2,1}(\overline{v})\right) .
\end{aligned}
$$

Ezzel a lemmát igazoltuk.

2. Lemma. Ha $u \geq 1$ és m tetszőleges egész számok, akkor

$$
F^{(k)}_{m+k} + \sum_{i=1}^{u} F^{(k)}_{m+i} = F^{(k)}_{m+u+k}, \tag{19}
$$

ahol

$$
F^{(k)}_n = \begin{cases} n\,, & \text{ha } 1 \leq n \leq k, \\ F^{(k)}_{n+k} - F^{(k)}_{n+k-1}\,, & \text{ha } n \leq 0, \\ F^{(k)}_{n-1} + F^{(k)}_{n-k}\,, & \text{ha } n > k, \end{cases} \tag{20}
$$

azaz a Fibonacci sorozat egy $F^{(k)}$ általánosításának n-edik eleme.

BIZONYÍTÁS. $u = 1$-re az $F^{(k)}$ definíciójából közvetlenül adódik az állítás.

Ha $u - 1 \geq 1$, és

$$
F_{m+k} + \sum_{i=1}^{u-1} F^{(k)}_{m+i} = F^{(k)}_{m+u-1+k},
$$

akkor

$$F^{(k)}_{m+k} + \sum_{i=1}^{u} F^{(k)}_{m+i} = F^{(k)}_{m+u-1+k} + F^{(k)}_{m+u} = F^{(k)}_{m+u+k},$$

így az u-ra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítottuk a lemmát.

3. Lemma. Ha valamely rögzített $n_0 \geq 1$ és q egész számokra $\overline{v} \in W^k(x)$-re és minden i $(1 \leq i \leq k)$-re

$$L\left(P_{n_0,i}(\overline{v})\right) = F^{(k)}_{q-1+n_0+i} \tag{21}$$

teljesül, akkor minden n $(n \geq n_0)$ pozitív egészre és i $(1 \leq i \leq k)$-re

$$L\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) = F^{(k)}_{q-1+n_0+i+(n-n_0)(k-1)}\,. \tag{22}$$

BIZONYÍTÁS. $n = n_0$-ra (22)-ből (21)-et kapjuk, így $n = n_0$-ra igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamely n $(n > n_0)$-ra, és minden i $(1 \leq i \leq k)$-re

$$L\left(P_{n-1,i}(\overline{v})\right) = F^{(k)}_{q-1+n_0+i+(n-1-n_0)(k-1)}$$

teljesül. Ekkor (2), (1) és (19) felhasználásával ($u = i-1$ és $m = q-1+$ $+n_0 + (n-1-n_0)(k-1)$) helyettesítéssel)

$$\begin{aligned}
L\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) &= \sum_{j=1}^{i-1} L\left(P_{n-1,k}(\overline{v})\right) + L\left(P_{n-1,k}(\overline{v})\right) = \\
&= \left(\sum_{j=1}^{i-1} F^{(k)}_{q-1+n_0+j+(n-1-n_0)(k-1)}\right) + F^{(k)}_{q-1+n_0+k+(n-1-n_0)(k-1)} = \\
&= F^{(k)}_{q-1+n_0+i+(n-n_0)(k-1)}
\end{aligned}$$

adódik, ami bizonyítja az állítást.

4. Lemma. Ha valamely y $(0 \leq y < k)$ természetes számra és $\overline{v} \in W^k(x)$-re

$$L(v_i) = \begin{cases} 0 \ (\text{azaz } v_i = 0 \text{ üres szó}), & \text{ha } 1 \leq i \leq y, \\ 1 \ (\text{azaz } v_i \neq 0), & \text{ha } y < i \leq k, \end{cases} \tag{23}$$

akkor

$$L\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) = F^{(k)}_{-y+i+(n-2)(k-1)}\,. \tag{24}$$

BIZONYÍTÁS. Az $F^{(k)}$ definíciójából adódó

$$F_m^{(k)} = \begin{cases} 1, & \text{ha } 2-k \le m \le 0, \\ 0, & \text{ha } 3-2k \le m \le 1-k \end{cases} \tag{25}$$

értékek és (23) alapján minden y $(0 \le y < k)$-ra

$$L(v_i) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{ha } y < i < k, \\ 0, & \text{ha } 1 \le i \le y \end{array} \right\} = F^{(k)}_{1-k-y+i}$$

teljesül. Ez pedig a (2)-ből következő

$$L\left(P_{1,i}(\overline{v})\right) = L(v_i), \qquad (1 \le i \le k)$$

egyenlőségek miatt azt jelenti, hogy teljesül az előző lemma (21) feltétele az $n_0 = 1$, $q = 1-k-y$ értékekkel, így (22) is igaz, de ez most (a helyettesítések elvégzése után) azonos (24)-el, így az állítást igazoltuk.

A 2. tétel bizonyítása. [4]-ben értelmeztük az $f(x) = x^k - x^{k-1} - 1$ karakterisztikus polinommal és az

$$S_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 0, \\ 0, & \text{ha } 1 \le n \le k-1 \end{cases}$$

kezdőértékkel rendelkező $S = \{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ lineáris rekurzív sorozatot, és igazoltuk, hogy az S sorozat n-edik eleme $S(n) = \sum_{i=1}^{k} b_i \alpha_i^n$ explicit előállításában szereplő b_1 konstansra

$$b_1 = \left(\alpha_1^k + k - 1\right)^{-1}$$

teljesül, ahol α_1 az $f(x)$ polinom egyetlen pozitív valós gyöke.

(25)-ből, $F^{(k)}_{2-2k} = 1$-ből és S definíciójából minden m $(m \ge -2k+2)$-re

$$F_m^{(k)} = S_{m+2(k-1)}$$

következik. A (9) feltétel azonos (23)-mal, ezért a 4. Lemma alapján

$$\begin{aligned} L\left(P_{n,1}(\overline{v})\right) &= F^{(k)}_{-y+1+(n-2)(k-1)} = S_{-y+1+n(k-1)} = \\ &= \sum_{t=1}^{k} b_t \alpha_t^{1-y+n(k-1)} = \sum_{t=1}^{k} b_t \alpha_t^{1-y} \left(\alpha_t^{k-1}\right)^n = \sum_{t=1}^{k} d_t \beta_1^n, \end{aligned} \tag{26}$$

ahol $\beta_1, \ldots, \beta_k$ az 1. Tétel szerint az $F_k(x) = x^k - (x+1)^{k-1}$ polinom gyökei, és minden t $(1 \le t \le k)$-re $d_t = b_t \alpha_t^{1-y}$, így

$$d_1 = b_1 \alpha_1^{1-y} = \alpha_1^{1-y} \left(\alpha_1^k + k - 1\right)^{-1} \neq 0.$$

Az [5]-ben igazoltuk a következő két tételt:

Legyen $w_1, w_2, \ldots, w_n$ tetszőleges szósorozat, B_1, $B_2, \ldots$, $B_n, \ldots$, és B_1^I, $B_2^I, \ldots$, $B_n^I \ldots$ olyan leképezések, melyekre

$$B_1(w_1) = w_1, \quad B_1^I = 0 \quad \text{(üres szó)},$$

és $i \ge 1$ esetén, ha

$$B_i(w_1, w_2, \ldots, w_i) = w_{j_1} w_{j_2} \ldots w_{j_{2^{i-1}-1}} w_1$$

és

$$B_i^I(w_2, w_3, \ldots, w_i) = w_{j_1} w_{j_2} \ldots w_{j_{2^{i-1}-1}},$$

akkor legyen

$$B_{i+1}\left(w_1, w_2, \ldots, w_{i+1}\right) = B_i^I\left(w_2, w_3, \ldots, w_i\right) B_i\left(w_2, w_3, \ldots, w_{i+1}\right) w_1!$$

(A definícióból az $i = 2$ és $i = 3$ esetben például

$$B_2(w_1, w_2) = B_1^I B_1(w_2) w_1 = w_2 w_1$$

és

$$B_3(w_1, w_2, w_3) = B_2^I(w_2) B_2(w_2, w_3) w_1 = w_2 w_3 w_2 w_1$$

adódik.)

Az [5] 4. Tétele. Minden i $(1 \le i \le k)$-re, n $(n \le i+1)$-re és tetszőleges $\overline{v} \in W^k(X)$-re, teljesül a

$$P_{n,i}(\overline{v}) = B_i\left(P_{n-1,k}(\overline{v}), P_{n-2,k}(\overline{v}), \ldots, P_{n-i,k}(\overline{v})\right)$$

egyenlőség.

Az [5] 5. Tétele. A $P_{n,i}(\overline{v}) = B_i\left(P_{n-1,k}(\overline{v}), P_{n-2,k}(\overline{v}), \ldots, P_{n-i,k}(\overline{v})\right)$ szóban, tetszőleges $\overline{v} \in W^k(X)$ esetén, j $(1 \le j \le i)$-re a $P_{n-j,k}(\overline{v})$ szó pontosan $\binom{i-1}{j-1}$-szer fordul elő.

Az [5] 4. Tétele miatt a $P_{n,i}(\overline{v})$ szó a $P_{n-1,k}(\overline{v}), \ldots, P_{n-i,k}(\overline{v})$ szavak valamely egymás mellé írásából adódik, ezért az [5]5. Tételét, a (2)-ből adódó

$$P_{m,k}(\overline{v}) = f_1\left(P_{m,1}(\overline{v}), \ldots, P_{m,k}(\overline{v})\right) = P_{m+1,1}(\overline{v}) \tag{27}$$

egyenlőséget és (26)-ot felhasználva:

$$\begin{aligned}\beta_1^{-n} L\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) &= \beta_1^{-n} \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} L\left(P_{n-t,k}(\overline{v})\right) = \\ &= \beta_1^{-n} \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} L\left(P_{n+1-t,1}(\overline{v})\right) = \\ &= \sum_{t=1}^{i} \beta_1^{1-t} \binom{i-1}{t-1} \sum_{r=1}^{k} d_r \left(\frac{B_r}{\beta_1}\right)^{n+1-t},\end{aligned}$$

tehát

$$\beta_1^{-n} L\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) = \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} \sum_{r=1}^{k} d_r \left(\frac{\beta_r}{\beta_1}\right)^{n+1-t}. \tag{28}$$

A (8)-ból következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\beta_r}{\beta_r}\right)^{n} = 0 \tag{29}$$

minden r $(1 < r \leq k)$-re. (28) és (29)-ből a binomiális tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \beta_1^{-n} L\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) = \sum_{t=1}^{i} \beta_1^{1-t} \binom{i-1}{t-1} d_1 = d_1 \left(1 + \beta_1^{-1}\right)^{i-1} \tag{30}$$

adódik. A fentiekhez hasonlóan az [5] 5. Tételét, (27)-et, (13)-at és (26)-ot felhasználva

$$\begin{aligned}\beta_1^{-n} L\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) &= \beta_1^{-n} \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} L_k\left(P_{n-t,k}(\overline{v})\right) = \\ &= \beta_1^{-n} \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} L_k\left(P_{n+1-t,1}(\overline{v})\right) = \\ &= \beta_1^{-n} \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} L_k\left(P_{n-t,1}(\overline{v})\right) = \\ &= \sum_{t=1}^{i} \beta_1^{-t} \binom{i-1}{t-1} \sum_{r=1}^{k} d_r \left(\frac{\beta_r}{\beta_1}\right)^{n-t}\end{aligned} \tag{31}$$

és minden j $(1 \leq j < k)$-re

$$\beta_1^{-n} L_{k-j}\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) = \beta_1^{-n} \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} L_{k-j}\left(P_{n+1-t,1}(\overline{v})\right) =$$

$$= \beta_1^{-n} \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} L\left(P_{n-1-t-i,1}(\overline{v})\right) = \tag{32}$$

$$= \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} \sum_{i=0}^{i-1} \binom{j-1}{i} \beta_1^{1-t-i} \sum_{r=1}^{k} d_r \left(\frac{\beta_r}{b_1}\right)^{n-1-t-i}$$

következik. (29)-ből, (31)-ből és a binomiális tételből

$$\lim_{n\to\infty} \beta_1^{-n} L_k\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) = d_1 \beta_1^{-1} \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} \beta_1^{1-t} =$$

$$= d_1 \beta^{-1} (1+\beta^{-1})^{i-1} \tag{33}$$

adódik, amiből (30) és $d_1 \neq 0$ miatt $j = 0$-ra (10) következik.

(29)-ből, (32)-ből és a binomiális tételből hasonlóan kapjuk, hogy minden j $(1 \leq j < k)$-re

$$\lim_{n\to\infty} \beta_1^{-n} L_{k-j}\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) = d_1 \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} \beta_1^{-1-t} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} \beta_1^{-i} =$$

$$= d_1 \sum_{t=1}^{i} \binom{i-1}{t-1} \beta_1^{-1-t} (1+\beta_1^{-1})^{j-1} = \tag{34}$$

$$= d_1 \beta_1^{-2} (1+\beta^{-1})^{i-1} (1+\beta^{-1})^{j-1},$$

ahonnan (30) és $d \neq 0$ miatt minden j $(1 \leq j < k)$-re következik (10).

(33)-ból és (34)-ből minden m $(1 \leq m \leq s)$-re

$$\lim_{n\to\infty} \beta_1^{-n} D_m\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) = \sum_{q=1}^{k} D_m(v_q) \lim_{n\to\infty} L_q\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) =$$

$$= D_m(v_k) \lim_{n\to\infty} \beta_1^{-n} L_k\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) + \sum_{j=1}^{k-1} D_m(v_{k-j}) \lim_{n\to\infty} \beta_1^{-n} L_{k-j}\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) =$$

$$= D_m(v_k) d_1 \beta_1^{-n} \left(1+\beta_1^{-1}\right)^{i-1} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} D_m(v_{k-j}) d_1 \beta_1^{-2} (1+\beta_1^{-1})^{i-1} (1+\beta_1^{-1})^{j-1} =$$

$$= d_1 (1+\beta_1^{-1})^{i-1} a_m$$

adódik, amiből

$$\lim_{n\to\infty} \beta_1^{-n} D\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) = \sum_{m=1}^{s} \lim_{n\to\infty} \beta_1^{-n} D_m\left(P_{n,i}(\overline{v})\right) = d_1 (1+\beta_1^{-1})^{i-1} \sum_{m=1}^{s} a_m$$

következik.

A (9) feltétel miatt létezik olyan m $(1 \leq m \leq s)$ egész szám, hogy az a_m előállításában szereplő valamelyik tag nem zérus, így

$$d_1 (1+\beta_1^{-1})^{i-1} \sum_{m=1}^{s} a_m > 0,$$

és akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\beta_1^{-n} D_m\left(P_{n,i}(\overline{v})\right)}{\beta_1^{-n} D\left(P_{n,i}(\overline{v})\right)} = \frac{d_1(1+\beta_1^{-1}) a_m}{d_1(1+\beta_1^{-1}) \sum\limits_{m=1}^{s} a_m} = \frac{a_m}{\sum\limits_{m=1}^{s} a_m}.$$

Irodalom

[1] H. R. P. FERGUSON, On a Generalization of the Fibonacci Numbers Useful in Memory Allocation Schema; or about the Zeros of $z^k - z^{k-1} - 1$, $k > 0$, *The Fibonacci Quarterly*, **14.3** (1976), 233–243

[2] J. C. TURNER, Fibonacci World Patterns and binary Sequences, *The Fibonacci Quarterly*, **26.3** (1988), 233–246

[3] P. KISS and B. ZAY, On Sequences of Zeros and Ones, *Studia Scient. Math. Hungarica* (közlésre elfogadva)

[4] V. E. HOGATT Jr. and K. ALLADI, Limiting Ratios of Convolved Recursive Sequences *The Fibonacci Quarterly*, **15.3** (1977), 211–214

[5] ZAY B., A Fibonacci-szósorozatok egy általánosítása, *Acta Acad. Ped. Agriensis, Sect. Math.*, **21** (1993), 41–51

Egy rekurzív sorozat tagjainak átlagáról

TÓMÁCS TIBOR

Abstract. (Avarage order of the terms of a recursive sequence) For a fixed positive integer $k \geq 2$ let the sequence $G_k(n)$ of natural numbers be defined by $G_k(0) = 0$ and $G_k(n) = n - G_k(G_k(\ldots(G_k(n-1))\ldots))$, $(n \geq 1)$ with k iterations of G_k on the right-hand side. Denote by $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ the roots of the characteristic polynomial $f(x) = x^k - x^{k-1} - 1$ of the generalized Fibonacci sequence b_n. It is known that these roots are distinct and that there is a positive root among them with the greatest modulus, thus we can suppose that $\alpha > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \cdots \geq |\alpha_k| > 0$ (see e. g. [1]). In [2] P. Kiss proved that for any positive integer n, large enough, and $k \geq 2$ we have $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G_k(i) = v_1 N + v_2\alpha_2^n + v_3\alpha_3^n + o(\alpha_2^n) + O(1)$, where $N = b_{n+1}$ and v_1, v_2, v_3 are constants depending only on k. In this paper we generalize this result.

Legyen $k \geq 2$ rögzített egész szám. Definiáljuk a természetes számok egy $G_k(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sorozatát a $G_k(0) = 0$ kezdő elemmel és a

$$G_k(n) = n - G_k(G_k(\ldots(G_k(n-1))\ldots))$$

rekurzív formulával $n > 0$ esetre, ahol a jobb oldalon G_k-nak k-szoros iterációja van. Belátható, hogy a sorozat minden tagja jól definiált természetes szám (lásd Zay B. [4]).

Legyen

$$b_n = \begin{cases} n, & \text{ha } n = 1, 2, \ldots, k, \\ b_{n-1} + b_{n-k}, & \text{ha } n > k \end{cases}$$

a Fibonacci sorozat k-adrendű általánosított sorozata. Egy m pozitív egész esetén tekintsük azt a legnagyobb i_1 egész számot, melyre $b_{i_1} \leq m$ teljesül. Legyen $m_1 = m - b_{i_1}$. Ha $m_1 \neq 0$, válasszuk a legnagyobb i_2 egész számot, melyre $b_{i_2} \leq m_1$. Legyen $m_2 = m_1 - b_{i_2}$. Ha $m_2 \neq 0$, folytassuk az eljárást. Így minden pozitív egész szám egyértelműen felírható b_n sorozatbeli elemek összegeként

$$m = \sum_{i=1}^{j} a_i b_i \tag{1}$$

alakban, ahol $a_i = 1$ vagy 0. Jelöljük ezt röviden

$$m = a_j a_{j-1} \dots a_1$$

módon. Definiáljuk a $T_k(m)$ sorozatot $T_k(0) = T_k(1) = 0$ kezdő értékkel és a

$$T_k(m) = a_j a_{j-1} \dots a_2 = \sum_{i=2}^{j} a_i b_{i-1} \quad (m > 1) \tag{2}$$

formulával, ahol az a_i számok m-nek (1)-ben difiniált előállításában szereplő együtthatói.

A $G_k(n)$ és $T_k(n)$ sorozatok szoros kapcsolatban vannak egymással, D. S. Meek és G. H. J. Van Rees [3]-ban bizonyították, hogy

$$G_k(n) = T_k(n-1) + 1 \quad (n \geq 1). \tag{3}$$

Jelöljük $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$-val a b_n sorozat karakterisztikus polinomjának — az $x^k - x^{k-1} - 1$ polinomnak — a gyökeit. Ismert, hogy van a gyökök között egy legnagyobb abszolút értékű pozitív valós gyök, ezért feltehetjük, hogy

$$\alpha > |\alpha_2| \geq |\alpha_3| \geq \dots \geq |\alpha_k| > 0, \tag{4}$$

ahol $\alpha > 1$ valós szám (lásd K. Dilcher [1]).

Kiss Péter [2]-ben a $G_k(n)$ sorozat tagjainak átlagát vizsgálta, és bizonyította, hogy elég nagy n egészek esetén

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} G_k(i) = v_1 N + v_2 \alpha_2^n + v_3 \alpha_3^n + o(\alpha_2^n) + O(1), \tag{5}$$

ahol $N = b_{n+1}$ és a v_1, v_2, v_3 csak k-tól függő valós konstansok.

Ezen dolgozat célja megmutatni, hogy nemcsak $N = b_{n+1}$ alakú egészek esetén igaz az (5) formula.

A következő tételeket bizonyítjuk:

1. Tétel. Legyenek $k \geq 2$ és t rögzített pozitív egészek. Ekkor elég nagy pozitív n egészek esetén

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} G_k(i) = \left(v_1 N + v_2 \alpha_2^n + v_3 \alpha_3^n + O(1) + o(\alpha_2^n)\right) \frac{1}{1 + o(1)},$$

ahol $N = b_{n+1} + t$ és a v_1, v_2, v_3 csak k-tól függő konstansok.

2. Tétel. Legyenek $k \geq 2$ és $t \geq k$ rögzített egészek. Ekkor elég nagy pozitív n egészek esetén

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G_k(i) = \left(v_1' N + v_2'\alpha_2^n + v_3'\alpha_3^n + O(1) + o(\alpha_2^n)\right)\frac{1}{1+o(1)},$$

ahol $N = b_{n+1} + b_{n-t+1}$, és a v_1', v_2', v_3' csak k-tól és t-től függő konstansok.

Megjegyzés. Az 1. tételben a v_1, v_2, v_3 konstansok megegyeznek az (5)-ben található konstansokkal.

1. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Vizsgáljuk a $\sum_{i=1}^{N} G_k(i)$ összeget. Bontsuk fel két tagra az alábbi módon.

$$\sum_{i=1}^{N} G_k(i) = \sum_{i=1}^{b_{n+1}} G_k(i) + \sum_{i=b_{n+1}+1}^{N} G_k(i) \tag{6}$$

Az első összeg [2] szerint

$$\sum_{i=1}^{b_{n+1}} G_k(i) = r_1\alpha^{2n} + r_2\alpha^n\alpha_3^n + r_3\alpha^n\alpha_3^n + r_4\alpha_2^{2n} + \\ + r_5\alpha_3^{2n} + r_6\alpha_2^n\alpha_3^n + O(\alpha^n) + O(\alpha^n\alpha_4^n) \tag{7}$$

alakban írható fel, ahol $r_i \quad (i = 1,2,3,4,5,6)$ k-tól függő konstansok. (3)-ból

$$\sum_{i=b_{n+1}+1}^{N} G_k(i) = T_k(b_{n+1}) + 1 + T_k(b_{n+1}+1) + 1 + \cdots + T_k(N-1) + 1 =$$

$$= N - b_{n+1} + \sum_{i=b_{n+1}}^{N-1} T_k(i) = t + \sum_{i=b_{n+1}}^{b_{n+1}+t-1} T_k(i)$$

következik. Elég nagy n esetén teljesül, hogy $t < b_{n-k+2}$, ezért $N < b_{n+2}$. Így $T_k(i)$ definiciója miatt minden $b_{n+1} \leq i \leq b_{n+1} + t - 1$ egész esetén $T_k(i) = b_n + T_k(i - b_{n+1})$. Ebből következik, hogy

$$\sum_{i=b_{n+1}+1}^{N} G_k(i) = t + tb_n + \sum_{i=0}^{t-1} T_k(i).$$

Ebben az összegben az n-től független tagok összegét jelöljük $f_{k,t}$-vel. Tehát

$$f_{k,t} := t + \sum_{i=0}^{t-1} T_k(i).$$

Ismert, hogy a b_n sorozat tagjai felírhatók

(8) $$b_n = c_1\alpha^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n$$

alakban, ahol $c_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$ csak k-tól függő komplex konstansok (K. Dilcher [1]).

Ezért

$$\sum_{i=b_{n+1}+1}^{N} G_k(i) = f_{k,t} + t(c_1\alpha^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n).$$

Az $\alpha > 1$ valós szám, másrészt (4) miatt

$$f_{k,t} + t(c_1\alpha^n + c_2\alpha_2^n + \cdots + c_k\alpha_k^n) \leq f_{k,t}\alpha^n + tc_1\alpha^n + tc_2\alpha_2^n + \cdots + tc_k\alpha_k^n \leq$$
$$\leq (f_{k,t} + tc_1 + tc_2 + \cdots + tc_k)\alpha^n.$$

Ebből következik, hogy

(9) $$\sum_{i=b_{n+1}+1}^{N} G_k(i) = O(\alpha^n).$$

(6), (7) és (9)-ből adódik, hogy

(10) $$\sum_{i=1}^{N} G_k(i) = r_1\alpha^{2n} + r_2\alpha^n\alpha_2^n + r_3\alpha^n\alpha_3^n + r_4\alpha_2^{2n} +$$
$$+ r_5\alpha_3^{2n} + r_6\alpha_2^n\alpha_3^n + O(\alpha^n) + O(\alpha^n\alpha_4^n),$$

továbbá (8)-ból

(11) $$N = b_{n+1} + t = s_1\alpha^n + s_2\alpha_2^n + \cdots + s_k\alpha_k^n + t = s_1\alpha^n + O(\alpha_2^n) + t,$$

ahol $s_i = c_i\alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$. Felhasználva (11)-et

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G_k(i) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} G_k(i)}{s_1\alpha^n + O(\alpha_2^n) + t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} G_k(i)}{s_1\alpha^n\left(1 + \frac{O(\alpha_2^n)+t}{s_1\alpha^n}\right)} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} G_k(i)}{s_1\alpha^n\,(1 + o(1))}$$

adódik, amiből (10) alapján kapjuk az

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G_k(i) = \Bigg(& p_1\alpha^n + p_2\alpha_2^n + p_3\alpha_3^n + p_4\left(\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)^n \alpha_2^n + p_5\left(\frac{\alpha_3}{\alpha}\right)^n \alpha_3^n + \\
&+ p_6\left(\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha}\right)^n + O\left(\alpha_4^n\right) + O(1)\Bigg)\frac{1}{1+o(1)}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

becslést, ahol $p_i = \frac{r_i}{s_1}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. De

$$
\begin{aligned}
p_1\alpha^n = (s_1\alpha^n + s_2\alpha_2^n + \cdots + s_k\alpha_k^n + t)\frac{p_1}{s_1} - \frac{p_1}{s_1}s_2\alpha_2^n - \\
- \frac{p_1}{s_1}s_3\alpha_3^n - \cdots - \frac{p_1}{s_1}s_k\alpha_k^n - \frac{p_1}{s_1}t.
\end{aligned}
$$

Mivel $s_1\alpha^n + s_2\alpha_2^n + \cdots + s_k\alpha_k^n + t = N$, továbbá (4) miatt

$$
-\frac{p_1}{s_1}s_4\alpha_4^n - \frac{p_1}{s_1}s_5\alpha_5^n - \cdots - \frac{p_1}{s_1}s_k\alpha_k^n = O(\alpha_4^n),
$$

és

$$
-\frac{p_1}{s_1}t = O(1),
$$

így $v_1 := \frac{p_1}{s_1}$, $d_2 := -\frac{p_1}{s_1}s_2$, $d_3 := -\frac{p_1}{s_1}s_3$ jelöléssel

$$
p_1\alpha^n = v_1 N + d_2\alpha_2^n + d_3\alpha_3^n + O(\alpha_4^n) + O(1) \tag{13}
$$

adódik.Tudjuk még, hogy

$$
p_4\left(\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)^n \alpha_2^n + p_5\left(\frac{\alpha_3}{\alpha}\right)^n \alpha_3^n + p_6\left(\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha}\right)^n + O\left(\alpha_4^n\right) = o\left(\alpha_2^n\right). \tag{14}
$$

Ezért (12), (13) és (14) alapján

$$
\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G_k(i) = \left(v_1 N + v_2\alpha_2^n + v_3\alpha_3^n + O(1) + o(\alpha_2^n)\right)\frac{1}{1+o(1)},
$$

ami a tételünket bizonyítja. A bizonyítás során a konstansok értékét nem befolyásolta t, így valóban igaz a megjegyzés állítása is.

2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. (1), (2), (3) és (7) alapján

$$\sum_{i=1}^{N} G_k(i) = \sum_{i=1}^{b_{n+1}-1} T_k(i) + N + b_{n-t+1}b_n + \sum_{i=1}^{b_{n-t+1}-1} T_k(i) =$$
$$= x_1\alpha^{2n} + x_2\alpha^n\alpha_2^n + x_3\alpha^n\alpha_3^n + x_4\alpha_2^{2n} + x_5\alpha_3^{2n} +$$
$$+ x_6\alpha_2^n\alpha_3^n + O(\alpha^n) + O(\alpha^n\alpha_4^n) + N + b_nb_{n-t+1},$$

ahol

$$x_i = r_i\left(1 + \frac{1}{\alpha^t\alpha_i^t}\right) \quad (i = 1,2,3), \quad x_4 = r_4\left(1 + \frac{1}{\alpha_2^{2t}}\right),$$
$$x_5 = r_5\left(1 + \frac{1}{\alpha_3^{2t}}\right) \quad \text{és} \quad x_6 = r_6\left(1 + \frac{1}{\alpha_2^t\alpha_3^t}\right).$$

A továbbiakban

$$b_nb_{n-t+1} = (c_1\alpha^n + c_2\alpha_2^n + \dots + c_k\alpha_k^n)\left(\frac{s_1}{\alpha^t}\alpha^n + \frac{s_2}{\alpha_2^t}\alpha_2^n + \dots + \frac{s_k}{\alpha_k^t}\alpha_k^n\right) =$$
$$= z_1\alpha^{2n} + z_2\alpha^n\alpha_2^n + z_3\alpha^n\alpha_3^n + z_4\alpha_2^{2n} + z_5\alpha_3^{2n} + z_6\alpha_2^n\alpha_3^n + O\left(\alpha^n\alpha_4^n\right)$$

felhasználásával, ahol

$$z_1 = \frac{s_1^2}{\alpha^{t+1}}, \quad z_2 = \frac{s_1s_2}{\alpha\alpha_2^t} + \frac{s_1s_2}{\alpha^t\alpha_2}, \quad z_3 = \frac{s_1s_3}{\alpha\alpha_3^t} + \frac{s_1s_3}{\alpha^t\alpha_3},$$
$$z_4 = \frac{s_2^2}{\alpha_2^{t+1}}, \quad z_5 = \frac{s_3^2}{\alpha_3^{t+1}}, \quad z_6 = \frac{s_2s_3}{\alpha_2\alpha_3^t} + \frac{s_2s_3}{\alpha_2^t\alpha_3},$$

a tétel hasonlóan bizonyítható, mint az előző.

Megjegyzés. Kiszámolva v_1 és v_1' konstansokat

$$v_1' = \frac{r_1\left(1 + \frac{1}{\alpha^{2t}}\right) + \frac{s_1^2}{\alpha^{t+1}}}{s_1^2\left(1 + \frac{1}{\alpha^t}\right)^2},$$

továbbá

$$v_1 = \frac{c_1\alpha^{1-4k}}{\alpha - 1} + \alpha^{-4k}\left(\sum_{q=2}^{k} \frac{c_q\alpha_q^2}{\alpha^2 - \alpha_q}\right) + \alpha^{-4k}\frac{\alpha^{2k} - 1}{\alpha^2 - 1} + \frac{1}{2\alpha^2}$$

adódik. Belátható behelyettesítéssel, hogy $k = 2$ és $k = 3$ esetén $v_1 = v_1'$. A sejtés az, hogy ez minden $k \geq 2$ esetén teljesül, vagyis a 2. tételben definiált N-re is igaz az (5) formula.

Az 1. tétel bizonyításából látható, hogy $v_1 = \frac{r_1}{c_1^2\alpha^2}$. Ezért $v_1 = v_1'$ akkor és csak akkor teljesül, ha $c_1^2\alpha = 2r_1$. Visszaírva r_1-et v_1-be kapjuk, hogy a sejtés ekvivalens a $v_1 = \frac{1}{2\alpha}$ állítással.

Irodalom

[1] K. DILCHER, On a class of iterative recurrence relations, *Fibonacci Quart.*, (to appear).

[2] P. KISS, Avarage order of the terms of a recursive sequence, *Proc. of the Austrian-Hungarian-Slovak. Number Theory Coll.*, Graz, (1992), (to appear).

[3] D. S. MEEK and G. H. J. VAN REES, The solution of an iterated recurrence, *Fibonacci Quart.*, **22** (1984), 101–104.

[4] ZAY B.: Egy rekurzív sorozatról. *Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, Sectio Mat.*, (megjelenés alatt).

K-adrendű általánosított Farey—Fibonacci sorozat, és tagjai logaritmusának eloszlása

MÁTYÁS FERENC

Abstract. (Farey—Fibonacci sequence of order k and the distribution of the logarithms of it's terms) This paper deals with the Farey—Fibonacci sequences, that is with the set of G_i/G_j $(0 \le i,\ i \ne j,\quad 0 \le j \le k)$, where G_i and G_j are the terms of a second order linear recurrence under some conditions. It is proved that $\{\log_c(G_i/G_j)\}$ is uniformly distributed modulo 1 if and only if $\log_c \alpha$ is not a rational number, where α denotes the positive root of the equation $x^2 - Ax - B = 0$ $(A \ge 1, B \ge 1, G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2}, 0 \le G_0 < G_1)$.

Jelöljön $G = G(A, B, G_0, G_1) = (G_n)_{n=0}^{\infty}$ egy másodrendű lineáris rekurzív sorozatot, melyet az A, B, G_0, G_1 rögzített egészekkel és a $G_n = AG_{n-1} + BG_{n-2}$ $(n > 1)$ rekurziós formulával értelmezzünk. Ismert, hogy ha $AB \ne 0, G_0^2 + G_1^2 \ne 0$ és ha az $x^2 - Ax - B = 0$ egyenletnek két különböző α, ill. β $(|\alpha| \ge |\beta|)$ gyöke van, akkor

$$G_n = a\alpha^n + b\beta^n \quad (n \ge 0), \tag{1}$$

ahol $a = (G_1 - \beta G_0)/(\alpha - \beta)$ és $b = (G_1 - \alpha G_0)/(\beta - \alpha)$.

A $G = G(A, B, 0, 1)$ sorozatot R-rel, tagjait R_n-nel, míg a $G = G(1, 1, 0, 1)$ sorozatot F-fel, tagjait F_n-nel szokás jelölni.

K. Alladi [1] az F_i/F_j $(1 \le i < j \le k)$ törtek növekvő sorrendben írt sorozatát vizsgálta és több — a Farey-törteknél [10] is ismert — tulajdonságot bizonyított. Innen ered a fenti törtek Farey-Fibonacci-féle törtek elnevezése. Mátyás F. [7] és [8]-ban általánosította K. Alladi [1]-beli eredményét az alábbi feltételeket kielégítő $G = G(A, B, G_0, G_1)$ sorozatokra:

$$\begin{aligned} &A \ge 1, B \ge 1, \quad 0 \le G_0 < G_1, \quad \text{illetve ha} \quad G_0 \ne 0, \quad \text{akkor} \\ &0 < G_1/G_0 < \alpha_5 \quad \text{és} \quad G_1/G_0 \ne \alpha, \alpha_1, \alpha_3, \end{aligned} \tag{2}$$

ahol $\alpha_i (i = 1, 3, 5)$ jelöli az $R_i x^2 - (R_{i+2} + BR_{i-1})x - BR_{i+1} = 0$ egyenlet pozitív gyökét (α_i pozitív gyök egyértelmű létezése és $\alpha < \alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_5$ fennállása az A, B, G_0 és G_1-re tett feltételekből bizonyítható (l. [8])).

A (2) feltételnek megfelelő G sorozatból képzett G_i/G_j $(0 \leq i < j \leq k)$ törtek növekvő sorrendben írt sorozatát a későbbiekben szereplő Lemmában idézzük. Ha a G_i/G_j törtek esetén $0 \leq i < j \leq k$ feltétel helyett a $0 \leq i, i \neq j$, $0 \leq j \leq k$ (k legyen egy rögzített természetes szám) feltételeket tekintjük, akkor a G_i/G_j törteknek egy végtelen sorozatához jutunk. Erről szól az alábbi definíció:

A G_i/G_j törtek növekvő sorrendben írt sorozatát k-adrendű általánosított Farey—Fibonacci-típusú sorozatnak nevezzük és FG_k-val jelöljük, ha a nevezőben szereplő G_j tag indexe legfeljebb k lehet.

Megjegyzendő, hogy az FG_k végtelen sorozat tagjai úgy állnak elő, hogy a G sorozat minden $G_n(n = 0, 1, 2 \ldots)$ tagját elosztjuk a $G_0, G_1 \ldots, G_k$ számok mindegyikével, majd az így kapott G_i/G_j $(i \neq j)$ törteket növekvő sorrendbe rakjuk.

Jelen dolgozatban a fenti FG_k sorozatokkal, illetve e sorozat tagjai logaritmusainak modulo 1 egyenletes eloszlásával foglalkozunk. Ez utóbbin a következőket értjük.

A valós számok $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozatát modulo 1 egyenletes eloszlásúnak nevezzük, ha a

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \Big(\sum_{\{x_n\} \in [a,b)} 1 \Big) = b - a$$

egyenlőség a [0,1) intervallum bármely [a,b) részintervallumára teljesül, ahol $\{x_n\}$ az x_n valós szám törtrészét jelöli és $n \leq N$. Egy $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat modulo 1 egyenletes eloszlásának vizsgálatakor jól használható J. G. van der Corput [5]-ben található elégséges feltételt adó tétele:

Ha $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ a valós számok olyan sorozata, melyre a $\lim\limits_{n \to \infty}(x_{n+1} - x_n)$ határérték létezik és irracionáli szám, akkor az $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sorozat modulo 1 egyenletes eloszlású.

Pozitív tagokból álló lineáris rekurzív sorozatok különböző alapú logaritmusainak modulo 1 egyenletes eloszlásával többen foglalkoztak, így pl.: R. L. Duncan [3]; J. L. Brown, Jr. és R. L. Duncan [2]; L. Kuipers és J. S. Shiue [6]; Molnár S. [9]; P. Kiss és R. Tichy [4]; L. Kuipers és H. Niederreiter [5].

Ahhoz, hogy a (2) feltételnek megfelelő G sorozatból előállíthassuk az FG_k végtelen sorozatot, szükségünk lesz az alábbi lemmára.

Lemma. Legyen G a (2)-t kielégítő sorozat. A G_i/G_j $(0 \leq i < j \leq n)$ törtek nagyság szerint növekvő véges sorozata:

a) ha $G_0 = 0$, $0 < i$ és $3 \leq j < n$, akkor

$$\frac{G_1}{G_n}, \frac{G_2}{G_n}, \frac{G_1}{G_{n-1}}, \frac{G_2}{G_{n-1}}, \ldots, \frac{G_1}{G_{n-2}}, \frac{G_2}{G_{n-2}}, \ldots, \frac{G_1}{G_{n-3}}, \frac{G_2}{G_{n-3}},$$

$$\ldots, \frac{G_1}{G_j} \frac{G_2}{G_j}, \ldots, \frac{G_1}{G_{j-1}}, \frac{G_2}{G_{j-1}}, \ldots, \frac{G_1}{G_2}$$

b) ha $G_0 \neq 0$, $0 < {}^{G_1}/_{G_0} < \alpha$ és $2 \leq j < n$, akkor

$$\frac{G_0}{G_n}, \frac{G_1}{G_n}, \frac{G_0}{G_{n-1}}, \frac{G_1}{G_{n-1}}, \ldots, \frac{G_0}{G_{n-2}}, \frac{G_1}{G_{n-2}}, \ldots, \frac{G_0}{G_{n-3}}, \frac{G_1}{G_{n-3}},$$
$$\ldots, \frac{G_0}{G_j} \frac{G_1}{G_j}, \ldots, \frac{G_0}{G_{j-1}}, \frac{G_1}{G_{j-1}}, \ldots, \frac{G_0}{G_1}$$

c) ha $G_0 \neq 0$, $\alpha < {}^{G_1}/_{G_0} < \alpha_1$ és $2 \leq j < n$, akkor

$$\frac{G_0}{G_n}, \frac{G_0}{G_{n-1}}, \frac{G_1}{G_n}, \frac{G_0}{G_{n-2}}, \ldots, \frac{G_1}{G_{n-1}}, \frac{G_0}{G_{n-3}}, \ldots, \frac{G_1}{G_{j+2}}, \frac{G_0}{G_j},$$
$$\ldots, \frac{G_1}{G_{j+1}} \frac{G_0}{G_{j-1}}, \ldots, \frac{G_1}{G_3}, \frac{G_0}{G_1}, \ldots, \frac{G_1}{G_2}$$

d) ha $G_0 \neq 0$, $\alpha_1 < {}^{G_1}/_{G_0} < \alpha_3$ és $3 \leq j < n$, akkor

$$\frac{G_0}{G_n}, \frac{G_0}{G_{n-1}}, \frac{G_1}{G_n}, \frac{G_0}{G_{n-2}}, \ldots, \frac{G_1}{G_{n-1}}, \frac{G_0}{G_{n-3}}, \ldots, \frac{G_1}{G_{j+2}}, \frac{G_0}{G_j},$$
$$\ldots, \frac{G_3}{G_5} \frac{G_0}{G_1}, \frac{G_1}{G_3}, \frac{G_2}{G_3}, \ldots, \frac{G_1}{G_2}$$

e) ha $G_0 \neq 0$, $\alpha_3 < {}^{G_1}/_{G_0} < \alpha_5$, ${}^{G_2}/_{G_5} > {}^{G_0}/_{G_3}$ és $5 \leq j < n$, akkor

$$\frac{G_0}{G_n}, \frac{G_0}{G_{n-1}}, \frac{G_1}{G_n}, \frac{G_0}{G_{n-2}}, \ldots, \frac{G_1}{G_{n-1}}, \frac{G_0}{G_{n-3}}, \ldots, \frac{G_1}{G_{j+2}}, \frac{G_0}{G_j},$$

$$\ldots, \frac{G_1}{G_7}, \frac{G_0}{G_5}, \ldots, \frac{G_1}{G_6} \frac{G_0}{G_4} \frac{G_0}{G_3}, \frac{G_2}{G_6}, \ldots, \frac{G_1}{G_5}, \frac{G_2}{G_5},$$
$$\ldots, \frac{G_1}{G_4} \frac{G_0}{G_2}, \ldots, \frac{G_5}{G_7}, \frac{G_0}{G_1}, \frac{G_3}{G_5} \frac{G_1}{G_3} \frac{G_2}{G_3}, \frac{G_4}{G_5}, \ldots, \frac{G_1}{G_2}$$

ahol a ... helyén hiányzó törteket minden esetben úgy kapjuk, mint ahogy az alábbi — (b)-nek megfelelő — esetben látható:

$$\frac{G_1}{G_j}, \frac{G_3}{G_{j+2}}, \frac{G_5}{G_{j+4}}, \ldots, \frac{G_{n-j+1}}{G_n}, \ldots, \frac{G_4}{G_{j+3}}, \frac{G_2}{G_{j+1}}, \frac{G_0}{G_{j-1}} \tag{3}$$

1. Tétel. A (2)-t kielégítő G sorozatból képzett FG_k végtelen sorozat egyértelműen előállítható, továbbá az FG_k sorozatban — legfeljebb véges sok tagtól eltekintve — $k+1$ (a Lemma a) esetében k) darab szomszédos tört számlálójában, ill. nevezőjében álló indexek különbsége rendre állandó, $k+1$ (ill. k) törtenként e különbség eggyel nő.

Megjegyzés. E tétel állítását demonstrálandó álljon itt példaként a Lemma b) esetének megfelelő FG_k sorozat, elhagyva az egynél kisebb értékű véges sok törtet:

$$\begin{aligned}(4)\qquad &\frac{G_1}{G_0}, \frac{G_3}{G_2}, \frac{G_5}{G_4}, \frac{G_6}{G_5}, \frac{G_4}{G_3} \frac{G_2}{G_1}, \\ &\frac{G_2}{G_0}, \frac{G_4}{G_2}, \frac{G_6}{G_4}, \frac{G_7}{G_5}, \frac{G_5}{G_3}, \frac{G_3}{G_1}, \quad \frac{G_3}{G_0}, \frac{G_5}{G_2}, \frac{G_7}{G_4}, \frac{G_8}{G_5}, \frac{G_6}{G_3}, \frac{G_4}{G_1}, \ldots\end{aligned}$$

2. Tétel. A (2) feltételt kielégítő G sorozatból képzett FG_k végtelen sorozat — véges sok tagtól eltekintve — előállítható $k+1$ (ill. k) darab olyan végtelen részsorozat egyesítettjeként, hogy az egyes részsorozatok tagjainak nevezője azonos, a számlálóban pedig — a G sorozat véges sok tagjától eltekintve — minden G_n szerepel, továbbá e részsorozatok (részhalmazok) diszjunktak.

A FG_k sorozat tagjainak logaritmusaiból képzett $\log_c(FG_k)$ sorozat moduló 1 egyenletes eloszlására ad választ a következő tétel:

3. Tétel. A (2)-t kielégítő G sorozatból képzett $\log_c(FG_k)$ sorozat akkor és csakis akkor modulo 1 egyenletes eloszlású, ha $\log_c \alpha$ irracionális szám.

A továbbiakban rátérünk a bizonyításokra.

A Lemma bizonyítását itt nem részletezzük, mivel az állítás, a), b) és c) részének a bizonyítása [7]-ben, míg a d) és e) bizonyítása [8]-ban megtalálható.

Az 1. Tétel Bizonyítása. Az FG_k végtelen sorozat minden tagja megtalálható a Lemma által — alkalmas n-esetén — adott 0 és 1 közötti törtek, ill. ezek reciprokai között. Mivel a Lemma-beli sorozatok előállítása egyértelmű, ezért az FG_k minden tagjának a sorozatbeli helyzete is egyértelmű, azaz FG_k egyértelműen létezik.

Ugyancsak a Lemmából adódik, hogy legfeljebb véges sok olyan tört van az a), b), c), d) és e) sorozatokban, melyekre nem teljesül a (3) képzési szabály, így e törtek reciprokain túl az FG_k sorozat a kivánt tulajdonságú lesz. Az m indexdifferenciájú törtek száma $k+1$ (ill. k), mivel ennyi

${G_{j+m}}/{G_j}$ tört képezhető a $0 \leq i, i \neq j, 0 \leq j \leq k$ (ill. $0 < i, i \neq j, 0 < j \leq k$) feltételek esetén és minden ilyen tört szerepel is az FG_k sorozatban. Az indexdifferenciák egyesével való növekedése szintén a Lemma következménye.

A 2. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. Jelölje FG_k' az FG_k sorozatból véges sok tag elhagyásával kapott, egynél nagyobb törtekből álló részsorozatát. Az 1. TÉTEL-ből adódik a — (4)-hez hasonló — FG_k sorozat konkrét alakja, így a kívánt $k+1$ (ill. $G_0 = 0$ esetén k) diszjunkt részhalmaz a következő:

$$K_j := \left\{ \frac{G_i}{G_j} \quad \middle| \quad i > j \right\},$$

ahol $j = 0, 1, 2, \ldots, k$ a lemma b), c), d), e), része esetén, míg $j = 1, 2, \ldots, k$ a lemma a) része esetén és $FG_k' = \bigcup_{j=0}^{k} K_j$ (ill. $FG_k' = \bigcup_{j=1}^{k} K_j$).

A 3. TÉTEL BIZONYÍTÁSA. A $\log_c(FG_k)$ sorozat modulo 1 egyenletes eloszlásához elegendő belátni, hogy a $\log_c(FG_k')$ sorozat egyenletes eloszlású modulo 1. Ez utóbbihoz pedig elegendő belátni, hogy az előző K_j halmazok (sorozatok) elemei logaritmusaiból képzett $\log_c(K_j)$ sorozatok egyenletes eloszlásúak modulo 1. Vizsgáljunk meg egy tetszőleges $\log_c(K_j)$ sorozatot:

$$\log_c(K_j) = \left\{ \log_c \frac{G_{j+1}}{G_j}, log_c \frac{G_{j+2}}{G_j}, \log_c \frac{G_{j+3}}{G_j}, \ldots, \right\}$$

Az (1) explicit alakot használva:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\log_c \frac{G_{j+n+1}}{G_j} - \log_c \frac{G_{j+n}}{G_j} \right) = \lim_{n\to\infty} \log_c \frac{G_{j+n+1}}{G_{j+n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log_c \frac{a\alpha^{j+n+1} + b\beta^{j+n+1}}{a\alpha^{j+n} + b\beta^{j+n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log_c \alpha \frac{1 + \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{j+n+1}}{1 + \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{j+n}} = \log_c \alpha,$$

mivel a (2) feltétel miatt $\alpha > 1$, $\beta < 0$ és $\alpha > \mid \beta \mid$.

Így J. G. van der Corput idézett tétele szerint, ha $\log_c \alpha$ irracionális szám, akkor a $\log_c(K_j)$ sorozat modulo 1 egyenletes eloszlású, azaz a tétel elégséges volta bizonyítást nyert.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy $\log_c \alpha$ racionális volta esetén nem lehet a $\log_c(FG_k)$ egyenletes eloszlású modulo 1. Tekintsünk most is egy tetszőleges $\log_c(K_j)$ sorozatot:

Elég nagy n-re ($\alpha > 1, \beta < 0$ és $\alpha > |\beta|$ miatt) igaz az alábbi egyenlőség:

$$\log_c \frac{G_{j+n}}{G_j} = \log_c \left(\alpha^n \frac{1 + \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+j}}{1 + \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{j}} \right) = n \log_c \alpha +$$

$$+ \log_c \left(1 + \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+j} \right) - \log_c \left(1 + \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{j} \right).$$

Ebből látható, hogy $n \longrightarrow \infty$ esetben a $\log_c \frac{G_{j+n}}{G_j}$ törtrészei sorozatának — racionális $\log_c \alpha$ esetén — véges sok torlódási pontja van, ugyanis a $\log_c (1 + \frac{b}{a}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1})$ tag nullához tart, míg a harmadik tag konstans. Ez elegendő ahhoz, hogy a $\log_c(K_j)$ sorozat ne legyen moduló 1 egyenletes eloszlású. Mivel $\log_c(FG'_k) = \log_c(\bigcup_{j=0}^{k} K_j)$, ezért sem a $\log_c(FG'_k)$, sem a $\log_c(FG_k)$ sorozat nem lehet egyenletes eloszlású modulo 1. Ezzel a tételeink bizonyítását befejeztük.

Irodalom

[1] K. ALLADI, Farey sequence of Fibonacci numbers, *Fib. Quart.*, **12** (1975), 1-10.

[2] J. L. BROWN, Jr. and R. L. DUNCAN, Modulo one uniform distribution ..., *Fib. Quart.*, **8** (1970), 483-486.

[3] R. L. DUNCAN, An application of uniform distributions ..., *Fib. Quart.*, **5** (1967), 137–140.

[4] P. KISS and R. F. TICHY, On asymptotic distribution modulo a subdivision, **Publ. Math.**, **37** (1990), 188–191.

[5] L. KUIPERS and NIEDERREITER, Uniform distribution of sequences, *Wiley, New York*, (1974)

[6] L. KIOPERS and J. S. SHIUE, Remark on a paper by Duncan ..., *Fib. Quart.* **11** (1978), 292–294.

[7] MÁTYÁS F.: Másodrendű lienáris rekurzív sorozatok elemeinek hányadosairól. *Mat. Lapok*, **27** (1979), 379—389.

[8] F. MÁTYÁS, A generalization of the Farey-Fibonacci sequence, Proc. of the regional math. conf. Zielona Góra, (1990) Algebra Sec. 57—63.

[9] MOLNÁR S.: Másodrendű lineáris rekurzív sorozatok logaritmusának eloszlása. ETKF Tud. Közl. XIX./IX. (1989) Sec. Mat. 61—67.

[10] I. NIVEN—H. S. ZUCKERMAN: Bevezetés a számelméletbe, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1978).

Közös elemek másodrendű rekurzív sorozatokban

LIPTAI KÁLMÁN*

Abstract. (On common terms of linear recurrences) In the paper we investigate the common terms of linear recurrences $G(2u_0, 1, 0, 1)$ and $R(2v_0, 1, 0, 1)$. We prove that these recurrences have finite common terms if $u_0 < v_0$ and $u_0 \neq 1$.

Legyen $F(C, D, F_0, F_1) = \{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ az egész számok egy másodrendű lineáris rekurzív sorozata, melyet az F_0, F_1 kezdő elemekkel és az

$$F_n = CF_{n-1} + DF_{n-2} \quad (n > 1)$$

rekurzióval definiálunk, ahol C és D adott egész számok.

A továbbiakban előforduló másodrendű lineáris rekurzív sorozatokat hasonlóan definiáljuk.

Legyen $G = G(A, B, G_0, G_1)$ és $R = R(A, B, R_0, R_1)$ két másodrendű lineáris rekurzív sorozat, amelyeket ugyanazok az A, B konstansok definiálják. Jelöljük α és β-val a sorozatok

$$x^2 - Ax + B$$

definiáló polinomjának gyökeit, ahol nyilván feltehetjük, hogy $|\alpha| \geq |\beta|$.

A két sorozat közös elemeinek halmaza végtelen, ha G és R ekvivalens sorozatok (vagyis ha $G_{n+r} = R_{n+s}$ minden $n \geq 0$ egész esetén, valamely rögzített r és s természetes számok mellett). Nem ekvivalens sorozatok esetén Kiss Péter [3] bizonyította, hogy $|\beta| < 1$ esetén, nincs olyan közös elemük, amelyek indexei nagyobbak egy meghatározott konstanstól.

J. Binz [1] a $G(6, 1, 0, 1)$ és az $R(10, 1, 0, 1)$ sorozatokról bebizonyította, hogy csak egy közös elemük létezik. A bizonyításban felhasználta a másodrendű rekurzív sorozatok és a Pell egyenletek kapcsolatát, többek között Edgar I. Emerson [2] azon eredményét, miszerint az

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

* A kutatást a Kereskedelmi Bank Rt. Universitas Alapítványa támogatta.

egyenlet x, y megoldásai másodrendű lineáris rekurziónak tesznek eleget. Ebben a cikkben J. Binz [1] eredményeit általánosítjuk Thue egy tétele segítségével.

Tétel. A $G(2u_0, 1, 0, 1)$ és az $R(2v_0, 1, 0, 1)$ másodrendű rekuzív sorozatoknak, ahol $u_0 < v_0$ pozitív egészek és $u_0 \neq 1$, véges sok közös tagja van.

A tételünk bizonyításában szükségünk lesz az $x^2 + Dy^2 = z^2$, ahol $D \geq 1$, egy rögzített pozitív egész, diofantikus egyenlet primitív megoldásaira. Akkor mondjuk, hogy egy x, y, z pozitív egész számhármas primitív megoldás, ha $(x, y, z) = 1$, vagyis ha x, y, z relatív prímek.

A következőkben egy p prímszám esetén $p_k \parallel D$ azt jelenti, hogy $p^k \mid D$, de $p^{k+1} \nmid D$. Négyzetmentes D esetén Nishi, Akiro [6] megadta az egyenlet megoldásainak explicit alakját. Az alábbiakban tetszőleges d-re általánosítjuk az eredményt.

Lemma. Legyen D egy pozitív egész szám. Irjuk fel D-t $D = d^2 d_1 d_2 = = d^2 D_1$ alakban, ahol $(d_1, d_2) = 1$. Továbbá $8 \mid D_1$ esetén legyen $D_1 = 4D_1' = = 4d_1' d_2'$. Az

$$x^2 + Dy^2 = z^2$$

egyenlet primitív megoldásait a következő kifejezések szolgáltatják: ha $2 \parallel D_1$ vagy $4 \parallel D_1$ akkor

$$\begin{aligned} x &= d(d_1 u^2 - d_2 v^2), \\ y &= 2uv \\ z &= d(d_1 u^2 + d_2 v^2), \end{aligned} \tag{1}$$

ha $8 \mid D_1$, akkor (1) alakúak vagy

$$\begin{aligned} x &= d(d_1' u^2 - d_2' v^2), \\ y &= uv \\ z &= d(d_1' u^2 + d_2' v^2), \end{aligned} \tag{2}$$

ha D_1 páratlan, akkor (1) alakúak vagy

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} d(d_1 u^2 - d_2 v^2), \\ y &= uv \\ z &= \frac{1}{2} d(d_1 u^2 + d_2 v^2), \end{aligned} \tag{3}$$

ahol d, d_1, d_2, d_1', d_2' befutja a D felbontásában szereplő összes lehetséges értéket és u, v tetszőleges egészek, melyekre $(u,v) = 1$, $(d_1 u, d_2 v) = 1$, $(d,u) = 1$, $(d,v) = 1$ teljesül, továbbá
(1) típusú megoldásoknál $d_1 u$ és $d_2 v$ különböző paritású, d páratlan;
(2) típusú megoldásoknál u, v páratlanok, és

$$(d_1', d_2') = 1\,, \ (d_1' u, d_2' v) = 1\,;$$

(3) típusú megoldásoknál u, v páratlan.

BIZONYÍTÁS. Tekintsük az

$$x^2 + Dy^2 = z^2 \tag{4}$$

egyenletet. Elegendő olyan megoldásokat keresnünk, melyekre $(x,y,z) = 1$. Ha ugyanis $(x,y,z) = 1$, akkor $d_0 x, d_0 y, d_0 z$ is megoldás, ahol d_0 pozitív egész. Ha pedig $(x,y,z) = d' > 1$ egy megoldás, akkor $\frac{x}{d'}, \frac{y}{d'}, \frac{z}{d'}$ is megoldás.

További egyszerűsítést jelent, ha csak azokat a megoldásokat keressük meg, melyekre $(x,z) = 1$, ugyanis ha $(x,z) = d$ és $d \neq 1$, akkor x és z alakja $x = x_1 d$ és $z = z_1 d$, ahol $(z_1, x_1) = 1$, így a (4) egyenlet

$$(z_1 d)^2 + Dy^2 = (dz_1)^2$$

alakba írható. A megoldások primitívsége miatt $x_1 d, y, z_1 d$ relatív prímek, ezért $d^2 \mid D$ vagyis D alakja $D = d^2 D_1$. Így az egyenlet visszavezethető az

$$x^2 + D_1 y^2 = z^2 \tag{5}$$

egyenletre, melynek $(x,z) = 1$ feltételt kielégítő megoldásait kell keresnünk.

A fentiek miatt a továbbiakban az (5) egyenlettel foglalkozunk.

Először azon megoldásokat keressük, melyekben y páros.

Ekkor x, z nyilván páratlan és (5)-ből

$$D_1 \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{z+x}{2}\frac{z-x}{2}$$

következik, ahol $\frac{z+x}{2}$ és $\frac{z-x}{2}$ relatív prímek, hiszen összegük és különbségük (azaz z és x) relatív prímek.

Így $D_1 | \frac{z+x}{2}\frac{z-x}{2}$-ből $d_1 | \frac{z+x}{2}$ és $d_2 | \frac{z-x}{2}$ következik, ahol $d_1 d_2 = D_1$ és $(d_1, d_2) = 1$ és (5) alakja

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{z+x}{2d_1}\frac{z-x}{2d_2}. \tag{6}$$

Abból, hogy $\left(\frac{x+z}{2}, \frac{z-x}{2}\right) = 1$, következik, hogy

$$\left(\frac{z+x}{2d_1}, \frac{z-x}{2d_2}\right) = 1.$$

Ekkor a (6) egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha

$$\frac{x+z}{2d_1} = u^2 \quad \text{és} \quad \frac{z-x}{2d_2} = v^2,$$

ahol u, v pozitív egészek. Ebből

$$\begin{aligned} z &= d_1u^2 + d_2v^2, \\ x &= d_1u^2 - d_2v^2, \\ y &= 2uv \end{aligned}$$

adódik. Ezek után a (4) egyenlet x_0, y_0, z_0 azon megoldásai, melyekben y_0 páros, a következők:

$$\begin{aligned} x_0 &= d(d_1u^2 - d_2v^2), \\ y_0 &= 2uv, \\ z_0 &= d(d_1u^2 + d_2v^2), \end{aligned}$$

ahol $d^2d_1d_2 = D$ és $(d_1, d_2) = 1$.

Könnyű belátni, hogy ezek a megoldások primitívek, ha $(u, v) = 1$, $(d, u) = (d, v) = 1$, $(d_1u, d_2v) = 1$ és d_1u, d_2v különböző paritásúak. Azt is könnyen beláthatjuk, hogy D minden $D = d^2d_1d_2$ alakú felbontása esetén x_0, y_0, z_0 megoldása (4)-nek.

A következőkben azon megoldásokat keressük, melyekben y páratlan. Legyen $2 \parallel D_1$. Ekkor, mivel D_1y^2 páros, x és z paritásának meg kell egyezni. Az $(x, z) = 1$ feltétel miatt x és z páratlan. Ebben az esetben

$$x^2 + D_1y^2 \equiv 3 \pmod 4,$$

és

$$z^2 \equiv 1 \pmod 4,$$

tehát ebben az esetben y páratlan megoldás nem létezik.

Legyen $4 \parallel D_1$. Ekkor D_1 alakja $D_1 = 4k$, ahol k páratlan. Az (5) egyenlet a következő alakra hozható:

$$ky^2 = \frac{(x+z)(z-x)}{4}.$$

Mivel x és z most is páratlan, $z+x$ és $z-x$ közül az egyik osztható 4-el és mindkettő páros, így $2 \mid ky$, ami lehetetlen, mert k és y páratlan. Tehát ebben az esetben sincs primitív megoldása (5)-nek.

Ha $8 \mid D_1$, akkor D_1 alakja $D_1 = 4D_1'$, ahol D_1' páros. Az (5) egyenletet írjuk a következő alakba:

$$x^2 + D_1'(2y)^2 = z^2.$$

Ezen egyenlet megoldásai az előzőek miatt

$$\begin{aligned} x &= d_1'u^2 - d_2'v^2, \\ 2y &= 2uv, \\ z &= d_1'u^2 + d_2'v^2, \end{aligned}$$

ahol

$$d_1'd_2' = D_1'.$$

Így $y = uv$, amely páratlan, ha u, v páratlan. Ekkor tehát a megoldások (2) típusúak. A tételbeli feltételek mellett $(x, y, z) = 1$ is teljesül.

Most tekintsük a D_1 páratlan esetet.

Ekkor D_1y^2 páratlan és x, y paritása különböző.

Az előzőekhez hasonlóan (5)-ből

$$y^2 = \frac{z+x}{d_1}\frac{z-x}{d_2}$$

adódik, ahol d_1 , d_2 jelentése a szokásos. Könnyen belátható, hogy $\frac{z+x}{d_1}$ $\frac{z-x}{d_2}$ relatív prímek, és ezért

$$\frac{x+z}{d_1} = u^2 \quad \text{és} \quad \frac{z-x}{d_2} = v^2$$

adódik, ahol u, v páratlan és $(u, v) = 1$. Ekkor (5)-re

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(d_1u^2 + d_2v^2), \\ x &= \frac{1}{2}(d_1u^2 - d_2v^2) \\ y &= uv \end{aligned} \tag{7}$$

megoldások adódnak, amiből a (4) egyenletre megkapjuk a tételbeli (3) típusú megoldásokat, melyek a feltételek mellett primitívek. Megjegyezzük, hogy (7)-ben x páros és z páratlan, illetve fordítva, aszerint, hogy D_1 alakja $4k+1$, illetve $4k+3$. Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

A Tétel bizonyítása. Tekintsük a $G(2u_0, 1, 0, 1)$ másodrendű rekurzív sorozatot, amely $x_2 - 2u_0x + 1 = 0$ karakterisztikus egyenletének gyökei α_u, β_u, illetve az $R(2v_0, 1, 0, 1)$ sorozatot, amely karakterisztikus egyenletének gyökei α_v, β_v. Jól ismert, hogy ekkor a tagok explicit alakja

$$G_n = \frac{\alpha_u^n - \beta_u^n}{\alpha_u - \beta_u} \quad \text{illetve,} \quad R_n = \frac{\alpha_v^n - \beta_v^n}{\alpha_v - \beta_v}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\alpha_u - \beta_u = 2\sqrt{u_0^2 - 1} = 2\sqrt{D_u},$$

és

$$\alpha_v - \beta_v = 2\sqrt{v_0^2 - 1} = 2\sqrt{D_v}.$$

Belátjuk, hogy $y = G_n$, illetve $y = R_n$ valamely x-el, illetve z-vel az

(8) $$x^2 - d_u y^2 = 1, \quad \text{illetve} \quad z^2 - d_v y^2 = 1$$

egyenlet megoldásai.

Csak G_n-re bizonyítjuk, R_n-re a bizonyítás hasonló.

$$G_u = \frac{1}{2\sqrt{D_u}}(\alpha_u^n - \beta_u^n)$$

miatt,

$$1 + D_u y^2 = 1 + D_u G_u^2 = 1 + D_u \frac{1}{4D_u}\left(\alpha^{2n} - 2\beta_u^n \beta_u^n + \beta_u^{2n}\right) =$$
$$= 1 + \left(\frac{\alpha_u^n}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \left(\frac{\alpha_u^n}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha_u^n}{2} + \frac{\beta_u^n}{2}\right)^2 = x^2,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\alpha_u\beta_u = 1$. A binomiális tétel segítségével — felhasználva α_u, β_u alakját — igazolható, hogy

$$x = \left(\frac{\alpha_u^n}{2} + \frac{\beta_u^n}{2}\right)$$

egész.

Ha van közös eleme a két sorozatnak, akkor az előzőek miatt

$$x^2 - D_u y^2 = z^2 - D_v y^2 \quad (= 1) \tag{9}$$

valamely x, y, z pozitív egészekre, melyekre $(x, y, z) = 1$, és ebből

$$x^2 + (D_v - D_u) y^2 = z^2$$

következik.

Bevezetve a $D = D_v - D_u = (v_0^2 - u_0^2)$ jelölést a

$$x^2 + D y^2 = z^2 \tag{10}$$

egyenletet kapjuk (ahol $D > 0$), melynek a fentiek miatt x, y, z egy primitív megoldása.

A (10) egyenlet primitív megoldásait meghatároztuk a Lemmában. Nyilvánvaló, hogy ezen primitív megoldásokból kerülnek ki az

$$x^2 - D_u y^2 = 1 \tag{11}$$

egyenlet megoldásai is.

A (10) egyenlet megoldásai 3 típusba sorolhatók, ezek felhasználásával (11) a következőképpen alakul:

(1) típusnál

$$\left(d(d_1 u^2 - d_2 v^2)\right)^2 - D_u 4 u^2 v^2 = 1.$$

Négyzetreemelés, és a $D_u = u_0^2 - 1$ helyettesítés elvégzése után

$$d^2 d_1^2 u^4 - (2d^2 d_1 d_2 + 4u_0^2 - 4) u^2 v^2 + d^2 d_2^2 v^4 = 1,$$

mivel $d^2 d_1 d_2 = D = v_0^2 - u_0^2$,

$$d^2 d_1^2 u^4 - (2v_0^2 + 2u_2^2 - 4) u^2 v^2 + d^2 d_2^2 v^4 = 1 \tag{11}$$

adódik.

Hasonló módon a (2) típusú megoldás esetén

$$d^2 {d_1'}^2 u^4 - (2v_0^2 - u_0^2 - 1) u^2 v^2 + d^2 {d_2'}^2 v^4 = 1, \tag{12}$$

illetve a (3) típusnál a

$$d^2 d_1^2 u^4 - (2v_0^2 + 2u_0^2 - 4) u^2 v^2 + d^2 d_2^2 v^4 = 4 \tag{13}$$

egyenlet adódik.

Thue egy ismert tétele szerint az

$$f(x,y) = ax^4 + bx^3 + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = m,$$

egyenletnek, ahol a, b, c, d, e egész számok, csak véges sok x, y egész megoldása van, ha $f(x,y)$ nem teljes négyzet (lásd. pl. [5], 235. oldal).

A (11), (12), (13) egyenletnek véges sok u, v egész megoldása van, ha a bal oldal nem teljes négyzet. Ez akkor igaz, ha

$$2v_0^2 - u_0^2 - 1 \neq 2d^2 d_1' d_2' = 2D = 2(v_0^2 - u_0^2), \tag{14}$$

illetve

$$2v_0^2 + 2u_0^2 - 4 \neq 2d^2 d_1 d_2 = 2D = 2(v_0^2 - u_0^2) \tag{15}$$

teljesül

A (14), (15) feltételek pedig teljesülnek, ha $u_0 \neq 1$, amit viszont a tételben kikötöttünk.

Ebből következik, hogy a (9) egyenletnek csak véges számú x, y, z megoldása van és így a két sorozatnak csak véges számú közös eleme lehet.

Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy a tételben $u_0 \neq 1$ feltétel szükséges. Ugyanis, ha $u_0 = 1$, akkor a $G(2,1,0,1)$ sorozat azonos a temrészetes számok sorozatával, és így minden sorozattal végtelen sok közös eleme van.

Megjegyezzük még, hogy Kiss Péter [4] bizonyos rekurzív sorozatokra hasonló eredményeket nyert, ő az algebrai számok logaritmusainak lineáris formáira adott becsléseket használta fel a bizonyításban.

Irodalom

[1] J. BINZ, Aufgabe 832, *Elemsente Math.*, **35** (1980), 155.

[2] EDGAR I. EMERSON, Recurrent sequences in the equation $DQ^2 = R^2 + N$, *Fibonacci Quart.*, **7** No3. (1969), 231–242.

[3] P. KISS: Közös elemek másodrendű rekurzív sorozatokban. *Acta Acad. Paed. Agriensis*, **16** (1982), 539—546.

[4] P. KISS, On common terms of linear recurrences, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **40** (1982), 119–123.

[5] L. J. MORDELL, Diophantine Equations, *Academic Press*, (1969)

[6] NISHI, AKIRO, A method for solving a diophantine equation $ax^2 + y^2 = z^2$, *J. Fac. Educ., Saga Univ.*, **36** No. 2/II., (1989), 25–29.

Teljes hatványok lineáris rekurzív sorozatokban

JAMES P. JONES* és KISS PÉTER**

Abstract. „Pure powers in linear recursive sequences." A linear recursive sequence G of order k is defined by the integer initial terms $G_0, G_1, \ldots, G_{k-1}$, integer constansts $A_1, A_2, \ldots, A_k$ and by the recursion $G_n = A_1 G_{n-1} + \ldots + A_k G_{n-k}$ for $n \geq k$. In the case $k = 2$ it is known that there are only finitely many perfect powers in such sequence. In the general case, under certain hypotheses, we show that for any n there exists a number q_0, depending on G and n, such that the equation $G_n^r G_x^{q-r} = w^q$ in positive integers x, w, q, r has no solution with $x > n$, $q > q_0$ and $0 < r \leq q/2$.

Legyen $R = R(A, B, R_0, R_1)$ egy másodrendű lineáris rekurzív sorozat, melyet az

$$R_n = AR_{n-1} + BR_{n-2} \quad (n > 1)$$

rekurzió definiál, ahol A, B, R_0 és R_1 rögzített egészek. A következőkben feltesszük, hogy az R sorozat nem degenerált, azaz ha α, β jelöli az $x^2 - Ax - B = 0$ egyenlet gyökeit, akkor α/β nem egységgyök.

Az $R(1,1,0,1)$ és $R(2,1,0,1)$ speciális sorozatokat Fibonacci, illetve Pell-sorozatoknak nevezzük, és F-fel, illetve P-vel fogjuk jelölni.

Az R sorozat tagjai között előforduló teljes hatványokkal már többen foglalkoztak. A Fibonacci-sorozat tagjaira, a Fibonacci-számokra Cohn [2] és Wylie [23] megmutatták, hogy F_n akkor és csak akkor teljes négyzet, ha $n = 0, 1, 2$ vagy 12. J. C. Lagarias és D. P. Weisser [7], Pethő [12], továbbá London és Finkelstein [9,10] bizonyították, hogy F_n csak akkor teljes köb, ha $n = 0, 1, 2$ vagy 6. Ljunggren [8] egy eredményéből következik, hogy egy P_n Pell-szám csak akkor teljes négyzet, ha $n = 0, 1$ vagy 7, Pethő [13] pedig igazolta, hogy csak ezek a teljes hatvány Pell-számok. Hasonló, de általánosabb eredményeket nyertek McDaniel és Ribenboim [11], Robbins [19,20], Cohn [3,4,5] és Pethő [15]. Szép és általános eredményt igazolt Shorey és Stewart [21], valamint A. Pethő [14]: bármely nem degenerált másodrendű

* Research was supported by the National Scientific Research Council of Canada, Grant No OGP 0004525

** A kutatást (részben) az Alapítvány a Magyar Felsőoktatásért és Kutatásért és az OTKA 1641. sz. pályázata támogatta.

lineáris rekurzív sorozat csak véges számú teljes hatványt tartalmaz, és ezek effektíve meghatározhatók.

Más típusú problémákat vetett fel Ribenboim és McDaniel. Egy R sorozatban akkor mondjuk, hogy az R_m és R_n elemek azonos négyzetosztályban vannak, ha léteznek nem zérus x, y egész számok úgy, hogy $R_m x^2 = R_n y^2$ vagy, ami ezekkel ekvivalens, ha

$$R_m R_n = t^2$$

valamely t egész esetén. Egy négyzetosztályt triviálisnak nevezzük, ha csak egy elemet tartalmaz. Ribenboim [16] igazolta, hogy egy F_m Fibonacci-szám négyzetosztálya triviális, ha $m \neq 1, 2, 3, 6$ vagy 12, továbbá az $L(1,1,2,1)$ Lucas sorozat L_m elemének osztálya triviális, ha $m \neq 0, 1, 3$ vagy 6. Az általánosabb $R(A, B, 0, 1)$ sorozatra, ahol A és B relatív prímek, Ribenboim és McDaniel [17], valamint Ribenboim [18] bizonyították, hogy minden négyzetosztály elemeinek száma véges.

A másodrendűnél magasabb rendű lineáris rekurzív sorozatokról kevesebbet tudunk.

Legyen $G = G(A_1, \dots, A_k, G_0, \dots, G_{k-1})$ egy k-adrendű lineáris rekurzív sorozat, melyet a

$$G_n = A_1 G_{n-1} + \dots + A_k G_{n-k} \qquad (n > k-1)$$

rekurzió definiál a nem mind nulla rögzített $A_1, \dots, A_k$ és $G_0, \dots,$ G_{k-1} egészekkel. Jelölje $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ az

$$x^k - A_1 x^{k-1} - \dots - A_k = 0$$

egyenlet különböző gyökeit. Tegyük fel, hogy $\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ multiplicitása $1, m_2, \dots, m_s$ és $|\alpha| > |\alpha_i|$ ha $i = 2, \dots, s$. Ekkor, mint ahogy jól ismert, a sorozat tagjai

$$G_n = d\alpha^n + r_2(n)\alpha_2^n + \dots + r_s(n)\alpha_s^n \tag{1}$$

alakban adhatók meg, ahol r_i $(i = 2, \dots, s)$ egy $m_i - 1$ fokú polinom, melynek együtthatói és d a $Q(\alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ algebrai számtest elemei. Néhány feltétel mellett Shorey és Stewart [21] bizonyították, hogy a G sorozat nem tartalmaz teljes q-adik hatványt, ha q elég nagy. Ez az eredmény [6] és [22]-ből is következik néhány általánosabb tételből.

A következőkben Ribenboim és McDaniel négyzetosztály ötletét általánosítjuk k-adrendű sorozatokra és q hatvány osztályokra.

Legyenek $q > 1$ és $0 < r < q$ rögzített egész számok. Akkor mondjuk, hogy egy G sorozat G_n és G_m eleme azonos (q, r) hatványosztálynak eleme, ha $G_n^r G_m^{q-r}$ teljes q-adik hatvány, azaz ha létezik egy w egész szám úgy, hogy

$$G_n^r G_m^{q-r} = w^q.$$

Megjegyezzük, hogy r és $q-r$ hiányában a q hatványosztályok $G_n G_m = w^q$ definíciója $q > 2$ esetén nem sorolná az elemek mindegyikét osztályokba mert a reflexivitás és a tranzitivitás nem teljesülne.

Bizonyítjuk, hogy a G sorozat bármely G_n elemének (q, r) osztályában nincs olyan G_m elem, melyre $m > n$ ha q elég nagy.

Tétel. Legyen G egy k-adrendű lineáris rekurzív sorozat, mely kielégíti a fenti feltételeket. Tegyük fel, hogy $d \neq 0$ és $G_i \neq d\alpha^i$ ha $i > n_0$. Akkor bármely n egész szám esetén létezik egy n-től és G-től függő q_0 szám úgy, hogy a

$$G_n^r G_x^{q-r} = w^q \tag{2}$$

egyenletnek nincs x, w, q, r megoldása $x > n$, $q > q_0$ és $0 < r \leq q/2$ feltétellel.

A tétel bizonyításában felhasználjuk Baker [1] következő eredményét.

Lemma. Legyenek $\gamma_1, \ldots \gamma_v$ nem zérus algebrai számok és legyenek ezek magasságainak felső korlátja $M_1, \ldots M_v$. Tegyük fel, hogy $M_v \geq 4$. Legyenek továbbá $b_1, \ldots, b_{v-1}$ racionális egészek, melyek abszolút értéke legfeljebb B, és legyen b_v egy nem zérus racionális egész $|b_v| \leq B'$, $B' \geq 3$ feltétellel. Legyen

$$L = |b_1 \log \gamma_1 + \ldots + b_v \log \gamma_v|,$$

ahol a logaritmusok a főértékeket jelentik. Ekkor ha $L \neq 0$, úgy

$$L > \exp\left(-C(\log B' \log M_v + B/B')\right),$$

ahol C egy effektíve meghatározható pozitív szám, mely csak az

$$M_1, \ldots, M_{v-1}, \gamma_1, \ldots, \gamma_v$$

és v számoktól függ. (lásd Theorem 1 az [1]-ben, $\delta = 1/B'$ helyettesítéssel).

A tétel bizonyítása. Feltehetjük, hogy $n > n_0$, és n elég nagy, továbbá hogy $w \geq 4$, mert különben a tétel következik [21] vagy [6] eredményeiből, illetve az eredmények bizonyításából. Az általánosság rovása nélkül azt is feltehetjük, hogy a sorozat tagjai pozitívak.

Legyenek x, w, q és r egészek, melyekre (2) fennáll.
Akkor (1) alapján

$$w^q = G_n^r d^{q-r} \alpha^{x(q-r)} \left(1 + \frac{r_2(x)}{d} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)^x + \ldots\right)^{q-r}, \tag{3}$$

amiből

$$c_1(q-r)x < q \log w < c_2(q-r)x \tag{4}$$

következik valamely $c_1, c_2 > 0$ G-től függő konstansokkal, hiszen

$$\frac{r_2(x)}{d} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha}\right)^x \to 0,$$

ha $x \to \infty$ és $\log G_n \approx n \log |\alpha| < c_3 x$. Felhasználva (3)-at, a logaritmus függvény tulajdonságai alapján valamely c_4 konstanssal

$$L = \left| \log \frac{w^q}{d^{q-r} G_n^r \alpha^{x(q-r)}} \right| < e^{-c_4 x(q-r)} \tag{5}$$

adódik. Másrészről a Lemma alapján $v = 4$, $M_4 = w$ és $B' = q$ választással

$$\begin{aligned} L &= |q \log w - (q-r) \log d - r \log G_n - x(q-r) \log \alpha| \\ &> e^{-c(\log q \log w + x(q-r)/q)} \end{aligned} \tag{6}$$

következik, ahol $c > 0$ függ az n-től. (4), (5) és (6) miatt

$$c_4 x(q-r) < c\,(\log q \log w + (q-r)x/q) < c_5 \log q \log w,$$

és így (4) alapján

$$q \log w < c_6 \log q \log w,$$

vagyis

$$q < c_6 \log q,$$

ami lehetetlen, ha $q > q_0 = q_0(n)$.

Ez az ellentmondás bizonyítja a tételt.

Irodalom

[1] BAKER, A., A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms II, *Acta Arithm.*, **24** (1973), 33–36.

[2] COHN, J. H. E., On square Fibonacci numbers, *J. London Math. Soc.*, **39** (1964), 537–540.

[3] J. H. E. COHN, Squares in some recurrent sequences, *Pacific J. Math.*, **41** (1972), 631–646.

[4] J. H. E. COHN, Eight Diophantine equations, *Proc. London Math. Soc.*, **16** (1966), 153–166.

[5] J. H. E. COHN, Five Diophatine equations, *Math. Scand.*, **21** (1967), 61–70.

[6] P. KISS, Differences of the terms of linear recurrences, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **20** (1985), 285–293.

[7] J. C. LAGARIAS and D. P. WEISSER, Fibonacci and Lucas cubes, *Fibonacci Quart.*, **18** (1981), 39–43.

[8] W. LJUNGGREN, Zur Theorie der Gleichung $x^2 + 1 = Dy^4$, *Avh. Norske Vid Akad. Oslo.*, **5** (1942).

[9] J. LONDON and R. FINKELSTEIN, On Fibonacci and Lucas numbers which are perfect powers, *Fibonacci Quart.*, **7** (1969) 476–481, 487, errata ibid 8 (1970) 248.

[10] J. LONDON and R. FINKELSTEIN, On Mordell's equation $y^2 - k = x^3$, Bowling Green University Press., 1973.

[11] W. L. McDANIEL and P. RIBENBOIM, Squares and double-squares in Lucas sequences, *C.R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Canada.*, **14** (1992), 104–108.

[12] A. PETHŐ, Full cubes in the Fibonacci sequence, *Publ. Math. Debrecen.*, **30** (1983), 117–127.

[13] A. PETHŐ, The Pell sequence contains only trivial perfect powers, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 60 sets, Graphs and Numbers, Budapest.*, (1991), 561–568.

[14] A. PETHŐ, Perfect powers in second order linear recurrences, *J. Number Theory.*, **15** (1982), 5–13.

[15] A. PETHŐ, Perfect powers in second order recurrences, *Topics in Classical Number Theory, Akadémiai Kiadó, Budapest.*, (1981), 1217–1227.

[16] P. RIBENBOIM, Square classes of Fibonacci and Lucas numbers, *Portugaliae Math.*, **46** (1989), 159–175.

[17] P. RIBENBOIM and W.L. McDANIEL, Square classes of Fibonacci and Lucas sequences, *Portugaliae Math.*, **48** (1991), 469–473.

[18] P. RIBENBOIM, Square classes of $(a^n-1)/(a-1)$ and a^n+1, *Sichuan Daxue Xunebar.*, **26** (1989), 196–199.

[19] N. ROBBINS, On Fibonacci numbers of the form px^2, where p is prime, *Fibonacci Quart.*, **21** (1983), 266–271.

[20] N. ROBBINS, On Pell numbers of the form PX^2, where P is prime, *Fibonacci Quart.*, **22** (1984), 340–348.

[21] T. N. SHOREY and C. L. STEWART, On the Diophantine equation $ax^{2t}+bx^ty+cy^2=d$ and pure powers in recurrence sequences, *Math. Scand.*, **52** (1983), 24–36.

[22] T. N. SHOREY and C. L. STEWART, Pure powers in recurrence sequences and some related Diophatine equations, *J. Number Theory.*, **27** (1987), 324–352.

[23] O. WYLIE, In the Fibonacci series $F_1=1, F_2=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ the first, second and twelvth terms are squares, *Amer. Math. Monthly*, **71** (1964), 220–222.

Trinomials, which are divisible by quadratic polynomials

TAMÁS HERENDI and ATTILA PETHŐ*

Abstract. The reducibility of the trinomials in the form $x^n - Bx^k - A$ are examined. It is shown, that among the trinomials in the same class (i.e. some of the parameters A,B,k and n are fixed) there are only finitely many wich has quadratic factor.

1. Introduction

Let us consider the trinomial $x^n - Bx^k - A$. Ribenboim [4] has shown that if $k = 1$ then for a fixed n and B there exist only finitely many A for which the trinomial is divisible by a quadratic polynomial and similarly if n and A is fixed then there exist only finitely many B for which the trinomial has a quadratic factor. He used in the proof elementary steps only.

Schinzel in [5] then presented a much more general result in which he proved among others that for fixed A there exist only finitely many n, k, B for which the trinomial is divisible by any polynomial. He could prove similar result for fixed B too. His proof is however not an elementary one.

We are also able to generalize Ribenboim's result extending his proof but keeping its elementaryness. Our result is less general than Schinzel's result. We prove the following theorems:

Theorem 1. Let be given $k \in N$ and $A \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, then

(a) there exist only finitely many, effectively determinable polynomials in the form $x^n - Bx^k - A$, where $n \in N$, $B \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ and $\gcd(k, n, 12) = 1$, for which

$$x^2 - bx - a \mid x^n - Bx^k - A$$

with $a, b \in \mathbf{Z}$.

(b) if $\gcd(k, n, 12) \geq 2$ where $n \in N$ then there exist only finitely many effectively determinable polynomials in the form $x^n - Bx^k - A$, where $B \in Z \setminus \{0\}$ for which $x^2 - bx - a | x^n - Bx^k - A$ for an $a, b \in Z$ pair.

---

* Research (partially) supported by Hungarian National Foundation for Scientific Research, grant No. 1641.

Theorem 2. Let be given $n,k \in N$ and $B \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ then

(a) if $\gcd(n,k,12) = 1$ and $n-k > 4$ then there exist only finitely many $A \in \mathbf{Z}$ for which $x^2 - bx - a \mid x^n - Bx^k - A$ for an $a,b \in \mathbf{Z}$ pair;

(b) if $\gcd(n,k,12) \geq 2$ and $n-k > 4$ then there exist infinitely many $A \in \mathbf{Z}$ for which $x^2 - bx - a \mid x^n - Bx^k - A$ for an $a,b \in \mathbf{Z}$ pair, but except for finitely many values all the possible values of A is explicitely expressable as a series.

Remark. Using properties of curves of genus at least 1, we were able to handle the case $n-k < 4$ too. As Schinzel's result are more general and our proof is not elementary, we omit the details.

2. Auxiliary results

Let the polynomial sequence $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ be defined as follows: $F_0(x) = F_1(x) = 1$, and if $n \geq 2$ then $F_n(x) = F_{n-1}(x) + x \cdot F_{n-2}(x)$.

Let define the polynomial sequence $\{f_n(x,y)\}_{n=0}^{\infty}$ as $f_n(x,y) = y^{[\frac{n}{2}]} \cdot F_n\left(\frac{x}{y}\right)$.

Remark. From Lemma 2 you can see that $f_n(x,y)$ is really a polynomial and not a rational function.

Lemma 1. The series $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ has for any $1 \leq k < n$ the following properties:

(a) $F_n(x) \cdot F_{k-1}(x) = F_{n-1}(x) \cdot F_k(x) - (-1)^k \cdot x^k \cdot F_{n-k-1}(x)$;

(b) $F_n(x) = F_{n-k}(x) \cdot F_k(x) + x \cdot F_{n-k-1}(x) \cdot F_{k-1}(x)$.

PROOF. We prove only property (a), because the proof of (b) is similar. Let $k=1$. Then $n \geq 2$. The equality in this case is true because

$$F_n(x) \cdot F_0(x) = F_{n-1}(x) \cdot F_1(x) + x \cdot F_{n-2}(x),$$

where $F_0(x) = F_1(x) = 1$, and this is exactly the defining equation of F_n if $n > 2$.

Let now $k > 2$ and suppose that for every $0 < i < k$ the equality holds. We know that

$$\text{(I)} \qquad F_n(x) \cdot F_k(x) = F_n(x) \cdot (F_{k-1}(x) + x \cdot F_{k-2}(x))$$

$$\text{(II)} \qquad F_{n-1}(x) \cdot F_k(x) = F_{n-1}(x) \cdot (F_{k-1}(x) + x \cdot F_{k-2}(x))$$

and

$$(-1)^k \cdot x^{k-1} \cdot F_{n-k+1}(x) = (-1)^k \cdot x^{k-1} \cdot (F_{n-k}(x) + x \cdot F_{n-k-1}(x)),$$

which is equal to

$$\text{(III)} \quad (-1)^k \cdot x^k \cdot F_{n-k-1}(x) = (-1)^k \cdot x^{k-1} \cdot (F_{n-k+1}(x) + x \cdot F_{n-k}(x)).$$

Let consider the sum: I − II + III:

$$F_n(x)\cdot F_k(x)-F_{n-1}(x)\cdot F_k(x)+(-1)^k\cdot x^k\cdot F_{n-k-1}(x)=$$
$$F_n(x)\cdot F_{k-1}(x)-F_{n-1}(x)\cdot F_{k-1}(x)-(-1)^k\cdot x^{k-1}\cdot F_{n-k}(x)+$$
$$x\cdot\left(F_n(x)\cdot F_{k-2}(x)\ -F_{n-1}(x)\cdot F_{k-1}(x)+(-1)^k\cdot x^{k-2}\cdot F_{n-k+1}(x)\right).$$

The right hand side of this equation is equal to zero by the induction hypothesis, so the equality holds for k too.

Lemma 2.

(a) The polynomial $F_n(x)$ has degree $\left[\frac{n}{2}\right]$ and its roots are $-\frac{\xi^j_{n+1}}{(\xi^j_{n+1}+1)^2}$, where $1\le j\le\left[\frac{n}{2}\right]$ and ξ_{n+1} is a $n+1$-th primitive root of unity;

(b) $F_n(x)$ has a rational root if and only if $\gcd(n+1,12)\ge 3$.

PROOF.

(a) By definition we have $F_0(x)=F_1(x)=1$, so $\deg(F_0(x))=\left[\frac{0}{2}\right]$ and $\deg(F_1(x))=\left[\frac{1}{2}\right]$. Let $n\ge 2$ and suppose that $\deg(F_k(x))=\left[\frac{k}{2}\right]$ if $k<n$. It is easy to see that the leading coeffitient of $F_k(x)$ is positive. So

$$\deg(F_n(x))=\deg(F_{n-1}(x)+x\cdot F_{n-2}(x))=$$
$$=\max\left(\deg(F_{n-1}(x)),\deg(F_{n-2}(x))+1\right)=\left[\frac{n}{2}\right].$$

Let $\{u_m\}_{m=0}^{\infty}$ be a recurrence sequence with the definition: $u_m\doteq r\cdot u_{m-1}+s\cdot u_{m-2}$, where $r,s\ne 0, r^2+4s\ne 0$ and $|u_0|+|u_1|>0$. Then $u_m=a\cdot\alpha^m+b\cdot\beta^m (m=0,1,2,\dots)$, where α,β is the two different roots of the polynomial $z^2-r\cdot z-s$ and $a=\frac{u_0\cdot\beta-u_1}{\beta-\alpha}$, $b=\frac{u_1-u_0\cdot\alpha}{\beta-\alpha}$ (see e. g. [2]). Let suppose now that t is a root of $F_n(x)$ and define $\{u_m\}_{m=0}^{\infty}$ by the following recurrence:

$$u_0=u_1=1\quad\text{and}\quad u_m:=u_{m-1}+t\cdot u_{m-2}\quad\text{if}\quad m\ge 2.$$

It is clear that $F_m(t)=u_m$ $(m=0,1,2,\dots)$, and if $t\ne-\frac{1}{4}$ then

$$u_m=\frac{\sqrt{1+4t}-1}{2\sqrt{1+4t}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{1+4t}}{2}\right)^m+\frac{\sqrt{1+4t}+1}{2\sqrt{1+4t}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}\right)^m=$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+4t}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}\right)^{m+1}-\left(\frac{1-\sqrt{1+4t}}{2}\right)^{m+1}\right).$$

By the choice of t we have $0=F_n(t)=u_n$ which means

$$\left(\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{1+4t}}{2}\right)^{n+1}=0,$$

i. e.

$$\left(\frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}\right)^{n+1}=\left(\frac{1-\sqrt{1+4t}}{2}\right)^{n+1}.$$

From this we get

$$(1)\qquad \left(1+\sqrt{1+4t}\right)=\xi_{n+1}^{j}\cdot\left(1-\sqrt{1+4t}\right),$$

where ξ_{n+1} is a $n+1$-th primitive root of unity, and $1\le j\le n$. Also $j\ne\frac{n+1}{2}$ (if it is integer), because in this case $1+\sqrt{1+4t}=\sqrt{1+4t}-1$ would hold which is impossible. From equation (1) we obtain $t=-\frac{\xi_{n+1}^{j}}{(\xi_{n+1}^{j}+1)^2}$. The next question is how many different values t can have. If $j=0$ then $t=-\frac{1}{4}$ and it is easy to see that $F_m\left(-\frac{1}{4}\right)\ne 0$ for any $m=0,1,2,\ldots$. Further $-\frac{\xi_{n+1}^{i}}{(\xi_{n+1}^{i}+1)^2}=-\frac{\xi_{n+1}^{j}}{(\xi_{n+1}^{j}+1)^2}$, where $0\le i,j<n+1$ and $i\ne j$ if and only if $i+j=n+1$. It means that t has at most $\left[\frac{n}{2}\right]$ different values. We know that $\deg\left(F_n(x)\right)=\left[\frac{n}{2}\right]$ which implies that $F_n(x)=\prod_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+\frac{\xi_{n+1}^{j}}{(\xi_{n+1}^{j}+1)^2}\right)$.

(b) $F_n(x)$ has a rational root if and only if $-\frac{\xi_{n+1}^{j}}{(\xi_{n+1}^{j}+1)^2}=\frac{p}{q}$ for $j\in\left\{1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right]\right\}$, $p,\ q\in Z$, $q\ne 0$. This is equivalent to $0=p\cdot\left(\xi_{n+1}^{j}+1\right)^2+q\cdot\xi_{n+1}^{j}=p\cdot\left(\xi_{n+1}^{j}\right)^2+(q+2p)\xi_{n+1}^{j}+p$. Hence ξ_{n+1}^{j} has to be a root of the polynomial $px^2+(q+2p)x+p$, i.e. ξ_{n+1}^{j} is rational or a quadratic algebraic number. But it is known that if ξ is a k-th primitive root of unity, then its degree is $\varphi(k)$, where $\varphi(k)$ is the Euler-function. $\varphi(k)\le 2$ if and only if $k\in\{1,2,3,4,6\}$. From the proof of (a) it is clear that $k>2$. If $k=3$ then $t=-1$, if $k=4$ then $t=-\frac{1}{2}$ and if $k=6$ then $t=-\frac{1}{3}$. As ξ_{n+1}^{j} is primitive k -th root of unity if $n+1=j-k$, thus $F_n(x)$ has a rational root if and only if $3\mid n+1$ or $4\mid n+1$, i.e. $\gcd(n+1,12)\ge 3$.

In the next step some properties of the series $\{f_n(x,y)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ are presented.

Lemma 3. The series $\{f_n(x,y)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ has the property

$$\delta_{0n}\cdot f_n(x,y)=y^{n-1 \bmod 2}\cdot f_{n-1}(x,y)+x\cdot f_{n-2}(x,y)\text{if} n\in\mathbf{Z},$$

where

$$\delta_{0n}=\begin{cases}0, & \text{if } n\ne 0\\ 1, & \text{if } n=0.\end{cases}$$

3. Basic lemmata

The following lemma generalizes a result of Ribenboim [4] and it is basic for the proofs of the theorems.

Lemma 4.

Let $n \geq 2$, $1 \leq k < n$ and $a, b, A, B \in \mathbf{Z}$. If $x^2 - bx - a$ divides $x^n - Bx^k - A$ then

$$B \cdot b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right) = b^{n-1 \bmod 2} \cdot f_{n-1}\left(a, b^2\right).$$

Further if
(a) $b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right) = 0$ then $b^{n-1 \bmod 2} \cdot f_{n-1}\left(a, b^2\right) = 0$ and

$$A = a \cdot \left(b^{n-2 \bmod 2} \cdot f_{n-2}\left(a, b^2\right) - B \cdot b^{k-2 \bmod 2} \cdot f_{k-2}\left(a, b^2\right)\right).$$

(b) otherwise

$$a \mid A, \qquad B = \frac{b^{n-1 \bmod 2} \cdot f_{n-1}\left(a, b^2\right)}{b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right)}$$

and

$$A = a^k(-1)^k \frac{b^{n-k-1 \bmod 2} \cdot f_{n-k-1}\left(a, b^2\right)}{b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right)}.$$

PROOF.
(a) Assume that $x^n - Bx^k - A = \left(x^2 - bx - a\right) \cdot p(x)$ with $p(x) = x^{n-2} + c_{n-3}x^{n-3} + c_{n-4}x^{n-4} + \cdots + c_1 x + c_0$. Similarly as in [4] we have the following equations:

$$\begin{aligned} A &= a \cdot c_0 \\ \delta_{1,k} \cdot B &= a \cdot c_1 + b \cdot c_0 \\ &\vdots \\ \delta_{i,k} \cdot B &= a \cdot c_i + b \cdot c_{i-1} - c_{i-2} \qquad (2) \\ &\vdots \\ \delta_{n-2,k} \cdot B &= a + b \cdot c_{n-3} - c_{n-4} \\ \delta_{n-1,k} \cdot B &= b - c_{n-3} \end{aligned}$$

where

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Using this we prove that if $1 \le i \le n-2$, then

$$c_{n-2-i} = b^{i \bmod 2} \cdot f_i(a, b^2) - Bb^{k-n+i \bmod 2} \cdot f_{k-n-i}(a,b)^2. \tag{3}$$

By (2) it is easy to see that (3) holds for $i = 1, 2$. Let $2 < i \le n-2$ and suppose that (3) holds for every j with $1 \le j < i$. Then by (2) we get

$$\begin{aligned} c_{n-2-i} &= a \cdot c_{n-2-(i-2)} + b \cdot c_{n-2-(i-1)} - \delta_{n-i,k} \cdot B \\ &= a \cdot C_1 + b \cdot C_2 - \delta_{n-i,k} \cdot B \\ &= b^{i-2 \bmod 2} \cdot C_3 - B \cdot b^{k-n+i-2 \bmod 2} \cdot C_4 + B \cdot \delta_{n-i,k}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} C_1 &= b^{i-2 \bmod 2} \cdot f_{i-2}(a, b^2) - B \cdot B^{k-n+i-2 \bmod 2} \cdot f_{k-n+i-2}(a, b^2) \\ C_2 &= b^{i-1 \bmod 2} \cdot f_{i-1}(a, b^2) - B \cdot B^{k-n+i-1 \bmod 2} \cdot f_{k-n+i-1}(a, b^2) \\ C_3 &= b^{2(i-1 \bmod 2)} \cdot f_{i-1}(a, b^2) + a \cdot f_{k-n+i-2}(a, b^2) \\ C_4 &= b^{2(k-n+i-1 \bmod 2)} \cdot f_{k-n+i-1}(a, b^2) + a \cdot f_{k-n+i-2}(a, b^2). \end{aligned}$$

From this by Lemma 3 we get (3). Using (2) and (3) we obtain

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot c_1 + b \cdot c_0 - \delta_{1,k} \cdot B \\ &= a \cdot \left(b^{n-3 \bmod 2} \cdot f_{n-3}(a, b^2) - B \cdot b^{k-3 \bmod 2} \cdot f_{k-3}(a, b^2)\right) + \\ &+ b \cdot a \cdot \left(b^{n-2 \bmod 2} \cdot f_{n-2}\left(a, b^2\right) - B \cdot b^{k-2 \bmod 2} \cdot f_{k-2}\left(a, b^2\right)\right) - \delta_{1,k} \cdot B \\ &= b^{n-3 \bmod 2} \cdot \left(b^{2(n-2 \bmod 2)} \cdot f_{n-2}\left(a, b^2\right) + a \cdot f_{n-3}(a, b^2)\right) - \\ &- B \cdot \left(b^{k-3 \bmod 2} \cdot \left(b^{2(k-2 \bmod 2)} \cdot f_{k-2}\left(a, b^2\right) + a \cdot f_{k-3}(a, b^2)\right) + \delta_{1,k}\right). \end{aligned}$$

Using Lemma 3 we get

$$0 = b^{n-1 \bmod 2} \cdot f_{n-1}\left(a, b^2\right) - B \cdot b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right), \tag{4}$$

which proves the first assertion. This implies $b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right) = 0$ if and only if $b^{n-1 \bmod 2} \cdot f_{n-1}\left(a, b^2\right) = 0$. By (2) and (3)

$$A = a \cdot \left(b^{n-2 \bmod 2} \cdot f_{n-2}(a, b^2) - B \cdot b^{k-2 \bmod 2} \cdot f_{k-2}(a, b^2)\right). \tag{5}$$

(b) If $b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right) \neq 0$ then from (4) we get

$$B = \frac{b^{n-1 \bmod 2} \cdot f_{n-1}\left(a, b^2\right)}{b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right)}. \tag{6}$$

and from (5) and (6), using Lemma 1 we obtain $a \mid A$ and

$$A = a^k(-1)^k \frac{b^{n-k-1 \bmod 2} \cdot f_{n-k-1}(a, b^2)}{b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}(a, b^2)}.$$

Lemma 5. Let $k, n \in N$ and $A \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Then there exist only finitely many, effectively computable $a, b, B \in \mathbf{Z}$ such that $x^2 - bx - a \mid x^n - Bx^k - A$.

PROOF. Let $a, b \in \mathbf{Z}$ be such that $b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right) \neq 0$ and $x^2 - bx - a \mid x^n - Bx^k - A$. Then by Lemma 4 (b) $a \mid A$ and

$$(7)\quad 0 = A \cdot b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right) - a^k(-1)^k b^{n-k-1 \bmod 2} \cdot f_{n-k-1}\left(a, b^2\right).$$

Because of $a \mid A$, a may assume only finitely many different values. Let a be fixed. Then the right hand side of (7) is a polynomial in b, which has only finitely many roots, and the integer roots of it are effectively computable. So there exist only finitely many possibilities for a, b (and they are effectively computable). As $f_{k-1}\left(a, b^2\right) \neq 0$, by Lemma 4 (b) B is explicitely determinable from a and b so the numbers of the possible B is also finite and the values of B are effectively computable. Let a, b now be such that $f_{k-1}\left(a, b^2\right) = 0$. By Lemma 2 (b)

$$(8)\qquad \frac{a}{b^2} \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right\}.$$

By Lemma 4 (a) $a \mid A$ and

$$(9)\quad A = a \cdot \left(b^{n-2 \bmod 2} \cdot f_{n-2}\left(a, b^2\right) - B \cdot b^{k-2 \bmod 2} \cdot f_{k-2}\left(a, b^2\right)\right),$$

where $b^{k-2 \bmod 2} \cdot f_{k-2}\left(a, b^2\right) \neq 0$. (Otherwise $b^{i \bmod 2} \cdot f_i\left(a, b^2\right) = 0$ would hold for every i and it is possible only when $a, b = 0$.) As $a \mid A$ the cardinality of the possible a-s is finite and by (8) the cardinality of the possible b-s is also finite and effectively computable. Let fix now a and b. Then (9) is a linear equation in B which has only one solution and the solution is explicitely given. So we obtain that B has only finitely many possible values in both cases and they are effectively computable.

By replacing y with y^2 in the definition of $f_n(x, y)$ it is easy to prove the following:

Lemma 6. $y^{n \bmod 2} \cdot f_n\left(x, y^2\right) = y^n \cdot F_n\left(\frac{x}{y^2}\right)$.

Lemma 7. Let suppose that $\gcd(n,k)=m$. Then

$$\gcd\left(y^{n-1 \bmod 2}\cdot f_{n-1}\left(x,y^2\right), y^{k-1 \bmod 2}\cdot f_{k-1}\left(x,y^2\right)\right)= \\ = y^{m-1 \bmod 2}\cdot f_{m-1}\left(x,y^2\right)$$

PROOF. By Lemma 2 (a) we know that $F_n(x)$ has $\left[\frac{n}{2}\right]$ different real roots. Let suppose that they are $x_1,\dots,x_{\left[\frac{n}{2}\right]}$. Then

$$F_n(x)=\mathrm{lc}\left(F_n\right)\cdot\prod_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x-x_i\right),$$

where $\mathrm{lc}\left(F_n\right)$ is the leading coefficient of F_n, which is 1 if n is even and $n+1$ if n is odd. Then by Lemma 6

$$y^{n \bmod 2}\cdot f_n\left(x,y^2\right)=\mathrm{lc}\left(F_n\right)\cdot\prod_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x-x_i\cdot y^2\right)\cdot y^{n \bmod 2}.$$

It is clear that $\left(x-x_i\cdot y^2\right)$ is irreducible, and by the unique factorization in a polynomial ring, this is the only possible factorization of $y^{n \bmod 2}\cdot f_n\left(x,y^2\right)$. By Lemma 2(a) $\left(x-t\cdot y^2\right)\mid y^{n-1 \bmod 2}\cdot f_{n-1}\left(x,y^2\right)$ if and only if there exists $j\in\left\{1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]\right\}$ such that $t=-\frac{\xi_n^j}{\left(\xi_n^j+1\right)^2}$. Of course, then for all $\bar{t}$, conjugate of t, $\left(x-\bar{t}\cdot y^2\right)\mid y^{n-1 \bmod 2}\cdot f_{n-1}\left(x,y^2\right)$.
If t is such that

$$\left(x-t\cdot y^2\right)\mid y^{n-1 \bmod 2}\cdot f_{n-1}\left(x,y^2\right)$$

and $\left(x-t\cdot y^2\right)\mid y^{k-1 \bmod 2}\cdot f_{k-1}\left(x,y^2\right)$ then there exist $j,i\in\left\{1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]\right\}$ such that $\frac{\xi_n^j}{\left(\xi_n^j+1\right)^2}=\frac{\xi_k^i}{\left(\xi_k^i+1\right)^2}$ from where we get either $\xi_n^j=\xi_k^i$ or $\xi_n^j=\xi_k^{-i}$. Without loss of generality we can suppose that $\xi_n^j=\xi_k^i$. It is easy to see, if $m=\gcd(n,k)$ then $\left(\xi_n^j\right)^m=\left(\xi_k^i\right)^m$, which means that ξ_n^j is m-th root of unity and so $\left(x-t\cdot y^2\right)\mid y^{m-1 \bmod 2}\cdot f_{m-1}\left(x,y^2\right)$. Reversing, if $\left(x-t\cdot y^2\right)\mid y^{m-1 \bmod 2}\cdot f_{m-1}\left(x,y^2\right)$ then there exists $i\in\left\{1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]\right\}$ such that $t=-\frac{\xi_k^i}{\left(\xi_k^i+1\right)^2}$, and if $m\mid n$ then there exists $j\in\left\{1,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]\right\}$ such that $\xi_m^i=\xi_n^j$ or $\xi_m^i=\xi_n^{-j}$, which means that $\left(x-t\cdot y^2\right)\mid y^{n-1 \bmod 2}\cdot f_{n-1}\left(x,y^2\right)$. We have $m-1 \bmod 2=1$ if and only if $n-1 \bmod 2=1$ and $k-1 \bmod 2=1$. So if $y\mid y^{n-1 \bmod 2}\cdot f_{n-1}\left(x,y^2\right)$ and $y\mid y^{k-1 \bmod 2}\cdot$

$f_{k-1}\left(x,y^2\right)$ then $y \mid y^{m-1 \bmod 2} \cdot f_{m-1}\left(x,y^2\right)$ and vice versa. The leading coeffitient of $f_{m-1}\left(x,y^2\right)$ is different from 1 if and only if m is even and in this case it is equal to m. But then the leading coeffitient of $f_{n-1}\left(x,y^2\right)$ is equal to n and the leading coeffitient of $f_{k-1}\left(x,y^2\right)$ is equal to k.

Lemma 8. Let $D = y \cdot (4x+y)$, $U_1 = \frac{2x+y+\sqrt{D}}{2}$ and $U_2 = \frac{2x+y-\sqrt{D}}{2}$. Then

$$f_n(x,y) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1 \bmod 2} \cdot C,$$

where

$$C = \frac{\left(y+\sqrt{D}\cdot U_1\right)^{n+1 \bmod 2} \cdot U_1^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} - \left(y-\sqrt{D}\cdot U_2\right)^{n+1 \bmod 2} \cdot U_2^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{\sqrt{D}}.$$

PROOF. It is easy to see that $f_n(x,y)$ has the property $F_{n+2}(x,y) = (2x+y)\cdot f_n(x,y) - x^2 \cdot f_{n-2}(x,y)$. From this similarly to the method used in Lemma 2 for $F_n(x)$ we get the statement of the Lemma.

4. Proof of the theorems

Proof of Theorem 1.

(a) Let suppose that $\gcd(k,n) = 1$. At first we show that there exists an effectively computable upper bound for the possible n values. If $A \neq 0$ is given then by Lemma 2 (b) using the definition of f_n $b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a,b^2\right) \neq 0$. Then by Lemma 4 (b)

$$a \mid A \quad \text{and} \quad a^{k-1}(-1)^k \frac{b^{n-k-1 \bmod 2} \cdot f_{n-k-1}\left(a,b^2\right)}{b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a,b^2\right)} \mid A.$$

Let assume now that n is given and a is fixed and suppose that $b^2 \geq 4a^2$. Then if we substitute x by a and y by b^2 in Lemma 8, we obtain $D > 0$, $U_1 > a^2$ and $U_2 < 1$. Then there exists M_a constant, such that $\left|f_{k-1}\left(a,b^2\right)\right| < \left|M_a b^{k-1}\right|$ if $b \neq 0$ and from Lemma 8 follows that there exists m_a, n_a and $c_a > 0$ such that if $n > n_a$ and $|b| > m_a$ then as $U_1 > \frac{b^2}{2}$

$$f_n\left(a,b^2\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1 \bmod 2} \cdot C$$

$$> c_a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1 \bmod 2} \cdot \frac{\left(b^2+\sqrt{D}\cdot U_1\right)^{n+1 \bmod 2} \cdot U_1^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}}{\sqrt{D}}$$

$$\geq c_a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1 \bmod 2} \cdot \frac{\left(b^2+\sqrt{D}\right)^{n+1 \bmod 2}}{\sqrt{D}} \cdot b^{n+1}$$
$$> c_a \cdot \frac{1}{2} \cdot b^{n-1}.$$

Hence

$$A > \left| \frac{b^{n-k-1 \bmod 2} \cdot f_{n-k-1}\left(a, b^2\right)}{b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right)} \right|$$
$$> \frac{c_a}{2} \cdot \frac{b^{n-k-2}}{b^k} = b^{n-2k-2}.$$

Because of the monotonity of the exponential function and the finiteness of the number of the possible a-s there exists an upper bound for n depending only on A. Let examine now the case $b^2 < \max\left(4a^2, m_a\right)$. There exist only finitely many b satisfying the inequality. For these values we apply Theorem 3.1 from [2] and get

$$f_n\left(a, b^2\right) > |U_1|^{n-1-c_1 \cdot \log(n-1)} \tag{10}$$

where c_1 is effectively computable and depends finally on a and b. As we have only finitely many possibilities for a and b, c_1 is a constant and for n large enough the exponent in (10) is positive. By a result of Dobrowolski (see in [1]) $|U_1| \geq c_2 > 1$ holds for any quadratic algebraic integers which are not roots of unity, hence by (10) similarly to the previous case n is bounded. So there exist only finitely many possible n-s satisfying the assumptions in the theorem from which using Lemma 5 follows the statment of the theorem. Suppose now that $\gcd(k, n) > 1$, but $\gcd(k, n, 12) = 1$. If a and b satisfy the assumptions in the theorem then $b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right)$ isn't zero otherwise by Lemma 4 (a) $b^{n-1 \bmod 2} \cdot f_{n-1}\left(a, b^2\right)$ would be zero, which is impossible. Hence

$$A = a^k(-1)^k \frac{b^{n-k-1 \bmod 2} \cdot f_{n-k-1}\left(a, b^2\right)}{b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right)}$$

and the proof of the theorem in this case is the same as in the previous case.

(b) In this case we can divide the possible a, b pairs into two sets. In the first set $b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right) \neq 0$. Similarly to the previous two cases there exist only finitely many solution for B. In the second set $b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right) = 0$. Then by Lemma 4 (a) $b^{n-1 \bmod 2} \cdot f_{n-1}\left(a, b^2\right) = 0$. This is possible if and only if one of the following statements holds:

1. n is even and $b = 0$, or

2. $\frac{a}{b^2}$ is one of the rational roots of $F_{n-1}(x)$.
As $A \neq 0$ by Lemma 4 (a) $a|A$, so in case 1 (k is also even)

$$A = a \cdot \left(b^{n-2 \mod 2} \cdot f_{n-2}\left(a, b^2\right) - B \cdot b^{k-2 \mod 2} \cdot f_{k-2}\left(a, b^2\right)\right)$$

is finitely many linear equation for the possible B -s.
In case 2, as by Lemma 2, $F_{n-1}(x)$ has at most three different rational roots and similarly to the previous case $a|A$, we have only finitely many a, b pairs which satisfies the necessary conditions. By Lemma 3 if $f_{n-1}\left(a, b^2\right) = 0$ then $f_{n-2}\left(a, b^2\right) \neq 0$ so we have again finitely many linear equations for the possible B -s.

Proof of Theorem 2.

(a) Let $a, b, A \in \mathbf{Z}$ such that $x^2 - bx - a \mid x^n - Bx^k - A$. As $B \neq 0$ similarly to Theorem 1 (b) $b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right) \neq 0$. By Lemma 4

$$B \cdot b^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(a, b^2\right) = b^{n-1 \bmod 2} \cdot f_{n-1}\left(a, b^2\right).$$

If we suppose that $b = 0$ then the equation is a polynomial equation for a, which has only finitely many solution in a so the number of possible values for A is also finite (and effectively determinable).
Let suppose now that $b \neq 0$. Then

$$\frac{B \cdot F_{k-1}(\frac{a}{b^2})}{b^{n-k}} = F_{n-1}(\frac{a}{b^2}).$$

As $\deg(F_{k-1}) = \left[\frac{k-1}{2}\right]$ and $\deg(F_{n-1}) = \left[\frac{n-1}{2}\right]$, there exist real numbers M_1, M_2, x_1, x_2 so that if $x > x_1$ then $|F_{k-1}(x)| < M_1 \cdot |x|^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}$ and if $x > x_2$ then $|F_{n-1}(x)| > M_2 \cdot |x|^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ $(M_1, M_2 > 0)$. Let $x_0 = \max(1, x_1, x_2)$ and suppose that $\left|\frac{a}{b^2}\right| > x_0$ then

$$\frac{B \cdot M_1 \cdot \left|\frac{a}{b^2}\right|^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}}{|b^{n-k}|} > \frac{B \cdot F_{k-1}(\frac{a}{b^2})}{|b^{n-k}|} = F_{n-1}\left(\frac{a}{b^2}\right) > M_2 \cdot \left|\frac{a}{b^2}\right|^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}.$$

As $n - k > 4$ and $\left|\frac{a}{b^2}\right| \geq 1$ we get

$$\frac{B \cdot M_1}{M_2} \geq \frac{B \cdot M_1}{M_2 \cdot |b^{n-k}|} > \left|\frac{a}{b^2}\right|^{\left[\frac{n-1}{2}\right] - \left[\frac{k-1}{2}\right]} \geq \left|\frac{a}{b^2}\right|.$$

It means that there exists a constant $M_0 > 0$ so that $-M_0 < \frac{a}{b^2} < M_0$ for all the possible $a, b \in \mathbf{Z}$ pairs. Hence there exists $M > 0$ so that $\left|F_{k-1}\left(\frac{a}{b^2}\right)\right| < M$ for all the possible a, b pairs. Or which is the same,

$$\frac{B \cdot M}{|b^{n-k}|} > F_{n-1}\left(\frac{a}{b^2}\right). \tag{11}$$

Let $l = \frac{\min\limits_{i,j}(|x_i - x_j|)}{2}$ where $x_1 \dots x_{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ are the roots of the polynomial $F_{n-1}(x)$. We have $l > 0$ by Lemma 2. If $\min\limits_i \left(\left|x_i - \frac{a}{b^2}\right|\right) \geq l$ then

$$\left|F_{n-1}\left(\frac{a}{b^2}\right)\right| = \prod_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left|x_i - \frac{a}{b^2}\right| \geq l^{\left[\frac{n-1}{2}\right]},$$

from where it follows that $\frac{B \cdot M}{l^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}} \geq \left|b^{n-k}\right|$ and there exist only finitely many $b \in \mathbf{Z}$ which is suitable for this. This together with the fact, that $\frac{a}{b^2}$ is bounded implies that there exist only finitely many possible a, b pair.
Let $\min\limits_i \left(\left|x_i - \frac{a}{b^2}\right|\right) < l$. Obviously among the $\left|x_i - \frac{a}{b^2}\right| < l$ inequalities hold only one. Let suppose that $\left|x_{i_0} - \frac{a}{b^2}\right| < l$. Then

$$\left|F_{n-1}\left(\frac{a}{b^2}\right)\right| \geq l^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} \cdot \left|x_{i_0} - \frac{a}{b^2}\right|$$

hence using (11) we get

$$\frac{B \cdot M}{l^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \cdot b^{n-k}} \geq \left|x_{i_0} - \frac{a}{b^2}\right|.$$

As $b \cdot f_{n-1}\left(a, b^2\right) \neq 0$ so $x_{i_0} \neq \frac{a}{b^2}$. We assumed $n - k > 4$, hence the theorem of Roth on approximation of algebraic numbers [3] implies that there exist only finitely many suitable a, b pair for this approximation if i_0 is given. The number of the roots of $F_{n-1}(x)$ are finite so there exist only finitely many possible a, b pair and so there exist only finitely many possible A values.
(b) Let $\gcd(n, k, 12) = m > 1$. Then by Lemma 7

$$\begin{aligned}\gcd\left(y^{n-1 \bmod 2} \cdot f_{n-1}\left(x, y^2\right), y^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(x, y^2\right)\right) \\ = y^{m-1 \bmod 2} \cdot f_{m-1}\left(x, y^2\right).\end{aligned}$$

Hence there exist $g_1(x, y), g_2(x, y) \in \mathbf{Z}[x, y]$ such that

$$y^{n-1 \bmod 2} \cdot f_{n-1}\left(x, y^2\right) = g_1(x, y) \cdot y^{m-1 \bmod 2} \cdot f_{m-1}\left(x, y^2\right),$$

$$y^{k-1 \bmod 2} \cdot f_{k-1}\left(x, y^2\right) = g_2(x, y) \cdot y^{m-1 \bmod 2} \cdot f_{m-1}\left(x, y^2\right).$$

We have by Lemma 4

$$B \cdot g_2(x, y) \cdot y^{m-1 \bmod 2} \cdot f_{m-1}\left(x, y^2\right) = g_1(x, y) \cdot y^{m-1 \bmod 2} \cdot f_{m-1}\left(x, y^2\right).$$

We devide the set of pairs $a, b \in \mathbf{Z}$ into two classes according as
(i) $b^{m-1 \bmod 2} \cdot f_{m-1}\left(a, b^2\right) = 0$;
(ii) $b^{m-1 \bmod 2} \cdot f_{m-1}\left(a, b^2\right) \neq 0$.

In the case (i) by Lemma 2 (b) the values of a, b are explicitely determinable and so the possible values of A are infinitely many but they are explicitely determinable as a series.

In the case (ii) we can simplify the equation by $b^{m-1 \bmod 2} \cdot f_{m-1}\left(a, b^2\right)$ and with the simplified eqation can be solved in the same way as in (a).

References

[1] E. DOBROWOLSKI, On a question of Lehmer and the number of irreducible factors of a polynomial, *Acta Arith.* **34** (1979), 391–401.

[2] T. N. SHOREY and R. TIJDEMAN, Exponential diophantine equations, *Cambridge University Press*, Cambridge · London · New York · New Rochelle · Melbourne · Sydney, (1986).

[3] K. F. ROTH, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika*, **2** (1955), 1–20.

[4] P. RIBEŇBOIM, On the factorization of $x^n - Bx - A$, *Enseign. Math.*, **37** (1991), 191–200.

[5] A. SCHINZEL, On reducible polynomials, (to appear).

On the powers of the augmentation ideal of a group ring

BERTALAN KIRÁLY*

Abstract. In this paper we give necessary and sufficient conditions for groups which have finite terminals with respect to a commutative ring with unity of non-zero characteristic.

1. Introduction

Let R be a commutative ring with unity, G a group and RG its group ring and let $A(RG)$ denote the *augmentation ideal* of RG, that is the kernel of the ring homomorphism $\phi : RG \to R$ which maps the group elements to 1. It is easy to see that an R-module $A(RG)$ is a free module with the elements $g-1\,(g \in G)$ as a basis. It is clear that $A(RG)$ is the ideal genereted by all elements of the form $g-1, g \in G$.

The powers $A^{\lambda}(RG)$ of $A(RG)$ are defined inductively:$A(RG)=A^1(RG)$, $A^{\lambda+1}(RG) = A^{\lambda}(RG) \cdot A(RG)$, if λ is not a limit ordinal, and otherwise $A^{\lambda}(RG) = \bigcap\limits_{\nu<\lambda} A^{\nu}(RG)$.

It is easy to see that the right ideal $A^{\lambda}(RG)$ is a two-sided ideal of RG for all ordinals $\lambda \geq 1$. Evidently there exists a least ordinal $\tau = \tau_R(G)$ such that $A^{\tau}(RG) = A^{\tau+1}(RG)$. In [2] τ was called the *augmentation terminal* (or *terminal* for simple when it is obvious from the context what ring R we are working with) of G with respect to R. We shall use this terminology, and also we shall write

$$A^{\omega}(RG) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A^{n}(RG)$$

for the first limit ordinal ω. If $G = \langle 1 \rangle$ we put $\tau_R(G) = 1$.

In general, the question of the classification of groups in regarding to values of the terminals and also of the computation of these terminals, is far from being simple (see [2]).

---

* Research supported by the Hungarian National Foundation for Scientific Research Grant, No T014279.

We are interested in the finiteness of the terminals of groups. The groups with finite terminals with respect to integers are well known and easily described (see [1]). In this case the terminals of groups are 1 or 2.

We are primarily concerned with finding all groups whose terminals with respect to commutative rings with unity are finite and with describing the terminals of such groups. In this paper we give necessary and sufficient conditions for groups which have finite terminals with respect to a commutative ring with unity of non-zero characteristic (Theorem 3.3). In Theorem 3.4 we give the qualitative characterisation of $\tau_R(G)$ using the ring-theoretical terminology.

2. Notations and some known facts

If H is a normal subgroup of G, then $I(RH)$ (or $I(H)$ for short when it is obvious from the context what ring R we are working with) denotes the ideal of RG generated by all elements of the form $h-1, (h \in H)$. It is well known that $I(RH)$ is the kernel of the natural epimorphism $\overline{\phi} : RG \to RG/H$ induced by the group homomorphism ϕ of G onto G/H. We notice that if $H = G$ then $I(RG) = A(RG)$.

If $\mathcal{K}$ denotes a class of groups (by which we understand that $\mathcal{K}$ contains all groups of order 1 and, with each $H \in \mathcal{K}$, all isomorphic copies of H), we define the class $\mathbf{R}\mathcal{K}$ of *residually–$\mathcal{K}$* groups by letting $G \in \mathbf{R}\mathcal{K}$ if and only if : whenewer $1 \neq g \in G$, there exists a normal subgroup H_g of the group G such that $G/H_g \in \mathcal{K}$ and $g \notin H_g$

We use the following notations for standard group classes: $\mathcal{N}_o$ – *torsion-free nilpotent groups*, $\overline{\mathcal{N}}_p$ – *nilpotent p-groups of finite exponent*, that is, nilpotent group in which every element g satisfies the equation $g^{p^n} = 1$ for some $n = n(G)$.

Let $\mathcal{K}$ be a class of groups. A group G is said to be *discriminated* by $\mathcal{K}$ if for every finite subset $g_1, g_2, \ldots, g_n$ of distinct elements of G, there exists a group $H \in \mathcal{K}$ and a homomorphism ϕ of G into H such that $\phi(g_i) \neq \phi(g_j)$ for all $g_i \neq g_j$, $(1 \leq i, j \leq n)$.

Lemma 2.1. *Let a class $\mathcal{K}$ of groups be closed under the taking of subgroups (that is all subgroups of any member of the class $\mathcal{K}$ are again in the class $\mathcal{K}$) and also finite direct products and let G be a residually–$\mathcal{K}$ group. Then G is discriminated by $\mathcal{K}$.*

The proof can be obtained easily.

It is easy to show that if G is discriminated by a class of groups $\mathcal{K}$ and if x is a non-zero element of RG, then there exists a group $H \in \mathcal{K}$ and a homomorphism ϕ of RG into RH such that $\phi(x) \neq 0$.

From this fact we have

Lemma 2.2. *If G is discriminated by a class of groups $\mathcal{K}$ and for each $H \in \mathcal{K}$ the equation $A^{\omega}(RH) = 0$ holds, then $A^{\omega}(RG) = 0$.*

If K, L are two subgroups of G, then we shall denote by $[K, L]$ the subgroup generated by all commutators $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh, g \in K, h \in L$.

A series

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq G_n \supseteq \ldots$$

of normal subgroups of a group G is called an N-series if $[G_i, G_j] \subseteq G_{i+j}$ for all $i, j \geq 1$ and also each of the Abelian groups G_i/G_j is a direct product of (possibly infinitely many) cyclic groups which are either infinite or of order p^k , where p is a fixed prime and k is bounded by some integer depending only on G.

It is easy to see that the lower central series of a nilpotent p-group of finite exponent is an N-series.

In this paper we shall use the following theorems:

Theorem 2.1. ([5] Lemma 2.21, page 27) *The augmentation ideal $A(RG)$ is nilpotent if and only if G is a finite p-group and R has characteristic p^n for some prime p.*

The ideal $J_p(R)$ of a ring R is defined by

$$J_p(R) = \bigcap_{n=1}^{\infty} p^n R.$$

Theorem 2.2([3]). *Let G be a group having a finite N-series and R be a commutative ring with unity satisfying $J_p(R) = 0$. Then $A^{\omega}(RG) = 0$.*

In this paper we apply Theorem 2.2 for residually-$\mathcal{N}_p$ groups.

Theorem 2.3. *Let R be a commutative ring with unity satisfying $J_p(R) = 0$. If G is a residually-$\mathcal{N}_p$ group, then $A^{\omega}(RG) = 0$.*

The proof of this theorem follows from Lemmas 2.1 and 2.2 and Theorem 2.2 because the class $\mathcal{N}_p$ is closed under the taking of subgroups and also finite direct products.

Theorem 2.4 ([4],VI.,Theorem 2.15). *If G is a residually torsion-free nilpotent group and R is a commutative ring with unity such that its additive group is torsion-free, then $A^{\omega}(RG) = 0$.*

The n-th term of the lower central series of G is defined inductively: $\gamma_1(G) = G, \gamma_2(G) = G'$ is the derived subgroup $[G,G]$ of G, and $\gamma_n(G) = [\gamma_{n-1}(G), G]$.

We shall also use the following well known fact:

$$I(\gamma_n(G)) \subseteq A^n(RG)$$

for all $n \geq 1$.

3. The augmentation terminals

Throughout this paper R will denote a commutative ring with unity of non-zero characteristic and also p will denote a prime number.

Let p be a prime and n a natural number. Then we shall denote by G^{p^n} the subgroup generated by all elements of the form $g^{p^n}, g \in G$.

The normal subgroup $G_{p,k}$ are defined by

$$G_{p,k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G^{p^n} \gamma_k(G),$$

where $\gamma_k(G)$ is the k-th term of the lower central series of G. It is clear, that the factor-group $G/G_{p,k}$ is residually-$\mathcal{N}_p$ group for every k.

We have the following sequence

$$(1) \qquad G = G_{p,1} \supseteq G_{p,2} \supseteq \ldots \supseteq G_p$$

of normal subgroups $G_{p,k}$ of a group G, where $G_p = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_{p,k}$.

Lemma 3.1. *Let R be a commutative ring of characteristic p^s. Then $I(G_{p,k}) \subseteq A^k(RG)$ for all $k \geq 1$.*

PROOF. Let the element $h-1$ be in $I(G_{p,k})$. It will be sufficient to show that $h-1 \in A^k(RG)$. Writing the element h as $h = h_1^{p^n} h_2^{p^n} \cdots h_m^{p^n} y_k$ $(h_i \in G,\ y_k \in \gamma_k(G))$ and using the identity

$$(2) \qquad ab - 1 = (a-1)(b-1) + (a-1) + (b-1)$$

we have that

$$h - 1 = (h_1^{p^n} h_2^{p^n} \cdots h_m^{p^n} y_k - 1)(y_k - 1) + (h_1^{p^n} h_2^{p^n} \cdots h_m^{p^n} - 1) + (y_k - 1).$$

Since $I(\gamma_k(G)) \subseteq A^k(RG)$ we have $y_k - 1 \in A^k(RG)$. Therefore

$$h - 1 \equiv (h_1^{p^n} h_2^{p^n} \cdots h_m^{p^n} - 1) \pmod{A^k(RG)}.$$

Applying (2) repeatedly to $(h_1^{p^n} h_2^{p^n} \cdots h_m^{p^n} - 1)$ from the preceding expression it follows that

$$h - 1 \equiv \sum_{i=1}^{m} (h_i^{p^n} - 1) b_i \equiv \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p^n} \binom{p^n}{j} (h_i - 1)^j b_i \pmod{A^k(RG)},$$

where $b_i \in RG$. The elements $(h_i - 1)^j$ are in $A^k(RG)$ for all i and $j \geq k$. If $n \geq s + k$, then p^s divides $\binom{p^n}{j}$ for $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Therefore

$$\text{(3)} \qquad h - 1 \equiv p^s \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k-1} d_j (h_i - 1)^j b_i \equiv p^s F_k(h) \pmod{A^k(RG)},$$

where $F_k(h) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k-1} d_j (h_i - 1)^j b_i$ and $p^s d_j = \binom{p^n}{j}$. Since p^s is zero in R we have that $h - 1 \in A^k(RG)$ which implies the inclusion $I(G_{p,k}) \subseteq A^k(RG))$ and completes the proof of the lemma.

Lemma 3.2. *Let R be a commutative ring of characteristic p^s. Then*

$$A^\omega(RG) = I(G_p).$$

PROOF. From Lemma 3.1 the inclusion $I(G_p) \subseteq A^\omega(RG)$ follows. We can readily verify that G/G_p is residually-$\mathcal{N}_p$ group and so

$$A^\omega(RG/G_p) = 0$$

by Theorem 2.3. Hence we have the inclusion $A^\omega(RG) \subseteq I(G_p)$ which completes the proof of the lemma.

If G is a finite p-group and R a commutative ring of characteristic p^s, then the ideal $A(RG)$ is nilpotent (see Theorem 2.1). Denote by $\tau^\circ(A(RG))$ the *nilpotency index* of $A(RG)$, i.e. the natural number $k = \tau^\circ(A(RG))$ for which $A^{k-1}(RG) \neq A^k(RG) = 0$. If $G = \langle 1 \rangle$ we put $\tau^\circ(A(RG)) = 1$

Let $\tau_p(G)$ denote the smallest natural number k (if it exists) such that $G_{p,\ldots} \neq G_{p,k} = \ldots = G_p$.

Theorem 3.1. *Let R be a commutative ring of characteristic p^s Then the augmentation terminal of G with respect to R is finite if and only if G/G_p is a finite p-group.*

PROOF. By Lemma 3.2, $\tau_R(G) = 1$ if and only if $G = G_p$.
Now we suppose that $\tau_R(G) = k > 1$. Then

$$\ldots \supset A^{k-1}(RG) \supset A^k(RG) = A^{k+1}(RG) = \ldots = A^\omega(RG)$$

and hence

$$\ldots \supseteq A^{k-1}(RG/G_{p,i}) \supseteq A^k(RG/G_{p,i}) = \ldots = A^\omega(RG/G_{p,i}),$$

that is $\tau_R(G/G_{p,i})$ is finite and not greater than $\tau_R(G)$ for all $i > 1$. It is very easy to see that $G/G_{p,i}$ are residually-$\mathcal{N}_p$ groups and consequently, by Theorem 2.3, $A^\omega(RG/G_{p,i}) = 0$ for all $i > 1$. Because $\tau_R(G/G_{p,i}) \leq k$,

$$A^k(RG/G_{p,i}) = 0 \tag{4}$$

for every i. So from the isomorphism

$$A^k(RG/G_{p,i}) \cong (A^k(RG) + I(G_{p,i}))/I(G_{p,i})$$

the inclusion $A^k(RG) \subseteq I(G_{p,i})$ follows for all $i > 1$. If $i = k$ then from Lemma 3.1 it follows that $A^k(RG) = I(G_{p,k})$. Hence $I(G_{p,k}) \subseteq I(G_{p,i})$ and, therefore,$G_{p,k} \subseteq G_{p,i}$ for all $i > 1$. This implies that

$$\ldots \supseteq G_{p,k} = G_{p,k+1} = \ldots = G_p$$

and from (4) we have that $A^k(RG/G_p) = 0$. So, by Theorem 2.1, G/G_p is a finite p-group.

Conversely, let G/G_p be a finite p-group. Then, by Theorem 2.1, $A^k(RG/G_p) = 0$ for the nilpotency index $\tau^\circ(A(RG/G_p)) = k$. It follows that $A^k(RG) \subseteq I(G_p)$. Hence, by Lemma 3.2, we obtain that $A^k(RG) \subseteq A^\omega(RG)$. The inverse inclusion, of course, is trivial. Therefore $A^k(RG) = A^\omega(RG)$. Consequently

$$A^k(RG) = A^{k+1}(RG) = \ldots$$

which was to be proved.

Theorem 3.2. *Let R be a commutative ring of characteristic p^s and let the augmentation terminal of G with respect to R be finite. Then*

$$\tau_R(G) = \tau^\circ(A(RG/G_p)) \geq \tau_p(G).$$

PROOF. Let $\tau_R(G) = k$. It is obvious that $\tau_R(G/G_p)$ is finite and also the inequality $\tau_R(G) \geq \tau_R(G/G_p)$ holds. By Theorem 3.1 G/G_p is finite p-group. Keeping in mind the previous inequalities, by Theorem 2.1, we have that

$$A^k(RG/G_p) = 0.$$

Consequently, $\tau^\circ(A(RG/G_p)) \leq \tau_R(G)$.

Now we show that $\tau^\circ(A(RG/G_p)) = \tau_R(G)$. If this equation is not true we can choose a non-negative integer $i < k$ such that $A^i(RG/G_p) = 0$. Hence we have that $A^i(RG) \subseteq I(G_p)$. By Lemma 3.2, $I(G_p) = A^\omega(RG)$. Therefore $A^i(RG) \subseteq A^\omega(RG)$ and $A^i(RG) = A^{i+1}(RG)$ which contradicts to the equation $\tau_R(G) = k$. Consequently,

$$\tau_R(G) = \tau^\circ(A(RG/G_p)).$$

From $\tau_R(G) = k$ it follows that $A^k(RG) = A^\omega(RG)$ and, by Lemmas 3.1 and 3.2, $I(G_{p,k}) \subseteq A^k(RG) = A^\omega(RG) = I(G_p)$. Then $G_{p,k} \subseteq G_p$ and by (1) we obtain that $G_{p,k} = G_p$, that is $\tau_p(G) \leq \tau_R(G)$. This completes the proof of the theorem.

Let $\Pi(n)$ denote the set of prime divisors of a natural number n.

Theorem 3.3. *Let R be a commutative ring of non-zero characteristic n. Then the augmentation terminal of G with respect to R is finite if and only if G/G_p is finite p-group for all $p \in \Pi(n)$.*

PROOF. Let $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_t^{m_t}$ be the prime power decomposition of the natural number n. We shall write $R_{p_i} = R/n_iR$ for $n_i = p_i^{m_i}$, where $p_i \in \Pi(n) = \{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$.

Let $\tau_R(G)$ be finite. It follows that $\tau_{R_{p_i}}(G)$ is also finite and

$$\tau_R(G) \geq \tau_{R_{p_i}}(G) \tag{5}$$

for all $p_i \in \Pi(n)$. Then, by Threorem 3.1, G/G_{p_i} is a finite p_i-group for all $p_i \in \Pi(n)$.

We notice that from (5) the inequality

$$\tau_R(G) \geq \max_{p_i \in \Pi(n)} \{\tau_{R_{p_i}}(G)\} \tag{6}$$

follows.

Conversely. Let G/G_{p_i} be finite p_i-group for all $p_i \in \Pi(n)$. Then by Theorem 3.1, the augmentation terminal $\tau_{R_{p_i}}(G)$ is finite for all $p_i \in \Pi(n)$. Let

$$k = \max_{p_i \in \Pi(n)} \{\tau_{R_{p_i}}(G)\}.$$

Then

$$(7) \qquad \ldots \supseteq A^{k-1}(R_{p_i}G) \supseteq A^k(R_{p_i}G) = A^{k+1}(R_{p_i}G) = \ldots = A^{\omega}(R_{p_i}G)$$

for all $p_i \in \Pi(n)$. From the isomorphism

$$A^k(R_{p_i}G) \cong (A^k(RG) + n_iR \cdot RG)/n_iR \cdot RG$$

and from (7) it follows that for every $p_i \in \Pi(n)$, an arbitrary element x of $A^k(RG)$ can be written as

$$(8) \qquad x = x_i + n_i a_i,$$

where $x_i \in A^{k+1}(RG), a_i \in RG$ and $i = 1, 2, \ldots, t$.

If $\overline{n}_i = n/n_i$, then $\overline{n}_i$ is non-zero and $\overline{n}_i n_i = 0$ in R. Then $\overline{n}_i x = \overline{n}_i x_i$ for all $i = 1, 2, \ldots, t$ and from (8) we have that

$$(\sum_{i=1}^{t} \overline{n}_i)x = \sum_{i=1}^{t} \overline{n}_i x_i.$$

It is easy to see that $\overline{n}_i$ and n_i are coprimes and also n_i divides $\overline{n}_j$ for all $i \neq j$. Therefore the numbers $\sum_{i=1}^{t} \overline{n}_i$ and n are coprimes. Hence $\sum_{i=1}^{t} \overline{n}_i$ is invertible in R, because the characteristic of R equals to n. Then from the previous equation we obtain that

$$x = \alpha \sum_{i=1}^{t} \overline{n}_i x_i,$$

where $\alpha \sum_{i=1}^{t} \overline{n}_i = 1, \alpha \in R^*$ and R^* is the unit group of R. Therefore $x \in A^{k+1}(RG)$ and hence we conclude that $A^k(RG) \subseteq A^{k+1}(RG)$. The inverse inclusion is trivial. Consequently, $A^k(RG) = A^{k+1}(RG)$ and

$$(9) \qquad \tau_R(G) \leq \max_{p_i \in \Pi(n)} \{\tau_{R_{p_i}}(G)\},$$

that is the augmentation terminal $\tau_R(G)$ of G in regarding to R is finite which was to be proved.

Theorem 3.4. *Let R be a commutative ring of non-zero characteristic n and let the augmentation terminal of G with respect to R be finite. Then*

$$\tau_R(G) = \max_{p_i \in \Pi(n)} \left\{\tau_{R_{p_i}}(G)\right\} = \max_{p_i \in \Pi(n)} \{\tau^\circ(A(R_{p_i} G/G_{p_i}))\} \geq$$
$$\geq \max_{p_i \in \Pi(n)} \{\tau_{p_i}(G)\}\,.$$

PROOF. By Theorem 3.2 we have that $\max_{p_i \in \Pi(n)} \left\{\tau_{R_{p_i}}(G)\right\} = \max_{p_i \in \Pi(n)} \{\tau^\circ(A(R_{p_i} G/G_{p_i}))\} \geq \max_{p_i \in \Pi(n)} \{\tau_{p_i}(G)\}$. From (6) and (9) we have that $\tau_R(G) = \max_{p_i \in \Pi(n)} \left\{\tau_{R_{p_i}}(G)\right\}$ which was to be proved.

References

[1] BOVDI, A. A., Group rings, *UMK VO, KIEV*, 1988.

[2] GRUENBERG, K. W., ROSEBLADE, J. E., The augmentation terminals of certain locally finite groups, *Can. J. Math.*, **XXIV, 2.**, (1972), 221–238.

[3] HARTLEY, B., The residual nilpotence of wreath products, *Proc. London Math. Soc.*, **(3) 20**, (1970), 365–392.

[4] PASSI, I. B., Group ring and their augmentation ideals, *Lecture notes in Math., 715, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York*, 1979.

[5] SEHGAL, S. K., Topics in group rings, *Marcel Dekker, Inc., New York and Basel*, 1978.

Unitary subgroup of the Sylow p-subgroup of the group of normalized units in an infinite commutative group ring

ATTILA SZAKÁCS

Abstract. Let G be an abelian group, K a ring of prime characteristic p and let V(KG) denote the group of normalized units of the group ring KG. An element $u = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in V(KG)$ is called unitary if u^{-1} coincides with the element $u^* = \sum_{g \in G} \alpha_g g^{-1}$. The set of all unitary elements of the group $V(KG)$ forms a subgroup $V_*(KG)$.

S. P. Novikov had raised the problem of determining the invariants of the group $V_*(KG)$ when G has a p-power order and K is a finite field of characteristic p. This was solved by A. Bovdi and the author. Here we give the invariants of the unitary subgroup of the Sylow p-subgroup of $V(KG)$ whenever G is an arbitrary abelian group and K is a commutative ring of odd prime characteristic p without nilpotent elements.

1. Introduction

Let G be an abelian group, K a ring of prime characteristic p and let V(KG) denote the group of normalized units (i.e. of augmentation 1) of the group ring KG. We say that for $x = \sum\limits_{g \in G} \alpha_g g \in KG$ the element $x^* = \sum\limits_{g \in G} \alpha_g g^{-1}$ is conjugate to x, and if $x^* = x$, then x is selfconjugate. It can be seen that the map $x \to x^*$ is an anti-isomorphism (involution) of the ring KG. An element $u \in V(KG)$ is called unitary if $u^{-1} = u^*$. The set of all unitary elements of the group $V(KG)$ obviously forms a subgroup, which we therefore call the unitary subgroup of $V(KG)$, and we denote it by $V_*(KG)$.

Let G^p denote the subgroup $\{g^p \mid g \in G\}$ of p-th powers elements of G and ω an arbitrary ordinal. The subgroup G^{p^ω} of the group G is defined by transfinite induction in following way: $G^{p^0} = G$, for non-limited ordinals

Research supported (partially) by the Hungarian National Foundation for Scientific Research (OTKA), Grant No. T014279.

(that is if $\omega = \nu + 1$): $G^{p^\omega} = \left(G^{p^\nu}\right)^p$, and if ω is a limited ordinal, then $G^{p^\omega} = \bigcap\limits_{\nu<\omega} G^{p^\nu}$.

The subring K^{p^ω} of the ring K is defined similarly. The ring K is called p-divisible if $K^p = K$.

Let $G[p]$ denote the subgroup $\{g \in G \mid g^p = 1\}$ of G. The factorgroup $G^{p^\omega}[p]/G^{p^{\omega+1}}[p]$ can be considered as a vector space over $GF(p)$ the field of p elements, and the cardinality of a basis of this vector space is called the ω-th Ulm–Kaplansky invariant $f_\omega(G)$ of the group G concerning p.

S. P. Novikov had raised the problem of determining the invariants of the group $V_*(KG)$ when G has a p-power order and K is a finite field of characteristic p. This was solved by A. Bovdi and the author in [1]. Here we continue this work by giving the Ulm–Kaplansky invariants of the unitary subgroup $W(KG)$ of the Sylow p-subgroup $V_p(KG)$ of $V(KG)$ whenever G is an arbitrary abelian group and K is a commutative ring of odd prime characteristic p without nilpotent elements.

Theorem. *Let ω be an arbitrary ordinal, K a commutative ring of odd prime characteristic p without nilpotent elements, P the maximal divisible subgroup of the Sylow p-subgroup S of an abelian group G, $G_\omega = G^{p^\omega}$, $S_\omega = S^{p^\omega}$ and $K_\omega = K^{p^\omega}$. Let, further on, $V_p = V_p(KG)$ denote the Sylow p-subgroup of the group $V = V(KG)$ of normalized units in the group ring KG and $W = W(KG)$ the unitary subgroup of $V_p(KG)$. In case $P \neq 1$ we assume that the ring K is p-divisible. If $G_\omega \neq G_{\omega+1}$, $S_\omega \neq 1$ and at least one of the ordinals $|K_\omega|$ or $|G_\omega|$ is infinite, then the ω-th Ulm–Kaplansky invariant $f_\omega(W)$ of the group W concerning p equals*

$$f_\omega(W) = f_\omega(V_p) = \max\{|G_\omega|, |K_\omega|\}.$$

PROOF. Note that if $G_\omega = G_{\omega+1}$ or $S_\omega = 1$ then, according to [2], $f_\omega(V_p) = 0$ and hence $f_\omega(W) = 0$.

Let $C(KG)$ denote the subgroup of selfconjugate elements of the group $V_p(KG)$. Then the following statements are true:

$$V_p(KG) = C(KG) \times W(KG)$$

and

$$W(KG) = \{x^{-1}x^* \mid x \in V_p(KG)\}.$$

Really, if $x \in C(KG) \bigcap W(KG)$, then $x = x^*$ and $xx^* = 1$. Hence $x^2 = 1$ and since $p > 2$, it follows that $x = 1$. Therefore, $C(KG) \times W(KG)$ is a subgroup of $V_p(KG)$. Let H be a finite subgroup of the group G and ψ

the map, defined in following way: $\psi(x) = x^{-1}x^* \, (x \in V_p(KH))$. Then ψ is an endomorphism of the group $V_p(KH)$, $\psi(V_p(KH)) \subseteq W(KH)$ and the kernel of ψ coincides with the subgroup $C(KH)$. Hence the index of the group $V_p(KH)$ by the subgroup $C(KH)$ not greater than the order of the group $W(KH)$. Since $C(KH) \bigcap W(KH) = 1$, it follows that this index coincides with the order of the group $W(KH)$, and so $V_p(KH) = C(KH) \times W(KH)$. The statements are proved.

It is easy to prove the following statements (see [2]):

1) $|K^p| = |K|$;

2) if n is a nonnegative integer and $J(G^{p^n}[p])$ is the ideal of the ring $(KG)^{p^n}$, generated by the elements of the form $g-1$ $(g \in G^{p^n}[p])$, then $V^{p^n}(KG)[p] = V(K_nG_n)[p] = 1 + J(G^{p^n}[p])$.

First we shall prove the theorem for a finite ordinal $\omega = n$. Suppose that n is a nonnegative integer, the Sylow p-subgroup S_n of the group G_n is not singular, $G_n \neq G_{n+1}$ and at least one of the ordinals $|K_n|$ or $|G_n|$ is infinite. Since

$$W^{p^{n+1}}[p] \subseteq W^{p^n}[p] \subseteq V^{p^n} = V(K_nG_n),$$

it follows that

$$f_n(W) \leq |V^{p^n}| \leq \max\{|K_n|, |G_n|\} = \beta.$$

In the proof of the equation $f_n(W) = \beta$ we shall consider the following cases:

A) $|K_n| \geq |G_n|$,

B) $|G_n| > |K_n|$ and $S_n \neq S_{n+1}$,

C) $|G_n| > |K_n|$ and $S_n = S_{n+1}$,

and in each of this cases we shall construct a set $M \subseteq W^{p^n}(KG)[p]$ of cardinality $\beta = \max\{|K_n|, |G_n|\}$ elements of which belong to different cosets of the group $V^{p^n}(KG)[p]$ by the subgroup $V^{p^{n+1}}(KG)[p]$. This will be sufficient for the proof of the theorem, because the elements of a set M constructed in this way can be considered as the representatives of the cosets of the group $W^{p^n}(KG)[p]$ by the subgroup $W^{p^{n+1}}(KG)[p]$. Note that we will choose the elements of the set M in form $y^{-1}y^*$ $(y \in V^{p^n}(KG))$.

Suppose A) holds, i.e. $|K_n| \geq |G_n|$.

It is easy to prove that in this case the Sylow p-subgroup S_n of the group G_n has an element g of order p and there exists an $a \in G_n$ such that one of the following conditions holds:

A_1) $G_n \neq \langle g \rangle$, $a \notin \langle g \rangle$ and $a^2 \notin \langle g \rangle$,

A_2) $G_n \neq \langle g \rangle$, $a \notin \langle g \rangle$ and $a^2 \in \langle g \rangle$,

$A_3)$ $G_n = \langle g \rangle$,
and in cases $A_1)$ and $A_2)$ one of the elements a or g does not belong to the subgroup G_{n+1}. Indeed, if $g \in G_{n+1}$ then, by the condition $G_n \neq G_{n+1}$, the set $G_n \setminus G_{n+1}$ has the required element a.

Suppose $A_1)$ holds. Let α be a nonzero element of the ring K_n and $y_\alpha = 1 - \alpha a(1 + g + \cdots + g^{p-1})$. We shall prove that the set

$$M = \{x_\alpha = {y_\alpha}^{-1} {y_\alpha}^* = 1 + \alpha(a - a^{-1})(1 + g + \cdots + g^{p-1}) \mid 0 \neq \alpha \in K_n\}$$

has the above declared property. Indeed, since $a^2 \notin \langle g \rangle$, it follows that the elements a and a^{-1} belong to different cosets of the group G_n by the subgroup $\langle g \rangle$. Hence $x_\alpha \neq 1$. It is easy to see that

$${x_\alpha}^* = 1 - \alpha(a - a^{-1})(1 + g + \cdots + g^{p-1}) = {x_\alpha}^{-1}$$

and ${x_\alpha}^p = 1$. Therefore x_α is a unitary element of order p of the group $V(K_n G_n)$. If $x_\alpha \in V^{p^{n+1}}$ then, from the condition $a^2 \notin \langle g \rangle$, it follows that $ag^i \in G_{n+1}$ for every $i = 0, 1, \ldots, p-1$. Hence the elements a and ag belong to the group G_{n+1}, but this contradicts the choice of elements a and g. Therefore $x_\alpha \in W^{p^n}[p] \setminus W^{p^{n+1}}[p]$.

Suppose that the cosets $x_\alpha V^{p^{n+1}}[p]$ and $x_\nu V^{p^{n+1}}[p]$ coincide for some different α and ν from K_n. Then $x_\alpha = x_\nu z$ for a suitable $z \in V^{p^{n+1}}$. Since ${x_\nu}^* = {x_\nu}^{-1}$, it follows that

$$z = x_\alpha {x_\nu}^* = 1 + (\alpha - \nu)(a - a^{-1})(1 + g + \cdots + g^{p-1}) = x_{\alpha - \nu}$$

and $x_{\alpha-\nu}$ belongs to the subgroup $V^{p^{n+1}}$, which contradicts the proved above. Obviously $|M| = |K_n|$. Therefore, the constructed set M has the above declared property.

Suppose now that $A_2)$ holds.

Then $y_\alpha = 1 + \alpha a(g - 1)$ is not a selfconjugate element in the group $V^{p^n}[p] \setminus V^{p^{n+1}}[p]$ and the set M can be choosen in the following way:

$$M = \left\{x_\alpha = {y_\alpha}^{-1} {y_\alpha}^* \mid 0 \neq \alpha \in K_n\right\}.$$

It is easy to prove that ${x_\alpha}^* = {x_\alpha}^{-1}$, so, from the assumption $x_\alpha = x_\nu z$ $(\alpha \neq \nu,\ z \in V^{p^{n+1}})$ the equation

$$\begin{aligned}(1)\qquad (1 + \nu a(g-1))\left(1 + \alpha a^{-1}(g^{-1} - 1)\right) &= \\ = (1 + \alpha a(g-1))\left(1 + \nu a^{-1}(g^{-1} - 1)\right) z &\end{aligned}$$

follows. If we multiply (1) by $(g-1)^{p-1} = 1 + g + \cdots + g^{p-1}$, then we get the equation $1 + g + \cdots + g^{p-1} = (1 + g + \cdots + g^{p-1})z$. Hence

$$(1 + g + \cdots + g^{p-1})(z - 1) = 0. \tag{2}$$

Suppose that $g \notin G_{n+1}$. Since the support of the element $z - 1$ belongs to the subgroup G_{n+1} and the elements of the group G_{n+1} belong to the cosets of the group G_n by the subgroup $\langle g \rangle$, it follows that $z = 1$. According to the statement

$$1 = 1 + (g-1)^p = (1 + g - 1)(1 - (g-1) + (g-1)^2 - \cdots + (g-1)^{p-1})$$

it is easy to prove that

$$g^{-1} - 1 = -(g-1) + (g-1)^2 - \cdots + (g-1)^{p-1}. \tag{3}$$

If in the equation (1) the element $g^{-1} - 1$ is substituted by the right side of (3) and the obtained equation is multiplied by $(g-1)^{p-2}$, then we get

$$(\nu - \alpha)a(1 + g + \cdots + g^{p-1}) = (\alpha - \nu)a(1 + g + \cdots + g^{p-1}).$$

Hence $(\nu - \alpha) = -(\nu - \alpha)$ and this is impossible in a ring of characteristic $p > 2$ whenever $\alpha \neq \nu$.

Now let $g \in G_{n+1}$. The element $y = z - 1$ can be presented in the form

$$y = z - 1 = z_1 u_1 + \cdots + z_s u_s$$

where $z_i \in K_n\langle g \rangle$ and u_i $(i = 1, \ldots, s)$ are the representatives of the cosets of the group G_{n+1} by the subgroup $\langle g \rangle$. Then, according to (2), every z_i $(i = 1, \ldots, s)$ belongs to the fundamental ideal of the ring $K_n\langle g \rangle$ and hence it can be written in the form $z_i = \alpha_1(g-1) + \cdots + \alpha_{p-1}(g-1)^{p-1}$. Therefore

$$z = 1 + y_1(g-1) + \cdots + y_{p-1}(g-1)^{p-1} \tag{4}$$

where the support of the elements y_i $(i = 1, \ldots, p-1)$ consists of the representatives of the cosets of the group G_{n+1} by the subgroup $\langle g \rangle$. If in the equation (1) the elements $g^{-1} - 1$ and z are substituted by the expressions shown in (3) and (4), and the obtained equation is multiplied by $(g-1)^{p-2}$, then we get

$$2(\nu - \alpha)a(1 + g + \cdots + g^{p-1}) = y_1(1 + g + \cdots + g^{p-1}).$$

Hence the element a from the support of the left side of this equation coincides with some element from the support of the right side. But this contradicts the condition $a \notin G_{n+1}$, since the support of the right side belongs to the group G_{n+1}. Therefore, the case A_2) is completed.

Suppose A_3) holds, i.e. $G_n = \langle g \rangle$. Then $G_{n+1} = 1$. As in the previous case it is easy to prove that the set

$$M = \left\{ x_\alpha = (1 + \alpha(g-1))^{-1} \left(1 + \alpha(g^{-1} - 1)\right) \mid 0 \neq \alpha \in K_n \right\}$$

has the needed property.

Therefore, the proof is complete whenever A) holds.

Suppose now that B) holds, i.e. $|G_n| > |K_n|$ and the Sylow p-subgroup S_n of the group G_n does not coincide with the Sylow p-subgroup S_{n+1} of the group G_{n+1}. Then the set $S_n \setminus S_{n+1}$ has an element g of order $q = p^r$. Let $\pi = \pi(G_n / \langle g \rangle)$ denote the full set of representatives of the cosets of the group G_n by the subgroup $\langle g \rangle$. Consider two disjunct subsets

$$\pi_1 = \{a \in \pi \mid a^2 \notin \langle g \rangle\} \quad \text{and} \quad \pi_2 = \{a \in \pi \mid a^2 \in \langle g \rangle\}$$

of the set π. It is easy to see that $|G_n| = |\pi| = \max\{|\pi_1|, |\pi_2|\}$.

Let us suppose first that $|G_n| = |\pi_1|$. Without loss of generality we can assume that the representative of the set $a^{-1}\langle g \rangle$ is the element a^{-1}. Let E denote a set which has a unique representative in every subset of the form $\{a, a^{-1} \mid a \in \pi_1\}$ and $y_a = 1 - a^{-1}(1 + g + \cdots + g^{q-1})$. Then $|G_n| = |E|$ and the elements of the set

$$M = \{x_a = {y_a}^{-1} {y_a}^* = 1 + (a^{-1} - a)(1 + g + \cdots + g^{q-1}) \mid a \in E\}$$

belong to different cosets of the group $V^{p^n}[p]$ by the subgroup $V^{p^{n+1}}[p]$. Indeed, it is easy to see that $x_a \in W^{p^n}[p] \setminus W^{p^{n+1}}[p]$. Suppose that a and c are distinct elements of the set E. If $x_a = x_c z$ for some $z \in V^{p^{n+1}}$, then

$$z = x_a {x_c}^* = 1 + (a^{-1} - a - c^{-1} + c)(1 + g + \cdots + g^{q-1}).$$

According to the choice of the elements of the set E we have that the elements a, a^{-1}, c, c^{-1} belong to distinct cosets of the group G_n by the subgroup $\langle g \rangle$. Hence from the condition $z \in V^{p^{n+1}}$ it follows that $ag^i \in G_{n+1}$ $(i = 0, 1, \cdots, q-1)$, which contradicts the choice of the element $g \in S_n \setminus S_{n+1}$.

Let be $|G_n| = |\pi_2|$. Then the set M can be choosen in the following way:

$$M = \{x_a = (1 + a(g-1))^{-1} \left(1 + a^{-1}(g^{-1} - 1)\right) \mid a \in \pi_2\}.$$

Indeed, from the supposition $x_a = x_c z \ \ (z \in V^{p^{n+1}}, a \neq c)$ the equation

$$(5) \qquad \begin{aligned} &(1 + c(g-1))\left(1 + a^{-1}(g^{-1} - 1)\right) = \\ &\qquad = (1 + a(g-1))\left(1 + c^{-1}(g^{-1} - 1)\right) z \end{aligned}$$

follows. Multiplying the equation (5) by $(g-1)^{q-1}$ we get the statement $(1 + g + \cdots + g^{q-1}) = (1 + g + \cdots + g^{q-1})z$. As in above, we can prove that from this equation and the condition $g \notin G_{n+1}$ the statement $z = 1$ follows. Substituting the element $g-1$ in (5) by the right side of (3) and the obtained equation is multiplied by $(g-1)^{q-2}$ we have that $2(c-a)(1+g+\cdots+g^{q-1}) = 0$. But it contradicts the fact that a and c belong to distinct cosets of the group G_n by the subgroup $\langle g \rangle$. So the case B) is fully considered.

Suppose C) holds , i. e. $|G_n| > |K_n|$ and the Sylow p-subgroup S_n of the group G_n is p-divisible.

Let us fix an element $g \in S_n[p]$ and choose $v \in G_n \setminus G_{n+1}$ such that p does not divide the order of v. Since $|S_n| = [S_n : \langle g \rangle] \geq |\langle v \rangle|$ and $v \notin S_n$, it follows that the cardinality of the set $\pi' = \pi(G_n/\langle g, v \rangle)$ coincides with $|G_n|$. Obviously the set π decomposes to two disjoint subsets $\pi_1 = \{a \in \pi \mid a^2 \notin \langle v, g \rangle\}$ and $\pi_2 = \{a \in \pi \mid a^2 \in \langle v, g \rangle\}$.

Let $|G_n| = |\pi_1|$,

$$\widetilde{v} = \begin{cases} 1 + v + v^{-1}, & \text{if } v^2 \neq 1, \\ 1 + v, & \text{if } v^2 = 1, \end{cases}$$

E be a set which has a unique representative in every subset of the form $\{a, a^{-1} \mid a \in \pi_1\}$ and $y_a = 1 - a\widetilde{v}(1 + g + \cdots + g^{p-1})$. Then the set M can be choosen in the following way:

$$M = \{x_a = {y_a}^{-1} {y_a}^{*} = 1 + (a - a^{-1})\widetilde{v}(1 + g + \cdots + g^{p-1}) \mid a \in E\}.$$

Indeed, from the equation $x_a = x_c z \ (z \in V^{p^{n+1}}, a \neq c)$ follows that

$$z = 1 + (a - a^{-1} - c + c^{-1})\widetilde{v}(1 + g + \cdots + g^{p-1}) \in V^{p^{n+1}}.$$

Hence, according to the construction of the set E, the elements a and av belong to the group G_{n+1}, but this contradicts the condition $v \notin G_{n+1}$.

Assume $|G_n| = |\pi_2|$. The elements of

$$M = \{x_a = (1 + a(1+v)(g-1))^{-1}\left(1 + a^{-1}(1 + v^{-1})(g^{-1})\right) | a \in \pi_2\}$$

belong to distinct cosets of the group $V^{p^n}[p]$ by the subgroup $V^{p^{n+1}}[p]$. Indeed, suppose that $x_a = x_c z$ for distinct elements a and c from the set π_2 and for some $z \in V^{p^{n+1}}[p]$. Then

$$(6)\qquad \begin{aligned}&(1 + c(1+v)(g-1))\left(1 + a^{-1}(1+v^{-1})(g^{-1}-1)\right) = \\ &= (1 + a(1+v)(g-1))^{-1}\left(1 + c^{-1}(1+v^{-1})(g^{-1}-1)\right) z.\end{aligned}$$

If we multiply the equation (6) by $(g-1)^{p-1}$, then it follows that $(1 + g + \cdots + g^{p-1})(z-1) = 0$ and we can write z in the form (4). Let us now multiply the equation (6) by $(g-1)^{p-2}$. Then, by useing (3) and (4), we get

$$(c-a)(2 + v + v^{-1})(1 + g + \cdots + g^{p-1}) = y_1(1 + g + \cdots + g^{p-1}).$$

Since a and c are from distinct cosets of the group G_n by the subgroup $\langle g, v\rangle$, it follows that c and cv belong to the support of the left side of this equation. Hence they coincide with some elements from the support of the right side, which belongs to the subgroup G_{n+1}. Therefore $c \in G_{n+1}$ and $cv \in G_{n+1}$, but this contradicts the choice of $v \notin G_{n+1}$.

Therefore, the case C) is fully considered and the theorem is proved for a finite ordinal $\omega = n$.

Let us consider the case of infinite ordinal ω.

Let ω be an arbitrary infinite ordinal $R = K_\omega, H = G_\omega$, $G_\omega \neq G_{\omega+1}$ and the Sylow p-subgroup S_ω of the group G_ω is not singular. Then

$$W(KG)^{p^\omega} \subseteq W(RH) \subseteq V_p(RH)$$

and by transfinite induction it is easy to prove

$$(7)\qquad (V_p(KG))^{p^\omega} = V_p(RH).$$

For the group $V_p(RH)$ we can construct the set M as in the above shown cases A), B) and C). Since in each of these cases the set M consists of elements of form $x = y^{-1}y^*$ and, by (7), y belongs to the group $V_p(RH) = (V_p(KG))^{p^\omega}$, it follows that the elements x are the representatives of the cosets of the group $W^{p^\omega}(KG)[p]$ by the subgroup $W^{p^{\omega+1}}(KG)[p]$.

Therefore, for an arbitrary infinite ordinal ω the Ulm–Kaplansky invariants of the group $W(KG)$ can be calculated in the above shown way for the case $\omega = n$.

References

[1] A. A. Bovdi and A. A. Szakács, The unitary subgroup of the group of units in a modular group algebra of a finite abelian p-group, *Math. Zametki.* *6* **45** (1989), 23–29 (in Russian). (see English translation in *Math. Notes*, 5–6 **45** (1989), 445–450.)

[2] A. A. Bovdi and Z. F. Patay, The structure of the centre of the multiplicative group of the group ring of a p-group over a ring of characteristic p. *Vesci Akad. Nauk. Bssr. Ser. Fiz. Math. Nauk.* (1978) No. 1, 5–11.

On Perron's proof of Fermat's two square theorem

JAROSLAW GRYTCZUK

Abstract. Fermat's two square theorem states that every prime of the form $4m+1$ is the sum of two squares. In this note we give a new proof for this using continued fraction expansion of squareroot of non-square integers.

It is well known that if a natural number d is not a perfect square the simple continued fraction expansion of $\sqrt{d}$ is periodic and has the form $\sqrt{d} =< a_0, \overline{a_1, a_2, \cdots a_s} >$, where $a_i = [(m_i + \sqrt{d})/q_i]$, $m_0 = 0$, $q_0 = 1$ and

$$m_i = a_{i-1}q_{i-1} - m_{i-1}, \tag{1}$$

$$q_i q_{i-1} = d - m_i^2. \tag{2}$$

(See for example in [1]). From these relations and some theorems concerning diophantine equations O. Perron deduces in [2, p.98] the famous result of Fermat: Every prime of the form $4m+1$ is a sum of two squares.

In this note we will show that it is possible to do the same restricting theoretical tools to the above algorithm.

Proof of the Two Square Theorem. The main idea is the same as Perron's and lies in the palindromatic nature of the fragments $(m_1, \cdots, m_s)$ and $(q_0, \cdots, q_s)$, (see [2, p.76]). In view of this and (2) d is a sum of two squares whenever s is odd. So, we'll be done showing that this is the case for the primes $p = 4m+1$.

Suppose then, that $p \equiv 1 \pmod 4$ and the length of the shortest period of the continued fraction expansion of $\sqrt{p}$ is even, say $s = 2k$. Then we have $m_k = m_{k+1}$ and after some substitutions;

$$2m_k = a_k q_k \tag{3}$$

and

$$q_k(4q_{k-1} + a_k^2 q_k) = 4p. \tag{4}$$

Analysing the last equation we conclude that $q_k = 2$ or $q_k = 1$. However, the second possibility occurs only if k is a multiple of s [1, p.171]. Hence q_k and q_{k-1} are even a_k is odd and because of (3) so is m_k. From (1) m_{k-1} is odd. too. Actually, the parity of q_i and m_i remains unchanged for further indices $i = k-2, k-3, \dots, 1, 0$. Indeed, puting (1) to (2) we obtain

$$q_i = q_{i-2} + a_{i-1}(m_{i-1} - m_i) \tag{5}$$

and now looking by turns on (5) and (1) we get the announced effect. But this is contrary to the initial conditions $m_0 = 0$, $q_0 = 1$ and the proof is complete.

References

[1] I. NIVEN and H. ZUCKERMAN, An Introduction to The Theory of Numbers, Third Edition, John Wiley and Sons, (1972).

[2] O. PERRON, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Teubner, Stuttgart, (1954).

On a problem of W. Sierpinski

DARIUSZ FREJMAN and ALEKSANDER GRYTCZUK

Abstract. In this paper we dealt with the Diophantine equation $(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 = (z^2-1)^2$. We prove: if $x > 1, y > 1$ and $z = y+1$ then the only solution is $(x, y, z) = (10, 13, 14)$.

Let $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$ be the n-th triangular number. K. Zarankiewicz (see [2], p. 53) has asked whether there exists a Pytagorean triangle whose sides are triangular numbers, i. e.

$$t_a^2 + t_b^2 = t_c^2. \tag{1}$$

The answer to this question is affirmative, because for $a = 132$, $b = 143$, $c = 164$ the triangular numbers t_{132}, t_{143}, t_{164} satisfy (1). On the other hand we have $8t_n = (2n+1)^2 - 1$ and we see that (1) is equivalent to

$$\left((2a+1)^2 - 1\right)^2 + \left((2b+1)^2 - 1\right)^2 = \left((2c+1)^2 - 1\right)^2. \tag{2}$$

Thus the equation

$$(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 = (z^2-1)^2 \tag{3}$$

has a solution in odd natural numbers x, y, z, namely $x = 2a+1 = 265$, $y = 2b+1 = 287$, $z = 2c+1 = 329$. The equation (3) has also another solution in which not all numbers x, y, z are odd, namely $x = 10$. $y = 13$, $z = y+1 = 14$ (Cf. [2], p.54).

W. Sierpinski (see [2], p.54) writes that we do not know whether the equation (3) has infinitely many solutions in natural numbers greater than one.

In this connection we prove the following theorem:

Theorem. The Diophantine equation

$$(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 = (z^2-1)^2$$

has exactly one solution in natural numbers $x > 1$, $y > 1$, z, such that $z = y + 1$, namely

$$< x, y, z > = < 10, 13, 14 > .$$

In the proof of the Theorem we use the following:

Lemma. The Diophantine equation

$$3u^4 - 2v^2 = 1$$

has exactly two solutions in natural numbers u, v namely

$$< u, v > = < 1, 1 >, < 3, 11 > .$$

The proof of this Lemma has been given by R. T. Bumby in [1].

PROOF of the Theorem. Let $z = y + 1$ and suppose that the equaiton (3) has a solution in natural numbers x, y, z. Then we have

$$\left(x^2 - 1\right)^2 = (2y + 1)\left(2y^2 + 2y - 1\right) .$$

Let $d = \left(2y + 1, 2y^2 + 2y - 1\right)$ then we have

$$2y + 1 = dA, \quad 2y^2 + 2y - 1 = dB; \quad (A, B) = 1. \tag{5}$$

From (5) we have

$$d^2 A^2 - 3 = 2d \cdot B. \tag{6}$$

By (6) it follows that $d \mid 3$, thus $d = 1$ or $d = 3$.

Let us consider the case $d = 1$. Then by (5) and (4) it follows that

$$\left(x^2 - 1\right)^2 = A \cdot B; \quad (A, B) = 1. \tag{7}$$

From (7) we obtain that there exist integers α, β such that $(\alpha, \beta) = 1$ and

$$A = \alpha^2, B = \beta^2, x^2 - 1 = \alpha \cdot \beta. \tag{8}$$

By (8) and (6) it follows that

$$\alpha^4 - 3 = 2\beta^2, \quad (\alpha, \beta) = 1. \tag{9}$$

From (9) we have that α is an odd number. If β is also an odd number then by (9) we have $2\beta^2 + 3 \equiv 5 \pmod 8$ and so $\alpha^2 \equiv 1 \pmod 8$ and we get a contradiction.

If β is an even number then we have $2\beta^2 + 3 \equiv 3 \pmod 4$ and $\alpha^2 \equiv 1 \pmod 4$ and similarly we obtain a contradiction mod 4.

Thus we obtain that the equation (9) has no solution in natural numbers α, β.

Now we can consider the case $d = 3$.

By (5) and (4) it follows that

$$\left(\frac{x^2-1}{3}\right)^2 = A \cdot B, \quad (A, B) = 1. \tag{10}$$

From (10) we obtain

$$A = \alpha^2, \quad B = \beta^2, \quad x^2 - 1 = 3\alpha\beta, \quad (\alpha, \beta) = 1. \tag{11}$$

By (11) and (6) it follows that

$$3\alpha^4 - 2\beta^2 = 1. \tag{12}$$

Applying Bumby's result (see Lemma) to (12) we have

$$< \alpha, \beta > = < 1, 1 >, < 3, 11 > . \tag{13}$$

If $\alpha = \beta = 1$ then $A = B = 1$ and $x^2 - 1 = 3$ thus $x = 2$. From (5) we have $2y + 1 = 3 \cdot 1$ thus $y = 1$, which contrardicts to our assumpiton $y > 1$.

Hence $\alpha = 3$, $\beta = 11$ and we obtain $A = \alpha^2 = 3^2 = 9$, $B = \beta^2 = 11^2 = 121$, $x^2 - 1 = d\alpha\beta = 3^2 \cdot 11 = 99$ thus $x = 10$. From (5) $2y + 1 = dA = 3 \cdot \alpha^2 = 3 \cdot 3^2 = 27$, thus $y = 13$. Because $z = y + 1$, thus $z = 14$. Hence $< x, y, z > = < 10, 13, 14 >$ and the proof of the Theorem is complete.

References

[1] R. T. BUMBY, The Diophantine equation $3x^4 - 2y^2 = 1$, *Math. Scand.*, **21** (1967), 144–148.

[2] W. SIERPINSKI, Elementary Theory of Numbers, *PWN Warszawa*, (1987).

On a norm convergence theorem with respect to the Vilenkin system in the Hardy spaces

GYÖRGY GÁT

Abstract. In 1993. the author proved the $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \|S_k f\|_1 / k = \|f\|_1$ convergence for functions f in $H(G_m)$ (the so-called "atomic" Hardy space) with respect to all G_m Vilenkin group. In this paper we prove that this theorem fails to hold in the case of the so-called unbounded Vilenkin group and the "maximal" Hardy space.

Introduction and Results

First we introduce some necessary definitions and notations of the theory of the Vilenkin systems. The Vilenkin systems were introduced by N. Ja. Vilenkin in 1947 (see e.g. [8]). Let $m := (m_k, k \in \mathbf{N})(\mathbf{N} := \{0, 1, \ldots\})$ be a sequence of integers each of them not less than 2. Let Z_{m_k} denote the m_k-th discrete cyclic group. Z_{m_k} can be represented by the set $\{0, 1, \ldots, m_k - 1\}$, where the group operation is the mod m_k addition and every subset is open. The measure on Z_{m_k} is defined such that the measure of every singleton is $\frac{1}{m_k}(k \in \mathbf{N})$. Let

$$G_m := \mathop{\times}_{k=0}^{\infty} Z_{m_k}.$$

This gives that every $x \in G_m$ can be represented by a sequence $x = (x_i, i \in \mathbf{N})$, where $x_i \in Z_{m_i}, (i \in \mathbf{N})$. The group operation on G_m (denoted by $+$) is the coordinate-wise addition (the inverse operation is denoted by $-$), the measure (denoted by μ) and the topology are the product measure and topology. Consequently, G_m is a compact Abelian group. If $\sup_{n\in\mathbf{N}} m_n < \infty$, then we call G_m a bounded Vilenkin group. If the generating sequence m is not bounded, then G_m is said to be an unbounded Vilenkin group.

A base for the neighborhoods of G_m can be given as follows

$$I_0(x) := G_m, \quad I_n(x) := \{y = (y_i, i \in \mathbf{N}) \in G_m : y_i = x_i \text{ for } i < n\}$$

Research supported by the Hungarian National Foundation for Scientific Research (OTKA), grant no. F007347.

for $x \in G_m, n \in \mathbf{P} := \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Let $0 = (0, i \in \mathbf{N}) \in G_m$ denote the nullelement of $G_m, I_n := I_n(0)\,(n \in \mathbf{N})$. Furthermore, let $L^p(G_m)\,(1 \le p \le \infty)$ denote the usual Lebesgue spaces ($\|.\|_p$ the corresponding norms) on G_m, $\mathcal{A}_n$ the σ algebra generated by the sets $I_n(x)\,(x \in G_m)$ and E_n the conditional expectation operator with respect to $\mathcal{A}_n\,(n \in \mathbf{N})\,(f \in L^1.)$

The concept of the maximal Hardy space ([Sch, Sim]) $H^1(G_m)$ is defined by the maximal function $f^* := \sup_n |E_n f|$ $(f \in L^1(G_m))$, saying that f belongs to the Hardy space $H^1(G_m)$ if $f^* \in L^1(G_m)$. $H^1(G_m)$ is a Banach space with the norm

$$\|f\|_{H^1} := \|f^*\|_1.$$

The so-called atomic Hardy space $H(G_m)$ is defined for bounded Vilenkin groups as follows [Sch, Sim]. A function $a \in L^\infty(G_m)$ is called an atom, if either $a = 1$ or a has the following properties: $\operatorname{supp} a \subseteq I_a, \| a \|_\infty \le \frac{1}{\mu(I_a)}, \int_{I_a} a = 0$, where $I_a \in \mathcal{I} := \{I_n(x) : x \in G_m, n \in \mathbf{N}\}$. The elements of $\mathcal{I}$ are called intervals on G_m. We say that the function f belongs to $H(G_m)$, if f can be represented as $f = \sum_{i=0}^\infty \lambda_i a_i$, where a_i 's are atoms and for the coefficients $\lambda_i\,(i \in \mathbf{N})$ $\sum_{i=0}^\infty |\lambda_i| < \infty$ is true. It is known that $H(G_m)$ is a Banach space with respect to the norm

$$\|f\|_H := \inf \sum_{i=0}^\infty |\lambda_i|,$$

where the infinum is taken all over decompositions

$$f = \sum_{i=0}^\infty \lambda_i a_i \in H(G_m).$$

If the sequence m is not bounded, then we define the set of intervals in a different way ([5]), that is we have "more" intervals than in the bounded case.

A set $I \subset G_m$ is called an interval if for some $x \in G_m$ and $n \in \mathbf{N}, I$ is of the form $I = \bigcup_{k \in U} I_n(x,k)$ where U is one of the following sets

$$U_1 = \left\{0, \dots, \left[\frac{m_n}{2}\right] - 1\right\}, U_2 = \left\{\left[\frac{m_n}{2}\right], \dots, m_n - 1\right\}$$

$$U_3 = \left\{0, \dots, \left[\frac{[m_n/2] - 1}{2}\right] - 1\right\}, U_4 = \left\{\left[\frac{[m_n/2] - 1}{2}\right] - 1, \dots, \left[\frac{m_n}{2}\right] - 1\right\}, \dots$$

etc., and $I_n(x,k) := \{y \in G_m : y_j = x_j (j < n), y_n = k\}$, $(x \in G_m, k \in Z_{m_n}, n \in \mathbf{N})$. The rest of the definition of the atomic Hardy space H is the same as in the bounded case.

It is known that if the sequence m is bounded, then $H^1 = H$, otherwise H is a proper subset of H^1 [2].

Let $M_0 := 1$, $M_{n+1} := m_n M_n$ $(n \in \mathbf{N})$. Then each natural number n can be uniquely expressed as

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i M_i \quad (n_i \in \{0, 1, ..., m_i - 1\},\ i \in \mathbf{N}),$$

where only a finite number of n_i's differ from zero. The generalized Rademacher functions are defined as

$$r_n(x) := \exp\left(2\pi \imath \frac{x_n}{m_n}\right) (x \in G_m, n \in \mathbf{N}, \imath := \sqrt{-1})$$

Then

$$\psi_n := \prod_{j=0}^{\infty} r_j^{n_j} \quad (n \in \mathbf{N})$$

the nth Vilenkin function. The system $\psi := (\psi_n : n \in \mathbf{N})$ is called a Vilenkin system. Each ψ_n is a character of G_m and all the characters of G_m are of this form. Define the m -adic addition as

$$k \oplus n := \sum_{j=0}^{\infty} (k_j + n_j (\operatorname{mod} m_j)) M_j \quad (k, n \in \mathbf{N}).$$

Then, $\psi_{k \oplus n} = \psi_k \psi_n, \psi_n(x + y) = \psi_n(x)\psi_n(y), \psi_n(-x) = \bar{\psi}_n(x), |\psi_n| = 1 (k, n \in \mathbf{N}, x, y \in G_m)$.

Define the Fourier coefficients, the partial sums of the Fourier series, the Dirichlet kernels with respect to the Vilenkin system ψ as follows

$$\hat{f}(n) := \int_{G_m} f \bar{\psi}_n, S_n f := \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) \psi_k,$$

$$D_n(y, x) = D_n(y - x) := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_n(y) \bar{\psi}_n(x).$$

Then

$$(S_n f)(y) = \int_{G_m} f(x) D_n(y - x) dx \ \ (n \in \mathbf{N},\ y \in G_m,\ f \in L^1(G_m)).$$

It is well-known that

$$D_{M_n}(x) = \begin{cases} M_n & \text{if } x \in I_n(0) \\ 0 & \text{if } x \notin I_n(0), \end{cases}$$

$$S_{M_n} f(x) = M_n \int_{I_n(x)} f = E_n f(x) \ (f \in L^1(G_m), n \in \mathbf{N})$$

and

$$D_n(x) = \psi_n(x) \sum_{j=0}^{\infty} D_{M_j}(x) \sum_{p=m_j-n_j}^{m_j-1} r_j^p(x)$$

($x \in G_m, n \in \mathbf{N}, f \in \mathbf{L}^1(G_m)$). For more details on Vilenkin systems see e.g. [1].

In 1983. B. Smith proved ([7]) for the trigonometric system the following convergence theorem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\|S_k f\|_1}{k} = \|f\|_1$$

for functions f in the "classical" Hardy space. In 1987. P. Simon proved [6] this theorem for the Walsh system. (The Walsh system is a Vilenkin system, $m_j = 2$ for all $j \in \mathbf{N}$ in this case.) In 1993. the author improved [3] this result, that is proved this theorem for the Vilenkin systems on bounded Vilenkin groups and in the case of the $H(G_m)$ "atomic" Hardy space — for unbounded ones, too. Does this theorem hold in the case of unbounded Vilenkin groups and the "maximal" Hardy space? (For unbounded Vilenkin groups $H \not\subseteq H^1$.) We give a negative answer for this question.

Theorem. If $\sup_n \frac{\log^2 m_n}{\log M_{n+1}} = \infty$, then there exists a function $f \in H^1(G_m)$, such that

$$\sup_n \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \|S_k f\|_1 / k = \infty.$$

PROOF. Let

$$f_k(x) := \begin{cases} M_{k+1}, & x \in I_k(0,1) \\ -M_{k+1}, & x \in I_k(0,\Delta_k) \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

where

$$\Delta_k := \begin{cases} m_k/2, & 2|m_k \\ (m_k-1)/2, & 2 \not| m_k \end{cases},$$

for $m_k \geq 4$. If $m_k < 4$, then $f_k := 0$. It is easy to see that $n \geq M_{k+1}$ implies $S_n f_k = f_k$ and $n < M_k$ implies $S_n f_k = 0$.

If $M_k \leq n < M_{k+1}$, then let $y \in I_k(0,l), l \neq 1, \Delta_k$ and $x \in I_k(0,1) \cup I_k(0,\Delta_k)$. Consequently, $y - x \in I_k \setminus I_{k+1}$,

$$D_n(y-x) = \left(\sum_{j=0}^{k-1} n_j M_j\right) r_k^{n_k}(y-x) + M_k \sum_{p=0}^{n_k-1} r_k^p(y-x),$$

$(\psi_n(y-x) = r_k^{n_k}(y-x))$ thus

$$\int\limits_{I_k(0,l)} |S_n f_k| \geq \frac{-1}{M_{k+1}} \left(\sum_{j=0}^{k-1} n_j M_j\right) \int\limits_{G_m} |f_k| + \frac{1}{m_k} \left| \int\limits_{G_m} f_k(x) \frac{r_k^{n_k}(y-x)-1}{r_k(y-x)-1} dx \right|$$

$$=: (1) + (2).$$

$|(1)| \leq \frac{c}{m_k}$ is trivial.

$$(2) = \frac{1}{m_k} \left| \frac{r_k^{n_k}((l-1)e_k)-1}{r_k((l-1)e_k)-1} - \frac{r_k^{n_k}((l-\Delta_k)e_k)-1}{r_k((l-\Delta_k)e_k)-1} \right|.$$

For $l \leq \left[\frac{m_k}{4}\right]$

$$\left| \frac{r_k^{n_k}((l-\Delta_k)e_k)-1}{r_k((l-\Delta_k)e_k)-1} \right| \leq \frac{2}{\sin \pi \frac{|l-\Delta_k|}{m_k}} \leq c.$$

That is,

$$(2) \geq \frac{1}{m_k} \frac{\left|\sin \pi \frac{n_k(l-1)}{m_k}\right|}{\left|\sin \pi \frac{l-1}{m_k}\right|} - c.$$

These estimations give

$$\|S_n f_k\|_1 \geq \sum_{l \neq 1, \Delta_k} \int_{I_k(0,l)} |S_n f_k| \geq \frac{c}{m_k} \sum_{l=2}^{[m_k/4]} \left(\frac{\left|\sin \pi \frac{n_k(l-1)}{m_k}\right|}{\left|\sin \pi \frac{l-1}{m_k}\right|} - c \right)$$

$$\geq c \log n_k - c.$$

This follows

$$\frac{1}{\log M_{k+1}}\sum_{n=M_k}^{M_{k+1}-1}\frac{\|S_nf_k\|_1}{n}\geq\frac{c}{\log M_{k+1}}\sum_{n=M_k}^{M_{k+1}-1}\frac{\log n_k}{n_kM_k}$$

$$=\frac{c}{\log M_{k+1}}\sum_{n_k=1}^{m_k-1}\frac{\log n_k}{n_k}\geq c\frac{\log^2 m_k}{\log M_{k+1}}.$$

Define the sequences of indices ν_i $i\in\mathbf{P}$ such that

$$\frac{\log^2 m_{v_k}}{\log M_{v_k}+1}>k^3\quad(k\in\mathbf{P}).$$

Set $f:=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}f_{\nu_i}$. Then $\|f\|_{H^1}\leq\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\|f_{\nu_i}\|_{H^1}\leq c$.

$$\frac{1}{\log M_{\nu_k+1}}\sum_{n=M_{\nu_k}}^{M_{\nu_k+1}-1}\frac{\|S_nf\|_1}{n}\geq\frac{1}{\log M_{\nu_k+1}}\sum_{n=M_{\nu_k}}^{M_{\nu_k+1}-1}\|S_n\left(\frac{1}{k^2}f_{\nu_k}\right)\|_1/n$$

$$-\frac{1}{\log M_{\nu_k+1}}\sum_{n=M_{\nu_k}}^{M_{\nu_k+1}-1}\|S_n(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i^2}f_{\nu_i})\|_1/n$$

$$\geq ck-\frac{1}{\log M_{\nu_k+1}}\sum_{n=M_{\nu_k}}^{M_{\nu_k+1}-1}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i^2}\|f_{\nu_i}\|_1\right)/n=ck-c,$$

for all $k\in\mathbf{P}$. That is

$$\sup_n\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\|S_kf\|_1/k=\infty.$$

References

[1] AGAEV, G. H., VILENKIN, N. Ja., DZHAFARLI, G. M., RUBINSTEIN, A. I., Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on 0-dimensional groups, Izd. ("ELM"), Baku, (1981). (in Russian).

[2] FRIDLI S., SIMON, P., On the Dirichlet kernels and a Hardy space with respect to the Vilenkin system, *Acta Math. Hung.*, **45 (1–2)** (1985), 223–234.

[3] GÁT, G., Investigation of certain operators with respect to the Vilenkin system, *Acta Math. Hungar.*, **61(1–2)** (1993), 131–149.

[4] SCHIPP, F., WADE, W. R., SIMON, P. PÁL, J., Walsh series, Introduction to dyadic harmonic analysis, Adam Hilger, Bristol and New York (1990).

[5] SIMON, P., Investigations with respect to the Vilenkin system, *Annales Univ. Sci. Budapestiensis, Sectio Math.*, **27** (1985), 87–101.

[6] SIMON, P., Strong convergence of certain means with respect to the Walsh–Fourier series, *Acta Math. Hung.*, **49(3–4)** (1987), 425–431.

[7] SMITH, B., A strong convergence theorem for $H(T)$, *Lecture Notes in Math.*, 995, Springer Berlin-New York, (1983), 169–173.

[8] VILENKIN, N. Ja., On a class of complete orthonormal systems, *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Math.* **11** (1947), 363–400. (in Russian)

Relation between Dirichlet kernels with respect to Vilenkin-like systems

ISTVÁN BLAHOTA*

Abstract. In this paper we discuss the relation between Dirrichlet-kernels with respect to Vilenkin an Vilenkin-like systems. This relation gives a useful tool in field of approximation theory on compact totally disconnected Abelian groups.

Introduction

Let $m := (m_0, m_1, \ldots)$ denote a sequence of positive integers not less than 2. Denote by $Z_{m_j} := \{0, 1, \ldots, m_j - 1\}$ the additive group of integers modulo m_j $(j \in \mathbf{N})$. Define the group G_m as the cartesian product of the discrete cyclic groups Z_{m_j},

$$G_m := \mathop{\times}_{j=0}^{\infty} Z_{m_j}.$$

The elements of G_m can be represented by sequences $x := (x_0, x_1, \ldots, x_j, \ldots)$ $(x_j \in Z_{m_j})$. It easy to give a base the neighborhoods of G_m :

$$I_0(x) := G_m,$$

$$I_n(x) := \{y \in G_m | y_0 := x_0, \ldots, y_{n-1} := x_{n-1}\}$$

for $x \in G_m, n \in \mathbf{N}$, $k = 0, 1, \ldots, m_n - 1$. Define $I_n := I_n(0)$ for $n \in \mathbf{P}$ $(\mathbf{P} := \mathbf{N}\{0\})$. Then I_n is a subgroup of G_m $(n \in \mathbf{N})$. The direct product μ of the measures

$$\mu_k(\{j\}) := \frac{1}{m_k} \quad (j \in Z_{m_k}, k \in \mathbf{N})$$

is the Haar measure on G_m with $\mu(G_m) = 1$.

---

* Research supported by the Hungarian National Foundation for Scientific Research (OTKA), grant no. F007347 and the National Scientific Foundation of the Hungarian Credit Bank (Alapítvány a Magyar Felsőoktatásért és Tudományért, MHB)

If $M_0 := 1, M_{k+1} := m_k M_k (k \in \mathbf{N})$, then every $n \in \mathbf{N}$ can be uniquely expressed as $n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j M_j$, where $n_j \in Z_{m_j} (j \in \mathbf{N})$ and only a finite number of n_j's differ from zero.

Define on G_m the *generalized Rademacher functions* in the following way:

$$r_k(x) := \exp \frac{2\pi \imath x_k}{m_k} \quad \imath^2 := x \in G_m, \quad k \in \mathbf{N}.$$

It is known that the functions

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \quad (n \in \mathbf{N})$$

on G_m are elements of the character group of G_m, and all the elements of the character group are of this form. If $x, y \in G_m, n, m \in \mathbf{N}$ then it is easy to see that

$$\psi_n(x+y) = \psi_n(x)\psi_n(y),$$

and

$$\psi_{n+m}(x) = \psi_n(x)\psi_m(x).$$

The system $(\psi_n | n \in \mathbf{N})$ is called a *Vilenkin system* and G_m a *Vilenkin group*.

The Dirichlet kernels are

$$D_n^{\psi}(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x) \quad (n \in \mathbf{N})$$

with respect to the Vilenkin system for which it is known (see [4]) that:

Theorem A.

$$D_{M_n}^{\psi}(x) = \begin{cases} M_n, & x \in I_n \\ 0, & x \notin I_n \end{cases} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Let $\mathcal{A}_n$ be the σ-algebra generated by cosets $I_n(z)$, where $(n \in \mathbf{N})(z \in G_m)$. Let $\alpha_j^k, \alpha_n (k, j, n \in \mathbf{N})$ be functions satisfying the following conditions:

(i) $\alpha_j^k : G_m \to \mathbf{Cis}\mathcal{A}_j$ - measurable $(k, j \in \mathbf{N})$,

(ii) $|\alpha_j^k| := \alpha_0^k := \alpha_j^0 := \alpha_j^k(0) := 1 (k, j \in \mathbf{N})$

(iii) $\alpha_n := \prod_{j=0}^{\infty} \alpha_j^{j(n)} (n \in \mathbf{N}, j(n) := \sum_{k=j}^{\infty} n_k M_k)$.

Let $\chi_n := \psi_n \alpha_n \quad (n \in \mathbf{N})$. A function system $\{\chi_n | n \in \mathbf{N}\}$ of this type is called a $\psi\alpha$ *(Vilenkin-like) system* on Vilenkin group G_m.

The ψ and $\psi\alpha$ systems are orthonormal and complete in $L^1(G_m)$.

The Dirichlet kernels with respect to $\psi\alpha$ system are

$$D_n^{\chi}(x,y) := \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)\overline{\chi_k(y)} \quad (n \in \mathbf{N})$$

The subsequence $D_{M_n}^{\chi}$ has a closed form

$$D_{M_n}^{\chi}(x,y) = \begin{cases} M_n, & x-y \in I_n \\ 0, & x-y \notin I_n \end{cases} (n \in \mathbf{N}),$$

(see [2]). We will use the following theorem, too (see [1]):

Theorem B.

$$D_{jM_t}^{\chi}(x,y) = \alpha_{jM_t}(x)\overline{\alpha}_{jM_t}(y) D_{jM_t}^{\psi}(x-y) \quad (n \in \mathbf{N}, x, y \in G_m).$$

Lemma. Let $x \in G_m$, $j, t \in \mathbf{N}$. Then $D_{jM_t}^{\psi}(x) = D_{M_t}^{\psi}(x) \sum_{k=0}^{j-1} \psi_{kM_t}(x)$.

This lemma is needed in the proof of the theorem.

Theorem Let $x, y \in G_m, n \in \mathbf{N}$. Then

$$D_n^{\chi}(x,y) = D_n^{\psi}(x-y)$$

holds if and only if $n \in \{jM_t | 0 \leq j < m_t; t, j \in \mathbf{N}\}$.

PROOF of the lemma. Using the statements and theorems mentioned above we have the following equations:

$$D_{jM_t}^{\psi}(x) = \sum_{l=0}^{jM_t-1} \psi_l(x) = \sum_{h=0}^{j-1} \left(\sum_{l=hM_t}^{(h+1)M_t-1} \psi_l(x) \right) =$$

$$\sum_{h=0}^{j-1} \left(\sum_{l=hM_t}^{(h+1)M_t-1} \psi_{l_0 M_0 + \cdots + l_{t-1} M_{t-1} + hM_t}(x) \right) =$$

$$\sum_{h=0}^{j-1} \left(\sum_{l=hM_t}^{(h+1)M_t-1} \psi_{l_0 M_0}(x) \cdots \psi_{l_{t-1} M_{t-1}}(x) \psi_{hM_t}(x) \right) =$$

$$\sum_{h=0}^{j-1}\sum_{l_{t-1}=0}^{m_t-1}\cdots\sum_{l_0=0}^{m_0-1}\psi_{l_0M_0}(x)\cdots\psi_{l_{t-1}M_{t-1}}(x)\psi_{hM_t}(x)=$$

$$\sum_{h=0}^{j-1}\psi_{hM_t}(x)\sum_{l_{t-1}=0}^{m_t-1}\psi_{l_{t-1}M_{t-1}}(x)\cdots\sum_{l_0=0}^{m_0-1}\psi_{l_0M_0}(x)=$$

$$\left(\sum_{h=0}^{j-1}\psi_{hM_t}(x)\right)\prod_{k=0}^{t-1}\sum_{l_k=0}^{m_k-1}\psi_{l_kM_k}(x)=$$

$$\left(\sum_{h=0}^{j-1}\psi_{hM_t}(x)\right)\sum_{l_{t-1}=0}^{m_t-1}\psi_{l_{t-1}M_{t-1}}(x)\cdots\sum_{l_0=0}^{m_0-1}\psi_{l_0M_0}(x)=$$

$$\left(\sum_{h=0}^{j-1}\psi_{hM_t}(x)\right)\sum_{l_{t-1}=0}^{m_n-1}\cdots\sum_{l_0=0}^{m_0-1}\psi_{l_0M_0}(x)\cdots\psi_{l_{t-1}M_{t-1}}(x)=$$

$$\left(\sum_{h=0}^{j-1}\psi_{hM_t}(x)\right)\sum_{l_{t-1}=0}^{m_t-1}\cdots\sum_{l_0=0}^{m_0-1}\psi_{l_0M_0+\cdots+l_{t-1}M_{t-1}}(x)=$$

$$\left(\sum_{h=0}^{j-1}\psi_{hM_t}(x)\right)\sum_{l=0}^{M_t-1}\psi_l(x)=D^{\psi}_{M_t}(x)\sum_{k=0}^{j-1}\psi_{kM_t}(x).$$

This completes the proof of the Lemma.

PROOF of the theorem The form $n=jM_t$ is not unique. (For example $jM_{t+1}=(jm_t)M_t$.) In our presentation let $n=jM_t$ be that expression, in which j is the least.

1. *Sufficiency.* Suppose that $n\in\{jM_t|t,j\in\mathbf{N};0\le j<m_t\}$, and $x,y\in G_m$.

1.1. Let $x-y\notin I_t$. In this case by the theorem A. we have $D^{\psi}_{M_t}(x-y)=0$. By lemma $D^{\psi}_{jM_t}(x-y)=0$. The theorem B. shows that

$$D^{\chi}_{jM_t}(x,y)=\alpha_{jM_t}(x)\overline{\alpha}_{jM_t}(y)D^{\psi}_{jM_t}(x-y).$$

So $D^{\chi}_{jM_t}(x,y)=0$, too. Consequently if $x-y\notin I_t,t,j\in\mathbf{N}$, then

$$D^{\chi}_{jM_t}(x,y)=D^{\psi}_{jM_t}(x-y)=0.$$

1.2. Let $x-y \in I_t, t, j \in \mathbf{N}, \quad 0 \le j < m_t$. Then $x_0 - y_0 = 0, \ldots, x_{t-1} - y_{t-1} = 0$,

$$\alpha_{jM_t}(x)\overline{\alpha}_{jM_t}(y) =$$

$$\alpha_1^{1(jM_t)}(x_0, n_1, \cdots, n_{t-1}, n_t, n_{t+1}, \cdots) \cdots$$

$$\alpha_t^{t(jM_t)}(x_0, x_1, \cdots, x_{t-1}, n_t, n_{t+1}, \cdots)$$

$$\overline{\alpha}_1^{1(jM_t)}(x_0, n_1, \cdots, n_{t-1}, n_t, n_{n+1}, \cdots) \cdots$$

$$\overline{\alpha}_t^{t(jM_t)}(x_0, x_1, \cdots, x_{t-1}, n_t, n_{t+1}, \cdots) =$$

$$\alpha_{jM_t}(x)\overline{\alpha}_{jM_t}(x) = |\alpha_{jM_t}(x)| = 1.$$

If $x - y \in I_t, t, j \in \mathbf{N}, \quad 0 \le j < m_t$, then

$$D^{\chi}_{jM_t}(x,y) = D^{\psi}_{jM_t}(x-y).$$

This completes the proof of the first part of the theorem.

2. *Necessity.* If $n = \sum_{k=0}^{s} n_k M_k$, then let

$$\alpha_k^{k(n)}(x_0, \ldots, x_{k-1}, n_k, \ldots, n_s) := \begin{cases} \exp(i) & \text{if } x_0 \ldots x_{k-1} \ne 0 \text{ and } k \le s \\ 1 & \text{else.} \end{cases}$$

In this case does not exist such $j \in \mathbf{P}$ that $\alpha_j(x) = 1$.

2.1. Now we suppose that $n \notin \{jM_h | h, j \in \mathbf{N}\}$. Let t be defined in the following way

$$t := \min\{k| \quad n < M_k; k, n \in \mathbf{N}\}.$$

Let $x' := (0, 0, \ldots, 0, x_t := 1, 0, \ldots), t \in \mathbf{N}$ and $y' := (0, 0, 0, \ldots)$. In this case

$$D_n^{\chi}(x', y') = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x') =$$

$$c\sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x') = c\sum_{k=0}^{n-1} \psi_k(x'-y') = cD_n^{\psi}(x'-y'),$$

where $c \ne 1$. We prove that $D_n^{\psi}(x'-y') \ne 0$, thus in this case $D_n^{\psi}(x'-y') \ne D_n^{\chi}(x', y')$. But

$$D_n^{\psi}(x'-y') = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi \imath k_t}{m_t}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi \imath O}{m_t}\right) = n \ne 0.$$

2.2 Let $n \in \{jM_t | t, j \in \mathbf{N}, \quad m_t < j\}$. It is easy to see that $x' - y' \in I_t$, but $x' - y' \notin I_{t+1}$. Then

$$D^{\chi}_{jM_t}(x', y') = cD^{\psi}_{jM_t}(x' - y'),$$

where $c \neq 1$. We will prove that $D^{\psi}_{jM_t}(x' - y') \neq 0$, thus

$$D^{\chi}_{jM_t}(x', y') \neq D^{\psi}_{jM_t}(x' - y').$$

We have by lemma

$$D^{\psi}_{jM_t}(x' - y') = D^{\psi}_{M_t}(x' - y') \sum_{k=0}^{j-1} \psi_{kM_t}(x' - y') = M_t \sum_{k=0}^{j-1} \psi_{kM_t}(x' - y') =$$

$$M_t \sum_{k=0}^{j-1} \exp\left(\frac{2\pi \imath}{m_t}\right)^2 = M_t \frac{1 - \exp\left(\frac{2\pi \imath}{m_t}\right)^2}{1 - \exp\left(\frac{2\pi \imath}{m_t}\right)} \neq 0,$$

since $m_t \not| j$.

The proof of theorem is complete.

Acknowledgement

The author wishes to thank to Professor G. Gát for setting the problem.

References

[1] G. Gát, Vilenkin, Fourier Series and Limit Peridic Arithmetic Functions, *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, **58** (1990), 315–332.

[2] G. Gát, Orthonormal systems on Vilenkin groups, *Acta Mathematica Hungarica* **58 (1—2)** (1991), 193–198

[3] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon and J. Pál, Walsh Series, An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis, *Akadémiai Kiadó, Budapest, and Adam Hilger, Bristol and New York* (1990).

[4] G. H. Agajev, N. Ya. Vilenkin, G. M. Dzsafarli, A. I. Rubinstein, Multiplicative systems of functyions and harmonic analysis on 0-dimensional groups, Izd. "ELM" (Baku, SSSR) (1981).

Effective integrability of the differential equation
$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = 0$, II.

KRYSTYNA GRYTCZUK

ABSTRACT. In the present paper we give an application of our result given in [1] to the classical Euler's differential equation.

1. Introduction

Consider the classical Euler's differential equation

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y^{(1)} + a_n y = 0 \tag{1}$$

where $a_i \in \mathbf{R}$.

In the paper [1] it was shown (see Th.2) that the necessary and suffcient condition for the functions

$$y = s_{0,k}(x) u_k^{\lambda}(x)\,, \quad k = 1, 2 \cdots, n \tag{2}$$

to be the particular solutions of the differential equation

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = 0 \tag{3}$$

is that

$$\sum_{j=0}^{n} P_j(x) s_{n-j,k}(x) = 0\,, \quad k = 1, 2, \cdots, n\,, \tag{4}$$

where $s_{m,k}(x) = s'_{m-1,k}(x) + s_{m-1,k}(x)\frac{u'_k(x)}{u_k(x)}$ and $s_{m,k}(x), u_k(x) \in \mathbf{C}^{(n)}(J)$; $J = (x_1, x_2) \subset \mathbf{R}$, $u_k(x) \neq 0$ for $x \in J$.

In the present note by using this result we prove the following theorem.

Theorem. The necessary and sufficient condition for the function $y_0 = x^{\lambda}$ to be a particular solution of (1) is that the λ satisfies the following algebraic equation:

$$\begin{aligned} F(\lambda) = {} & \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(n-1)) + \\ & a_1\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(n-2)) + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

2. Proof of the Theorem.

Putting in (2) $u_k(x) = x$, $s_{0,k}(x) \equiv 1$ for $k = 1, 2, \cdots, n$ we get

$$y_k = y_0 = x^\lambda . \tag{6}$$

By the definition of the functions $s_{m,k}(x)$ and (6) we obtain

$$\begin{cases} s_j(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(j-1))\,x^{\lambda-j}, & j = 1, 2, \cdots, n \\ s_0 \equiv 1 . \end{cases} \tag{7}$$

By (4) and (7) is follows that

$$P_0(x)s_n(x) + P_1(x)s_{n-1}(x) + \cdots + P_n(x)s_0(x) = 0 . \tag{8}$$

On the other hand from (1) we have

$$P_0(x) = x^n , P_1(x) = a_1 x^{n-1}, \cdots , P_{n-1}(x) = x^n , P_n(x) = a_n . \tag{9}$$

From (7), (8) and (9) we obtain

$$\begin{aligned} x^n\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(n-1))\,x^{\lambda-n} + a_1 x^{n-1}\lambda(\lambda-1)\cdots \\ \cdots(\lambda-(n-2))\,x^{\lambda-(n-1)} + \cdots + a_n x^\lambda = 0 . \end{aligned} \tag{10}$$

Let

$$\begin{aligned} F(\lambda) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(n-1)) + \\ + a_1\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(\lambda-2)) + \cdots a_{n-1}\lambda + a_n . \end{aligned} \tag{11}$$

Then by (10) and (11) we have

$$F(\lambda)x^\lambda = 0 . \tag{12}$$

Since $x \neq 0$ on J then by (12) we get $F(\lambda) = 0$, so denote that λ must be a root of the algebraic equation

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(n-1)) + a_1\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-(\lambda-2)) + \\ \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \end{aligned}$$

and the proof is complete.

3. Remarks.

Suppose that all roots of the equation $F(\lambda) = 0$ are distinct and real. Then the differential equation of Euler (1) has n-particular solutions of the form:

$$y_1 = x^{\lambda_1}, \quad y_2 = x^{\lambda_2}, \cdots, y_n = x^{\lambda_n}.$$

It is easy to see that those solutions are linear independent over $J = (0, +\infty)$. Hence in this case we obtain that the general solution of (1) has the form:

$$y = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2} + \cdots + c_n = x^{\lambda_n}.$$

Now we can assume that all roots of the equation $F(\lambda) = 0$ are distinct but they can be complex numbers. If $\lambda = a + bi$ is a root of F then we have

$$x^{\lambda} = x^{a+bi} = x^a x^{bi} = x^a e^{ib \ln x} = x\left(\cos(b \ln x) + i \sin(b \ln x)\right)$$

and we see that functions

$$x^a \cos(b \ln x) \quad \text{and} \quad x^a \sin(b \ln x) \tag{13}$$

are real solutions of (1) and linear independent over J. Since $a_i \in \mathbf{R}$ then exists the conjugate complex root to λ, namely $\overline{\lambda} = a - bi$. In similar way we obtain (13). If λ_1 is k-multiple root of $F(\lambda)$ then we have

$$F(\lambda_1) = F'(\lambda_1) = \cdots = F^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \quad F^{(k)}(\lambda_1) \neq 0. \tag{14}$$

Then by differentiation m-time the expression $F(\lambda)x^{\lambda}$ with respect to λ we obtain

$$L\left(x^{\lambda}(\ln x)^m\right) = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} F^{(j)}(\lambda) x^{\lambda} (\ln x)^{m-j}. \tag{15}$$

From (14) and (15) it follows that the functions

$$y_m = x^{\lambda_1}(\ln x)^m, \quad m = 0, 1, \cdots, k-1$$

are particular solutions of (1).

Reference

[1] K. GRYTCZUK, Effective integrability of the differential equation $P_0(x)y^{(n)} + \cdots + P_n(x)y = 0$, *Acta Acad. Paed. Agriensis, Sect. Mat.*, **21** (1993), 95–103.

Norm convergence of Fejér means of certain functions with respect to UDMD product systems

KÁROLY NAGY

Abstract. In this paper we investigate the norm convergence of Feje'r means of functions belonging to Lipschitz classes in that case when the orthonormal system is the unitary dyadic martingale difference system (UDMD system). We give an estimation of the order of norm convergence. The result of the paper shows a sharp constrast between the corresponding known statement which relatives to the ordinary Walsh-Paley system.

Introduction

Let $\mathbf{N}$ denote the set of natural numbers, $\mathbf{P}$ denote the set of positiv intergers, and $\mathbf{A} = \{0,1\}$. For each $m \in \mathbf{N}$ let $(m^{(j)}, j \in \mathbf{N})$ represent the binary coefficient of m, that is,

$$m = \sum_{j=0}^{\infty} m^{(j)} 2^j \quad (m^{(j)} \in \mathbf{A}, j \in \mathbf{N}).$$

Let (Ω, λ) be a measure space with $\lambda(\Omega) = 1$ and $\Phi := (\phi_j, j \in \mathbf{N})$ be a sequence of λ-measurable functions on Ω which are a.e. $[\lambda]$ bounded by 1. The product system generated by Φ is the sequence of functions $\Psi := (\psi_m, m \in \mathbf{N})$ defined by

$$\psi_m = \prod_{j=0}^{\infty} \phi_j^{m^{(j)}}$$

for $m \in \mathbf{N}$. Each ψ_m is a finite product of ϕ_n's, $\psi_0(x) = 1$ for $x \in \Omega$, $|\psi_m| \leq 1$ for $m \in \mathbf{N}$, and $\phi_n = \psi_{2^n}$ for $n \in \mathbf{N}$.

Let $\Psi := (\psi_m, m \in \mathbf{N})$ be any orthonormal system on Ω. The Fourier coefficients of a function $f \in L^1(\Omega, \lambda)$ are defined by

$$\{f, \psi_m\} := \int_\Omega f \overline{\psi_m} d\lambda \quad (m \in \mathbf{N}).$$

Research supported by the Hungarian National Foundation for Scientific Research (OTKA), grant no. F007347

The Fourier series of f with respect to the system Ψ is the series

$$\sum_{m=0}^{\infty}\{f,\psi_m\}\psi_m.$$

The partial sums of order n of the Fourier series of f are defined by

$$S_n^{\Psi}f := \sum_{m=0}^{n-1}\{f,\psi_m\}\psi_m$$

for $n \in \mathbf{P}$.

The Cesaro means of order n of the Fourier series of an f are defined by

$$\sigma_n^{\Psi}f := \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} S_m^{\Psi} \quad (n \in \mathbf{P}).$$

Denote the dyadic, or 2-series, group by $(G,+)$. Thus G consists of sequences $x := (x^{(j)}, j \in \mathbf{N})$ with $x^{(j)} = 0$, or 1 and addition $+$ is coordinatewise, modulo 2.

Let $\Omega = [0,1)$ or G. By the additive digits $(x^{(j)}, j \in \mathbf{N})$ of an $x \in \Omega$ we shall mean the coordinates of $x = (x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots)$ if $x \in G$ and the binary coefficients of $x = \sum_{j=0}^{\infty} x^{(j)}2^{-j-1}$ if $x \in [0,1)$, where the finite binary expansion of x is used when x is a dyadic rational.

Let λ be the Lebesgue measure when $\Omega = [0,1)$ and Haar measure when $\Omega = G$. Denote the corresponding Lebesgue spaces by $L^p(\Omega)$ for $0 < p \leq \infty$. By a dyadic interval of rank n in $\Omega = [0,1)$ we mean an interval of the form $\left[\frac{p}{2^n}, \frac{(p+1)}{2^n}\right)$ where $0 \leq p < 2^n$ and $n \in \mathbf{N}$. Given $a \in [0,1)$ and $n \in \mathbf{N}$, there is one and only one interval of rank n which contains a. Let it be denoted by $I_n(a)$. By a dyadic interval of rank n centered at $a \in \Omega = G$ we mean a set of the form

$$I_n(a) = \{x \in G : x^{(k)} = a^{(k)}, k \leq n\}.$$

Denote the σ-algebra generated by the intervals $I_n(a)$ $(a \in \Omega)$ by $\mathcal{A}_n$. The intervals $I_n(a)$ $(a \in \Omega)$ are called the atoms of $\mathcal{A}_n$. Each element of $\mathcal{A}_n$ is a finite disjoint union of atoms.

A function f defined on Ω is said to be $\mathcal{A}_n$-measurable if f is constant on the atoms of $\mathcal{A}_n$. Let $L(\mathcal{A}_n)$ denote the set of $\mathcal{A}_n$-measurable functions on Ω. Each $f \in L(\mathcal{A}_n)$ is integrable.

Let the Rademacher system on Ω be denoted by $\{r_n : n \in \mathbf{N}\}$, that is

$$r_n(x) = (-1)^{x^{(n)}} \quad (n \in \mathbf{N})$$

where $\{x^{(j)} : j \in \mathbf{N}\}$ represents the additive digits of x. Let $\alpha_n : \Omega \to \mathbf{C}$ be a function such that each α_n is $\mathcal{A}_n$-measurable for any $n \in \mathbf{N}$. A sequence $\{\phi_n : n \in \mathbf{N}\}$ is said to be a UDMD system if

$$\phi_n := r_n \alpha_n \quad (n \in \mathbf{N})$$

for some $\mathcal{A}_n$-measurable functions α_n and if $|\phi_n(x)| = 1$ $(n \in \mathbf{N}, x \in \Omega)$ (see [3]). The simplest UDMD system is the Rademacher system. The product system generated by the UDMD system is said to be UDMD product system.

If $\{\psi_m : m \in \mathbf{N}\}$ is a UDMD product system then it is orthonormal on $L^2(\Omega)$.

The Dirichlet kernels of the product system $\Psi := \{\psi_n : n \in \mathbf{N}\}$ are defined as follows $D_0^{\Psi}(x,t) := 0$ and

$$D_n^{\Psi}(x,t) := \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(x)\overline{\psi_j}(t) \quad (x,t \in \Omega).$$

for $n \in \mathbf{P}$. The partial sums $S_n^{\Psi} f$ can be expressed using the Dirichlet kernels D_n^{Ψ} :

$$(S_n^{\Psi} f)(x) = \int_{\Omega} f(t) D_n^{\Psi}(x,t) d\lambda(t).$$

The subsequence $D_{2^n}^{\Psi}$ has a closed form. For every $n \in \mathbf{N}$

$$D_{2^n}^{\Psi}(x,t) = \prod_{j=0}^{n-1}(1 + \phi_j(x)\overline{\phi_j}(t)) = \begin{cases} 2^n, & \text{if } t \in I_n(x) \\ 0, & \text{if } t \notin I_n(x). \end{cases} \tag{1}$$

The Fejér kernels of the product system Ψ are defined by $K_0^{\Psi}(x,t) := 0$ and

$$K_n^{\Psi}(x,t) := \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n} D_m^{\Psi}(x,t) \quad (x,t \in \Omega)$$

for $n \in \mathbf{N}$. The Cesaro means of a Fourier series $S_j^{\Psi} f$ can be expressed using the Fejér kernels:

$$(\sigma_n^{\Psi} f)(x) = \int_{\Omega} f(t) K_n^{\Psi}(x,t) d\lambda(t).$$

Introduce the following notation:

$$(\phi_k \otimes \overline{\phi_k})(x,t) := \phi_k(x)\overline{\phi_k}(t) \quad (x,t \in \Omega, k \in \mathbf{N}).$$

For every $n \in \mathbf{N}$ and $x \in \Omega$ (see [4]):

$$K_{2^n}^{\Psi} = 2^{-n} D_{2^n}^{\Psi} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j-n} \prod_{\substack{k=0 \\ j \neq k}}^{n-1} (1 + \phi_k \otimes \overline{\phi_k}), \tag{2}$$

$$\int_{\Omega} |K_n^{\Psi}(x,t)| d\lambda(t) \leq 8. \tag{3}$$

Let X be a Banach space with norm $\| \; \|$. The space X is called a homogeneous Banach space if $P \subseteq X \subseteq L^1(\Omega)$ where P is the set of Walsh polynomials, $\tau_x f(y) := f(y+x)$ and if the following three properties hold (see [1]):

$$\|f\|_1 \leq \|f\| \quad (f \in X), \tag{i}$$

$$\tau_x f \in X, \quad \|\tau_x f\| = \|f\| \quad (x \in \Omega, f \in X), \tag{ii}$$

and, for a given $f \in X$ there is a sequence of Walsh polynomials $(P_n, n \in \mathbf{N})$ such that

$$\lim_{n \to \infty} \|P_n - f\| = 0. \tag{iii}$$

Define the modulus of continuity in X of an $f \in X$ by

$$\omega^X(f,\delta) := \sup_{|y|<\delta} \|f - \tau_y f\| \quad (\delta > 0).$$

For each $\alpha > 0$, Lipschitz classes in X can be defined by

$$\mathrm{Lip}(\alpha, X) := \{f \in X : \omega^X(f,\delta) = O(\delta^\alpha) \text{ as } \delta \to \infty\}.$$

Results

THEOREM. Suppose $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, X)$ and $\alpha > 0$. Then

$$\|\sigma_n f - f\| = \begin{cases} O(n^{-\alpha}) & 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ O(\frac{\log n}{\sqrt{n}}) & \alpha = \frac{1}{2} \\ O(\frac{1}{\sqrt{n}}) & \alpha > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

as $n \to \infty$.

PROOF. Let $n \in \mathbf{P}$ and choose $s \in \mathbf{N}$ such that $2^s \leq n < 2^{s+1}$. Let

$$\Delta(s) := 2^{-s\alpha} + 2^{-\frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{s-1} 2^{k(\frac{1}{2}-\alpha)}.$$

First of all we will show that

$$\|\sigma_{2^s} f - f\| = O(\Delta(s)), \quad \text{as} \quad s \to \infty.$$

Since

$$\int_\Omega K_{2^s}^\Psi(x,t)d\lambda(t) = 1$$

we have

$$\sigma_{2^s}^\Psi f(x) - f(x) = \int_\Omega f(t)K_{2^s}^\Psi(x,t)d\lambda(t) - f(x) = \int_\Omega (f(t)-f(x))K_{2^s}^\Psi(x,t)d\lambda(t)$$

for any $f \in L^1(\Omega)$ and any $x \in \Omega$. For any $t \in I_s(x)$ we have

$$|K_{2^s}^\Psi(x,t)| \le 2^{s-1}.$$

A disjoint decomposition of Ω is

$$\Omega = I_s(x) \bigcup \left(\bigcup_{k=0}^{s-1} I_k(x) \backslash I_{k+1}(x) \right)$$

for any $x \in \Omega$. Let $I_k(x)\backslash I_{k+1}(x)$ be denoted by L_k^x. The following inequality holds for any $x \in \Omega$ and any $f \in \mathrm{Lip}(\alpha, X)$:

$$\begin{aligned}
|\sigma_{2^s}^\Psi f(x) - f(x)| \le & \int_\Omega |f(t) - f(x)||K_{2^s}^\Psi(x,t)|d\lambda(t) \le \\
& \int_{I_s(x)} |f(t) - f(x)||K_{2^s}^\Psi(x,t)|d\lambda(t) + \\
& + \sum_{k=0}^{s-1} \int_{L_k^x} |f(t) - f(x)||K_{2^s}^\Psi(x,t)|d\lambda(t) \le \\
& 2^{s-1} \int_{I_s(x)} |f(t) - f(x)|d\lambda(t) + \\
& \sum_{k=0}^{s-1} 2^{-s} \int_{L_k^x} |f(t) - f(x)| D_{2^s}^\Psi(x,t)d\lambda(t) + \\
& \sum_{k=0}^{s-1}\sum_{j=0}^{s-1} 2^{j-s} \int_{L_k^x} |f(t) - f(x)| \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq j}}^{s-1} |1 + \phi_l(x)\overline{\phi_l}(t)|d\lambda(t) \le
\end{aligned}$$

$$2^{s-1}2^s\omega^X(f,2^{-s})+\sum_{k=0}^{s-1}2^{k-s}\int\limits_{L_k^x}|f(t)-f(x)|\prod_{\substack{l=0\\l\neq k}}^{s-1}|1+$$

$$\phi_l(x)\overline{\phi_l}(t)|d\lambda(t)\leq\frac{1}{2}\omega^X(f,2^{-s})+\sum_{k=0}^{s-1}2^{k-s}\omega^X(f,2^{-k})$$

$$\int\limits_{L_k^x}\prod_{\substack{l=0\\l\neq k}}^{s-1}|1+\phi_l(x)\overline{\phi_l}(t)|d\lambda(t)\leq\omega^X(f,2^{-s})+\sum_{k=0}^{s-1}2^{\frac{k}{2}-\frac{s}{2}}\omega^X(f,2^{-k}).$$

From this inequality we have

$$\|\sigma_{2^s}^\Psi f-f\|\leq\omega^X(f,2^{-s})+\sum_{k=0}^{s-1}2^{\frac{k}{2}-\frac{s}{2}}\omega^X(f,2^{-k})=O(\Delta(s))\quad\text{as } s\to\infty.$$

for any $f\in\operatorname{Lip}(\alpha,X)$.
We have used the following result:

$$\int\limits_{L_k^x}\prod_{\substack{l=0\\l\neq k}}^{s-1}|1+\phi_l(x)\overline{\phi_l}(t)|d\lambda(t)\leq 2^{\frac{s}{2}-\frac{k}{2}}.$$

To prove this, let $K'_{s-1}(x,t):=\prod_{\substack{l=0\\l\neq k}}^{s-1}(1+\phi_l(x)\overline{\phi_l}(t))$ and suppose for a moment that

$$\sqrt{\int_{L_k^x}|K'_{s-1}(x,t)|^2d\lambda(t)}\leq\sqrt{2^s}. \tag{4}$$

Using the Cauchy–Buniakovski inequalities we have

$$\int_{L_k^x}|K'_{s-1}(x,t)|d\lambda(t)\leq\sqrt{\lambda(L_k^x)}\sqrt{\int_{L_k^x}|K'_{s-1}(x,t)|^2d\lambda(t)}$$
$$\leq\sqrt{\frac{1}{2^{k+1}}}\sqrt{2^s}\leq\sqrt{2^{s-k}}.$$

Now we will prove (4) (see [4]):

$$\int\limits_{L_k^x}|K'_{s-1}(x,t)|^2d\lambda(t)=\int\limits_{L_k^x}\prod_{\substack{l=0\\l\neq k}}^{s-1}(1+\phi_l(x)\overline{\phi_l}(t))\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{s-1}(1+\overline{\phi_j}(x)\phi_j(t))d\lambda(t)=$$

$$\int\limits_{L_k^x} \sum_{\substack{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{s-1}\in\{0,1\}\\ \tilde\varepsilon_1,\dots,\tilde\varepsilon_{s-1}\in\{0,1\}\\ \varepsilon_{s-1}=\varepsilon_{s-1}=0}} \phi_1^{\varepsilon_1}(x)\overline{\phi}_1^{\tilde\varepsilon_1}(x)\overline{\phi}_1^{\varepsilon_1}(t)\phi_1^{\tilde\varepsilon_1}(t)\dots$$

$$\phi_{s-1}^{\varepsilon_{s-1}}(x)\overline{\phi}_{s-1}^{\tilde\varepsilon_{s-1}}(x)\overline{\phi}_{s-1}^{\varepsilon_{s-1}}(t)\phi_{s-1}^{\tilde\varepsilon_{s-1}}(t)d\lambda(t) :=$$

$$:= \sum_{\varepsilon,\tilde\varepsilon\in\{0,1\}^{s-2}\times\{0\}} \int\limits_{L_k^x} \chi_\varepsilon(x)\overline{\chi_{\tilde\varepsilon}}(x)\overline{\chi_\varepsilon}(t)\chi_{\tilde\varepsilon}(t)d\lambda(t).$$

$\int\limits_{L_k^x} \chi_\varepsilon(x)\overline{\chi_{\tilde\varepsilon}}(x)\overline{\chi_\varepsilon}(t)\chi_{\tilde\varepsilon}(t)d\lambda(t) \neq 0$ if $\varepsilon_{k+1} = \tilde\varepsilon_{k+1},\dots,\varepsilon_{s-1} = \tilde\varepsilon_{s-1}$. (see [3], [4]). From this fact and $|\phi_j(x)| = 1$ $(j \in \mathbf{N}, x \in \Omega)$ we get

$$\int_{L_k^x} |K'_{s-1}(x,t)|^2 d\lambda(t) \leq \sum_{\substack{\varepsilon,\tilde\varepsilon\in\{0,1\}^{s-2}\times\{0\}\\ \varepsilon_{k+1}=\tilde\varepsilon_{k+1},\dots,\varepsilon_{s-1}=\tilde\varepsilon_{s-1}}} \int\limits_{L_k^x} 1\; d\lambda(t) \leq \frac{1}{2^k}2^k 2^s = 2^s.$$

Let $P := S_{2^s}^\Psi f$ and observe that

$$\sigma_n^\Psi f - f = \sigma_n^\Psi(f-P) + (P-f) + (\sigma_n^\Psi P - P).$$

Using the fact $(S_iS_jf)(x) = (S_{\min(i,j)}f)(x)$ we can show

$$\sigma_n^\Psi P - P = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2^s}(S_if - S_{2^s}f) = \frac{2^s}{n}(\sigma_{2^s}^\Psi P - P).$$

From the inequality

$$|f(t) - P(t)| \leq \omega^X(f, 2^{-s})$$

we have

$$\|f - P\| \leq \omega^X(f, 2^{-s})$$

and

$$|\sigma_n^\Psi(f-P)(x)| \leq \int_\Omega |f(t)-P(t)||K_n^\Psi(x,t)|d\lambda(t)$$

$$\leq \omega^X(f,2^{-s})\int_\Omega |K_n^\Psi(x,t)|d\lambda(t) \leq 8\omega^X(f,2^{-s}),$$

that is

$$\|\sigma_n^\Psi(f-P)\| \leq 8\omega^X(f,2^{-s}).$$

$$\|\sigma_n^{\Psi} f - f\| \leq \|\sigma_n^{\Psi}(f-P)\| + \|P-f\| + \|\sigma_n^{\Psi} P - P\|$$
$$\leq 9\omega^X(f, 2^{-s}) + \|\sigma_{2^s}^{\Psi} P - P\|.$$

Since

$$\|\sigma_{2^s}^{\Psi} P - P\| = \|S_{2^s}^{\Psi}(\sigma_{2^s}^{\Psi} f - f\| \leq \|\sigma_{2^s}^{\Psi} f - f\|$$

$\|\sigma_n^{\Psi} f - f\|$ can be estimated by $\Delta(s)$.
For $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ we have

$$\Delta(s) = O\left(2^{-s\alpha} + 2^{-\frac{s}{2}} 2^{s(\frac{1}{2}-\alpha)}\right) = O(2^{-s\alpha}) = O(n^{-\alpha}) \quad \text{as } n \to \infty$$

For $\alpha > \frac{1}{2}$ we have

$$\Delta(s) = 2^{-\frac{s}{2}\alpha} + 2^{-s} \sum_{k=0}^{s-1} 2^{k(\frac{1}{2}-\alpha)} = O\left(n^{-\alpha} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad as\ n \to \infty.$$

For $\alpha = \frac{1}{2}$ we have

$$\Delta(s) = 2^{-\frac{s}{2}} + s2^{-\frac{s}{2}} = O\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{as } n \to \infty.$$

This completes the proof of the theorem.

I would like to thank Professor G. Gát for setting the problem and his help.

References

[1] F., Schipp, W. R. Wade, P. Simon and J. Pál, Walsh Series. An Introduction to dyadic Harmonic Analysis, *Akadémiai Kiadó*, Budapest, and Adam Hilger, Bristol and New York (1990).

[2] G. Gát, Orthonormal System on Vilenkin Groups, *Acta Math. Hungar.* **58 (1-2)** (1991), 193–198.

[3] F., Schipp and W. R. Wade, Norm Convergence and Summability of Fourier Series with Respect to Certain Product System, (To appear.)

[4] G. Gát, Vilenkin-Firoer Series and Limit Periodic Arithmetic Functions, *Colleguai mathematica societatis* János Bolyai **58** (1990), 315–332.

On a theorem of G. Baron and A. Schinzel

ALEKSANDER GRYTCZUK

Abstract. G. Baron and A. Schinzel [1] generalized the wellknown Wilson's theorem. In this paper—under Theorem B—an extension of their theorem can be found.

1. Introduction

In 1979 an extension of Wilson's theorem was given by G. Baron and A. Schinzel [1]. Namely they proved the following:

Theorem A. For any prime p and any residues x_i mod p we have

$$\sum_{\sigma\in S_{p-1}} x_{\sigma(1)}\left(x_{\sigma(1)}+x_{\sigma(2)}\right)\cdots\left(x_{\sigma(1)}+\cdots+x_{\sigma(p-1)}\right)\equiv \equiv\left(x_1+\cdots+x_{p-1}\right)^{p-1} \pmod p \tag{1}$$

where summation is taken over all permutation σ of $\{1,2,\cdots,p-1\}$.

In the present Note we prove the following extension of Theorem A:

Theorem B. For any prime p and any residues x_i mod p and for fixed natural number k such that $p-1\nmid k$ we have

$$\sum_{\sigma\in S_{p-1}} x^k_{\sigma(1)}\left(x^k_{\sigma(1)}+x^k_{\sigma(2)}\right)\cdots\left(x^k_{\sigma(1)}+\cdots+x^k_{\sigma(p-1)}\right)\equiv \equiv\left(x^k_1+\cdots+x^k_{p-1}\right)^{p-1} \pmod p \tag{2}$$

and if $x_i\neq 0$ are residues mod p, p is an odd prime such that $p-1\mid k$ then

$$\sum_{\sigma\in S_{p-1}} x^k_{\sigma(1)}\left(x^k_{\sigma(1)}+x^k_{\sigma(2)}\right)\cdots\left(x^k_{\sigma(1)}+\cdots+x^k_{\sigma(p-1)}\right)\equiv 1 \pmod p \tag{3}$$

where summation is taken over all permutation σ of $\{1,2,\cdots,p-1\}$.

We note that Ch. Snyder [3] gave interesting applications of (1) to differentials in rings of characteristic p.

2. PROOF of the Theorem B. Let

$$S_{1,\sigma} = \sum_{\sigma \in S_{p-1}} x_{\sigma(1)} \left(x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(2)}\right) \cdots \left(x_{\sigma(1)} + \cdots + x_{\sigma(p-1)}\right) \tag{4}$$

and

$$S_{k,\sigma} = \sum_{\sigma \in S_{p-1}} x^k_{\sigma(1)} \left(x^k_{\sigma(1)} + x^k_{\sigma(2)}\right) \cdots \left(x^k_{\sigma(1)} + \cdots + x^k_{\sigma(p-1)}\right) \tag{5}$$

First we note that if $p-1 \nmid k$ and $k > p-1$ then $k = (p-1)t + r$, $1 \le r < p-1$ and by Fermat's theorem we obtain $S_{k,\sigma} \equiv S_{r,\sigma} \pmod p$. Thus it suffices to prove (2) in the case $k < p-1$. It is easy to see that for such k we have

$$x_i^k \equiv x_{\sigma(i)} \pmod p \tag{6}$$

for some σ and $i = 1, 2, \cdots, p-1$.
From (6) we obtain

$$\begin{aligned} S_{k,\sigma} \equiv \sum_{\sigma \in S_{p-1}} x_{\sigma(\sigma(1))} \left(x_{\sigma(\sigma(1))} + x_{\sigma(\sigma(2))}\right) \cdots \left(x_{\sigma(\sigma(1))} + \right. \\ \left. + \cdots + x_{\sigma(\sigma(p-1))}\right) \pmod p \end{aligned} \tag{7}$$

By (7) and (1) it follows that

$$S_{k,\sigma} \equiv \left(x_{\sigma(1)} + \cdots + x_{\sigma(p-1)}\right)^{p-1} \pmod p. \tag{8}$$

Now by (8) and (6) we obtain

$$s_{k,\sigma} \equiv \left(x_1^k + \cdots + x_{p-1}^k\right)^{p-1} \pmod p$$

and (2) is proved.

For the proof (3) we remark that $k = (p-1)t$ and by Fermat's theorem we obtain

$$S_{k,\sigma} \equiv \sum_{\sigma \in S_{p-1}} 1 \cdot 2 \cdots (p-1) = (p-1)!(p-1)! \pmod p \tag{9}$$

From (9) and Wilson's theorem we obtain

$$S_{k,\sigma} \equiv 1 \pmod p \quad \text{and the proof is finished.}$$

Corollary. Let x_i be residues mod p from reduced system such that for $i \neq j, x_i \neq x_j$, then

$$S_{k,\sigma} \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{if} \quad p-1 \nmid k. \tag{10}$$

PROOF. Let $\sigma_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_{p-1}^k$ then by Eisenstein's result (Cf.[2],p.95) we have $\sigma_k \equiv 0 \pmod{p}$ if $p-1 \nmid k$.
From this fact and (2) we obtain (10) and the proof is complete.

Reference

[1] G. BARON and A. SCHINZEL, An extension of Wilson's theorem, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canad*, Vol. 1, No 2 (1979), 115–118.

[2] L. E. DICKSON, History of the Theory of Numbers, Vol. I. repr. by Chelsea. (1952).

[3] Ch. SNYDER, Kummer congruences for the coefficients of Hurwitz series, *Acta Arith.*, XL (1982), 175–191.

A computer-aided demonstration of the Poincare model of hyperbolic geometry

LAJOS SZILASSI

Abstract. Teaching non-Euclidean geometries for students at the Juhász Gyula Teachers Training College, seems to be an effective way of developing their visual imagination.

This is also an objective of well-known Euclidean models of hyperbolic geometry. In particular we now deal with the circle-model of Poincare we have thought to be more suggestive because of its property of preserving angles.

At this lecture we are presenting a computer programme which besides illustrating the basic notions of hyperbolic geometry (hyper cycle, paracycle, penciles of lines etc.) also demontrates the problem described above. It presents a a "Cartesian-like" system of co-ordinates on the Poincare model, on which the graphs of some well-know functions can be studied in this system of co-ordinates.

We can see that the smaller the unit is chosen comparing to the radius of the basic circle the more the grpah approaches its usual graph.

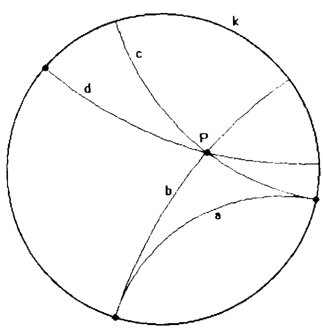
This is an effective way to make prospective teachers aware that when in the school they say "The graph of the function $y = x$ is a line", they virtually state an equivalent form of the Euclid's parallel axiom.

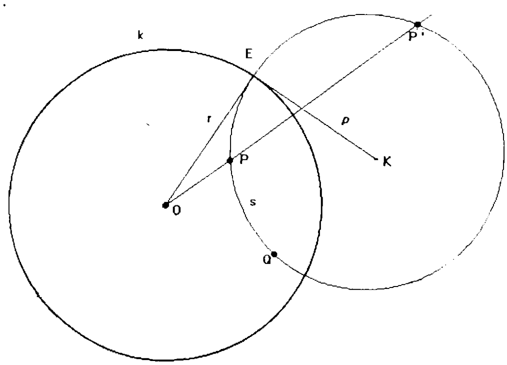
At lectures in Geometry at the Juhasz Gyula Teacher Training College, teaching non-Euclidean geometries is an effective way of developing a visual approach to Geometry in students. For prospective teachers, it is especially important that these topics, which require a higher level of abstraction, be treated a visual and suggestive way, as this is how they will be able to make the most use of their studies when teaching. This aim is also served by Euclidean models of hyperbolic geometry. We are now considering the Poincare model (P-model in what follows), which we have found more suggestive than other models, due to its property of preserving angles.
The reason why this model is treated less frequently is probably that figures seem to be somewhat more fastidious to draw than, for instance, in the Cayley–Klein model, which uses methods of projective geometry. Using computer, however, it is not much more difficult to draw an arc, for example, than a segment of line. The analogy between the axial reflection of the Euclidean plane and the inversion on the P-model is also more suggestive than the central collineation on the Cayley–Klein model.

We introduce the notion of congruence axiomatically, using axioms of the reflection, at the Teacher Training College. On the one hand, this is a continuation of the way geometry is taught at primary school, on the other hand it is clearer this way how absolute geometry splits into Euclidean and hyperbolic geometry depending on what axioms we accept.
The P-model is also suitable for visualising the most important notions and theorems of absolute geometry in a different way. This way the relation between the geometry developed axiomatically and the geometry based on our "experience" and "intuition" can be seen more clearly.
Any graph—like graphs of geometrical configurations on the P-model—can only become really suggestive if we can direct drawing and see ourselves how the graphs change while changing the parameters.
This aim is served by the interactive computer programme to be presented. It enables the user that he himself can draw the graphs, which are to make notions of hyperbolic geometry more suggestive.

1. General description of the programme

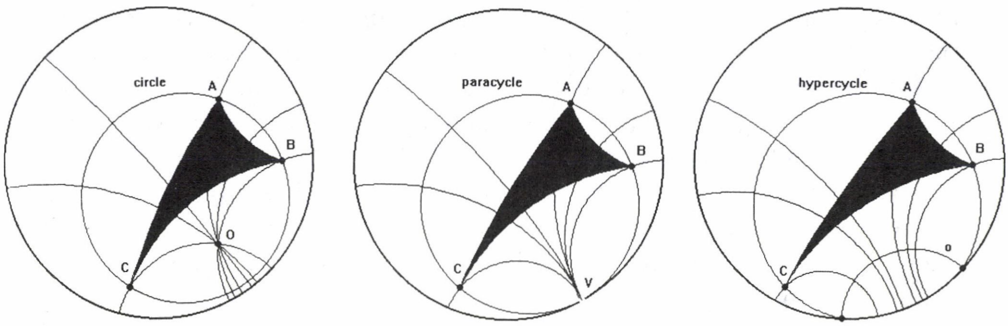
In the first part of the programme we can draw some basic geometrical configurations on the P-model on the screen, e.g. a line determined by two of its points, a segment with its perpendicular bisector, a regular curve (i.e. a circle, a paracycle, a hypercycle or a line) passing trough three points, etc. It suffices to make a procedure which draws the line of the hyperbolic plane through two points on the P-model. Using this interactively, we can easily visualise the relation of two lines.



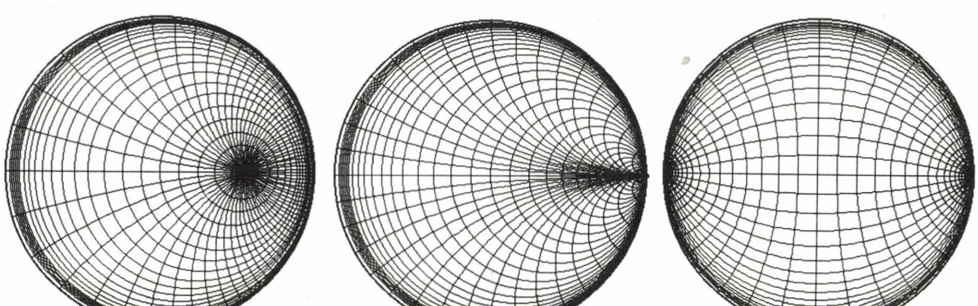


Creating such a subroutine is only a problem of calculation and programming. From the parameters of the circle of inversion $k(O, r)$ and the points P and Q (with respect to the Cartesian system of coordinates on the screen) first we had to determine the inverse $P' = \varphi_k(P)$ of the point P with respect to the circle k, then the parameters of the circle s passing through P, P', Q, finally the arc of s contained in k (or, if s happens to be a line, a diameter of k). We have chosen to use the polar coordinates (with respect to O) of

that point of the line (represented as an arc on the P-model), which is the closest to the origin O, lines passing through O were given by their normal vector. Using these parameters has proved to be advantageous especially when drawing pencils.
Another procedure used many times is drawing the perpendicular bisector of a segment determined by two points of the hyperbolic plane on the P-model. It can easily be used to visualise the relation of the perp. bisectors of the sides of a triangle, about which, in absolute geometry, we can only prove that they belong to the same type of pencil. By demonstrating this, we can make students aware that when they prove in the school the theorem about the centre of the circle circumscribed to a triangle, they in fact accept the existence of the intersection of the two perp. bisectors as an equivalent form of the parallel axiom.



On this figure we have drawn the perp. Bisectors of the sides of the triangle ABC, the regular curve passing through its vertices, and the lines perpendicular to the curve and passing through the vertices. These six lines belong to the same pencil in each of the three cases. The carrier of this pencil is either a point O, or a direction V (point at infinity), or a line o.
The second part of the programme demonstrates the three different types of pencils of the hyperbolic plane and the family of regular curves corresponding to them.

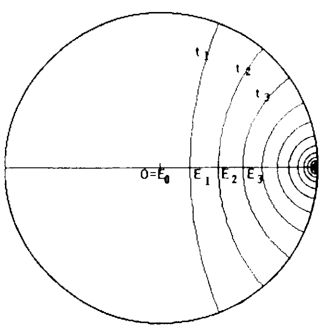


In each of the three cases those regular curves of the pencil were drawn, which intersect the lines of the pencil in points at a constant distance from each other. The user can modify both this distance—which was chosen of unit length—and other parameters of the model, within certain limits, in order to realise connections between parameters and the graph thus obtained. Finally we constructed a system of coordinates similar to that of the Cartesian system of the Euclidean plane, and drew the graphs of a few functions in this system.

Without describing the technical details of programming, we are presenting some—mostly mathematical—problems, which can lead to the graphs of the figures, including the graphs of functions.

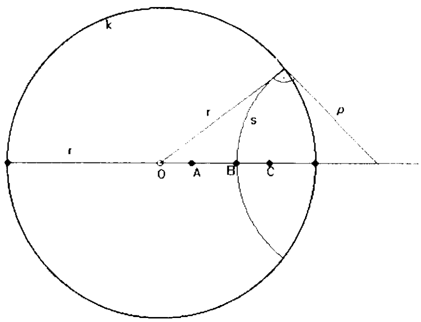
2. Number line on the P-model

First we want to see how to draw a number line of the hyperbolic plane on the P-model. Let this "line" be the diameter e of the circle k. We assign 0 to the centre $O = E_0$, 1 to an arbitrary point E_1 of the line e. The point E_2 corresponding to 2 can be constructed the following way. We draw the "line" perpendicular to e and containing E_1 — call this line t_1 —, then invert the point E_0 to this "line": $E_2 = \varphi_{t_1}(E_0)$. Similarly, $E_3 = \varphi_{t_2}(E_1)$, where $t_2 \perp e$ and $t_2 \in E_2$ $t_2 \in E_2$, and so on. This way we have obtained lines on the P- model perpendicular to a given line and intersecting it in points corresponding to integers.



Obviously, we will need the "screen-coordinates" of these points for drawing on the screen. However, we are now going to use a Cartesian (i.e. Euclidean) system of coordinates with the centre of the circle k as origin. (The transformation taking these systems into each other is a problem of programming.) In what follows, $h(\overline{AB})$ stands for the distance of the points A and B on the hyperbolic plane, $d(\overline{AB})$ for their distance on the P-model (i.e. on the Cartesian system mentioned above.)

So we must find a sequence a_n for which $h(\overline{OE_1}) = 1$, $d(\overline{OE_1}) = k = a_1$, $h(\overline{OE_n}) = n$, and $d(\overline{OE_n}) = a_n$ where $k < r$ are arbitrary real numbers.



Take the points A and B on the half line with starting point O. Let $a = d(\overline{OA})$, $b = d(\overline{OB})$, and ρ the radius of the circle s perpendicular to $[OB)$ (and to k) and passing through B. Further, let $\varphi_s(A) = C'$ and $c = d(\overline{OC'})$. (C' is the image of the point A under the reflection with respect to the line s on the hyperbolic plane.) From $\varphi_s(A) = C'$ it follows that $\rho^2 = (\rho + b - a)(\rho + b - c)$. Also, $s \perp k$, whence $(b + \rho)^2 = r^2 + \rho^2$.

Thus $c = \frac{2br^2 - a(r^2+b^2)}{r^2+b^2-2ab}$. Thus applying the sequence of inversion mentioned above, we obtain the following recursive formula for the sequence a_n:

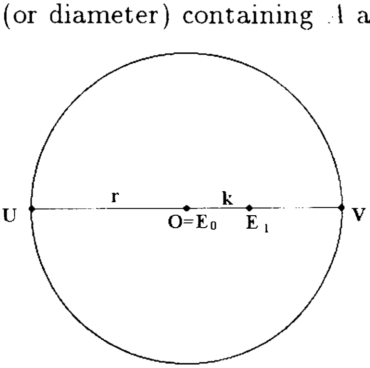
$a_0 = 0$,

$a_1 = k$ (where $k < r$ is an arbitary real number) ,

$a_n = \frac{2a_{n-1}\cdot r^2 - a_{n-2}\cdot(r^2+a_{n-1}^2)}{r^2+a_{n-1}^2-2a_{n-1}\cdot a_{n-2}}$ if $n \geq 2$ is an integer. It can be shown that $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = r$.

Thus far we can only construct points corresponding to natural numbers on those number lines of the hyperbolic plane, which appear as diameters on the P-model.

The distance between the hyperbolic points A and B (the hyperbolic measure of the segment $\overline{AB}$) is obtained by $h(\overline{AB}) = \frac{c}{2}\left|\ln(UVAB)\right|$ on the Cayley–Klein model (where collinear points appear as collinear points), where c is an arbitrary constant, U and V are the end points of the chord (or diameter) containing A and B.



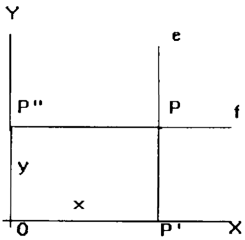
Transformations between the two models fix points of the diameters of the (common) circle of inversion, so this formula can be used also in this case, if the constant c is chosen so that whenever, $d(\overline{OE_1}) = k = a_1$ $h(\overline{OE_1}) = 1$ also holds.

As $(UVOE_1) = \frac{\overline{UO}}{\overline{UV}} \div \frac{\overline{UO}}{\overline{E_1V}} = \frac{r}{r} \div \frac{r+k}{r-k} = \frac{r-k}{r+k} < 1$ from the equation $1 = \frac{c}{2}\left|\ln(UVOE_1)\right|$ we have $1 = c \cdot \ln\sqrt{\frac{r+k}{r-k}}$, thus $c = \frac{1}{\ln\sqrt{\frac{r+k}{r-k}}}$. So for any

point X on a line passing through the centre O of the P-model, for which $d(\overline{OX}) = x$, we have $h(\overline{OX}) = h(x) = \dfrac{\ln\sqrt{\frac{r+x}{r-x}}}{\ln\sqrt{\frac{r+k}{r-k}}}$.
It can be shown that $h(-x) = -h(x)$, hence the point X can indeed be any point on a diameter of the circle of inversion, that is $-r < x < r$.
Now we need the inverse of this function, which maps a number line of the hyperbolic plane with origin O to the Cartesian system of the P-model.
The inverse of the function $h(x)$ is $d(x) = r \cdot th\left(x \cdot \ln\sqrt{\frac{r+k}{r-k}}\right)$, and its domain is the set of real numbers, its range is the open interval $(-r; r)$.
It can be shown that for any natural number n we have $a_n = d(n)$, so that on the P-model we can construct points of the hyperbolic number line corresponding to any (not only natural) number.

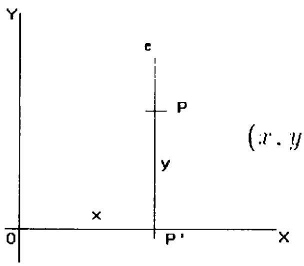
3. An "orthogonal" system of coordinates on the hyperbolic plane

The question that is arising now is how to construct a system of coordinates on the hyperbolic plane similar to that of the Cartesian system of Euclidean geometry.
The Cartesian system assigns bijectively a point of the Euclidean plane to every pair of real numbers. When drawing the graph of a function, we in fact draw the set of points corresponding to pairs of numbers assigned to each other by the function.
In hyperbolic geometry, this is somewhat more complex. First we assign (a suitable way) a point of the plane to every pair (x, y), then assign the point corresponding to it on the P-model (i.e. its coordinates (x_k, y_k) in the Cartesian system with origin O), and then, if we want to present it on the computer, it should be changed to the coordinates of the screen. The latter, however, is more a problem of programming than Mathematics.
The Cartesian system consists of two perpendicular number lines, usually with the same unit. The bijection between the pairs (x, y) and the points of the plane can be realised two different ways.
The first one: We determine the points P' and P'' on the axes X and Y corresponding to the numbers x and y, then construct the point P as the intersection of the lines e and f perpendicular to X and Y and passing through P' and P'', respectively.



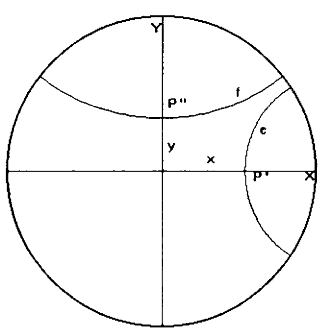
$$(x,y) \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x \Rightarrow P' \in X \Rightarrow e \quad \left| \left\{ \begin{array}{l} e \perp X \\ e \in P' \end{array} \right. \right. \\ y \Rightarrow P'' \in Y \Rightarrow f \quad \left| \left\{ \begin{array}{l} f \perp X \\ f \in P'' \end{array} \right. \right. \end{array} \right\rangle \Rightarrow P = e \cap f$$

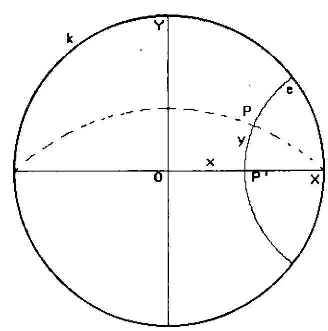
The other one: we determine the point P' corresponding to x on the axis X, the we choose the point P on the line containing P' and perpendicular to X (the locus of points with the same abscissa) for which the length of $P'P$ is y.



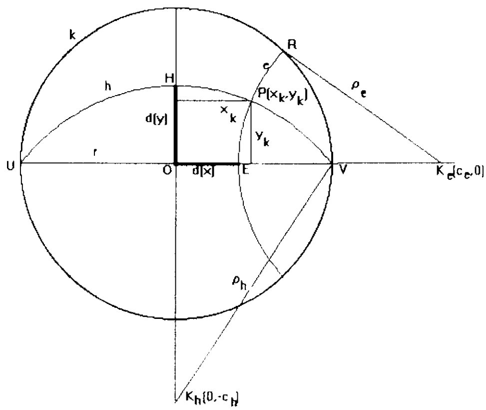
$$(x,y) \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x \Rightarrow P' \in X \Rightarrow e \left| \left\{ \begin{array}{l} e \perp X \\ e \in P' \end{array} \right. \right. \\ y \Rightarrow \end{array} \right\rangle \Rightarrow P = \left| \left\{ \begin{array}{l} P \in e \\ \overline{PP'} = y \end{array} \right. \right.$$

In Euclidean geometry the rectangle $OP'PP''$ has the properties which make these two constructions equivalent.
However, this is different in hyperbolic geometry. If we chose the first way, it may very well happen that the lines perpendicular to the axes do not intersect, if the reals x, y are big enough. Choosing the other way, on the other hand, the locus of points with given ordinate—i.e. points from the same distance from the axis X—will be a hypercycle. This is how we obtain the lattice we saw when demonstrating ultrapara.





The loci of both points with the same abscissa (line) and points with the same ordinate (hypercycle) will be an arc e representing the line or arc h representing the hypercycle, respectively, on the P-model. The intersection of these arcs will be the point corresponding to (x, y), i.e. the coordinates (x_k, y_k) in the Cartesian system with origin O, which we had to determine from the parameters $d(x)$, $d(y)$ and r.



Using the notation of the figure we get the equations of circles e and h:

$$(x - c_e)^2 + y^2 = \rho_e^2 \text{ where } c_e = \rho_e + d(x) = \overline{OK_e},$$
$$x^2 + (y + c_h)^2 = \rho_h^2 \text{ where } c_h = \rho_h - d(y) = \overline{HK_h}.$$

It also holds that $c_e^2 = \rho_e^2 + r^2$ because s is perpendicular to the circle of inversion k, and $c_h^2 = \rho_h^2 - r^2$ as h intersects k in opposite points.
From the above we have $c_e x + c_h y = r^2$ for the radical axis of circles e and h.
Also, as $e \perp h$, the points O and P both lie on the Thales' circle of the segment $\overline{K_e K_h}$, so the angles $OK_eP\angle$ and $OK_hP\angle$ are equal. Hence:

$$\frac{x_k}{\rho_h} = \frac{y_k}{\rho_e}.$$

Calculation shows that

$$x_k = \frac{r^2 \cdot d(x) \cdot (r^2 + d^2(y))}{r^4 + d^2(x) \cdot d^2(y)} \quad \text{and} \quad y_k = \frac{r^2 \cdot d(y) \cdot ((r^2 + d^2(x))}{r^4 + d^2(x) \cdot d^2(y)}.$$

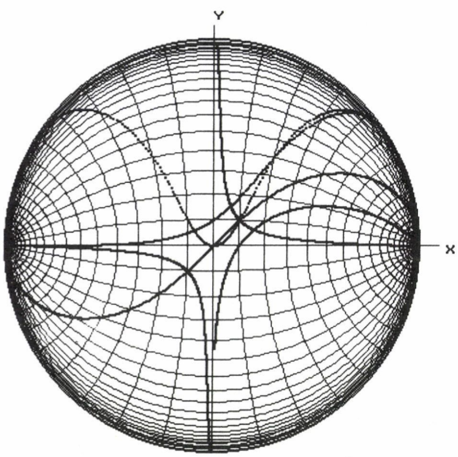
As both $d(x)$ and $d(y)$ contain r as coefficient, these formulae can be simplified:

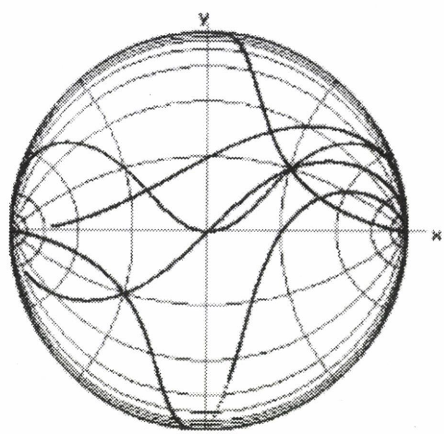
$$x_k = \frac{th(q \cdot x) \cdot (1 + th^2(q \cdot y))}{1 + th^2(q \cdot x) \cdot th^2(q \cdot y)} r, \quad y_k = \frac{th(q \cdot y) \cdot (1 + th^2(q \cdot x))}{1 + th^2(q \cdot x) \cdot th^2(q \cdot y)} r$$

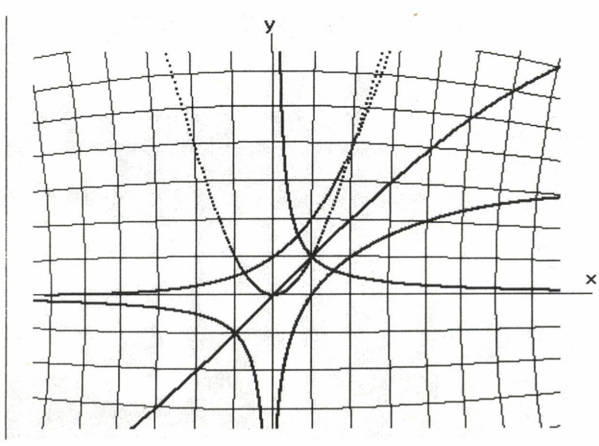
where $q = \ln\sqrt{\dfrac{r+k}{r-k}}$.

4. The graph of functions on the P-model

As a result, we have drawn the graph of a few well known functions ($y = x$; $y = x^2$; $y = 2^x$; $y = \log_2(x)$; $y = \frac{1}{x}$ in this system of coordinates. We realise that the extent to which these graphs approach their usual shape depends on the ratio of the radius of the circle of inversion and the unit.
The figures show the cases $\frac{k}{r} \approx 0.1$, $\frac{k}{r} \approx 0.3$, $\frac{k}{r} \approx 0.04$. In the last one the graph is very close to its usual form near the origin.
The user of the programme can realise that fixing k and increasing r, the model approaches the Cartesian system of Euclidean geometry. Choosing r big enough, we cannot feel the difference on the screen, just as we cannot feel sitting in a room that the Earth is a sphere.







We hope that this programme will help students understand the basic notions of hyperbolic geometry more easily, and make it clearer for them which are the theorems holding in absolute geometry, and which are true only in the Euclidean geometry. This way we may make prospective teachers aware that when in the school they say "The graph of the function $y = x$ is a line.", they virtually state an equivalent form of the parallel axiom.

Algoritmikus gondolkodásra nevelés

SZILÁK ALADÁRNÉ

Abstracto. (Bazoj de kalkultekniko en la matematikainstruadon integrale) La skribleciono modelon montras bazoj de kalkultekniko por aplikado en la matematikainstruadon integrale. En la bazgrado instruado aplikado de la algoritmadoj akcelas elformon, evoluigon de la algoritmada pensado. Ci tio grava edukada tasko dum la matematikaj studhoroj ankau.

Néhány bevezető gondolat

A számítógéptudomány az elmúlt évtizedekben óriási fejlődésen ment keresztül. Az igények növekedése szükségszerűvé tette a számítástechnika alap- és középszintű oktatását, mely szakkörön, fakultáción, tanórán (számítástechnika, informatika, matematika, technika) az iskolák többségében bevezetett. A középiskolákban kisérletileg megalapozott tankönyvek, didaktikailag jól kidolgozott megoldásrendszerek (kézikönyvek, példatárak) segítik a tanárok, tanulók munkáját.

A kötelező iskolázás szintjén (6—16 éves kor) a matematikatanításba integrálva lehetne a számítástechnikai ismereteket megalapozni. A matematikatanítás alapvető feladata a logikus, a rugalmas, a fegyelmezett gondolkodásra, problémamegoldásra nevelés. A számítástechnika elemeinek az oktatása és alkalmazása az **algoritmikus gondolkodásmód kialakításával és fejlesztésével segítené** a fenti feladatok teljesítését. Hasonlóan a matematikai logikához, a halmazelmélet alapjaihoz, a kombinatórikához — melyeket nem tanítunk önálló témakörként — eszköz, fejlesztő, előkészítő jellegűek lennének a számítástechnikai alapismeretek.

Sokan kételkednek a matematika és a számítástechnika pozitív kölcsönhatásában ezen a szinten. Az biztos, hogy csak határozott megközelítéssel, az ötletek és a módszerek kidolgozása, finomítása után (kísérletezéssel) várható egyértelmű eredmény. A számítástechnika olyan gyorsan fejlődik, hogy nem nagyon érdemes „holnapra már elavuló” ismeretekre helyezni a hangsúlyt. Elsősorban a „kiszolgált tantárgy” (matematika) igényeit figyelembe véve általános számítástechnikai kultúra adása legyen a cél: Az alapszintű osztályokban az algoritmusok tanítása, alkalmazása, a számítógép oktatási segédeszközként történő használata a feladat. Az emelt szintű matematikatanításban a fentieken kívül megfogalmazódhatnak olyan követelmények is, amelyek valamely programnyelv elemeinek az elsajátításához kapcsolódnak.

A továbbiakban egy modellt szeretnék mutatni a számítástechnikai ismeretek módszertani feldolgozásához a matematika tanításában.

Algrotimusok alkalmazása az alapszintű matematika órákon

1. Alapismeretek

— *Algoritmus:* (a szó tervszerűséget jelent; a középkorban élt üzbég matematikus, al-Kvarizmi nevéből származik.) Az algoritmikus eljárás nem a számítógép tudománnyal született (Euklidész, ókori görög matematikus nevéhez fűződik pl. az euklidészi algoritmus).

Definíció: Az algoritmus olyan egymást követő elemi lépések véges sorozata, amely valamely **probléma** egyértelmű és teljes megoldására alkalmas. A keresett eredményt létrehozó elemi lépéseket *utasításoknak* nevezzük.

Egy algoritmustól a következő **tulajdonságokat** várjuk el:

1. **Végesség:** az algoritmusnak véges számú lépés után meg kell tudni határozni a kiindulási feladat megoldását, vagy meg kell mutatni a probléma megoldhatóságát.

2. **Meghatározottság:** az algoritmus — azonos körülmények között végrehajtva — mindig azonos eredményre vezessen (egyértelműség).

3. **Általános érvényű:** az algoritmus nemcsak egy konkrét probléma megoldását szolgálja, hanem a problémák egy egész halmazát oldja meg.

4. **Bemenet:** a kiindulási adatokat jelenti, melyeket „beépíthetünk” az algoritmusba, vagy a problémamegoldó által „kívülről megadhatunk”.

5. **Kimenet:** a keresett megoldást, eredményt szolgáltatja.

6. **Hatékonyság:** az algoritmus a keresett eredmény(ek)hez a megadott feltételrendszer mellett fölösleges lépések nélkül jut el (a lehető legrövidebb idő- és helyigénnyel).

— *Probléma:*

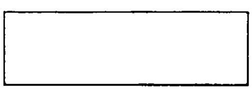
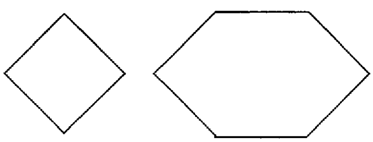
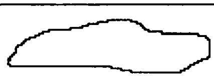
Definíció: Pólya György: „A probléma olyan szituáció, kérdés, feladat, amelyre a választ nem tudjuk azonnal emlékezet, észlelés, tapasztalás útján megadni, hanem csak közvetett úton: gondolkodási és logikai műveletvégzésen keresztül.”

Algoritmusleíró módszerek

a) Folyamatábra (blokkdiagram):

A feladat (probléma) megoldási lépéseinek sorrendjét — utasítástípusonként különböző geometriai alakzatok (szimbólumok) felhasználásával — szemléltető ábra, melyben a „folyamat irányát” nyilak mutatják.

Egyszerű folyamatábra szimbólumok, jelentésük

	**az algoritmus (folyamat) elejét és végét jelzi**
	**beolvasó, kiíró utasítás (adatokat, eredményeket szolgáltat)**
	**feltétel nélkül végrehajtandó utasítás**
	**elágazás: a feladatvégrehajtás a rombuszba (hatszögbe) írt feltételtôl függôen egyik vagy másik irányba folytatódik (i-igen kimenetel, n-nem kimenetel)**
	**„felhô" : amit ide írunk további elemi lépésekre tagolható**

1. ábra

b) Mondatszerű leírás:

Az algoritmus lépéseit mondatokkal vagy „mondatszerű szerkezetek” egymásutánjával írjuk le.

A mondatszerű leírással *„Verbális”* vagy *„félig formalizált ” algoritmusokat* készíthetünk.

— *Számítógép:*

Olyan számítástechnikai eszköz, amely a gép nyelvére lefordított algoritmust végrehajtja.

A számítógép különböző alkalmazásaira gondolva azt is mondhatjuk, hogy a számítógép olyan (elektronikus) információtároló- és feldolgozó berendezés, amely a feladatok algoritmusának és a szükséges adatoknak az ismeretében előállítja a probléma megoldását.

Mikor kerüljön sor a fenti fogalmak, ismeretek tanítására?

Tanév elején (5. osztálytól) legalább két órát célszerű biztosítanunk konkrét feladatokhoz kapcsolva a folyamatábra, algoritmus fogalmak tisztázására, egyszerűbbek megkonstruálására. A tanulók viszonylag nehézség nélkül „játszanak el”, mondanak el olyan egyszerű cselekvéssort (folyamatot), amelyek életközelből származnak (pl.: reggeli felkeléstől az iskolába indulásig tartó tevékenységek, nyilvános telefonfülkéből telefonálás, főzés, bevásárlás, átkelés a zebrán, piszkos tányérok mosogatása, almák méret szerinti osztályozása stb.). E példákon keresztül rendezhetjük is az algoritmusokat aszerint, hogy tartalmaznak feltételt (elágazó algoritmus), ismétlést (ciklus), vagy nem tartalmaznak feltételt (lineáris algoritmus). Természetesen az utóbbival kezdjük az ismerkedést. Itt mutassunk rá az algoritmus jellemző tulajdonságaira (végesség, egyértelműség, általános érvényű) is.

Ezek után kerüljön csak sor az egyszerű matematikai algoritmusok készítésére, leírására (folyamatábrával, mondatszerűen), algoritmussal megadott tevékenységsor elvégzésére (pl.: írásbeli műveletvégzés, geometriai számítások, egy szerkesztési feladat megoldása stb.).

E téma elemi szintű tanításához jó példákat találunk Varga Tamás: Játsszunk matematikát! 1. című könyvében, továbbá Lukács Ottó munkájában, amely az Utazások Matematikaországban sorozatban Gyerekmatek címmel jelent meg.

2. A tanult ismeretek rögzítéséről, alkalmazásáról

Sajnos a tapasztalat az, hogy a tanulók többsége nem jut el 13–14 éves korra sem oda, hogy egy ismeretlen, nem túl bonyolult matematikai probléma algoritmusát (folyamatábráját) önállóan el tudná készíteni. Ezt sem a ráfordítható idő, sem a tanulók életkora nem teszi lehetővé. Éppen ezért, ne „raboljuk” el a matematikától az időt azzal, hogy algoritmusok, folyamatábrák készítésével (még segítséggel sem) foglalkozzunk!
Helyette:

— Kész folyamatábrát (algoritmust) **„elemeztessünk”**! (Kövesd a folyamatábra utasításait! Mit csináltat (old meg) a folyamatábra?)

— Hiányos folyamatábrát (algoritmust) **„egészíttessünk”** ki!

— Hibás folyamatábrában (algoritmusban) **„kerestessük meg a hibát”**, majd **„javíttassuk”**!

— Konkrét folyamatábra-utasítások **applikációs modelljeiből „készíttessük el”** a folyamatábrát!

Időt takaríthatunk meg azzal is, ha az algoritmusokat, folyamatábrákat (folyamatábra részleteket) tanóra előtt felírjuk a táblára, írásvetítővel vetítjük, applikáljuk, számítógéppel megjeleníttetjük stb.

3. Eszköz, fejlesztő, előkészítő jellegű alkalmazás, koncentrációs lehetőségek a matematika tantárgyon belül

Hol és mikor alkalmazzuk a matematikatanításban az algoritmusokat (folyamatábrákat), számítógépet, zsebszámológépet?

Az **oktatási folyamat bármely mozzanatában**, és akkor, amikor **segítik, gyorsítják, szemléletesebbé, érdekesebbé** teszik az új anyag feldolgozását, a rögzítést, gyakorlást, ismétlést, rendszerezést, számonkérést, **fejlesztik a tanulók algoritmikus gondolkodását.**

Mivel egy algoritmussal azonos típusú feladatokat tudunk megoldani, így bármely olyan anyagrészhez „hozzákapcsolható", ahol azonos tevékenységnek a **készségfejlesztését** végezzük.

Ilyen algoritmusok lehetnek például:

— Írásbeli műveletvégzések a természetes számok halmazában.

— Két pozitív tört összehasonlítása.

— Törtek összeadása, kivonása, egyszerűsítése, bővítése.

— Alapszerkesztések (szakaszfelezés, szögfelezés, „tükörkép" szerkesztése stb.).

— Egy pozitív természetes szám összes osztójának a megkeresése.

— Egy összetett szám prímtényezőkre bontása.

— Két vagy több természetes szám legnagyobb közös osztójának, legkisebb közös többszörösének a meghatározása.

— Egy szöveges feladat megoldásának lépései.

— Egy geometriai szerkesztési feladat megoldásának lépései.

stb.

Vannak olyan vélemények, hogy az algoritmusok alkalmazása káros, mert „leszűkíti" a tanulók gondolkodását, „uniformizálja" azt. „Alkotó munkára, kreativitásra kell nevelni — mondják —, mi pedig algoritmusokat oktatunk." A matematikatanításban fontos helyet foglal el azoknak a készségeknek a kialakítása, amelyeknek lehetőség szerint minél automatizáltabban kell lefolyniuk (Ilyenek például a szóbeli, írásbeli műveletvégzések; alapvető geometriai szerkesztések stb.). Ezek a készségek nemcsak önmagukban fontosak, hanem elengedhetetlen tényezői mindenfajta alkotó folyamatnak. Ha az algoritmusokat az oktatás megfelelő fázisaiban alkalmazzuk a tanulóink gondolkodását nem uniformizálják! Helyette kialakulhat egy olyan algoritmikus gondolkodásmód, amely a matematikai gondolkodást **pontosabbá, logikusabbá, teljesebbé, igényesebbé** teszi.

A fenti feladatok kapcsán tisztázhatjuk azt is, hogy milyen mélységig kell egy algoritmust elemi lépésekre bontani!
Pl.: egy szerkesztési feladat megoldásakor egy alapszerkesztés elvégzése „elemi lépése” az algoritmusnak.

A számítógépet a matematikaórákon elsősorban a tanári bemutatás eszközeként érdemes alkalmazni, ugyanis sok iskolában nincsenek meg a feltételei annak, hogy a tanulók mindegyike gépközelbe kerüljön. A számítógép tanítási órán való alkalmazásakor két alapvető célt kell figyelembe vennünk: Az egyik a tanuláselméleti cél, vagyis mennyire használható a számítógép az oktatási folyamat mozzanataiban. A másik a tananyagtaxonómiai cél, azaz milyen kritériumrendszer alapján választható ki a tantervi anyagból a számítógép alkalmazásával feldolgozandó anyagrész.

A számítástechnikai szakirodalom számos olyan programot közöl, amelyek jól használhatók a tanításban. A matematikatanárok is el tudnak készíteni olyan programokat, amelyek konkrét céljaik megvalósítását szolgálják. A számítógépet használhatjuk például:

— Új anyag feldolgozásakor (síkbeli egybevágósági transzformációk értelmezésének szemléltetése, hozzárendelések szimulálása stb.).

— Gyakorláskor (geometriai számítások elvégzése, prímszámok keresése stb.)

— Valószínűségi kísérletek, játék szimulálására (kockadobás, pénzfeldobás, lottóhúzás stb.).

— Statisztikai számításokra (átlag, szórás, korrelációs együttható), mérési adatok grafikus megjelenítésére, ábrázolására.

— Ismeretek számonkérésére (feladatlap, teszt, totó stb.).

A zsebszámológép használatát 13–14 éves korig akkor érdemes megengedni, ha a tanulók biztosak a műveletvégzésben racionális számok halmazában, ha gyorsítani akarjuk a számolást (nem a műveletvégzés gyakoroltatása a célunk), ha a tanulók jól ismerik a zsebszámológép működését, tulajdonságait.

A 14—16 éves korú tanulóknak már követelmény egy választott zsebszámológép működésének ismerete és használata.

4. Példák a 2. és 3. pontokban leírtak konkretizálására

1. példa

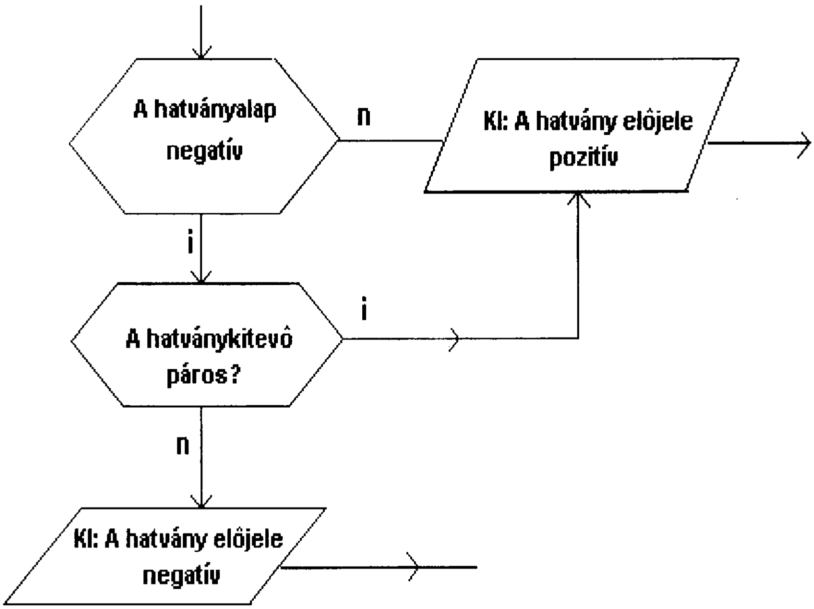
— A hatványozás tanításakor a következő folyamatábrarészlet az *elsődleges rögzítés, az általánosítás eszköze* lehet.

— *Gyakorláskor* a megadott feltételekkel rendelkező hatványok előjel szerinti rendezését segítheti (a gyengébb tanulóknál, ha tudnak folyamatábra- utasításokat követni, értelmezni, jól bevált segítség).

— *Ismétléskor* a folyamatábrarészletet hibásan is megadhatjuk, melyet a tanulókkal javíttatunk, vagy applikációs modellekkel kirakatjuk a folyamatot.

— A folyamatábrarészlet „finomítható" (kiegészíthető) a feladatban megfogalmazott feltételekkel.

Feladat: Mi lesz a hatvány előjele? A hatványalap nem nulla egész szám, a kitevő nem nulla természetes szám.



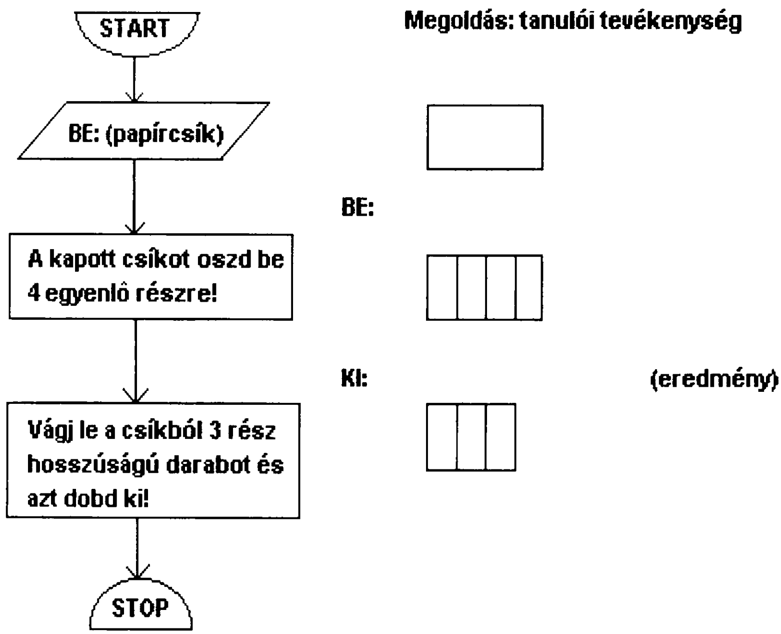
2. ábra

2. példa

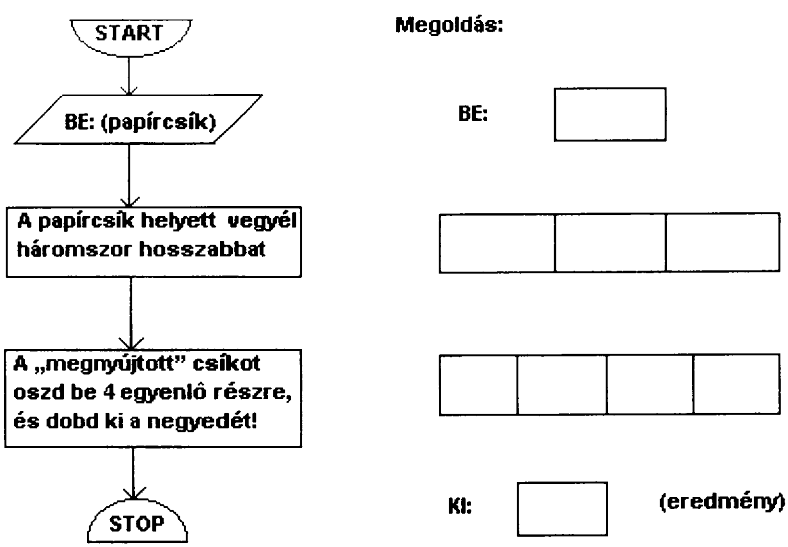
— A tört kétféle értelmezését többféle modell, eszköz alkalmazásával taníthatjuk. Az alábbi értelmezés „számítástechnikai modell" segítségével történik.

Feladat: a) Egy képzeletbeli automatába papírcsíkokat lehet bedobni. A gépbe ezt az utasítássort (programot) tápláljuk be. Dolgozz te is a „program" szerint (3. ábra)!

b) Egy másik automata ismét papírcsíkokkal dolgozik. „Programja" (4. ábra).


START
BE: (papírcsík)
A kapott csíkot oszd be 4 egyenlô részre!
Vágj le a csíkból 3 rész hosszúságú darabot és azt dobd ki!
STOP
Megoldás: tanulói tevékenység
BE:
KI:
(eredmény)

3. ábra


START
BE: (papírcsík)
A papírcsík helyett vegyél háromszor hosszabbat
A „megnyújtott” csíkot oszd be 4 egyenlô részre, és dobd ki a negyedét!
STOP
Megoldás:
BE:
KI:
(eredmény)

4. ábra

c) Az automaták által kidobott papírcsíkok hosszát hasonlítsd össze! Mit tapasztalsz?

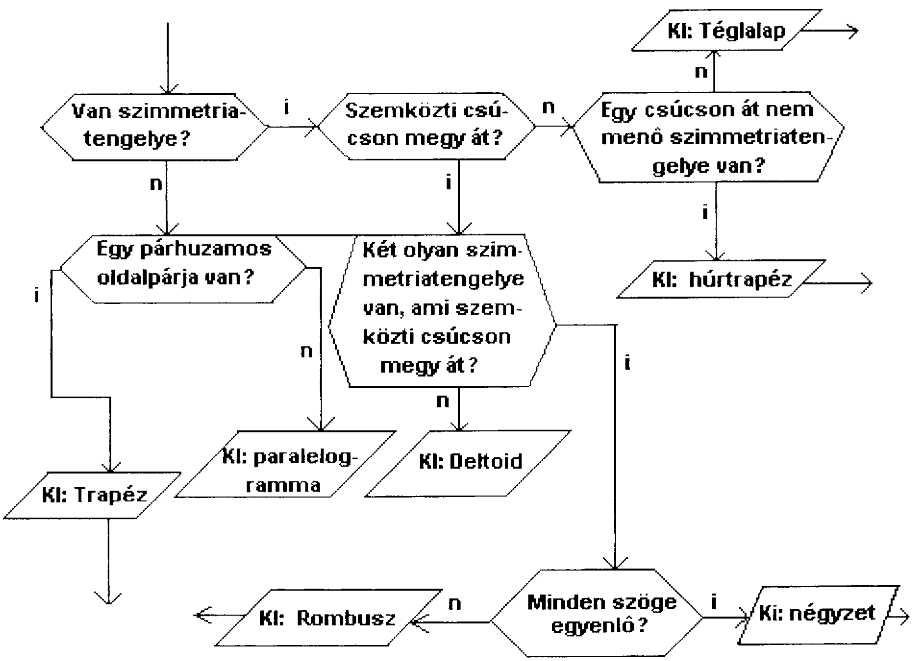
3. példa

— A trapézok, deltoidok tengelyes szimmetria szerinti rendszerezését végeztethetjük az alábbi folyamatábrarészlettel. Minden „ágát" követve a tanulók rajzolják a kimenetet (eredményt) jelző blokkba a feltételeknek megfelelő egy-egy négyszöget.

— Kis kiegészítéssel „barkochba játékra" is alkalmas az algoritmus.

— Nehezebb a feladat, ha egy-egy vizsgálatot (feltételt) más (de helyes) vizsgálattal kell helyettesíteni.

Feladat: Rendszerezzük a trapézokat, deltoidokat a tengelyes szimmetria szerint!



5. ábra

4. példa

— Az ismeretek alkalmazását, gyakorlását segíti a következő mondatszerű leírással készült algoritmus, mely egy szöveges feladat megoldását adja meg:

Feladat: a) Az algortimus lépései szerint számolj!

Több egész (racionális) számra is végezd el a feladatot! (A megoldást lásd a következő oldalon!)

Az algoritmus többszöri elvégzése után a tanulók megsejtik, hogy minden gondolt egész szám esetén, ha jól számoltak 1-et kaptak eredményül.

b) Írj nyitott mondatot (egyenletet) az algoritmushoz, próbáld megoldani! Mit tapasztalsz?

5. példa

— Több olyan feladat van, melyek összes megoldásait általában nem keresik meg a tanulók. Ha egy tervszerű eljárást (algoritmust) követve oldanák meg a problémát, nem követnének el ilyen hibát. A következő feladat egy televíziós vetélkedőn („Aki mer az nyer") volt, melynek minden megoldását egyetlen versenyző sem adta meg.

Feladat: Egy háromszögről a következőket tudjuk:

— Oldalai hosszúságának mérőszámai egymást követő prímszámok.

— Kerületének mérőszáma 50-nél kisebb prímszám.

Mekkorák a háromszög oldalai?

— A megoldás lépéseit így is lejegyezhetjük:

1) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 (50-nél kisebb prímszámok)

2) 2+3+5=10 nem prímszám

3) 3+5+7=15 nem prímszám

4) 5+7+11=23 prímszám; 5+7>11; 7+11>5; 5+11>7

5) **5, 7, 11 megoldások**

6) 7+11+13=31 prímszám; 7+11>13; 11+13>7; 7+13>11

7) **7, 11, 13 megoldások**

8) 11+13+17=41 prímszám; 11+13>17; 13+17>11; 11+17>13

9) **11, 13, 17 megoldások**

10) 13+17+19=49 nem prímszám

11) Vége: nincs több a feltételeknek megfelelő számhármas.

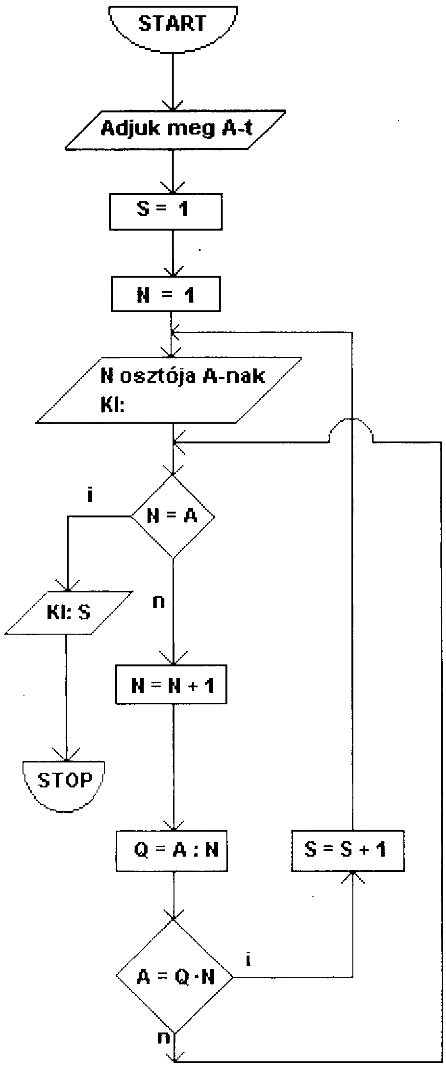
6. példa

— A következő probléma megoldására többféle eljárást (algoritmust) is tanítunk. Az alábbi folyamatábrát azért is érdemes megmutatni a tanulóknak, mert erre a megoldásra nem szoktak gondolni. Másrészt gyakoroltathatjuk vele a folyamatábra „olvasását" is.

Feladat: Keressük meg egy A pozitív egész szám összes pozitív osztóját! Számoljuk is meg az osztókat!

1. Gondolj egy számot!	2	1	0	-1	-2	. . . x
2. Adj hozzá 5-öt!	2+5=7	1+5=6	0+5=5	-1+5=4	-2+5=3	x+5
3. Az összeget szorozd meg 2-vel!	7·2=14	6·2=12	5·2=10	4·2=8	3·2=6	(x+5)·2
4. Vonj ki az eredményből 8-cat!	14-8=6	12-8=4	10-8=2	8-8=0	6-8=-2	(x+5)·2-8
5. A kapott számot oszd el 2-vel!	6:2=3	4:2=2	2:2=1	0:2=0	-2:2=1	$\frac{(x+5)\cdot 2-8}{2}$
6. Vond ki az eredményből a gondolt számot!	3-2=1	2-1=1	1-0=1	0-(-1)=1	-1-(-2)=1	$\frac{(x+5)\cdot 2-8}{2} \cdot x$
7. Ha 1-et kaptál eredményül, akkor menj a 9.-re!	i	i	i	i	i	$\frac{(x+5)\cdot 2-8}{2} \cdot x = 1$
8. Ha nem 1-et kaptál eredményül, akkor hibáztál, vedd újra a gondolt számot és menj a 2.-ra!						
9. Vége: jól számoltál, menj az 1-re!						

6. ábra



A	S	N	Q	KI: osztók
6	1	1		1
	2	2	3	2
	3	3	2	3
	4	4	1	
		5	1	
		6	1	6
3	1	1		1
	2	2	1	
		3	1	3

.
.
.

7. ábra

— Segítséget ad az algoritmus elemzéséhez a fenti táblázatos módszer, melyben felírjuk a „változók" neveit, és lépésről lépésre haladva követjük az értékváltozásokat.

— Vetessük észre a tanulókkal, hogy a szám négyzetgyökéig (az osztó négyzete nem nagyobb az A számnál) minden osztót megtalálunk. „Finomítsuk" ennek figyelembe vételével a folyamatábrát!

— Adjunk meg másféle algoritmust a probléma megoldására! Írjuk le az algoritmus lépéseit (szöveggel)!

Irodalom

[1] Matematika: 5., 6. (tankönyvek), *Calibra Kiadó*, Budapest, 1993.

[2] Matematika: 7., 8. (tankönyvek), *Tankönyvkiadó*, Budapest, (1990)., (1991).

[3] L. N. LANDA: Algortimizálás az oktatásban, *Tankönyvkiadó*, Budapest, (1969).

[4] TŐRŐK: Matematika és számítástechnika, *A Matematika Tanítása*, (melléklet)

Motiváció a matematikaórákon

OROSZ GYULÁNÉ

Abstract. (Motivation at the mathematics lessons) The students of the Department of Mathematics study methodology. Our main purpose is to make our students teach mathematics the help of the given methods and make their lessons more interesting.

So, we show some models for students in our seminars. This paper is about motivation at the mathematics lessons.

The structure of this paper is as follows: Introduction, General thoughts about motivation. The Opinions of the pupils, mathematics examples. We divide into groups the motivations of the mathematics lessons.

A motivációval kapcsolatban **Pólya György** írja, hogy a matematikatanárnak jó kereskedőnek kell lennie, el kell tudni adnia a „portékáját" a vevőnek, azaz a tanulónak.

Ezért az alapfokú matematikai ismeretek tanítását már egészen kicsi korban el kell kezdeni. Ugyanakkor nyilvánvaló, hogy az önálló gondolkodást, öntevékenységet, találékonyságot egyetlen tanuló fejébe sem lehet „beletölteni".

Eredményt akkor remélhetünk, ha már a kezdeti lépéseket olyan problémákhoz kapcsolódva tesszük meg, amelyek gyermekközeliek, ugyanakkor szellemesek és érdekesek.

A matematika tanulása sikeresebb, ha a tanulókban kialakul az érdeklődés, a problémák megoldásának, az ismeretek megszerzésének vágya, az erőfeszítés képessége.

Éppen ezért fontos a tanulói motiváció kialakítása, megerősítése, tervszerű fejlesztése.

A motiváció értelmezéséről

A **motiváció** szó latin eredetű, amelynek a jelentése: cselekvés ösztönzői, kiváltói. A **motívum** szó pedig indítóokot, erkölcsi indítékot jelent. Különböző szakkönyvek a motivációt más-más értelemben használják.

A **didaktikában** pl. a motiváció, mint alapelv szerepel.

A **matematika tantervben** a metodikai jellegű fejlesztési feladatok egyike a motiváció.

A legjobb motiváltság elve a **matematikatanítás tudományos alapelvei** között található.

A pszichológiában a motivumot, ill. motivációt gyűjtőfogalomként értelmezik, amely „...minden belső, cselekvésre, viselkedésre késztető tényezőt magába foglal". (1)

A motiváció **pedagógiai pszichológiai** elméletének átfogó elemzésével **Kozéki Béla** munkáiban találkozhatunk.

Nézete szerint: A motiváció, mint aktív tevékenység folyamatában kialakuló, sajátos hierarchiában működő, tevékenységre késztető belső feszültség, amelynek lényeges szerepe van minden emberi tevékenységben. A tapasztalatok hatására fejlődik, formálódik, mindig aktivizáló jelenség. A külső hatások belsővé válásának energetikai alapja.

Az ember, meghatározott célja elérésekor oldódó feszültségként éli át. A fejlődés és nevelés kölcsönhatásában sajátos formában realizálódik.

A **motívum** különböző viselkedésformák beindítására és fenntartására irányuló energia, amelyet valamilyen külső vagy belső hatás aktivizál. Az egyes hatások bizonyos motívumokat tesznek **dominánssá.**

A motiválás területei:

1. **Affektív: (érzelmi terület):** Pozitív érzelmi viszony, azonosulás a tanárokhoz, társakhoz, szülőkhöz, vagy inkább hideg, elutasító, szembefordulásra késztető.
2. **Kognitív: (értelmi ösztönzés, tapasztalatszerzés):** Nyílt, aktivitásra, önálló ismeretszerzésre ösztönző, vagy zárt, korlátozó.
3. **Effektív: (morális terület):** Ezen a területen lehet erős, akaratra, felelősségvállalásra ösztönző, vagy gyenge önkontrollt nem fejlesztő, engedékenységgel, bizalmatlansággal a felelősségvállalás alóli kihívásra késztető.

A tanítási óra motiválási lehetőségei

Igényes, színvonalas tervező munkával a pedagógus megfelelő motiváló tanítási eljárást alakíthat ki, mely ösztönzően hat a tanulók belső indítékaira.

A tanulás alapfeltétele egy megfelelő motivációs bázis biztosítása.

A tanulók számára a legfontosabb motiváló tényező a tanítás megfelelő minősége, amiből az eredményes tanulás is következik. Nem elegendőek a tanítási órákon alkalmanként beiktatott motiváló mozzanatok, hanem folyamatosan a motivációk sokasága szükséges.

Réthy Endréné kutatásaiban a tanulási motiváció hatásösszefüggéseit vizsgálja. Kísérlettel igazolja, hogy a tanulási motiváció szituációkban történő tudatos fejlesztése pozitív hatást gyakorol a tanulók órai munkájára, érdeklődésére, kitartására a feladatmegoldásban és a tanulmányi teljesítményére is. A gyakorló tanárok motiváló tevékenységét vizsgálva szükségesnek tartja a tanulási motiváció hatékonyabb fejlesztését. Az általa kidolgozott modell ismérvei:

A tanulási motivációt fokozó hatások:

1. A tanuláshoz szükséges megfelelő előfeltételek:
— a tanulók kedvező kedélyállapotának létrehozása,
— a tanulási célok tisztázása,
— problémahelyzet alkalmazása: a célkitűzésnél hasznos a különböző újdonságtartalmú problémaszituáció.

2. Az oktatási folyamat motiváló modelljeinek céloktól függő differenciált alkalmazása:
— munkaformák helyes aránya.

3. A differenciálás és egyéni bánásmód érvényesítése.

4. A tanulók tanulási tevékenységének tudatos formálása:
— a tanulás tanítása,
— önképzési módok,
— önellenőrzés, önállóság fejlesztése.

5. Megfelelő didaktikai anyagok és eszközök biztosítása az adagolt diszkrepancia elvének érvényesítésével:
— differenciált nehézségű feladatok szükségessége,
— a feladatok optimális újdonságtartalma.

6. Szociális, affektív és kognitív kapcsolatösszefüggések figyelembevétele:
— az óra légköre,
— a bizalom erősítése,
— a túlzott követelmények és a türelmetlenség elkerülése.

7. Normára irányított értékelés, ösztönzés:
— az optimális értékelés nagyobb számban tartalmaz dicséretet, mint figyelmeztetést,
— a bírálat konstruktív legyen, jelölje ki a javítás útját.

Az irodalomjegyzékben felsorolt szakkönyvek tanulmányozása lehetővé teszi a motiváció hatásösszefügéseinek mélyebb megértését. Dolgozatunkban nem foglalkozunk részletesen ezek elemzésével. A továbbiakban a matematika tantárgy sajátosságaiból adódó motiváló tényezők főbb területeit ismertetjük konkrét példákhoz kapcsolva.

Általános iskolai tanulók véleményei

Az 1991—92-es tanévben Eger gyakorlóiskoláiban kérdőíves vizsgálatot végeztünk, amely többek között arra irányult, hogy feltárjuk a tanulók matematika iránti érdeklődését.

Úgy véljük hasznos lehet néhány gyakran előforduló tanulói vélemény megismerése és összehasonlítása a motiváló tényezőkkel:

— „... Akkor dolgozom szívesen a matematikaórán, ha jó a hangulat és látom a tanáron, hogy szívesen tanítja az anyagot, érthetően magyaráz, hogy én is megértsem...”

— „Érdekes feladatok vannak az órán. Tréfásak és nem könnyűek, de nem is nehezek...”

— „Új dolgokról tanulunk, változatos feladatokat oldunk meg és van versenyfeladat is...”

— „Sok játékos feladat van, nem nehéz a megoldás, lehet 5-öst, vagy piros pontot szerezni.”

— „Humoros, gondolkodtató feladatok is vannak és sokat dolgozhatunk önállóan.”

— „Szeretem, ha sok gyakorlás van, mert az a vágyam, hogy jobb eredményt érjek el matematikából.
Különösen az érdekes szöveges feladatokat szeretem.”

— „Az a jó, ha egy feladat olyan nehéz, hogy gondolkodni kell rajta, így nagyobb az örömöm, ha jól megoldom.”

Motiváló tényező a matematika órákon

A matematika tanítása kitartó szellemi erőkifejtést igényel, amelynek alapfeltétele a megfelelő motiváció biztosítása.

Ennek érdekében a matematikaoktatás folyamatában óráról-órára célszerű olyan feladatokkal foglalkozni, amelyek magukban hordozzák a figyelem és az érdeklődés felkeltésének lehetőségét.

Azokat a tényezőket, amelyek növelik a matematikaoktatás hatékonyságát, kialakítják a tantárgyhoz fűződő pozitív viszonyt és érdeklődést, motiváló tényezőknek nevezzük.

A matematika tanításának gyakorlati tapasztalatait és a motivációkutatások szakirodalmát felhasználva, a **matematikaórák motiváló tényezőit a következőképpen csoportosíthatjuk:**

I. A tananyag tartalmából adódnak:

— A matematika anyagrészek megértetése, változatos megközelítése.
— Sok tevékenység, manipuláció.
— Egymásra épülő feladatok megoldása.
— A matematika haszna, sokféle alkalmazási lehetősége.
— Gyermekközeli, gyakorlati élethez kapcsolódó példák.
— Megoldatlan problémák ösztönző hatása.
— Többféle megoldás keresése, bemutatása.

Például:

Péter a következő trükkel szórakoztatja barátait: Add meg milyen naptári évet írunk most! Add hozzá magasságod, majd cipőméreted cm-ben mért mérőszámát! A kapott összegnek vedd a 9-szeresét! Add össze a szorzat számjegyeit! Ha többjegyű számot kaptál, annak is add össze a számjegyeit, stb. egészen addig, amíg egyjegyű számot kapsz! Ez az egyjegyű szám a 9. Mivel magyarázod ezt a trükköt?

II. Az alkalmazott módszerek, eszközök, munkaformák motivációs lehetőségei:

— Matematikai játékok.
— Versenyfeladatok, versenytesztek, tudástesztek.
— Matematikai történetek, anekdóták.
— Feladatkártyák, feladatlapok.
— Esztétikus, színes, figyelemfelkeltő szemléltető eszközök.
— Becslés, az eredmény és a becsült érték összehasonlítása.
— Szokatlan, meglepő adatokat tartalmazó feladatok.
— Könyvismertetés, búvárkodás, kiselőadások.
— Logikai fejtörők.
— Szorgalmi feladatok órán, otthon.
— Matematika szakkörök, háziversenyek.
— Rövid, gondolkodtató feladatok.
— Differenciálás, egyéni bánásmód.
— Furfangos, megtévesztő feladatok.
— Folyamatok, folyamatábrák.
— Matematikai rejtvények.
— Tréfás, szórakoztató problémák.
— Nem szokványos írásbeli feladatok (kiegészítés, rajz, nyíl stb.).

Például:

1. A „TÖRPILLA” szó betűinek felhasználásával alkoss szavakat! Keress minél több megoldást!

   ! LALI, TÖR stb. Folytasd!

2. **Matematikai versenyteszt:**

(1) Négy vízijármű mindegyike pontosan 2 km távolságra van a másik három mindegyikétől.
Az egyik egy személyszállító hajó, a másik egy teherhajó, a harmadik egy jégtörő.
Milyen vízijármű a negyedik?
a) repülőgép-anyahajó; b) személyszállító;
c) tengeralattjáró; d) cirkáló.

2) Hány olyan egész szám van, amelyre a 10, 24 és x oldalú háromszög hegyesszögű?
a) 4 b) 5 c) 6 d) több, mint 6

(3) Egy matematikaversenyen Bandi és Dénes együttesen elért pontszáma ugyanannyi, mint Annáé és Károlyé együttvéve. Ha Bandi és Károly pontjait megcseréljük, akkor Anna és Károly összpontja több lenne, mint a másik kettőé. Dénes egymaga több pontot ért el, mint Bandi és Károly együtt. Állapítsuk meg a versenyzők (csökkenő sorrendben) elért végső sorrendjét.

a) Dénes, Anna, Károly, Bandi
b) Dénes, Anna, Bandi, Károly
c) Dénes, Károly, Bandi, Anna
d) Anna, Dénes, Bandi, Károly

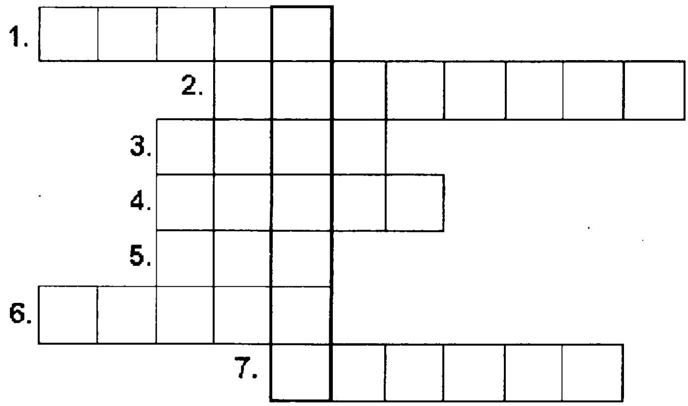
(4) Péter és Tamás azon vitatkoznak, hogy melyik szám a nagyobb 18^{12}, vagy 12^{18}. Szerinted melyik?
a) 18^{12} b) 12^{18} c) egyenlő.

(5) Egy labda a tavon úszott, amikor befagyott a tó. A labdát a jégből eltávolítva a jég feltörése nélkül 24 cm átmérőjű és 8 cm mély lyuk maradt vissza. Mekkora a labda centiméterekben mért sugara?
a) 8 b) 12 c) 13 d) 216

3. **Rejtvények:**

a) Ha a következő rejtvényt megfejted, akkor megtudod a mai óra anyagát.

(1) Ez a szám minden természetes számnak többszöröse.
(2) Két halmaz közötti kapcsolat ábrázolására alkalmas.
(3) Az $1000 : 10 = ?$
(4) Az egység századrészének a neve.
(5) Minden természetes számnak osztója.
(6) Az egység százszorosának a neve.
(7) A szorzás egyik tényezőjének neve (1. ábra)



1. ábra

b) Rajzold meg a papírlapok hiányzó részeit!
Írd be a számokat, amelyek a letépett részen lehettek! (2. ábra)

	16	21	26
		41	
56			
71	76		

125			
141	145		
157	161	165	
173	177	181	185

2. ábra

III. Az értékelés, mint motiváló tényező:

— Sok dicséret, bíztatás (szóban, írásban).
— Sikerélmény biztosítása közel egyénre szabott feladatokkal.
— Jutalmazás 5-össel, piros ponttal.
— Sokoldalú, folyamatos, normára irányított értékelés.
— Szorgalmi feladatok, versenyek értékelése, szakköri munka elismerése.
— Jutalomfeladat az órán, otthon stb.

Például:
Egy feladatlapot úgy értékelünk, hogy a helyes válaszokra 1-1 betűt kapnak a tanulók. A megfejtések lehetnek: MEGTANULTAD, ÜGYES VAGY, GRATULÁLOK, TE MÁR TUDOD stb.

IV. A tanár személyiségtulajdonságai, mint motívumok:

— Türelmes, megértő.
— Nagy tárgyi tudás.
— Következetesség, pedagógiai tapintat.
— Módszertani-pedagógiai kulturáltság.
— Derű, jókedv, humor stb.

Gyakorlati tanítási tapasztalatainkat felhasználva adtuk meg a motiváló tényezők egy lehetséges kategórizálását. Figyelembe vettük a gyakorló tanárok és a tanulók véleményét, valamint a tantárgy sajátosságait.

Irodalom

[1] BARKÓCZY ILONA—PUTNOKY JENŐ: Tanulás és motiváció. *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1967.

[2] JEAN-CLAUDE BAILLIF: Logikai sziporkák. *Gondolat*, Budapest, 1989.

[3] KOSZTOLÁNYI—J. MIKE—J. VINCZE: Érdekes matematikai feladatok. *Mozaik Oktatási Stúdió*, Szeged, 1992.

[4] KOZÉKI BÉLA: A motiválás és motiváció összefüggéseinek pedagógiai-pszichológiai vizsgálata. *Akadémiai Kiadó*, Budapest, 1980.

[5] KOZÉKI BÉLA: Motiválás és motiváció. *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1975.

[6] LILLY GÖRKE—KURT GÜNTER REHM: Séta a matematika birodalmában. *Gondolat*, Budapest, 1971.

[7] LUKÁCS ERNŐNÉ—TARJÁN REZSŐNÉ: Játékos matematika. *Gondolat Kiadó*, Budapest, 1975.

[8] PÒLYA GYÖRGY: Problémamegoldás iskolája II. *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1968.

[9] RICHARD SKEMP: A matematika tanulás pszichológiája. Budapest, 1975.

[10] RÉTHY ENDRÉNÉ: A tanítás—tanulási folyamat motivációs lehetőségeinek elemzése. *Akadémiai Könyvkiadó*, Budapest, 1988.

[11] RÉTHY ENDRÉNÉ: Teljesítményértékelés és tanulási motiváció. *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1989.

[12] RUSZEV—RUSZEVA: Matematikai mozaik. Budapest, 1989.

[13] TAKÁCS GÁBOR—TAKÁCS GÁBORNÉ: A tanulói motiváció erősítése az alapfokú matematika tanításban. *Matematika tanítása*, 1988. 3. szám.

A főiskolai geometria anyag egy lehetséges megalapozása III. rész

SASHALMINÉ KELEMEN ÉVA

Abstract. (One of the possible establishments of the academic geometrical subject. Part. II.) This paper continues the theme that was published in the latest issue of Acta Academiae Paedagogicae Agriensis (Vol. XXI. 199). It contains the marks of the central symmetry and the translation and characterization of the coincidental transformations on plane.

Ez a cikk az előző kötetben megjelent anyag folytatása (Acta Academiae Paedagogicae Agriensis tom. XXI.). Tartalmazza a centrális szimmetria, eltolás tulajdonságait és a síkbeli egybevágósági transzformációk jellemzését.

5.11. Értelmezés. Két merőleges egyenesre történő tükrözések szorzatát az O pontra vonatkozó **centrális szimmetriának** vagy **centrális tükrözésnek** nevezzük, ahol O a két egyenes metszéspontja. Jele: S_0 vagy T_0.

5.13. Következmény.

Tulajdonságok. Legyen $T_0(A) = A'$ és $A \neq O$.

1. Az 5.15 tétel alapján az A, OA' ponthármas kollineáris, s O az $[A, A']$ felezési pontja.

2. Az O pontra illeszkedő egyenesek invariánsak, s az O ponton kívül a leképezésnek nincs más fixpontja.

3. A centrális tükrözést egy megfelelő pontpár vagy a centrum egyértelműen meghatározza.

Ha az A, A' pontpár adott, az $[A, A']$ felezési pontja az O. Ha az O adott, tetszőleges P pont képe egyértelműen meghatározható az $\overline{O, P}$ egyenesen.

4. Az O pontra vonatkozó szimmetria minden egyenest vele egyállású egyenesbe visz át.

Ha $O \in e$, akkor e invariáns.

Ha $O \notin e$, akkor legyen O e-re való merőleges vetülete T. Az 5.10. következmény alapján az e és $\overline{O, T}$ merőleges egynesek e' és $\overline{O, T'}$ képe is merőleges lesz. Mivel T, O, T' kollineáris, az 5.10. tétel alapján $e \parallel e'$.

5. $T_0 \circ T_0 = I$. A centrális tükrözés involutórikus leképezés.

Az 5.15. tétel és a tengelyes tükrözés tulajdonságai miatt: Ha $T_0 = T_b \circ T_a$, akkor $T_0 \circ T_0 = T_b \circ T_a \circ T_b \circ T_a = T_a \circ T_b \circ T_b \circ T_a = T_a \circ I \circ T_a = T_a \circ T_a = I$.

5.12. Értelmezés. Egy geometriai alakzatot **középpontosan** vagy **centrálisan szimmetrikus**nak nevezünk, ha van olyan pont, amelyre tükrözve az alakzat önmagába megy át.

6. Szakasz, szög

6.11. Értelmezés. Két geometriai alakzatot **egybevágó**nak nevezünk,ha létezik olyan egybevágóság, amely egyiket a másikba viszi át. Jele: $\cong$

6.1. Tétel. Az alakzatok egybevágósága ekvivalenciareláció.

BIZONYÍTÁS.

1. Reflexív — $H \cong H$. Az identitás az az egybevágóság amely a H alkazat minden pontját fixen hagyva teljesíti az előző értelmezés feltételét.

2. Szimmetrikus — Ha a H_1 akazatot az F egybevágóság viszi át H_2-be, akkor a 4.9. következmény alapján az F inverze H_2-t H_1-be képezi le. Így ha $H_1 \cong H_2$, akkor $H_2 \cong H_1$.

3. Tranzitív — ha az F_1 egybevágóság H_1-t H_2-be, az F_2 a H_2-t a H_3-ba viszi át, akkor ismét a 4.9 következményre hivatkozva, az $F_2 \circ F_1$ a H_1-t a H_3-ba viszi át. Így ha $H_1 \cong H_2$ és $H_2 \cong H_3$ akkor $H_1 \cong H_3$.

Megjegyzés. A 3. fejezetben definiált szakaszra is érvényes az előző tétel, mert a 4.5 következmény alapján az egybevágóság szakaszt szakaszba viszi át. A továbbiakban a távolságfogalom és a valós számok tulajdonságainak felhasználásával néhány, szakaszokra vonatkozó összefüggést vizsgálunk meg.

6.2. Értelmezés. Az $[A, B]$ hosszán a $d(A, B)$-t értjük.

6.3. Értelmezés. Két szakasz közül azt mondjuk **nagyobb**nak, illetve **kisebb**nek, amelyikhez hosszként nagyobb, illetve kisebb szám tartozik.

6.1. Következmény.

1. Egybevágó szakaszok hossza egyenlő.

2. Két szakaszra az $=, >, <$ relációk közül egyszerre csak az egyik teljesülhet.

3. Ha egy szakaszt belső pontokkal véges sok szakaszra osztunk, akkor a szakaszok hosszának összege az eredeti szakasz hosszát adja.

A X. axióma alapján $d(A,B) = d(A_1,A_2) + d(A_2,A_n) = d(A_1,A_2) + d(A_2,A_3) + d(A_3,A_n) = d(A_1,A_2) + d(A_2,A_3) + \cdots + d(A_{n-1},A_n)$, ahol $A = A_1$, $B = A_n$, $A_2 \cdots A_{n-1}$ az $[A,B]$ belső pontjai.

4. Ha egy $[A,B]$-nak valódi részhalmaza egy $[C,D]$, akkor az $[A,B]$ hossza nagyobb a $[C,D]$ hosszánál.

5. Ha egy $[A,B]$-t az A,B félegyenesre n-szer egymás után felmérünk, és a C pontot kapjuk, akkor az $[A,C]$ hossza egyenlő az $[A,B]$ hosszának n-szeresével. (A felmérés a X. axióma alapján azt jelenti, hogy az A,B félegyenesen megjelöljük a $d(A,B)$ távolságú pontokat.)

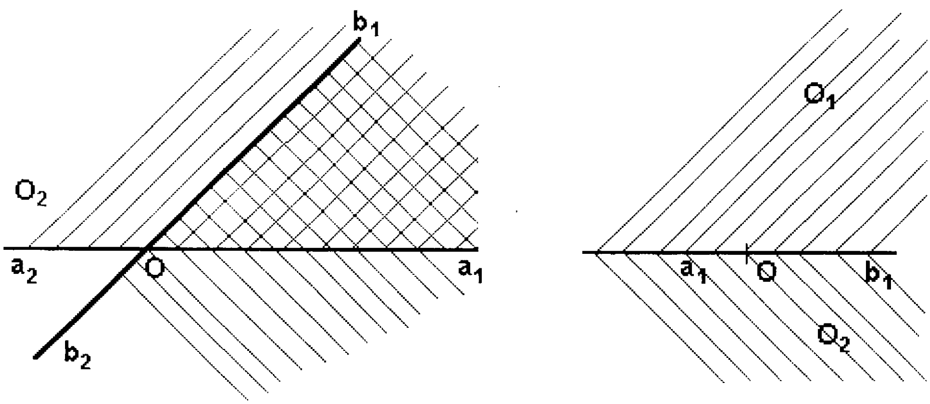
6.4. Értelmezés. Ha egy szakasz határpontjainak egyikét kezdő, másikat végpontnak nevezzük, irányított szakaszról beszélünk.

6.5. Értelmezés. Ha A,B az e irányított egyenes két tetszőleges pontja, a kitüntetett pontja pedig O, akkor az $[A,B]$ **irányított szakasz hosszának** nevezzük és $\underline{AB}$-vel jelöljük a következő számot:

$$\underline{AB} = f(B) - f(A).$$

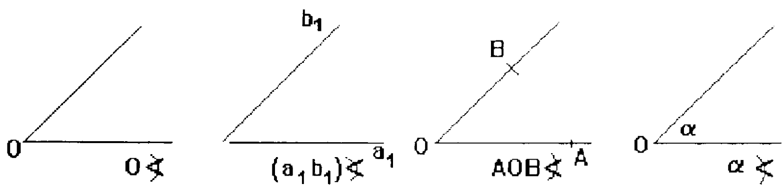
Megjegyzés. $\underline{AB} = \underline{OB} - \underline{OA}$, s ez az érték $d(A,B)$-vel, vagy $-d(A,B)$-vel egyenlő, attól függően, hogy $A \leq B$ vagy $B \leq A$, így nem függ az O választásától. Ha az egyenesen levő rendezést a vele ellentétes rendezésre cseréljük, az előjel megváltozik. Ha O-t rögzítjük, $\underline{AB} = a - b$, ahol a és b az A,B pontok abszcisszáját jelenti.

6.6. Értelmezés. Tekintsük az α síkbeli közös O kezdőpontú, különböző a_1, b_1 félegyeneseket, s legyen az a_1-t tartalmazó egyenes a, a b_1-t tartalmazó b. Ha $a \neq b$, akkor jelölje az a által meghatározott b_1-t tartalmazó nyílt félsík és a b által meghatározott a_1-t tartalmazó nyílt félsík metszetét O_1, s legyen $\alpha \setminus \{O_1 \cup a_1 \cup b_1\} = O_2$. Ha $a = b$, akkor O_1 és O_2 jelölje az így adódó egyenes által meghatározott két nyílt félsíkot. (7. ábra) Az O_1 és O_2 ponthalmazokat az a_1 és b_1 félegyenesekkel együtt **szögeknek (szögtartományoknak)** nevezzük. Az a_1 és b_1 félegyenesek a **szög szárai**, O a **szög csúcsa**, $a_1 \cup b_1$-**szögvonal**.



7. ábra

Megjegyzés. Az értelmezés alapján egy szögvonalhoz két szög tartozik, s ezek közül az egyik, az O_1-t tartalmazó, konvex alakzat. A továbbiakban, ha olyan szög szárait adjuk meg, amelyek nem alkotnak egy egyenest, és nem utalunk a szögtartományra, akkor a konvex alkazatot tekintjük adottnak.
Jelölések.



8. ábra

6.7. Értelmezés. ha $a_1 = b_1$, akkor az O_1 üres halmaz, az így keletkezett szög a **nullszög**. Az O_2 ekkor — az a_1, b_1 kivételével — a sík pontjai az a_1, b_1-el együtt: **teljesszög.**

6.2. Következmény. Az egybevágóság szöget szögbe visz át. (Félsíkot félsíkba, félegyenest félegyenesbe visz át, s mivel a szög az értelmezés alapján ezek közös része, a szög képe is szög lesz.)

6.8. Értelmezés. Azt a szöget, amelynek két szára nem esik egybe, de egy egyenest alkot, **egyenesszögnek**, amelynek szárai merőlegesek, **derékszögnek** nevezzük.

X.* **axióma.** Minden szöghöz hozzárendelhető egy nem negatív valós szám, amelyet a szög mértékszámának nevezünk. Ha a szögegység a fok, akkor a nullszöghöz a 0, az egyenesszöghöz 180 számot rendeljük. Adott, 0 és 180 közé eső mértékszám esetén bármely O kezdőpontú a_1 félegyeneshez a kijelölt nyílt félsíkban egy és csak egy olyan O kezdőpontú b_1 félegyenes található, hogy az $(a_1 b_1)\sphericalangle$ mértékszáma az adott mértékszám. Egybevágó szögek mértékszáma egyenlő. Bármely szöget a csúcsából kiinduló, szögtartományban haladó félegyenes két olyan szögre bont, amelyek mértékszámának összege az eredeti szög mértékszámával egyenlő.

Megjegyzés.

1. A szög mértékét megfogalmazó axióma állításai a X. axióma alapján, eléggé hosszadalmasan, igazolhatók.

2. Van rögzített szögegység, a fok. Jele: $^\circ$

3. Az egybevágóság szöget vele egyenlő mértékű szögbe visz át, ezt röviden úgy fejezzük ki, hogy szögtartó leképezés.

4. A továbbiakban egybevágó szakaszok és szögek helyett egyenlőket is mondhatunk.

6.9. Értelmezés. Két szög közül azt tekintjük **nagyobb**nak, illetve **kisebb**nek, amelyikhez nagyobb, illetve kisebb mértékszám tartozik.

6.3. Következmény.

1. Két szögre az $=, >, <$, relációk közül egyszerre csak az egyik teljesül.

2. Ha két szög csúcsa közös, és az egyik tartalmazza a másikat, de nem egyenlő vele, akkor a tartalmazó szög a nagyobb.

3. Ha egy szöget a szög csúcsából kiinduló félegyenesekkel véges sok részre osztunk, akkor a részek mértékszámának összege az eredeti szög mértékszámával egyenlő.

Mindhárom állítás a valós számok tulajdonságainak és a X.* axiómának a segítségével, egyszerűen belátható.

6.4. Következmény. A derékszög mértékszáma 90°, a teljesszögé 360°.

Megjegyzés. A teljesszög 360-ad részének is tekinthetjük a szögegységet, a fokot. Az 1°60-ad része az 1 perc (1'), ennek a 60-ad része az 1 másodperc (1").

Ha az egyenesszöghöz a π valós számot rendeljük, akkor a szögmérés egysége a radián, de ennek bevezetésére ebben a felépítésben a kör tárgyalása után kerül sor.

6.10. Értelmezés.

Hegyesszög — a nullszögtől különböző, a derékszögnél kisebb szög.

Pótszögek — olyan két szög, melyek mértékszámának összege a derékszög mértékszámával egyenlő.

Kiegészítő szögek — két olyan szög, melyek mértékszámának összege az egyenesszög mértékével egyenlő.

Tompaszög — azon szög, melynek kiegészítő szöge hegyesszög.

Mellékszögek — két olyan szög melyeknek egyik szára egybeesik, a másik pedig ugyanannak az egyenesnek két különböző félegyenese. (Együtt egy egyenesszöget alkotnak — kiegészítő szögek.)

Konvex szög — mértékszáma az egyenesszög mértékszámánál nem nagyobb.

Konkáv szög — a nem egyenes konvex szög száraihoz tartozó másik szög. (Mértéke az egyenesszög és teljesszög mértéke között van.)

Csúcsszögek — olyan két szög, melyeknek szárai két metszőegyenes különböző félegyenesei.

6.11. Értelmezés. Félegyeneseket egyező irányúaknak nevezünk, ha párhuzamosak, és a kezdőpontjaikra illeszkedő egyenes által meghatározott ugyanazon félsíkban vannak, vagy egy egyenesre illeszkednek és az egyik tartalmazza a másikat.

Két félegyenest ellentétes irányúaknak nevezünk, ha párhuzamosak és a kezdőpontjaikra illeszkedő egyenes által meghatározott különböző félsíkokban vannak, vagy egy egyenesre illeszkednek és egyik sem tartalmazza a másikat.

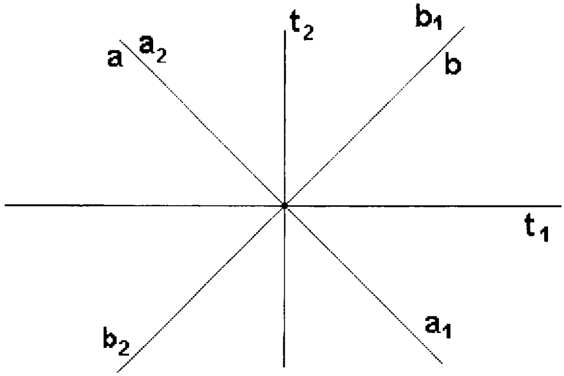
Ha két konvex szög szárai páronként egyirányúak, akkor azokat **egyállású szögek**nek nevezzük. **Váltószögek**en olyan konvex szögpárokat értünk amelyeknek szárai páronként ellentétes irányúak. **Társszögek**en olyan konvex szögpárokat értünk, amelyeknél az egyik pár szár egyező, a másik pár ellentétes irányú.

6.12. Értelmezés. A szöget meghatározó félegyenespárhoz tartozó szimmetriatengelyt a **szög felező**jének nevezzük.

6.5. Következmény. Minden szögnek pontosan egy szögfelezője van.

6.2. Tétel. A csúcsszögek egyenlők.

BIZONYÍTÁS. A 9. ábra jelöléseit használva, az a, b egyenespárhoz az 5.12 tétel alapján két szimmetriatengely tartozik, t_1 és t_2.



9. ábra

$(a_1b_1)\sphericalangle = (b_2a_2)\sphericalangle$, mert a T_{t_2} a_1-t b_2-be, b_1-t a_2-be viszi át, s a két megfelelő félsík közös részét is a képek közös részébe viszi át. Hasonlóan belátható, hogy a másik csúcsszögpár, az $(a_2b_1)\sphericalangle, (b_2a_1)\sphericalangle$ is egybevágó, így mértékük egyenlő.

Megjegyzés. Két metsző egyenes négy konvex szöget határoz meg, s ezek közül 2-2 egyenlő (csúcsszögek).

Mivel $t_1 \perp t_2$, a centrális szimmetria értelmezése alapján a csúcsszögek a csúcspontra nézve tükrösek.

6.13. Értelmezés. Két metsző egyenes szögén a metszéspont által meghatározott félegyenesekhez tartozó nem tompaszöget értjük.

6.6. Következmény. A sík azon pontjainak mértani helye, amelyek a sík két metsző egyenesétől egyenlő távolságra vannak, az egyenesek szögfelezői.

A szögfelező értelmezése és az 5.13 tétel alapján igaz az állítás.

7. Eltolás, forgás

7.1. Értelmezés. Két egyállású egyenesre történő tükrözés szorzatát **eltolásnak** nevezzük. Jele: E. $E = (T_{t_2} \circ T_{t_1})$ (t_1 és t_2 a két egyállású egyenes).

7.1. Következmény. Az értelmezésből közvetlenül adódó tulajdonságok:

1. Kölcsönösen egyértelmű leképezés. Egybevágóság.

2. Ha a két tengely egybeesik, akkor az eltolás identitás. Létezik inverze: $E^{-1} = T_{t_1} \circ T_{t_2}$.

3. Rendezéstartó, szakasz- és szögtartó transzformáció.

4. Legyen $t_1 \parallel t_2$, és $T_{t_1}(A) = A"$, $T_{t_2}(A") = A'$, ekkor az $A, A", A'$ pontok kollineárisak.

$\overline{A, A"}$ merőleges t_1-re, s ez 5.10 tétel miatt merőleges t_2-re is. $\overline{A", A'}$ merőleges t_2-re, s mivel $A"$-ből t_2-re csak egy merőleges állítható, ez egybeesik $\overline{A, A"}$-vel, s így $A, A", A'$ kollineáris.

5. A tengelyekre merőleges egyenesek invariánsak, s az ezen egyenesek által meghatározott félsíkok is invariánsak.

Legyen A, A' az előző pontban definiált pontpár. Az $\overline{A, A'}$ határegyenesű valamely félsíkban levő P pont P' képe az $\overline{A, A'}$-vel párhuzamos egyenesen van (az 5.10. tétel alapján), s így nem metszi a határegyenest; P' is P-vel azonos félsíkban van.

7.1. Tétel. Legyen az A pont képet a t_1, t_2 párhuzamos egyenesekre történő tükrözések szorzatánál A'. Az $\overline{A, A'}$ egyenes kitüntetett pontja legyen O. Ha $T_1 = \overline{A, A'} \cap t_1$, $T_2 = \overline{A, A'} \cap t_2$, x az A pont abszcisszája, és $2d(T_1, T_2) = \mid a \mid$, akkor az $(\overline{A, A'}, O)$ rendszerben az $x \mapsto x + a$ leképezés azonos a t_1, t_2 tengelyek által meghatározott eltolással.

BIZONYÍTÁS. Az $A", A', T_1, T_2$ pontok abszcisszái legyenek rendre $x"$, x', y_1, y_2. A T_1 az $[A, A"]$ felezési pontja, ezért a 6.5. értelmezés utáni megjegyzés alapján $y_1 - x = x" - y_1$, s ugyanígy $y_2 - x" = x' - y_2$. Átrendezve: $x" = 2y_1 - x$, $x' = 2y_2 - x" = 2y_2 - 2y_1 + x = 2(y_2 - y_1) + x$. Az $(\overline{A, A'}O)$ rendszerben az $x \mapsto 2(y_2 - y_1) + x$ hozzárendelés a tétel állításának megfelelő eltolás, mivel $\mid y_2 - y_1 \mid = d(T_1, T_2)$.

7.2. Következmény.

1. Ha a tükrözések sorrendjét felcseréljük, akkor az a előjele megváltozik. $x' = 2(y_1 - y_2) + x$.

2. Ha az $\overline{A, A'}$ egy rendezésében $T_1 < T_2$, akkor $A < A'$, de ha $T_2 < T_1$, akkor $A' < A$.

Ha ugyanis $T_1 < T_2$, akkor $x' = x + a = x + 2d(T_1, T_2)$, mert $y_2 - y_1 > 0$, s így A is megelőzi A'-t. (Ha $T_1 < T_2$, az O helyzetétől függetlenül az $y_2 - y_1$ mindig pozitív.)

Ha $T_1 > T_2$, akkor $x' = x + a = x - 2d(T_1, T_2)$, mert $y_2 - y_1 < 0$.

7.3. Következmény. Az előző tétel jelöléseit megtartva; egy A pontra és az $E = T_{t_2} \circ T_{t_1}$ eltolással kapott A' képére teljesül, hogy $\overline{A, A'}$ merőleges a tengelyekre, $d(A, A') = 2d(T_1, T_2)$, s ha $T_1 < T_2$, akkor $A < A'$.

7.4. Következmény. A tetszőleges A pontot A'-be $(A \neq A')$ vivő eltolás végtelen sok olyan párhuzamos egyenespárra történő tükrözéssel megvalósítható, melyek merőlegesek $\overline{A, A'}$-re, és ha az $\overline{A, A'}$-vel való metszéspontjuk T_1, T_2, akkor $2d(T_1, T_2) = d(A, A')$; ha $A < A'$, akkor $T_1 < T_2$, ha $A > A'$, akkor $T_1 > T_2$ is teljesül.

Az előző következményből adódik az állítás.

7.5. Következmény.

1. Az eltolásnak, ha nem azonosság, nincs fixpontja. Ha $E \neq I$, akkor $t_1 \neq t_2$, s így $d(T_1, T_2) \neq 0$. Ha lenne egy P fixpont, akkor $d(P, P') = 0 = 2d(T_1, T_2)$ — ez utóbbi viszont nem egyenlő nullával.

2. Az eltolás invariáns egyenesei párhuzamosak, s a tengelyekre merőleges egyeneseken kívül nincs más invariáns egyenese az eltolásnak.

A 7.1. következmény utolsó pontja alapján a tengelyekre merőleges egyenesek invariánsak, s egymással párhuzamosak. Ha létezne olyan invariáns egyenes, mely nem merőleges a tengelyekre, akkor ennek egy tetszőleges P pontjából a tengelyekre állított merőleges is invariáns egyenese lenne az eltolásnak. Mivel két invariáns egyenes metszéspontja fixpont, így P az eltolás fixpontja lenne, ami a következmény első része miatt lehetetlen.

7.6. Következmény. Tetszőleges e egyenes és eltolással kapott e' képe egyállású egyenespár.

Ha e merőleges a tengelyekre, akkor $e = e'$. Ha e nem merőleges a tengelyekre, akkor $e \parallel e'$. A második eset bizonyítása indirekt.

Tegyük fel, hogy létezik $e \cap e' = P$. Mivel $P \in e$, így $P' \in e'$. Az előző következmény miatt $P \neq P' (E \neq I)$. Ekkor viszont $\overline{P, P'} = e' = e$, ami azt jelenti, hogy e invariáns, így merőleges a tengelyekre, ami ellentmond a feltételnek.

7.2. Értelmezés. Ha egy eltolásnál A képe A', akkor a $\delta(A, A')$ irányt és az $A \leq A'$ rendezést az **eltolás irányának** a $d(A, A')$-t az **eltolás nagyságának** nevezzük.

7.7. Következmény. Az eltolást egy megfelelő pontpár egyértelműen meghatározza.

7.8. Következmény. Minden egyes eltoláshoz egyenlő hosszúságú, irányított szakaszok tartoznak. Az eltolás a sík irányított szakaszain osztályozást létesít: egy ekvivalenciaosztályba tartoznak az adott eltoláshoz tartozó szakaszok.

7.3. Értelmezés. Egy adott eltoláshoz tartozó irányított szakaszok ekvivalenciaosztályát **szabad vektornak** nevezzük. Jele: $\overrightarrow{AB}$, ahol A a vektor egy reprezentánsának kezdőpontja, B a végpontja. Az indentitást jellemző vektor, azaz amelynél $A = B$, a **nullvektor**.

7.9. Következmény. Minden ekvivalenciaosztályt reprezentáló vektor meghatároz egy eltolást.

7.2. Tétel. Két centrális szimmetria szorzata eltolás, és bármely eltolás előállítható két centrális szimmetria szorzataként.

BIZONYÍTÁS.

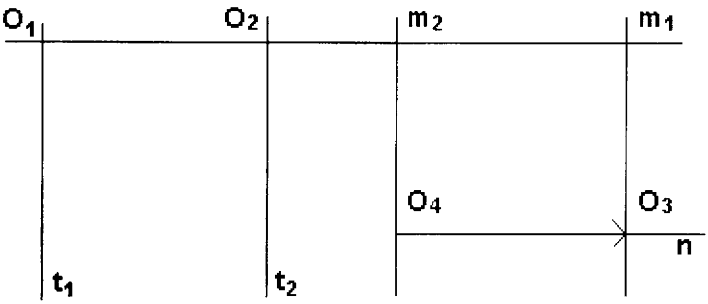
1. Az 5.15 tételből következik, hogy az O centrumu szimmetriát bármely olyan merőleges egyenespár, melynek metszéspontja O, egyértelműen meghatározza. Így az O_1, O_2 centrumu szimmetriáknál is tekinthetünk olyan tengelypárokat, melyeknek egyike a két centrumra illeszkedő egyenes, a másik pedig az erre merőleges, az egyes centrumokra illeszkedő egyenes. A tengelyek így $\overline{O_1, O_2} = e$ és $t_1(O_1 \in t_1)$, valamint $t_2(O_2 \in t_2)$ $T_{O2} \circ T_{O1} = (T_{t_1} \circ T_e) \circ (T_e \circ T_{t_2}) = T_{t_1} \circ T_e \circ T_e \circ T_{t_2} = T_{t_1} \circ T_{t_2} = E$.

2. Legyen $T_{t_1} \circ T_{t_2} = E$, $a \perp t_1$, valamint $a \cap t_1 = O_1$ és $a \cap t_2 = O_2$. $E = T_{t_2} \circ T_{t_1} = T_{t_2} \circ T_a \circ T_a \circ T_{t_1} = T_{O2} \circ T_{O1}$.

7.3. Tétel. Három különböző centrális tükrözés szorzata mindig helyettesíthető egyetlen centrális tükrözéssel.

BIZONYÍTÁS. Legyen a három centrum O_1, O_2, O_3. Az előző tétel szerint $T_{O2} \circ T_{O1} = E$, valamint $E = T_{t_2} \circ T_{t_1} = T_{m_2} \circ T_{m_1}$ (10. ábra), ahol t_2 és t_1 az O_2 és O_1-re illeszkedő, O_1, O_2-re merőleges egyenespár. m_1 az O_3-ra illeszkedő O_1, O_2-re állított merőleges, n az m_1-re O_3-ban állított merőleges. Az O_4 legyen az n egyenesnek olyan pontja, melyre $\underline{O_1O_2} = \underline{O_4O_3}$ O_4-ben az O_1, O_2-re merőleges egyenes legyen m_2.

Az előző tétel bizonyítása alapján $T_{m_2} \circ T_{m_1} = T_{0_3} \circ T_{0_4}$, azaz $T_{0_2} \circ T_{0_1} = T_{0_3} \circ T_{0_4}$. Szorozzunk balról T_{0_3}-mal $T_{0_3} \circ T_{0_2} \circ T_{0_1} = T_{0_3} \circ T_{0_3} \circ T_{0_4} = T_{0_4}$.



10. ábra

7.10. Következmény. Két eltolás szorzata mindig egyetlen eltolás.

$$E_2 \circ E_1 = T_{0_4} \circ T_{0_3} \circ T_{0_2} \circ T_{0_1} = T_{0_5} \circ T_{0_1} = E_3$$

7.11. Következmény. Véges számú eltolások szorzata egyetlen eltolással helyettesíthető.

7.12. Következmény. Háromnál több centrális tükrözés szorzata páros szám esetén eltolásra, páratlan szám esetén centrális tükrözésre vezethető vissza.

Ha páratlan számú centrális szimmetria szerepel, akkor előállítható $E \circ T_{0k}$ alakban, azaz felírható, hogy $T_{0i} \circ T_{0j} \circ T_{0k} = T_{0l}$.

7.13. Következmény. Három centrális tükrözés szorzatánál a tényezők sorrendje felcserélhető. $T_{0_3} \circ T_{0_2} \circ T_{0_1} = T_{0_4}$ — négyzetre emelve

$$(T_{0_3} \circ T_{0_2} \circ T_{0_1})^2 = (T_{0_4})^2 = I$$

— mivel a leképezés négyzete identitás, a 2.3. tétel alapján megegyezik az inverzével, azaz

$$T_{0_3} \circ T_{0_2} \circ T_{0_1} = T_{0_1} \circ T_{0_2} \circ T_{0_3}.$$

7.4. Értelmezés. Ha a t_1 és t_2 tengelyek egy O pontban metszik egymást, akkor az $F = T_{t_2} \circ T_{t_1}$ tükrözések szorzatát **O pont körüli forgásnak** vagy **forgatásnak** nevezzük.

7.14. Következmény. Az értelmezésből adódó tulajdonságok:

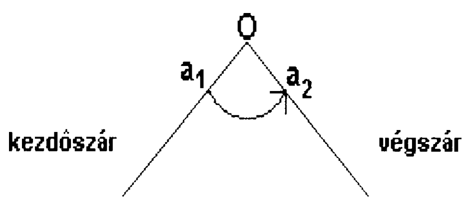
1. Kölcsönösen egyértelmű leképezés, egybevágóság.

2. Megengedve $t_1 = t_2$-t, a forgás azonosság. Az F inverze az $F^{-1} = T_{t_1} \circ T_{t_2}$

3. A $t_1 \cap t_2 = O$ fixpont. Ha A képe A', akkor $d(O, A) = d(O, A')$.

4. Rendezéstartó, szakasz és szögtartó transzformáció.

7.5. Értelmezés. Ha egy szög szárainak a sorrendjét megadjuk, **irányított szögről** beszélünk. Jelölése:



11. ábra

Az irányított szög mértéke előjeles mennyiség, általában ha az ábrázolás során a kezdő és végszár sorrendje az óramutató járásával ellentétes irányú, akkor pozitív, ha megegyező, akkor negatív a szög mértéke. Két irányított szög mértéke akkor egyenlő, ha előjeles mértékük egyenlő. Ha n irányított szög ($n \geq 2$) összege abszolút értékben nagyobb mint $360°$, akkor ez az összeg reprezentálható egy megfelelő irányú, $360°$-nál kisebb szöggel.

Ha adott egy teljesszögnél kisebb irányított szög, akkor az reprezentálja az összes $\alpha = \alpha_1 + k360°$ szöget is, ahol α_1 a tekintett szög előjeles mértéke, s $k \in Z$. Ebben az esetben α_1-t szokás **forgásszögnek** is nevezni.

7.4. Tétel. Ha az O pont körüli forgás az O-ból kiinduló tetszőleges a_1 félegyenest az a_1' félegyenesbe viszi át, akkor, irányított szögeket tekintve, $(a_1 a_1')\sphericalangle = 2(t_1 t_2 \sphericalangle)$.

BIZONYÍTÁS. A szög nagyságára vonatkozó állítás bizonyításánál két lehetséges esetet vizsgálunk meg, (12.a. ábra) a gondolatmenet más esetekben is hasonló.

A tükrözés szögtartó, így $(a_1 t_1)\sphericalangle = (t_1 a_1'')\sphericalangle$ és $(a_1'' t_2)\sphericalangle = (t_2 a_1')\sphericalangle$. $(a_1 a_1')\sphericalangle = (a_1 t_1)\sphericalangle + (t_1 a_1'' \sphericalangle \pm (a_1'' t_2)\sphericalangle \pm (t_2 a_1')\sphericalangle$. $(t_1 a_1'' \sphericalangle \pm (a_1'' t_2)\sphericalangle = (t_1 t_2)\sphericalangle$. Az első egyenlőségsorozatot felhasználva: $(t_1 t_2)\sphericalangle = (a_1 t_1)\sphericalangle \pm (t_2 a_1')\sphericalangle$, így $(a_1 a_1')\sphericalangle = 2(t_1 t_2)\sphericalangle$.

Az irányra vonatkozó állítás igazolásánál tegyük fel, hogy $(t_1 t_2)\sphericalangle < 90°$, s az iránya negatív. (12. b, c ábra)

1. Az a_1 félegyenest a t_1, t_2 egyenesek által meghatározott hegyesszögtartomány tartalmazza. (12.b ábra) t_1, t_2 jelölje az a_1-t tartalmazó szög szárait, t_1', t_2' a tengelyek O kezdőpontú másik félegyeneseit, az a_1 egyenesének O kezdőpontú kiegészítő félegyenesét $\overline{a_1}$. Legyen: $T_{t_1}(t_2) = t_2^*, T_{t_1}(a_1) = a_1''$.

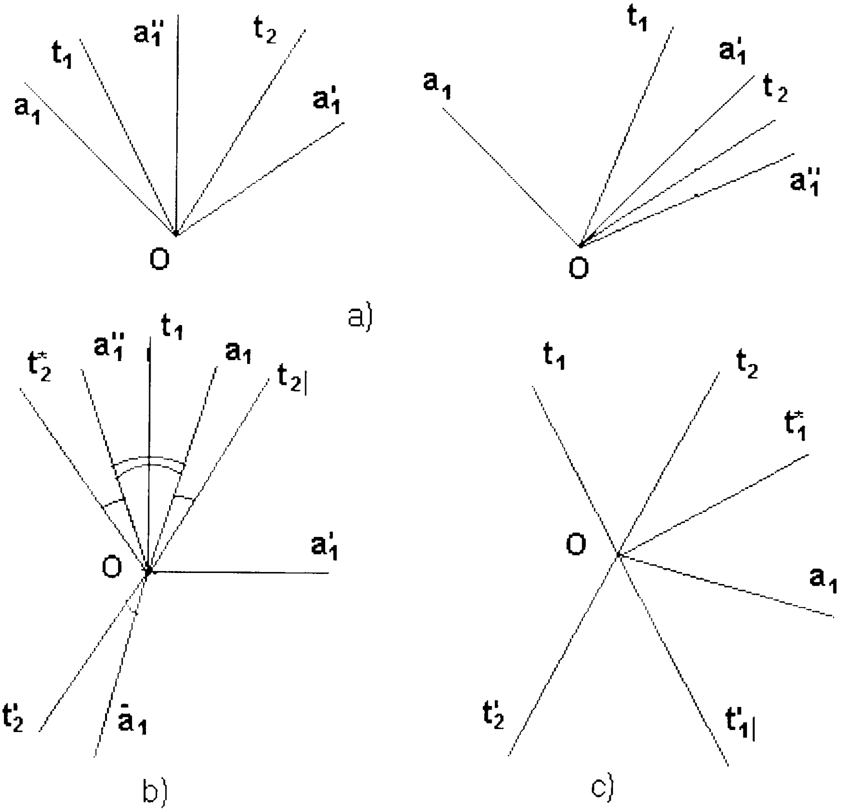
A tükrözés és a csúcsszögek egyenlősége miatt $(a_1 t_2)\sphericalangle = (t_2^* a_1'')\sphericalangle = (t_2' \overline{a_1})\sphericalangle$. $(t_2^* t_2)\sphericalangle = 2(t_1 t_2)\sphericalangle$ és ez kisebb mint 180°. $(a_1'' t_2')\sphericalangle > (a_1'' t_2^*)\sphericalangle$, azaz $(a_1'' t_2')\sphericalangle > (t_2' \overline{a_1})\sphericalangle$.

Az a_1''-nek a t_2 egyenesére való tükörképe, az a_1', a t_2 egyenese által meghatározott másik félsíkban van, mint a t_2^*, s az a_1'', a_1' azon szögtartományára, mely tartalmazza a t_2' félegyenest, teljesül, hogy $(a_1'' a_1')\sphericalangle = 2(a_1'' t_2')\sphericalangle = 2(a_1'' t_2^*)\sphericalangle + 2(t_2^* t_2')\sphericalangle$. $(a_1'' \overline{a_1})\sphericalangle = 2(a_1'' t_2^*) + (t_2^* t_2')\sphericalangle$, ez az összeg viszont kisebb mint az $(a_1'' a_1')\sphericalangle$, s így az a_1' az a egyenes ugyanazon félsíkjában van mint a t_2. Így az $(a_1 a_1')\sphericalangle$ iránya is negatív.

2. Az a_1 félegyenest a t_1, t_2 egyenesek által meghatározott tompaszögtartomány tartalmazza. (12.c ábra)

Legyen $T_{t_2}(t_1) = t_1^*$. a_1 vagy a t_2, t_1^* félegyenesek, vagy a t_1^*, t_1' félegyenesek szögtartományában van. (A t_1, t_2' félegyenesek által bezárt tompaszögtartomány esetén a gondolatmenet hasonló lehet.) Mindkét szög iránya megegyezik a $(t_1 t_2)\sphericalangle$ irányával. Az 1.-ben leírtak alapján viszont az $(a_1 a_1')\sphericalangle$ iránya azonos a $(t_2 t_1^*$, illetve a $t_1^* t_1')$ hegyesszögek irányával.

3. Ha $t_1 \perp t_2$, akkor az $(a_1 a_1')$ egyenesszög tartománya az a félsík, amely a tengelyeket tartalmazza, s ekkor az irányítás szintén egyenlő.



12. ábra

7.6. Értelmezés. Forgásnál a tengelyek szögének a kétszeresét a **forgás mértékének**, a tengelyek forgásszögének irányát a **forgás irányának** nevezzük.

Megjegyzés. A bizonyítás során nem használtuk ki a tengelyek helyzetét. A $(t_1t_2)\sphericalangle$ nem tompaszög, így $2(t_1t_2)\sphericalangle \leq 180°$. Az a_1 átvihető az a_1'-be $360° - 2(t_1t_2)$ szögű és ellentétes irányú forgással is. Forgásszögként egyenesszögnél nagyobb szög is megadható, de ez mindig helyettesíthető az azt $360°$-ra kiegészítő szögű és ellentétes irányú forgással. Gyakran hasznos, ha az elforgatás szöge alatt mindazokat az irányított szögeket értjük amelyeknek kezdőszára a_1, végszára a_1', tehát az $(a_1a_1')\sphericalangle + k360°$-t $(k \in Z)$. Az elforgatás szöge eszerint egy szöghalmaz, amelyet tetszőleges elemével reprezentálhatunk.

7.15. Következmény. Minden $F = T_{t_2} \circ T_{t_1}$ forgáshoz és $2(t_1t_2)\sphericalangle$-höz végtelen sok O-ra illeszkedő egyenespár tartozik, amelyekre történő tükrözéssorozat az F forgást eredményezi.

7.16. Következmény. A forgásnak, ha nem azonosság, csak egy fixpontja van, invariáns egyenese pedig csak akkor van, ha vagy azonosság, vagy a két tengely merőleges egymásra.

Ha A fixpont lenne, $(A \neq O)$ akkor az $(AOA')\sphericalangle = 0$, de $2(t_1 t_2)\sphericalangle \neq 0$, s ez ellentmond a 7.4. tételnek.

Ha nincs fixpont, pontonként fix egyenes sincs.

Invariáns egyenes az azonosságnál és a $t_1 \perp t_2$ esetben létezik. Ha egy ezektől különböző forgásnak az $\overline{A, A'}$ invariáns egyenese lenne, akkor mivel $O \notin \overline{A, A'}$ és $d(O, A) = d(O, A')$, az $(AOA')\sphericalangle$ felezőjére tükrözve A képe A', így a szögfelező az $[A, A']$ felezőmerőlegese. Így az invariáns egyenes bármely pontpárja szimmetrikus lenne a felezőmerőlegesre, s ekkor annak $\overline{A, A'}$-vel való metszéspontja fixpont lenne.

7.17. Következmény. A forgást a fixpont, az elforgatás szöge és iránya egyértelműen meghatározza.

7.18. Következmény. A középpontos tükrözés speciális forgás, a forgás szöge 180°.

8. A sík egybevágósági leképezései

Ebben a fejezetben azt vizsgáljuk meg, hogy a sík egybevágósági leképezései hogyan állíthatók elő tengelyes szimmetriák szorzataként. Be fogjuk bizonyítani, hogy minden — egy α síkot önmagára leképező — egybevágóság vagy azonosság, vagy egy, vagy két, vagy három tengelyes szimmetria szorzata.

8.1. Tétel. Az α síkot önmagára leképező olyan F egybevágóság, amelynek van legalább három nem kollineáris fixpontja, azonosság.

BIZONYÍTÁS. Legyenek A_1, A_2, A_3 fixpontok, s tegyük fel, hogy $F \neq I$, azaz létezik olyan P pont, hogy $F(P) \neq P'$. F egybevágóság, így $d(P, A_1) = d(F(P), A_1)$, ami azt jelenti, hogy A_1 illeszkedik a $[P, F(P)]$ felezőmerőlegesére. Ez az A_2, A_3 pontokra is igaz, így A_1, A_2, A_3 kollineárisak, ami ellentmond a feltételnek.

8.2. Tétel. Minden olyan F egybevágóság, amely az α síkot önmagára képezi le és van legalább két különböző A_1, A_2 fixpontja, vagy azonosság, vagy $\overline{A_1, A_2}$ tenelyű tengelyes szimmetria.

BIZONYÍTÁS. Ha $F \neq I$, akkor van olyan $P \in \alpha$, hogy $F(P) \neq P$. Az előző tétel bizonyítása alapján A_1 és A_2 illeszkedik a $[P, F(P)]$ szakaszfelező merőlegesére, s így A_1, A_2, P nem kollineárisak. Legyen T_f az f szakaszfelező merőlegesre történő tükrözés. A $T_f \circ F$ leképezésnek A_1, A_2, P fixpontja, így a 8.1. tétel alapján $T_f \circ F = I$. Balról T_f-el megszorzorzva az előbbi egyenlőséget;

$$T_f \circ T_f \circ F = T_f \circ I, \quad \text{ebből} \quad F = T_f.$$

8.3. Tétel. Minden olyan az α síkot önmagára leképező egybevágóság, amelynek van legalább egy A fixpontja, vagy azonosság, vagy olyan tengelyes szimmetria, melynek tengelye tartalmazza A-t, vagy két, A-t tartalmazó tengelyű tengelyes szimmetria szorzata.

BIZONYÍTÁS. Ha $F \neq I$, akkor létezik olyan $Q \in \alpha$, hogy $F(Q) \neq Q$. Az előzőek alapján az $[F(Q), Q]$ m szakaszfelező merőlegese tartalmazza A-t. A és Q a $T_m \circ F$ leképezés különböző fixpontjai, így vagy $T_m \circ F = I$, amiből T_m-el balról szorozva $T_m \circ T_m \circ F = T_m \circ I$ innen $F = T_m$, vagy $T_m \circ F = T_f$, ahol $f = \overline{Q, A}$. T_m-el balról szorozva $T_m \circ T_m \circ F = T_m \circ T_f$, s így $F = T_m \circ T_f$.

8.4. Tétel. Minden olyan F egybevágóság, amely az α-t önmagára képezi le, legfeljebb három tengelyes szimmetria szorzataként áll elő.

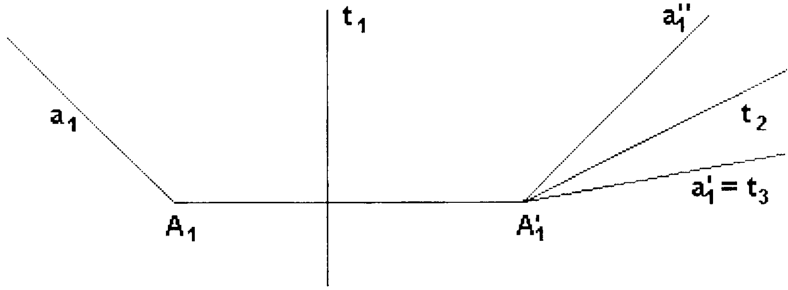
BIZONYÍTÁS. Ha $F \neq I$, akkor létezik $R \in \alpha$, hogy $R \neq F(R)$. Legyen g az $[R, F(R)]$ felező merőlegese. R a $T_g \circ F$ leképezés fixpontja. Az előző tétel alapján (a jelöléseket megtartva):
vagy $T_g \circ F = I$ ahonnan $F = T_g$,
vagy $T_g \circ F = T_m$ amelyből $F = T_g \circ T_m$,
vagy $T_g \circ F = T_m \circ T_f$ miből $F = T_g \circ T_m \circ T_f$,
(Mindhárom esetben balról szoroztunk T_g-vel, s így adódtak F-re az egyenlőségek.)

Megjegyzés. A sík önmagára történő egybevágósági leképezései: a tengelyes szimmetria; két tengelyre történő tükrözés szorzataként az identitás, az eltolás és forgás; valamint három tengelyes szimmetria szorzata.

A továbbiakban a bizonyítások során többször hivatkozunk majd a következő tételre.

8.5. Tétel. Létezik tengelyes tükrözéseknek olyan sorozata, amely egy adott kezdőpontú adott félegyenest, valamint ennek egyenese által meghatározott adott félsíkot egy adott kezdőpontú adott félegyenesbe és ezen utóbbi egyenese által meghatározott adott félsíkba visz át.

BIZONYÍTÁS. Az előzőek alapján ez maximum három tükrözéssel megvalósítható. (13. ábra)



13. ábra

A $T_{t_2} \circ T_{t_1}$, illetve ha szükséges, még a t_3-ra való tükrözés a kívánt leképezés.

8.1. Következmény. Ha két tükrözéssorrozat az α sík adott α_1 félsíkját és annak határán adott félegyenest az α sík egy adott α_2 félsíkjába és annak határán adott félegyenesbe visz át, akkor a két leképezés egyenlő.

A szakasz- és szögtartást fölhasználva az állítás egyszerűen igazolható.

8.6. Tétel. Három különböző egyenesre történő tengelyes tükrözés szorzata mindig helyettesíthető egy egyenesre történő tükrözés és egy eltolás szorzatával.

BIZONYÍTÁS. A három egyenes felvételének lehetőségei alapján a következő eseteket vizsgáljuk.

a.) $t_1 \parallel t_2 \parallel t_3$. Ekkor $T_{t3} \circ T_{t_2} \circ T_{t_1} = E \circ T_t$. (14. a ábra)

b.) $t_1 \cap t_2 \cap t_3 = O$. Ekkor a $T_{t_2} \circ T_{t_1}$ forgás helyettesíthető a $T_{t3} \circ T_{t4}$ forgással, ahol $O \in t_4$ és $(t_4 t_3)\sphericalangle = (t_1 t_2)\sphericalangle$, valamint a forgásszögek iránya is megegyezik. Így

$$T_{t3} \circ T_{t_2} \circ T_{t_1} = T_{t_3} \circ T_{t_3} \circ T_{t_4} = I \circ T_{t_3}$$

Itt az eltolás az indentitás. (14. b ábra)

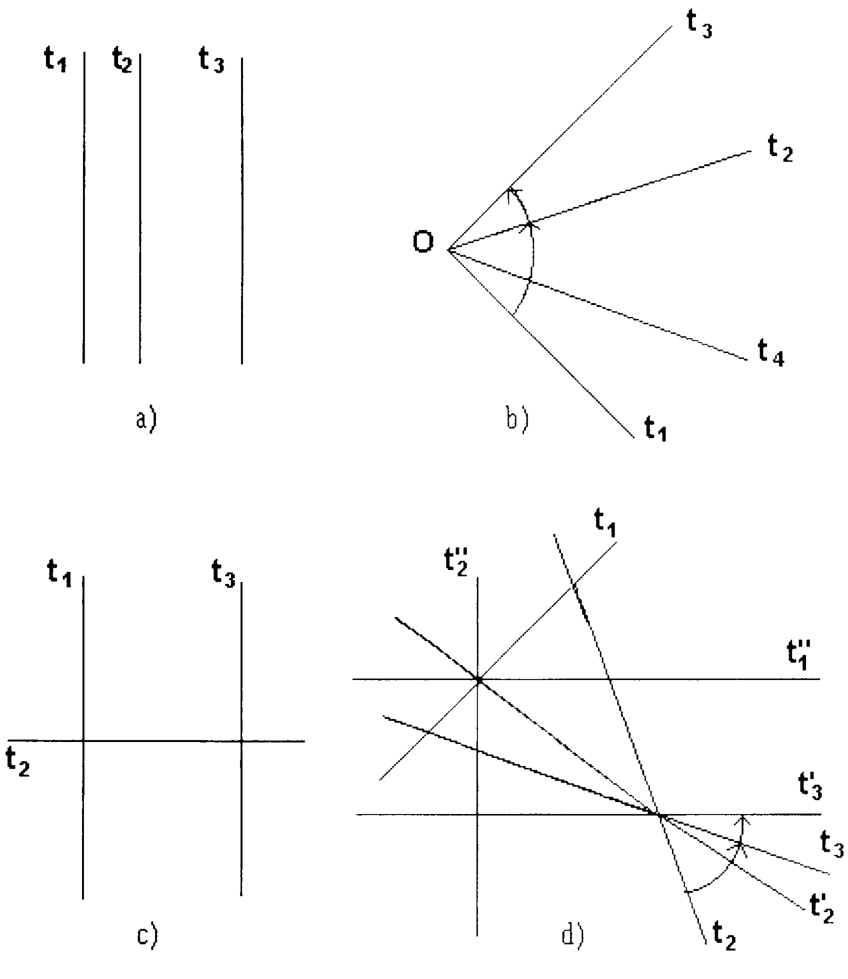
c.) $t_1 \perp t_2$ és $t_1 \parallel t_3$. Ekkor $T_{t3} \circ T_{t_2} \circ T_{t_1} = T_{t3} \circ T_{t_1} \circ T_{t_2} = E \circ T_{t_2}$ (14. c ábra)

d.) A három egyenes páronként metszi egymást. Megfelelő tengelyek választásával a c) esetre vezetjük vissza. (14. d ábra)

A t_2, t_3 tengelyekhez tartozó forgás helyettesíthető a t_2', t_3' tengelyekre vonatkozó forgással, ahol $t_2' \perp t_1$ és a forgásszögeik egyenlők. A $t_1 \perp t_2'$ tengelyekre történő tükrözés pedig megvalósítható a $t_1" \perp t_2"$ tengelyekre történő tükrözéssel, ahol még $t_2" \perp t_3'$ is teljesül. Így:

$$T_{t3} \circ T_{t_2} \circ T_{t_1} == T_{t_3'} \circ T_{t_2'} \circ T_{t_1} = T_{t_3'} \circ T_{t_2"} \circ T_{t_1"}$$

s ez a c) esetnek felel meg.



14. ábra

Megjegyzés. A 7.4. következmény alkalmazásával igazolható, hogy az a) eset egy tengelyes tükrözéssel helyettesíthető, így jogos a következő értelmezés.

8.1. Értelmezés. Az egy egyenesre történő tükrözés és egy eltolás szorzatából előálló transzformációt **csúsztatva tükrözésnek** vagy **csúszó szimmetriának** nevezzük, ahol a tengely és az eltolás iránya egyállásúak.

Irodalom

[1] G. Choquet, Geometria, Mir (Moszkva), 1970.

[2] Dr. Hajòs György, Bevezetés a geometriába, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1966.

[3] Dr. Pelle Bèla, Geometria, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1974.

[4] Radò Ferenc—Orbán Bèla, A geometria mai szemmel, *Dacia Könyvkiadó*, Kolozsvár, 1981.

[5] Dr. Redlinh Elemèr, Geometriai transzformációk, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1980.

[6] Dr. Szendrei János, Algebra és számelmélet, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1974.

[7] Vigassy Lajos, Egybevágósági transzformációk a síkban és a térben, *Tankönyvkiadó*, Budapest, 1979.

Geometriai transzformációk az általános iskolában

DR. PELLE BÉLA

RESŬMEE: „Geometrische Transformationen in der Schule, Teil 3." Seit einiger Zeit verstarken sich die Versuche, den geometrischen Unterricht in den Prozeß der Umgestaltung und Modernisierung des mathematischen Unterrichts dadurch einzubeziehen, daß den eindeutigen (geometrischen) Abbildungen der Ebene auf sich, den Transformationen, der ihnen gebührende zentrale Platz eingeraumt wird. Dem Vorschlag liegt ein axiomensystem zugrunde, das aus dem Hilbertschen durch gewisse Änderungen entsteht. Die Hilbertschen Kongruenzaxiome werden durch solche der Spiegelung ersetzt, durch Zusammensetzung von Spiegelungen die Bewegungen (Kongruenztransformationen) gewonnen. Mit diesen Transformationen untersucht man die Eigenschaften von Figuren der Ebene. Diese Verhandlung muß in der Grundschule gegründet werden. Der propädeutische Unterricht erarbeitet wessentliche Inhalte der Hilbertschen Axiomengruppen der Verknüpfung, Anordnung, Parallelitat sowie Sachverhalte der Kungruenzlehre (gleichlange Strecken, gleichgroße Winkel, Spiegelungen an Geraden).

Im Teil 1—2. habe ich über die Lehrstoffe der Klassen 1—6. der Grundschule geschrieben. Im Teil 3. fasse ich die Lehrstoffe der Klassen 7. zusammen.

Általános megjegyzés:

A geometria tárgyalásánál a sík ponthalmazához olyan transzformációkat rendelünk, amelyek a síkot önmagára képezik le. Az alakzatokat a sík ponthalmazának részhalmazaként fogjuk fel. Az alakzatok tulajdonságait a sík ponthalmazához rendelt transzformációk segítségével állítjuk össze. A tárgyalás során tehát először megismerjük az egyes transzformációkat, ezek alkalmazását feladatokon gyakoroljuk, majd az alakzatok tulajdonságait a transzformációk segítségével megvizsgáljuk.

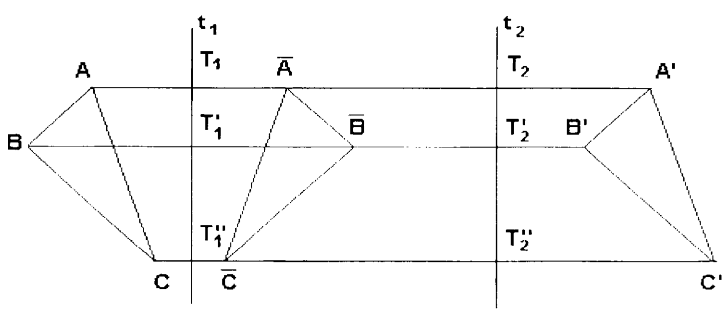
Geometriai transzformációk a 7. osztályban
Eltolás és forgás a síkon

6. osztályban megtanultuk az egy tengelyre történő tükrözést. 7. osztályban ezt folytatjuk. Két tengelyre fogunk egymásután tükrözni. A két tengely kölcsönös helyzete párhuzamos és metsző lehet. Tehát két párhuzamos és két metsző tengelyre történő tükrözéssekkel fogunk megismerkedni.

6. osztályban az alakzatok egyes tulajdonságait a tükrözés segítségével állapítottuk meg. A tulajdonságok megállapításánál gyakran mérőeszközöket (körző, vonalzó) használtunk. Ezek azonban nem mindig pontosak. A geomatriában az alakzatok tulajdonságait **bizonyítással** szoktuk megállapítani. Ez egyszerűen azt jelenti, hogy egy új tulajdonságra már ismert tulajdonságok teljesüléséből következtettünk. Ezek után új tulajdonságok felfedezéséhez úgy jutunk el, hogy megmutatjuk, bizonyos tulajdonságok együttes teljesüléséből új tulajdonság jön létre.

Az eltolás a síkon

Tükrözzünk az ABC háromszöget a t_1 tengelyre, majd a t_2 tengelyre!



1. ábra

Vizsgáljuk az eredeti ABC háromszöget és a kétszeri tükrözéssel kapott $A'B'C'$ háromszöget!

1. **Az ABC eredeti háromszög és az $A'B'C'$ képháromszög körüljárása megegyezik.**
   Indokoljuk meg! A t_1 tengelyre történő tükrözés az ABC háromszög körüljárását ellenkezőjére változtatja a t_2-re történő tükrözés az $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ képháromszög körüljárását ismét ellenkezőjére változtatja, tehát ABC és $A'B'C'$ háromszögek körüljárása megegyezik.

2. **A megfelelő pontokat összekötő szakaszok egyenlők és párhuzamosak.**
   Ellenőrizzük méréssel!
   A tükrözés tulajdonságainak felhasználásával igazoljuk az állításunkat!

$$AT_1 = T_1\overline{A}, \quad \overline{A}T_2 = T_2A'; \quad \text{tehát} \quad AA' = 2T_1\overline{A} + 2\overline{A}T_2 = 2T_1T_2$$

$$BT_1' = T_1'\overline{B}, \quad \overline{B}T_2' = T_2'B'; \quad \text{tehát} \quad BB' = 2T_1'T_2'$$

$$CT_1'' = T_1''\overline{C}, \quad \overline{C}T_2'' = T_2''C'; \quad \text{tehát} \quad CC' = 2T_1''T_2''$$

Így: $AA' = BB' = CC'$ **és a tengelyek távolságának kétszeresei.**

továbbá AA' merőleges a t_1 és a t_2 tengelyekre, BB' és CC' szintén merőleges mindkét tengelyre. Így AA', BB', CC' szakaszok párhuzamosak.

3. **A megfelelő szakaszok egyenlők és párhuzamosak**
Ellenőrizzük méréssel és igazoljuk az állítást!
A tengelyes tükrözés tulajdonságai alapján:

$$AB = \overline{A}\,\overline{B} \quad \text{és} \quad \overline{A}\,\overline{B} = A'B', \quad \text{így} \quad AB = A'B'.$$

$$BC = \overline{B}\,\overline{C} \quad \text{és} \quad \overline{B}\,\overline{C} = B'C', \quad \text{így} \quad BC = B'C'.$$

$$AC = \overline{A}\,\overline{C} \quad \text{és} \quad \overline{A}\,\overline{C} = A'C', \quad \text{így} \quad AC = A'C'.$$

A párhuzamosság belátása: Ha az AB szakasz bármely pontját tükrözöm t_1-re és t_2-re egymás után az eredeti és képpont távolsága a 2. tulajdonság alapján egyenlő lesz $AA' = BB' = CC'$-vel. Tehát AB és $A'B'$ bármely pontja egyenlő távolságra van egymástól, vagyis $AB \parallel A'B'$. Hasonlóan látható be, hogy $BC \parallel B'C'$ és $AC \parallel A'C'$.

4. **A képegyenesek és az eredeti egyenesek párhuzamosak.**
Ez az állítás a 2. tulajdonságból következik. Ugyanis, ha megfelelő szakaszok párhuzamosak, akkor a szakaszok egyenesei is párhuzamosak.

5. **Az eredeti háromszög és a képháromszög fedésbe hozható, tehát egybevágó**
A tengelyes tükrözésekből ugyanis következik, hogy:

$$ABC\Delta \equiv \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\Delta \text{ és } \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\Delta \equiv A'B'C'\Delta \text{ így } ABC\Delta \equiv A'B'C'\Delta.$$

6. **Az eredeti és a képháromszög szögei egyenlők.**
A 4. tulajdonság alapján a két háromszög fedésbe hozható, így a megfelelő szögek fedik egymást, tehát egyenlők.

Hasonlítsuk össze az egy tengelyre történő tükrözéssel kapott tulajdonságokkal! A két tengelyre történő egymásutáni tükrözésnél vannak olyan tulajdonságok, amelyek nincsenek meg az egy tengelyre történő tükrözénél. Pl.:

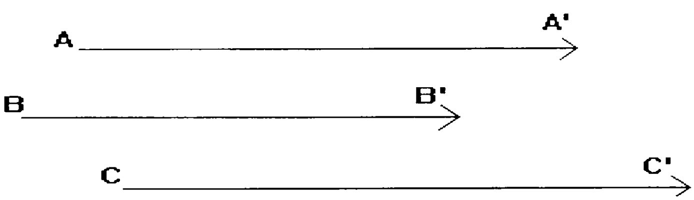
— A két háromszög körüljárása két tengely esetén megegyező, egy tengely esetén ellentétes.

— Az eredeti és képpontok távolsága két tengelyre történő egymásutáni tükrözésnél egyenlők, egy tengelyre történő tükrözésnél nem egyenlők.

A két tengelyre történő egymásutáni tükrözést tehát nem nevezhetjük tengelyes tükrözésnek. Az új névhez a 2. tulajdonság kiemelése vezet el. Két tengelyre történő tükrözésnél az eredeti és a képpontok távolságai egyenlők és párhuzamosak. Tehát az ABC háromszögből az $A'B'C'$ háromszöget úgy is megkapjuk, hogy az ABC háromszög minden pontját a tengelyek távolságának kétszeresével a tengelyre merőleges irányban eltoljuk. **A két párhuzamos tengelyre történő egymásutáni tükrözés eredményét eltolásnak** nevezzük. Az eltolást tehát az eddigi tulajdonságok alapján megadhatjuk:

a) két párhuzamos tengellyel, vagy
b) az eredeti és képpont irányított távolságával.

Az eredeti pontból a képpontba húzott szakaszt elláthatjuk nyíllal és **eltolási nyílnak** vagy **vektornak** nevezhetjük. Az előző ábrából látható, hogy adott eltolásnál az AA', BB', CC' eltolási nyílak egyenlők párhuzamosak és egyirányúak.



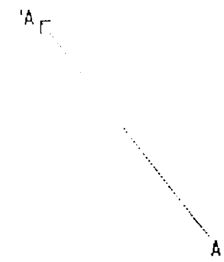
2. ábra

Akkor ezek közül elegendő egyet megadni, és egy eltolási nyíl (vektor) az eltolást ugyanúgy meghatározza, mint két párhuzamos tengelyre történő egymásutáni tükrözés.

Az eltolás megadása vektorral egyszerűbbnek tűnik, mint két párhuzamos tengellyel, ezért általában vektorral adjuk meg az eltolást.

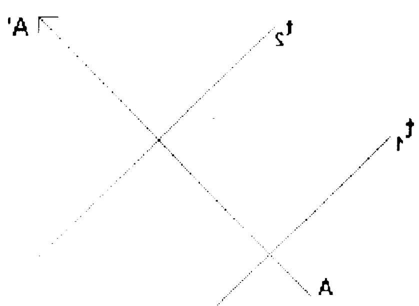
Gyakorlás

1. Adott a síkban egy AA' eltolási nyíl. Szerkesszük meg a sík tetszőleges pontjainak az eltolt képeit!



3. ábra

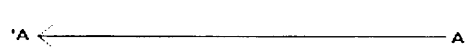
2. Szerkesszük meg az 1-es feladathoz a t_1, t_2 párhuzamos tengelyeket úgy, hogy a sík pontjainak a képei ugyanazok legyenek, mint az AA' nyíllal (vektorral) megadott képei!
Ügyeljünk a következőkre:
— az eltolási nyíl a tengelyek távolságának kétszerese;
— a vektorok merőlegesek a tengelyekre.
A tengelyeket az előírás szerint vegyük fel, bárhol!



4. ábra

Megoldáshoz: t_1 tengelyt AA'-re merőlegesen bárhol felvesszük. Az $\frac{AA'}{2}$ távolságot AA' irányban felmérjük és megrajzoljuk a t_2 tengelyt.

3. Szerkesszük meg adott vektor esetén egy egyenes eltolt képét!



5. ábra

a) Az egyenes párhuzamos a vektorral.
b) Az egyenes merőleges a vektorra.
c) Az egyenes tetszőleges.

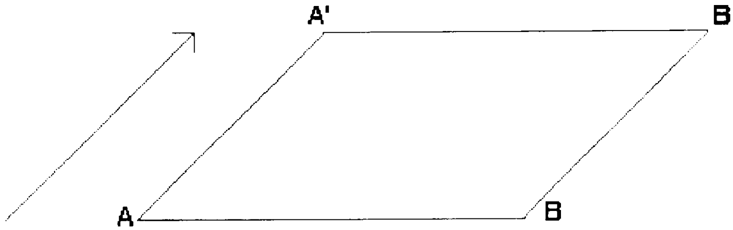
Azt az egyenest, amelynek képe önmaga, **invariáns** egyenesnek nevezzük.

4. Szerkesszük meg adott vektor esetén egy félegyenes eltolt képét!

5. Szerkesszük meg egy kör képét adott vektor esetén!
Megoldáshoz: Elég a kör középpontjának a képét megszerkeszteni, mert az eltolás szakasztartó, a kör sugara nem változik.

Alakzatok tulajdonságainak vizsgálata az eltolás segítségével

1. Szerkesszük meg az AB szakasz képét adott eltolás nyíl esetén!



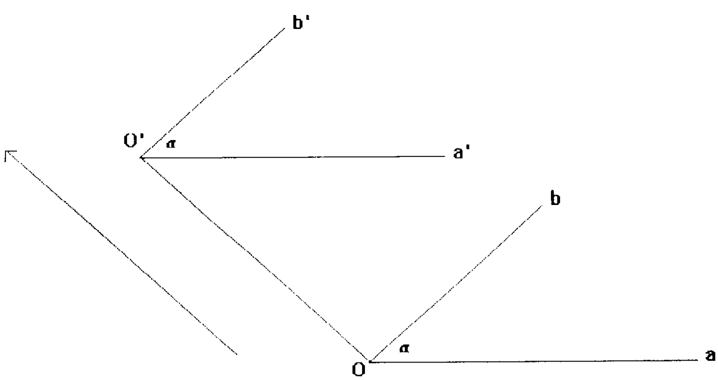
6. ábra

Megoldás: A szakasz végpontjaiból párhuzamosokat húzunk az eltolási nyíllal, és annak hosszát felmérjük a párhuzamosokra. Így kapjuk az A', B' pontokat.

Olyan négyszszöget kaptunk, amelyben AA' párhuzamos BB'-vel és AB párhuzamos $A'B'$-vel. **Azt a négyszöget, amelyben a szemközti oldalak párhuzamosak, paralalogrammának nevezzük.**

Mivel az eltolási nyílak egyenlők, továbbá egy szakasz és eltolással kapott képe egyenlő, a **paralelogramma szemközti oldalai egyenlők**.

2. Szerkesszük meg egy szög eltolással kapott képét adott vektor esetén!

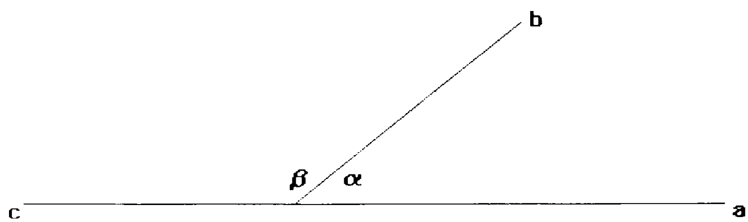


7. ábra

Megoldás: A szög 0 csúcsából párhuzamost húzunk az adott vektorral és ráérjük a vektor hosszát, így kapjuk a szög 0 csúcsának 0′ képét. 0′-ből párhuzamosokat húzunk a szög száraival megegyező irányba. Így kapjuk az α szög α' képet.

Azokat a szögeket, amelyeknek szárai párhuzamosak és egyező irányúak, egyállású szögeknek nevezzük.

Mellékszög: Két szöget, amelyeknek a csúcsuk és egyik száruk közös, és egymást 180°-ra egészítik ki, mellékszögeknek nevezzük.

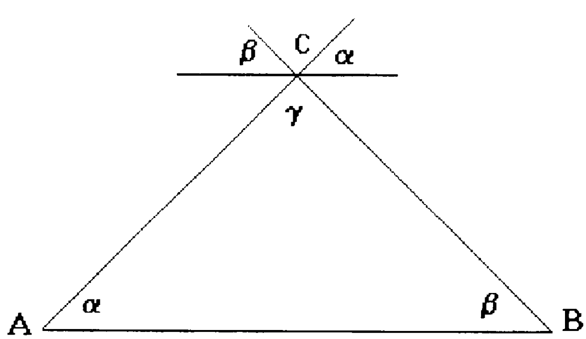


8. ábra

$\alpha + \beta = 180°$, vagyis összegük egyenes szög. Így a és c szárak egy egyenesre illeszkednek.

3. Metszünk el egy párhuzamos egyenespárt egy egeyenessel!
   Az így akpott alakzaton keressünk egyenállású szögeket és mellékszögeket!

4. Keressünk a következő ábrán egyállású és mellékszögeket!



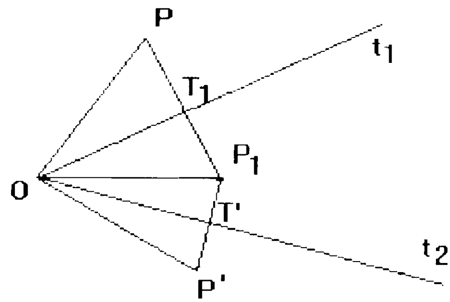
9. ábra

Forgás a síkon

Két egyenes kölcsönös helyzete a síkban párhuzamos vagy metsző. A párhuzamos egyenesekre történő egymásutáni tükrözések eredményét **elto-**

lásnak neveztük. Az eltolás tulajdonságait a tengelyes tükrözés tulajdonságaiból állapítottuk emg. A következőkben két metsző egyenesre történő egymásutáni tükrözéssel foglalkozunk.

Jelöljük a két metsző egyenest t_1-gyel és t_2-vel, metszéspontjukat 0-val. A sík tetszőleges P pontját tükrözzük előbb a t_1 egyenesre, majd a t_2 egyenesre. A tükörképeket jelöljük P_1-gyel és P'-vel, az egyeneseken lévő metszéspontokat T_1-gyel és T'-vel.



10. ábra

A tükrözés tulajdonságai alapján írjuk le a két metszőegyenesre mint tengelyre történő tükrözés tulajdonságait!

— P pont képe P' pont.

— OP szkasz képe t-re történő tükrözéssel OP_1, OP_1 képe t_2-re történő tükrözésnél OP'. Tehát: $OP = OP_1 = OP'$ vagyis $OP = OP'$.

Igy a **két metszőegyenesre** történő egymásutáni tükrözés eredménye **szakasztartó transzformáció.**

— Mivel $OP = OP_1 = OP'$, **a** PP_1P' **az** O **középpontú,** OP **sugarú körön vannak.** A két tengelyre történő egymásutáni tükrözésnél a tetszőleges P pont az O középpontú, OP sugarú körön fordul el t_1t_2 irányában POP' szöggel.

— OPP_1 háromszög egyenlőszárú háromszög és ennek a t_1 egyenes alapfelező merőlegese illetve szögfelezője. Tehát $POT_1\sphericalangle = T_1OP_1\sphericalangle$-gel. OP_1P' háromszög szintén egyenlőszárú háromszög és ennek a t_2 egyenes a szögfelezője. Tehát $P_1OT'\sphericalangle = T'OP'\sphericalangle$.

A szögek összege:

$$POT_1\sphericalangle + T_1OP_1\sphericalangle + P_1OT'\sphericalangle + T'OP'\sphericalangle = 2t_1t_2\sphericalangle.$$

Tehát $POP'\sphericalangle = 2(t_1t_2)\sphericalangle$.

A megállapított tualjdonságok alapján két metsző egyenesre történő tükrözésnél a sík tetszőleges P pontjának aképét úgy is megkaphatjuk, hogy az egyenesek O metszéspontja körül OP sugárral, $2(t_1t_2)$ szöggel, t_1t_2 forgásirányban elforgatjuk. A két megsző egyenesre történő egymásutáni tükrözés tehát elforgatással heleyttesíthető.

Vizsgáljuk meg, hogy a leírt tulajdonságok a sík bármennyi pontjának két metszőegyenesre történő egymásutáni tükrözésénél igazak-e?

Vegyük fel a síkban pl. három tetszőleges pontot. Jelöljük ezeket A-, B-, C-vel. tükrözzük egymásután a t_1 és t_2 tengelyekre. Ellenőrizzük, hogy az előző tualjdonságok igazak?

Hasonlítsuk össze megállapításainkat a tengelyes tükrözés és az eltolás tulajdonságaival! Lehet a két metsző egyenesre történő tükrözések sorozatának eredménye tengelyes tükrözés vagy eltolás? - Nem. Ennek a transzformációnak új nevet adunk: **forgás.**

Foglaljuk össze a forgás tulajdonságait!

1. Egy fixpontja van, a tengelyek metszéspontja.
2. A sík pontjaihoz a síkpontjait rendeli, kölcsönösen egyertelműen.
3. Távolságtartó és szögtartó.
4. A tengelyek szögének kétszerese az elforgatás szöge.
5. A forgás az alakzatok körüljárását megtartja.

Ezek után definiáljuk a **forgást**: Egy síknak olyan önmagára történő kölcsönösen egyértelmű leképezése, amely két metsző egyenesre való, egymás után végrehajtott tükrözésből áll.

A forgás egyértelműen adott:

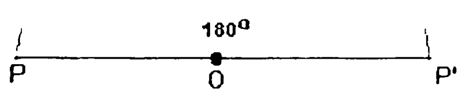
1. két metszőegyenessel;
2. egy fixponttal, az elforgatás szögével és a forgás irányával.

Az előzőekben megfigyelés alapján írtuk le a forgás tualjdonságait. A megfigyelést mellőzve, konkrét mérés nélkül, próbáljuk igazolni a forgás tualjdonságait a tükrözés ismert tualjdonságai alapján.

Középpontos szimmetria a síkon

Az előzőekben két metszőegyenesre történő tükrözést forgásnak neveztünk. Ha a metszőegyenesek merőlegesek egymásra, akkor a forgás szöge $2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$, a forgás speciális forgás.

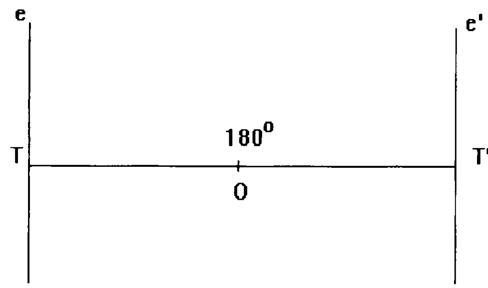
1. Szerkesszük meg egy P pont képét, ha a forgásszög 180° !



11. ábra

P képe az OP sugarú kör PP' átmérőjének a másik végpontja, vagyis az O-n átmenő egyenesen $OP = OP'$ és P_1P' szimmetrikusan helyezkedik el O-hoz. A leképezést **középpontos szimmetriának** vagy **középpontos tükrözésnek** nevezzük.

2. Szerkesszük meg egy egyenes középpontos szimmetrikus képét!

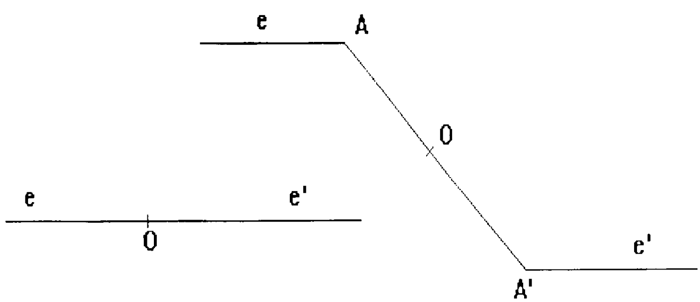


12. ábra

A forgásnál tanultak szerint megszerkesztjük az egyenes 180°-kal elforgatott képét, $OT = OT'$, $eTO\sphericalangle = OTe'\sphericalangle = 90°$, $TOT'\sphericalangle = 180°$. A TT' szakaszra merőleges egyenesek nem metszik egymást, párhuzamosok. Középpontos tükrözésnél egyenes és képe párhuzamos.

Ne felejtsük el, hogy a középpontos szimmetria, a középpontos tükrözés, a 180°-os forgás, a két merőleges egyenesre történő egymásutáni leképezés ugyanazt a leképezést jelenti.

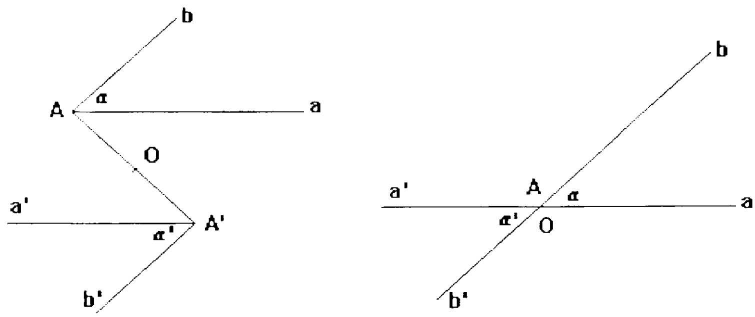
3. Vizsgáljuk meg egy félegyenes centrális tükrözéssel kapott képét!



13. ábra

A félegyenes és képe egy egyenesre illeszkedik, vagy párhuzamos (egyállású), és ellentétes irányú.

4. Elemezzük egy szög centrális tükrözéssel kapott képét!



14. ábra

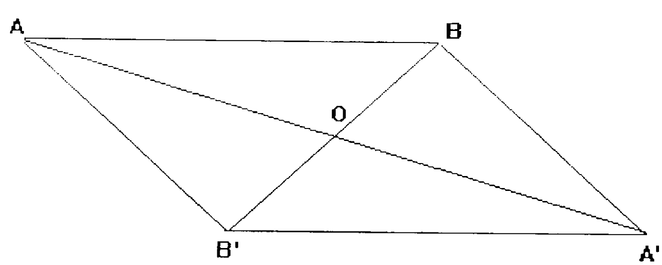
Két merőleges egyenesre történő tükrözés vagyis a 180°-os forgás szögtartó transzformáció, tehát a szög és centrális tükrözéssel kapott képe egyenlő. Szárai ellentétes irányúak.

Azokat a szögeket, amelyeknek szárai párhuzamosak és ellentétes irányúak, **váltószögeknek** nevezzük.

Azokat a szögeket, amelynek csúcsai egybeesnek, szárai egy egyenesre illeszkednek és ellentétes irányúak, **csúcsszögeknek** is nevezzük.

A csúcsszögek és váltószögek egyenlők, ugyanis egymásból centrális tükrözéssel származtathatók.

5. Szerkesszük meg egy szakasz centrális tükrözéssel kapott képét!



15. ábra

Szakasz és képe egyenlő és párhuzamos.
Az AB' szkasz képe $A'B$, tehát ezek is egyenlők és párhuzamosak.
A kapott alakzat paralelogramma.

6. Foglaljuk össze a **centrális tükrözés tulajdonságait!**
   Mivel a centrális tükrözés speciális forgás, a centrális tükrözés tulajdonságainak egy része megegyezik a forgás tulajdonságaival.

1. Egy fixpontja van.

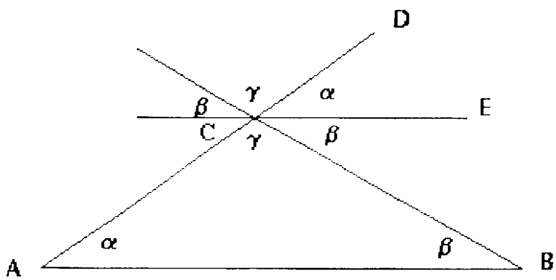
2. A sík pontjaihoz a sík pontjait rendeli kölcsönösen egyértelműen úgy, hogy $PO = OP'$ és P, P', az O kezdüpontú különböző félegyeneseken van.
3. Távolgásgtartó és szögtartó transzformáció.
4. Egyenes és képe párhuzamos.
5. Az alakzatok körüljárását megtartja.

A centrális tükrözés (centrális szimmetria) definíciója: A síknak olyan önmagára történő transzformációja, amely 180°-os forgásból áll.

Alkalmazások

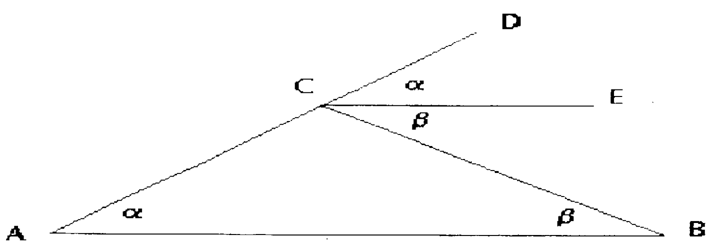
1. Keressünk a háromszögön az α és β szöghöz egyállású szöget, a szöghöz csúcsszöget!

Mutassuk meg, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°!



16. ábra

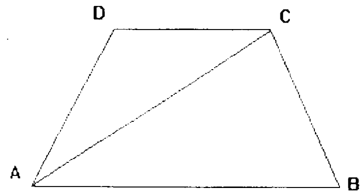
2. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög bármelyik külső szöge egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével!



17. ábra

Bizonyítás: $\alpha = DCE\sphericalangle$, mert egyállású szögek. $\beta = ECB\sphericalangle$, mert váltószögek. $DCB\sphericalangle = \alpha + \beta$.

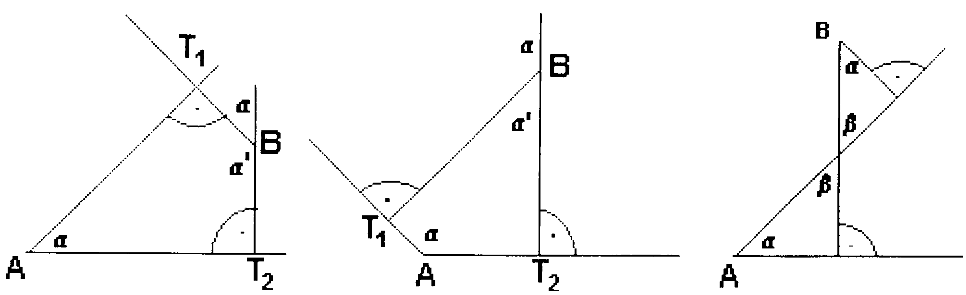
3. Bizonyítsuk, be hogy egy négyszög belső szögeinek összege 360°



18. ábra

Bizonyítás: A négyszög egy átlóval két háromszögre bontható. Egy háromszög belső szögeinek összege 180°. A két háromszög belső szögeinek összege 360°. Így a négyszög belső szögeinek összege 360°.

4. Az ábrán látható merőleges szárú szögek között keressünk összefüggést!

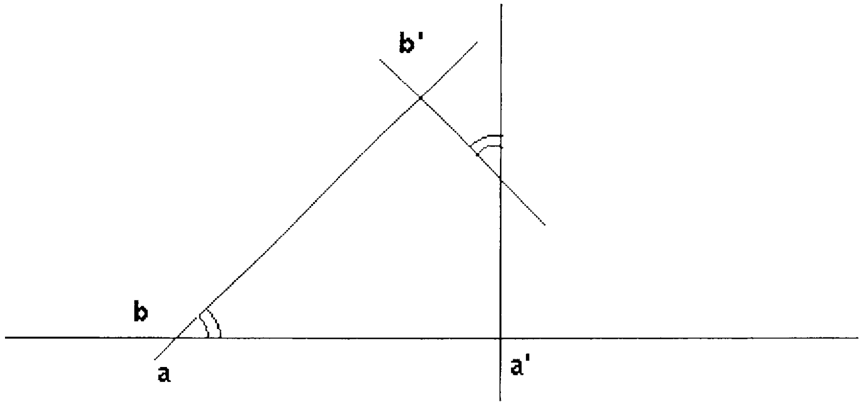


19. ábra

$\alpha + \alpha' = 180°$, mert ABT_1T_2 négyszögben két szög derékszög. Rajzoljuk be az α szög megfelelő szögeit!

A merőleges szárú szögek tehát vagy egyenlők, vagy egymást 180°-ra egészítik ki!

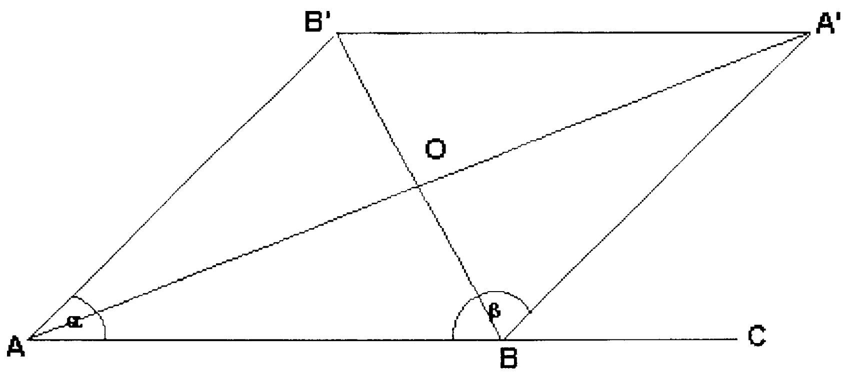
5. Bizonyítsuk be, hogy egymásra merőleges egyenespárok szögei egyenlők!



20. ábra

Bizonyítás: Metszőegyenesek szögén a nem tompaszöget értjük. Mivel a merőleges szárú szögek vagy egyenlők, vagy egymást 180°-ra egészítik ki, így a szögszárak egyeneseinek szögei az egyenlő nem tompa szögek.

Alakzatok tulajdonságainak vizsgálata centrális tükrözéssel
Centrálisan (középpontosan) tükrös négyszögek



21. ábra

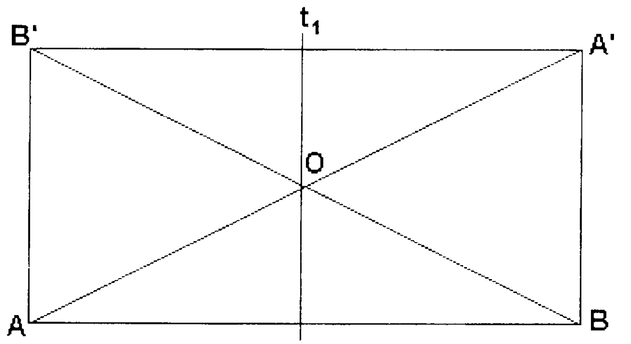
1. Tükrözzünk egy AB szakaszt centrálisan. A centrális tükrözés alapján az AB oldal és $A'B'$ képe párhuzamos. Az $A'B'$ oldal BA' képe is párhuzamos. Az alakzat paralelogramma. A paralelogramma centrálszimmetrikus alakzat.

   A centrális tükrözés alapján írjuk le a paralelogramma tulajdonságait.

1. A szemközti oldalak egyenlők.

2. Átlói felezik egymást. (Ugyanis $AO = OA'$ és $BO = OB'$.)
3. Szemközti szögei egyenlők. (Ugyanis a $B'AB$ képe $BA'B'\sphericalangle$.)
4. A szomszédos szögek összege 180°. (Ugyanis pl.: $B'AB\sphericalangle = A'BC\sphericalangle$, mert egyállású szögek. Így $\alpha + \beta = 180°$.)

2. Ha a paralelogrammának mind a négy szöge egyenlő, akkor a paralelogramma neve **téglalap**.

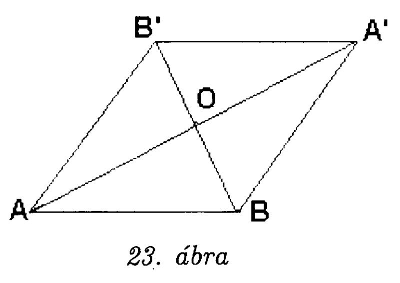


22. ábra

A téglalap tulajdonságainak egy része ugyanaz, mint a paralelogramma tulajdonságai, és még:

1. Szögei 90°-sak. (Ugyanis a négyszög belső szögeinek összege 360°. Ennek negyedrésze 90°.)
2. Két tükörtengelye felezi az oldalakat (A hurtrapéznál tanultuk.)
3. Átlói egyenlők. (Ugyanis az AA' átló t_1-re vonatkozó tükörképe BB'.)
4. A téglalap köré írható, aminek középpontja 0. (Ugyanis $OB = OB'$, $OA = = OA'$.)

3. Ha a paralelogramma minden oldala egyenlő, akkor a neve **rombusz**.



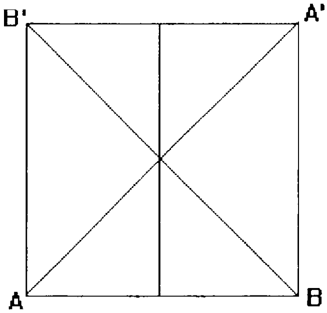
23. ábra

Foglaljuk össze a tulajdonságait:

1. Szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők.
2. Szemközti szögei egyenlők.

3. A szomszédos szögek 180°-ra egészítik ki egymást.
4. Átlói felezik egymást.
5. Átlói felezik a szögeket, tehát tükörtengelyek.
6. Centrálszimmetrikus.

4. Ha a paralelogramma egyenlő oldalú és egyenlő szögű, akkor a neve **négyzet.**



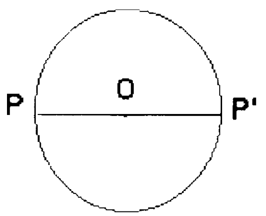
24. ábra

A négyzet tehát rombusz is és téglalap is.

Tulajdonságai:

1. Szemközti oldalai párhuzamosak és egyenlők.
2. Minden szöge 90°-os.
3. Átlói egyenlők és merőlegesen felezik egymást.
4. Átlói felezik a szögeket.
5. Négy tükörtengelye van és centrálszimmetrikus.
6. A négyzet köré kör írható.

5. Bizonyítsuk be, hogy a kör középpontosan tükrös!



25. ábra

A körvonal tetszőleges pontját jelöljük P-vel. Húzzuk meg a P ponton átmenő átmérőt. Az átmérő másik végpontját jelöljük P'-vel A P pont P'-be O körüli 180°-os forgással vihető át, tehát P és P' középpontosan tükrös.

Mivel P tetszőleges pontja a körvonalunk, a körvonal minden pontjának van szimmetrikus társa. Emellett a kör minden átmérőjére tengelyesen is tükrös. **A körnek végtelen sok tükörtengelye van és szimmetrikaközéppontja is van.**

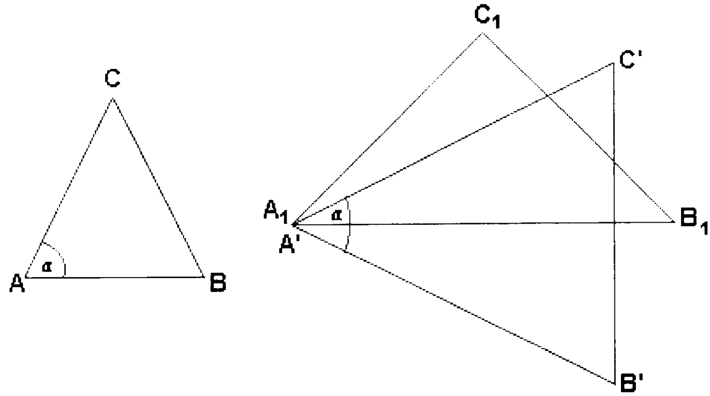
6. **Beszélgessünk a szabályos sokszögek tükrös tulajdonságairól!**

Háromszögek egybevágósága

Az előzőekben beláttuk, hogy a tengelyes tükrözés vagy a tengelyes tükrözések sorozata (pl.: eltolás, forgás, centrális tükrözés) távolságtartó és szögektartó transzformáció. **Ezeket a transzformációkat egybevágósági transzformációknak nevezzük.** Másképpen: a tengelyes tükrözésből és tengelyes tükrözések szorzatából előálló transzformációkat **egybevágósági transzformációnak** nevezzük. Két alakzatot egybevágónak nevezünk a síkban, ha tengelyes tükrözéssel vagy tengelyes tükrözések sorozatával egyik alakzat a másikba vigehtő át. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy két alakzat ha egybevágó, akkor egymással fedésbe hozhatók, ugyanis az egymásnak megfelelő oldalak és szögek egyenlők.

Egy háromszögben három oldal és hároms szög van. Így két háromszög egybevágóságához hat adatnak kell megegyezni. A háromszögek egybevágóságának eldöntéséhez azonban néha három adat is elegendő.

1. **Két háromszög egybevágó, ha két-két oldalának adatai és közbezárt szögük eygenlők.**



26. ábra

Legyen: $AB = A'B'$; $AC = A'C'$; $CAB\sphericalangle = C'A'B'\sphericalangle$.

Keressünk az ABC háromszöghöz olyan egybevágósági transzformációkat, amelyek az $A'B'C'$ háromszögbe viszik át.

Toljuk el az ABC háromszöget az AA' eltolási nyíllal. Ekkor az $A_1B_1C_1$ háromszöget kapjuk. Az $A_1B_1C_1$ háromszöget a közös A' pont körül forgassuk el úgy, hogy az A_1B_1 félegyenes az $A'B'$ félegyenesre kerüljön. Mivel $AB = A_1B_1 = A'B'$, ezért az AB oldal az $A'B'$ oldalra került. Továbbá: a $CAB\sphericalangle = C_1A_1B_1\sphericalangle = C'A'B'\sphericalangle$ miatt az AC szögszár az $A'C'$ szögszárra került, és az $AC = A_1B_1 = A'C'$ oldalegyenlőség miatt az AC oldal az $A'C'$ oldalra. Így az A csúcspont az A'-be a B csúcspont a B'-be és a C csúcspont a C'-be került, vagyis az ABC háromszöget az $A'B'C'$ háromszögbe vittük át. A két háromszög fedésbe került, vagyis egybevágó.

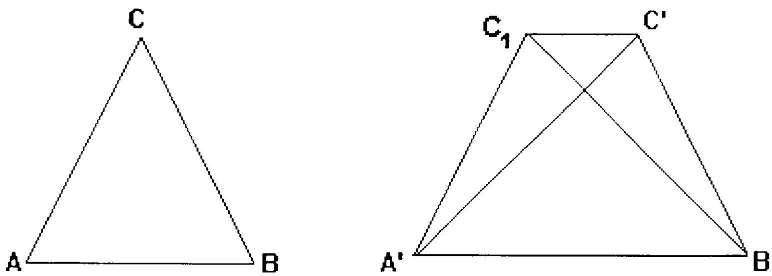
2. **Két háromszög egybevágó, ha megegyezik egy oldalban és a rajta lévő két szögben.**

A bizonyítást az előzőhöz hasonlóan végezhetjük el.

3. **Két háromszög egybevágó, ha megfelelő oldalai egyenlők.**

Legyen: $AC = A'C'$; $AB = A'B'$; $BC = B'C'$.

Toljuk el, majd forgassuk el a háromszöget úgy, hogy az AB oldal az $A'B'$ oldalra kerüljön.



27. ábra

Hová kerül a C csúcs? Ha pl.: a C_1 pontba kerülne, akkor az ABC háromszög az $A'B'C_1$ háromszögbe kerülne és $AC = A'C' = A'C_1$ továbbá $BC = B'C' = B'C_1$ teljesülne. A C_1C' alapú $C_1C'A'$ és $C_1C'B'$ háromszögek egyenlő szárúak lennének és az alapfelező merőlegesük átmenne az A' és B' csúcsokon, vagyis egy szakaszhoz T — CC'-höz — két felezőmerőleges tartozna, ami nem lehet. Így a C_1 pont csak C'-be kerülhet.

4. **Két háromszög egybevágó, ha két-két oldalukban és a nagyobbikkal szemközti szögükben megegyeznek.**

Ennek az egybevágósági esetnek a bizonyítását tanulmányaink során később végezzük el.

A négy egybevágósági esetből következik, hogy az így megadott három adatból mindig egy háromszög szerkeszthető.

Alkalmazásként háromszögekkel kapcsolatos szerkesztési és bizonyítási feladatokat oldhatunk meg.

Tartalom

Főiskola Nyomda, Eger