VALUACIÓN DE OPCIONES, RACIONALIDAD ECONÓMICA Y VOLATILIDAD ESTOCÁSTICA

Tesis de Maestría en Economía

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-AZCAPOTZALCO

Max Américo Soldevilla Canales

Director de tesis: Dr. Francisco Venegas Martínez

ÍNDICE

Página

CAPÍTULO

1. Introducción

El tema de los mercados de derivados ha cobrado gran relevancia en los últimos años. Esto como consecuencia de los riesgos de mercado o de incumplimiento a que se ven expuestos los inversionistas cuando adquieren o emiten algún activo financiero. Este es un asunto de suma importancia, ya que se han presentado muchos casos de empresas que han tenido pérdidas sustanciales por no administrar adecuadamente dichos riesgos. De esta manera, las empresas han incrementado, en los últimos años, el uso de derivados (forwards, futuros, opciones, swaps de tasas, swaps de riesgo de incumplimiento, notas estructuradas, etc.) para delimitar sus riesgos. Los derivados son instrumentos financieros que se utilizan para reducir y en el mejor de los casos eliminar riesgos. No obstante, el uso inadecuado de los derivados, sobre todo en lo que se refiere a la especulación, puede llevar a pérdidas considerables, ya que, en ocasiones, éstos son demasiado volátiles.

Entre los primeros estudios de valuación de opciones se encuentra la tésis doctoral de Louis Bachelier (considerado como el padre de las matemáticas financieras modernas). Su trabajo de investigación es intitulado "Teoría de la especulación". En 1900, Bachelier ya había introducido en su tesis los conceptos de movimiento Browniano, proceso Markoviano, esperanza condicional y martingala. Entre las principales contribuciones de Bachelier a las matemáticas financieras se tienen: 1) modelado de la dinámica de los precios de acciones de la bolsa de París a través del movimiento Browniano; 2) la formulación de mercados eficientes; 3) la primera fórmula de valuación de un contrato de opción y la primera definición cuantitativa de riesgo de mercado. No obstante, el trabajo de Bachelier tenía una limitación muy grande, pues suponía que los precios seguían una distribución normal, es decir, podían tomar valores negativos; esto fue enmendado por Paul Samuelson en 1965. De manera correcta se debe suponer que el precio sigue una distribución lognormal o bien el rendimiento tiene una distribución normal.

A raíz de lo anterior, se han desarrollado numerosos modelos matemáticos para valuar productos derivados con diferentes características. En el análisis de los derivados financieros una herramienta muy importante es el movimiento geométrico Browniano, el cual lleva dicho nombre en honor al botánico escocés Robert Brown, quien en 1828 observó que las partículas de granos de polen suspendidas en un líquido seguían un movimiento irregular. Este movimiento peculiar ha sido objeto de un sinnúmero de estudios en muchas y muy diversas áreas de las matemáaticas financieras modernas, este concepto se encuentra en casi toda la teoría financiera en tiempo continuo.

En 1973, Fischer Black y Myron Scholes, bajo condiciones de no arbitraje, desarrollaron un modelo para valuar una opción europea sobre una acción que no paga dividendos y cuyo precio es conducido por un movimiento geométrico Browniano. Es también importante destacar, al respecto, el trabajo de Robert Merton quien formalizó y extendió en varios artículos la metodología de Black y Scholes. Por todas estas contribuciones que establecieron los fundamentos de lo que hoy se conoce como matemáticas financieras modernas, Myron Scholes y Robert Merton se hicieron acreedores al premio Nobel en 1997; infortunadamente, para ese entonces Fischer Black ya había fallecido dos años antes. En atención a las contribuciones de Merton, el modelo Black y Scholes, bien podría llamarse de Black, Scholes y Merton, o si se prefiere de Merton, Black y Scholes, por la cantidad y la calidad de aportaciones de Merton a la teoría financiera en el más alto nivel. Uno de los supuestos principales del modelo de Black y Scholes es que la volatilidad es constante o bien una función determinista del tiempo, pero en los mercados financieros esto no es así, ya que la volatilidad del precio de un activo subyacente no es observable ni constante. Por lo tanto, esta variable (aleatoria) merece un estudio muy cuidadoso pues es de suma importancia en la negociación de los derivados.

Es importante destacar que las investigaciones de Black, Scholes y Merton no descansan sobre el supuesto de racionalidad económica de los agentes. La aportación o contribución central del presente trabajo de investigación es la incorporación de agentes maximizadores de utilidad, en un ambiente de riesgo e incertidumbre, para valuar opciones europeas cuando la volatilidad es estocástica. En el marco de equilibrio parcial se desarrollan varios modelos de valuación de opciones europeas de compra con agentes representativos maximizadores de utilidad. Esta investigación extiende los trabajos de Venegas-Martínez (2001), (2006a), (2006b) y (2008) al incorporar volatilidad estocástica en el proceso de toma de decisiones de agentes racionales.

El presente trabajo se divide en varias partes; en el capítulo 2 se hace una breve descripción de los conceptos básicos de la teoría de opciones financieras. En el capítulo 3 se describen algunos modelos para valuar una opción con volatilidad estocástica, tales como los modelos de Hull and White (1987), Heston (1993) y Venegas-Martínez (2005). En el capítulo 4 se desarrolla la programación dinámica estocástica en tiempo continuo. En el capítulo 5 se obtiene la ecuación diferencial parcial del precio de una opción europea cuando la volatilidad es estocástica utilizando un consumidor-inversionista maximizador de utilidad por un bien genérico de consumo sujeto a una restricción presupuestal, la cual considera la tenencia de un bono libre de riesgo (de incumplimiento), un activo riesgoso con volatilidad estocástica y una opción para cubrir el riesgo de mercado. Por último, en el capítulo 6 se proporcionan algunas conclusiones generales sobre los resultados del trabajo desarrollado.

2. Definiciones y conceptos básicos

En esta parte del trabajo se tratará sobre la definición de un producto derivado. En particular, se definirá un contrato de opción y algunos de los términos utilizados frecuentemente en los mercados financieros mundiales. Las opciones así como algunos otros derivados se negocian y cotizan tanto en mercados organizados (bolsas de opciones) como en mercados *Over-The-Counter* (OTC), estos últimos también son llamados mercados sobre mostrador.

2.1 Concepto de derivado

Los productos derivados son instrumentos (títulos o contratos) cuyo valor depende del precio de otro instrumento llamado el subyacente; ejemplos, de subyacentes son: tipos de cambio, índices accionarios, acciones, tasas de interés, granos, jugo de naranja congelado, panzas de cerdo (tocino), etc. En consecuencia, un producto derivado es un acuerdo financiero, entre dos partes, para la compra-venta futura de un subyacente bajo ciertas condciones. Estos derivados son útiles para reducir los costos, mejorar los rendimientos o permitir a los inversionistas administrar los riesgos. Entre los derivados más comunes tenemos los contratos forwards, los futuros, los swaps, las opciones y las notas estructuradas.

2.2 Contratos de opciones

Una opción es un contrato que confiere el derecho, pero no la obligación, de comprar (*call*) o vender (*put*) un activo subyacente a un precio determinado, llamado precio de ejercicio, en un fecha futura. Si la opción se puede ejercer en cualquier momento desde la fecha de su emisión hasta la fecha de vencimiento, se dice que la opción es americana. Por el contrario, si la opción sólo se puede ejercer en la fecha de expiración del contrato, se dice que la opción es europea. Los nombres de americana y europea no se refieren a que se negocian en esos continentes, mas bien, se refieren a dos contratos diferentes (a falta de mejores nombres para ellos). El valor de este derecho lo paga el comprador del contrato de opción al emisor y se le conoce como prima. El valor intrínseco (*pay-off*) de una opción de compra es su valor al expirar el contrato, el cual está dado por

$$\max\{S_T - K, 0\},$$

donde S_T es el precio del activo subyacente (de ahora en adelante una acción) y K es el precio de entrega también llamado precio de ejercicio. Observe que si S_T es mayor que K, entonces se ejerce la opción, es decir, el activo se compra en K aun cuando su valor en el mercado es S_T, con lo cual se obtiene una ganancia de $S_T - K$. El valor intrínseco o *pay-off* de una opción de venta al expirar el contrato es

$$\max\{K - S_T, 0\},$$

ya que, si K es mayor que S_T, entonces se ejerce la opción y se vende en el precio pactado de K, con lo cual se obtiene una ganancia de $K - S_T$. A las opciones *call* y *put* se les denomina comúnmente como opciones *vanilla*. La diferencia con el contrato de futuro, es que en la opción el comprador paga una prima que le otorga el derecho mas no la obligación para realizar una operación de compra o venta futura. En cambio en el contrato de futuros ambas partes se obligan, una a vender y la otra a comprar sin efectuar algún pago inicial.

Los términos comunes en los contratos de opción son:

i) Prima: es la cantidad pagada para tener el derecho y no la obligación de ejercer la opción (de compra o venta).

ii) Activo subyacente: es el instrumento financiero del cual depende el valor de la opción.

iii) Precio de ejercicio: es la cantidad por la cual el subyacente puede ser comprado (*call*) o vendido(*put*), el cual será denotado por K.

iv) Fecha de expiración: es la fecha en la cual la opción puede ser ejercida o fecha en la cual la opción deja de existir, la cual se denotará por T.

v) Valor intrínseco: es el pago que será recibido cuando la opción expira.

vi) Valor de tiempo: cualquier valor que la opción tenga por arriba de su valor intrínseco.

vii) En el dinero (*In-the-money*): es una opción con valor intrínseco positivo. En una opción *call* el precio del activo está por arriba del precio de ejercicio y en una opción *put* el precio del activo está por debajo del precio de ejercicio.

viii) Fuera del dinero (*Out-of-the-money*): es una opción sin valor intrínseco, sólo valor de tiempo. En una opción *call* el precio del activo está por debajo del precio de ejercicio y en una opción *put* el precio del activo está por arriba del precio de ejercicio.

ix) Sobre el dinero (*At the money*): un *call* o un *put* con un precio de ejercicio que es igual o casi igual al precio de mercado del activo subyacente, de tal manera que al terminar el contrato no se realizan pérdidas ni ganancias para el tenedor de la opción.

x) Posición larga: posición de mercado que ha sido establecida a través de la compra de una opción.

xi) Posición corta: posición de mercado que ha sido establecida a través de la venta de una opción.

2.3 Mercados de derivados

En los mercados de derivados las negociaciones que se formulan se hacen con base en bienes o activos, denominados productos subyacentes. Como ya se mencionó anteriormente, los subyacentes más comunes son: acciones, índices bursátiles, canastas accionarias, divisas, etc. Hay dos tipos de mercados, uno de ellos son los mercados organizados y otro es el OTC (*Over-The-Counter*), también llamados mercados sobre mostrador.

2.3.1 Mercados Organizados

Los mercados Organizados proporcionan toda la infraestructura necesaria para que se celebren las operaciones y cotizaciones de contratos de opciones. En estos mercados se realizan operaciones de instrumentos financieros derivados en donde las características de los contratos que se operan se encuentran estandarizados y la liquidación de las operaciones se realiza a través de una Cámara de compensación.

En México se conformó el mercado mexicano de derivados a partir de 1998, en donde las entidades participantes son:

i) Bolsa Mexder (Mercado Mexicano de Derivados S. A. de C. V.), cuya obligación principal es la de proporcionar la infraestructura necesaria para que se lleve a cabo la negociación de contratos de futuros y de opciones.

ii) Cámara de compensación y de liquidación. Es el fideicomiso constituido con la finalidad principal de compensar y liquidar las operaciones celebradas en el MexDer.

iii) Socios liquidadores. Son fideicomisos cuya finalidad es liquidar las operaciones ante la cámara de compensación y liquidación y en su caso celebrar operaciones en Bolsa.

iv) Operadores. Su función principal es celebrar operaciones en Bolsa tanto por cuenta propia como de terceros y fungir como comisionistas de uno o varios socios liquidadores.

La cámara de compensación y liquidación actúa como un intermediario entre los participantes. Ella asume la posición corta del comprador y la posición larga del vendedor. De esta manera, elimina el riesgo que se pudiera dar por algún incumplimiento, ya que la cámara es la que se responsabiliza del cumplimiento de la operación, para lo cual los participantes se obligan a depositar una cantidad en efectivo o valores proporcional a la volatilidad diaria del subyacente denominada “aportaciones” o “márgenes” que garantizan el cumplimiento de las obligaciones adquiridas por partes y contrapartes.

2.3.1.1 Objetivos de los mercados organizados de derivados

A continuación se plantean los objetivos de los mercados organizados de derivados:

i) Brindar mayor seguridad a los participantes.

ii) Estandarizar las características de los contratos.

iii) Eliminar los riesgos contraparte instrumentando una cámara de compensación.

iv) Establecer coberturas en posiciones de riesgo ante las posibles variaciones de precios.

v) Proporcionar otras alternativas de inversión a los especuladores.

vi) Proporcionar liquidez a los participantes.

vii) Realizar operaciones de arbitraje.

Existen muchos mercados de opciones y futuros en el mundo. Los activos a los que éstos se refieren pueden ser de tipo financiero con subyacentes tales como acciones, divisas, índices bursátiles, instrumentos de renta fija y tipos de interés, o de tipo no financiero, como metales y materias primas. El primer mercado organizado que se creó en el mundo fue el CBOE (*Chicago Board Options Exchange*), éste comenzó a funcionar el 26 de marzo de 1973 con la negociación de *calls* sobre 16 acciones, tiempo después, en 1977, comenzó la negociación sobre *puts*. En marzo de 1983 se inició la negociación de opciones sobre índices bursátiles y en 1993 se introdujeron las opciones sobre índices sectoriales de la bolsa.

2.3.2. Mercados *Over-The-Counter* (OTC)

Estos mercados se conocen como no organizados ya que las características de los contratos que en ellos se operan no son estandarizadas y son negociadas directamente por las contrapartes. Las operaciones son pactadas en forma directa por los participantes con exposición al riesgo de incumplimiento al no tener una cámara de compensación que sea contraparte para los participantes, es decir, que actúe como comprador para el vendedor y como vendedor para el comprador.

Existen algunas diferencias entre los mercados OTC y los organizados. Mientras que en los OTC los contratos son hechos a la medida, en los organizados los contratos están plenamente estandarizados en términos de:

i) Vencimiento

ii) Precio de ejercicio

iii) Tipo de opción, ya sea una *call* o una *put.*

En los mercados OTC el riesgo de incumplimiento es asumido tanto por el comprador como por el vendedor, mientras que en un mercado organizado existe una cámara de compensación que actúa como intermediario entre ambas partes y que asume todos los riesgos de incumplimiento de las contrapartes del mercado de opciones.

En relación a los precios, los mercados organizados utilizan mecanismos de subasta para su establecimiento, mientras que en un mercado OTC este precio se establece en una negociación entre el comprador y el vendedor. Como se ha visto, la gran diferencia entre un mercado organizado y un mercado OTC es la existencia de la cámara de compensación. En consecuencia, a continuación se verá cuales son las principales funciones de dicha cámara:

1) Asegura a los operadores que sus derechos puedan ser ejercidos con independencia de la situación financiera de la contraparte, en otras palabras, no existe el riesgo de crédito en las operaciones que se efectúen; este riesgo lo asume la cámara de compensación.

2) Facilita la operación del mercado al "compensar" constantemente las posiciones.

3) Reduce el riesgo de contraparte, exigiendo a los operadores depósitos de garantía (márgenes). Estos depósitos se pueden realizar con metales o en algunas bolsas de opciones consignando títulos de renta fija o de renta variable.

2.4 El modelo de Black y Scholes

En 1973, Fisher Black y Myron Scholes[2] desarrollaron un modelo para valuar una opción europea sobre una acción que no paga dividendos. En el mismo año, Robert Merton

[2] Fisher Black y Myron Scholes escriben su artículo "*The Pricing of Options and Corporate Liabilities*" en 1973 con el cual ganan el Premio Nobel en 1997 junto con Robert Merton

formalizó y extendió, en una serie de artículos seminales, la metodología de Black y Scholes. Debido a estas contribuciones que establecieron los fundamentos de lo que hoy se conoce como matemáticas financieras modernas, Myron Scholes y Robert Merton se hicieron acreedores al premio Nobel en 1997.

El modelo de Black y Scholes tiene los siguientes supuestos básicos:

i) El activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato;

ii) el precio del activo subyacente es conducido por el movimiento geométrico Browniano, es decir, el precio es lognormal o los rendimientos son normales;

iii) la volatilidad del activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo;

iv) las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas;

v) el mercado del subyacente es líquido y divisible, es decir, el subyacente se puede comprar y vender en cualquier fracción de unidad;

vi) no hay costos de transacción (comisiones e impuestos);

vii) el mercado opera en forma continua, es decir, no hay fines de semana ni días festivos;

viii) existe un mercado de crédito, un sistema bancario en que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante a todos los plazos y libres de riesgo de incumplimiento;

ix) los mercados están en equilibrio, es decir, no existen oportunidades de arbitraje.

Bajo estos supuestos, se puede decir que el precio de la opción solo dependerá del precio actual de la acción, del tiempo de vencimiento y de un conjunto de parámetros conocidos. El valor de una opción europea de compra está en función de los diferentes parámetros que intervienen en los términos del contrato, tales como: el precio de ejercicio, K, el plazo del contrato, $T-t$, el precio de contado de la acción en el momento en que se establece el contrato, S_T, la volatilidad, σ, y la tasa de interés, r.

Como se vio anteriormente, los derivados ofrecen un mecanismo para administrar el riesgo financiero. Las opciones son instrumentos que permiten cubrir el riesgo ante cualquier variación en los precios, esto se debe principalmente a que con la opción transferimos el riesgo de pérdida, es decir, ésta se limita solo a la prima de la opción pero al mismo tiempo los beneficios pueden ser muy grandes cuando se da un aumento en los precios del activo subyacente. Por otro lado, en los futuros y los forwards transferimos el riesgo de pérdida pero también todas las posibilidades de beneficio por un movimiento de los precios a nuestro favor. Esto nos dice, que, la adminitración de riesgos con opciones es más flexible que si se hicieran con los otros instrumentos financieros.

En el caso de la especulación también se observa que la mejor alternativa son las opciones, esto debido a que ante errores en la previsión de precios no se ocasionan graves pérdidas, ya que al suceder esto no se ejerce la opción, la única pérdida sería la prima que se pagó para tener el derecho y no la obligación de ejercerla.

2.4.1 Variación en el precio de la opción ante un cambio en los parámetros

En lo que sigue se verá como un cambio en una de las variables relevantes afecta el valor de la opción, manteniendo todas las demás variables constantes.

2.4.1.1 Variación en el precio de la acción (S_T)

El valor de un *call* aumenta cuando el precio de la acción aumenta, mientras que el valor de un *put* disminuye. El poseedor del *call* puede optar por pagar el precio de ejercicio K y recibir una acción de valor S_T, sus ganancias son $S_T - K$, por lo que le interesa que S_T aumente. En el momento de ejercicio, el poseedor de un *put* realiza una ganancia de $K - S_T$, ya que cobra K a cambio de entregar una acción; su beneficio es mayor cuanto menor sea el precio de la acción.

2.4.1.2 Variación en el precio de ejercicio (K)

Un aumento en el precio de ejercicio K disminuye el valor de un *call* y aumenta el valor de un *put*. Esto se observa en las ganancias tanto de un *call* como de un *put*, ya que cuando se ejerce un *call* la ganancia es $S_T - K$, en consecuencia al aumentar el valor de K se tendrá que el valor o *pay-off* de la opción disminuya. En cambio, en un *put* la gananacia es $K - S_T$, lo cual significa que al aumentar el valor de K el *pay-off* de la opción aumente.

2.4.1.3 Variación en la volatilidad (σ)

La volatilidad es una medida de la dispersión de los rendimientos del activo subyacente. Una volatilidad alta indica que la rentabilidad del activo subyacente en el futuro puede variar dentro de un rango muy grande, en cambio, una volatilidad baja indica que la rentabilidad variará dentro de un rango muy pequeño. En consecuencia, tanto para los *call* como para los *put* un incremento de la volatilidad conducirá a que el valor o *pay-off* de la opción aumente. En una opción de compra una volatilidad grande puede ocasionar que el precio de la opción se incremente de manera importante. Por lo tanto, la ganancia de $S_T - K$ va ser mucho mayor. Si resulta que el precio de la opción disminuye demasiado, entonces no se ejerce la opción y sólo perdería la prima. Por el contrario, en una opción de venta, una volatilidad grande proporciona una mayor probabilidad de que disminuya el precio de la opción y, en consecuencia, su ganancia $K - S_T$ va ser mucho mayor, y si esta volatilidad ocasiona que el precio de la opción aumente, simplemente no se ejerce y su única pérdida sería la prima de la opción.

2.4.1.4 Variación en la tasa de interés (r)

Con un aumento de la tasa de interés para el mismo período, como el *call* es un derecho de compra aplazado, el valor presente del precio de ejercicio será menor, favoreciendo al comprador de esta opción, con lo cual su valor aumenta y el valor del *put* disminuye.

2.4.1.5 Variación en el tiempo de vencimiento ($T - t$)

El tiempo de vencimiento afecta al valor de la opción principalmente por las siguientes variables:

i) Volatilidad. Cuanto mayor es el tiempo hasta la fecha de vencimiento, mayor es la posibilidad de que el precio de la acción aumente o disminuya sensiblemente a partir del precio actual, lo cual es favorable tanto para el poseedor de un *put* como para el poseedor de un *call*.

ii) Precio de ejercicio. Cuanto mayor es el tiempo hasta el ejercicio de la opción, mayor es el valor de un *call* y menor es el valor de un *put*.

3. Volatilidad estocástica

En este apartado se describen algunos modelos relevantes que aparecen en la literatura financiera para valuar una opción con volatilidad estocástica, tales como los trabajos de Hull and White (1987), Heston (1993) y Venegas-Martínez (2005).

3.1 Introducción

La volatilidad en los mercados financieros no se comporta de manera constante ni predecible como se supone en el modelo de Black and Scholes. Por lo tanto, para valuar una opción en una forma más realista es necesario modelar la volatilidad a través de un proceso estocástico. Hay varios modelos disponibles en la literatura para valuar opciones con volatilidad estocástica que se describirán, brevemente, en este capítulo.

3.2 Modelo de Hull and White

Hull and White (1987) resuelven el problema de valuar una opción en donde la correlación entre la volatilidad y el precio del activo es cero, es decir, la volatilidad estocástica es independiente del precio del activo subyacente utilizando una serie de Taylor haste términos de tercer grado.

Suponga que se tiene un activo subyacente donde su precio y la varianza instantánea siguen distribuciones lognormales, de tal forma que:

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sigma_t S_t \mathrm{d}X_t \tag{3.2.1}$$

$$\mathrm{d}\sigma_t^2 = \alpha\sigma_t^2\mathrm{d}t + \beta\sigma_t^2\ \mathrm{d}Y_t, \tag{3.2.2}$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo (de incumplimiento), σ_t es la volatilidad, $\mathrm{d}X_t$ y $\mathrm{d}Y_t$ son procesos de Wiener que no están correlacionados, es decir,

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{d}X_t, \mathrm{d}Y_t) = 0.$$

Las variables α y β pueden depender de la volatilidad y del tiempo, pero se supone que no dependen del activo subyacente. A continuación se define $\overline{\sigma}^2_{t,T}$ como la media de la varianza sobre la vida del activo subyacente definida por la integral estocástica

$$\overline{\sigma}^2_{t,T} = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma_\tau^2 \mathrm{d}\tau. \tag{3.2.3}$$

donde σ_τ^2 es una solución de la ecuación (3.2.2). El precio de una opción europea de compra en un ambiente libre de riesgo se obtiene por medio de la siguiente ecuación:

$$c(S_t, \sigma_t^2, t) = e^{-r(T-t)}\int_0^\infty c(S_T, \sigma_T^2, T)p(S_T, \big| S_t, \sigma_t^2)\mathrm{d}S_T \tag{3.2.4}$$

donde T es el tiempo en el cual la opción expira, S_t es el precio de la acción en el tiempo t, σ_t es la desviación estándar instantánea en el tiempo t, $p(S_T, \big| S_t, \sigma_t^2)$ es la distribución condicional de S_T dados el precio de la acción y la varianza en el tiempo t, $\mathrm{E}(S_\tau \big| S_t) = S_t e^{r(\tau - t)}$ y $c(S_T, \sigma_T^2, T)$ es $\max(0, S_T - K)$. La condición impuesta sobre $\mathrm{E}(S_\tau \big| S_t)$ es tal que en un ambiente neutral al riesgo, la tasa de rendimiento esperado sobre la acción es igual a la tasa libre de riesgo. Para valuar el precio de una opción europea de compra con volatilidad estocástica se usa la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} c(S_t, \sigma_t^2, t) \approx& c_{\mathrm{BS}}(S_t, t; \sigma_t^2) + \tfrac{1}{8}\left(S_t N'(d_1)\sqrt{T-t}\ \sigma_t\,(d_1 d_2 - 1)\right) A(\kappa) \\ &+ \tfrac{1}{48}\left(S_t N'(d_1)\sqrt{T-t}\ \sigma_t\left[(d_1 d_2 - 3)(d_1 d_2 - 1) - \left(d_1^2 + d_2^2\right)\right]\right) B(\kappa), \end{aligned}$$

donde

$$A(\kappa) = \frac{2(e^\kappa - \kappa - 1)}{\kappa^2} - 1,$$

$$B(\kappa) = \frac{e^{3\kappa} - (9 + 18\kappa)\,e^\kappa + 8 + 24\kappa + 18\kappa^2 + 6\kappa^3}{3\kappa^3}$$

y

$$\kappa = \beta^2(T-t).$$

3.3 Modelo de Heston

Heston (1993) obtiene una solución para valuar el precio de una opción europea de compra sobre un activo con volatilidad estocástica. Para ello, Heston trabaja con transformadas de Fourier de probabilidad condicional. Este modelo asigna una correlación arbitraria entre la volatilidad y el precio del activo.

Se supone que el precio actual de un activo subyacente sigue el siguiente movimiento geométrico Browniano:

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma_t S_t \mathrm{d}X_t, \tag{3.3.1}$$

donde μ es la tasa de rendimiento esperada instantánea del activo subyacente, σ_t es la volatilidad estocástica instantánea, la cual es mayor que cero y, por último, $\mathrm{d}X_t$ es un proceso de Wiener.

Ahora bien, si la volatilidad sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck, entonces

$$\mathrm{d}\sigma_t = -\beta\sigma_t \mathrm{d}t + \delta \mathrm{d}Y_t, \tag{3.3.2}$$

donde $\mathrm{d}Y_t$, es otro proceso de Wiener que tiene correlación ρ con $\mathrm{d}X_t$. Es decir, se cumple que $\mathrm{Cov}(\mathrm{d}X_t, \mathrm{d}Y_t) = \rho \mathrm{d}t$. El lema de Itô lleva a que la varianza siga un proceso de la forma

$$\mathrm{d}\sigma_t^2 = \left(\delta^2 - 2\beta\sigma_t^2\right) \mathrm{d}t + 2\delta\sigma_t \mathrm{d}Y_t, \tag{3.3.3}$$

Al respecto, Cox, Ingersoll and Ross (1985) obtienen la siguiente ecuación:

$$\mathrm{d}\sigma_t^2 = k\left(\theta - \sigma_t^2\right) \mathrm{d}t + \gamma\sigma_t \mathrm{d}Y_t, \tag{3.3.4}$$

donde k y θ son mayores que cero, lo cual corresponde a un proceso autoregresivo de tiempo continuo de primer orden. El parametro k determina la velocidad de ajuste. Ahora se tratará de llevar la ecuación (3.3.3) a la forma de la ecuación (3.3.4), para esto se factoriza 2β, entonces la nueva ecuación queda como:

$$\mathrm{d}\sigma_t^2 = 2\beta\left(\frac{\delta^2}{2\beta} - \sigma_t^2\right) \mathrm{d}t + 2\delta\sigma_t \mathrm{d}Y_t, \tag{3.3.5}$$

Al igualar las ecuaciones (3.3.4) y (3.3.5), se obtiene la siguiente expresión:

$$k = 2\beta, \qquad \theta = \frac{\delta^2}{2\beta} \qquad \text{y} \qquad \gamma = 2\delta. \tag{3.3.6}$$

En este caso se supondrá que la tasa de interés r es constante. A partir de argumentos de arbitraje (establecidos en Black y Scholes(1973) y Merton (1973)) es posible demostrar que la prima de una opción europea de compra sobre una acción satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \rho\gamma\sigma_t^2 S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial t^2} + \frac{1}{2}\gamma^2\sigma_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial \left(\sigma_t^2\right)^2} +$$

$$rS_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \left[a\left(b - \sigma_t^2\right) - \lambda(S_t, \sigma_t^2, t)\gamma\sigma_t^2\right]\frac{\partial c}{\partial t} - rc = 0, \tag{3.3.7}$$

donde $\lambda(S_t, \sigma^2 S_t^2, t)$ representa el precio del riesgo por volatilidad y debe ser independiente del activo subyacente. Lamoures y Lastrapes (1993) demuestran que este término no es cero.

Una opción europea de compra con precio de ejercicio K y fecha de vencimiento en T satisface la ecuación diferencial parcial estocástica (3.3.7) sujeto a las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{gathered} c(S_t, \sigma_t^2, T) = \max(0, S_t - K) \\ c(0, \sigma_t^2, t) = 0 \\ \frac{\partial c}{\partial S_t}(\infty, \sigma_t^2, t) = 1 \\ rS_t \frac{\partial c}{\partial S_t}(S_t, 0, t) + k\theta \frac{\partial c}{\partial \sigma_t^2}(S_t, 0, t) - rc(S_t, 0, t) + \frac{\partial c(S_t, 0, t)}{\partial t} = 0 \\ c(S_t, \infty, t) = S_t \end{gathered} \tag{3.3.8}$$

3.4 Valuación de opciones con información a priori sobre volatilidad estocástica

La volatilidad se puede examinar de diferentes formas, una de ellas es en base a la experiencia ó lo que comúnmente se le conoce como información a *priori*, incluso antes de que los datos sean analizados. Este enfoque basado en la experiencia es conocido como enfoque Bayesiano, en el cual la volatilidad se analiza como si fuera una variable aleatoria. En esta sección se verán algunas consideraciones teóricas sobre el modelo Bayesiano para la valuación de opciones europeas cuando se tiene alguna información inicial sobre la volatilidad.

Existen dos métodos fundamentales en la construcción de distribución a *priori* a partir de una información inicial: i)principio de mínima entropía cruzada desarrollada por Kullback (1956) y, ii) principio de máxima entropía desarrollada por Jaynes (1957). Este último principio consiste en asegurar la racionalidad de los inversionistas ya que utilizan de manera eficiente la información inicial para seleccionar una distribución a *priori* que maximiza la utilidad logarítmica.

Considere un proceso de Wiener $(W_t)_{t\geq 0}$ definido sobre algun espacio fijo de probabilidad con filtración $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ y una opción europea de compra sobre un activo subyacente cuyo precio al tiempo t, S_t, es conducido por un movimiento geométrico Browniano, el cual está dado por

$$\mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + h^{-1/2}S_t\mathrm{d}W_t,$$

esto es, $(W_t)_{t\geq 0}$ está definido sobre una medida de probabilidad neutral al riesgo $\mathbb{P}$.

La opción es emitida en $t_0 = 0$ y madura en $T > 0$ con un precio de ejercicio K. Bajo el marco teórico Bayesiano, se tiene que la prima, al tiempo $t_0 = 0$, de la opción cuando hay información *a priori* sobre la volatilidad, está dado por:

$$\begin{aligned} c(S_0, T, K, r|\alpha, \beta) &= e^{-rT}\mathrm{E}^{(\pi)}\left\{\mathrm{E}\left[\max(S_T - K, 0)\middle|S_0\right]\right\} \\ &= e^{-rT}\int_{h>0}\left\{\int_{s>K}(s-K)f_{S_T|S_0}(s)\mathrm{d}s\right\}\pi(h)\mathrm{d}\nu(h). \end{aligned}$$

4. Programación dinámica estocástica en tiempo continuo

En este capítulo se analizará lo que es la programación dinámica en tiempo continuo, es decir, el cambio en el precio de las opciones no es un evento estático sino que va cambiando a través del tiempo.

4.1 Introducción

La técnica de programación dinámica estocástica en tiempo continuo es una metodología muy relevante para la valuación de opciones, en dicha técnica las ecuaciones recursivas de Bellman y la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman desempeñan un papel fundamental en la determinación de las condiciones de primer orden de los problemas de control óptimo estocástico. A manera de ilustración se desarrollan varias aplicaciones a problemas de decisión de consumidores-inversionistas racionales.

4.2 Control óptimo estocástico con un factor de riesgo

Para obtener la ecuación de Hamilton-Bellman-Jacobi se iniciará con el problema de optimización dinámica. En este caso se resolverá el siguiente problema de optimización:

$$\underset{u_t}{\text{Maximizar}} \quad \mathrm{E}\left\{ \int_0^\infty F(t,u_t)\mathrm{d}t \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\}, \tag{4.1}$$

donde $F(t,u_t)$ es una función de utilidad y $\mathcal{F}_t$ es la información disponible al tiempo t

sujeto a la siguiente restricción:

$$\mathrm{d}x_t = \mu(x_t,u_t)\mathrm{d}t + \sigma(x_t)\mathrm{d}W_t, \tag{4.2}$$

donde W_t es un movimiento Browniano estandarizado, u_t es una variable de control y x_t es la variable de estado. Ahora se definirá

$$J(x_t,t) = \max_{u|_{[t,\infty)}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^\infty F(s,u_s)\mathrm{d}s \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\}.$$

Esto lleva a la relación de recursividad con respecto a J,

$$J(x_t,t) = \max_{u|_{[t,\infty)}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^\infty F(s,u_s)\mathrm{d}s \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\}$$

Ahora se va descomponer la integral en la suma de dos integrales,

$$J(x_t,t) = \max_{u|_{[t,\infty)}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^{t+\mathrm{d}t} F(s,u_s)\mathrm{d}s + \int_{t+\mathrm{d}t}^\infty F(s,u_s)\mathrm{d}s \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right\}$$

Reemplazando el $J(x_t,t)$ en la anterior ecuación, se obtiene

$$J(x_t,t) = \max_{u|_{[t,t+\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^{t+\mathrm{d}t} F(s,u_s)\mathrm{d}s + J(x_t+\mathrm{d}x_t, t+\mathrm{d}t) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}$$

Ahora, en la última ecuación se lleva a cabo una expansión en serie de Taylor hasta términos de segundo orden y se aplica el teorema del valor medio para integrales

$$J(x_t,t) = \max_{u|_{[t,t+\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\left\{ F(t,u_t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + J(x_t,t) + \mathrm{d}J(x_t,t) + o(\mathrm{d}t) \mid \mathcal{F}_t \right\}.$$

A continuación, se elimina $J(x_t,t)$ que aparece en ambos lados de la ecuación anterior, lo cual conduce a

$$0 = \max_{u|_{[t,t+\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\left\{ F(t,u_t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + \mathrm{d}J(x_t,t) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}.$$

Si se aplica el lema de Itô a $J(x_t,t)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = \max_{u|_{[t,t+\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\Bigg\{ & F(t,u_t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + \left(\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x_t}\mu(x_t,u_t) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial x_t^2}\sigma^2(x_t) \right)\mathrm{d}t \\ & + \frac{\partial J}{\partial x_t}\sigma(x_t)\mathrm{d}W_t \;\Bigg|\; \mathcal{F}_t \Bigg\}. \end{aligned}$$

Luego, al aplicar la esperanza matemática a todos los términos de la parte derecha en la expresión anterior, se tiene que

$$0 = \max_{u|_{[t,t+\mathrm{d}t]}} \left\{ F(t,u_t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + \left(\frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x_t}\mu(x_t,u_t) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial x_t^2}\sigma^2(x_t) \right)\mathrm{d}t \right\}.$$

En este paso, se divide entre $\mathrm{d}t$ ambos miembros de la expresión anterior

$$0 = \max_{u_t} \left\{ F(t,u_t) + \frac{o(\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x_t}\mu(x_t,u_t) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial x_t^2}\sigma^2(x_t) \right\}.$$

y se utiliza la definición de que $o(\mathrm{d}t)/\mathrm{d}t \to 0$ cuando $\mathrm{d}t \to 0$. Por lo tanto,

$$0 = \max_{u_t} \left\{ F(t,u_t) + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x_t}\mu(x_t,u_t) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial x_t^2}\sigma^2(x_t) \right\}. \tag{4.3}$$

La expresión anterior es conocida como ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B). Si u_t es máximo, a partir de (4.3), se obtiene la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden en J:

$$F(t,u_t) + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x_t}\mu(x_t,u_t) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial x_t^2}\sigma^2(x_t) = 0. \tag{4.4}$$

Con el propósito de caracterizar una solución del problema de maximizar (4.1) sujeto a (4.2) es necesario encontrar la solución de la ecuación anterior. Si se supone que la función objetivo es de variables separables, es decir, es de la forma:

$$F(t, u) = G(u_t)e^{-\delta t},$$

se puede suponer como candidato de solución de la ecuación diferencial parcial en (4.4) a

$$J(x_t, t) = \frac{1}{\delta}G(x_t)e^{-\delta t}.$$

Ahora bien, si se calculan las derivadas parciales de primer y segundo orden de J y se sustituyen en (4.4), se tiene

$$G(u_t) - G(x_t) + \frac{1}{\delta}G'(x_t)\mu(x_t, u_t) + \frac{1}{2\delta}G''(x_t)\sigma^2(x_t) = 0. \tag{4.5}$$

De esta manera, al derivar la ecuación anterior con respecto del control u_t, se sigue que

$$G'(u_t) + \frac{1}{\delta}G'(x_t)\frac{\partial\mu(x_t, u_t)}{\partial u_t} = 0. \tag{4.6}$$

Bajo ciertas condiciones sobre G y μ, esta ecuación caracteriza al control óptimo u_t en función de x_t.

4.3 Problema de control óptimo estocástico con dos factores de riesgo

En la sección (4.2) se vio el problema de control óptimo para un factor de riesgo, en esta parte se verá que pasa cuando existen dos factores de riesgo. Para ello se maximizará la siguiente función:

$$\underset{u_t}{\text{Maximizar}} \quad \mathrm{E}\left\{ \int_t^T G(u_s)e^{-\delta s}\mathrm{d}s + \frac{1}{\delta}G(x_T)e^{-\delta T} \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\},$$

sujeto a las siguientes restricciones

$$\mathrm{d}x_t = \mu(x_t, u_t)\mathrm{d}t + \sigma(x_t)\mathrm{d}W_t,$$

$$\mathrm{d}y_t = m(y_t)\mathrm{d}t + s(y_t)\mathrm{d}V_t$$

y

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{d}W_t, \mathrm{d}V_t) = \rho \mathrm{d}t.$$

Como antes, W_t y V_t son movimientos Brownianos estandarizados y tienen correlación ρ. Si se define

$$J(x_t, y_t, t) \equiv \max_{u|_{[t,T]}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^T G(u_s)e^{-\delta s}\mathrm{d}s + \frac{1}{\delta}G(x_T)e^{-\delta T} \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}, \qquad t < T,$$

entonces se descompone la integral en la suma de dos integrales,

$$J(x_t, y_t, t) = \max_{u|_{[t,T]}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^{t+\mathrm{d}t} G(u_s)e^{-\delta s}\mathrm{d}s + \int_{t+\mathrm{d}t}^T G(u_s)e^{-\delta s}\mathrm{d}s + \frac{1}{\delta}G(x_T)e^{-\delta T} \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}$$

Observe ahora que

$$J(x_t, y_t, t) = \max_{u|_{[t,t+\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\left\{ \int_t^{t+\mathrm{d}t} G(u_s)e^{-\delta s}\mathrm{d}s + J(x_t + \mathrm{d}x_t, y_t + \mathrm{d}y_t, t + \mathrm{d}t) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}$$

$$J(x_t, y_t, t) = \max_{u|_{[t,t+\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\left\{ G(u_t)e^{-\delta t}\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + J(x_t, y_t, t) + \mathrm{d}J(x_t, y_t, t) \;\middle|\; \mathcal{F}_t \right\}$$

A continuación se utiliza el lema de Itô en la ecuación anterior,

$$J(x_t, y_t, t) = \max_{u|_{[t,t+\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\Big\{ G(u_t)e^{-\delta t}\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + J(x_t, y_t, t)$$

$$+\big(J_t + \mu(x_t, u_t)J_x + \tfrac{1}{2}\sigma^2(x_t)J_{xx} + m(y_t)J_y + \tfrac{1}{2}s^2(y_t)J_{yy} + \sigma(x_t)s(y_t)\rho J_{xy}\big)\mathrm{d}t$$

$$+\sigma(x_t)J_x\mathrm{d}W_t + s(y_t)J_y\mathrm{d}V_t \;\big|\; \mathcal{F}_t \Big\}$$

Ahora se elimina $J(x_t, y_t, t)$ de ambos lados de la ecuación anterior, por lo tanto se obtiene

$$0 = \max_{u|_{[t,t+\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\Big\{ G(u_t)e^{-\delta t}\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t)$$

$$+\big(J_t + \mu(x_t, u_t)J_x + \tfrac{1}{2}\sigma^2(x_t)J_{xx} + m(y_t)J_y + \tfrac{1}{2}s^2(y_t)J_{yy} + \sigma(x_t)s(y_t)\rho J_{xy}\big)\mathrm{d}t$$

$$+\sigma(x_t)J_x\mathrm{d}W_t + s(y_t)J_y\mathrm{d}V_t \;\big|\; \mathcal{F}_t \Big\}$$

Al aplicar la esperanza matemática en el lado derecho de la expresión anterior se obtiene:

$$0 = \max_{u|_{[t,t+\mathrm{d}t]}} \Big\{ G(u_t)e^{-\delta t}\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t)$$

$$+\Big(J_t + \mu(x_t, u_t)J_x + \tfrac{1}{2}\sigma^2(x_t)J_{xx} + m(y_t)J_y + \tfrac{1}{2}s^2(y_t)J_{yy} + \sigma(x_t)s(y_t)\rho J_{xy} \Big)\mathrm{d}t \Big\}$$

Si se divide entre $\mathrm{d}t$ a ambos miembros de la expresión anterior, se sigue que

$$0 = \max_{u_t} \Big\{ G(u_t)e^{-\delta t} + \frac{o(\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}t}$$

$$+J_t + \mu(x_t, u_t)J_x + \tfrac{1}{2}\sigma^2(x_t)J_{xx} + m(y_t)J_y + \tfrac{1}{2}s^2(y_t)J_{yy} + \sigma(x_t)s(y_t)\rho J_{xy} \Big\}$$

Se utiliza ahora el hecho de que $o(\mathrm{d}t)/\mathrm{d}t \to 0$ cuando $\mathrm{d}t \to 0$, entonces

$$0 = \max_{u_t} \Big\{ G(u_t)e^{-\delta t} + J_t + \mu(x_t, u_t)J_x + \tfrac{1}{2}\sigma^2(x_t)J_{xx}$$

$$+m(y_t)J_y + \tfrac{1}{2}s^2(y_t)J_{yy} + \sigma(x_t)s(y_t)\rho J_{xy} \Big\}$$

La expresión anterior es la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Si u_t es máximo, entonces

$$0 = G(u_t)e^{-\delta t} + J_t + \mu(x_t, u_t)J_x + \tfrac{1}{2}\sigma^2(x_t)J_{xx} + m(y_t)J_y$$

$$+\tfrac{1}{2}s^2(y_t)J_{yy} + \sigma(x_t)s(y_t)\rho J_{xy}. \tag{4.7}$$

Dada la forma separable de la función J, se propone como candidato de solución de la ecuación diferencial parcial anterior a

$$J(x_t, y_t, t) = \frac{1}{\delta}G(x_t)F(y_t, t)e^{-\delta t}.$$

Ahora se calcula la derivada parcial de J con respecto de t, esto es,

$$J_t = -GFe^{-\delta t} + \frac{1}{\delta}GF_te^{-\delta t}.$$

Asimismo, las primeras y segundas derivadas con respecto de x_t y y_t están dadas por:

$$J_x = \frac{1}{\delta}G'Fe^{-\delta t}, \qquad J_y = \frac{1}{\delta}GF_ye^{-\delta t},$$

$$J_{xx} = \frac{1}{\delta} G'' F e^{-\delta t}, \qquad J_{yy} = \frac{1}{\delta} G F_{yy} e^{-\delta t}$$

y

$$J_{xy} = G' F_y e^{-\delta t}.$$

Si estas derivadas parciales se sustituyen en la ecuación (4.7) se tiene:

$$0 = \delta[G(u_t) - G(x_t)F(y_t, t)] + G(x_t)F_t(y_t, t) + \mu(x_t, u_t)G'(x_t)F(y_t, t)$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma^2(x_t)G''(x_t)F(y_t, t) + m(y_t)G(x_t)F_y(y_t, t)$$

$$+ \frac{1}{2}s^2(y_t)G(x_t)F_{yy}(y_t, t) + \sigma(x_t)s(y_t)\rho G'(x_t)F_y(y_t, t)$$

Al derivar la ecuación anterior con respecto de la variable de control u_t, se sigue que

$$G'(u_t) + \frac{1}{\delta} G'(x_t) F(y_t, t) \frac{\partial \mu(x_t, u_t)}{\partial u_t} = 0. \tag{4.8}$$

Bajo ciertas condiciones de G, F y μ, la ecuación anterior caracteriza al control óptimo u_t en función de x_t y y_t.

4.4 Consumidor-inversionista con función de utilidad con coeficiente constante de aversión al riesgo

En la presente sección, se estudiará el problema del consumo que tiene agente racional que toma decisiones en un tiempo continuo; esto se resolverá desde dos enfoques: el enfoque determinista o también conocido como el Hamiltoniano y el enfoque estocástico.

Considere un consumidor racional que desea resolver el siguiente problema:

$$\underset{c_t}{\text{Maximizar}} \quad \int_0^\infty \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} \mathrm{d}t$$

sujeto a la siguiente restricción:

$$\dot{a}_t = a_t r - c_t, \qquad a_0 \ \text{ conocido},$$

donde c_t es el consumo del agente racional, δ es la tasa subjetiva de descuento y r es la tasa de interés real.

4.4.1 Control óptimo determinista (Hamiltoniano)

Así como para resolver problemas de optimización en algunos casos se usa el Lagrangiano, en esta parte se resolverá el problema del consumidor racional con la técnica conocida como Hamiltoniano. Aquí se utilizará la siguiente función de utilidad:

$$\frac{c_t^\gamma}{\gamma}$$

Para que esta función de utilidad sea decreciente se debe cumplir que $\gamma < 1$.

El Hamiltoniano está dado por:

$$\mathcal{H}(c_t, a_t\lambda_t) = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} - \lambda_t(c_t - a_t r).$$

Las condiciones de primer orden para resolver el Hamiltoniano son:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c_t} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda_t} = \dot{a}_t \qquad \text{y} \qquad -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial a_t} = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \delta. \tag{4.9}$$

Al derivar parcialmente el Hamiltoniando con respecto a las variables relevantes, se obtiene:

$$c_t^{\gamma-1} - \lambda_t = 0, \tag{4.10}$$

$$\dot{a}_t = r a_t - c_t \tag{4.11}$$

y

$$-\lambda_t r = \dot{\lambda}_t - \lambda_t \delta. \tag{4.12}$$

A partir de la ecuación (4.12), se obtiene:

$$\dot{\lambda}_t - \lambda(\delta - r) = 0.$$

Una solución de la expresión anterior, con una condición inicial de λ_0 puede ser:

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{(\delta - r)t}.$$

Ahora se sustituye el valor de λ_t en la ecuación (4.10)

$$c_t = \lambda_0^{1/(\gamma-1)} e^{(\delta - r)t/(\gamma-1)}. \tag{4.13}$$

Posteriormente, se despeja c_t de la ecuación (4.11) y se multiplica por e^{-rt}. A continuación se calcula la integral de 0 a ∞, con lo cual se obtiene

$$\int_0^\infty c_t e^{-rt} \mathrm{d}t = r \int_0^\infty a_t e^{-rt} \mathrm{d}t - \int_0^\infty \dot{a}_t e^{-rt} \mathrm{d}t. \tag{4.14}$$

Esta integral se resuelve por partes y se llega al siguiente resultado

$$\int_0^\infty r a_t e^{-rt} \mathrm{d}t = -a_t e^{-rt} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \dot{a}_t e^{-rt} \mathrm{d}t.$$

Si se supone que $\lim_{t\to\infty} a_t e^{-rt} = 0$ en la ecuación anterior y el resultado se sustituye en (4.14), se verifica que

$$\int_0^\infty c_t e^{-rt} \mathrm{d}t = a_0. \tag{4.15}$$

Si se sustituye (4.10) en esta ecuación, se obtiene

$$a_0 = \lambda_0^{1/(\gamma-1)} \int_0^\infty e^{-(\delta - r\gamma)t/(1-\gamma)} \mathrm{d}t,$$

por lo que

$$a_0 = \lambda_0^{1/(\gamma-1)} \left(\frac{1-\gamma}{\delta - r\gamma} \right).$$

En virtud de (4.13), el consumo está dado por

$$c_t = a_0 \left(\frac{\delta - r\gamma}{1-\gamma} \right) e^{(r-\delta)t/(1-\gamma)}. \tag{4.16}$$

Este es el consumo que debe tener un agente racional para optimizar su función de utilidad. Es obvio que para que este consumo sea positivo se tiene que cumplir $\delta > r\gamma$.

4.4.2 Cálculo de variaciones

En la presente sección se utilizará el cálculo de variaciones para resolver el problema del consumo óptimo de un consumidor-inversionista que desea obtener un consumo óptimo dada una función de utilidad. En este caso, se analizará la misma función de utilidad que se utilizó en la sección anterior.

$$\underset{c_t}{\text{Maximizar}} \quad \int_0^\infty \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} \mathrm{d}t$$

sujeto a la siguiente restricción:

$$a_0 = \int_0^\infty c_t e^{-rt} \mathrm{d}t. \tag{4.17}$$

Aquí se usará la técnica del Lagrangiano, la cual se obtiene de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}(c_t, \mu) = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t} + \mu c_t e^{-rt}.$$

Se deriva parcialmente el lagrangiano con respecto a c_t y se iguala a cero, es decir,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = 0,$$

$$c_t^{\gamma-1} e^{-\delta t} - \mu e^{-rt} = 0.$$

Se despeja c_t de la expresión anterior,

$$c_t = \mu^{1/(\gamma-1)} e^{(\delta-r)t/(\gamma-1)}.$$

Se sustituye la expresión anterior en la ecuación (4.17),

$$a_0 = \mu^{1/(\gamma-1)} \int_0^\infty e^{-(\delta-r\gamma)t/(1-\gamma)} \mathrm{d}t,$$

con lo cual se obtiene nuevamente la expresión de la ecuación (4.16).

4.4.3 Condición de Hamilton-Jacobi-Bellman, programación dinámica determinista

En esta sección se utilizará la técnica de Hamilton-Jacobi-Bellman para obtener cuál sería el consumo óptimo de un consumidor racional dada la misma función de utilidad que en las secciones anteriores. Para ello, considere

$$J(a_t, t) = \max_{c_t} \left\{ \int_t^\infty \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} \mathrm{d}s \right\}, \tag{4.18}$$

la cual se va resolver de forma recursiva

$$J(a_t, t) = \max_{c_t} \left\{ \int_t^\infty \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} \mathrm{d}s \right\}$$

Ahora se separa la integral en la suma de dos integrales,

$$J(a_t,t) = \max_{c_t}\left\{\int_t^{t+\mathrm{d}t}\frac{c_s^\gamma}{\gamma}e^{-\delta s}\mathrm{d}s + \int_{t+\mathrm{d}t}^{\infty}\frac{c_s^\gamma}{\gamma}e^{-\delta s}\mathrm{d}s\right\}$$

Se usa $J(a_t,t)$ y se sustituye en la expresión anterior,

$$J(a_t,t) = \max_{c|_{[t,t+\mathrm{d}t]}}\left\{\frac{c_t^\gamma}{\gamma}e^{-\delta t}\mathrm{d}t + J(a_t+\mathrm{d}a_t, t+\mathrm{d}t) + o(\mathrm{d}t)\right\} \tag{4.19}$$

$$J(a_t,t) = \max_{c|_{[t,t+\mathrm{d}t]}}\left\{\frac{c_t^\gamma}{\gamma}e^{-\delta t}\mathrm{d}t + J(a_t,t) + J_t\mathrm{d}t + J_a\mathrm{d}a + o(\mathrm{d}t)\right\}$$

$$J(a_t,t) = \max_{c|_{[t,t+\mathrm{d}t]}}\left\{\frac{c_t^\gamma}{\gamma}e^{-\delta t} + J(a_t,t) + J_t + J_a\dot{a}_t + \frac{o(\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}t}\right\}$$

$o(\mathrm{d}t)/\mathrm{d}t \to 0$ cuando $\mathrm{d}t \to 0$,

$$J(a_t,t) = \max_{c_t}\left\{e^{-\delta t}\frac{c_t^\gamma}{\gamma} + J(a_t,t) + J_t + J_a(a_tr - c_t)\right\}.$$

Se elimina $J(a_t,t)$ en ambos miembros de la expresión anterior,

$$0 = \max_{c_t}\left\{e^{-\delta t}\frac{c_t^\gamma}{\gamma} + J_t + J_a(a_tr - c_t)\right\}. \tag{4.20}$$

Bajo la condición de que c_t es máximo, entonces se debe cumplir:

$$0 = e^{-\delta t}\frac{c_t^\gamma}{\gamma} + J_t + J_a(a_tr - c_t). \tag{4.21}$$

Ahora, se propone como candidato para resolver la ecuación (4.20) a

$$J(a_t,t) = V(a_t)e^{-\delta t}.$$

Si se sustituye la expresión anterior en la ecuación (4.21), se obtiene

$$0 = \frac{c_t^\gamma}{\gamma}e^{-\delta t} - \delta V(a_t)e^{-\delta t} + V'(a_t)(a_tr - c_t)e^{-\delta t}.$$

Ahora se divide la expresión anterior entre $e^{-\delta t}$ y se tiene,

$$0 = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} - \delta V(a_t) + V'(a_t)(a_tr - c_t) \tag{4.22}$$

Se va elegir ahora a

$$V(a_t) = \frac{\beta a_t^\gamma}{\gamma},$$

al sustituir la expresión anterior en la ecuación (4.22), se obtiene

$$0 = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} - \delta\beta \frac{a_t^\gamma}{\gamma} + \beta a_t^{\gamma-1}(a_t r - c_t).$$

Ahora se deriva la expresión anterior con respecto a c_t y se despeja c_t

$$c_t = \beta^{1/(\gamma-1)} a_t. \tag{4.23}$$

Luego, si se sustituye la ecuación anterior en la ecuación (4.21), se obtiene

$$0 = \frac{\beta^{\gamma/(\gamma-1)}}{\gamma} - \frac{\delta\beta}{\gamma} + \beta r - \beta^{\gamma/(\gamma-1)}, \tag{4.24}$$

de donde despejando β nos queda:

$$\beta^{1/(\gamma-1)} = \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{\delta}{\gamma} - r\right) = \frac{\delta - \gamma r}{1-\gamma}. \tag{4.25}$$

Después de sustituir la ecuación anterior en la ecuación (4.23), se obtiene

$$c_t = \left(\frac{\delta - \gamma r}{1-\gamma}\right) a_t. \tag{4.26}$$

Se sabe que la restricción está dada por:

$$\dot{a}_t = r a_t - c_t = r a_t - \alpha a_t = (r - \alpha) a_t,$$

donde $\alpha = (\delta - \gamma r)/(1-\gamma)$, se tiene

$$a_t = a_0 e^{(r-\alpha)t}.$$

Observe ahora que

$$r - \alpha = r - \frac{\delta - \gamma r}{1-\gamma} = \frac{r - \delta}{1-\gamma}.$$

Por lo tanto,

$$a_t = a_0 e^{(r-\delta)/(1-\gamma)t}.$$

Finalmente,

$$c_t = a_0 \left(\frac{\delta - \gamma r}{1-\gamma}\right) e^{(r-\delta)t/(1-\gamma)}.$$

4.5 Condición de Hamilton-Jacobi-Bellman, programación dinámica estocástica y valuación de opciones

En esta sección se supone que el agente tiene acceso a tres activos financieros: un bono de precio b_t libre de riesgo de incumplimiento que paga tasa fija r, una acción de precio S_t y una opción sobre dicha acción $c(S_t, t)$. El rendimiento del activo, en este caso la acción, es:

$$\mathrm{d}R_S = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}X_t. \tag{4.27}$$

Asimismo, suponga que el rendimiento que paga el bono está dado por

$$\mathrm{d}R_b = r\mathrm{d}t. \tag{4.28}$$

Al aplicar el lema de Itô al precio de una opción, se obtiene:

$$\mathrm{d}R_c = \frac{\mathrm{d}c}{c_t} = \mu_c \mathrm{d}t + \sigma_c \mathrm{d}X_t, \tag{4.29}$$

donde R_c es el rendimiento de la opción y además:

$$\mu_c \equiv \left(\frac{\partial c_t}{\partial t} + \frac{\partial c_t}{\partial S_t}\mu S_t + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 c_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 \right) \frac{1}{c_t}$$

y

$$\sigma_c = \frac{\partial c_t}{\partial S_t}\sigma S_t \frac{1}{c_t}.$$

Aquí se define a $w_{1t} = S_t/a_t$ como la proporción de la riqueza que el individuo asigna a la tenencia de acciones, a $w_{2t} = c/a_t$ como la proporción de la riqueza que asigna a una opción europea de compra sobre la acción, y a $1 - w_{1t} - w_{2t}$ como la fracción complementaria que se asigna a un instrumento libre de riesgo que paga un rendimiento r constante a cualquier plazo. El objetivo del agente racional es el siguiente:

$$\underset{c_t}{\text{Maximizar}} \quad \mathrm{E}\left[\int_0^\infty \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s} \mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_t \right], \tag{4.30}$$

sujeto a a la siguiente restricción presupuestal:

$$\mathrm{d}a_t = a_t w_{1t} \mathrm{d}R_S + a_t w_{2t} \mathrm{d}R_c + a_t(1 - w_{1t} - w_{2t})\mathrm{d}R_b - c_t \mathrm{d}t. \tag{4.31}$$

donde c_t representa el consumo del agente racional en el tiempo t.

Ahora se van a sustituir las ecuaciones (4.27), (4.28) y (4.29) en la ecuación (4.30) con lo cual se obtiene:

$$\mathrm{d}a_t = a_t\left(r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_c - r)w_{2t} - \frac{c_t}{a_t}\right)\mathrm{d}t + a_t(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)\mathrm{d}X_t.$$

Se define ahora:

$$J(a_t, t) = \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}} \mathrm{E}\left[\int_t^\infty \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s}\mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

Se descompone la integral en una suma de dos integrales,

$$J(a_t, t) = \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}} \mathrm{E}\left[\int_t^{t+\mathrm{d}t} \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s}\mathrm{d}s + \int_{t+\mathrm{d}t}^\infty \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s}\mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

luego se obtiene que:

$$J(a_t, t) = \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}|_{[t,t+\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\left[\int_t^{t+\mathrm{d}t} \frac{c_s^\gamma}{\gamma} e^{-\delta s}\mathrm{d}s + J(a_t + \mathrm{d}a_t, t + \mathrm{d}t) \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

$$J(a_t, t) = \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}|_{[t,t+\mathrm{d}t]}} \mathrm{E}\left[\frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t}\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + J(a_t, t) + \mathrm{d}J(a_t, t) \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

Si se aplica el lema de Itô a $J = J(a_t, t)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 = \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}} \mathrm{E}\Bigg[&\frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t}\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) + \Bigg[J_t + J_a a_t\left(r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_c - r)w_{2t} - \frac{c_t}{a_t}\right) \\ &+ \tfrac{1}{2}J_{aa}a_t^2(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)^2\Bigg]\mathrm{d}t + J_a a_t(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)\mathrm{d}W_t \Bigg| \mathcal{F}_t\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Ahora se va a aplicar la esperanza matemática, luego se divide cada término entre dt y se toma el límite cuando d$t \to 0$,, con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 = \max_{c_t, w_{1t}, w_{2t}} \Bigg\{&\frac{c_t^\gamma}{\gamma} e^{-\delta t}\mathrm{d}t + J_t + J_a a_t\left(r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_c - r)w_{2t} - \frac{c_t}{a_t}\right) \\ &+ \tfrac{1}{2}J_{aa}a_t^2(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)^2\Bigg\}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Se va escoger como candidato a solución una expresión de la forma

$$J(a_t, t) = V(a_t)e^{-\delta t},$$

Ahora al derivar $J(a_t, t)$ parcialmente con respecto de a y t, se obtiene:

$$J_a = V'(a_t)e^{-\delta t}, \qquad J_{aa} = V''(a_t)e^{-\delta t} \qquad \text{y} \qquad J_t = -\delta V(a_t)e^{-\delta t}.$$

Ahora bien, si w_{1t}, w_{2t} y c_t son óptimos, se tiene que

$$0 = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} - \delta V(a_t) + V'(a_t)a_t\left(r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_c - r)w_{2t} - \frac{c_t}{a_t}\right) + \tfrac{1}{2}V''(a_t)a_t^2(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)^2. \tag{4.34}$$

Suponga que

$$V(a_t) = \beta\frac{a_t^\gamma}{\gamma},$$

entonces al derivar $V(a_t,)$ hasta el segundo orden, se obtiene:

$$V'(a_t) = \beta a_t^{(\gamma-1)} \qquad \text{y} \qquad V''(a_t) = \beta(\gamma-1)a_t^{(\gamma-2)}.$$

Las expresiones anteriores se sustituyen en la ecuación (4.34), luego ésta se convierte en:

$$0 = \frac{c_t^\gamma}{\gamma} - \delta\beta\frac{a_t^\gamma}{\gamma} + \beta a_t^\gamma\left(r + (\mu - r)w_{1t} + (\mu_c - r)w_{2t} - \frac{c_t}{a_t}\right) + \tfrac{1}{2}\beta(\gamma-1)a_t^\gamma(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)^2. \tag{4.35}$$

Al Derivar la ecuación anterior con respecto de c_t, w_{1t} y w_{2t}, se obtienen, respectivamente:

$$c_t^{\gamma-1} - \beta a_t^{\gamma-1} = 0, \tag{4.36}$$

$$\beta a_t^\gamma(\mu - r) + \beta(\gamma-1)a_t^\gamma(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)\sigma = 0$$

y

$$\beta a_t^\gamma(\mu_c - r) + \beta(\gamma-1)a_t^\gamma(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)\sigma_c = 0.$$

Las tres últimas expresiones se van reescribir de la siguiente forma:

$$c_t = \beta^{1/(\gamma-1)}a_t,$$

$$\mu - r = (1-\gamma)(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)\sigma \tag{4.37}$$

y

$$\mu_c - r = (1-\gamma)(w_{1t}\sigma + w_{2t}\sigma_c)\sigma_c. \tag{4.38}$$

De las ecuaciones (4.37) y (4.38) se concluye que los premios al riesgo de S_t y $c(S_t, t)$ son iguales, es decir,

$$\frac{\mu_c - r}{\sigma_c} = \frac{\mu - r}{\sigma}. \tag{4.39}$$

Ahora se sustituye μ_c y σ_c en la ecuación (4.39) y se obtiene:

$$\left(\frac{\partial c_t}{\partial t} + \frac{\partial c_t}{\partial S_t}\mu S_t + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 c_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right) - rc_t = (\mu - r)\frac{\partial c_t}{\partial S_t}S_t,$$

lo cual nos lleva a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes:

$$\frac{\partial c_t}{\partial t} + \frac{\partial c_t}{\partial S_t}\mu S_t + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 c_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 - rc_t = 0,$$

junto con la condición de frontera $c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0)$.

5. Maximización de utilidad y valuación de opciones con volatilidad estocástica

En esta sección se considerará un agente racional que desea maximizar su utilidad para valuar una opción con volatilidad estocástica y con base en ello se obtendrá la ecuación diferencial parcial que determina su precio.

5.1 Introducción

Se supone que el consumidor-inversionista racional tiene acceso a tres activos finacieros, estos son: un bono libre de riesgo de incumplimiento, una acción y una opción sobre la acción. Un supuesto importante en este estudio es que no existen costos de transacción

5.2 Planteamiento del problema de valuación

El precio de la acción y la varianza siguen un movimiento geométrico Browniano, es decir,

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma_t S_t \mathrm{d}X_t, \\ \\ \mathrm{d}V_t = \alpha V_t \mathrm{d}t + \beta V_t \mathrm{d}Y_t, \end{cases} \tag{5.1}$$

donde μ es el parámetro de tendencia del subyacente, α es la tendencia de la varianza y β es la volatilidad de la varianza, y siempre tiene que ser mayor a cero. Los movimientos

Brownianos $\mathrm{d}X_t$ y $\mathrm{d}Y_t$ no son independientes, es decir, están correlacionados de tal manera que se cumple que

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{d}X_t, \mathrm{d}Y_t) = \rho \mathrm{d}t.$$

Como se vio anteriormente, este agente tiene acceso al bono con tasa r, la acción de precio S_t y la opción sobre esta acción, $c(S_t, V_t, t)$, se denota a las proporciones que el agente asigna a la acción, la opción y el bono como x_t, y_t y $1 - x_t - y_t$ respectivamente. Si la riqueza del consumidor-inversionista racional es a_t, entonces su restricción presupuestal va ser:

$$\mathrm{d}a_t = x_t a_t \mathrm{d}R_S + y_t a_t \mathrm{d}R_c + (1 - x_t - y_t) a_t r \mathrm{d}t - c_t \mathrm{d}t,$$

donde $\mathrm{d}R_S = \mathrm{d}S_t/S_t$ es el rendimiento de la acción y y $\mathrm{d}R_c = \mathrm{d}c/c$ es el rendimiento de la opción, c_t es el consumo del agente en el tiempo t. Al aplicar el lema de Itô al precio de una opción se sigue que,

$$\mathrm{d}c = \mu_c c \mathrm{d}t + \sigma_c c \mathrm{d}X_t + \xi_c c \mathrm{d}Y_t, \tag{5.2}$$

donde se cumple que

$$\mu_c = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} + \alpha V_t \frac{\partial c}{\partial V_t} + \frac{1}{2}{\sigma_t}^2 {S_t}^2 \frac{\partial^2 c}{\partial {S_t}^2} + \frac{1}{2}\beta^2 {V_t}^2 \frac{\partial^2 c}{\partial {V_t}^2} + \rho\beta V_t \sigma_t S_t \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t}\right), \tag{5.3}$$

$$\sigma_c = \frac{1}{c}\sigma_t S_t \frac{\partial c}{\partial S_t} \tag{5.4}$$

y

$$\xi_c = \frac{1}{c}\beta V_t \frac{\partial c}{\partial V_t}. \tag{5.5}$$

Al sustituir las expresiones anteriores en la ecuación de la restricción presupuestal se obtiene,

$$\mathrm{d}a_t = a_t \left[r + (\mu - r)x_t + (\mu_c - r)y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] \mathrm{d}t + a_t(x_t\sigma_t + y_t\sigma_c)\mathrm{d}X_t + a_t y_t \xi_c \mathrm{d}Y_t. \tag{5.6}$$

Suponga que la función de utilidad indirecta, o bienestar económico, del individuo está dada por:

$$J(a_t, V_t, t) = \max_{\{c_t, x_t, y_t\}} \mathrm{E}\left[\int_t^T u(c_s) e^{-\delta s} \mathrm{d}s + b(a_T, T) \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right], \tag{5.7}$$

sujeta a la ecuación (5.6). El parámetro $\delta > 0$ determina la tasa subjetiva de descuento del individuo, $\mathcal{F}_t$ denota la información relevante disponible al tiempo t y $b(a_T, T)$ representa la función de legado (herencia o salvamento) en T. Observe que también T representa la fecha de ejercicio de la opción. Por último, se supone que $u(\cdot)$ satisface $u' > 0$ y $u'' < 0$, es decir, la función de utilidad es estrictamente creciente y cóncava. Es decir, la utilidad marginal es positiva pero decreciente.

En este estudio se resolverá el problema para una función de utilidad con coeficiente constante de aversión al riesgo y para una función logarítmica

5.3 Función de utilidad con coeficiente constante de aversión al riesgo

Se tiene una función de utilidad de la forma

$$u(c_t) = \frac{{c_t}^{\gamma}}{\gamma} \tag{5.8}$$

y que el término de legado es

$$b(a_T, T) = e^{-\delta T} \frac{{a_T}^{\gamma}}{\gamma}, \tag{5.9}$$

donde γ es el parámetro de aversión al riesgo. Si $0 < \gamma < 1$, el inversionista es adverso al riesgo, si $\gamma = 1$ el inversionista es neutral al riesgo.

La ecuación (5.7) debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden,

$$\begin{aligned} 0 = \max_{\{x_t, y_t, c_t\}} \Bigg\{ & \frac{c_t^{\gamma}}{\gamma} e^{-\delta t} + \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial a_t} a_t \left[r + (\mu - r)x_t + (\mu_c - r)y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2} a_t^2 \left[(x_t\sigma_t + y_t\sigma_c)^2 + y_t^2\xi_c^2 + 2(x_t\sigma_t + y_t\sigma_c)y_t\xi_c\rho \right] + \frac{\partial J}{\partial V_t} \alpha V_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 J}{\partial V_t^2} \beta^2 V_t^2 \\ & + \frac{\partial^2 J}{\partial a_t \partial V_t} a_t \beta V_t \left[(x_t\sigma_t + y_t\sigma_c)\rho + y_t\xi_c \right] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Si ahora se igualan a cero las derivadas parciales de la ecuación (5.10) con respecto de c_t, x_t y y_t se obtiene un máximo con las siguientes condiciones

$$e^{-\delta t} {c_t}^{\gamma - 1} - \frac{\partial J}{\partial a_t} = 0, \tag{5.11}$$

$$\mu - r = -\big(x_t\sigma_t + y_t\sigma_c + y_t\xi_c\rho\big)\sigma_t a_t \frac{\dfrac{\partial^2 J}{\partial a_t^2}}{\dfrac{\partial J}{\partial a_t}} - \sigma_t\beta V_t\rho\frac{\dfrac{\partial^2 J}{\partial a_t\partial V_t}}{\dfrac{\partial J}{\partial a_t}} \tag{5.12}$$

y

$$\mu_c - r = -\left[(y_t\sigma_c + x_t\sigma_t)\sigma_c + y_t\xi_c^2 + (x_t\sigma_t + y_t\sigma_c)\xi_c\rho + y_t\sigma_c\xi_c\rho\right] a_t\frac{\dfrac{\partial^2 J}{\partial a_t^2}}{\dfrac{\partial J}{\partial a_t}}$$

$$-(\rho\sigma_c + \xi_c)\beta V_t\frac{\dfrac{\partial^2 J}{\partial a_t\partial V_t}}{\dfrac{\partial J}{\partial a_t}}. \tag{5.13}$$

Un candidato para la solución de las ecuaciones anteriores puede ser:

$$J(a_t, V_t, t) = e^{-\delta t}g(V_t, t)\frac{{a_t}^{\gamma}}{\gamma}, \tag{5.14}$$

Ahora se va derivar parcialmente $J(a_t, V_t, t)$, por lo tanto se obtiene

$$\frac{\partial J}{\partial a_t} = e^{-\delta t}g(V_t, t){a_t}^{\gamma-1},$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial a_t^2} = (\gamma-1)e^{-\delta t}g(V_t, t){a_t}^{\gamma-2}$$

y

$$\frac{\partial^2 J}{\partial a_t\partial V_t} = e^{-\delta t}\frac{\partial g}{\partial V_t}{a_t}^{\gamma-1}.$$

Para poder obtener la ecuación diferencial parcial que valúa el precio de una opción se requiere que $x_t = 1$ y $y_t = 0$, es decir, solo se invierta en la acción mas no en la opción ni en el bono libre de riesgo. Después de sustituir estos valores en las ecuaciones (5.11), (5.12) y (5.13), se obtiene

$$c_t^{\gamma-1} = g(V_t, t){a_t}^{\gamma-1}, \tag{5.15}$$

$$\mu - r = (1-\gamma)\sigma_t^2 - \rho\sigma_t\beta V_t\frac{\dfrac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)} \tag{5.16}$$

y

$$\mu_c - r = (1-\gamma)\sigma_t(\sigma_c + \xi_c\rho) - (\sigma_c\rho + \xi_c)\beta V_t\frac{\dfrac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t, t)}. \tag{5.17}$$

Los premios al riesgo para el activo subyacente y para la opción están dados por las ecuaciones:

$$\lambda_S = \frac{\mu - r}{\sigma_t} = (1-\gamma)\sigma_t - \rho\beta V_t \frac{\dfrac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)} \tag{5.18}$$

y

$$\lambda_c = \frac{\mu_c - r}{\sigma_c} = \left(1 + \frac{\xi_c}{\sigma_c}\rho\right)(1-\gamma)\sigma_t - \left(\rho + \frac{\xi_c}{\sigma_c}\right)\beta V_t \frac{\dfrac{\partial g}{\partial V_t}}{g(V_t,t)}.$$

Ahora se despeja λ_c de las ecuaciones anteriores y se obtiene,

$$\lambda_c = \lambda_S + \frac{\xi_c}{\sigma_c}\rho(1-\gamma)\sigma_t - \frac{\xi_c}{\sigma_c}\left(\frac{\beta V_t}{g}\right)\frac{\partial g}{\partial V_t},$$

la cual nos lleva a obtener la ecuación diferencial parcial estocástica para valuar una opción,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2} V_t {S_t}^2 \frac{\partial^2 c}{\partial {S_t}^2} - rc + \left[\alpha V_t - \beta V_t \rho (1-\gamma)\sigma_t + \left(\frac{\beta^2 V_t^2}{g}\right)\frac{\partial g}{\partial V_t}\right]\frac{\partial c}{\partial V_t} \\ &+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial {V_t}^2}\beta^2 V_t^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t}\beta V_t^{3/2} S_t \rho = 0,\end{aligned} \tag{5.19}$$

junto con la condición de frontera $c(S_t, V_t, T) = \max(S_t - K, 0)$.

5.4 Función de utilidad logarítmica

En esta sección se va seguir considerando un agente maximizador de su utilidad que tiene acceso a los mismos activos de la sección anterior, y se utilizará la función logarítmica lo cual lleva a pensar que el agente es adverso al riesgo. Por lo tanto, la forma de su función de utilidad esperada es:

$$\mathrm{E}\left[\int_t^T \ln(c_s) e^{-\delta s} \mathrm{d}s + \ln(a_T)\frac{e^{-\delta T}}{\delta} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right], \tag{5.20}$$

donde δ es la tasa subjetiva de descuento y $\mathcal{F}_t$ es la información disponible al tiempo t.

El consumidor-inversionista racional tiene acceso a tres diferentes activos, los cuales son: un título de deuda de precio b_t, una acción de precio S_t y una opción europea de compra de precio $c(S_t, V_t, t)$ sobre la acción. En consecuencia, la riqueza real, a_t, del individuo está dada por:

$$a_t = b_t + S_t + c(S_t, V_t, t). \tag{5.21}$$

Sea $x_t = S_t/a_t$ la proporción de la riqueza que el consumidor asigna a la acción, $y_t = c/a_t$ la proporción que asigna a la opción y $1 - x_t - y_t = b_t/a_t$ la proporción que asigna al bono. De esta forma la evolución de su riqueza sigue la siguiente ecuación:

$$\mathrm{d}a_t = a_t x_t \mathrm{d}R_S + a_t y_t \mathrm{d}R_c + a_t(1 - x_t - y_t)\mathrm{d}R_b - c_t \mathrm{d}t, \tag{5.22}$$

donde $\mathrm{d}R_S$ es el rendimiento del activo con riesgo, $\mathrm{d}R_c$ es el rendimiento de la opción y $\mathrm{d}R_b = r\mathrm{d}t$ el rendimiento del bono. Suponga que

$$\mathrm{d}R_S = \mu \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}X_t, \tag{5.23}$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma_t \geq 0$ y $\mathrm{d}X_t$ un movimiento Browniano y

$$\mathrm{d}V_t = \alpha V_t \mathrm{d}t + \beta V_t \mathrm{d}Y_t, \tag{5.24}$$

donde $V_t = \sigma_t^2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ y $\mathrm{d}Y_t$ un movimiento Browniano que cumple la siguiente condición:

$$\mathrm{Cov}(\mathrm{d}X_t, \mathrm{d}Y_t) = \rho \mathrm{d}t.$$

Por medio del lema de Itô se va calcular el cambio en el precio de la opción cuando el tiempo aumenta de t a $t + \mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}c = &\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{\partial c}{\partial V_t}\alpha V_t + \tfrac{1}{2}\sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \tfrac{1}{2}\beta^2 V_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} + \sigma_t \beta S_t V_t \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t}\right)\mathrm{d}t \\ &+ \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma_t S_t \mathrm{d}W_t + \frac{\partial c}{\partial V_t}\beta V_t \mathrm{d}Z_t\end{aligned}$$

ó

$$\mathrm{d}c = \mu_c c \mathrm{d}t + \sigma_c c \mathrm{d}W_t + \xi_c c \mathrm{d}Z_t,$$

donde

$$\mu_c = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{\partial c}{\partial V_t}\alpha V_t + \tfrac{1}{2}\sigma_t^2 S_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} + \tfrac{1}{2}\beta^2 V_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} + \sigma_t \beta S_t V_t \rho \frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial V_t}\right) \Big/ c, \tag{5.25}$$

$$\sigma_c = \frac{\partial c}{\partial S_t}\frac{\sigma_t S_t}{c} \tag{5.26}$$

y

$$\xi_c = \frac{\partial c}{\partial V_t}\frac{\beta V_t}{c}. \tag{5.27}$$

Ahora se sustituyen las ecuaciones (5.23) y (5.25) en (5.22) y se obtiene

$$\mathrm{d}a_t = a_t \left[r + (\mu - r)x_t + (\mu_c - r)y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] \mathrm{d}t + a_t \left[(\sigma_t x_t + \sigma_c y_t)\, \mathrm{d}W_t + y_t \xi_c \mathrm{d}Z_t \right]. \quad (5.28)$$

Sea

$$J(a_t, V_t, t) = \max_{c_t, x_t, y_t} \mathrm{E}\left[\int_t^T \ln(c_s) e^{-\delta s} \mathrm{d}s + \ln(a_T) \frac{e^{-\delta T}}{\delta} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right].$$

Para que se tenga un máximo se tiene que cumplir la siguiente condición necesaria:

$$\begin{aligned} 0 = {} & \ln(c_t) e^{-\delta t} + J_t + J_a a_t \left[r + (\mu - r)x_t + (\mu_c - r)y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] \\ & + \tfrac{1}{2} J_{aa} a_t^2 \left[(\sigma_t x_t + \sigma_c y_t)^2 + \xi_c^2 y_t^2 + 2\,(\sigma_t x_t + \sigma_c y_t)\, \xi_c y_t \rho \right] \\ & + J_V \alpha V_t + \tfrac{1}{2} J_{VV} \beta^2 V_t^2 + J_{aV} a_t V_t \beta \left[(\sigma_t x_t + \sigma_c y_t)\rho + \xi_c y_t \right]. \end{aligned}$$

Se escoge como un candidato para la solución a la siguiente expresión:

$$J(a_t, V_t, t) = [\ln(a_t) + g(V_t, t)] \frac{1}{\delta} e^{-\delta t}.$$

En este caso, se sigue que $g(V_t, T) = 0$. Asimismo,

$$\begin{aligned} 0 = {} & \ln(c_t) - [\ln(a_t) + g(V_t, t)] + \frac{1}{\delta} \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{\delta} \left[r + (\mu - r)x_t + (\mu_c - r)y_t - \frac{c_t}{a_t} \right] \\ & - \frac{1}{2\delta} \left[(\sigma_t x_t + \sigma_c y_t)^2 + \xi_c^2 y_t^2 + 2\,(\sigma_t x_t + \sigma_c y_t)\, \xi_c y_t \rho \right] + \frac{\alpha}{\delta} \frac{\partial g}{\partial V_t} V_t + \frac{\beta^2}{2\delta} \frac{\partial^2 g}{\partial V_t^2} V_t^2. \end{aligned}$$

Las condiciones de primer orden son

$$c_t = \delta a_t, \quad (5.29)$$

$$\mu - r = (\sigma_t x_t + \sigma_c y_t)\, \sigma_t + \xi_c y_t \sigma_t \rho$$

y

$$\mu_c - r = (\sigma_t x_t + \sigma_c y_t)\, \sigma_c + y_t \xi_c^2 + (\sigma_t x_t + \sigma_c y_t)\, \xi_c \rho + y_t \sigma_c \xi_c \rho. \quad (5.30)$$

Se cumple que $\beta = \frac{1}{\delta}$, en consecuencia las ecuaciones (5.29) y (5.30) se pueden escribir como:

$$\lambda_S \equiv \frac{\mu - r}{\sigma_t} = \sigma_t x_t + \sigma_c y_t + \xi_c y_t \rho \quad (5.31)$$

y

$$\lambda_c \equiv \frac{\mu_c - r}{\sigma_c} = \sigma_t x_t + \sigma_c y_t + y_t \frac{\xi_c^2}{\sigma_c} + (\sigma_t x_t + \sigma_c y_t)\,\rho \frac{\xi_c}{\sigma_c} + y_t \xi_c \rho.$$

Luego, se sustituye la ecuación (5.31) en λ_c y después se despeja, por lo tanto se obtiene:

$$\lambda_c = \lambda_S \left(1 + \rho \frac{\xi_c}{\sigma_c}\right) + y_t \frac{\xi_c^2}{\sigma_c} \left(1 - \rho^2\right). \tag{5.32}$$

Si $y_t = 0$ y $x_t = 1$, es decir, sólo se invierte en la acción, se concluye:

$$\lambda_c = \lambda_S \left(1 + \rho \frac{\xi_c}{\sigma_c}\right). \tag{5.33}$$

Después de sustituir (5.25), (5.26) y (5.27) en la ecuación (5.33), se obtiene

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} V_t S_t^2 - rc + (\alpha - \lambda\beta) \frac{\partial c}{\partial V_t} V_t + \tfrac{1}{2} \beta^2 V_t^2 \frac{\partial^2 c}{\partial V_t^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial S_t V_t} \beta S_t V_t^{3/2} \rho = 0,$$

donde

$$\lambda \equiv \lambda_S \rho.$$

6. Conclusiones

La aportación principal del presente trabajo de investigación ha sido la incorporación de agentes racionales maximizadores de utilidad, en un ambiente de riesgo e incertidumbre, para valuar opciones europeas cuando la volatilidad es conducida por un proceso estocástico. En el marco de equilibrio parcial se desarrollaron varios modelos de valuación de opciones europeas de compra (*calls*) que utilizan un consumidor-inversionista maximizador de utilidad por un bien genérico de consumo sujeto a una restricción presupuestal, la cual considera la tenencia de un bono libre de riesgo (de incumplimiento), un activo riesgoso con volatilidad estocástica y una opción para cubrir el riesgo de mercado.

Quedan, por supuesto, varias posibles extensiones en la agenda futura de investigación. Por ejemplo falta incorporar otros activos como: saldos reales y bonos con tasa de interés flotante. Estas extensiones harán el análisis un poco más complejo, pero los resultados serán más realistas.

Por último, es importante destacar que aunque el problema del consumidor-inversionista racional se resolvió utilizando una forma funcional específica del índice de satisfacción, la obtención de la ecuación diferencial parcial de BSM es independiente de la función de utilidad.

7. Apéndices

7.1 Lema de Itô

En este apéndice se parte del hecho de que el precio de un *call* depende del precio del activo subyacente y del tiempo de inicio del contrato, es decir, $c = c(S_t, t)$. También se sabe que el movimiento geométrico Browniano es: $\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t$.

Ahora se utiliza una serie de Taylor hasta términos de segundo orden, de tal forma que

$$\mathrm{d}c = \frac{\partial c}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \frac{\partial c}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\left(\mathrm{d}S_t\right)^2 + 2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial t}\left(\mathrm{d}S_t\right)\left(\mathrm{d}t\right) + \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}\left(\mathrm{d}t\right)^2 + \cdots\right)$$

Se reemplaza en la ecuación anterior el movimiento geométrico Browniano,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}c =& \frac{\partial c}{\partial S_t}\left(\mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t\right) + \frac{\partial c}{\partial t}\mathrm{d}t + \\ & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\left(\mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t\right)^2 + 2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial t}\left(\mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t\right)\left(\mathrm{d}t\right) + \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}\left(\mathrm{d}t\right)^2\right) + \cdots\end{aligned}$$

En el cálculo de variables reales, si t es una variable independiente, entonces el cuadrado de una cantidad infinitesimal, $\left(\mathrm{d}t\right)^2$=0, esto quiere decir que si alguna cantidad es tan pequeña como se quiera, entonces su cuadrado es insignificante. También se tiene que si W_t es un movimiento Browniano, entonces se cumple que $\left(\mathrm{d}W_t\right)^2$=d$t$. Por otra parte, $\left(\mathrm{d}t\right)\left(\mathrm{d}W_t\right)$= $\left(\mathrm{d}t\right)\left(\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$=$\left(\mathrm{d}t\right)^{\frac{3}{2}}$, la cual se observa que es una cantidad muy pequeña que se aproxima a cero, entonces, $\left(\mathrm{d}t\right)\left(\mathrm{d}W_t\right)$=0.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}c =& \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t \mathrm{d}t + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t \mathrm{d}W_t + \frac{\partial c}{\partial t}\mathrm{d}t \\ & + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\left(\mu^2 S_t^2\left(\mathrm{d}t\right)^2 + 2\mu\sigma S_t^2\left(\mathrm{d}t\right)\left(\mathrm{d}W_t\right) + \sigma^2 S_t^2\left(\mathrm{d}W_t\right)^2\right)\right. \\ & \left. + 2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial t}\left(\mu S_t\left(\mathrm{d}t\right)^2 + \sigma S_t\left(\mathrm{d}t\right)\left(\mathrm{d}W_t\right)\right) + \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}\left(\mathrm{d}t\right)^2\right].\end{aligned}$$

Como $\left(\mathrm{d}t\right)^2$=0, $\left(\mathrm{d}W_t\right)^2$=d$t$ y $\left(\mathrm{d}t\right)\left(\mathrm{d}W_t\right)$=0, entonces:

$$\mathrm{d}c = \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t \mathrm{d}t + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t \mathrm{d}W_t + \frac{\partial c}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 \mathrm{d}t$$

Al agrupar los términos que tengan dt y dW_t, se obtiene el siguiente resultado que es el lema de Itô:

$$\mathrm{d}c = \left[\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right]\mathrm{d}t + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t \mathrm{d}W_t$$

7.2 Modelo de Black and Scholes

Como se vio en el capítulo de opciones europeas, existen supuestos importantes entre los cuales se tiene que la acción no paga dividendos y que el precio es conducido por un movimiento geométrico Browniano. En el presente apéndice se obtendrá la ecuación parcial diferencial de Black and Scholes. Esta ecuación diferencial parcial es de segundo orden (parabólica). Se supone que el precio del activo subyacente en el tiempo t es aleatorio, es decir, sigue un movimiento geométrico Browniano dado por $\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t$, en donde μ es el rendimiento medio esperado, $\sigma > 0$ es la volatilidad del activo subyacente en la unidad de tiempo y $\mathrm{d}W_t$ es el movimiento Browniano que tiene media de cero y varianza de $\mathrm{d}t$, es decir, satisface $\mathrm{d}W_t \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{d}t)$

De la ecuación diferencial del Lema de Itô, se obtendrá la ecuación diferencial parcial de segundo orden de Black and Scholes. Para ello, se considerará un portafolio con ω_1 unidades del activo subyacente de precio S_t y ω_2 unidades de una opción de compra sobre el subyacente de precio $c(S_t, t)$. Si Π_t denota el valor actual del portafolio, entonces se cumple que:

$\Pi_t = \omega_1 S_t + \omega_2 c(S_t, t)$

$\mathrm{d}\Pi_t = \omega_1 \mathrm{d}S_t + \omega_2 \mathrm{d}c$ es el cambio en el valor del portafolio en un instante $\mathrm{d}t$. Ahora se sustituye la ecuación del movimiento geométrico Browniano y la ecuación del lema de Itô que se calculó anteriormente, entonces:

$$\mathrm{d}\Pi_t = \omega_1 \left(\mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t\right) + \omega_2 \left[\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t \mathrm{d}W_t\right]$$

$$\mathrm{d}\Pi_t = \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t}\right)\mu S_t \mathrm{d}t + \left(\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t}\right)\sigma S_t \mathrm{d}W_t + \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)\omega_2 \mathrm{d}t$$

Para eliminar el riesgo mercado del portafolio se deben seleccionar ω_1 y ω_2 de tal forma que se anule el término estocástico de la ecuación anterior, entonces hay que buscar los valores de ω_1 y ω_2 que hagan que la ecuación $\omega_1 + \omega_2 \frac{\partial c}{\partial S_t} = 0$.

Se tomará el valor de ω_2=1, entonces el valor de $\omega_1 =-\frac{\partial c}{\partial S_t} = -\Delta$. A esta elección se le conoce como cobertura Delta. Si se reemplazan estos valores en la ecuación anterior, se tiene:

$\mathrm{d}\Pi_t = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)\omega_2 \mathrm{d}t$

Al reemplazar los valores ω_1 y ω_2 en el portafolio inicial, se obtiene: $\Pi_t = c - \Delta S_t$, esto quiere decir que se está cubriendo una venta en corto de Δ unidades del subyacente con una opción de compra. Ahora si el valor del portafolio anterior se deposita en un banco que paga una tasa de interés r, entonces el cambio en el valor del portafolio durante dt es: $\mathrm{d}\Pi_t = (c - \Delta S_t)\, r\mathrm{d}t$.

Ahora se igualan los dos diferenciales de los portafolios obtenidos anteriormente, es decir:

$\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)\mathrm{d}t = \left(c - \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t\right) r\mathrm{d}t$

Si se elimina el término dt en ambos lados de la ecuación y se efectúan las operaciones pertinentes, se obtiene:

$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t - rc = 0$

Esta ecuación es la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes para valuar una opción europea de compra en donde las condiciones de frontera y final para determinar una única solución son:

$$c(0,t) = 0 \qquad \text{y} \qquad c(S_t, T) = \max(S_t - K, 0).$$

6.Bibiografía básica

BLACK Fisher and Myron Scholes(1973). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637-654.

COX John , Jonathan E. Ingersoll and Stephen A. Ross(1985). "A theory of the Term structure of Interest Rates". *Econometrica* , vol. 53, Núm. 2,marzo, pp. 385-408.

HESTON Steven (1993)." A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applicaction to Bond and Currency Options". *Review of Financial Studies*, Vol. 6, No. 2, pp. 327-343.

HULL John and Alan White (1987). "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility", *The Journal of Finance*, vol. 42, núm. 2, junio, pp. 281-300.

HULL John C. (1998). Options, Futures and Other Derivatives Securities. Prentice Hall. Third Edition. United States of America.

JARROW, R. and Turnbull, S. (1996). Derivative Securities. Thompson International, United States of America.

LAMOTHE Prósper y Miguel Pérez(2006). Opciones financieras y productos derivados. Mc. Graw Hill, Espana.

MERTON, R.C. (1973)." Theory of Rational Option Pricing". *The Bell Journal of Economic and Management Science*, Vol. 4, No. 1, pp. 141-183.

VENEGAS-MARTINEZ, Francisco. (2001). " Una guía completa para economistas en la valuación de opciones".*Gaceta de Economía* , Año 6, No.12, pp. 155-212.

VENEGAS-MARTINEZ, Francisco. (2005). "Bayesian Inference, Prior Information on Volatility, and Option Pricing: A Maximum Entropy Approach". *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Vol. 8, No. 1, pp. 1-12.

VENEGAS-MARTINEZ, Francisco. (2006). Riesgos Financieros y económicos. Thompson International, 2da reimpresión. México.

VENEGAS-MARTINEZ, Francisco. (2001). "Temporary Stabilization: A Stochastic Analysis". *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 25, No. 9, 1429-1449.

VENEGAS-MARTINEZ, Francisco. (2006a). "Stochastic Temporary Stabilization: Undiversifiable Devaluation and Income Risks". *Economic Modelling*, Vol. 23, No. 1, pp. 157-173.

VENEGAS-MARTINEZ, Francisco. (2006b). "Fiscal policy in a stochastic temporary stabilization model: undiversifiable devaluation risk". *Journal of World Economic Review*, Vol. 1, No. 1, pp. 13-38.

VENEGAS-MARTINEZ, Francisco. (2008). "Temporary Stabilization in Developing Countries and the Real Option of Waiting when Consumption Can Be Delayed". *International Journal of Economic Research*, Vol. 7, forthcoming.

WILMOTT, Paul. (1998). Derivatives (The Theory and Practice of Financial Engineering). John Wiley & Sons, England.