View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Repositorio Institucional Universidad de Medellín

LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁCTICO Y ALTERNATIVA DE APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

EDILBERTO EFRAÍN CAICEDO VALLEJOS

GUSTAVO ADOLFO MADRIGAL ARBOLEDA

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MEDELLÍN

2017

LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA COMO RECURSO DIDÁCTICO Y ALTERNATIVA DE APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

EDILBERTO EFRAÍN CAICEDO VALLEJOS

GUSTAVO ADOLFO MADRIGAL ARBOLEDA

INVESTIGACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ASESOR

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ

UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

MEDELLÍN

2017

Tabla de contenido

INDICE DE FIGURAS

INDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

Este trabajo reconoce la importancia de la enseñanza de la Matemática a nivel escolar, y de algunas implicaciones que podrían enriquecer los procesos de aprendizaje de los estudiantes. Pretende una aproximación a la Historia de la Matemática en su evolución, desarrollo y maduración de conceptos en el tiempo, específicamente de los números irracionales; como recurso didáctico, para dotar de sentido la práctica del maestro (Rivera, Vélez, & Pupo, 2009).

En ese sentido se propuso caracterizar los elementos básicos de una propuesta didáctica, para el reconocimiento de números irracionales, tomando la Historia de la Matemática como elemento didáctico.

Esta investigación está enmarcada dentro del campo de la Educación Matemática, tiene carácter interdisciplinario, esto es, el problema de investigación se abordó de una manera integrada con aportes de disciplinas como: la Historia de las Matemáticas, en cuanto a un estudio de los aportes de investigaciones que se han realizado en el campo de la evolución histórica del concepto de número irracional; la Psicología, en cuanto a la psicología cognitiva; las Matemáticas, como eje orientador del trabajo; y la Didáctica de las Matemáticas, como campo de investigación integrador de las diversas disciplinas. Para alcanzar los objetivos propuestos se estableció la siguiente ruta: indagación en trabajos realizados sobre la Historia y la Epistemología y los numeros irracionales, **Estructuración** de conceptos previos para el acercamiento a los números irracionales**,** y documentación de un compendio de dificultades epistémicas, didácticas e histórica. Finalmente se hizo una propuesta didáctica que permite la aproximación del estudiante al concepto de continuidad en los irracionales.

1 JUSTIFICACIÓN

La visión histórica transforma meros hechos y destrezas sin alma en porciones de conocimiento (….)

La perspectiva histórica nos acerca a la Matemática como ciencia humana, no endiosada, a veces penosamente reptante y en ocasiones falible

(De Guzmán, 1992, p. 15)

La enseñanza y el aprendizaje de la Matemática bajo la perspectiva de su evolución conceptual e histórica, se constituye en un factor cultural y antropológico que incluye la visión del maestro en su dimensión humana, también incluye los intereses que el hombre ha tenido a través del tiempo y que ha querido conocer y desarrollar de acuerdo a lo que le interesa saber.

En el presente trabajo se busca exponer la importancia fundamental de la enseñanza de la Matemática a nivel escolar, y de algunas implicaciones que podrían consolidar mejores factores de aprendizaje, implementando la Historia de la Matemática como evolución, desarrollo y maduración de conceptos en el tiempo de la clase de matematicas y en el desarrollo y crecimiento mental del estudiante para dotar de sentido y método la práctica del maestro y hacer más efectivo el proceso de aprendizaje de los estudiantes. De igual manera se estudiarán algunas dificultades visualizadas en determinados contextos de la enseñanza de la Matemática por parte del professor a nivel escolar, específicamente en el grado octavo que se presentan en el manejo del componente didáctico, en la utilización de los textos escolares, en las generadas por el obstáculo epistemológico pertinente, y en la construcción de conceptos, entre otros.

En ese sentido, la serie de tensiones y problemáticas que puedan presentarse en la cotidianidad de las relaciones en el aula de clase, se podría mejorar con la aplicación de la Historia de la Matemática, que se toma como tema central en el presente estudio de la Didáctica de los números irracionales.

1.1 Apatía de los estudiantes en clase de matemática

En sentido general, se ha notado que en los estudiantes existe una creciente apatía acerca del aprendizaje de la Matemática. Por lo que pedagógicamente resultan las siguientes preguntas: ¿La Matemática para qué? ¿Cuál es la razón para estudiar Matemática? ¿Cuál será el método para hacer frente a dicha situación?

Tres preguntas aparecen en el quehacer de la clase de Matemática y que comprometen a estudiantes y profesores. Los maestros, en diversas ocasiones, se encuentran desarmados ante las demandas del tiempo que exige el cumplimiento de un programa académico, se encuentran encasillados en el currículo, no tienen respuestas, y la Matemática se va convirtiendo en una obligación diaria que no ayuda a desarrollar su pensamiento.

Con frecuencia muchos estudiantes no le encuentran sentido al trabajo en clase de Matemática. Por tanto, no le dan la importancia que merece. Esta problemática lleva a los profesores a enfrentar la responsabilidad de buscar alternativas y propuestas metodológicas y didácticas. En este sentido, es conveniente que los maestros empiecen a descubrir la Historia como mediador didáctico, también para superar otra tensión y reto; específicamente, en la negación al análisis de la sucesión de dificultades y de problemas, y a la comprensión de la evolución o maduración de los conceptos en la Historia. Que ha llevado fundamentalmente a fórmulas y resultados que surgen desprovistos de aprendizajes significativos y de sentido cultural y social, y fundamentalmente, descontextualizados, no permitiendo la incorporación de la problematización al aula de clase enfrentada con la formación de estudiantes críticos que han desarrollado procesos lógicos de pensamiento.

Una de las razones que generan este desgano podemos atribuirla principalmente a los métodos tradicionales de enseñanza, a la manera como se presentan los conceptos matemáticos en el salón de clase. Se puede aseverar que esta forma de presentar la Matemática, crea incertidumbre y confusiones en los estudiantes, y es por ello que la consideran una ciencia “fría”, y solamente la ven útil para la calificación, porque no ha despertado en ellos motivación y sentido, por ser una asignatura más en el currículo.

1.2 La clase de Matemática sustituida por las nuevas tecnologías

Una segunda problemática que presentamos es la instrumentalización que en muchos casos se le ha dado a las nuevas tecnologías. Ellas se presentan como sustitutas del pensamiento matemático, debido a que la Matemática se enseña en la aplicación y no desde la creatividad y de la crítica, de alguna manera se podría decir que en lo referente a la metodología de apropiación de las nuevas tecnologías se requiere crear alternativas de relaciones y mediaciones didácticas para movilizar las estructuras cognitivas, y particularmente para desarrollar pensamiento; más específicamente, el pensamiento numérico.

La implementación de nuevas tecnologías en la clase de Matemática es una herramienta importante para su aprendizaje, aunque en general debemos ser conscientes, que un instrumento puede ser utilizado de forma inapropiada, dependiendo de la funcionalidad que se le otorgue y al sentido de su mediación. La utilización de instrumentos didácticos e innovaciones tecnológicas no deben tener la intención de remplazar al maestro de Matemática ni sustituir al estudiante, y es aquí donde se puntualiza la manera como la sociedad local considera el conocimiento, al que solamente evalúa como instrumento de trabajo y de manejo, y olvidando el papel de los niveles de abstracción en el desarrollo del pensamiento del estudiante y que hace que la Matemática sea sustituida y confundida por las nuevas tecnologías, resaltando solo el lado pragmático e instrumental en el desarrollo de esta ciencia. En general, se puede considerar que uno de los retos fundamentales en pedagogía es el desarrollo de nuevos métodos que le den funcionalidad a las tecnologías para que desde ellas se logre desarrollar mejor el pensamiento del estudiante, sin quitarle su papel creador, crítico y propositivo que ha de tener quien se está educando en el mundo contemporáneo. Es un error creer que con el uso a la ligera de las nuevas tecnologías se tiene con ello una nueva enseñanza de la Matemática. Debe anteceder al uso del computador en el aula, un método conveniente que lo haga eficaz en dicho papel.

1.3 Construcción del concepto matemático

Otra tensión de carácter pedagógico, se encuentra en la escasa fundamentación conceptual por parte de algunos estudiantes para la construcción de la estructura de conjuntos numéricos, referidas al conjunto de los números irracionales y en la construcción del pensamiento numérico. Además del sentido, bien importante es la mirada hacia la estructura de pensamiento numérico, las comparaciones, las estimaciones, los órdenes de magnitud, entre otros. Aspectos básicos que no se tienen en cuenta para su enseñanza y aprendizaje. Se han evidenciado dificultades generalizadas en construcciones conceptuales entre cantidad-número, concepto-regla, y demostración-verificación. Se ha comprobado también que los estudiantes no desarrollan métodos deductivos en su estructura de pensamiento numérico, sistema simbólico (lo que se escribe, se pinta o se habla), el sistema conceptual (lo que se piensa, lo que se construye, lo que se elabora mentalmente) y los sistemas concretos (donde el estudiante presenta serias dificultades al intentar separarlos). Ellos están presentes y sustentan los lineamientos en Matemáticas. (Recalde, 1998)

1.4 El desapego y el poco sentido del estudio de las matemáticas

Siempre se ha notado que para la mayoría de las personas el estudio de las Matemáticas no tiene ningún atractivo emocional y mucho menos intelectual, originado ello en su contexto y en los ambientes que rodean al estudiante. Ellos no le encuentran sentido a la Matemática que aprenden, y cuando reconocen algo, lo es debido al impacto en la vida práctica o en el uso profesional. Entre las causas más reconocidas de este desapego, tenemos las condiciones sociales y culturales, el tipo de interacciones, la influencia a sus intereses; los mismos que no son los más adecuados, así como tampoco lo son las condiciones económicas del grupo social donde se concreta el acto educativo. Allí no se distinguen intereses ni necesidades. La Matemática no tiene ninguna incidencia en su transformación, personal e intelectual, ya que los impactos de ella se dan es durante el desarrollo del conocimiento. En síntesis, en la manera tradicional, la Enseñanza de las Matemáticas no consulta el contexto del sujeto de aprendizaje.

1.5 La Historia de la Matemática como un factor cultural y antropológico

La Historia de la Matemática como recurso pedagógico no ha recogido todo su potencial, y se ha perdido su fuerza de incorporación como mediadora e instrumento de enseñanza y aprendizaje; su perspectiva, dimensión y visión humana permanecen ignoradas en el proceso educativo. Generalmente se presenta un matiz de la Matemática con verdades infalibles, como una ciencia limitada y agotada. No se interpreta ni se admite una Matemática capaz de corregir sus propios errores, provista de procesos constructivos y de interacción social en su enseñanza y mediadora de aprendizajes.

El conocimiento matemático en la escuela no se concibe como una actividad social, los conocimientos se dan como conceptos acabados y se aprenden a través de la instrumentalización de la memoria; los mismos se dan por sentados y definitivos, y no consultan las necesidades, la motivación y el interés del estudiante.

1.6 Escasa formación e interés de los profesores respecto a la Epistemología e Historia de las Matemáticas

Los grandes inconvenientes que se presentan en la pedagogía y didáctica de las Matemáticas tienen, entre otras causalidades, la escasa formación en la epistemología e histórica de las matemáticas de parte del profesorado. Son pocas las experiencias en donde los procesos de construcción y de maduración de los conceptos de la Matemática, sean fundamentales y necesarias para su desarrollo y aprendizaje, se enseña como una ciencia plenamente construida, no criticable y llena de dogmatismos, que en diversas ocasiones los mismos profesores no logran entender.

Esto se sustenta en que generalmente el nivel de formación del profesorado, tanto de primaria como de secundaria, es del grado de licenciatura, nivel éste en el cual no se desarrollan plenamente, desde los currículos, las estructuras lógicas de la Matemática ni su evolución histórica y mucho menos su filosofía. Solo se exhibe una demostración formal y mecánica; pero sin desarrollar su génesis y su sentido, esto queda más claro si estudiamos la obra "La Matemática o pérdida de la incertidumbre" de M. Klein.

Ello le resta dinamismo y actividad al proceso pedagógico. Los estudiantes asumen el modelo del conocimiento conveniente para su aprendizaje, la Matemática, como se asume una creencia religiosa: sin crítica y sin comprensión. Es decir, no se construye un conocimiento, sino una serie ordenada de creencias. Se genera así una disciplina que difícilmente podría calificarse de racional. El uso inadecuado de las nuevas tecnologías no podría solucionar este impase, pues ellas no pueden sustituir el proceso de argumentación.

Anexo a la anterior dificultad se encuentra el insuficiente conocimiento que el profesorado tiene del papel del lenguaje natural en el proceso de explicación a los alumnos. Ello hace que no se dosifiquen los conocimientos de acuerdo al desarrollo mental de los estudiantes, que no se vinculen los conocimientos matemáticos con ideas y representaciones que los estudiantes puedan asimilar. Se genera así un obstáculo pedagógico de grandes dimensiones, que es una de las causas de aprender de memoria y sin plena comprensión una cantidad enorme de fórmulas. Ello no puede generar conocimiento matemático alguno, aunque puede permitir un manejo mecánico de algoritmos, que es diferente al saber matemático.

Así, son los textos escolares los encargados de dirigir el acercamiento histórico; los que en su mayoría se remiten a escudriñar datos cronológicos en una historia lineal, sin indagar los por que ni los cómo, perdiéndose en esencia su real importancia. Por tanto, se precisa que "*... Un conocimiento profundo de los conceptos básicos de una ciencia requiere de un conocimiento de su historia."*, como lo señala Lozano (2004) en su investigación.

1.7 La Historia y su presencia en el “aula” de clase

A través del análisis de algunos textos escolares, referentes al concepto de número irracional, se ha encontrado, poca presencia de su perspectiva histórica- matemática, para su abordaje y el desarrollo del pensamiento numérico. Dependiendo de los autores, existen textos que trabajan la historia de los números irracionales, pero sin ofrecer la posibilidad de conjeturar acerca de desarrollos futuros dentro del tema en estudio, sin hacer reflexión sobre limitaciones y alcances en el pasado, no posibilitando cuestionamientos para la construcción de un nuevo conocimiento que genere en el estudiante desarrollos del pensamiento numérico.

Al abordar el contenido histórico, que presentan los autores de dichos textos, se nota que son una recopilación de fechas, temas y datos sin darles un enfoque didáctico apropiado. La perspectiva de la Historia de las Matemáticas debe generar situaciones significativas que enriquezcan las situaciones problema, particularmente al encuentro con los números irracionales, y en su conjunto numérico

El estudio de los números irracionales se aborda a la par con el pensamiento numérico por dos razones fundamentales, se busca que el estudiantado tenga a la aritmética como unidad de pensamiento, y que, además, permite diferenciarlo del algebra.

Como segunda razón, y que sirve para sustentar el anterior, de acuerdo con esta tesis siempre se debe crear en el estudiante algún conflicto con el modelo matemático. Inicialmente se tiene apoyo para ello en la ley de composición interna que dice que los resultados de una operación quedan en el mismo conjunto numérico de los elementos operados: la suma de dos enteros es otro entero, el producto de naturales es otro natural, etc. Ésta regla exige trabajar con operaciones cerradas, lo que podría limitar el conjunto solución de problemas en contextos específicos que impliquen el desarrollo y entendimiento de las operaciones básica en los conjuntos numéricos.

Si se toman los naturales, la única operación consistente dentro de ellos es la adición y en cierto sentido, el producto. En esta perspectiva, no se puede salir del conjunto de los naturales; pero tanto los procesos del pensamiento como los problemas de la vida cotidiana y el desarrollo de la ciencia exigen la aparición de otras operaciones como la resta, el producto y la división. Con la resta se genera una posibilidad de ampliación del conjunto de los números naturales, desde ella construimos en conjunto de los números enteros. Aun ampliando los enteros, sigue esta necesidad de extensión y ahora con mayor énfasis, ya que, con la división de enteros se generan los números racionales. Desde este punto de vista, y haciendo la conversión de fracción a decimal y viceversa llevamos a los estudiantes a la necesidad de la existencia y la forma de construir los números irracionales a partir de residuos infinitos y no periódicos, generando en ellos una “crisis” nueva, ya que, estos decimales no pueden tener interpretación racional, aproximándolos a su interpretación en su sentido inverso.

En el nivel escolar se orienta el trabajo en la construcción del número irracional, pero no se presenta el concepto de orden y densidad de los números reales. Por lo tanto, no se logra acercamiento a los irracionales con algún fundamento que facilite captar su naturaleza. Esto lleva a que no se manifiestan nociones de continuidad, generando un problema, o propiciando un desequilibrio (crisis) en el enfoque que posiblemente se consiga estructurar en un curso de Matemática en el futuro, surgiendo así la pregunta:

¿cómo se han configurado y construido, desde un enfoque histórico y conceptual los números irracionales? De esta manera, no se conocen muchas experiencias y alternativas didácticas, en el estado del arte, que involucren la Historia de la Matemática como mediador y evolución del conocimiento matemático, generando una baja visión en su génesis, desarrollo y proceso creativo, que pueden ser elementos generadores de intervenciones pedagógicas positivas; siempre que la Historia no se tome como una mera sucesión de acaecimientos, sino que se miren los modos como el ser humano ha construido la realidad.

1.8 Número Irracional (concepto y aprendizaje)

Existe una gran dificultad al tratar el concepto de pensamiento numérico, y básicamente en lo que se refiere al resolver operaciones básicas (adición, sustracción, multiplicación y división), que incluyen el objeto matemático en materia. (Cuello, 2001; Cabañas, Guillén, & Galeana, 2004). Además de esta dificultad se presenta otra referida a la clasificación de los números, la cual puede considerarse desde las limitaciones mismas de las operaciones arriba mencionadas.

De alguna manera, la problemática frente a estas temáticas no ha sido suficientemente tratada por los textos comunes de secundaria y, además, el tratamiento mal dirigido y comprendido, aprendizaje, particularmente generan deficiencias en el proceso pedagógico de enseñanza los números que los números irracionales no se comprendan como fundamentales en la concepción del cálculo

Además de las anteriores dificultades, se pueden agregar muchas otras que obstaculizan la comprensión, el aprendizaje y el desarrollo del pensamiento numérico, en especial en lo relacionado con los irracionales. Todo esto exige una alternativa de propuesta didáctica que esté fundamentada en el desarrollo histórico, y los recursos proporcionados por las nuevas tecnologías, utilizadas en forma crítica, tanto por el maestro como por los estudiantes. Ello nos permitiría construir en forma coherente la ampliación de los conjuntos numéricos que se van a conocer, en nuestro caso, los irracionales. Mediante el estudio crítico y analítico que se haga junto con los estudiantes, puede lograrse un crecimiento y madurez lógica que se pierde con el estudio meramente mecánico. Madurez ésta que permita comprender las nociones formales que identifican a los irracionales, reconociendo al mismo tiempo las dificultades y problemas que se han dado en el proceso histórico que generó a los irracionales, pero principalmente adecuando algunas ideas a una visión escolar para mejorar su enseñanza, dotarla de sentido y facilitar su reconocimiento.

Las consideraciones anteriores, como contribución en el presente trabajo, toman la Historia de la Matemática como un mediador didáctico y como una alternativa de solución a la problemática allí planteada.

2 PROBLEMATIZACIÓN

En este trabajo, se toman elementos de la estructura de los numeros irracionales y de conceptos en la Historia de la Matemática para aproximar una alternativa didáctica en el proceso enseñanza aprendizaje de los números irracionales. No sobra advertir que la citación histórica de la Matemática no siempre se presenta de forma explícita sino, que en muchas ocasiones, el contexto y el problema, así como su tratamiento nos llevan a su génesis histórica. Al redactar esta situación se resalta que, en los avances de la Matemática durante su historia, sus conceptos toman fórmulas y teorías que han sido redefinidas cada vez con mayor precisión y claridad, y ello ha generado consecuentemente en el campo de la educación que en el proceso de enseñanza aprendizaje, la pedagogía y la didáctica evolucionen.

Al apreciar un buen número de textos de Matemáticas, se evidencia una presentación muy formal, propia del saber, no obstante, se dejan cuantiosas entidades implícitas en su contenido.

Los matemáticos posteriores y los divulgadores de las Matemáticas son los que encuentran estas condiciones implícitas y hacen con ello que el concepto matemático sea más asequible para una persona común y corriente.

En forma correspondiente, la labor del maestro es la de generar una conceptualización clara en el estudiante por un proceso de pensamiento desde el lenguaje común para que cuando se formalice, o se construya la fórmula, el estudiante comprenda su significado. Es en este sentido en que la evolución histórica de la Matemática se muestra de forma implícita, pues de seguro no se estaría en condiciones de descomponer y penetrar en el teorema como originalmente se present.

Cuando nos apoyamos en los maestros que han reinterpretado la matemática, o en sus divulgadores, estamos utilizando la Historia de la Matemática como un recurso pedagógico.

Sustentados en un conocimiento y abordaje profundo de los conceptos básicos que una ciencia requiere en su génesis, desarrollo y evolución en la historia, su naturaleza lógico-deductiva presente en la Matemática, con consideraciones equívocas que han llevado a un exagerado rigor y fuerte dogmatismo en su enseñanza, además de la imposición de exactitud y rigidez en sus fundamentos como el único valor de dicha ciencia, lo que ha influenciado negativamente a los estudiantes del grado octavo en la ciudad de Medellín. A partir de nuestro trabajo, se propone presentar con fines pedagógicos una posible pregunta, que puede esquematizarse de la siguiente manera:

2.1 Pregunta problematizadora

¿Cómo enseñar el concepto de numero irracional a los estudiantes de 8vo grado de secundaria básica para contribuir así a su identificacion y eliminar las tensiones que que genera su aprendizaje en el aula de clase?

2.2 Objetivo general

Estructurar o elaborar o diseñar una estrategia pedagogica, donde la historia de la matematica sea un recurso didactico que nos brined un metodo para el reconocimiento de los numeros irracionales y contribuya a mejorar las tensiones presents en la cotidianidad de las relaciones del aula de clase.

2.3 Objetivos específicos

Paro lograr el objetivo general, se proponen los siguientes objetivos específicos:

- ✓ Transmitir el concepto de número irracional, desarrollando algunas de sus características elementales, al igual que alguna de sus operaciones primarias.

- ✓ Describir algunos elementos, situaciones y procedimientos en la Historia de los números, que aporten al reconocimiento de los números irracionales en su origen y evolución.

- ✓ Diseñar una propuesta didáctica, para el trabajo con números irracionales, desde la Historia de la Matemática.

2 METODOLOGÍA

Esta investigación está enmarcada dentro del campo de la Educación Matemática tiene carácter interdisciplinario, esto es, el problema de investigación se abordó de una manera integrada con aportes de disciplinas como: la Historia de las Matemáticas, en cuanto a un estudio de las causas de investigaciones que se han realizado en el campo del desarrollo histórica del concepto de número irracional; la Psicología, en cuanto a la psicología cognitiva; las Matemáticas, como eje orientador del trabajo; y la Didáctica de las Matemáticas, como campo de investigación integrador de las diversas disciplinas que intervinieron en el desarrollo del proyecto.

Para el análisis, desarrollamos las siguientes fases:

Fase 1: Indagación en trabajos realizados sobre la Historia y la Epistemología de los numeros irracionales, con el fin de conceptualizar los elementos que a través de la historia han dinamizado u obstaculizado el desarrollo de los conceptos matemáticos relacionados con el número irracional.

Fase 2: Estructuración de conceptos previos para el acercamiento a los números irracionales, fundamentación de la Historia en la creación y desarrollo de los números irracionales y análisis de textos de enseñanza escolar del grado octavo desde el punto de vista matemático e histórico.

Fase 3: Documentación de un compendio de dificultades epistémicas, didácticas e históricas y diseño de una propuesta didáctica que permita la aproximación del estudiante al concepto de numeros irracionales

3 LEGADOS TEÓRICOS

4.1 Arte de la problematización

4.1.1 La Historia de la Matemática como recurso didáctico.

La evolución y el desarrollo histórico de las Matemáticas son supremamente importantes, ellas son fruto de la creación humana que ayuda a entender mejor el mundo que nos rodea. El estudio de la Matemática a través de la historia tiene implícito su desarrollo y surge de ello la necesidad social y cultural de la humanidad para el desarrollo del concepto de número irracional. Dicho desarrollo se manifiesta en el espíritu mismo de la Matemática.

Surge, entonces, un cuestionamiento inicial: **¿qué objeto tiene estudiar la Historia de la Matemática? ¿Cómo podríamos utilizar la Historia de la Matemática como recurso didáctico?**

Según Guzmán, (1992, IV, p.16): el conocimiento histórico-matemático nos acerca a sus creadores, a su génesis, a los grandes interrogantes de la humanidad, igual a como se hace en literatura, que nos permite identificar y recordar a los grandes, ya que el conocimiento es impulsado por la cultura, en donde las dudas mismas en un colectivo pueden ser de carácter espiritual, práctico o artístico. Estas dudas, tanto en la Historia como en la Pedagogía, constituyen un reto en la construcción del conocimiento. Es por lo que el encuentro con el otro es solo un diálogo que nos genera intereses, nos dirige las motivaciones y estímulos, que logran despertar profundas emociones de simpatía hacia la Matemática por parte de los estudiantes. La puesta en escena de la Historia de la Matemática, como intermediaria para mejorar la comprensión, es expresada por Kline (1998).

Las Matemáticas han estado presentes y son parte inherente al desarrollo y evolución del hombre en la historia, mediada por procesos de aparición espontánea y natural en la búsqueda constante, entre otros, de encontrar en la cotidianidad, soluciones a diversos problemas del contexto en coherencia con el ingenio y la creatividad humana.

"Las Matemáticas no surgen de la lógica deductiva sino del trabajo de la imaginación creadora, guiada por analogías, intuiciones e incluso ideales estéticos; la lógica actúa después solo como control" (Kline M. , 1976)

La presentación de alguna forma sistemática, se fundamentará en la dificultad histórica de la creación del concepto como medio para intentar acercar al estudiante, a su mejor comprensión, a un mayor acercamiento al sentido matemático de dicho concepto.

En ese sentido, a través de la Historia de la Matemática, se han evidenciado errores por parte de los hombres (algunos) que la intentaron formalizar, lo que debe utilizarse como recurso en la construcción de los temas a enseñar, pues si los grandes creadores han tenido errores y equivocaciones, nosotros, como personas del común, con mayor razón los hemos de tener. Ello servirá para alentar al estudiante en su corrección de equivocaciones.

¿Cómo utilizar el error histórico, referenciado por la actualidad? ¿Cómo la Matemática ha llegado a ser la que es? Como lo afirma (De Guzmán, 1994, p. 3):

"Es claro que el quehacer matemático tenía que ser lo que de hecho ha sido, una actividad humana descubridora y a la vez profundamente creativa. Bajo el estímulo de la ambigua complejidad inherente en los objetos que explora, la mente humana crea estructuras que le sirven para penetrar más profundamente en la realidad o, con la honda expresión clásica de los pitagóricos, «en las raíces y fuentes de la naturaleza».

Por este motivo se expone en este trabajo una relación entre la Historia de la Matemática y la Educación Matemática, a fin de ir reconociendo en la evolución de los conceptos su tendencia a ser cada vez más universales, es decir, más abstractos. Este proceso evolutivo ha de llevar a un mismo tiempo a construir la noción de objetividad en la argumentación de las Matemáticas.

¿De acuerdo con el planteamiento anterior se intenta acercar al cuestionamiento, la Matemática al igual que el pensamiento en los humanos ha evolucionado con el transcurso de su ejercicio constante, y su carácter formal surge en el desarrollo y estructura de sus objetos matemáticos?

Guzmán enfatiza la importancia de la Historia de las Matemáticas como legado en la construcción del conocimiento matemático, para el efecto afirma*:"(...) un cierto conocimiento de la historia debería formar parte indispensable del bagaje de conocimientos en matemáticas…"(De Guzmán, 1992, p. 3)* lo que supone encontrar y enmarcar parámetros culturales que nos permitan visualizar entramados sociales e intereses de un determinado conglomerado para entregarle al educando una significativa cantidad de instrumentos que le permitan el abordaje de la Matemática sin hastío.

Así, un desaprender continuo a través de los encuentros con nuevos saberes inquietantes, pueden movilizar un sinnúmero de alternativas, de ofertas que inscriban enfoques motivantes en una posibilidad donde se descubran interrogantes que muevan su deseo de saber. La instrumentalización de la formalidad que adopta la Matemática Moderna, conlleva y genera una gran dificultad para el desarrollo del pensamiento, caso específico el trabajo con operaciones mentales cuando previamente no se conoce el sentido de dichas abstracciones, y que no despiertan la motivación y el encanto para aproximarnos a la creación.

La Historia de las Matemáticas no es parte constitutiva de los procesos en el aula de clase, descartando de paso con ello el fundamento y desarrollo del pensamiento humano, no permitiendo al mismo tiempo que sus temáticas y su evolución repercutan en el desarrollo y evolución, no solo de la cultura, sino también de los procesos de enseñanza-aprendizaje; apartando el fundamento del pensamiento humano, la gran dificultad en el aprendizaje, pues se han olvidado sus inicios: ¿Cómo se hizo Matemática en el pasado? ¿Qué interesaba en su tiempo? Muchas son las preguntas que motivan el pensamiento y la pedagogía matemática, que históricamente se corresponden con lo que afirma Kline (1998).

Afirma Kline (1998) "Ni Newton, ni Leibniz pudieron formular correctamente los conceptos básicos del Cálculo Infinitesimal; los grandes matemáticos del s. XVIII y XIX realizaron enormes avances sin tener una definición precisa de los conjuntos numéricos; y sólo a finales del XIX se sientan los fundamentos lógicos de las ramas más importantes. Concluye que "la intuición de los grandes hombres es más poderosa que su lógica". Tomado de Kline (1978) citando a Lozano (2004).

4.1.2 Epistemología

El desarrollo analítico de la Geometría por René Descartes, quien estableció la correspondencia entre Geometría y Álgebra, es decir, entre la representación y el concepto. Este proceso histórico se convierte para nosotros en un generador de métodos didácticos

El cuerpo que da fondo para realizar lo anterior, ha sido afectado por múltiples cogniciones: La experiencia no examinada, el mal uso del lenguaje, la mala argumentación, entre otros. Estas situaciones fueron muy bien sistematizadas por Gastón Bachelard, cuando habló de los obstáculos epistemológicos, en su libro *La Formación del Espíritu Científico* (Bachelard, 1972). No se presentan ni se abordan aquí todos los obstáculos.

El fin de Bachelard no era pedagógico, sino epistemológico y por ello presenta una gran gama de obstáculos epistemológicos respecto a su finalidad. No obstante, se pueden indicar algunas ideas para mejorar el proyecto del aula. Esta razón lleva a adoptar solo algunos de los obstáculos por él planteados.

Los principales obstáculos epistemológicos que él enmarcó son:

La experiencia básica, el conocimiento básico como erudición, el mal uso del lenguaje, el utilitarismo y la noción sustancialista, entre otros.

Pero la finalidad es pedagógica, no se necesita desarrollar toda esta gama, sino hacer énfasis en aquellos que son útiles al proceso enseñanza- aprendizaje. Por ello se elige la experiencia básica, que trae el estudiante, la cual está montada por lo general, en una serie de prejuicios y de preconceptos; también se ha tomado como obstáculo fundamental el mal uso pedagógico y la lógica del lenguaje, ya que, con él se hacen justificaciones incompletas y muchas veces desconfiguradas, cuando no equivocadas. También se toma como obstáculos, la visión utilitarista, ya que gracias a ella se confunde ciencia con técnica, conocer con hacer. (Sierra, 1997)

4.1.3 Obstáculos Epistemológicos

De acuerdo con los planteamientos de Bachelard (1972), los obstáculos epistemológicos no deben buscarse en la parte externa del conocimiento (como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, como la inestabilidad de la experiencia humana) sino en el acto mismo de conocer. Por ello se encuentra un obstáculo, no epistemológico, sino también pedagógico y psicológico para hacer una nueva conceptualización.

La mente se vuelve inerte, según Gastón Bachelard (1972), ya que se ha considerado que lo que “se cree es real”, cuando se confunde conocimiento con creencias, objetividad con subjetividad. Esto obliga a llevar al estudiante a una buena conceptualización cuando se argumenta, sobre lo que cree, él encuentra incoherente su creencia. Mas ello no basta para que renuncie a dichas creencias, pues es el estudiante con su propio análisis es quien debe optar por el conocimiento auténtico, mostrando así que la destrucción de una creencia o conocimiento mal adquirido, como lo llama G. Bachelard, tenga un proceso mucho más complejo: sustituir creencia por conocimiento.

Se debe advertir, que el estudiante no viene como una *tabula rasa*, o también que puede como tal. Dice Bachelard (1972), que en muchas ocasiones en el aspecto psicológico, *"la edad del espíritu, tiene la edad de sus prejuicios*". Esto indica que ante el niño o el joven que viene con ideas preconcebidas, el trabajo pedagógico es muy arduo, ya que se cambia la realidad que se ha dado (prejuicio), no la que él ha construido. Siguiendo a Gastón de Bachelard, hacer un cambio en la mente del estudiante es un proceso muy lento y muy abarcador, ya que la modificacion de los prejuicios no está simplemente en la contrarespuesta lógica de la argumentacion , sino en la idea nueva que el estudiante se construya. Por ello *"tener acceso a la ciencia, es rejuvenecer espiritualmente, es aceptar una mutación básica, que ha de contradecir en pasado" (*Bachelard, 1972) Gastón Bachelard plantea varios obstáculos epistemológicos.

1. **La opinión.** Es cuando una creencia se toma como conocimiento, pero sin razones para fundamentarla, pues *"la opinión piensa mal; no piensa; traduce necesidades en conocimiento". (*Bachelard, 1972)

Una de las partes sugestivas de la opinión resaltada por Bachelard, es considerar que la opinión es conocimiento, a partir de su utilidad. La utilidad no argumenta, solo ejecuta. La opinión fuera de este aspecto, tiene un anexo más, para configurarla como un obstáculo epistemológico, y es su debilidad o deformación argumentativa. *"El espíritu científico, nos impide tener opinión sobre cuestiones que no comprendemos". (*Bachelard, 1972)

1. Esto sugiere a los maestros que uno de los pasos para disolver los obstáculos presentados por G. Bachelard está en llevar a los estudiantes a tener una argumentación, a formular hipótesis nuevas y a criticar aquellas donde no encuentran buenas bases argumentativas. Este segmento se desarrolla por parte del maestro en clase teniendo sumo cuidado en varias cosas: hacer las preguntas lógicamente y pedagógicamente correctas y saber plantear los problemas correspondientes al desarrollo del conocimiento. Por ejemplo, los estudiantes traen una opinión de continuidad equivocada a partir de una formulación correcta en un lenguaje equivocado: ¿Si el 3 sucesor al 2, agregándole el antecessor 1, ello quiere decir que el siguiente de 3 es 3 + 1?

Los estudiantes dicen que del 2 se continúa con el 3, del 3 con el 4… por lo tanto, los estudiantes confunden siguiente de un número con la continuidad. Más ello se debe a un mal manejo del lenguaje por parte del maestro, en vez de decirle: "continúa", se le debe decir es el siguiente. La clarificación de esta idea no se debe hacer dándole una regla nueva, que él no entienda, sino haciéndole caer en la cuenta de los errores que eso genera. ¿Si el 3 sucesor al 2, agregándole el antecessor 1, ello quiere decir que el siguiente de 3 es 3 + 1?

Los estudiantes dicen que ¿Si el 3 sucesor al 2, agregándole el antecessor 1, ello quiere decir que el siguiente de 3 es 3 + 1? del 2 se continúa con el 3, del 3 con el 4… por lo tanto, los estudiantes confunden siguiente de un número con la continuidad. Más ello se debe a un mal manejo del lenguaje por parte del maestro, en vez de decirle: "continúa", se le debe decir es el siguiente. La clarificación de esta idea no se debe hacer dándole una regla nueva, que él no entienda, sino haciéndole caer en la cuenta de los errores que eso genera.

El estudiante debe acercarse a la densidad de estos números, concluirá que no es así, y esa es una propiedad que solamente se cumple en los números discretos, que ni siquiera son densos.

Esta argumentación hace que el estudiante tenga un nuevo conocimiento y no un nuevo nombre, para una nueva opinión. Este método es una expresión del espíritu de G. Bachelard, cuando se recomienda que la mejor manera de superar, estos obstáculos, es hacer que el estudiante construya sus conocimientos con buenos argumentos. Ya que *"con tal uso las ideas se valorizan indebidamente" (*Bachelard, 1972)

2. **El Valor.** Es otro obstáculo epistemológico, ya que los valores polarizan la función de la mente humana, y se cierra el poder de la investigación. Bajo el concepto de valores se han conservado muchas creencias, generando con ellas el dogmatismo, cual si fuera un conocimiento. *"Entonces el espíritu conservativo domina, y el crecimiento espiritual se define". (*Bachelard, 1972).

Estos dos obstáculos, ya referenciados, conducen a confundir la mecánica del conocimiento con el conocimiento mismo. La mecánica es un producto de conocimiento, pero no a la inversa.

En general, es caer en un vano optimismo, *"cuando se piensa que saber sirve, automáticamente para saber". (*Bachelard, 1972)

3. **Las experiencias básicas.** Cuando éstas no son formalizadas conceptualmente, pueden dar origen a interpretaciones de corte metafísico, místico, entre otros. Respecto de la Historia de la Ciencia, Bachelard invita a los maestros, a que cuando el estudiante se afinque en la experiencia, se vea obligado a analizarla, a criticarla y de ser posible, a ubicarla en un contexto teórico amplio que permita explicar con razones objetivas la experiencia que a ellos subjetivamente les complazca.

Existen estrategias en la didactica de la matemática que hacen que el estudiante crea que todas las fórmulas son sólidas conceptualmente, provengan del medio ambiente que lo rodea, y cuando las mismas fórmulas se abren a otros ámbitos en los cuales son válidas, los estudiantes se sienten incapaces o con grandes dificultades para usar tales fórmulas. Esto indica que no se ha adquirido el conocimiento real, pues están circunscritos al medio ejemplificado.

Se propone entonces que el estudiante comprenda el concepto matemático, de manera tal, que, en varios ejemplos, aparentemente diferentes, él encuentre que dicho concepto es la estructura unificadora de todos ellos, donde se genere un desequilibrio en el conocimiento de los números racionales dirigido al concepto de aproximación y particularizado en los números irracionales.

4.1.4 El Recurso Pedagógico: Explorando el aprendizaje

"Como maestros, enseñamos a los estudiantes. Y ya que enseñamos a los estudiantes, ¿Entendemos cómo piensan, y cómo aprenden? ¿o sólo creemos que lo hacemos?" (Labinowicz, 1982).

Jean Piaget es uno de los grandes psicólogos de la humanidad que, aunque empezó a publicar en los años 20, solo fue reconocido en los años 60, cuando sus textos empezaron a tener una acogida en la pedagogía y también fueron criticados por otros autores.

Piaget no fue reconocido solo como un estudioso de la inteligencia infantil, sino que tiene un panorama más amplio sobre el desarrollo de la mente humana. Su formación fue la de un zoólogo, pero desde muy joven se dedicó a problemas filosóficos. De estas dos disciplinas, germinó su originalidad sobre la mente humana. Piaget mismo niega que sea un psicólogo, y se considera más un epistemólogo. Por ello al trabajar su psicología podemos darle sentido afincándola en la construcción del conocimiento. Su psicología se basa en el estudio de los conocimientos en el individuo, lo que ha permitido que esta tesis fundamente su espíritu didáctico, para mejorar la comprensión a través de la historia como instrumento potenciador, y la psicología cognitiva como enlace didáctico, para la superación de los prejuicios traídos. Solo con este crecimiento psicológico en el estudiante se puede concluir cómo ha sido la construcción del conocimiento en él. El conocimiento es formativo y no meramente informativo.

Piaget tiene una tesis de que los niños no difieren tanto de los adultos, en sus estructuras de pensamiento, influido en esta tesis por Levy-Bruhl. Él hablaba de una mentalidad infantil, como dicho antropólogo hablaba de mentalidad primitiva.

Piaget decía que los niños tenían pensamientos egocéntricos, es decir, centrados en el "yo", y por ello se representaban el mundo con caracteres realistas, animistas y artificiosos, que se sintetizan en lo que nosotros hemos llamado prejuicios o preconcepciones.

Este pensamiento egocéntrico impedía que el estudiante tuviera un conocimiento objetivo, obstaculizando con ello, el acceso al conocimiento abstracto y objetivo.

En su libro de 1923, denominado *El Lenguaje y El Pensamiento en El Niño* (Piaget, 1968, p. 319), sostenía que el pensamiento en el niño no siempre está encaminado a comunicarse con los demás. Por ello lo llamó lenguaje egocéntrico, indicando en dicha obra, en forma porcentual, cómo iba surgiendo el lenguaje en el niño. Esta visión del niño, y aun de muchos jóvenes, hay que mirarla como generadora de varios de los obstáculos epistemológicos, que hemos enumerado al estudiar a Bachellard.

Conectada con esta estructura del lenguaje, está la imagen que el niño se hace del mundo y que Piaget (2001) analizó en su libro, *La Representación del Mundo en el Niño (1926).*

Aunque Piaget no llegó a concebir que fuera imposible que el niño captara el mundo en forma mecánica, tampoco cayó en el animismo y el vitalismo, sino que él captó en la conciencia infantil que estas vertientes se combinan arbitrariamente.

Piaget tiene una visión que hoy es muy criticada: mirar el desarrollo mental con énfasis en el desarrollo cronológico.

Esto ha sido criticado, y se encuentra que varios niños con la misma edad pueden tener distintos grados de abstracción. De todos modos, Piaget afirma que las paradojas del conocimiento intuitivo en el niño empiezan a aparecer a los 7 años, con la generación de la que él llama inteligencia operacional. En estas operaciones, según lo plantea Piaget, hay que considerar procesos reversibles, integrados en estructuras lógicas. En nuestro medio ésta dificultad se nota también en ámbitos avanzados, ya que las operaciones inversas son las más difíciles para aprender en los estudiantes: Aprenden más fácil a sumar que a restar, a multiplicar que a dividir; a derivar que a integrar.

Es por ello que el pensamiento operacional de Piaget presenta ciertas ambigüedades; pero, sin embargo, sirve como medida para determinar cómo el estudiante va madurando.

Piaget hace otra extensión en el desarrollo del estudiante, principalmente de los 7 a los 11 años, que se suele distinguir con el nombre pensamiento operacional concreto. Dice en forma muy exagerada que a esta edad lo presente y lo real es comprendido. Pero se ha encontrado dificultades para configurar esta tesis, pues aún en los años del bachillerato los estudiantes separan totalmente lo real de lo abstracto; por ello es que se ve con dificultad la propuesta de Piaget, ya que él dice que a esta edad la posibilidad sustituye la realidad, (de la lógica del niño a la lógica del adolescente, Piaget). Cuando se estudian los obstáculos epistemológicos de Bachelard, se ve cómo las ideas que venían de antes, bloqueaban las ideas posteriores, lo que dice que la madurez en el proceso no simplemente es una madurez psicológica, sino que tiene que ser una madurez lógica y analítica. Piaget ejemplifica esto con los niveles que el niño ha tenido en la construcción de la seriación, en los cambios que se dan en la conceptualización, presentes en la conversación de la inclusión de clases (subconjuntos) en el manejo del espacio, en la noción de causa, entre otros. Como se ve, en estas seriaciones el concepto fundamental es el de orden, el cual es muy intuitivo en los números naturales; pero que en los racionales, como lo vimos al estudiar el problema de la densidad, no es tan intuitivo a pesar de ser un conjunto ordenado. Es en este sentido, en donde nosotros notamos que el crecimiento del estudiante tiene que irse desligando de la intuición inmediata.

Su crecimiento va a estar en la objetividad y en el análisis y no en cuestiones de intuición común, como lo plantea Piaget en ese mismo libro, aunque más adelante Piaget llega a sostener mayores grados de abstracción, en donde las seriaciones se construyen en forma inferencial y esto es posterior a la pubertad. Aquí Piaget se ve llevado a construir lo que se llama estadios y con los números 1,2 y 3 se corresponden, respectivamente, el período pre conceptual, el intuitivo y el operacional concreto. (Piaget, 1996)

En el estadio 1 dice que el niño no es capaz de construir una escalera con 7 bloques, aunque haya estudiantes en este estadio que puedan construir escaleras menores.

El niño intuitivo del estadio 2, más o menos de cinco años, es capaz de construir una escalera de 7 bloques, pero usando lo que Piaget llama ensayo y error.

Solo en el estadio 3, con el desarrollo de operaciones concretas, el estudiante puede construir escaleras más largas, y solo ahora este niño es capaz de insertar bloques intermedios en la escalera. Pero aun en este estadio, como observa Piaget, el niño no ha salido del ensayo – error.

Como se ve, hasta este estadio, el estudiante aún no ha sido capaz de llegar a la plena abstracción, lo que dificultaría la construcción conceptual de los números.

Claro que debemos limitar el estudio de estos números por varias razones, el desarrollo de ellos aumenta su complejidad, la cual solo aprendemos a manejar cuando tenemos cierta madurez matemática y los estudiantes de secundaria apenas están iniciando en ella, además, tenemos las limitaciones de la intensidad horaria y de los restrictivos de las condiciones sociales y económicas de la institución

Las etapas del desarrollo psicológico según Piaget son:

1. El estudiante construye un concepto hipotético-deductivo, gracias al cual, dados determinados datos, pueda construir una conclusión.

2. El estudiante debe construir un pensamiento proposicional, gracias al cual, él pueda ubicar en clase los objetos de la experiencia, construir relaciones entre ellos, seriarlos, establecer correspondencia. Los resultados de estas operaciones, el estudiante debe

exponerlos también por medio de preposiciones. Se muestra pues, que el pensamiento conceptual y racional se denotan plenamente cuando el estudiante argumenta proposicionalmente.

3. Los dos resultados anteriores inducen a que el estudiante construya la noción de lo posible, y a considerar la importancia de lo hipotético. Esto lo hace él cuando aprende a combinar las maneras lógicas e individuales de todas las maneras lógicas posibles, cuando usa un método *combinatorio.* Aquí se debe tener presente que el número de combinaciones de variables es muy grande, lo que se exige controlar su número y sus combinaciones. Por ejemplo si A y B son variables que generan un resultado X, podría tener la siguiente combinación: 1) Ni *A* ni *B* producen *X***,** son la subcombinacion; 2) *A* provoca *X*, pero *B* no; 3) *B* provoca *X* pero *A* no; 4)*A* y *B* pueden producir ***X*** separadas o conjuntamente; 5)*A* y *B* juntas producen *X*, pero ninguna de las dos lo hace por si sola; 6) A produce X, si *B* está ausente pero no si *B* está presente.

Como se ve, este escaso número de variables produce una cantidad enorme de combinaciones, razón por la cual se advierte que el maestro debe controlar el manejo de ellas.

Con estos elementos lógicos mínimos se ha preparado la mente del estudiante para captar con un sentido más lógico los conceptos matemáticos que venía manejando en forma concreta e intuitiva. (Fauvell, 1993)

Así, la esencia de esta propuesta es plantear la comprensión, más no desarrollarla como finalidad, si se tiene en cuenta el desarrollo cognitivo (Flavell, 1993) del estudiante en una secuencia de etapas, que en trabajos posteriores se podría retomar.

Aquí no sobra advertir la necesidad de separar la sensación de la conceptualización, nosotros, y en especial los niños, tenemos sensaciones de color, de dureza, de forma, entre otras, que generalmente y en forma irreflexiva se confunden con el objeto que la genera.

Básicamente estos objetos tienen componentes que no se dan en la experiencia, cuando son conceptos geométricos o algebraicos. Cuando vemos un vaso, implícitamente tenemos la noción de cilindro y es por ello que hay que aprender a construir los objetos, ya que, tienen una alta complejidad por estar compuestos de conceptos y experiencias.

4.1.4.1 La construcción del número en el niño

Para hacer comprender la noción de volumen, Piaget lanzó varias conjeturas, pero todas fundamentadas en que el estudiante ya está en condiciones de determinar ciertas características permanentes y otras características variables, lo que lleva a formular la noción de cantidad, dentro de la cual, por operaciones aritméticas se hace variable la cantidad.

Para estructurar el concepto de número, Piaget hizo diversos estudios, no solo sobre dicho concepto, sino sobre la noción de cantidad, espacio, lógica, tiempo y otros conexos. Estos conceptos le fueron generados principalmente por la lectura de Kant, pues Kant a diferencia de la mayoría de los filósofos de la Matemática, se preocupa por estructurar epistemológicamente la noción de intuición a priori.

Él llegó a la conclusión que el espacio y el tiempo son las dos condiciones a priori fundamentales de ella, resaltando la aritmética como la expresión más sutil del sentido interno, ya que su modelo para Kant era el tiempo.

Como se ha visto, era más expedito el paso de Piaget para estudiar la génesis del número en la mente humana y seguir los postulados de Kant. Ello no quiere decir que no se haya tenido en cuenta los estudios lógicos posteriores, como los de Dedekind (1998). Su tendencia pedagógica lo obligaba a buscar la coordinación entre el desarrollo psicológico y el desarrollo lógico. Piaget hizo investigaciones sobre el número, acompañado por otros autores, como Inhelder y Szeminska; Algunas de sus investigaciones se hicieron en el libro *La Formación del Símbolo en el Niño: imitación, juego y sueño: imagen y representación* (Piaget, 1966), el cual se compone de cuatro secciones con cuatro capítulos cada uno. Al final de la obra busca hacer una síntesis y una conclusión.

1. En la primera parte él hace diversos experimentos con los niños, mediante bolas de arcilla a las que les varía la forma, el color, para buscar si los niños en todos esos objetos, de diferente forma y presentación, son capaces de descubrir que la cantidad de materia permanece. Las conclusiones de los estudiantes las contrasta pesando con dichos objetos en una balanza. El mismo experimento lo realizan variando el volumen. Gracias a estos experimentos el niño construye la noción de objeto (la cantidad de materia permanece invariante). Se busca estructurar en la mente infantil que los cambios accidentales no cambian la idea de objeto. Los principales hallazgos de Piaget fueron mostrar la conservación del objeto.

2. Que el niño descubra la conservación frente a determinadas transformaciones, pero no a otras.
3. Unas condiciones que son invariantes en la determinación del objeto, entre las que se encuentra la noción de cantidad, propone Piaget deben ser descubiertas por los educandos.

El problema central de Piaget en este ámbito, es porque asegura que estos grados de abstracción los tienen los niños entre 8 y 10 años, pues es más significativo condicionarlos al desarrollo de la abstracción que al de la edad cronológica.

Investigaciones análogas hizo Piaget respecto del peso y del volumen. Una de las principales conjeturas de la primera sección es la de que determinadas características permanentes el estudiante descubra en ellas la noción de cantidad.

Esto tiene dos sentidos dentro de este trabajo: cuando iniciamos al estudiante en las operaciones racionales usamos esta reducción a común denominador como un proceso evolutivo, pero cuando ya el estudiante comprende el sentido de este proceso es porque comprende que con la operación de adición o sustracción de racionales se está generando otra clase de racionalidad, que ya es la forma matemática pura.

Si se ahonda en los temas anteriores, lo que por extensión y pertinencia no corresponde a esta tesis, se puede preguntar lo siguiente: 1-¿Qué tipos de capacidades o conocimientos matematicos quiere estdiar Piaget?

2- ¿Cuál es su concepción operacional de la naturaleza del niño y de la aritmética?; 3- ¿Cuáles son las operaciones básicas que estas exigen?

En cuanto a la primera, lo que Piaget buscaba era el desarrollo de las capacidades más interesantes que se dan en las operaciones más familiares de contar, la adición mecánica, entre otros.

Quería hacer expreso el basamento que el adulto lleva como tácito cuando maneja los conceptos matemáticos. No solo lo limitó a la noción de número, sino a todas las estructuras formales del pensamiento. Particularizando en la idea de número, Piaget buscaba determinar ¿Qué es lo que las operaciones numéricas suponen tanto en capacidades psicológicas como en estructuras lógicas primarias?

Según Piaget la idea de número es una síntesis de dos cantidades lógicas, la relación de clase y la asimetría.

Se puede construir con el estudiante la idea de número racional como idea de clase, por ejemplo: $[\frac{1}{2} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{\ }, \ldots\}$. La otra condición de asimetría planteada por Piaget, también se puede determinar por varias maneras: con el ordenamiento de números Racionales (Obando, 2003). Pero también con la estructura de cada número racional, gracias a la cual el numerador y el denominador no pueden intercambiarse sin alterar el valor del número. Tenemos este ejemplo: $\frac{�}{�} \neq \frac{�}{�}$; $\frac{3}{5} \neq \frac{5}{3}$.

Piaget llega a construir la idea de número de forma un poco diferente a la de la lógica formal, ya que la condición de un número es una clase. Dice Piaget que se construye cuando el estudiante enumera los elementos de la clase y para hacerlo también tiene que ordenarlos. Para el lógico o el matemático la cantidad y el orden son independientes, es decir, Piaget se satisface cuando el niño construye una clase como se construye una serie. Ya en nuestro nivel de estudio el estudiante debe tener el grado de abstracción apropiado para darse cuenta que el orden en que se dispongan los pupitres del aula, no altera en nada la totalidad de los mismos. Es por ello que nuestra construcción de los números irracionales tiene que irse más allá de estas visiones, ya que requiere más que intuición, un alto grado de deducción. En estos números, la seriación que antes era fecunda para Piaget, no es muy apropiada en nuestro caso. La correspondencia que nosotros encontramos con Piaget es el método de construcción: llevar al estudiante a cuestionar lo conocido y a diseñar lo aún desconocido. En este proceso se debe tener presente que la experiencia cotidiana sin un proceso deductivo desarrollado, no permite la nueva construcción. El nivel de enseñanza de los conceptos algebraicos es, por lo tanto, un grado un poco más alto que el que se da en la génesis de los números enteros. Esta es una de las razones por las cuales la madurez aritmética debe preceder a este estadio.

La noción de cantidad se va alterando y ya no es tan expedita ni tan intuitiva, tal como se da con los naturales Aquí es donde entra a funcionar un auténtico proceso de abstracción: Diferenciar ordenamiento de no ordenamiento; densidad de continuidad; crear la infinitud con límites, entre otras.

Fuera de los anteriores condicionantes, está el proceso operacional de los racionales entre sí, de los irracionales entre sí o de ambas clases combinadas. Estos procesos operacionales exigen un buen manejo fr las distintas transforaciones con las que se puede presenter un número real cualquiera pero la operatividad con ellos se hace de manera distinta a las formas elementales. Así, si sumamos 1,4142… y 1,7172…= ___ obtenemos otro número irracional por un proceso más bien expedito, de simple sustitución de cifras

Todo lo anterior nos acerca en este proyecto a una complementariedad entre los postulados de Piaget con las propuestas de los esposos Van Hiele (Piaget, 1966).

Como es natural, esto no quiere decir que el maestro ya no sea necesario; su papel no debe consistir en dar "lecciones", sino en organizar situaciones que inciten a investigar utilizando los dispositivos apropiados. (De la Torre, 2003)

Para ver la función de las investigaciones de Van- hiele y de Piaget en el tema que interesa, se deben tener en cuenta las relaciones y diferencias que existen entre ambas teorías. Para ello se afirma fundamentalmente en la obra *Modelación Del Espacio Y El Tiempo,* (De la Torre, 2003). Según el planteamiento que hace De La Torre (2003), los procesos evolutivos del nivel de pensamiento en Piaget tienen inconvenientes inherentes a ella: detectar el nivel de pensamiento, determinar su lenguaje respectivo, valorar los métodos de experiencia pertinente, entre otros.

Como vemos, la determinación del desarrollo del pensamiento es inferencial. En cambio, la preocupación de los Van-Hiele está en función del aprendizaje (De la Torre, 2003).

La estructura del estudio de los Van-Hiele tiene un cierto desarrollo continuo ya que los modelos anteriores no permiten determinar en forma secuencial los niveles superiores. Claro que esto exige que las reglas que estructuran el nivel inferior sean explícitas y los objetos bien determinados, pues en las limitaciones de su configuración es donde se ve la necesidad del paso siguiente.

La estructura presentada por los Van-Hiele, debido a su propio marco teórico, le exige al maestro conocer muy bien el lenguaje usado por el estudiante, ya que desde ese lenguaje es que se establecen los modelos de abstracción.

En la obra de Piaget el lenguaje del aprendiz no tiene el mismo realce.

Este breve bosquejo permite apreciar la razón de los niveles del modelo educativo de los Van-hiele, tal como lo presenta Andrés (De la Torre, 2003) (pág. 8-9). Los elementos de tal modelo son los siguientes:

En los diversos niveles de los aprendices con respecto a la matemática, cada nivel tiene su modo de comprensión, de manera que un estudiante sólo puede captar bien los conceptos matemáticos adecuados a su nivel. Es por ello que el proceso de enseñanza ejecutado por el maestro conviene diseñarse de tal manera que se adecúe al nivel de razonamiento del estudiante. En muchas ocasiones el manejo operativo por parte de los estudiantes (mecánico) nos hace creer que el alumno comprende; pero al dialogar con él para llevarlo a la conceptualización de lo que hace, podemos notarle deficiencias en definiciones, en uso del lenguaje no apropiado, conceptos amorfos, entre otros. Esto dice que el estudiante hace, pero aún no conoce, ya que al explicar no hay un cuerpo deductivo que lo avale. Es por ello que los estudiantes cuando llegan al álgebra se encuentran en dificultades de asimilación: los conocimientos que fundamentan el Álgebra, la Aritmética, no están claramente concebidos.

En el proceso de enseñanza se ha generado una incomprensión para la clase, precisamente porque tenemos una revoltura de niveles de abstracción, y se ha pasado de un nivel a otro, como si el educando también lo hubiese hecho. Esta es la causa de la resistencia de los estudiantes a la Matemática: Su desarrollo de abstracción no ha sido madurado. Es por ello que a toda hora tienen que estar dependiendo de otra persona, como el maestro, que les diga qué es lo que ellos conocen, cuando en un desarrollo pleno. son ellos los que deciden que es lo que conocen.

Es por ello De la torre sostiene que cuando se tienen en cuenta los niveles planteados por los Van-Hiele *"Los aprendices puedan pasar de una etapa de instrucción directa a otra en que manifiesta total independencia del maestro*". (De la Torre, 2003) (pág. 9).

En las experiencias que dieron origen a la teoría de los Van-Hiele, ellos la evidencian muy claramente en la siguiente experiencia, pues observaron que determinados estudiantes habían tenido dificultades para entender la Matemática; pero más adelante, cuando se les explicaba con un lenguaje y método adecuado a él, le decían: *"no es tan difícil, pero ¿Por qué nos explicó, usted, de forma tan complicada*? P. Van-Hiele, (citado por Andrés de la Torre, 2003) (pág. 9). Como se observa, esta situación no podría estudiarse solo con los recursos que planteaba Piaget, ya que los niveles lógicos, los lenguajes apropiados, etc. exigen conocer no solo el desarrollo del pensamiento del estudiante, sino el grado de abstracción de las teorías matemáticas mismas. Desde este grado de abstracción es que configuramos la metodología que nos lleve a la comprensión en el estudiante.

Los niveles de los Van Hiele han sido presentados, así: Nivel 0:

Los objetos son los niveles básicos en el estudio.

Nivel 1: Los objetos son propiedades que analizan los niveles básicos. Nivel

2: Los objetos son enunciados que relacionan las propiedades.

Nivel 4: Los objetos son propiedades que analizan las propiedades parciales (Hoffer, citado por Andrés de la Torre, (pág. 10).

Desde la experiencia, se ha logrado comprender que la dificultad mayor del estudiantado está en la construcción de los niveles de abstracción. Esto se denota cuando al exigirles una explicación conceptual de lo que se cree manejan bien en Matemáticas, ellos usan un lenguaje inapropiado por lo vago, por incoherencias en las explicaciones y en muchas ocasiones, por lo que no logran establecer la correspondencia de lo que en el lenguaje formal realizan operativamente. En estas condiciones, un estudiante no está disponible para hacer pensamiento matemático. Esto hace que una enseñanza apropiada tenga un procedimiento muy lento, que no permite lograr que la técnica del manejo se corresponda con la técnica de comprensión.

En la enseñanza tradicional se ha evaluado el proceso de aprendizaje, casi siempre mecanicamente , sin hacer un vínculo con el modo de pensar construido por el estudiante. Así se origina el tedio a la materia y el escaso desarrollo matemático que se da en esta educación. Esta metodología ha tenido como base que el maestro es el que sabe y el alumno el que aprende. Pero en nuestra propuesta lo que hacen ambos es construir un pensamiento matemático, razón por la cual la comprensión, la crítica y las propuestas de los estudiantes son tan necesarias; contrario a la pedagogía anterior, donde el estudiante permanecía pasivo: no construía, solo recibía.

Se propone una pedagogía que es activa, hace que el estudiante durante todo el proceso se mantenga con un pensamiento continuo y funcional.

Esta pedagogía planteada, también exige que los métodos de evaluación se den durante todo el proceso de enseñanza y no como una circunstancia separada de ella. Participar en clase, mejorar el lenguaje, desarrollar un pensamiento crítico, ir madurando la sistematización entre otros, entran en el proceso de enseñanza en donde los exámenes y los test son solo unos casos particulares de la enseñanza y la evaluación.

4.2 Los Números Irracionales

4.2.1 Visión Histórica

La visión histórica puede retrocederse hasta épocas inmemoriales; pero para el estudio es suficiente partir de las concepciones que plantearon los filosofos y matemáticos griegos, en especial desde la escuela pitagorica. Esto nos permite ilustrar al estudiante en una forma más expedita cómo se crearon los conceptos en los orígenes de la cultura. Además, como maestros, el reconocimiento de la abstracción hecha por los griegos, basta para indicar cómo orientar el desarrollo de los estudiantes para iniciar el reconocimiento de la historia, se pretende hacer un paralelo, entre Collette (1986) y Kline (1978), también se pretende enlazar los relatos de algunos autores que narran los hechos y sucesos ocurridos desde la génesis hasta conseguir su desarrollo y consolidación de los conceptos de los números irracionales. Se presenta la historia de los números irracionales, con algunos apuntes textuales que aportan a su reconocimiento.

4.3 Aritmética Pitagórica

Los griegos antiguos distinguían el estudio de las relaciones existentes entre los números del cálculo práctico con números. El primero se conocía con el nombre de aritmética, mientras que el cálculo recibía el nombre de logística. Es interesante señalar que esta división se mantuvo hasta finales del siglo XV de nuestra era y que la aritmética actual se refiere a la logística griega, mientras que la teoría de números corresponde a la aritmética de los griegos (Collette, 1986).

La división planteada por Collete, se puede decir que no representa plenamente el espíritu pitagórico, *pues todas las cosas son números*. Puesto que el número es la esencia de todos los objetos, la explicación de los fenómenos naturales solo podría lograrse con la ayuda de los números (Kline, 1998).

Pero el mundo del siglo VI en que a Pitágoras le tocó vivir era muy distinto. Las invasiones persas habían aproximado hacia los griegos las milenarias culturas orientales con su abigarrado espíritu religioso y su actitud mística y contemplativa, que originaban una especial forma de racionalidad. El espíritu religioso oriental no buscaba, ni busca, su camino hacia la comunión con lo divino a través de la contemplación racional del universo, sino más bien mediante la negación de la búsqueda misma de la razón, hacia formas de comunicación en zonas más internas del espíritu. Pero junto con esta vena mística del espíritu, la cultura oriental había realizado admirables conquistas de la razón, plasmadas, por ejemplo, en los desarrollos astronómicos y aritméticos de los babilonios más de un milenio antes de que Pitágoras naciese. Tal vez una de las razones profundas del hondo enraizamiento del movimiento pitagórico en la cultura griega y en su heredera la cultura occidental en que hoy vivimos, consistió en el acierto de Pitágoras para unificar ambas tendencias, racional y contemplativo-religiosa, al dar forma a lo que llegó a ser, mucho más que una escuela de pensamiento, una forma de vida. (De Guzmán, 2017).

"Fue tal el impacto de Pitágoras, que le dio un carácter de universalización matemática". Esta cita de Kline (1998). nos indica que el pensamiento aritmético se dio para darle unidad epistemológica al concepto naturaleza (todas las cosas son números), Y ello nos lleva a que la división en el tratamiento de los números, aunque puede ser metodológicamente aceptable desvirtúa un poco la doctrina Pitagórica. Esto se nota cuando un mismo método o una misma ecuación tienen aplicaciones tan diversas, como pueden darse en áreas, como la geometría, la biología, la física y las ingenierías.

En esto último es necesario tener en cuenta, que los avances en la Matemática Moderna llevarían a hacer el énfasis ya no en la idea de número, sino en la idea de función. El rango metafísico y epistemológico del número pitagórico, aún permanece en el papel de las funciones.

Esta discusión induce a que cuando se vayan a aplicar los conceptos matemáticos estudiados, se les muestra a los estudiantes que hay una misma estructura formal que los sustenta a todos. Ello hace que el estudiante desarrolle un mayor nivel de abstracción y comprensión y descubra que las Matemáticas más que contenidas en la experiencia explican lo que experimentamos.

“El nacimiento y la pervivencia del pitagorismo es uno de los fenómenos más interesantes en la Historia de la Ciencia y de la Cultura en general. Surgió, se desarrolló y se expandió como un modo de vida religioso. Su armazón intelectual consistió en una visión del universo como un cosmos, en contraposición al caos, es decir como un todo ordenado y organizado de acuerdo con leyes asequibles a la razón humana. El mismo impulso religioso conducía hacia la búsqueda y contemplación de la armonía intelectual implantada en este universo como paradigma de conducta humana y como camino y método de elevación espiritual, en búsqueda de las raíces y fuentes de la naturaleza” (Collette, 1986). Este planteamiento desembocó en un profundo misticismo que ha permanecido durante toda la historia de la cultura, y que como se verá más adelante fue resaltada por Miguel de Guzmán. (2.017)

En Pitágoras, el número es la esencia de las cosas; pero para Filolao es la condición de cómo el hombre representa las cosas, se pasa de una esencia ontológica a una esencia epistemológica.

El famoso pitagórico del s. V a.C. Filolao decía: “si no fuera por los números y su naturaleza, nada de lo que existe sería claro para nadie, ni en sí mismo ni en su relación con las cosas se puede observar cómo actúa la potencia del número en todos los actos y pensamientos del hombre, en las obras de arte y en la música”. (Kline, 1998).

En esta variante hay algo de un alto contenido filosófico diferente de un pitagorismo clásico: Si esto lo comparamos con la tesis de Filolao, debemos advertir que la fuerza lógica de este número no se pierde en esta situación ya que Filolao se está refiriendo a la estructura del conocimiento y no a la estructura del mundo.

En el mundo pitagórico existían dos representaciones, unos eran matemáticos y otros eran acusmáticos. Hipaso de Metaponto fue el principal representante de los matemáticos:

“Se debió de ocupar con notable éxito de hacer avanzar los conocimientos matemáticos. A principios del siglo V a. C. (500-480) entró en conflicto con los acusmáticos, ya que fue el primero en ofrecer por escrito al público en general "el secreto de la esfera de los doce pentágonos" (Iámblico, Vita Pyth.88), en castigo de lo cual murió en un naufragio. El "secreto de la esfera de los doce pentágonos" alude a cierta construcción relacionada con el dodecaedro regular que los pitagóricos primitivos deseaban mantener en secreto, como el grueso de su doctrina en general. En otro lugar Iámblico mismo (Vita Pyth. 246- 247) cuenta que aquél que reveló "la naturaleza del conmensurable y del inconmensurable a quienes no eran dignos de participar de tales conocimientos", fue expulsado de la comunidad. Los pitagóricos le erigieron una tumba como si para ellos ya hubiera muerto. Parece probable que fue Hipaso mismo este personaje que reveló por primera vez la existencia de longitudes inconmensurables y precisamente a través de un estudio del pentágono regular. Iámblico acusa a Hipaso de haberse atribuido el mérito de sus descubrimientos, "siendo así que todos proceden de Él", es decir de Pitágoras. Se puede pensar razonablemente que Hipaso fue un gran matemático que efectivamente dio por primera vez con la existencia de longitudes inconmensurables, es decir tales que una no es un múltiplo de una parte de la otra, dando con ello al traste con la acariciada creencia de los pitagóricos primitivos de que todo debe estar regido por los números enteros y las proporciones entre ellos. La versión que Iámblico cuenta, acusando a Hipaso de plagio, proviene según la conjetura de van der

Waerden, del círculo de pitagóricos matemáticos anónimos entre 480-430 de quienes la tomó Aristóteles mismo. Estos pitagóricos fueron potentes matemáticos con la estrategia común de atribuir a Pitágoras mismo sus descubrimientos matemáticos". (De Guzmán, 2017).

Con este hallazgo, el célebre Hipaso, hace el descubrimiento de los números irracionales, lo cual generó una ruptura paradigmática respecto a la importancia de la geometría por encima de la aritmética, dejando huella en la teoría matemática y filosófica.

A Teeteto de Atenas, se le conoce, como el anterior, por el diálogo de Platón que lleva su nombre, en este se narra sobre los irracionales y la idea de generalizar cantidades irracionales en una teoría en segmentos conmensurables e inconmensurables.

"Al descubrirse más irracionales se ratificó su existencia y se creó la necesidad de estudiarlos. Aparece un personaje Teodoro de Cirene (IV a.C.), que es considerado por Proclo como un geómetra célebre, profesor de Platón, quien habla de él en su diálogo Teeteto y menciona que Teodoro explicaba, con figuras que representaban raíces, que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}, \ldots \sqrt{17}$, no eran conmensurables con la unidad." (Collette, 1986).

En el libro X de Euclides encontramos los fundamentos de los números irracionales que proceden de Teeteto, en donde se sustenta su contribución a la construcción de los cinco poliedros regulares. Euclides realiza la gran síntesis de la historia en sus XIII libros de los Elementos, sobre teoría matemática y geométrica.

"Arquitas de Tarento continuó la tradición Pitagórica al situar la aritmética por encima de la geometría; al mismo tiempo que demostró gran entusiasmo por los números, desprovistos en parte del carácter religioso y místico que Pitágoras había querido darles." (Collette, 1986).

4.4 Método Exhaustivo.

Método de Exhaución (Agotamiento); de un modo sencillo puede describirse así: dada una región cuya área deseamos determinar, se inscribe en ella una región poligonal que se aproxime a la dada, y cuya área sea conocida o de fácil cálculo. Luego se elige otra región poligonal que dé una aproximación mejor, continuándose el proceso tomando cada vez polígonos de mayor número de lados y que tiendan a llenar la región dada inicialmente. "El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables debió causar un escándalo entre los griegos puesto que anulaba todos los esfuerzos anteriores por enunciar una teoría de las proporciones compatible con las magnitudes generales. Dos cantidades son inconmensurables, por ejemplo la diagonal y el lado de un cuadrado, son inconmensurables si no existe una razón, entre dos números enteros, que tengan ellas medida común, (sección áurea) ¿Cómo comparar entonces las razones de cantidades inconmensurables? La respuesta la dará Eudoxo con una teoría aplicable tanto a las magnitudes conmensurables como a las inconmensurables.

La razón entre magnitudes es la misma, entre la primera y la segunda y entre la tercera y la cuarta, si de todo equimúltiplo de la primera y de la tercera, y de todo equimúltiplo de la segunda y de la cuarta, los primeros equimúltiplos son mayores, iguales o más pequeños que los últimos equimúltiplos considerados en el orden correspondiente." (Collette, 1986).

Los babilonios, egipcios, hindúes y árabes hicieron un trabajo de fundamentación cultural que sirvió como base para los estudios posteriores en los números irracionales.

"En el Renacimiento y los siglos siguientes se usaron los irracionales, aunque fueron objetados por muchos matemáticos debido a su falta de fundamentación lógica. Steven (1548-1620) reconoció a los irracionales como números aproximándolos a racionales." (Collette, 1986).

Descartes (1596 – 1650), con este método: de la geometría analitica, hace una interpretación algebraica de la Geometría y disipó la barrera que venía desde los griegos, gracias a la cual se consideraba que los estudios numéricos y algebraicos eran diferentes. Desde entonces el espíritu algebraico se resalta sobre el espíritu geométrico, esto puede darnos un sentido pedagógico muy importante cuando nos indica que la parte analítica está presente en la matemática tanto en la parte representacional como algorítmica, es decir tanto en el estado de lo aritmético como del Álgebra, el estudiante no puede evadir la argumentación.

Para explicitar lo anterior, Descartes consideró los puntos como parejas de números, proponiendo de esa forma modelar los problemas en términos algebraicos para solucionar con ecuaciones, dando inicio a la Geometría Analítica. Desde ese momento, el álgebra se consolida como el método para validar los problemas geométricos y nuevamente

(la aritmética "generalizada") empieza a tener preferencia sobre la geometría.

Hasta aquí “los números” se aceptaron de manera pragmática: porque podían ser representados como magnitudes lineales y operadas a idénticas reglas de cálculo que dan resultados correctos. Además, estos números fueron denominados indistintamente como magnitud por su estrecha relación con las magnitudes lineales.

“Descartes en 1628, John Wallis en 1687 aceptan los irracionales como números abstractos. Euler (1707-1783) muestra que � y �^{2} son irracionales y Lambert (1728-1767) demostró la irracionalidad de ��.” (Betancur, Cifuentes, & Gonzalez, 1998).

Al siglo XIX se llega con el concepto de número racional como el que puede representarse por medio de una expresión decimal periódica, y número irracional como el que no tiene un período en su expresión decimal.

A mediados de este siglo se desarrolla el proceso de aritmetización del análisis buscando una definición de número irracional que fuera independiente del sistema de numeración, este proceso consiste en trabajar los sistemas numéricos basándose en sus propiedades y no en la intuición geométrica.

“Weierstrass (1815-1897) introdujo los conceptos de límite y de función continua. Weierstrass y Kronecker, explicaban en clase su construcción, que guarda con la de Cantor una estrecha relación: a toda serie corresponde una sucesión (la de sumas parciales) y a una serie sumable corresponde una sucesión que satisface la condición de Cauchy, o sucesiones fundamentals, para la construcción de los irracionales. “ (Betancur, Cifuentes & Gonzalez, 1998)

En esto Dedekind (1998) presenta una novedad importante, ya que su construcción emplea simples conjuntos (cortaduras).

R. Dedekind (1831-1916), proviene de una tradición familiar académica, era sistemático hasta rayar en manía y probablemente algo provinciano, pero esto no le impidió adelantarse decenios al estado de la Matemática de la época; su construcción atiende al concepto de orden en tanto que las de Weierstrass, Méray y Cantor atienden al concepto de distancia.

Método de las cortaduras: una cortadura no es otra cosa que una partición del conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales en dos subconjuntos $�_1, �_2,$ tales que todo elemento de $�_1$ es menor que todo elemento de $�_2$, todo número racional determina una cortadura, pero puede demostrarse que existen (infinitas) cortaduras no determinadas por números racionales; el conjunto de todas las cortaduras es continuo e isomorfo al de los números reales. (Dedekind, 1998).

Este recorrido histórico es de importancia primordial para el maestro al desarrollar proyectos pedagógicos constructivistas, es decir, que el maestro no puede considerar que el conocimiento en todo momento sometido a la crítica y a la perfección. Por ello se advierte que estos datos históricos no son para atiborrar la mente de los estudiantes, sino para darle instrumentos al maestro para que el haga más dinámica la enseñanza.

4.5 Nociones Generales Sobre Los Números Irracionales

4.5.1 ¿Por qué son importantes los números irracionales?

Su aplicación puede verse desde varios puntos de vista en diferentes contextos, porque permiten una aproximación con el grado de exactitud que se pueda conseguir en su estudio y profundización.

En el ámbito científico es donde más se resaltan los irracionales: en la hidrodinámica, en la mecánica clásica y cuántica, en la relatividad, entre otras, permiten el perfeccionamiento de las ecuaciones en un grado sumo, en el electromagnetismo, en la teoría de ondas, entre otras.

Se nota mucho el papel de los irracionales, ya que errores infinitesimales podrían tener efectos desastrosos muy grandes. Lo mismo ocurre en la radioactividad.

Gracias a ellos, el análisis real puede realizar los procesos de acotamiento. Esta estructura de los reales es la que garantiza la eficacia de la matemática y las aplicaciones a la ciencia.

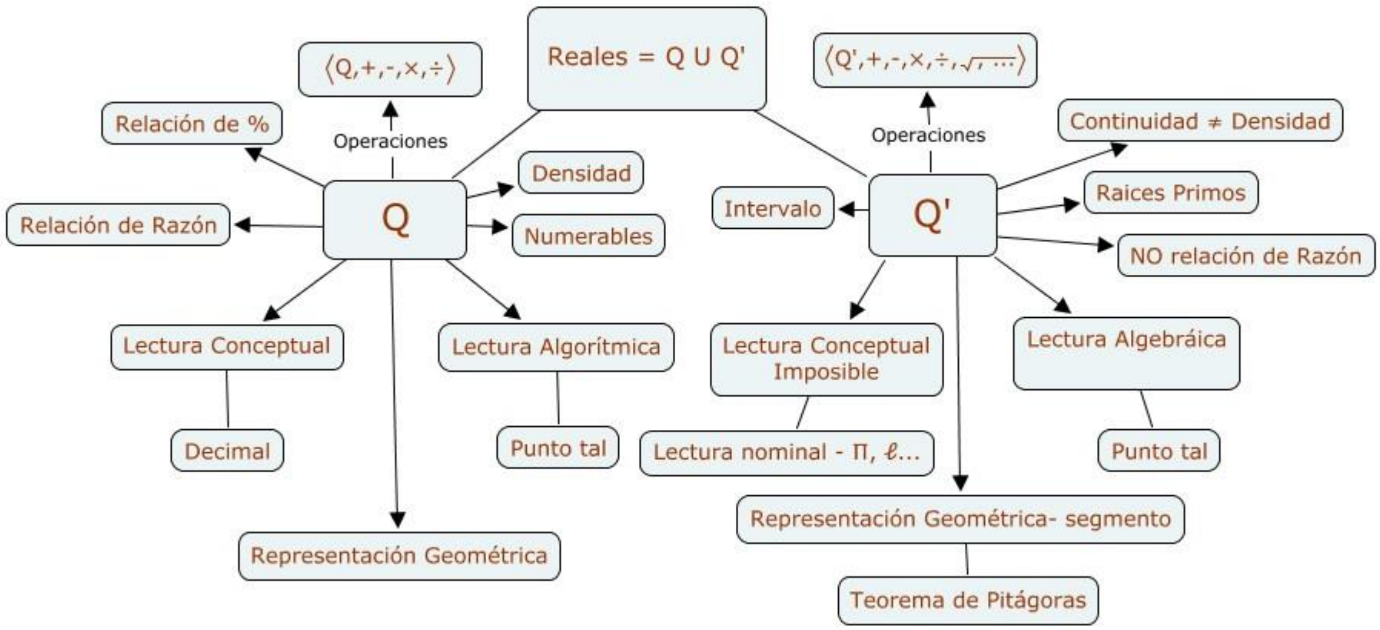


Ilustración 1. Mapa conceptual Números Reales

El proceso de aritmetización del análisis puede ilustrarse a través de su síntesis: los números reales en su concepción actual es síntesis de aquel proceso intelectual y paradigma de todas las estructuras matemáticas que se manejan hoy, los números reales son un conjunto dotado de dos leyes de composición interna, la adición y la multiplicación, que le dan la estructura algebraica de cuerpo. Los números racionales son un subcuerpo propio. Los enteros, contenidos en los racionales, son un anillo. Los naturales, contenidos en los enteros, son semigrupo para cada una de las operaciones, si se incluye el cero (Tovar, 2011).

Ahora se ilustra su construcción genética: La base para la construcción son los números naturales, con su aritmética axiomatizada, por ejemplo, con los axiomas de Peano. Los números enteros pueden verse como el mínimo grupo, extensión del monoide (N, +).

Los enteros han sido definidos convenientemente, por ejemplo, como clases de equivalencies de naturales para la relación de "equidiferencia", y el signo "-" como una convención para definir ciertas clases. Con la regla de "los signos" se generaliza la multiplicación, $\mathbb{Z}$ se convierte en un anillo que contiene una estructura isomorfa a $\mathbb{N}$, a su vez los números racionales $\mathbb{Q}$ se verán como el mínimo cuerpo que contiene un anillo isomorfo a $\mathbb{Z}$. Ahora lo más interesante la superación de los inconmensurables. Para esto iniciamos una construcción a nivel escolar:

4.5.2 Construcción de los números naturales

4.5.2.1 Concepciones de números discretos y propiedades de Peano.

1. 1 no tiene antecesor.

El conjunto de los números naturales, es ordenado *per se:* Todo ordenamiento, es poner en correspondencia los números naturales. A nivel escolar se utilizan ejemplos de la vida diaria (mesas, sillas, escritorios, entre otros), es decir, llevar al estudiante a que diferencie entre número cardinal y ordinal (no es lo mismo un conjunto de 3 elementos, que el tercer elemento). Básicamente, un ordenamiento tiene en cuenta el lugar, pero cuando tengo una cardinalidad, me refiero a todo el conjunto como una totalidad. Todo lo anterior nos dice que el conjunto de los naturales tiene que ordenarse a partir del 1, indicándonos con ello que el 1 no tiene antecesor. Esto también nos permite definir un conjunto ordenado: es aquél que tiene un elemento mínimo.

2. El siguiente de n es n+1

Este axioma nos enseña que el conjunto de los números naturales es discreto: Parte del 1 y se sigue construyendo dentro de los enteros, simplemente anexando 1; por ser discreto, de cada número natural se puede determinar su sucesor.

3. dos números naturales no pueden tener el mismo sucesor

Se aclara el concepto de suma y conteo, porque si un número tuviera dos o más sucesores, una suma podría tener dos o más respuestas.

Por ejemplo $3 + 2 = 5$, pero si el 4 tiene dos sucesores 5 y 6, entonces $3 + 2$ también sería igual a 6.

Resaltar la división entre pares e impares, primos y compuestos

A pesar de que los números naturales son un invento del hombre, el que sean pares o impares, primos o compuestos ya no es un invento de los hombres, sino que es parte de la naturaleza de los números. Esto permite dos cosas:

1. Que el razonamiento matemático sea objetivo

2. Qué se puedan hacer demostraciones, por ejemplo; par + par = par (demostrable)

Las propiedades de los números son independientes de que sea un invento del ser humano. Los números tiene un carácter de objetividad autónomo de quien realice una demostración de alguna de sus propiedades.

4.5.2.2 Uniformidad

La no uniformidad en la distribución de los números primos ha hecho imposible sacar una regla universal para encontrar números primos particulares.

¿Por qué se llaman números primos? (después de factorizar)

Todo número natural se puede trabajar con un conjunto de primos. Entonces un número primo es cuando es primordial, no quiere decir que sean familiares, Prima quiere decir que es básico

La importancia de factorizar, algo complejo por medio de proposiciones primordiales, es básica en las demostraciones, pues nos permite presentar situaciones complejas en expresiones ya conocidas o determinadas.

Después de estas propiedades vienen operaciones en los naturales, de la cuales las más funcionales son la suma y la multiplicación; pero con las siguientes limitantes: la suma no tiene elemento neutro ni elemento inverso, mientras que la multiplicación no tiene elemento inverso sino neutro, que es el uno.

4.5.3 Números Relativos

El conjunto de los "números relativos" se ha introducido en el Álgebra para que siempre sea posible sustraer un número de otro, sin tener en cuenta cual es el mayor. En el conjunto de números relativos se define la resta mediante la adición; esto es, para todo número positive p. se estatuye simplemente que $s - p = s + (-p)$, también se puede mencionar que existen dificultades e inconvenientes en su aprendizaje.

Estos inconvenientes recortan la aplicación y operaciones de la Matemática; enseñarles prácticas de contabilidad, como las siguientes:

Haber +; Deber -. Deber, señalado con menos: (-), (no indica inferior sino una dirección contraria). Cambia el vector, al cambiar el signo en la contabilidad. “Son valores relativos” y no obstáculos epistemológicos, es una de las aclaraciones puntuales que se deben hacer a los estudiantes. Calcular $(40-48) = (-8)$ en los naturales es imposible, lo que indica las limitaciones algebraicas de dicho conjunto. La resta no es propia de los naturales.

Por lo tanto, aparece una necesidad general de crear los números enteros. En los enteros son válidas las operaciones de suma y resta son las apropiadas para definir la resta utilizando la suma (�+ (−�, inverso aditivo del otro.

La multiplicación sigue con los mismos problemas que tienen los naturales pues le falta el inverso multiplicativo, el cual solo puede construirse dentro de un conjunto donde la división le sea operación apropiada.

Dentro de los números enteros la división se cumple cuando el dividendo es múltiplo del divisor, es decir, es una operación de los enteros con condición, ya que no siempre se puede hacer la división. Generamos así una crisis.

Ahora viene un problema de la proporcionalidad y la racionalidad de los números enteros y de ahí se generan los números racionales (Obando, 2003).

Ya con estos se genera una nueva visión matemática, dada desde el mismo nombre de los números: el numerador, que es un entero indica cantidad de un objeto determinado; ese objeto determinado está señalado por el denominador, que es el que le da el nombre a la fracción.

Al reducir a común denominador se debe enseñar al estudiante las razones que generan tal condición, pues está fundamentada en la misma que para sumar enteros: solo se suman aquellas cantidades que pertenecen a un género, y este está determinado por el denominador, el cual debe ser universal, es decir, único, para indicarnos con ello que estamos ante un mismo género.

En conclusión: Se puede operar correctamente cuando se hace dentro de una clase que admita la operación respectiva. Es por ello que a los estudiantes se les debe crear un problema que no es soluble en un conjunto numérico en estudio para que puedan determinar la razón del conjunto que se va a conocer.

Los siguientes ejemplos nos indican las distintas maneras como podemos operar dentro de los racionales, sea interpretándolos como fraccionarios o como decimales:

División:

1) $\frac{�}{�}$ = 0,5 = decimal finito ($\mathbb{Q}$) 0,33333333… un periodo (infinito periódico) Inte

Interpretación de los racionales en decimales; sea decimal finito o infinito periódico será racional o lo podrá pasar a racional.

Conclusión: Infinitas cifras, pero no periódicas arbitrarias

2) Dos racionales los puedo ordenar, teniendo en cuenta la relatividad de los números en la ubicación que presentan en la recta numérica.

$\frac{�}{�} < \frac{�}{�}$ por tanto �� < �� Nota: Los números racionales, es un conjunto ordenado.

Por la **densidad** no se sabe cuál es el sucesor de un racional, porque en medio de un racional siempre hay otro**.** Encasillando la densidad de los racionales, siguiendo la construcción del matemático R. Dedekind, por medio del orden de los racionales y su densidad se puede acotar la recta numérica y llegar a un conjunto nuevo que corresponde a los números irracionales, pero este nuevo objeto matemático se lo podrá abordar en su abstracción en la medida que se reconozca **la continuidad y el límite**.

Continuidad: En la recta "*L*" hay infinitos puntos que no corresponden a ningún número racional. Si al punto *"p"* le corresponde el número racional *"a"*, como se sabe la longitud *"op"* es conmensurable con la unidad de longitud invariable empleada para la construcción, esto es, existe una tercera longitud, llamada medida común, de la cual ambas longitudes son múltiplos enteros. Pero ya los antiguos griegos supieron y demostraron que existen longitudes que son inconmensurables con una unidad de longitud dada, por ejemplo, la diagonal del cuadrado, cuyo lado es la unidad de longitud.

Si ahora se pretende, como ciertamente es la pretensión, seguir aritméticamente todos los fenómenos de la recta, los números racionales no bastan para ello, y por tanto es imprescindible refinar esencialmente el instrumento “R”, que fue construido mediante la creación de los números racionales, mediante la creación de nuevos números tales que el dominio numérico adquiera la misma completitud o, como queremos decir igualmente, la misma continuidad que la línea recta. (Dedekind, 1998)

5 CONTRIBUCIONES

Entre los hallazgos que se pueden exhibir, se enumeran algunos;

1. La determinación de la Historia de la Matemática, como un recurso didáctico, para hacer que los conceptos sean bien asimilados y para diezmar el temor a la materia. Para hacer esto no se puede considerar a la Historia como un conjunto de relatos, sucesos y anécdotas importantes, sino que se considera como una ruta para la construcción del pensamiento. Después de hacer la construcción conceptual del tema a enseñar se muestra a los estudiantes, los métodos que usaron los grandes matemáticos y las innumerables dificultades a las que tuvieron que enfrentar. Usando este mismo método se hace énfasis en que las ideas matemáticas no nacieron perfectas, desde la creación de ellas, sino que la historia ha mostrado que, por discusiones, análisis y aplicaciones, ellas se han ido perfeccionando y decantando con el tiempo.

2. En la perspectiva del trabajo de investigaciones se concibe la Matemática como modelo y estructura general, en contraposición a la manera reduccionista y fragmentada como suele presentarse, y a la manera forzosa de dividirla en materias (aritmética, algebra, geometría, entre otras) por una buena intensión de carácter metodológico. En ese sentido la construcción de los números irracionales no se considera como un tema aislado, independiente, sino como una problemática al interior de los números reales. Es por ello que se utiliza la estructura de los números racionales para construer los números irracionales, fundamentalmente orientando al estudiante a reconocer las propiedades y operaciones de los números racionales no bastan para construir la noción de espacio y tiempo que usualmente utilizamos. Se hace resaltar la diferenciación entre densidad y continuidad como propiedades determinantes en forma respectiva

de los racionales e irracionales. También se les posibilitan actividades para concebir intuitivamente porque uno de esos conjuntos es numerable y el otro no. Geométricamente estas ideas las construirá el estudiante en la recta numérica o cuando se esté estudiando el teorema de Pitágoras.

3. ¿La historia de la Matemática como problema y recurso del conocimiento? , exige la depuración lógica de los conceptos constituyentes del área: aclarar razón lógica para diferenciarla con razón empírica, estructurar una argumentación y explicación con una buena metodología. Mostrando sus ideas en forma clara y coherente; con un lenguaje bien definido y transparente, que no busque explicar con rodeos, sino que vaya a la esencia del concepto. Por ello se piensa que los maestros tienen que diferenciar cantidad y número; verificación y demostración; particularidad y universalidad, entre otros, lo cual solo puede lograr con fundamentos epistemológicos que partan de la filosofía misma de la Matemática. En muchas ocasiones por falta de esta formación se hacen preguntas inadecuadas para que intentar aproximar respuestas correctas; se pide un lenguaje preciso cuando simplemente se enseña con rodeos y vaguedades.

La construcción del discurso debe ser primordialmente lógico (claro que graduado de acuerdo al desarrollo del estudiante). Y es por eso que se obliga a los maestros a construir preguntas con buen diseño para que se pueda exigir al estudiante la respuesta pertinente.

4. La Historia de la Matemática se debe tomar como un buen recurso didáctico, como mediación de procesos de aprendizaje el aula de clase.

La noción de método, los recursos didácticos, los usos de la experiencia y del lenguaje, la corrección de errores, entre otros, indican claramente que la Historia de la Matemática sería insuficiente para sustituir estos últimos recursos.

Los textos de lectura, de investigación o ilustración son previamente seleccionados por el maestro a fin de llevarle al estudiante una amplitud de conocimientos, o de indicarles la evolución histórica de los temas estudiados o para proponerle hacer pequeñas consultas o interpretaciones.

Así, "*El libro de texto es un recurso habitual en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, hasta el punto de que, en muchas ocasiones es el propio manual el que determina el currículo real. Por este motivo, consideramos que es importante hacer una elección cuidadosa del libro de texto que se va utilizar en el aula, para disponer de un manual, que cumpla la planificación de la enseñanza y aprendizaje. Pero la elección del manual escolar, no es una tarea sencilla, como han puesto de manifiesto varios autores".* (Del Carmen, 1994; García, 1995; Monterrubio, 2000. Citados en Zúñiga, 2012).

La elección de un texto de trabajo en clase es lo que nos determina un método de enseñanza o como afirma Zúñiga (2012) citando a Martínez (1992) "*desde una concepción más amplia, que no son únicamente medios para la enseñanza, sino que son fundamentalmente una teoría sobre la escuela, un modo de concebir el desarrollo del currículo, un instrumento de codificación de la cultura que previamente seleccionan y un modo de concebir las relaciones entre el profesor y los estudiantes". "El texto refleja, en las tareas que determina, una teoría curricular; por tanto, no solo es el soporte técnico de la información, es también un modo de hacer currículo".* (pág. 8)

Desde este trabajo se quieren mostrar algunas comparaciones, entre textos escolares, partiendo de los autores, haciendo algunos paralelos relevantes, que indaguen el cuestionamiento en comparación con la historia en los números irracionales, para mejorar el pensamiento numérico, frente al reconocimiento y estructuras cognoscitivas. Por lo anterior se pretende abordar algunos textos por autor o autores e ir al núcleo de nuestro interés como lo son la Historia y su conexión con los números irracionales. Para abordar este análisis se hace fundamento en Escudero (1983a) (Rodríguez 1977, Escudero, (1979). Citados en Zúñiga, 2012), "*el libro de texto está constituido por tres dimensiones: semántica (su contenido), estructural-sintáctica (su forma de organización y sistema de símbolos), y pragmática (uso, propósitos, entre otros.)*".

En este proyecto se toma el método deductivo, que parte de lo general a lo particular, para abordar el análisis; se hace una mirada de los preconceptos de orden y densidad como se presentan al estudiante, el paso de fracción a decimal, de decimal a fracción, y fundamentalmente los acontecimientos históricos, si benefician o no para estructurar los preconceptos o la influencia en la temática nuclear, y el pensamiento numérico en los irracionales. Igualmente, se miran los ejemplos de números irracionales, el número Pi, la raíz de dos, la razón aúrea, en cuanto a qué tratamiento reciben, teniendo en cuenta el gráfico de los irracionales mencionado anteriormente (ver gráfico sobre concepto de número) (Posada, 2005).

Por lo anterior se inicia un análisis de búsqueda de la Historia en Matemática en primera instancia su representación algorítmica que es indeterminada o indefinida.

A partir de lo anterior, la presente propuesta dirigida a los irracionales está dividida en tres tópicos: 1) Semántico, 2) estructural y 3) Pragmático o de propósitos pedagógicos.

Autor: **Contreras, Lizcano García, Cano, flechas.**

Nombre del texto**: LOGROS MATEMÁTICOS (nivel 3)**

Históricos: Toma una reseña histórica iniciando con los pitagóricos, pasando por Platón, mencionado la diagonal del cuadrado, apuntando al cambio de épocas, pero no alcanzan ninguna relevancia, ni profundizan en su análisis. Lo que estos autores están resaltando es que el hecho de mencionar o citar procesos históricos como tales, no necesariamente han de contener orientaciones pedagógicas.

Números irracionales.

1. Aborda o inicia como operadores (Ampliadores-reductores), representación de la recta, conocimientos previos.

2. Se escribe el significado de fracción decimal, expresión decimal finita, expresión decimal periódica, complificar, fracciones equivalentes.

3. No se menciona el orden de los números racionales, y por tanto no se establece relación con la densidad de los racionales, que sería el concepto previo de esta propuesta, llegando a la conversión de fracción a decimal, y de decimal a fracción.

Autor:

Nombre del texto**: MATEMÁTICAS PARA EL DESARROLLO DE COMPETENCIAS.**

Historia: Carece por completo de datos históricos.

Números irracionales.

1. Inicia con tres interrogantes de números decimales periódicos, periódicos infinitos e infinitos no periódicos; utilizando el teorema de Pitágoras se establecen unos ejercicios gráficos (el teorema de Pitágoras como tema previo a los irracionales).

2. Se organiza de acuerdo a unas actividades que se desprenden como aplicación del teorema de Pitágoras.

3. No se establece ninguna relación con orden de los racionales, no se menciona densidad como concepto previo, y no existe ninguna relación entre los números racionales para llegar a los irracionales.

Autor: **Caballero Urrego J. Jairo; Calderón Isabel C.; Torres Blanca N.**

Título: **Símbolos, Matemática Aplicada.**

Historia de la Matemática: Presenta una reseña de historia de la numeración griega donde únicamente menciona a la base diez; el sistema de numeración chino, donde hace referencia a qué es un sistema decimal estricto que usa las unidades y las distintas potencias de diez; sistema de numeración babilónico donde se inventó un sistema de base diez, aditivo hasta sesenta y posicional para los números superiores; sistema de numeración maya contiene el sistema de numeración de base veinte con el cinco como base auxiliar; sólo esto se presenta como datos históricos, no ayudan a visualizar la dificultad en su reconocimiento, y no muestra la aparición de los irracionales por medio de la inconmensurabilidad.

Números irracionales.

1. Presenta una fundamentación de conceptos previos de números racionales, la periodicidad de los decimales periódicos y los no periódicos, un taller de ejercicios al respecto; posteriormente indica un gráfico que contiene el teorema de Pitágoras para calcular su diagonal, y presenta una breve aproximación del método de sucesiones de intervalos; finaliza con un taller que contiene muchos ejercicios de gráficos con el teorema de Pitágoras.

2. Hace énfasis en el teorema de Pitágoras para llegar a los números irracionales; de manera aislada presenta el método de sucesión de intervalos.

3. Carece de un verdadero encuentro con los irracionales partiendo de los conceptos previos, aunque se hace una alusión en los decimales de manera descriptiva.

Autor o autores: Anzola Máximo; Bellón Manuel; Hervás Juan Carlos; Melo Clara; Urquiza José Luis; Vizmanos José R.

Título: Serie Matemáticas secundaria.

Historia de la Matemática.

Hacen una reseña histórica muy breve acerca del intento de explicar el mundo por medio de los racionales, luego unas caricaturas comentan sobre el número � posteriormente finalizan comentando acerca del número � pero son datos aislados de la temática a tartar pues no se hace ninguna referencia en la dificultad epistemológica ni histórica del encuentro con los números irracionales, es una propuesta de lo más cercano a la historia que pretendemos motivar.

Números irracionales.

1. Inicia con conceptos previos sobre los enteros, la amplificación y simplificación de fracciones, operación con fracciones, relación de fracciones con decimales y su posterior gráfico, aparición del número irracional, pero por medio del teorema de Pitágoras.

2. Intenta hacer una relación de conceptos previos, pero de manera similar a los demás textos citados para abordar los irracionales.

Se ha hecho la construcción curricular del área de Matemáticas de manera tal que al mismo tiempo que le sirva como fundamento para los estudios superiores, también les sea funcional en la parte laboral si así les fuera necesario (Vasco, 1998).

3. Es una propuesta desarticulada respecto a la muestra, ya que, no hacen énfasis en la estructura histórica del concepto proyectada pedagógicamente. No hay relación de conceptos previos para alcanzar el tema de nuestro estudio de irracionales. Esto se hace como una ilustración y no como un comentario

Teniendo en cuenta las condiciones sociales y económicas en las que se ubica el colegio; considerando la construcción curricular del mismo, hemos encontrado que la programación del área no puede darse en forma universal, sino acorde con estas condiciones y con las finalidades del colegio, dentro de las cuales tenemos que ubicar las de la Matemática como área. Gracias a estas condiciones debemos ser prudentes en la elección y uso del texto, ya que, los diseños de estos se hacen plenamente en abstracto, sin tener en cuenta las condiciones arriba numeradas. Es por ello que en los textos encontramos limitaciones de método, un lenguaje impersonal, como si todos los estudiantes estuvieran en igual condiciones de comprensión, además los ejemplos son muy operativos sin un contenido analítico; no ponen contraejemplos, los cuales son útiles para hacerles comprender al estudiante los alcances y limitaciones del tema en estudio. Esto exige que nuestro currículo, esté determinado por las particularidades de nuestro estudiantado, por los propósitos institucionales y sociales que nos movemos y por el desarrollo del pensamiento matemático que se ha logrado construir y evaluar en los alumnos. Por estas razones es que los textos se toman como recursos; pero no como el eje direccional del desarrollo del área.

6 UNIDAD DIDACTICA

PROPUESTA UNIDAD DIDÁCTICA NÚMEROS IRRACIONALES

Como expresa Zapico (2006, p.3):

"mostrar a los jóvenes de qué modo se fue construyendo nuestra Ciencia (en el transcurso de milenios que nos precedieron) y de presentar a sus creadores (cosa que se hace habitualmente en otras áreas, por ejemplo: Literatura) la muestra tal cual es: un producto de la actividad humana que se gestó a partir de diferentes estímulos, en ocasiones para resolver problemas prácticos y otras veces por motivos de orden artístico o espiritual".

OBJETIVOS:

- ✓ Fundamentar conceptos previos a los números irracionales.
- ✓ Generar actividades didácticas que acerquen al reconocimiento del número irracional.
- ✓ Reconocer los números irracionales a través de la historia (retos y tensiones en su construcción en sus orígenes).

CONCEPTOS PREVIOS: Con esta propuesta se pretende generar en el estudiante un desequilibrio en la construcción del concepto de número irracional, debido a que por su proceso de desarrollo cognitivo (Flavell, 1993) aun no maneja los conceptos de límite y continuidad

El nivel de complejidad en la adquisición de los conceptos va aumentando en la medida en que se avanza de un ejercicio a otro.

Los estudiantes deben tener conceptos previos relativos a:

- ✓ Concepto de Orden
- ✓ Noción de intervalos
- ✓ Actividades referentes a los bloques temáticos:
- ✓ Operaciones con Racionales
- ✓ Proporcionalidad
- ✓ Regiones poligonales y sus áreas.
- ✓ Construcciones geométricas
- ✓ Elementos básicos de la lógica y aproximaciones a los métodos de demostración.

INTRODUCCIÓN

El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de la Matemática. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y la belleza?

Según De Guzmán (1994) la belleza y el juego están en el origen, por tanto, se inicia, presentando al número irracional, en su belleza natural.

ACTIVIDADES

ACTIVIDAD 1 Lecturas

- ✓ Lectura Corta
- ✓ Se pretende generar la curiosidad necesaria para la comprensión de los números irracionales.
- ✓ #1 Lectura Hipaso de Metaponto

Hipaso de Metaponto fue un filósofo presocrático, miembro de la Escuela pitagórica. Nació en torno al año 500 a. C. en Metaponto, ciudad griega de la Magna Grecia situada en el Golfo de Tarento, al sur de lo que ahora es Italia. (*Números famosos IV: Algunas raíces cuadradas. Temas para la educación, revista digital para profesionales de la enseñanza #5 Nov 2009 ISSN: 1989-4023)*

Fue este sabio griego quien probó la existencia de los números irracionales, en un momento en el que los pitagóricos pensaban que los números racionales podían describir toda la geometría del mundo. Hipaso de Metaponto habría roto la regla de silencio de los pitagóricos revelando en el mundo la existencia de estos nuevos números. Eso habría hecho que éstos lo expulsaran de la escuela y erigieran una tumba con su nombre, mostrando así que, para ellos, él estaba muerto.

Los documentos de la época dan versiones diferentes de su final. Parece ser que murió en un naufragio de circunstancias misteriosas; algunos dicen que se suicida como autocastigo, dejando así libertad a su alma para ir a buscar la purificación en otro cuerpo; otros dicen que un grupo de pitagóricos lo mataron, e incluso está la teoría que dice que Pitágoras (creía, hasta cerca del final de su vida, en la definición absoluta de los números como media, y esto le obligaba a no creer en la existencia de los números irracionales) en persona lo condenó a muerte.

Actualmente, gracias a algoritmos computacionales, han sido calculadas hasta 137.438.953.444 cifras exactas.

Metodología: Se pretende que los estudiantes encadenen esta lectura con la actividad anterior, y entonces interpreten la situación ocurrida, bajo el contexto de la época, haciendo una similitud con la época actual. A través de esta lectura se presenta la historia de forma implícita, no hay historia, pero su secuencia se narra a través de la lectura.

#2 El diablo de los números (Fragmento) (Enzensberger, H.M. (2005). 2° edición. El Diablo de los Números. Munich-Viena: Ediciones Siruela)(El Diablo de Los Números: Hans Magnus Enzensberger 1998)

Mantén siempre la calma –dijo el diablo de los números. Para esos pequeños problemas tenemos nuestra calculadora de bolsillo.

Tiene gracia lo de la calculadora de bolsillo-dijo Robert-. Esa cosa es tan grande como un sofá.

-En cualquier caso, tiene una tecla en la que pone:√ "Seguro que en seguida te das cuenta de lo que significa.

- ✓ Rábano – Exclamó Robert.
- ✓ Correcto. Así que prueba: $\sqrt{5929} =$

  Robert probó, y enseguida apa~~reció~~ la solución en el respaldo del sofá: 77

- ✓ Magnifico. ¡Pero ahora viene lo bueno! Pulsa $\sqrt{2}$,¡ pero agárrate bien! Robert pulsó y leyó. $1{,}4142135623730950488016887 24$ ... Espantoso -dijo-. No tiene ningún sentido. Una auténtica ensalada de números. No me oriento en ella.
- ✓ Nadie se orienta en ella, mi querido Robert.

De eso se trata. El rábano de dos es un número irrazonable.

- ✓ ¿Y cómo voy a saber qué sigue detrás de las últimas tres cifras? Porque ya me sospecho que sigue siempre.

- ✓ Cierto. Pero, por desgracia, tampoco yo puedo ayudarte en eso. Sólo averiguarás las próximas cifras matándote a calcular hasta que tu calculadora se ponga en huelga.

- ✓ ¡Que absurdo! – Dijo Robert, completamente enloquecido- Y eso que ese monstruo parece tan sencillo cuando se escribe así: $\sqrt{2}$ –

- ✓ Y lo es. Con un bastón puedes dibujar cómodamente $\sqrt{2}$ en la arena Trazó unas cuantas figuras en la arena con su bastón.

- ✓ Mira:

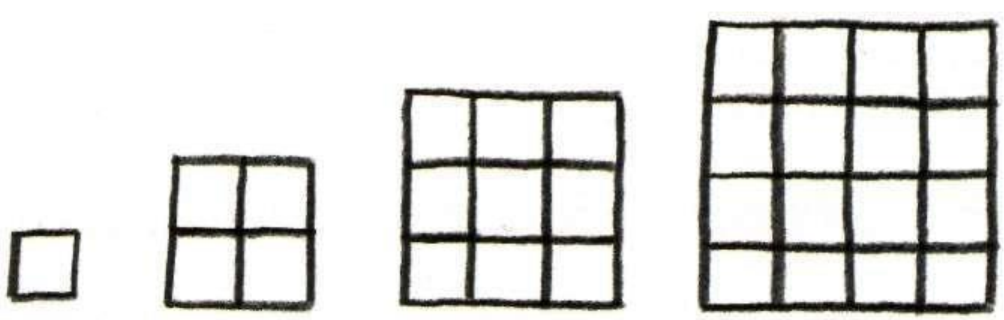


Ilustración 3. Representación de números cuadrados

"y ahora cuenta los casilleros. ¿Notas algo?

- Naturalmente. Son cifras que han saltado:

- $1 \times 1 = 1^2 = 1$
- $2 \times 2 = 2^2 = 4$
- $3 \times 3 = 3^2 = 9$
- $4 \times 4 = 4^2 = 16$
- Sí – Dijo el diablo de los números -, y seguro que también vez como funcionan.

Sólo tienes que contar cuántos casilleros tiene cada lado de un cuadrado, y tendrás la cifra por la que hay que saltar. Y viceversa. Si sabes cuantos casilleros hay en todo el cuadrado, digamos por ejemplo que 36, y sacas el rábano de ese número, volverás al número de casilleros que hay en un lado: $\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3, \sqrt{16} = 4$

- O. K – dijo Robert -, pero ¿Qué tiene eso que ver con los números irrazonables?

- Mmmm. Los cuadrados se las traen, ¿Sabes?

¡No confíes nunca en un cuadrado! Parecen buenos, pero pueden ser muy malvados. ¡Mira este aquí por ejemplo! Trazó en la arena un cuadrado vacío totalmente normal. Luego sacó una regla roja de bolsillo y la puso en diagonal sobre él:

Ilustración 4. Diagonal del cuadrado de lado 1

- Y si ahora cada lado mide uno de largo…

- ¿Qué significa uno? ¿Un centímetro, un metro o qué?

- Eso da igual – dijo impaciente el diablo de los números – Puedes escoger lo que quieras. Por mí llámalo cuing, o cuang, como quieras. Y ahora te pregunto: ¿Cuánto mide la regla roja que hay dentro?

- ¿Cómo voy a saberlo?

- Rábano de dos –gritó triunfante el anciano.

Sonreía diabólicamente.

- ¿Por qué? –Robert volvía a sentirse desbordado.

-No te enfades –dijo el diablo de los números –¡Enseguida lo sabremos! Simplemente añadimos un cuadrado, así, torcido encima.

Sacó otras cinco reglas rojas y las dejó en la arena. Ahora, la figura tenía este aspecto:

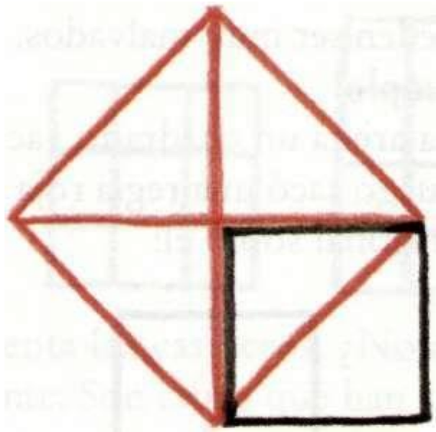


Ilustración 5. Áreas de cuadrados I

-Ahora adivina el tamaño del cuadrado rojo, el inclinado

-Ni idea

-Exactamente el doble del tamaño del negro. Sólo tienes que desplazar la mitad inferior del negro a uno de los cuatro ángulos del rojo y verás por qué:

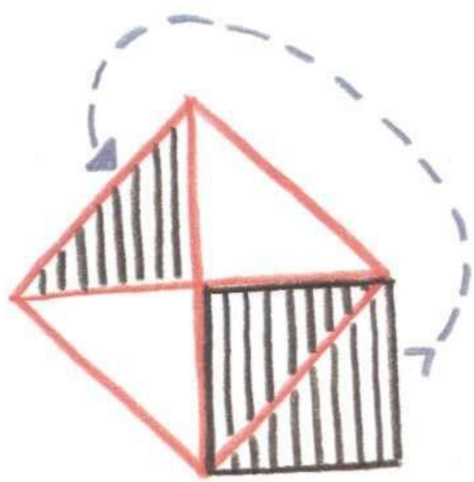


Ilustración 6. Áreas de cuadrados II

Parece uno de los juegos a los que jugábamos siempre cuando éramos pequeños, pensó Robert. Se dobla un papel que dentro se ha pintado de negro y rojo. Los colores significan el cielo y el infierno, y al que al abrirlo le toca rojo va al infierno.

- ¿Admites, pues, que el rojo es el doble de grande que el negro?
- Lo admito –dijo Robert.
- Bien. Si el negro mide un cuang (nos hemos puesto de acuerdo en eso), podemos escribirlo así: 1^2; ¿cómo de grande tendrá que ser el rojo?
- El doble –dijo Robert
- sea dos cuangs –dijo el diablo de los números –Y entonces ¿cuánto debe medir cada lado de cuadro rojo? ¡Para eso tienes que saltar hacia atrás! ¡Extraer el rábano!
- Sí, sí, sí – dijo Robert. De pronto se dio cuenta - ¡Rábano! –Exclamó - ¡Rábano de dos!

  Y volvemos a estar con nuestro número irrazonable, totalmente loco $1{,}414213$ ...
-
- Por favor, no sigas hablando –dijo Robert con rapidez-, o me volveré loco.
- No es para tanto –le tranquilizó el anciano -.
- No hace falta que calcules la cifra. Basta con que la dibujes en la arena, servirá. Pero no vayas a creer que estos números irrazonables aparecen con poca frecuencia. Al contrario. Hay tantos como arena junto al mar. Entre nosotros: son incluso más frecuentes que los que no lo son.

- ✓ Creo que hay infinitos de los normales. Tú mismo lo has dicho, ¡Lo dices continuamente!
- ✓ Y también es cierto. ¡Palabra de honor! Pero, como te he dicho, aún hay más, muchos más, de irrazonables.
- ✓ ¿Más que qué? ¿Más que infinitos?
- ✓ Exactamente
- ✓ Ahora estás yendo demasiado lejos –dijo Robert con muchas decisiones –Por ahí no paso. No hay más que infinitos. Eso es una chorrada con patatas fritas.
- ✓ ¿Quieres que te lo muestre? –Preguntó el diablo de los números - ¿Quieres que los conjure? ¿A todos los números irrazonables de una vez?
- ✓ ¡Mejor no! Me bastó con la serpiente de nueves. Además: conjurar no quiere decir demostrar.
- ✓ ¡Rayos y truenos! ¡Es cierto! Esta vez me has ganado.

En esta ocasión, el diablo de los números no parecía furioso. Frunció el ceño y pensó esforzadamente

- ✓ Aun así –dijo al fin- quizá se me ocurra la prueba. Podría intentarlo. Pero sólo si insistes.

- ✓ No, gracias, por hoy tengo bastante. Estoy cansadísimo. Tengo que dormir, o mañana volveré a tener bronca en el colegio. Creo que me echaré un rato, si a ti no te importa. Este mueble tiene aspecto de ser muy cómodo.

- ✓ Y se tumbó en la acolchada y peluda calculadora, grande como un sofá.

- ✓ Por mí –dijo el anciano-, duérmete. Durmiendo es como mejor se aprende.

Esta vez, el diablo de los números se alejó de puntillas, porque no quería despertar a Robert. Quizá no sea tan malo, pensó Robert antes de dormirse. En el fondo incluso muy simpático. Y, así, se quedó dormido, sin perturbaciones y sin soñar, hasta bien entrada la mañana. Se había olvidado por completo de que era sábado, y los sábados no hay clase.

Metodología: Se busca que el estudiante, relacione el número irracional de acuerdo con los conceptos previos entre lo puntual y particular. Aquí la historia se encuentra de manera implícita, teniendo en cuenta que los símbolos son una maduración y desarrollo de los conceptos matemáticos en la historia.

<u>ACTIVIDAD 2</u> **Construcción del número** π (Grupo Ábaco Universidad Nacional de Colombia Sede Medellin.

- ✓ <u>#1</u> El círculo y la circunferencia

A través de una forma experimental se llega a la razón por la que Leonard Euler le asignó un nombre muy especial a través de una letra del alfabeto griego, pero esta razón que fascinó al matemático Hindú Ramanuja, sorprendió al norteamericano Richard Feynman y a otros aficionados a las matemáticas, los animó a buscarle las cifras decimales y los motivó a recitarles de memoria. Desde el quinto grado se puede proponer la siguiente actividad, puede ser en equipos de trabajo y se recomienda socializarla.

i. Construye y recorta cinco círculos de diferente tamaño
ii. Mide y registra los datos de diámetro y longitud de la circunferencia de los círculos construidos
iii. Sistematiza la información en la siguiente tabla:

Tabla 1. Construcción del número π

Círculo	Longitud de la circunferencia (L)	Diámetro (D)	Radio (r)	L/D
1				
2				
3				
4				
5				

La conclusión deseable es que la longitud de la circunferencia es un poco más de tres veces la longitud del diámetro o la longitud del diámetro es "casi" la tercera parte de la longitud de la circunferencia.

A esta razón fue la que Leonard Euler llamó π (pi)

#2 A lo largo de la historia se han ido obteniendo diferentes valores de Pi, siendo cada vez más precisos.

Es bien sabido desde hace mucho tiempo que sea cual sea la dimensión de un círculo, su circunferencia es "3 veces y un poquito" más que su diámetro. A pesar de esto, la cantidad exacta de ese "poquito" todavía no se ha hallado. El número "3 y un poquito" está significado por la letra griega π (pronunciada pi). Se ha tomado de la palabra perímetro que en griego comienza con esta letra. Las calculadoras modernas han averiguado el valor de π hasta varios centenares de decimales, aunque nunca llegarán a la cantidad correcta.

Metodología: Se pretende como actividad que los estudiantes midan la longitud de una circunferencia dada (mediante un hilo) y compararlo con tres veces su diámetro. Responder como son esos dos resultados.

#3 La aproximación de π desde la cultura egipcia

Inicialmente en Egipto alrededor del año 1800 a.C., el escriba Ahmes afirmó que el área de un círculo es similar a la de un cuadrado cuyo lado es igual al diámetro del círculo didminuido en $\frac{1}{9}$ es decir $\frac{8}{9}$ del diámetro

Quiere decir, que el área de un campo circular de 9 unidades de diámetro es la misma que el área de un cuadrado de lado 8 unidades (Sánchez & Valdivé , 2011).

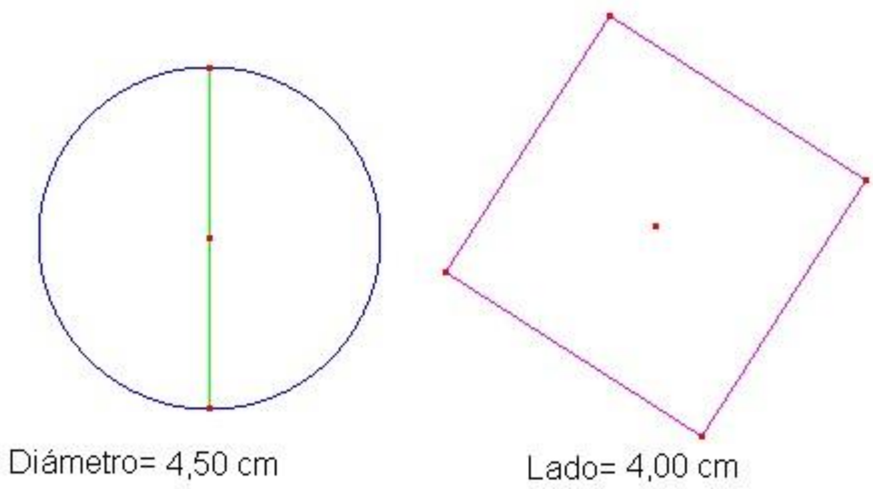


Ilustración 7. Aproximación de π desde los egipcios

Aproximación de $\pi =$ ________

Metodología: Se pretende como actividad que los estudiantes verifiquen este resultado (Recordar: $A_{círculo} = \pi \cdot r^2$)

<u>#4</u> La aproximación de π desde la Biblia

En la Biblia, en el libro de las Crónicas, se describe un recipiente circular que formaba parte del templo de Salomón (Construido en 950 a.C. Allí se especifica su tamaño; “*diez codos de ancho y un cordón de 30 codos lo ceñía a su alrededor*”. (http://www.ua.es/personal/viana/Documentos/Cefire/PiNumeroIrracional.pdf)

Es decir, asignaba el valor ________ a nuestro número � al igual como la cultura babilonia.

Metodología: Se trata de verificar ésta como la aproximación más desviada que se conoce de este número en la historia de las civilizaciones

#5 La aproximación de π desde la cultura Babilónica (Sánchez & Valdivé , 2011).

En las tablillas babilonias (500 a.C.) se le asigna de una forma aproximada el valor a π

como la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

El área de un círculo se calculó tomando los tres cuartos del cuadrado construido sobre el diámetro

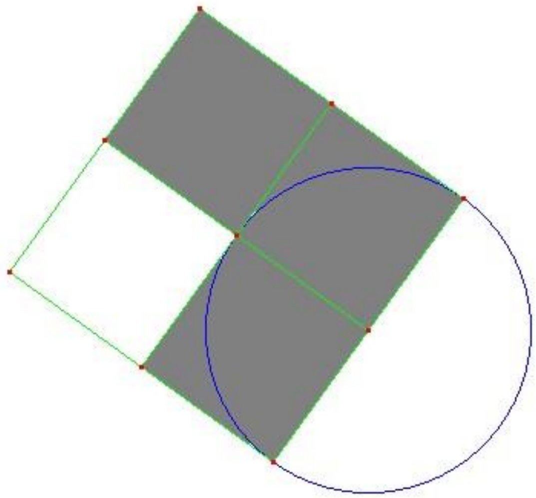


Ilustración 8. Aproximación de π desde los babilonios

Aproximación de $\pi =$ _____________

Metodología: Se pretende como actividad que los estudiantes verifiquen este resultado tomando un círculo con diámetro igual a 4 unidades (Recordar: $A_{círculo} = \pi \cdot r^2$)

Esa aproximación "grosera" fue mejorada posteriormente. Los arquitectos fenicios y egipcios usaban el valor $\pi = \frac{22}{7} = 3{,}142857143\ldots$.

Este valor aproximado difiere del real en poco más del 0,04%, valor suficientemente bueno a efectos de cálculos técnicos pero los griegos sabían que ese valor no era correcto e intentaron descubrir su secreto.

#6 En la Antigua Grecia, Arquímedes de Siracusa (287-212 A.C.) puso cerco a la circunferencia, inscribió un polígono regular dentro del círculo y circunscribió otro del mismo número de lados por fuera. Conociendo los perímetros de los polígonos inscrito y circunscrito, sabemos que el perímetro de la circunferencia se encontrará entre esos dos valores. Cuanto mayor sea el número de lados de los polígonos más precisión obtendremos.

(http://www.ua.es/personal/viana/Documentos/Cefire/PiNumeroIrracional.pdf)

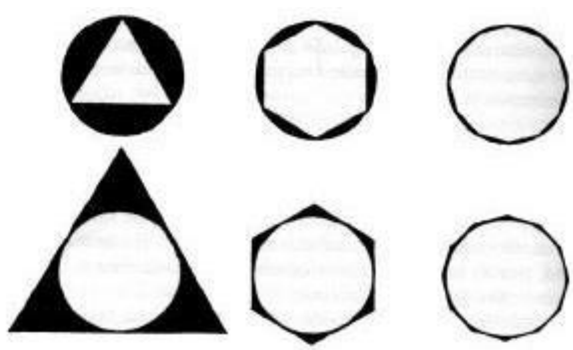
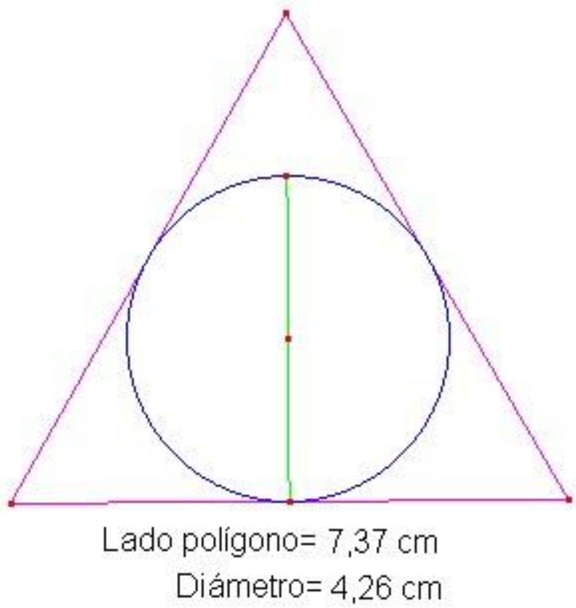


Ilustración 9. Polígonos inscritos y circunscritos en la circunferencia Empezamos primero con un triángulo, luego un cuadrado, pentágono, hexágono, ..., al ir aumentando el número de lados los polígonos van aproximándose a la circunferencia y consecuentemente el número π podemos aproximarlo cuanto deseemos sin más que aumentar el número de lados.

Como actividad se propone realizar este procedimiento con diferentes polígonos, calcular el área del círculo y hallar el valor de π aproximado.



Área circunferencia = ____________

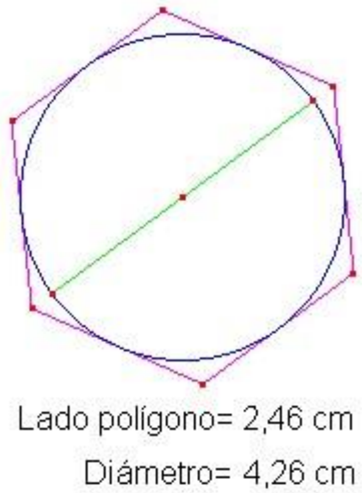
Área polígono = ____________

Valor de π aproximado = ____________

Área circunferencia = ____________

Área polígono = ____________

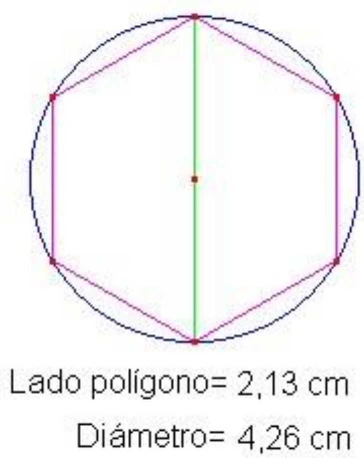
Valor de π aproximado = ____________



Área circunferencia = ____________

Área polígono = ____________

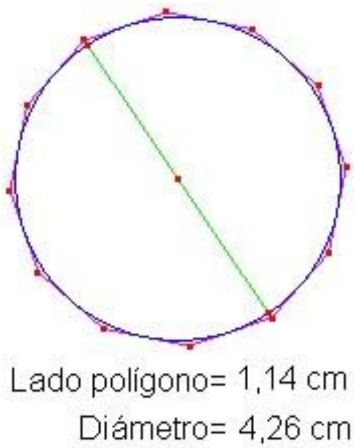
Valor de π aprox. = ____________



Área circunferencia = ____________

Área polígono = ____________

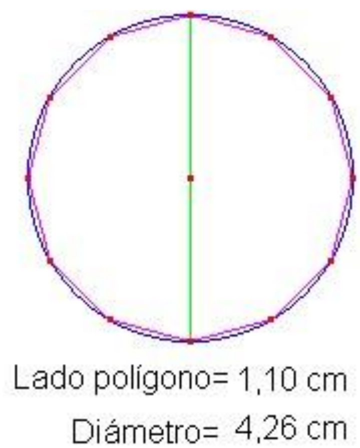
Valor de π aprox. = ____________



Área circunferencia = ____________

Área polígono = ____________

Valor de π aprox. = ____________



Área circunferencia = ____________

Área polígono = ____________

Valor de π aprox. = ____________

Arquímedes llegó a usar un polígono de 96 lados con lo cual obtuvo para π el valor.

$$\pi = \frac{3123}{994} = 3{,}141851107$$

Arquímedes lleva a su máximo nivel de sofisticación el método de exhaución de Eudoxo para determinar la acotación de π :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

Metodología: Se pretende que los estudiantes discutan los resultados obtenidos anteriormente con los polígonos inscritos y circunscritos.

Hasta el siglo XVI no se mejoró el método de Arquímedes cuando se descubrió la mejor aproximación a π en forma de número racional.

$$\pi = \frac{355}{113} = 3{,}14159292..$$

Esta fracción tiene un error de 1 parte cada 12.500.000. Eso supone un error de 3 metros al medir la circunferencia terrestre, un valor despreciable e insignificante para todos menos para los matemáticos que al igual como los teólogos buscan conocer la naturaleza del Creador, así los matemáticos sentían la necesidad de conocer la esencia del número π

. **¿Tenía infinitos decimales?**, ¿**en algún punto se producía un ciclo, un período?**

En 1.596 el matemático holandés Ludolf Van Ceulen dedicó toda su vida a calcular los decimales de π obteniendo 35 decimales, los cuales figuran en el epitafio de su tumba, e incluso sus compatriotas quisieron llamar en su honor número "ludolfiano" al número π Abraham Sharp calculó en 1.699 las 71 primeras cifras decimales de π

Pero en 1.761 el matemático alemán Lambert demostró que π es irracional, no existía esperanza alguna de encontrar regularidad alguna a lo largo de todos sus decimales.

Aun así, el matemático inglés Shanks dedicó 20 años de su vida al cálculo de las 707 cifras decimales de π , pero cometió un error en el decimal 528 y posteriores, circunstancia que sólo pudo ponerse de manifiesto en el año 1.949 con el empleo de cerebros electrónicos.

<u>#7</u> Con lo realizado en las actividades, completa la información siguiente tabla:

Tabla 2. Diversas aproximaciones de π

MATEMÁTICO O LUGAR	AÑO	VALOR APROXIMADO DE π
Egipto		
La Biblia (Crónicas)		
Babilonia		
Arquimides de Siracusa		
Ludolf Van Ceulen		
Abraham Sharp		

Metodología: Se pretende que el estudiante visualice y discuta un panorama global acerca de la evolución del número π a lo largo de la historia.

#8 Se propone una investigación sobre las biografías de los matemáticos que aparecen en la construcción de π esta actividad se realizará por grupos con el fin de plasmarla en una cartelera o en otra forma de presentación y luego socializarla con otros grupos de la institución.

#9 Curiosidad

Un naturalista del siglo XVIII, el conde Buffon popularizó el llamado método de la aguja para obtener π Sea una superficie plana dividida en líneas paralelas separadas una distancia constante H. Tomamos agujas de longitud menores que H y las dejamos caer al azar sobre esa superficie; consideramos caídas favorables cuando la aguja toca alguna de las rayas horizontales y caídas desfavorables cuando la aguja no toca a ninguna de las rayas. Buffon justificó que, dividiendo los casos favorables entre el total de lanzamientos se obtenía el valor $\frac{2}{\ }$

π

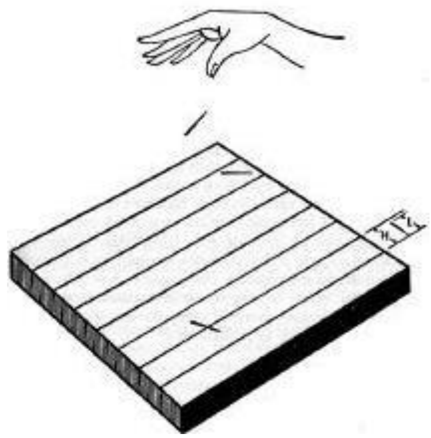


Ilustración 10. Método de la aguja para obtener una aproximación de π

En el año 1.901 el matemático italiano Lazzerini dejando caer la aguja 3.408 veces obtuvo para π el valor; 3,1415929 con un error de sólo 0,0000003.

Metodología: Se propone esta actividad como refuerzo del aprendizaje, el estudiante debe verificar el cumplimiento o no de ella.

<u>ACTIVIDAD 3</u> **Construcción del número de oro**

<u>#1</u> La Grecia Antigua: el Partenón.

Las dimensiones y proporciones utilizadas en la fachada no fueron resultado de la casualidad, sino que los griegos pensaban que eran mucho más bellas y armoniosas si quedaban ajustadas a un número conocido en la actualidad como razón áurea o número de oro.

El número de oro está presente en multitud de obras de arte y elementos arquitectónicos, en los que produce una impresión de armonía lineal, de equilibrio en la desigualdad, más satisfactorio que el de cualquier otra combinación (Leonardo da Vinci).

Vamos a empezar midiendo la altura y el ancho del Partenón griego, en milímetros. Se debe realizar el cociente entre las dos medidas, aproximando hasta las milésimas.

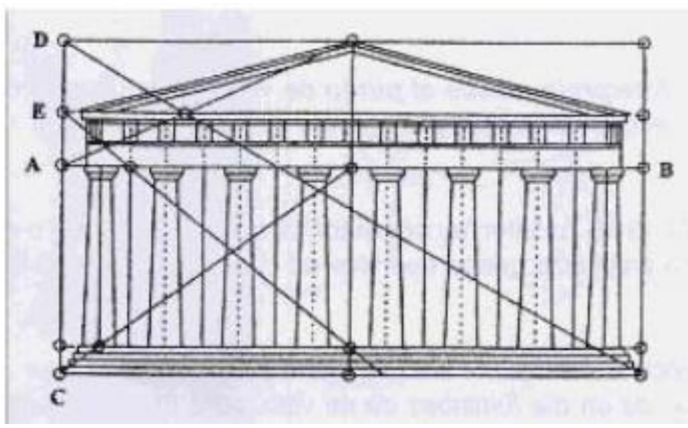


Ilustración 11. El Partenón

	Longitud (L)	**Ancho (A)**	**L/A**
Partenón Griego			

Ilustración 12. Aproximación del número de oro desde el Partenón

#2 Canon griego en las esculturas humanas.

Durante el renacimiento se estudiaron con profundidad las proporciones del cuerpo humano.

Leonardo da Vinci, en su Tratado de Pintura recoge: la longitud de la mano debe ser $\frac{1}{3}$ del brazo; la distancia entre el corte de la boca y la base de la nariz debe ser $\frac{1}{7}$ del rostro… y así miles de medidas diferentes para todas las partes del cuerpo.

A mediados del siglo XIX se comprobó estadísticamente que el ombligo divide áureamente al cuerpo humano adulto en sección áurea. Esto se observa en En la imagen, el Hombre de Vitrubio, canon de Leonardo da Vinci.

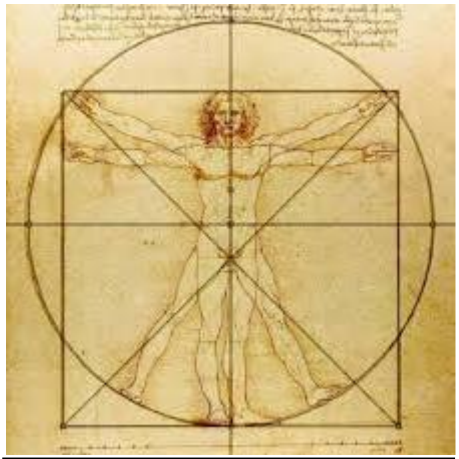


Ilustración 13. El hombre Vitrubio

La actividad que se propone es que se verifique lo anterior haciendo las medidas correspondientes y el cociente correspondiente.

Nombre	Altura (A)	Hasta el ombligo (O)	A/O

Ilustración 14. Comparación con el número de oro desde las medidas del cuerpo humano

#3 Planteamiento de la proporción de segmentos de Euclides (Def. VI 3) de los Elementos.

Desde el punto de vista geométrico, quizá más acordes con los usos pitagóricos, por los que pudo llegar a descubrirse el fenómeno de la inconmensurabilidad. Es probable que la cuestión se suscitara con la consideración de la *sección áurea* y del *pentagrama místico* pitagórico. (tomado de El descubrimiento de los inconmensurables. Primera crisis de fundamentos en la historia de la matemática)

Euclides introduce la noción de sección áurea en la Definición VI.3 de *Los Elementos*:

"Se dice que un segmento está dividido en media y extrema razón cuando el segmento total es a la parte mayor como la parte mayor es a la menor".

$$\frac{��}{��} = \frac{��}{��}$$

Metodología: Se propone esta actividad desde el software Cabri, de manera que el estudiante se beneficie de esta herramienta y verifique el número irracional.

ACTIVIDAD 4 **La inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$**

#1 Sucesiones de intervalos

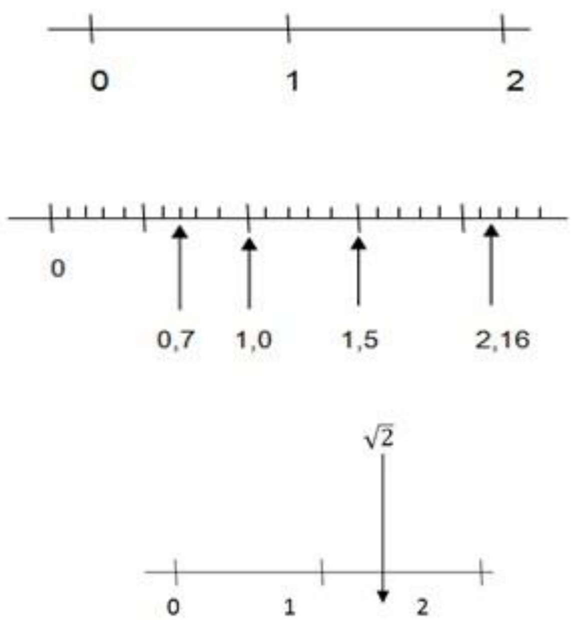
El método de Cantor por sucesión de intervalos es probablemente el más fácil de entender por el lector general. Asumiremos un conocimiento[2] de la multiplicación de números racionales en notación decimal, e ilustraremos el método intentando hallar el número cuyo cuadrado es 2. (Este número se llama *raíz cuadrada* de 2; escrito $\sqrt{2}$.)

Se marca una línea en unidades de longitud, entonces para cada número racional corresponde una longitud, en la línea. Si todas las longitudes se miden desde el mismo punto cero, entonces para cada número racional hay un punto sobre la línea. He aquí los puntos que corresponden a 0,7, 1,0, 1,5, 2,16. (Aquí, por sencillez, tomamos racionales positivos). Se ha encontrado que hay una longitud, y un punto, para los que no existe un número racional correspondiente; y el problema consiste en inventar un número de cierta clase que corresponda a este punto: Llamar a esto un numero en esta etapa es simplemente una hipótesis de trabajo; y escribirlo como $\sqrt{2}$ no es más que un modo abreviado de establecer la condición que ha de satisfacer, que $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

Está claro que 1 es demasiado pequeño, pues $1 \times 1 = 1$

Y 2 es demasiado grande, pues $2 \times 2 = 4$

Sabemos, así, que el punto correspondiente a $\sqrt{2}$ se encuentra entre los que corresponden a 1 y 2 sobre la línea.



Metodología: Se propone hacer este seguimiento y verificar el resultado

<u>#2</u> Veamos como la raíz cuadrada de 2 fue posiblemente el primer número irracional conocido.

Ocultaron su descubrimiento por razones místicas. Geométricamente es la longitud de la diagonal de un cuadrado de longitud unidad; el valor de la longitud de esta diagonal se puede averiguar mediante el Teorema de Pitágoras. Una aproximación fraccional más rápida era $\frac{99}{70}$

Ya hay tablas babilónicas antes de Cristo que proporcionan una aproximación de $\sqrt{2}$ con cuatro dígitos exactos:

[illegible]

Metodología: Se pretende que los estudiantes comprueben este resultado con ayuda de la calculadora

También en la India, antes de Cristo, textos matemáticos (el Sulbasutras) (*Números famosos IV: Algunas raíces cuadradas. Temas para la educación, revista digital para profesionales de la enseñanza #5 Nov 2009 ISSN: 1989-4023)* diciendo:

"*Incrementa la longitud [del lado] por su tercera parte, y su tercera por su tres cuartas y su tercera por su treinta y cuatroava parte de cuatro".* Esto es:

[illegible]

Metodología: Se pretende que los estudiantes comprueben este resultado con ayuda de la calculadora Pero generalmente es el pitagórico Hipaso de Metaponto, el primero en demostrar (geométricamente) la irracionalidad de la raíz cuadrada de 2.

#3 Demostración aritmética de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$

Sea ��una fracción irreducible tal que $(p/q)^2 = 2$.

(Tomado de El descubrimiento de los inconmensurables. Primera crisis de fundamentos en la Historia de la Matemática)

Se verifica:
$p^2/q^2 = 2;\ p^2 = 2q^2$, de modo que p^2 (y por tanto p) es un número par; es decir: $p = 2s$, de donde $2q^2 = p^2 = (2s)^2 = 4s^2$.

Así pues: $q^2 = 2s^2$, de modo que q^2 (y por tanto q) es un número par; es decir: $p = 2r$.

El carácter par de p y q contradice la hipótesis de que p/q es una fracción irreducible.

En consecuencia, no puede existir ningún segmento cuyo cuadrado sea 2.

#4 Demostración geométrica de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$

(Tomado de El descubrimiento de los inconmensurables. Primera crisis de fundamentos en la historia de la matemática)

Supongamos que existe un segmento HK que divide a los segmentos AB (cateto) y a BC (hipotenusa), es decir: $\mathrm{HK}|\mathrm{AB}, \mathrm{HK}|\mathrm{BC}$.

De la geometría de la figura se deduce:

• $\mathrm{AB} = \mathrm{FB}$ son radios

• $\mathrm{FD} = \mathrm{AD}$ son tangentes

• $\mathrm{FC} = \mathrm{BC} - \mathrm{AB}$ (1)

• $\mathrm{FD} = \mathrm{FC}$ [$\Delta(\mathrm{FDC})$ son isósceles ($< \mathrm{D} =< \mathrm{B} =< \mathrm{C}$)]

• $\mathrm{DC} = \mathrm{AC} - \mathrm{AD} = \mathrm{AC} - \mathrm{FD} = \mathrm{AC} - \mathrm{FC}$ (2)

De (1) y (2) se deduce: $\mathrm{HK}|\mathrm{FC}, \mathrm{HK}|\mathrm{DC}$

Este proceso se puede reiterar indefinidamente, con el resultado de que se van obteniendo triángulos isósceles que pueden llegar a ser "tan pequeños como se quiera", en los que el segmento fijo �� divide simultáneamente al cateto y a la hipotenusa, lo cual es manifiestamente imposible. Esto lleva a la conclusión de que no puede haber una unidad de longitud que mida simultáneamente el cateto y la hipotenusa del triángulo, es decir, estos dos segmentos no son conmensurables.

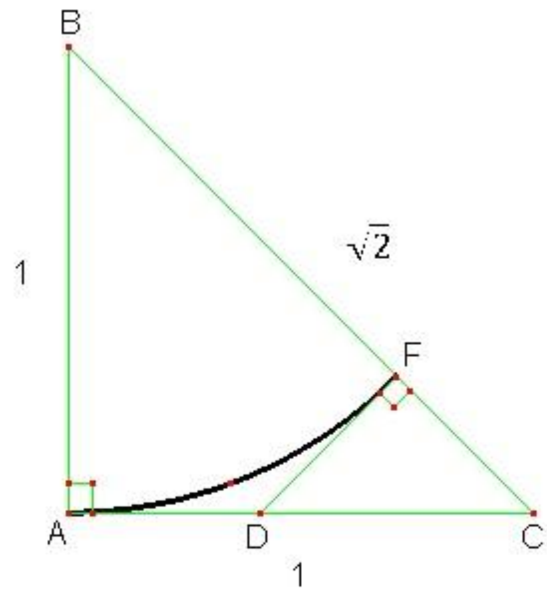


Ilustración 15. Demostración de raíz cuadrada de 2

ACTIVIDAD 5 **La inconmensurabilidad de $\sqrt{�}$con el número de oro**.

(Tomado de El descubrimiento de los inconmensurables. Primera crisis de fundamentos en la Historia de la Matemática)

#1 Si el descubrimiento de la inconmensurabilidad hubiera sido a través de la diagonal del cuadrado, $\sqrt{2}$ sería la primigenia magnitud inconmensurable de la historia, mientras que, si hubiera sido a través de la sección áurea entre diagonal y lado del pentágono regular habría sido, como veremos, $\sqrt{5}$.

Desde la demostración anterior, tomando $AB = 1$, $BC = x$, la razón áurea se escribirá: $\frac{(x+1)}{x} = \frac{x}{1}$. Al número x se le llama el "número de oro".

Tradicionalmente se le representa por la letra griega φ. Así pues, φ es la solución positiva de la ecuación: $\varphi^2 - \varphi = 1$, es decir:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

La forma aritmética muestra la inconmensurabilidad del número de oro φ , y la geométrica utiliza la geometría del *pentagrama místico pitagórico*.

Como se sabe, si se trazan las cinco diagonales de un pentágono regular, estas diagonales determinan un segundo pentágono regular más pequeño, y a su vez las diagonales de este segundo pentágono forman un tercer pentágono regular que es más pequeño aún. Este proceso puede repetirse indefinidamente, con el resultado de que se van obteniendo pentágonos que pueden llegar a ser "tan pequeños como se quiera".

#2 Demostración aritmética de la inconmensurabilidad de $\sqrt{5}$

(Tomado de El descubrimiento de los inconmensurables. Primera crisis de fundamentos en la historia de la matemática

Supongamos $\varphi = \frac{p}{q}$ fracción irreducible [$\mathrm{mcd}(p, q) = 1$].

φes solución de la ecuación $\varphi^2 - \varphi = 1$

$\varphi^2 - \varphi = 1$, por tanto, se verifica: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 - \left(\frac{p}{q}\right) = 1$, de donde result

$$p^2 - pq = q^2$$

Luego $p(p-q) = q^2$, es decir: p divide a q^2.

Por tanto, según el Teorema de Euclides (Elementos, VII.30) p también divide a q. Este último resultado contradice la hipótesis.

<u>#3</u> Demostración geométrica de la inconmensurabilidad de $\sqrt{5}$

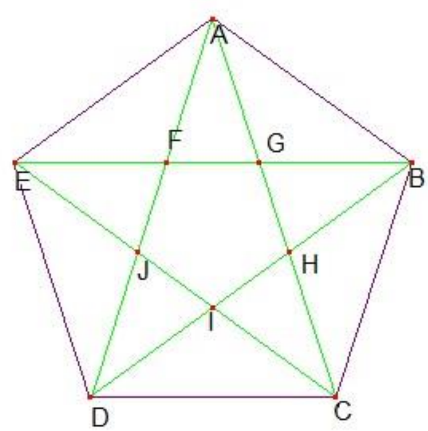


Ilustración 16. Inconmensurabilidad de raíz cuadrada de 5

(Tomado de El descubrimiento de los inconmensurables. Primera crisis de fundamentos en la historia de la matemática)

Supongamos que existe un segmento ��que divide a la diagonal ��y al lado

��del primer pentágono, es decir: ��|��, ��|��.

De la geometría de los pentágonos resulta:

• ����es un rombo, luego se verifica: �� = �� = ��
• ����es un rombo, luego se verifica: �� = ��

De las relaciones anteriores se obtiene:

• �� = �� = �� − �� = �� − ��,
• �� = �� − 2�� = �� − 2(�� − ��) = 2�� − ��. Luego ��|��, ��|��.

De modo que si un segmento fijo ��divide a la diagonal y al lado del primer pentágono, también divide a la diagonal y al lado del segundo pentágono. Este proceso se puede reiterar indefinidamente, obteniéndose pentágonos que pueden llegar a ser "tan pequeños como se quiera", en los que el segmento fijo ��divide simultáneamente a la diagonal y al lado, lo cual es manifiestamente imposible. Así pues, no puede haber una unidad de longitud que mida la diagonal y el lado de un pentágono, es decir, estos dos segmentos son inconmensurables. Además, resulta:

"Las diagonales de un pentágono se cortan en proporción áurea siendo el segmento mayor igual al lado de pentágono" (*Euclides*, XIII.8).

���� ≈ ���� => ��/�� = ��/��[*Euclides*VI.4].

��= ��=> ��/��= ��/��

Según algunos historiadores de la matemática ésta debió ser la primera aproximación histórica al fenómeno de la inconmensurabilidad.

*Esta demostración se realiza también desde Cabri, con el fin de verificar la irracionalidad

ACTIVIDAD 6 **Sobre la Raíz cuadrada de 3 y otras raíces cuadradas**

#1 La raíz cuadrada de 3 es igual a la longitud a través de los lados planos de un hexágono regular con los lados de la longitud 1.

La **raíz cuadrada de tres** es un número real positivo que como es sabido, cuando es multiplicado por sí mismo da el número tres. Se denota por $\sqrt{3}$ ‾

Su valor numérico por truncamiento con diez cifras decimales es de
1,7320508075688771931766041234 37 ...

Se calcula buscando la magnitud de la diagonal de un cubo de arista 1

Metodología: Se propone verificar el encuentro con $\sqrt{3}$ aplicando el Teorema de Pitágoras para calcular el valor de la diagonal en un cubo de arista 1.

#2 Con la espiral de Teodoro. La raíz cuadrada de 3 es un número irracional. También se conoce como **constante de Teodoro** nombrada en honor de Teodoro de Cirene. (*Números famosos IV: Algunas raíces cuadradas. Temas para la educación, revista digital para profesionales de la enseñanza #5 Nov 2009 ISSN: 1989-4023)*

Teodoro de Cirene, fue un filósofo y matemático griego, nacido y fallecido en Cirene (Libia). Fue uno de los dos principales filósofos de la escuela moral de Cirene. Alumno de Protágoras y uno de los profesores de Teeteto y Platón vivió la mayor parte de su vida en Atenas donde tuvo contactos con Platón y Sócrates. Trabajó en campos tan diversos como la filosofía, la astronomía, la aritmética, la música y la educación.

Pitagórico, creía que la alegría y el juicio eran la base para llegar a la felicidad.

Es conocido sobre todo por su trabajo matemático, donde probó la irracionalidad de las raíces de los números enteros no cuadrados (2, 3, 5...) al menos hasta 17 a base del método tradicional pitagórico de usar la reducción al absurdo y llegar a una inconsistencia relacionada con pares e impares (cómo ya se ha visto con la raíz de 2 y raíz de 5).

También desarrolló la espiral que lleva su nombre usando el Teorema de Pitágoras y añadiendo perpendicularmente a un segmento una unidad lo que forma triángulos cuyas hipotenusas son las sucesivas raíces gráficamente cuyos primeros pasos de la espiral vemos en la figura, que en principio tendría una longitud infinita:

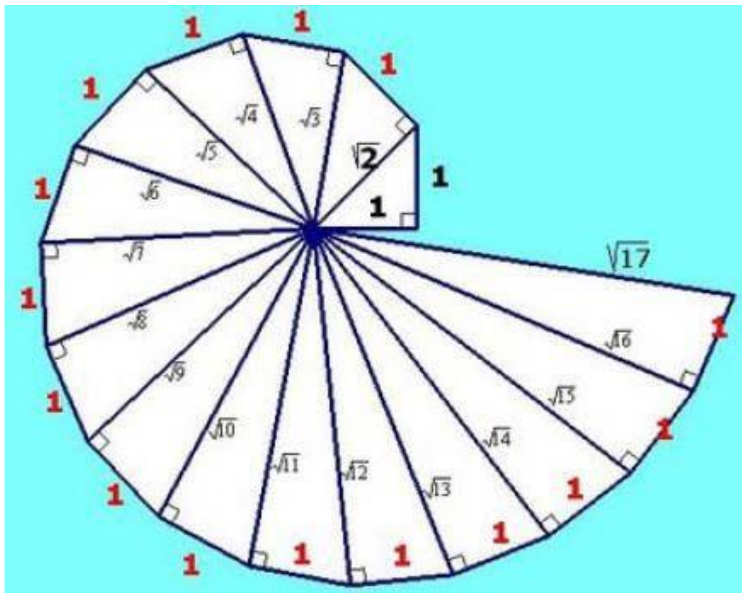


Ilustración 17. Inconmensurabilidad de otras raíces cuadradas no exactas

Metodología: Se pretende verificar algunas de las raíces mostradas en la espiral de Teodoro por demostración de reducción al absurdo.

ACTIVIDAD 7 **Aproximaciones de Diofanto** (Actividad abierta, en la cual el estudiante puede ir aplicando otros conceptos) (*Números famosos IV: Algunas raíces cuadradas. Temas para la educación, revista digital para profesionales de la enseñanza #5 Nov 2009*

ISSN: 1989-4023)

El teorema de Hurwitz en las aproximaciones de Diofanto indica que cada número irracional x se puede aproximar infinitamente a muchos números racionales p/q en los términos más bajos de una manera tal que:

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$$

Metodología: Se pretende verificar alguna de las raíces verificadas anteriormente por aproximaciones de Diofanto.

Impactos esperados

Todo lo que se ha desarrollado en este trabajo, a pesar de tener muchos vínculos en la experiencia docente, se quiere que sobrepase a dicha experiencia, ya que, los nuevos conceptos y los nuevos métodos traen innovaciones que no pueden determinarse desde la experiencia.

7 CONCLUSIONES

1. Toda ciencia puede ser expuesta mediante dos caminos esencialmente distintos: El camino histórico y el dogmático. Cualquier otro método de exposición no será más que una combinación de esos caminos. (Miguel & Miorim, 2004)

2. La historia puede ser un recurso articulador para la elaboración de actividades en situaciones problema, de selección y secuencia de tópicos de matemáticas en textos didácticos, sin que los elementos históricos sean explícitamente colocados. De la misma manera esa participación implícita de la historia puede ser percibida de alguna manera cómo los tópicos matemáticos son seleccionados y secuenciados en la propuesta de la enseñanza de la matemática.

3. La enseñanza de la Historia en Matemática se torna problémica, debido a la ausencia de literatura en este campo, fundamentalmente como mediadora de procesos de aprendizaje.

4. No se puede enseñar la Matemática linealmente. Hay datos historiográficos y momentos históricos de aprendizaje. El maestro debe pensarse como sujeto histórico. Hay historia para hacer monumentos e historia para aprender, la cultura es el legado de la historia y en particular para la matemática.

5. Los símbolos no corresponden a un mundo aparte de la matemática sino al contrario, corresponden a una evolución cultural, que constituyen una dimensión analítica de los comportamientos que exigen un estudio e investigación por parte del maestro para mejorar su práctica en la enseñanza y en el aprendizaje.

8 Referencias

Bachelard, G. (1972). *La formación del espíritu científico.* México D.F.: Siglo XXI.

Betancur, L., Cifuentes, D., & Gonzalez, M. (1998). *Hacia los números irracionales.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Cabañas, G., Guillén, F., & Galeana, M. (2004). Situaciones Didácticas en la Comprensión del Concepto de Número Racional en Alumnos de Nivel Medio Superior. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*.

Collette, J. P. (1986). *Historia de las Matemáticas I.* México DF: Siglo XXI.

Cuello, V. (2001). *Niveles de Conocimientos y Estrategias Estimación Computacional Presentes en los Alumnos de Sexto y Noveno grado de Educación Básica y de Segundo Año del Ciclo Diversificado.* UCLA. Barquisimeto: UNEXPO-UPEL. Obtenido de http://www.ucla.edu.ve/dac/revistateacs/articulos/Rev8-Art3-SanchezyOtros.pdf

De Guzmán, M. (1994). La Matemática: creación y descubrimiento. *Revista crítica de libros (Fundación Juan March),*.

De Guzmán, M. (2017). *Catedra UCM*. Recuperado el 1 de Febrero de 2017, de http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/historia/pitagoricos/laaritmet

De la Torre, A. (2003). *Modelización del espacio y del tiempo* (Vol. 2000). Medellin: Editorial Universidad de Antioquia.

Dedekind, R. (1998). *Qué son y para qué sirven los Números.* (J. Ferreirós, Trad.) Madrid (España): Alianza Editorial S.A.

Flavell, J. (1993). *Desarrollo Cognitivo.* Madrid: Antonio Machado.

Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna.* México DF: Siglo XXI Editores.

Kline, M. (1998). *Matemáticas. La pérdida de la Certidumbre.* Madrid: Siglo XXI.

Labinowicz, E. (1982). *Introducción a Piaget. Pensamiento – Aprendizaje – Enseñanza.* México DF: Fondo Educativo Interamericano.

Lozano, R. (2004). *La Historia de las Matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza.* Cali: Santiago de Cali: Suma.

Miguel, A., & Miorim, M. (2004). *Históriana educação matemática. Propostas e Desafios.* São Paulo: São Paulo: Autêntica.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte - todo. *EMA, 8*(2), 157-182. Recuperado el 14 de Diciembre de 2016, de http://funes.uniandes.edu.co/1521/1/99_Obando2003La_RevEMA.pdf

Piaget, J. (1966). *La Formación del Símbolo en el Niño: imitación, juego y sueño: imagen y representación.* México DF: Fondo de Cultura Económica.

Piaget, J. (1968). *La Construcción de lo real en el Niño.* México DF: Proteo.

Piaget, J. (1996). *Génesis del Número en el niño.* Buenos Aires: Guadalupe.

Piaget, J. (2001). *La Representación del mundo en el niño* (Novena ed.). Madrid: Morata.

Posada, M. (2005). *Interpretación en Implementación de los estándares básicas de Matemáticas.* Medellín: Secretaría de Educación para la cultura de Antioquia.

Recalde, L. (1998). La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico. *ERM.* Recuperado el 5 de Enero de 2017, de http://revistaerm.univalle.edu.co/VolXIIN1/recalde.pdf

Rivera, C., Vélez, A., & Pupo, M. (2009). Análisis de la utilización de material didáctico en la enseñanza de las matemáticas del grado primero de educación básica. (U. T. Pereira, Ed.) Pereira, Colombia. Recuperado el 5 de Febrero de 2017, de http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/handle/11059/1411/37133R621.pdf?sequence=1

Sánchez, J., & Valdivé , C. (2011). *El Número Irracional: Una Visión Histórico - Didáctica.* Caracas (Venezuela).

Sierra, M. (1997). Capitulo 2. . En M. Sierra, *Historia de la Enseñanza de la Matemática* (pág. 183). Salamanca: Universidad de Salamanca.

Tovar, J. (2011). *Un acercamiento al concepto y completitud de los números reales.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. Recuperado el 5 de Noviembre de 2016, de http://www.bdigital.unal.edu.co/7275/1/johnedinsontovargil.2011.pdf

Vasco, C. (1998). *Lineamientos curriculares.* Bogotá: Ministerio de Educación nacional.

Zúñiga, N. (2012). *Cómo elegir Manuales escolares de Matemáticas para E.P. Modelo de Valoración.* Vallalodid: Universidad de Valladolid. Escuela Universitaria de Magisterio de Segovia.