REPRESENTACIONES DE ESTRUCTURAS ORDENADAS

LUISA FERNANDA MADRIGAL DUCUARA

LUISA FERNANDA NIÑO PAEZ

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA
IBAGUÉ
2017

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA

FACULTAD DE CIENCIAS

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN TRABAJO DE GRADO

TÍTULO: REPRESENTACIONES DE ESTRUCTURAS ORDENADAS

AUTORES: LUISA FERNANDA MADRIGAL DUCUARA (Código: 070200052012)
LUISA FERNANDA NIÑO PAEZ (Código: 070200042012)

DIRECTOR: ARNOLD OOSTRA

JURADOS: VICTOR MARIN
JESÚS ANTONIO ÁVILA

CALIFICACIÓN: cuatro ocho (4,8) Meritorio

X APROBÓ ___ REPROBÓ

OBSERVACIONES:

FIRMAS

Jesús Antonio Ávila G.

VICTOR MARIN
Jurado 1

JESÚS ANTONIO ÁVILA
Jurado 2

Arnold Oostra

ARNOLD OOSTRA
Director del Trabajo

YURI MARCELA GARCÍA S.
Directora del Programa

Ciudad y fecha: Ibagué, 21 de febrero de 2018

6. Calificación

PRIMER JURADO:

NOMBRE DEL JURADO: VICTOR MARIN

NOTA OTORGADA POR EL JURADO cuatro ocho (4.8)

FIRMA DEL JURADO

SEGUNDO JURADO:

NOMBRE DEL JURADO: JESUS ANTONIO AVILA

NOTA OTORGADA POR EL JURADO Cuatro ocho (4.8)

FIRMA DEL JURADO Jesús Antonio Avila G.

PROMEDIO FINAL DE LA NOTA DEL TRABAJO DE GRADO: Cuatro Ocho (4.8)

7. RANGOS DE EQUIVALENCIA: (Acuerdo No. 030 de 2000 del Consejo de Facultad)

Calificación menor de tres cero (3.0)	REPROBADO
Calificación entre tres cero (3.0) y tres nueve (3.9)	APROBADO
Calificación entre cuatro cero (4.0) y cuatro cuatro (4.4.)	SOBRESALIENTE
Calificación entre cuatro cinco (4.5) y cuatro nueve (4.9)	MERITORIO
Calificación de cinco cero (5.0)	LAUREADO

FECHA DE SUSTENTACIÓN Febrero 21/2018

REPRESENTACIONES DE ESTRUCTURAS ORDENADAS

LUISA FERNANDA MADRIGAL DUCUARA
Código 0702-00052012
LUISA FERNANDA NIÑO PAEZ
Código 0702-00042012

Trabajo de grado para optar al título de
Profesional en Matemáticas con énfasis en Estadística.

Director
ARNOLD OOSTRA
Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA
IBAGUÉ
2017

Índice general

Introducción

El matemático Marshall Harvey Stone (abril 8 de 1903, ciudad de Nueva York - enero 9 de 1989, Madrás, India), trascendió en la historia con sus contribuciones al análisis funcional, el análisis real, la topología y el estudio de las álgebras booleanas. En esta última área se destaca su descubrimiento y demostración del *Teorema de representación de Stone* (1936), este se refiere a que toda álgebra booleana es isomorfa a un conjunto de subconjuntos de algún conjunto. Tras su publicación, este resultado cobró importancia en diversas áreas de la matemática como la lógica, el álgebra, la topología y la teoría de categorías, además de ser la base de la investigación del nuevo campo de estudio llamado hoy en día *dualidad de Stone*.

El teorema de representación de Stone para álgebras booleanas se puede generalizar para retículos distributivos de la siguiente forma: todo retículo distributivo es isomorfo a un conjunto de subconjuntos de algún conjunto. Este resultado también es llamado teorema de representación de Stone porque fue demostrado por el mismo Marshall Stone.

Los teoremas de Stone que han sido enunciados anteriormente constituyen una representación de retículos distributivos y de álgebras booleanas en el conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$. Siguiendo con los conjuntos ordenados, también se demuestra que todo conjunto ordenado es isomorfo a un conjunto de subconjuntos de algún conjunto. Estas tres representaciones conforman de manera general la representación conjuntista de las estructuras ordenadas.

En las representaciones conjuntistas, en realidad los subconjuntos que representan la estructura ordenada son componentes importantes de ciertos espacios topológicos: abiertos básicos, abiertos cerrados o incluso abiertos compactos. El análisis de estos conceptos topológicos determina una representación de las estructuras de orden en las estructuras topológicas. En el caso de un conjunto ordenado la representación genera una topología sobre el mismo conjunto, en el caso de los retículos distributivos y las álgebras boolenas la representación genera ciertos espacios topológicos llamados espacios de pre-Stone y espacios de Stone. Allí más que una representación se tiene una correspondencia entre las estructuras de los retículos distributivos con la de los espacios de pre-Stone y de las álgebras booleanas con la de los espacios de Stone. Estas tres representaciones conforman de manera general la representación topológica de las estructuras ordenadas.

Por fin, se observa que las diferentes representaciones de las estructuras ordenadas constituyen funtores entre distintas categorías. Así se tiene un funtor de la categoría **Ord** de los conjuntos ordenados en la categoría **Top** de los espacios topológicos, un funtor contravariante de la categoría **Red** de los retículos distributivos en la categoría **pSt** de los espacios de pre-Stone y un funtor contravariante de la categoría **Boo** de las álgebras booleanas en la categoría **Sto** de los espacios de Stone. Puesto que para retículos distributivos y álgebras booleanas se tiene una correspondencia biyectiva más que una simple representación, resultan de igual manera funtores contravariantes de la categoría **pSt** en **Red** y de la categoría **Sto** en **Boo**. Los funtores compuestos resultantes conllevan a isomorfismos naturales de las distintas categorías, y así se determina la equivalencia entre ellas. Esto constituye la representación de las estructuras ordenadas en el contexto de la teoría de categorías.

El desarrollo del trabajo presente sigue los tres pasos indicados arriba. En el capítulo 1 se estudia la representación conjuntista para las estructuras de conjuntos ordenados, semirretículos, retículos distributivos y álgebras booleanas, en ese orden. En el capítulo 2 primero se revisan algunas nociones topológicas requeridas y luego se detallan los espacios topológicos asociados a conjuntos ordenados, retículos distributivos y álgebras booleanas. Por fin, en el capítulo 3 se presentan las nociones básicas de la teoría de categorías y se explica cómo las representaciones estudiadas determinan equivalencias entre determinadas categorías.

El material estudiado en esta investigación se encuentra disperso en la bibliografía y con este escrito no se pretende ninguna novedad teórica. Sin embargo, como se observará, estos temas no están desarrollados de manera homogénea sino que se encuentran diferencias sutiles pero profundas entre los diferentes autores, además todo el material consultado se encuentra en inglés. De esta manera el aporte del documento presente consiste en la exposición ordenada del tema, desde los conjuntos hasta las categorías; en la explicación precisa de los detalles técnicos involucrados; y, para terminar, en que constituye una de las primeras referencias a este tema disponible en español.

Capítulo 1

Representación conjuntista

En la teoría de álgebras booleanas es bien conocido el hecho de que cualquiera de tales estructuras se puede considerar como la subálgebra del retículo de subconjuntos de algún conjunto. En este capítulo se estudia con todo detalle ese resultado pero además se elaboran representaciones similares para retículos distributivos, para semirretículos y, en general, para cualquier conjunto ordenado.

1.1. Preliminares

A fin de precisar la nomenclatura y la notación, la primera sección de cada capítulo está destinada a consignar las definiciones y los resultados básicos. Aunque la mayoría de estos hechos se demuestran con detalle, en algunos casos se omiten las pruebas o se remite el lector a la bibliografía pertinente.

Conjuntos ordenados

El contexto más general de este trabajo es el de los conjuntos ordenados.

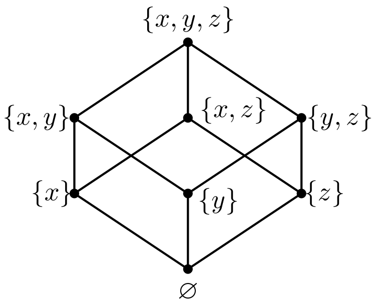
Definición 1.1. *Se dice que un conjunto P es un* conjunto parcialmente ordenado *(poset) si existe sobre P un orden parcial, es decir, si en P está definida una relación binaria $\leq$ que satisface:*

i) Reflexiva: *Para cada $a \in P$, $a \leq a$.*

ii) Antisimétrica: *Para cada $a, b \in P$, $a \leq b$ y $b \leq a$ implica $a = b$.*

iii) Transitiva: *Para cada $a, b, c \in P$, $a \leq b$ y $b \leq c$ implica $a \leq c$.*

Ejemplo 1.1. Dado el conjunto de tres elementos $\{x, y, z\}$ se considera la familia de todos sus subconjuntos, ordenados por la inclusión.



Este gráfico, muy común en el tema, se conoce como el diagrama de Hasse del conjunto parcialmente ordenado.

Ejemplo 1.2. El conjunto $\mathcal{P}(X)$ de un conjunto X es un conjunto parcialmente ordenado por la inclusión.

Ejemplo 1.3. En un espacio vectorial V, el conjunto de todos los subespacios ordenado por la inclusión forma un conjunto parcialmente ordenado.

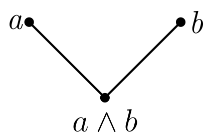
Ejemplo 1.4. Dado un conjunto X y un conjunto parcialmente ordenado P, el espacio funcional que contiene todas las funciones $f : X \longrightarrow P$ es un conjunto parcialmente ordenado, donde para f y g elementos del espacio funcional se define $f \leq g$ si para todo $x \in X$ se tiene $f(x) \leq g(x)$.

Nota 1.1. Dado un conjunto ordenado $(P, \leq)$ para cada elemento $p \in P$ se tomará $p \downarrow = \{a \in P \mid a \leq p\}$ como la "cola a izquierda" en p; de igual forma es $p \uparrow = \{a \in P \mid p \leq a\}$.

Definición 1.2. *Sean* $(P, \leq)$ *y* $(Q, \lll)$ *conjuntos ordenados. Una función* $f : P \longrightarrow Q$ respeta el orden *si* $x \leq y$ *implica* $f(x) \lll f(y)$.

Semirretículos inferiores

Definición 1.3. *Un conjunto parcialmente ordenado* $(S, \leq)$ *se llama* semirretículo inferior *si cada par de elementos* $a, b \in S$ *tiene máxima cota inferior (*inf*), denotada* $a \wedge b$.



Ejemplo 1.5. El conjunto $\mathcal{P}(X)$ de partes de un conjunto X ordenado por inclusión es un semirretículo inferior donde para $A, B \in \mathcal{P}(X)$ se tiene el inf como $A \cap B$.

Ejemplo 1.6. El conjunto $\mathbb{Z}^+$ de los enteros positivos con la divisibilidad es un semirretículo inferior donde para $a, b \in \mathbb{Z}^+$ se tiene el inf como $MCD(a, b)$.

Ejemplo 1.7. Todo conjunto ordenado total (o lineal) es un semirretículo inferior, donde para a, b elementos del conjunto se tiene el inf como $min\{a, b\}$.

Afirmación 1.1. *Un semirretículo inferior se puede definir como una estructura algebraica* $(S, \wedge)$ *que cumple los siguientes axiomas:*

i) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.

ii) $a \wedge b = b \wedge a$.

iii) $a \wedge a = a$.

Para la demostración, véase [5] o [8].

Definición 1.4. *Un* homomorfismo *de semirretículos inferiores es una función* $f : S \longrightarrow T$ *tal que* $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.

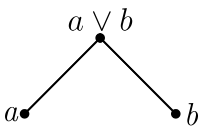
Afirmación 1.2. *Un homomorfismo de semirretículos inferiores respeta el orden.*

Demostración. Si $a \leq b$ entonces $a \wedge b = a$ de donde $f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b) \leq f(b)$. $\square$

Nota 1.2. El recíproco no vale, por ejemplo se tiene la adherencia de la topología usual entre los subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Semirretículos superiores

Definición 1.5. *Un conjunto ordenado* $(S, \leq)$ *se llama* semirretículo superior *si cada par de elementos* $a, b \in S$ *tiene mínima cota superior (*sup*), denotada* $a \vee b$.



Ejemplo 1.8. El conjunto $\mathcal{P}(X)$ de partes de un conjunto X es un semirretículo superior donde para $A, B \in \mathcal{P}(X)$ se tiene el sup como $A \cup B$.

Ejemplo 1.9. El conjunto $\mathbb{Z}^+$ con la divisibilidad es un semirretículo superior donde para $a, b \in \mathbb{Z}^+$ se tiene el sup como $mcm(a, b)$.

Ejemplo 1.10. Todo conjunto ordenado total es un semirretículo superior, donde para a, b elementos del conjunto se tiene el sup como $max\{a, b\}$.

Afirmación 1.3. *Un semirretículo superior se puede definir como una estructura algebraica* $(S, \vee)$ *que cumple los siguientes axiomas:*

i) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.

ii) $a \vee b = b \vee a$.

iii) $a \vee a = a$.

Definición 1.6. *Un* homomorfismo *de semirretículos superiores es una función* $f : S \longrightarrow T$ *tal que* $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$.

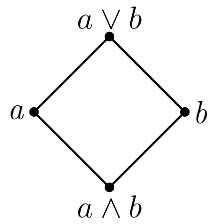
Afirmación 1.4. *Un homomorfismo de semirretículos superiores respeta el orden.*

Nota 1.3. El recíproco no vale, por ejemplo se tiene el interior de la topología usual entre los subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Retículos

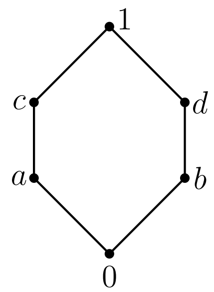
Siguiendo a [8], en la noción de retículo se incluye la existencia de máximo y mínimo.

Definición 1.7. *Un conjunto parcialmente ordenado* $(R, \leq)$ *se llama un* retículo *si cada par de elementos* $a, b \in R$ *tiene inf (denotado* $a \wedge b$*) y sup (*$a \vee b$*), además se requiere que* R *posea elemento mínimo (denotado* 0*) y elemento máximo (*1*).*

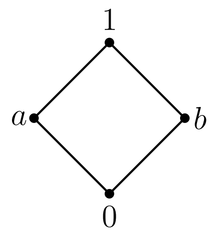


Es decir, un retículo es a la vez un semirretículo superior e inferior, que además tiene máximo y mínimo.

Ejemplo 1.11. El conjunto $R = \{0, a, b, c, d, 1\}$ ordenado como sigue es un retículo.



Ejemplo 1.12. El siguiente retículo se puede obtener como los divisores positivos de 6.



Ejemplo 1.13. El conjunto $\mathcal{P}(X)$ de partes de un conjunto X, ordenado por la inclusión, es un retículo donde para $A, B \in \mathcal{P}(X)$ se tiene el inf como $A \cap B$ y el sup como $A \cup B$.

Ejemplo 1.14. Los ideales de un anillo A, ordenado por la inclusión, forman un retículo donde para I, J ideales se tiene el inf como $I \cap J$ y el sup como $I + J$.

Ejemplo 1.15. Las topologías de un conjunto X, ordenadas por la inclusión, forman un retículo donde para τ, μ topologías se tiene el inf como $\tau \cap \mu$ y el sup como la topología generada por $\tau \cup \mu$.

Nota 1.4. El retículo más sencillo es el constituido por dos elementos $\{0,1\}$ y se denota 2. Las operaciones $\wedge$, $\vee$ se pueden expresar mediante tablas que resultan muy familiares en la lógica proposicional:

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

En el retículo 2 se cumplen las siguientes dos equivalencias que no valen en general:

- $x \wedge y = 0$ si y solo si $x = 0$ o $y = 0$.
- $x \vee y = 1$ si y solo si $x = 1$ o $y = 1$.

Afirmación 1.5. *Un retículo se puede definir como una estructura algebraica* $(R, \wedge, \vee, 0, 1)$ *donde* $(R, \wedge)$ *es un semirretículo inferior,* $(R, \vee)$ *es un semirretículo superior y además cumple los siguientes axiomas:*

i) $a \wedge (a \vee b) = a = a \vee (a \wedge b)$.

ii) $a \wedge 1 = a = a \vee 0$.

De nuevo, la demostración se puede encontrar en [5] o [8].

Definición 1.8. *Un* homomorfismo *de retículos es una función* $f : R \longrightarrow P$ *tal que* $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$, $f(0) = 0$ *y* $f(1) = 1$.

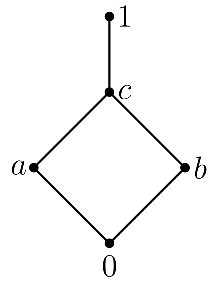
Afirmación 1.6. *Un homomorfismo de retículos respeta el orden.*

Nota 1.5. El recíproco no vale, como ejemplo se tiene el caso mostrado en la nota 1.3.

Retículos distributivos

Definición 1.9. *Un retículo* R *es* distributivo *si satisface las leyes distributivas* $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ *y* $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ *para cada* $a, b, c \in R$.

Ejemplo 1.16. El siguiente retículo R es distributivo, con $R = \{0, a, b, c, 1\}$.



Ejemplo 1.17. El conjunto $\mathcal{P}(X)$ de partes de un conjunto X ordenado por inclusión es un retículo distributivo.

Ejemplo 1.18. El conjunto $\mathbb{Z}^+$ con la divisibilidad es un retículo distributivo.

Álgebras booleanas

Definición 1.10. *Un* álgebra booleana *es un retículo distributivo B en el cual cada elemento a posee un* complemento*, esto es un elemento c tal que*

$$a \wedge c = 0, \qquad a \vee c = 1.$$

Afirmación 1.7. *En un álgebra booleana, el complemento de cada elemento es único.*

Hay una prueba en [5]. Como consecuencia, el único complemento del elemento $a \in B$ se denota a'. Esto da lugar a una operación $' : B \longrightarrow B$ sujeta a los axiomas:

$$a \wedge a' = 0, \qquad a \vee a' = 1.$$

Ejemplo 1.19. El retículo 2 de la nota 1.4 es un álgebra booleana.

Ejemplo 1.20. El conjunto $\mathcal{P}(X)$ de partes de un conjunto X, ordenado por la inclusión, es un álgebra booleana. El complemento algebraico de un subconjunto $A \subseteq X$ es su complemento conjuntista $A' = A^c = X \setminus A$.

Ejemplo 1.21. Dado $n \in \mathbb{Z}^+$ con n libre de cuadrados, el conjunto de todos los divisores positivos de n con el inf como el máximo común divisor y el sup como el mínimo común múltiplo es un álgebra booleana.

Definición 1.11. *Un* homomorfismo *de álgebras booleanas es una función $f : B \longrightarrow D$ tal que $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$, $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $f(a') = (f(a))'$.*

Afirmación 1.8. *Un homomorfismo de álgebras booleanas respeta el orden.*

1.2. Representación de conjuntos ordenados

Cualquier conjunto ordenado se puede considerar como un subconjunto del conjunto ordenado de las partes de algún conjunto. De la nota 1.1 se recuerda que, para un orden arbitrario, se define

$$x\downarrow = \{a \mid a \leq x\}.$$

Afirmación 1.9. *En un conjunto parcialmente ordenado $(P, \leq)$ se tiene $x \leq y$ si y solo si $x\downarrow \subseteq y\downarrow$, para cada $x, y \in P$.*

Demostración. Sean $x, y \in P$.
En una dirección:
Si $x \leq y$, tomemos $a \in x\downarrow$, si y solo si $a \leq x$, luego $a \leq y$, si y solo si $a \in y\downarrow$. Así $x\downarrow \subseteq y\downarrow$.
En la otra dirección:
Como $x \in x\downarrow$ porque $x \leq x$, la inclusión $x\downarrow \subseteq y\downarrow$ implica $x \in y\downarrow$, es decir, $x \leq y$. □

Corolario 1.1. *Para $x, y \in P$ se tiene $x = y$ si y solo si $x\downarrow = y\downarrow$.*

Demostración. Pues $x = y$ si y solo si $x \leq y$ y $y \leq x$, si y solo si $x \downarrow \subseteq y \downarrow$ y $y \downarrow \subseteq x \downarrow$, si y solo si $x \downarrow = y \downarrow$. $\square$

Teorema 1.1. *Para cualquier conjunto ordenado P existe una función inyectiva de $(P, \leq)$ en $(\mathcal{P}(P), \subseteq)$ que respeta el orden.*

Demostración. Se define $F : P \longrightarrow \mathcal{P}(P)$ como $F(x) = x \downarrow$ para cada $x \in P$.
Sean $x, y \in P$ tales que $F(x) = F(y)$, si y solo si $x \downarrow = y \downarrow$, si y solo si $x = y$ por el corolario 1.1, luego F es inyectiva. Por la afirmación 1.9 se cumple que F respeta el orden. $\square$

Corolario 1.2. *Cualquier conjunto ordenado es isomorfo a un conjunto de subconjuntos de algún conjunto.*

Demostración. Tomaremos $F : P \longrightarrow \mathcal{P}(P)$ donde $F(x) = x \downarrow$. Como F es inyectiva, su restricción entre P y su imagen es biyectiva y además respeta el orden. Esta imagen es $\{F(x) \mid x \in P\} = \{x \downarrow \mid x \in P\}$. $\square$

De esta forma cualquier conjunto ordenado se representa en un conjunto de subconjuntos.

1.3. Representación de semirretículos

La forma de ver los conjuntos ordenados como conjuntos de subconjuntos se extiende sin dificultad a los semirretículos inferiores, y además resulta en un homomorfismo de estas estructuras.

Afirmación 1.10. *En un semirretículo inferior $(S, \wedge)$ se cumple $(x \wedge y) \downarrow = x \downarrow \cap y \downarrow$, para cada $x, y \in S$.*

Demostración. Para $a \in S$ se tiene $a \in (x \wedge y) \downarrow$ si y solo si $a \leq x \wedge y$, si y solo si $a \leq x$ y $a \leq y$, si y solo si $a \in x \downarrow$ y $a \in y \downarrow$, si y solo si $a \in x \downarrow \cap y \downarrow$. $\square$

Teorema 1.2. *Para cualquier semirretículo inferior S existe un homomorfismo inyectivo de $(S, \wedge)$ en $(\mathcal{P}(S), \cap)$.*

Demostración. Se define $F : S \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ como $F(x) = x \downarrow$ para cada $x \in S$.
Sean $x, y \in S$ tales que $F(x) = F(y)$, si y solo si $x \downarrow = y \downarrow$, si y solo si $x = y$ como en el corolario 1.1, luego F es inyectiva. También se cumple que es un homomorfismo ya que por la afirmación 1.10 se tiene $F(x \wedge y) = (x \wedge y) \downarrow = x \downarrow \cap y \downarrow = F(x) \cap F(y)$. $\square$

Corolario 1.3. *Cualquier semirretículo inferior es isomorfo a un conjunto de subconjuntos de algún conjunto.*

Demostración. Tomaremos $F : S \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ donde $F(x) = x \downarrow$. Como F es inyectiva, su restricción entre S y su imagen es biyectiva y además es un homomorfismo, luego se trata de un isomorfismo. La imagen es $\{F(x) \mid x \in S\} = \{x \downarrow \mid x \in S\}$. $\square$

A continuación se presentan los resultados duales en los semirretículos superiores. Por eso se omiten las demostraciones.

Afirmación 1.11. *En un semirretículo superior* $(S, \vee)$ *se cumple* $(x \vee y) \uparrow = x \uparrow \cap\, y \uparrow$, *para cada* $x, y \in S$.

En este caso, se define $G : S \longrightarrow \mathcal{P}(S)$ como $G(x) = (x \uparrow)^c$ para cada $x \in S$, y entonces $G(x \vee y) = ((x \vee y) \uparrow)^c = (x \uparrow \cap\, y \uparrow)^c = (x \uparrow)^c \cup (y \uparrow)^c = G(x) \cup G(y)$.

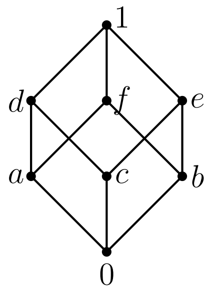
Teorema 1.3. *Para cualquier semirretículo superior* S *existe un homomorfismo inyectivo de* $(S, \vee)$ *en* $(\mathcal{P}(S), \cup)$.

Corolario 1.4. *Cualquier semirretículo superior es isomorfo a un conjunto de subconjuntos de algún conjunto.*

De esta manera, cualquier semirretículo (inferior o superior) se representa en un conjunto de subconjuntos.

Observación 1.1. En un retículo R, en general no se cumple $(x \vee y) \downarrow = x \downarrow \cup\, y \downarrow$ para cada $x, y \in R$. Por lo tanto, esta representación conjuntista no se puede extender con facilidad.

Ejemplo 1.22. Se considera el retículo $R = \{0, a, b, c, d, e, f, 1\}$ ordenado como sigue. Este retículo se puede obtener como los divisores positivos de 30.



En un caso particular:

$$
\begin{aligned}
&d \downarrow = \{0, a, c, d\} \\
&e \downarrow = \{0, b, c, e\} \\
&d \downarrow \cup\, e \downarrow = \{0, a, b, c, d, e\} \\
&(d \vee e) \downarrow = 1 \downarrow = \{0, a, b, c, d, e, f, 1\}
\end{aligned}
$$

Por tanto, $(d \vee e) \downarrow \neq d \downarrow \cup\, e \downarrow$.

1.4. Representación de retículos distributivos

Como se observó en el último ejemplo de la sección anterior, la representación de conjuntos ordenados y semirretículos como conjuntos de subconjuntos no se puede extender de manera automática a los retículos. Para lograr este objetivo es preciso sustituir los conjuntos $x \downarrow$ por una adecuada generalización algebraica, conocida como ideal.

1.4.1. Ideales

Definición 1.12. *Sea* $(S, \vee, 0)$ *un semirretículo superior con mínimo. Un subconjunto* $I \subseteq S$ *es un* ideal *si:*

i) $0 \in I$.

ii) Si $a, b \in I$ *entonces* $a \vee b \in I$.

iii) Si $a \in I$ *entonces para cada* $b \in S$ *con* $b \leq a$ *se tiene* $b \in I$.

Ejemplo 1.23. Dado un elemento cualquiera $s \in S$, el subconjunto

$$s\downarrow = \{a \in S \mid a \leq s\}$$

es un ideal. En efecto:

i) $0 \leq s$ luego $0 \in s\downarrow$.

ii) Si $a, b \in s\downarrow$ entonces $a \leq s$ y $b \leq s$, luego $a \vee b \leq s$ y así $a \vee b \in s\downarrow$.

iii) Si $a \in s\downarrow$ se tiene $a \leq s$. Para cada $b \in S$ con $b \leq a$ también se tiene $b \leq s$, luego $b \in s\downarrow$.

Se nota que siempre $s \in s\downarrow$. Este ideal se llama el ideal principal generado por s. En particular, $\{0\} = 0\downarrow$ es un ideal principal.

Ejemplo 1.24. Otro ideal "trivial" es el semirretículo completo S.

Ejemplo 1.25. En el semirretículo $[0, +\infty)$ de los reales no negativos, un intervalo de la forma $[0, s)$ es un ideal. Esto se verifica de la misma manera que el ejemplo anterior, pero se nota que $[0, s) \neq s\downarrow$ porque $s \in s\downarrow$ pero $s \notin [0, s)$.

Ejemplo 1.26. En el semirretículo $\mathcal{P}(X)$, sea $\mathscr{F}$ el subconjunto de los subconjuntos finitos de X. $\mathscr{F}$ es un ideal:

i) $\varnothing \in \mathscr{F}$ pues es finito.

ii) Si $S, T \in \mathscr{F}$ entonces S, T son finitos y su unión $S \cup T$ es finita. Luego $S \cup T \in \mathscr{F}$.

iii) Si $S \in \mathscr{F}$ entonces S es finito. Para cada T con $T \subseteq S$ también T es finito, esto es, $T \in \mathscr{F}$.

Si X es finito, $\mathscr{F} = \mathcal{P}(X)$ y entonces $\mathscr{F} = X\downarrow$ es principal. Pero si X es infinito, no existe un subconjunto finito máximo luego $\mathscr{F}$ no tiene la forma $S\downarrow$ y no es principal.

Afirmación 1.12. *Un ideal también se puede definir como un subconjunto* $I \subseteq S$ *tal que:*

i') $0 \in I$.

ii') $a \vee b \in I$ si y solo si $a \in I$ y $b \in I$.

Demostración. Se probará la equivalencia de la definición 1.12 y la afirmación 1.12.
En una dirección:
Ahora (i') es evidente pues es la misma condición (i). Respecto a (ii'), si $a \vee b \in I$, como $a \leq a \vee b$ por (iii) se tiene $a \in I$ y de la misma manera $b \leq a \vee b$ implica $b \in I$. Así que $a \in I$ y $b \in I$. Al revés, si $a \in I$ y $b \in I$ entonces por (ii) se obtiene $a \vee b \in I$.
En el otro sentido:
De nuevo, (i) es evidente pues es (i'). La condición (ii) es válida porque es una de las dos implicaciones de (ii'). Por fin, respecto a (iii), si $a \in I$ y $b \leq a$ entonces $a \vee b = a \in I$ luego por (ii') se obtiene $b \in I$. □

Afirmación 1.13. *Todo ideal finito es principal.*

Demostración. Sea I un ideal finito, entonces $I = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y sea $s = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$. Por la condición (ii) se observa que $s \in I$.

- Si $a \in s\downarrow$ entonces $a \leq s$ y por (iii) se sigue que $a \in I$. De esta manera $s\downarrow \subseteq I$.
- Si $b \in I$ entonces $b = a_i$ para algún i y entonces $b \leq a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n = s$. Como $b \leq s$, es $b \in s\downarrow$ y así $I \subseteq s\downarrow$.

De esta manera, $I = s\downarrow$ es un ideal principal. □

Afirmación 1.14. *La intersección de cualquier familia de ideales es un ideal.*

Demostración. Sea $\{I_j\}_{j \in J}$ una familia de ideales de un semirretículo S.

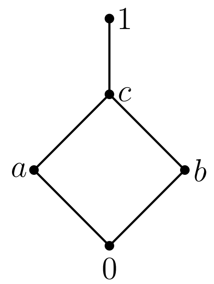
i) Para cada $j \in J$ $0 \in I_j$, luego $0 \in \bigcap_{j \in J} I_j$.

ii) Dados $a, b \in \bigcap_{j \in J} I_j$, para cada índice $j \in J$ se tiene $a, b \in I_j$ luego $a \vee b \in I_j$ por ser ideal. Como j es arbitrario, $a \vee b \in \bigcap_{j \in J} I_j$.

iii) Dados $a \in \bigcap_{j \in J} I_j$ y $x \leq a$, para cada índice $j \in J$ se tiene $a \in I_j$ luego $x \in I_j$ por ser ideal. En consecuencia $x \in \bigcap_{j \in J} I_j$. □

En general, la unión de ideales no es ideal.

Ejemplo 1.27. En el siguiente retículo se consideran los ideales $I = a\downarrow = \{0, a\}$ y $J = b\downarrow = \{0, b\}$.



Claramente $I \cup J = \{0, a, b\}$ no es ideal pues $a, b \in I \cup J$ pero $a \vee b = c \notin I \cup J$.
En este caso, sí se puede considerar el mínimo ideal que contiene a I y a J, que es $\{0, a, b, c\}$.

En general:

Definición 1.13. *Sea $X \subseteq S$ cualquier subconjunto de un semirretículo S. El ideal* generado *por X es la intersección de todos los ideales que contienen a X.*

Afirmación 1.15. *Sea $X \subseteq S$ cualquier subconjunto de un semirretículo S. El ideal generado por X es el siguiente conjunto.*

$$\left\{a \in S \;\middle|\; a \leq x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n \quad con \quad x_i \in X\right\}$$

Es decir, a partir de X se construye el conjunto de todos los sup finitos de elementos de X y luego se toman todos los elementos menores o iguales que estos sup. Se conviene que si $X = \varnothing$, solo se toma el conjunto $\{0\}$.

Demostración. Sea G el conjunto mencionado. Si $X = \varnothing$, entonces $G = \{0\}$ es un ideal. En caso contrario, sea $x \in X$ entonces $0 \leq x$ y así $0 \in G$. Si $a, b \in G$ entonces $a \leq x_1 \vee \cdots \vee x_n$ y $b \leq x_{n+1} \vee \cdots \vee x_m$ para ciertos $x_i \in X$. Luego $a \vee b \leq x_1 \vee \cdots \vee x_n \vee x_{n+1} \vee \cdots \vee x_m$ y así $a \vee b \in G$. Finalmente, si $a \in G$ entonces $a \leq x_1 \vee \cdots \vee x_n$ con $x_i \in X$ y si $b \leq a$ entonces también $b \leq x_1 \vee \cdots \vee x_n$ y $b \in G$. Luego, de nuevo, G es un ideal.
Dado $x \in X$ es $x \leq x \vee x$ luego $x \in G$ y el ideal G contiene a X.
Por fin, si I es un ideal que contiene a X, entonces para cada $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ se tiene $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n \in I$ y si $a \leq x_1 \vee \cdots \vee x_n$ también $a \in I$ porque es ideal. En consecuencia $G \subseteq I$, y así G es la intersección de todos los ideales que contienen a X. $\square$

Aunque en general la unión de ideales no es ideal, la unión de una "cadena" sí lo es.

Afirmación 1.16. *Sea $\{I_j\}_{j \in J}$ una familia de ideales totalmente ordenado por la inclusión, esto es, si $j \neq k$ entonces $I_j \subseteq I_k$ o $I_k \subseteq I_j$. En estas condiciones, la unión $\bigcup_{j \in J} I_j$ es un ideal.*

Demostración.

i) Para cada $j \in J$ se tiene $0 \in I_j$ luego $0 \in \bigcup_{j \in J} I_j$.

ii) Sean $a, b \in \bigcup_{j \in J} I_j$, entonces existen índices $j, k \in J$ tales que $a \in I_j$, $b \in I_k$. Por hipótesis se tiene $I_j \subseteq I_k$ o $I_k \subseteq I_j$. En el primer caso resulta $a, b \in I_k$ luego $a \vee b \in I_k$ porque es un ideal y entonces $a \vee b \in \bigcup_{j \in J} I_j$; en el segundo caso es $a, b \in I_j$ luego $a \vee b \in I_j$ y de nuevo $a \vee b \in \bigcup_{j \in J} I_j$.

iii) Sean $a \in \bigcup_{j \in J} I_j$ y $x \leq a$. Entonces existe $j \in J$ tal que $a \in I_j$ de donde $x \in I_j$ porque I_j es ideal y $x \leq a$. Luego $x \in \bigcup_{j \in J} I_j$. $\square$

Afirmación 1.17. *Si $f : S \longrightarrow T$ es un homomorfismo de semirretículos superiores con mínimo, entonces el núcleo*

$$N(f) = \big\{ a \in S \mid f(a) = 0 \big\}$$

es un ideal de S.

Demostración. Para probar que el núcleo $N(f)$ es un ideal se verifica que se cumple la definición 1.12.

i) $0 \in N(f)$ pues $f(0) = 0$.

ii) Si $a, b \in N(f)$ entonces $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$, y en estas condiciones

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = 0 \vee 0 = 0,$$

luego $a \vee b \in N(f)$.

iii) Si $a \in N(f)$ y $b \leq a$ entonces como f respeta el orden se sigue $f(b) \leq f(a)$. Pero $f(a) = 0$ luego también $f(b) = 0$ y así $b \in N(f)$. □

Sea I un ideal de un semirretículo superior S. En S se define la relación $\underset{I}{\equiv}$ como sigue:

$$a \underset{I}{\equiv} b$$

si existen $i, j \in I$ con $a \vee i = b \vee j$.

Afirmación 1.18. *$\underset{I}{\equiv}$ es una relación de equivalencia en S.*

Demostración.

- Como $a \vee 0 = a \vee 0$ y $0 \in I$, se tiene $a \underset{I}{\equiv} a$.
- Si $a \underset{I}{\equiv} b$, sean $i, j \in I$ tales que $a \vee i = b \vee j$. Entonces también $b \vee j = a \vee i$, es decir, $b \underset{I}{\equiv} a$.
- Si $a \underset{I}{\equiv} b$ y $b \underset{I}{\equiv} c$, sean $i, j, k, l \in I$ tales que $a \vee i = b \vee j$ y $b \vee k = c \vee l$. Entonces $a \vee i \vee k = b \vee j \vee k$ y $b \vee j \vee k = c \vee j \vee l$, de donde $a \vee (i \vee k) = c \vee (j \vee l)$. Como I es un ideal, $i \vee k \in I$ y $j \vee l \in I$. Así $a \underset{I}{\equiv} c$. □

Afirmación 1.19.

i) Si $a \underset{I}{\equiv} b$ entonces $a \vee c \underset{I}{\equiv} b \vee c$ para cualquier c.

ii) Si $a \underset{I}{\equiv} b$ y $c \underset{I}{\equiv} d$ entonces $a \vee c \underset{I}{\equiv} b \vee d$.

Demostración.

i) Si $a \underset{I}{\equiv} b$, sean $i, j \in I$ tales que $a \vee i = b \vee j$. Entonces $a \vee c \vee i = b \vee c \vee j$ luego $a \vee c \underset{I}{\equiv} b \vee c$.

ii) Como $a \underset{I}{\equiv} b$, por (i) se tiene que $a \vee c \underset{I}{\equiv} b \vee c$; como $c \underset{I}{\equiv} d$, de nuevo por (i) se tiene $b \vee c \underset{I}{\equiv} b \vee d$. Por transitividad, resulta $a \vee c \underset{I}{\equiv} b \vee d$. □

Afirmación 1.20. *El conjunto cociente $S/_{\underset{I}{\equiv}}$ es un semirretículo superior con mínimo. El mínimo es igual al ideal I.*

Demostración. Por la afirmación anterior, en el conjunto cociente está bien definida la operación

$$\overline{a} \vee \overline{b} = \overline{a \vee b}.$$

Esta operación satisface las mismas igualdades que la operación en S, luego el conjunto cociente es un semirretículo.
El mínimo de $S/_{\underset{I}{\equiv}}$ es la clase de 0, que coincide con I. Pues si $x \in \overline{0}$, se tiene que $x \underset{I}{\equiv} 0$ y existen $i, j \in I$ tales que $x \vee i = 0 \vee j$, es decir, $x \vee i = j$. Pero $x \leq x \vee i$ luego $x \leq j$ con $j \in I$ y entonces $x \in I$. Al revés, si $x \in I$ entonces $x \vee x = 0 \vee x$ con $x \in I$ luego $x \underset{I}{\equiv} 0$ y $x \in \overline{0}$. □

Teorema 1.4. *Dado cualquier ideal I en un semirretículo superior S con mínimo, existe un homomorfismo sobreyectivo de semirretículos $f : S \longrightarrow T$ cuyo núcleo es I.*

Demostración. Basta tomar $T = S/_{\underset{I}{\equiv}}$ y f la función que asigna a cada elemento su clase, $f(s) = \overline{s}$. Este es un homomorfismo sobreyectivo y además $a \in N(f)$ si y solo si $f(a) = \overline{0}$, si y solo si $\overline{a} = I$, si y solo si $a \in I$, luego $N(f) = I$. □

Si S es un retículo, el cociente en general no lo es. Pero esto sí se tiene cuando el retículo original es *distributivo.*

Afirmación 1.21. *Si R es un retículo distributivo, I es un ideal de R (en el sentido de la definición 1.12) y la relación de equivalencia $\underset{I}{\equiv}$ se define como antes, entonces:*

i) Si $a \underset{I}{\equiv} b$ entonces $a \wedge c \underset{I}{\equiv} b \wedge c$ para cualquier c.

ii) Si $a \underset{I}{\equiv} b$ y si $c \underset{I}{\equiv} d$ entonces $a \wedge c \underset{I}{\equiv} b \wedge d$.

Demostración.

i) Si $a \underset{I}{\equiv} b$, sean $i, j \in I$ tales que $a \vee i = b \vee j$. Entonces $(a \vee i) \wedge c = (b \vee j) \wedge c$, y en un retículo distributivo esto equivale a $(a \wedge c) \vee (i \wedge c) = (b \wedge c) \vee (j \wedge c)$. Se nota que como $i \wedge c \leq i$ con $i \in I$, también $i \wedge c \in I$; de la misma manera $j \wedge c \in I$. Luego $a \wedge c \underset{I}{\equiv} b \wedge c$.

ii) Como $a \underset{I}{\equiv} b$, por (i) se tiene que $a \wedge c \underset{I}{\equiv} b \wedge c$; como $c \underset{I}{\equiv} d$, de nuevo por (i) se tiene $b \wedge c \underset{I}{\equiv} b \wedge d$. Por transitividad resulta $a \wedge c \underset{I}{\equiv} b \wedge d$. $\square$

Afirmación 1.22. *El conjunto cociente $R/_{\underset{I}{\equiv}}$ es un retículo distributivo. El mínimo es igual al ideal I.*

Demostración. Por las afirmaciones anteriores, en el conjunto cociente están bien definidas las operaciones

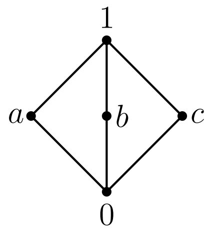
$$\overline{a} \vee \overline{b} = \overline{a \vee b}, \qquad\qquad \overline{a} \wedge \overline{b} = \overline{a \wedge b}.$$

Estas operaciones satisfacen las mismas igualdades que las operaciones en R, luego es un retículo distributivo.
De nuevo, el mínimo de $R/_{\underset{I}{\equiv}}$ es la clase de 0, que es igual al ideal I. $\square$

Teorema 1.5. *Dado cualquier ideal I en un retículo distributivo R, existe un homomorfismo sobreyectivo de retículos distributivos $f : R \longrightarrow U$ cuyo núcleo es I.*

Demostración. Basta tomar $U = R/_{\underset{I}{\equiv}}$ y f la función que asigna a cada elemento su clase, $f(r) = \overline{r}$. $\square$

Nota 1.6. El teorema anterior no es válido para retículos arbitrarios. Por ejemplo, en el retículo siguiente sea $I = \{0, a\} = a \downarrow$ un ideal principal.



Sea f un homomorfismo de retículos de este en cualquier retículo y supóngase que $f(a) = 0$. Entonces

$$f(1) = f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = 0 \vee f(b) = f(b)$$
$$f(1) = f(a \vee c) = f(a) \vee f(c) = 0 \vee f(c) = f(c)$$

de donde $f(b) = f(c)$, y entonces también

$$f(b) = f(b) \wedge f(b) = f(b) \wedge f(c) = f(b \wedge c) = f(0) = 0.$$

Es decir, si $a \in N(f)$ entonces también $b \in N(f)$ y, en consecuencia, el ideal $I = \{0, a\}$ no es igual al núcleo $N(f)$.

Nota 1.7. En la estructura de anillo, la imagen de un homomorfismo está determinado de manera completa por su núcleo, ya que para un homomorfismo $f : A \longrightarrow B$ se tiene

$$A/_{N(f)} \cong Im(f).$$

En las estructuras de semirretículo, retículo y retículo distributivo esto no es así. Por ejemplo, sea R el retículo distributivo $\{0, a, 1\}$ con $0 < a < 1$ y se consideran las dos funciones $f, g : R \longrightarrow R$ definidas así:

$$\begin{array}{lll} f(0) = 0, & f(a) = 1, & f(1) = 1, \\ g(0) = 0, & g(a) = a, & g(1) = 1. \end{array}$$

Se verifica que ambos son homomorfismos y se observa con claridad que $N(f) = N(g) = \{0\}$. Pero $Im(f) = \{0, 1\}$ mientras $Im(g) = R$.

1.4.2. Filtros

En esta sección se estudia la noción dual de ideal, por ello se omiten todas las pruebas.

Definición 1.14. *Sea $(S, \wedge, 1)$ un semirretículo inferior con máximo. Un subconjunto $F \subseteq S$ es un* filtro *si*

i) $1 \in F$.

ii) Si $a, b \in F$ entonces $a \wedge b \in F$.

iii) Si $a \in F$ entonces para cada $b \in S$ con $a \leq b$ se tiene $b \in F$.

Ejemplo 1.28. Dado un elemento cualquiera $s \in S$, el subconjunto

$$s \uparrow = \big\{a \in S \bigm| s \leq a\big\}$$

es un filtro, llamado filtro principal generado por s. En particular, $\{1\} = 1 \uparrow$ es un filtro principal.

Ejemplo 1.29. Otro filtro trivial es el semirretículo completo S.

Ejemplo 1.30. En el semirretículo $(-\infty, 0]$ de los reales no positivos, un intervalo de la forma $(s, 0]$ es un filtro no princial.

Ejemplo 1.31. En el semirretículo $\mathcal{P}(X)$, sea $\mathscr{C}$ el subconjunto de los subconjuntos cofinitos de X, esto es, aquellos cuyo complemento es finito. $\mathscr{C}$ es un filtro y, como en el caso de los ideales, se tiene: si X es finito, $\mathscr{C} = \mathcal{P}(X)$ y entonces $\mathscr{C} = \varnothing \uparrow$ es principal; si X es infinito, no existe un subconjunto cofinito mínimo luego $\mathscr{C}$ no tiene la forma $S \uparrow$ y no es principal.

Afirmación 1.23. *Un filtro también se puede definir como un subconjunto $F \subseteq S$ tal que:*

i') $1 \in F$.

ii') $a \wedge b \in F$ si y solo si $a \in F$ y $b \in F$.

Afirmación 1.24. *Todo filtro finito es principal.*

Afirmación 1.25. *La intersección de cualquier familia de filtros es un filtro.*

Definición 1.15. *Sea $X \subseteq S$ cualquier subconjunto de un semirretículo S. El filtro generado por X es la intersección de todos los filtros que contienen a X.*

Afirmación 1.26. *Sea $X \subseteq S$ cualquier subconjunto de un semirretículo S. El filtro generado por X es el siguiente conjunto.*

$$\left\{b \in S \;\middle|\; b \geq x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n \quad con \quad x_i \in X\right\}$$

Afirmación 1.27. *Sea $\{F_j\}_{j \in J}$ una familia de filtros totalmente ordenada por la inclusión, esto es, si $j \neq k$ entonces $F_j \subseteq F_k$ o $F_k \subseteq F_j$. En estas condiciones, la unión $\bigcup\limits_{j \in J} F_j$ es un filtro.*

Afirmación 1.28. *Si $f : S \longrightarrow T$ es un homomorfismo de semirretículos inferiores con máximo, entonces*

$$\left\{a \in S \;\middle|\; f(a) = 1\right\}$$

es un filtro de S.

Si F es un filtro en un semirretículo inferior S, la relación $\underset{F}{\equiv}$ definida como

$$a \underset{F}{\equiv} b \text{ si existen } i, j \in F \text{ con } a \wedge i = b \wedge j$$

es un relación de equivalencia compatible con la operación $\wedge$.

Afirmación 1.29. *El conjunto cociente $S/_{\underset{F}{\equiv}}$ es un semirretículo inferior con máximo. El máximo es igual al filtro F.*

Teorema 1.6. *Dado cualquier filtro F en un semirretículo inferior S con máximo, existe un homomorfismo sobreyectivo de semirretículos $f : S \longrightarrow U$ tal que $F = \left\{a \in S \;\middle|\; f(a) = 1\right\}$.*

1.4.3. Ideales primos

Para poder considerar de manera simultánea los ideales y los filtros, se requiere que el conjunto ordenado sea a la vez un semirretículo superior con mínimo y un semirretículo inferior con máximo. Es decir, se necesita un retículo (con máximo y mínimo).

En este contexto se tiene la afirmación que sigue.

Afirmación 1.30. *Sea R un retículo.*

i) Si I es un ideal, entonces $I = R$ si y solo si $1 \in I$.

ii) Si F es un filtro, entonces $F = R$ si y solo si $0 \in F$.

Demostración.

i) Si $I = R$, por supuesto $1 \in I$. Al revés, si $1 \in I$ entonces para cada $a \in R$ de $a \leq 1$ se sigue $a \in I$.

ii) La prueba para filtros es simétrica. $\square$

Afirmación 1.31. *Para cada $a \in R$:*

i) $a\downarrow = \{a \wedge r \mid r \in R\}$

ii) $a\uparrow = \{a \vee r \mid r \in R\}$

Demostración. Si $x \in a\downarrow$ entonces $x \leq a$ y en consecuencia $x = a \wedge x$. Al revés, para cualquier $r \in R$ se tiene $a \wedge r \leq a$ luego $a \wedge r \in a\downarrow$.
La otra prueba es simétrica. $\square$

Afirmación 1.32. *Sean I, J ideales de un retículo distributivo R. El conjunto*

$$I \vee J = \{a \vee b \mid a \in I, b \in J\}$$

es un ideal de R. Además es el ideal generado por la unión $I \cup J$.

Demostración. Veamos las condiciones de ideal.

i) Como $0 \in I$, $0 \in J$ se tiene $0 \vee 0 = 0 \in I \vee J$.

ii) Dados $a \vee b$, $c \vee d \in I \vee J$, se tiene $(a \vee b) \vee (c \vee d) = (a \vee c) \vee (b \vee d)$ con $a \vee c \in I$, $b \vee d \in J$ ya que son ideales.

iii) Dados $a \vee b \in I \vee J$ y $x \leq a \vee b$, esta relación es equivalente a $x = x \wedge (a \vee b)$. Como el retículo es distributivo, resulta $x = x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee (x \wedge b)$ con $x \wedge a \in I$ porque $x \wedge a \leq a$, $a \in I$ y $x \wedge b \in J$ porque $x \wedge b \leq b$, $b \in J$.

Además $I \cup J \subseteq I \vee J$. Pues si $a \in I$ se tiene $a = a \vee 0$ con $a \in I$, $0 \in J$ luego $a \in I \vee J$; de igual manera si $b \in J$ resulta $b = 0 \vee b \in I \vee J$.
Por fin, si L es un ideal tal que $I \cup J \subseteq L$ entonces para elementos arbitrarios $a \in I$, $b \in J$ se tiene $a, b \in L$ luego $a \vee b \in L$ porque L es un ideal. De esta forma $I \vee J \subseteq L$.
De manera que $I \vee J$ es la intersección de todos los ideales que contienen a I y a J. $\square$

Afirmación 1.33. *Sean F, G filtros de un retículo distributivo R. El conjunto*

$$F \wedge G = \{a \wedge b \mid a \in F, b \in G\}$$

es un filtro de R. Además es el filtro generado por la unión $F \cup G$.

En general, en un retículo el complemento de un ideal no es un filtro ni viceversa.

Afirmación 1.34. *Sea I un ideal de un retículo R. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) El complemento de I es un filtro.

ii) $1 \notin I$ y para cada $a, b \in R : a \wedge b \in I$ implica $a \in I$ o $b \in I$.

iii) I es el núcleo de un homomorfismo de retículos $f : R \longrightarrow 2$.

Demostración.
$i)$ implica $ii)$. Si I^c es filtro, entonces por definición $1 \in I^c$ es decir, $1 \notin I$. Por otro lado, si $a \wedge b \in I$ entonces $a \wedge b \notin I^c$ que es un filtro. De nuevo por la definición de filtro esto implica $a \notin I^c$ o $b \notin I^c$, es decir, $a \in I$ o $b \in I$.
$ii)$ implica $iii)$. Se define la función $f : R \longrightarrow 2$ como sigue.

$$f(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \in I, \\ 1 & \text{si } a \notin I. \end{cases}$$

Este es un homomorfismo de retículos:

- $f(0) = 0$ porque $0 \in I$ al ser I ideal.
- $f(1) = 1$ porque, por (ii), $1 \notin I$.
- $f(a \wedge b) = 0$ si y solo si $a \wedge b \in I$, si y solo si $a \in I$ o $b \in I$, si y solo si $f(a) = 0$ o $f(b) = 0$, lo cual por la nota 1.4 se tiene si y solo si $f(a) \wedge f(b) = 0$. Puesto que 2 tiene solo dos elementos, la equivalencia $f(a \wedge b) = 0$ si y solo si $f(a) \wedge f(b) = 0$ significa la igualdad $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.
- $f(a \vee b) = 1$ si y solo si $a \vee b \notin I$, lo cual por la afirmación 1.12 se tiene si y solo si $a \notin I$ o $b \notin I$ (puesto que I es ideal), si y solo si $f(a) = 1$ o $f(b) = 1$ si y solo si $f(a) \vee f(b) = 1$. De esta manera $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$.

Además $f(a) = 0$ si y solo si $a \in I$, luego I es el núcleo del homomorfismo f.
$iii)$ implica $i)$. Puesto que 2 tiene solo dos elementos, si I es el núcleo de f entonces

$$I^c = \left\{a \in R \;\middle|\; f(a) \neq 0\right\} = \left\{a \in R \;\middle|\; f(a) = 1\right\}.$$

Por la afirmación 1.28, esto significa que I^c es un filtro. $\square$

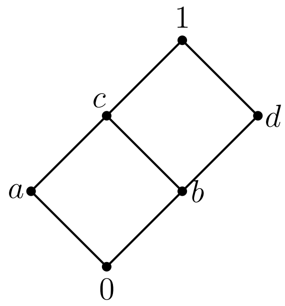
Nota 1.8. Se observa que para cualquier ideal I se cumple: si $a \in I$ o $b \in I$ entonces $a \wedge b \in I$. En efecto como $a \wedge b \leq a$, por la definición $a \in I$ implica $a \wedge b \in I$; de igual manera $a \wedge b \leq b$ luego $b \in I$ implica $a \wedge b \in I$. De esta manera, la condición (ii) de este resultado se puede expresar así: $1 \notin I$, y, $a \wedge b \in I$ si y solo si $a \in I$ o $b \in I$.

Definición 1.16. *Un* ideal primo *es un ideal I que cumple las condiciones equivalentes de la afirmación 1.34. En particular, un ideal I es primo si y solo si*

i) $1 \notin I$ (es decir, $I \neq R$).

ii) Si $a \wedge b \in I$ entonces $a \in I$ o $b \in I$.

Ejemplo 1.32. Se considera el siguiente retículo distributivo, que puede obtenerse como los divisores positivos de 12.



Los ideales son todos principales, y además:

$0\downarrow = \{0\}$ no es primo: $a \wedge b \in 0\downarrow$ y $a \notin 0\downarrow$, $b \notin 0\downarrow$.
$a\downarrow = \{0, a\}$ sí es primo: su complemento es el filtro $b\uparrow$.
$b\downarrow = \{0, b\}$ no es primo: $a \wedge d \in b\downarrow$ y $a \notin b\downarrow$, $d \notin b\downarrow$.
$c\downarrow = \{0, a, b, c\}$ sí es primo: su complemento es el filtro $d\uparrow$.
$d\downarrow = \{0, b, d\}$ sí es primo: su complemento es el filtro $a\uparrow$.
$1\downarrow = \{0, a, b, c, d, 1\}$ no es primo: $1 \in 1\downarrow$.

Definición 1.17. *Un* filtro primo *es un filtro F tal que*

i) $0 \notin F$ *(es decir, $F \neq R$).*

ii) Si $a \vee b \in F$ entonces $a \in F$ o $b \in F$.

Afirmación 1.35. *Sean I un ideal y F un filtro de un retículo R, con $I \cap F = \varnothing$. Existe un ideal M maximal entre los ideales que contienen a I y son disyuntos de F.*

Demostración. Se considera la familia $\mathcal{I}$ de todos los ideales L tales que $I \subseteq L$ y $L \cap F = \varnothing$. $\mathcal{I} \neq \varnothing$ pues $I \in \mathcal{I}$. Si $\{I_j\}_{j \in J}$ es una familia de integrantes de $\mathcal{I}$ totalmente ordenada por la inclusión, entonces $\bigcup_{j \in J} I_j \in \mathcal{I}$. En efecto, por la afirmación 1.16 es un ideal de R. Además, $I \subseteq I_j$ para cada $j \in J$ luego $I \subseteq \bigcup_{j \in J} I_j$. Finalmente $\left(\bigcup_{j \in J} I_j\right) \cap F = \varnothing$ pues si existiera $a \in \left(\bigcup_{j \in J} I_j\right) \cap F$ entonces $a \in I_j \cap F$ para algún j, pero esto es absurdo pues $I_j \in \mathcal{I}$ luego $I_j \cap F = \varnothing$.
Por el lema de Zorn, la familia $\mathcal{I}$ tiene algún maximal M que es el ideal buscado. □

En el caso distributivo, el ideal maximal tiene una importante propiedad adicional.

Afirmación 1.36. *Sea F un filtro de un retículo distributivo R. Si P es un ideal maximal entre los ideales disyuntos de F entonces P es primo.*

Demostración. En particular $F \cap P = \varnothing$ y como $1 \in F$ porque es filtro, $1 \notin P$. Sean a, b tales que $a \wedge b \in P$. Se consideran los ideales I_a, I_b definidos como sigue.

$$\begin{aligned} I_a = P \vee a\downarrow &= \{x \vee y \mid x \in P, y \in a\downarrow\} \\ &= \{x \vee (a \wedge z) \mid x \in P, z \in R\}, \\ I_b = P \vee b\downarrow &= \{u \vee (b \wedge w) \mid u \in P, w \in R\}. \end{aligned}$$

Supóngase que $I_a \cap F \neq \varnothing$, $I_b \cap F \neq \varnothing$. Entonces existen $x, u \in P$ y $z, w \in R$ tales que $x \vee (a \wedge z) \in F$, $u \vee (b \wedge w) \in F$. Siendo F un filtro, $(x \vee (a \wedge z)) \wedge (u \vee (b \wedge w)) \in F$. Ahora

$$(x \vee (a \wedge z)) \wedge (u \vee (b \wedge w)) = (x \wedge u) \vee (x \wedge b \wedge w) \vee (a \wedge z \wedge u) \vee (a \wedge b \wedge z \wedge w)$$

y se nota que todos estos cuatro términos pertenecen a P pues $x \in P$, $u \in P$ y $a \wedge b \in P$. Siendo este un ideal, el sup de los cuatro elementos también pertenece a P y de esta manera $(x \vee (a \wedge z)) \wedge (u \vee (b \wedge w)) \in P$. Pero entonces $F \cap P \neq \varnothing$, lo cual es absurdo.
En consecuencia $I_a \cap F = \varnothing$ o $I_b \cap F = \varnothing$. En el primer caso, $I_a = P \vee a\downarrow$ es un ideal disyunto de F que contiene a P. Puesto que P es maximal, $I_a = P$ de donde $a \in P$ ya que $a \in a\downarrow \subseteq P \vee a\downarrow = I_a$. En el segundo caso se concluye $b \in P$. Luego P es primo. □

Teorema 1.7. *Sea F un filtro de un retículo distributivo R. Cualquier ideal I disyunto de F está contenido en un ideal primo P disyunto de F.*

Demostración. Inmediata por las afirmaciones anteriores. □

Definición 1.18. *Un* ideal maximal *es un ideal maximal entre los ideales propios.*

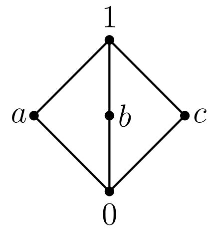
Puesto que un ideal es propio si y solo si no contiene a 1, si y solo si es disyunto del filtro $\{1\}$, un ideal maximal es maximal entre los disyuntos del filtro $\{1\}$ y se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.5. *En un retículo distributivo, todo ideal maximal es primo. Además, todo ideal propio está contenido en algún ideal primo.*

Demostración. Basta tomar $F = \{1\}$ en el teorema 1.7. □

En los resultados anteriores es necesario exigir que el retículo sea distributivo.

Ejemplo 1.33. Se considera el retículo que sigue:



El conjunto $I = \{0, a\} = a\downarrow$ es un ideal maximal pues al añadir cualquier otro elemento (b, c o 1) se genera el retículo completo.
Pero este ideal no es primo: $b \wedge c = 0 \in I$ mientras $b \notin I$, $c \notin I$. Más aún, no está contenido en ningún ideal primo.

1.4.4. Teorema de representación

Con la teoría de ideales, en especial de ideales primos, es posible formular un teorema que permite ver cualquier retículo distributivo como un conjunto de subconjuntos. Esto generaliza entonces, en cierta forma, los resultados de la sección 1.3.

Afirmación 1.37. *Sea A un retículo distributivo y sean $a, b \in A$. Si $a \not\leq b$ entonces existe un homomorfismo de retículos $f : A \longrightarrow 2$ tal que $f(a) = 1$ y $f(b) = 0$.*

Demostración. Se toma el ideal $I = b\downarrow$ y el filtro $F = a\uparrow$. Es claro que $I \cap F = \varnothing$ pues si $c \in I \cap F$ se tiene: como $c \in I$, es $c \leq b$; y como $c \in F$, es $c \geq a$. Luego $a \leq b$, contrario a la hipótesis. En consecuencia, por la afirmación 1.35 existe un ideal maximal M tal que $I \subseteq M$ y $M \cap F = \varnothing$. Por la afirmación 1.36 este ideal M es primo, luego por la afirmación 1.34 existe un homomorfismo $f : A \longrightarrow 2$ cuyo núcleo es M. Ahora como $a \in F$ y $M \cap F = \varnothing$, se tiene que $a \notin M$ luego $f(a) = 1$; como $b \in I$ e $I \subseteq M$, se tiene $b \in M$ luego $f(b) = 0$. $\square$

Dado un retículo distributivo A, sea X el conjunto de todos los homomorfismos de A en 2, esto es,

$$X = \{f : A \longrightarrow 2 \mid f \text{ es homomorfismo}\}.$$

Dado un elemento $a \in A$, sea $F(a)$ el conjunto de aquellos homomorfismos f de A en 2 tales que $f(a) = 1$, esto es

$$F(a) = \{f : A \longrightarrow 2 \mid f(a) = 1\}.$$

Claramente $F(a) \subseteq X$, luego F define una función del retículo A en el retículo de partes $\mathcal{P}(X)$.

$$\begin{array}{rccl} F: & A & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ & a & \longmapsto & F(a) \subseteq X \end{array}$$

Nota 1.9. Se observa que X se puede sustituir por el conjunto de ideales primos de A. En efecto, por la afirmación 1.34 cada ideal primo es el núcleo de un homomorfismo en 2 y viceversa. Como 2 solo tiene dos elementos, el núcleo determina completamente el homomorfismo. De esta manera

$$X \cong \{I \subseteq A \mid I \text{ es ideal primo}\},$$

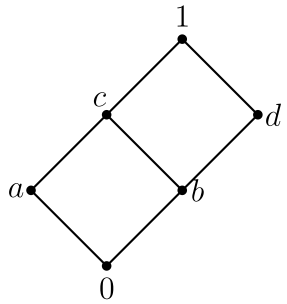
y en tales condiciones

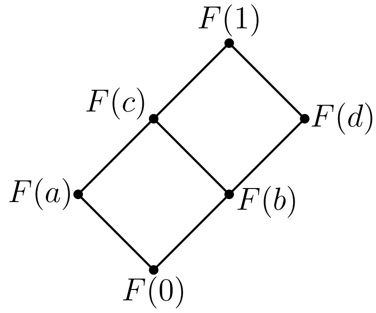
$$F(a) \cong \{I \text{ ideal primo} \mid a \notin I\}.$$

Ejemplo 1.34. En el retículo de los divisores de 12 considerado en el ejemplo 1.32, el conjunto de los ideales primos es $X = \{a\downarrow, c\downarrow, d\downarrow\}$ luego los conjuntos $F(a)$ son los siguientes.

$$\begin{array}{ll} F(0) = \varnothing & F(a) = \{d\downarrow\} \\ F(b) = \{a\downarrow\} & F(c) = \{a\downarrow,\ d\downarrow\} \\ F(d) = \{a\downarrow,\ c\downarrow\} & F(1) = X \end{array}$$

Si estos seis conjuntos se ordenan por inclusión se obtiene el siguiente diagrama, que se presenta al lado del retículo original para efecto de comparación.





Es evidente que estos retículos son isomorfos, además se nota que el retículo de imágenes es un conjunto de subconjuntos de X.

En lo que sigue se demuestra en general el fenómeno observado en el ejemplo 1.34, volviendo a los conjuntos de homomorfismos.

Afirmación 1.38. *Para cada $a, b \in A$ se tiene: $a \leq b$ si y solo si $F(a) \subseteq F(b)$.*

Demostración.
En una dirección: Si $a \leq b$ sea $f \in F(a)$, esto es, $f : A \longrightarrow 2$ es un homomorfismo tal que $f(a) = 1$. Puesto que f es homomorfismo, en particular respeta el orden de donde $f(a) \leq f(b)$. Pero $f(a) = 1$ es el máximo, luego también $f(b) = 1$ y así $f \in F(b)$.
En el otro sentido: Si $a \not\leq b$, por la afirmación 1.37 existe un homomorfismo $f : A \longrightarrow 2$ tal que $f(a) = 1$ y $f(b) = 0$, esto es, $f \in F(a)$ y $f \notin F(b)$. En consecuencia $F(a) \not\subseteq F(b)$. □

Con esto, F respeta el orden. Pero el resultado va más allá, pues en realidad este es un homomorfismo de retículos que representa el retículo A en $\mathcal{P}(X)$.

Teorema 1.8. *Para cualquier retículo distributivo A, la función $F : A \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ es un homomorfismo inyectivo de retículos.*

Demostración. Sean $a, b \in A$ arbitrarios.

- $F(a \wedge b) = F(a) \cap F(b)$. En efecto, $f \in F(a \wedge b)$ si y solo si $f(a \wedge b) = 1$ y, siendo f un homomorfismo, esto equivale a $f(a) \wedge f(b) = 1$. Como 1 es el máximo, esta igualdad se tiene si y solo si $f(a) = 1$ y $f(b) = 1$, esto es, si y solo si $f \in F(a)$ y $f \in F(b)$, si y solo si $f \in F(a) \cap F(b)$.

- $F(a \vee b) = F(a) \cup F(b)$. Pues $f \in F(a \vee b)$ si y solo si $f(a \vee b) = 1$ y, si y solo si $f(a) \vee f(b) = 1$. Los elementos $f(a)$, $f(b)$ pertenecen al retículo 2 y allí se cumple $x \vee y = 1$ si y solo si $x = 1$ o $y = 1$ (véase la nota 1.4). Así que $f(a) \vee f(b) = 1$ si y solo si $f(a) = 1$ o $f(b) = 1$, si y solo si $f \in F(a)$ o $f \in F(b)$, si y solo si $f \in F(a) \cup F(b)$.

- $F(0) = \varnothing$. En efecto, $f \in F(0)$ si y solo si $f(0) = 1$ pero al ser f homomorfismo siempre se tiene $f(0) = 0$, luego esta condición nunca se cumple.

- $F(1) = X$. Ya que para cualquier homomorfismo $f : A \longrightarrow 2$ se tiene $f(1) = 1$, así que $f \in F(1)$.

Por fin, el homomorfismo F es inyectivo. Pues si $F(a) = F(b)$, se tiene $F(a) \subseteq F(b)$ y $F(b) \subseteq F(a)$. Por la afirmación 1.38 esto implica $a \leq b$ y $b \leq a$, es decir, $a = b$. □

Corolario 1.6. *Cualquier retículo distributivo es isomorfo a un conjunto de subconjuntos de algún conjunto.*

Demostración. $F : A \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ es inyectivo luego A es isomorfo a la imagen de F. □

1.5. Representación de álgebras booleanas

Toda álgebra booleana es, en particular, un retículo distributivo luego toda la teoría de la sección anterior se aplica aquí. Pero algunos detalles se pueden simplificar y ciertos resultados se mejoran.

1.5.1. Ideales y filtros

Afirmación 1.39. *Si I es un ideal de un álgebra booleana, entonces $a \underset{I}{\equiv} b$ si y solo si $a \wedge b' \in I$ y $a' \wedge b \in I$, $a', b' \in I$.*

Demostración.
En un sentido: Sean $i, j \in I$ tales que $a \vee i = b \vee j$. Entonces $(a \vee i) \wedge b' = (b \vee j) \wedge b'$ para $a', b' \in I$. Por un lado, $(a \vee i) \wedge b' = (a \wedge b') \vee (i \wedge b')$ y por otra parte $(b \vee j) \wedge b' = (b \wedge b') \vee (j \wedge b') = 0 \vee (j \wedge b') = j \wedge b'$. Ahora $j \wedge b' \leq j$ luego $j \wedge b' \in I$ porque $j \in I$ que es un ideal. Por la igualdad se sigue $(a \wedge b') \vee (i \wedge b') \in I$ de donde en particular $a \wedge b' \in I$. De manera simétrica se concluye $a' \wedge b \in I$.
En el otro sentido se nota que:

$$a \vee (a' \wedge b) = (a \vee a') \wedge (a \vee b) = 1 \wedge (a \vee b) = a \vee b,$$
$$b \vee (a \wedge b') = (b \vee a) \wedge (b \vee b') = (b \vee a) \wedge 1 = b \vee a.$$

Como $b \vee a = a \vee b$, siempre $a \vee (a' \wedge b) = b \vee (a \wedge b')$. Por hipótesis $a' \wedge b$, $a \wedge b' \in I$ luego $a \underset{I}{\equiv} b$. □

Corolario 1.7. *Si $a \underset{I}{\equiv} b$ entonces $a' \underset{I}{\equiv} b'$*

Demostración. Si $a \underset{I}{\equiv} b$ entonces por la afirmación 1.39 $a \wedge b' \in I$, $a' \wedge b \in I$. Estas igualdades se pueden expresar como: $a' \wedge b'' \in I$, $a'' \wedge b' \in I$, pero esto es equivalente a $a' \underset{I}{\equiv} b'$ según la misma afirmación. □

En consecuencia, en el conjunto cociente está bien definida la operación:

$$\overline{a}' = \overline{a'}.$$

Afirmación 1.40. *El conjunto cociente $B/_{\underset{I}{\equiv}}$ es un álgebra booleana. El mínimo es igual al ideal I y el máximo está constituido por los complementos (en el álgebra) de los elementos de I.*

Es decir, el máximo es $I' = \{a' \mid a \in I\}$.

Demostración. Por la teoría anterior, $B/_{\underset{I}{\equiv}}$ es un retículo distributivo. Además:

$$\begin{aligned}\overline{a} \wedge \overline{a}' &= \overline{a} \wedge \overline{a'} = \overline{a \wedge a'} = \overline{0},\\ \overline{a} \vee \overline{a}' &= \overline{a} \vee \overline{a'} = \overline{a \vee a'} = \overline{1}.\end{aligned}$$

Dado que $\overline{0} =$ *mínimo* y $\overline{1} =$ *máximo*, igual que en los semirretículos se tiene que $\overline{0} = I$. Por otro lado, $x \in \overline{1}$ si y solo si $x \underset{I}{\equiv} 1$, si y solo si $x \wedge 1' \in I$ y $x' \wedge 1 \in I$. Pero $x \wedge 1' = x \wedge 0 = 0$ y siempre $0 \in I$, mientras $x' \wedge 1 = x'$. Luego $x \in \overline{1}$ si y solo si $x' \in I$. □

La relación anterior se puede desglosar en álgebras booleanas de la siguiente manera. Si I es un ideal de un álgebra booleana B entonces en B se define la relación $\underset{I}{\lll}$ como sigue:

$$a \underset{I}{\lll} b \ \text{ si } \ a \wedge b' \in I.$$

Afirmación 1.41. *$\underset{I}{\lll}$ es una relación de preorden en B.*

Demostración.

- Para cada $a \in B$ se tiene $a \wedge a' = 0 \in I$ luego $a \underset{I}{\lll} a$.

- Si $a \underset{I}{\lll} b$ y $b \underset{I}{\lll} c$, se tiene $a \wedge b' \in I$ y $b \wedge c' \in I$ de donde:

$$\begin{aligned}a \wedge c' &= (a \wedge c') \wedge 1\\ &= (a \wedge c') \wedge (b' \vee b)\\ &= (a \wedge c' \wedge b') \vee (a \wedge c' \wedge b)\\ &= (a \wedge b' \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge c')\end{aligned}$$

  Se tiene $a \wedge b' \wedge c' \leq a \wedge b'$ con $a \wedge b' \in I$, luego $a \wedge b' \wedge c' \in I$; por otro lado $a \wedge b \wedge c' \leq b \wedge c'$ con $b \wedge c' \in I$, luego $a \wedge b \wedge c' \in I$. Siendo I un ideal, esto implica $(a \wedge b' \wedge c') \vee (a \wedge b \wedge c') \in I$, es decir, $a \wedge c' \in I$ y así $a \underset{I}{\lll} c$. □

De esta manera, en las álgebras booleanas se tiene:

$$a \underset{I}{\equiv} b \ \text{ si y solo si } \ a \underset{I}{\lll} b \ \text{ y } \ b \underset{I}{\lll} a.$$

Luego $\underset{I}{\equiv}$ es la relación de equivalencia asociada a la relación de preorden $\underset{I}{\lll}$, y la transitividad de esta última implica (por otro camino) la transitividad de $\underset{I}{\equiv}$.

Afirmación 1.42.

i) $a \underset{I}{\ll} 0$ *si y solo si* $a \in I$.

ii) $0 \underset{I}{\ll} b$ *para cualquier* $b \in I$.

Demostración.

i) $a \underset{I}{\ll} 0$ si y solo si $a \wedge 0' \in I$. Pero $a \wedge 0' = a \wedge 1 = a$, luego $a \wedge 0' \in I$ si y solo si $a \in I$.

ii) Siempre $0 \wedge b' = 0 \in I$ luego $0 \underset{I}{\ll} b$. □

Afirmación 1.43. *La relación* $\underset{I}{\ll}$ *es de orden si y solo si* $I = \{0\}$. *Además, en ese caso coincide con el orden del álgebra booleana* B.

Demostración. Si $a \in I$ entonces por la afirmación 1.42 se tiene $a \underset{I}{\ll} 0$ y $0 \underset{I}{\ll} a$. Si la relación es antisimétrica se sigue $a = 0$, y de esta manera $I = \{0\}$.
Si $I = \{0\}$, dados $a, b \in B$ tales que $a \underset{I}{\ll} b$ y $b \underset{I}{\ll} a$ se tiene $a \wedge b' \in I$ y $a' \wedge b \in I$, es decir, $a \wedge b' = 0$ y $a' \wedge b = 0$. Una propiedad conocida de las álgebras booleanas establece que $x \wedge y' = 0$ si y solo si $x \leq y$. En este caso $a \leq b$ y $b \leq a$, esto es, $a = b$ y la relación es antisimétrica.
Además, en este caso, $a \underset{I}{\ll} b$ si y solo si $a \wedge b' = 0$, si y solo si $a \leq b$, luego $\underset{I}{\ll}$ coincide con la relación de orden en B. □

Afirmación 1.44. *Si* F *es un filtro de un álgebra booleana, entonces* $a \underset{F}{\equiv} b$ *si y solo si* $a \vee b' \in F$ *y* $a' \vee b \in F$.

Corolario 1.8. *Si* $a \underset{F}{\equiv} b$ *entonces* $a' \underset{F}{\equiv} b'$.

Afirmación 1.45. *El conjunto cociente* $B/\underset{F}{\equiv}$ *es un álgebra booleana. El máximo es igual al filtro* F *y el mínimo está constituido por los complementos (en el álgebra) de los elementos de* F.

Es decir, el mínimo es $F' = \{a' \mid a \in F\}$.

Teorema 1.9. *Sea* I *un ideal de un álgebra booleana* B. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *El complemento de* I *es un filtro.*

ii) $1 \notin I$ *y para cada* $a, b \in B$: $a \wedge b \in I$ *implica* $a \in I$ *o* $b \in I$.

iii) I *es el núcleo de un homomorfismo de álgebras booleanas* $f : B \longrightarrow 2$.

iv) Para cada $a \in B$ se tiene $a \in I$ o $a' \in I$, pero no ambas.

v) I es un ideal maximal.

Demostración.
i) implica ii). Como en la prueba de la afirmación 1.34.
ii) implica iv). Se nota que $a \wedge a' = 0 \in I$ luego $a \in I$ o $a' \in I$. Si $a \in I$ y $a' \in I$ entonces $a \vee a' \in I$, es decir, $1 \in I$ lo cual contradice (ii). Luego no pertenecen ambos al ideal.
iv) implica v). Sea J un ideal que contiene a I y supóngase que existe $x \in J \setminus I$. Por la hipótesis (iv), de $x \notin I$ se sigue $x' \in I$ y por lo tanto $x' \in J$. Como también $x \in J$, resulta $x \vee x' \in J$, es decir, $1 \in J$ y así $J = B$. Luego I es maximal pues el único ideal que lo contiene propiamente es B.
v) implica ii). Por el corolario 1.5.
ii) implica iii). La función definida en la demostración de la afirmación 1.34 es

$$f(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \in I, \\ 1 & \text{si } a \notin I. \end{cases}$$

Allí se probó que f es un homomorfismo de retículos. Además es un homomorfismo de álgebras booleanas, ya que $f(a') = (f(a))'$. En efecto, $f(a') = 0$ si y solo si $a' \in I$, lo cual por (iv) (que ya se probó equivalente a (ii)) equivale a $a \notin I$, si y solo si $f(a) = 1$, si y solo si $(f(a))' = 0$. De esta manera $f(a') = 0$ si y solo si $(f(a))' = 0$, y en este caso esto implica $f(a') = (f(a))'$ porque $\mathbf{2}$ tiene solo dos elementos.
iii) implica i). Como en la prueba de la afirmación 1.34. □

Corolario 1.9. *En un álgebra booleana, todo ideal primo es maximal.*

Este hecho no se cumple en retículos distributivos.

Ejemplo 1.35. Todo conjunto ordenado total con máximo 1 y mínimo 0 es, en particular, un retículo distributivo. En este caso, todo ideal propio I es primo: en efecto $1 \notin I$ ya que es propio, y si $a \wedge b \in I$ entonces como $a \wedge b = min\{a, b\} \in \{a, b\}$ se tiene $a \wedge b = a$ o $a \wedge b = b$, de donde $a \in I$ o $b \in I$. Pero el único ideal maximal es $M = [0, 1) = \{x \mid x \neq 1\}$. En efecto, este es un ideal y su único superconjunto es todo el conjunto ordenado, luego es maximal. Si N es un ideal y existe un elemento $y \neq 1$ con $y \notin N$, entonces $[0, y]$ es un ideal propio que contiene estrictamente a N, luego N no es maximal.

1.5.2. Teorema de representación

El resultado siguiente se conoce como *Teorema de Stone*, ya que fue probado por el matemático norteamericano Marshall Stone en 1936 [10].

Teorema 1.10. *Para cualquier álgebra booleana B la función $F : B \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ definida en la sección 1.4 es un homomorfismo inyectivo de álgebras booleanas.*

Demostración. Puesto que B es un retículo distributivo, todo lo probado en la sección 1.4 sigue siendo válido aquí. Lo único que falta probar es que la función F respeta el complemento.

- $F(a') = (F(a))^c$. En efecto, sea $f : B \longrightarrow 2$ un homomorfismo de álgebras booleanas. Ahora $f \in F(a')$ si y solo si $f(a') = 1$, si y solo si $(f(a))' = 1$, si y solo si $f(a) = 0$. Como $f(a)$ pertenece al retículo 2 que tiene solo dos elementos, se tiene $f(a) = 0$ si y solo si $f(a) \neq 1$. Ahora $f(a) \neq 1$ si y solo si $f \notin F(a)$, si y solo si $f \in (F(a))^c$. $\square$

Corolario 1.10. *Cualquier álgebra booleana es isomorfa a un conjunto de subconjuntos de algún conjunto.*

Demostración. El homomorfismo $F : B \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ es inyectivo luego B es isomorfo a la imagen de F. $\square$

En el caso de las álgebras booleanas, el conjunto X también puede verse como el conjunto de todos los ideales maximales de B.

Capítulo 2

Representación topológica

Cada una de las representaciones de un conjunto ordenado como subconjunto de partes de cierto conjunto, estudiadas en el capítulo anterior, en realidad genera una topología sobre el conjunto en cuestión. En el caso de los retículos distributivos y las álgebras booleanas, esto conduce a una correspondencia de tales estructuras con cierta clase especial de espacios topológicos.

2.1. Preliminares

En lo que sigue se asumen conocidas las nociones básicas de la topología conjuntista tales como espacios topológicos, abiertos y cerrados, funciones continuas y espacios T_0, T_1, Hausdorff y compactos. Pero es necesario enunciar varios otros conceptos menos estudiados y que se entrelazan en la definición de lo que se llamará un espacio topológico de Stone.

2.1.1. Espacios sobrios

Definición 2.1. *Un cerrado C es* reducible *si existen subconjuntos propios cerrados $A \subseteq C$, $B \subseteq C$ tales que $C = A \cup B$. Un cerrado es* irreducible *si no es reducible.*

Afirmación 2.1. *En todo espacio topológico, la clausura de un solo punto es un cerrado irreducible.*

Demostración. Supóngase que $\overline{\{x\}} = A \cup B$ con A, B cerrados. Como $x \in \overline{\{x\}}$, se tiene $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$, como A es cerrado resulta $\overline{\{x\}} \subseteq A$ de donde $A = \overline{\{x\}}$. De manera que no existe descomposición de $\overline{\{x\}}$ mediante cerrados propios. ☐

Definición 2.2. [8] *Un espacio topológico es* sobrio *si todo cerrado irreducible es la clausura de un solo punto.*

Afirmación 2.2. *Todo espacio Hausdorff es sobrio.*

Demostración. Sea C un cerrado en un espacio Hausdorff X y sean $x, y \in C$ distintos. Entonces existen abiertos disyuntos U, V con $x \in U$, $y \in V$. Ciertamente $C = (C - U) \cup (C - V)$ donde $C - U$, $C - V$ son cerrados. Además $x \in C$ pero $x \notin C - U$ luego $C - U \neq C$ y de la misma manera $C - V \neq C$. Es decir, C es reducible.
Por lo tanto, en un espacio Hausdorff los únicos cerrados irreducibles son los conjuntos unitarios, que son la clausura de su único elemento. □

Afirmación 2.3. *Todo espacio sobrio es T_0.*

Demostración. En un espacio sobrio, el cerrado irreducible $\overline{\{x\}}$ es la clausura solo de x, luego para $x \neq y$ se tiene $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$. Esta implicación caracteriza los espacios T_0. □

Afirmación 2.4. *Un conjunto infinito X con la topología de cofinitos es T_1 pero no es sobrio.*

Demostración. Si $x \neq y$, los conjuntos $\{y\}^c$, $\{x\}^c$ son abiertos que contienen a x, y respectivamente pero no al otro elemento.
Los cerrados de este espacio son los conjuntos finitos junto con el espacio total. El espacio completo es un cerrado irreducible, pues la unión de cerrados propios es finita. Pero no es la clausura de punto alguno. □

Corolario 2.1. *No todo espacio T_1 es sobrio, y no todo espacio T_0 es sobrio.*

Afirmación 2.5. *La recta real con un punto adicional p, tomando como abiertos los usuales de la recta y los cofinitos que contienen a p, constituye un espacio sobrio y T_1 que no es Hausdorff.*

Demostración. $X = \mathbb{R} \cup \{p\}$ es un espacio topológico donde los abiertos están conformados por la unión de intervalos abiertos y los subconjuntos que contienen a p tal que su complemento es finito.
* T_1: Sean $x, y \in X$ distintos. Si $x, y \in \mathbb{R}$, sea ε la distancia entre x e y, luego $(x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2})$, $(y - \frac{\varepsilon}{2}, y + \frac{\varepsilon}{2})$ son abiertos que contienen a x e y pero no contienen a y y x, respectivamente. En otro caso, si $x = p$ e $y \in \mathbb{R}$, consideremos el conjunto finito $\{y\}$, como $p \notin \{y\}$ entonces $X - \{y\}$ es abierto y dado que $\mathbb{R}$ es abierto con $p \notin \mathbb{R}$, se concluye que X es T_1.
* No Hausdorff: Supongamos que X es Hausdorff, luego para $p, y \in X$ donde $y \in \mathbb{R}$ existen abiertos disyuntos A, B con $p \in A$, $y \in B$. Dado que $p \in A$ se tiene que A^c es finito y como $p \notin B$ se tiene que B es unión de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, luego B es infinito. Pero $B \subseteq A^c$ puesto que $A \cap B = \varnothing$, lo cual es una contradicción.
* Sobrio: Puesto que el espacio es T_1, los puntos son cerrados y X es sobrio si los únicos cerrados irreducibles son los unitarios. Sea entonces C un cerrado con más de un punto.

- Si $p \notin C$, el complemento C^c es un abierto que contiene a p luego su complemento $(C^c)^c = C$ es un subconjunto finito de $\mathbb{R}$. Si x es cualquier elemento de C entonces $\{x\}$, $C - \{x\}$ es una descomposición de C en cerrados no triviales.

- Si $p \in C$ de nuevo se consideran dos casos.

- Si $C = \{p, x\}$ entonces $\{p\}$, $\{x\}$ es una descomposición de C en cerrados no triviales.
- Si existen elementos $x, y \in C \cap \mathbb{R}$ distintos entre sí (y distintos de p), se nota que $C \cap \mathbb{R}$ es un cerrado en la topología usual de $\mathbb{R}$. Luego, por la afirmación 2.2 existe una descomposición de $C \cap \mathbb{R}$, esto es, hay cerrados de la topología usual A_0, B_0 con $x \in A_0$, $y \in B_0$, $C \cap \mathbb{R} = A_0 \cup B_0$.
  Ahora se definen $A = A_0 \cup \{p\}$, $B = B_0 \cup \{p\}$. Es claro que $x \in A$, $y \in B$, $C = A \cup B$. Pero además A y B son cerrados en X, por ejemplo $A^c = \mathbb{R} - A_0$ que es un abierto de la topología usual, luego también es abierto de X. $\square$

Corolario 2.2. *No todo espacio sobrio es Hausdorff, y no todo espacio sobrio T_1 es Hausdorff.*

2.1.2. Propiedades de abiertos cerrados

Los resultados de esta sección serán usados en el tema de la sección siguiente (2.1.5).

Definición 2.3. *Un espacio topológico X es* cero-dimensional *si los subconjuntos abiertos cerrados de X forman una base para la topología.*

Una versión equivalente de la definición 2.3 es: un espacio topológico X es cero-dimensional si para cada $x \in X$ y cada cerrado A con $x \notin A$, existe un abierto cerrado C con $x \in C$ y $C \cap A = \varnothing$.

Definición 2.4. *Un espacio topológico X es* totalmente disconexo *si los únicos subconjuntos conexos son los unitarios.*

Definición 2.5. *Un espacio topológico X es* totalmente separado *si para puntos distintos x, y en X existe un abierto cerrado que contiene a x pero no a y.*

Afirmación 2.6. *Un espacio totalmente disconexo es T_1.*

Demostración. Para cada punto x la adherencia $\overline{\{x\}}$ es conexo porque $\{x\}$ lo es. En un espacio totalmente disconexo, $\overline{\{x\}}$ es un conjunto unitario. De $\{x\} \subseteq \overline{\{x\}}$ se sigue $\overline{\{x\}} = \{x\}$, los conjuntos unitarios son cerrados y el espacio es T_1. $\square$

Lema 2.1. *Un espacio totalmente separado es Hausdorff.*

Demostración. Dados x, y distintos existe un abierto cerrado A con $x \in A$, $y \notin A$. Luego $B = A^c$ también es abierto cerrado, $y \in B$ y además $A \cap B = \varnothing$. $\square$

Lema 2.2. *Un espacio totalmente separado es totalmente disconexo.*

Demostración. Sea C un subconjunto conexo y supóngase que contiene dos elementos distintos $x, y \in C$, $x \neq y$. Como en la prueba anterior, existen abiertos cerrados A, B con $x \in A$, $y \in B$, $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = X$. Luego $C \cap A$, $C \cap B$ son abiertos disyuntos de C cuya unión es C, lo cual contradice la conexidad de C. De manera que C es unitario o vacío. $\square$

Afirmación 2.7. *Un espacio cero-dimensional es regular.*

Demostración. Sea A un cerrado y sea $x \notin A$. Entonces A^c es un abierto con $x \in A^c$, y en consecuencia existe un abierto cerrado B con $x \in B$, $B \subseteq A^c$. Ahora B, B^c son abiertos disyuntos con $x \in B$, $A \subseteq B^c$. $\square$

Lema 2.3. *Un espacio T_0 y cero-dimensional es totalmente separado.*

Demostración. Dados x, y distintos, por ser el espacio T_0 existe un abierto A con $x \in A$, $y \notin A$. Al ser cero-dimensional existe un abierto cerrado B con $x \in B$, $B \subseteq A$. En consecuencia $y \notin B$ y el espacio es totalmente separado. $\square$

Lema 2.4. *Un espacio compacto totalmente separado es cero-dimensional.*

Demostración. Sea U un abierto y $x \in U$. Para cada $y \in U^c$, como $y \neq x$ existe un abierto cerrado V_y con $x \in V_y$, $y \notin V_y$. Ahora, $\{V_y^c\}_{y \in U^c}$ es un cubrimiento abierto de U^c. Este conjunto U^c es un cerrado, luego como el espacio es compacto U^c también es compacto y existen finitos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tales que $U^c \subseteq V_{y_1}^c \cup V_{y_2}^c \cup \ldots \cup V_{y_n}^c$. Por lo tanto $U \supseteq V_{y_1} \cap V_{y_2} \cap \ldots \cap V_{y_n}$. El conjunto $V = V_{y_1} \cap V_{y_2} \cap \ldots \cap V_{y_n}$ es un abierto cerrado con $x \in V$, $V \subseteq U$. $\square$

Definición 2.6. *En un espacio topológico X, para cada $x \in X$ se define $\mathcal{C}(x)$ como el conjunto de puntos que no se pueden separar de x por algún abierto cerrado.*

Es decir, $y \notin \mathcal{C}(x)$ si y solo si y se puede separar de x por algún abierto cerrado, si y solo si existe un abierto cerrado A tal que $y \in A$, $x \notin A$. Se nota que A^c es un abierto cerrado (disyunto de A) que satisface $y \notin A^c$, $x \in A^c$.

Afirmación 2.8.

i) $x \in \mathcal{C}(x)$.

ii) Si B es un abierto cerrado entonces: $B \cap \mathcal{C}(x) = \varnothing$ si y solo si $x \notin B$.

iii) $X - \mathcal{C}(x) = \bigcup \{A \text{ abierto cerrado} \mid x \notin A\}$.

iv) $\mathcal{C}(x)$ es cerrado.

Demostración.

i) Evidente pues x no se puede separar de x.

ii) Si $B \cap \mathcal{C}(x) = \varnothing$, como $x \in \mathcal{C}(x)$ entonces $x \notin B$. En el otro sentido, si B es abierto cerrado y $x \notin B$, para cada $b \in B$ existen abiertos cerrados que los separan de x luego $b \notin \mathcal{C}(x)$. Así, $B \cap \mathcal{C}(x) = \varnothing$.

iii) Si $y \notin \mathcal{C}(x)$, por la nota después de la definición existe un abierto cerrado A con $y \in A$, $x \notin A$ luego $y \in \bigcup\{A \text{ abierto cerrado} \mid x \notin A\}$. Al revés, si B es un abierto cerrado con $x \notin B$, por (ii) se tiene $B \cap \mathcal{C}(x) = \varnothing$, es decir, $B \subseteq X - \mathcal{C}(x)$. Luego $\cup\{B\} \subseteq X - \mathcal{C}(x)$.

iv) La unión de abiertos es abierta, luego por (iii) $X - \mathcal{C}(x)$ es abierto. $\square$

Lema 2.5. *Un espacio compacto, normal y totalmente disconexo es totalmente separado.*

Demostración. Sea X un espacio normal, compacto y totalmente disconexo. Para cada $x \in X$ se demostrará que el conjunto $\mathcal{C}(x)$ definido antes es unitario, lo cual significa que el espacio es totalmente separado.
Supóngase, por el contrario, que $\mathcal{C}(x)$ contiene más de un punto. Como el espacio X es totalmente disconexo, el conjunto $\mathcal{C}(x)$ es disconexo: sea $\mathcal{C}(x) = F_1 \cup F_2$ con $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ y F_i no vacíos y cerrados en $\mathcal{C}(x)$ $(1 \leq i \leq 2)$. Como $\mathcal{C}(x)$ es cerrado en X, los F_i son cerrados en X.
Puesto que X es un espacio normal y F_1, F_2 son cerrados disyuntos, existen abiertos disyuntos U_1, U_2 tales que $F_i \subseteq U_i$ $(1 \leq i \leq 2)$. Sea $U = U_1$.
Ahora se considera la frontera $Fr\ U = \overline{U} \cap \overline{U^c}$. Puesto que U es abierto, U^c es cerrado y así $\overline{U^c} = U^c$ de manera que $Fr\ U = \overline{U} \cap U^c$. Se nota que $Fr(U) \cap \mathcal{C}(x) = \varnothing$. Pues si $y \in \mathcal{C}(x) = F_1 \cup F_2$ entonces $y \in F_1$ o $y \in F_2$. Si $y \in F_1$, como $F_1 \subseteq U$ entonces $y \notin U^c$ luego $y \notin Fr\ U$ porque $Fr\ U \subseteq U^c$; si $y \in F_2$, como $F_2 \subseteq U_2$ con U_2 abierto y $U \cap U_2 = \varnothing$ entonces $y \notin \overline{U}$ luego $y \notin Fr\ U$ porque $Fr\ U \subseteq \overline{U}$.
Para cada $z \in Fr\ U$, como $z \notin \mathcal{C}(x)$ existe un abierto cerrado V_z tal que $z \in V_z$, $x \notin V_z$. Claramente $Fr\ U \subseteq \bigcup_{z \in Fr\ U} V_z$ y como $Fr\ U$ es cerrado y el espacio X es compacto, $Fr\ U$ es compacto y existen finitos $z_1, \cdots, z_n \in Fr\ U$ tales que $Fr\ U \subseteq V_{z_1} \cup V_{z_2} \cup \cdots \cup V_{z_n}$. Sea $V = V_{z_1} \cup V_{z_2} \cup \cdots \cup V_{z_n}$, en estas condiciones V es un abierto cerrado y $x \notin V$ pues $x \notin V_z$ para cada z. Esto significa $V \cap \mathcal{C}(x) = \varnothing$.
Ahora se demuestra que $U - V = \overline{U} - V$. En efecto, $\overline{U} \cap \overline{U^c} = Fr\ U \subseteq V$ luego $V^c \subseteq (\overline{U} \cap \overline{U^c})^c = (\overline{U} \cap U^c)^c = \overline{U}^c \cup U^{cc} = \overline{U}^c \cup U$. Ahora $\overline{U} - V = \overline{U} \cap V^c \subseteq \overline{U} \cap (\overline{U}^c \cup U) = (\overline{U} \cap \overline{U}^c) \cup (\overline{U} \cap U) = \varnothing \cup (\overline{U} \cap U) = \overline{U} \cap U \subseteq U$, luego $\overline{U} - V \subseteq U - V$. Y siempre se tiene $U - V \subseteq \overline{U} - V$ porque $U \subseteq \overline{U}$.
Sea $W = U - V = \overline{U} - V$. Como U es abierto y V cerrado, $W = U - V$ es abierto; como $\overline{U}$ es cerrado y V abierto, $W = \overline{U} - V$ es cerrado. Es decir, W es abierto cerrado.
Dado que $V \cap \mathcal{C}(x) = \varnothing$, $\mathcal{C}(x) \subseteq V^c$ y así $W \cap \mathcal{C}(x) = (U - V) \cap \mathcal{C}(x) = U \cap V^c \cap \mathcal{C}(x) = U \cap \mathcal{C}(x) = F_1$ pues así se escogió U. Como $F_1 \neq \varnothing$, se tiene $W \cap \mathcal{C}(x) \neq \varnothing$ y siendo W abierto cerrado esto implica $x \in W$. Pero, por otro lado, $U \cap F_2 = \varnothing$ luego $F_2 \subseteq U^c$ y dado que $W \subseteq U$, es $F_2 \subseteq W^c$ de manera que $W^c \cap \mathcal{C}(x) = W^c \cap (F_1 \cup F_2) = W^c \cap F_2 = F_2$. Como $F_2 \neq \varnothing$, se tiene $W^c \cap \mathcal{C}(x) \neq \varnothing$ y siendo W^c abierto cerrado esto implica $x \in W^c$. Lo cual es una contradición.
Con todo esto se demuestra que $\mathcal{C}(x)$ solo contiene un punto, a saber, x luego el espacio es totalmente separado. $\square$

Afirmación 2.9. *Un espacio Hausdorff compacto es regular.*

Demostración. Dado un cerrado C y un punto $x \notin C$, para cada $a \in C$ como $a \neq x$ y el espacio es Hausdorff, existen U_a, V_a abiertos disyuntos con $a \in U_a$, $x \in V_a$.
Es claro que $C \subseteq \bigcup_{a \in C} U_a$. Como C es un cerrado en un espacio compacto, también es compacto

y existen finitos $a_1, a_2, \cdots, a_n \in C$ tales que

$$C \subseteq U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \cdots \cup U_{a_n} = U.$$

Sea $V = V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap \cdots \cap V_{a_n}$, entonces U, V son abiertos disyuntos con $C \subseteq U$, $x \in V$. $\square$

2.1.3. Espacios Lindelöf

La noción de espacio Lindelöf es una versión débil de la compacidad.

Definición 2.7. *Un espacio topológico X es* Lindelöf *si todo cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento enumerable.*

Corolario 2.3. *Un espacio compacto es Lindelöf.*

Demostración. Evidente porque todo conjunto finito (de índices) es enumerable. $\square$

Afirmación 2.10. *Un espacio Lindelöf regular es normal.*

Demostración. Sean A, B cerrados disyuntos.
Dado $a \in A$, se tiene $a \notin B$ con B cerrado luego por ser un espacio regular existen abiertos U_a, $U_a{}'$ con $a \in U_a$, $B \subseteq U_a{}'$. Es claro que $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$ y al ser el espacio Lindelöf, existen enumerables abiertos

$$U_1 = U_{a_1},\ U_2 = U_{a_2},\ U_3 = U_{a_3}, \cdots$$

tales que $A \subseteq U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \cdots$
De manera simétrica, para $b \in B$ existen abiertos V_b, $V_b{}'$ con $b \in V_b$, $A \subseteq V_b{}'$. Es claro que $B \subseteq \bigcup_{b \in B} V_b$ luego existen enumerables abiertos

$$V_1 = V_{b_1},\ V_2 = V_{b_2},\ V_3 = V_{b_3}, \cdots$$

tales que $B \subseteq V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \cdots$
Ahora se construyen las sucesiones de abiertos $S_1, S_2, \cdots$ y $T_1, T_2, \cdots$ como sigue.

$$S_1 = U_1$$

$$T_1 = V_1 - \overline{S_1}$$

$$S_2 = U_2 - \overline{T_1}$$

$$T_2 = V_2 - \overline{S_1 \cup S_2}$$

$$S_3 = U_3 - \overline{T_1 \cup T_2}$$

$$T_3 = V_3 - \overline{S_1 \cup S_2 \cup S_3}$$

En general,

$$\begin{array}{ll} S_n = U_n - \overline{T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_{n-1}} & (n \geq 2) \\ T_n = V_n - \overline{S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n} & (n \geq 1). \end{array}$$

Puesto que U_i, V_i son abiertos, es claro que S_n, T_n son abiertos para cada n.
Si $a \in A$ entonces $a \notin \overline{T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_k}$ para cada k. En efecto, $T_i \subseteq V_i$ luego

$$\begin{aligned} T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_k &\subseteq V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k \\ &\subseteq ({V_1}')^c \cup ({V_2}')^c \cup \cdots \cup ({V_k}')^c \\ &= ({V_1}' \cap {V_2}' \cap \cdots \cap {V_k}')^c \end{aligned}$$

porque $V_j \cap {V_j}' = \varnothing$ luego $V_j \subseteq ({V_j}')^c$.
Como los ${V_j}'$ son abiertos, este último conjunto es cerrado y en consecuencia

$$\overline{T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_k} \subseteq ({V_1}' \cap {V_2}' \cap \cdots \cap {V_k}')^c.$$

Puesto que $A \subseteq {V_j}'$ para cada j, se tiene $a \in {V_1}' \cap {V_2}' \cap \cdots \cap {V_k}'$ y así $a \notin \overline{T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_k}$.
Ahora, como $A \subseteq U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \cdots$ existe n tal que $a \in U_n$ y ya se probó que $a \notin \overline{T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_{n-1}}$. Luego $a \in U_n - \overline{T_1 \cup T_2 \cup \cdots \cup T_{n-1}} = S_n$ y así $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.
De manera simétrica $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$.
Finalmente $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \varnothing$. En efecto, sea $x \in \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) \bigcap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right)$ y sean p, q tales que $x \in S_p$, $x \in T_q$.
Si $p \leq q$, como $x \in S_p$ entonces $x \in S_1 \cup \cdots \cup S_p \cup \cdots \cup S_q$ luego $x \in \overline{S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_q}$ pero $x \in T_q = V_q - \overline{S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_q}$, lo cual es una contradicción.
Y si $p > q$, como $x \in T_q$ es $x \in T_1 \cup \cdots \cup T_q \cup \cdots \cup T_{p-1}$ luego $x \in \overline{T_1 \cup \cdots \cup T_q \cup \cdots \cup T_{p-1}}$ pero $x \in S_p = U_p - \overline{T_1 \cup \cdots \cup T_q \cup \cdots \cup T_{p-1}}$, lo cual es absurdo.
En ambos casos se llega a una contradicción, luego la intersección es vacía.
De esta manera $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ son abiertos disyuntos con $A \subseteq S$, $B \subseteq T$. □

Lema 2.6. *Un espacio Hausdorff compacto es normal.*

Demostración. Puesto que es Hausdorff y compacto, el espacio es regular; como es compacto, es Lindelöf. Y al ser Lindelöf y regular, resulta normal. □

2.1.4. Espacios coherentes

Definición 2.8. [8] *Un espacio es* coherente *si es sobrio y además la familia de los abiertos compactos es cerrada para intersecciones finitas y constituye una base de la topología.*

Nota 2.1. Aquí se considerará que todo espacio coherente es compacto. Pues aunque no está explicitamente en la definición 2.8, es claro que la intersección de la familia vacía es el espacio completo.

Lema 2.7. *Un espacio Hausdorff compacto es cero-dimensional si y solo si es coherente.*

Demostración. En un espacio Hausdorff compacto, un subconjunto es compacto si y solo si es cerrado. Luego la intersección finita de abiertos compactos es abierto compacto porque eso sucede con los abiertos cerrados. Así, el espacio es cero-dimensional si y solo si los abiertos compactos constituyen una base, y todo espacio Hausdorff es sobrio. □

2.1.5. Espacios de Stone

Teorema 2.1. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *X es compacto, Hausdorff y totalmente disconexo.*

ii) *X es compacto, normal y totalmente disconexo.*

iii) *X es compacto y totalmente separado.*

iv) *X es compacto, T_0 y cero-dimensional.*

v) *X es Hausdorff y coherente.*

Demostración.
i) implica *ii*). Por el lema 2.6, como X es Hausdorff compacto también es normal (no se requiere que sea totalmente disconexo).
ii) implica *iii*). Este es el contenido del lema 2.5.
iii) implica *i*). Como X es totalmente separado, por el lema 2.1 X es Hausdorff y por el lema 2.2 es totalmente disconexo (no se requiere la compacidad).
iii) implica *iv*). Como X es totalmente separado, de nuevo por el lema 2.1 X es Hausdorff y, por lo tanto, T_0 (no se requiere la compacidad). Como X es compacto y totalmente separado, por el lema 2.4 es cero-dimensional.
iv) implica *iii*). Como X es T_0 y cero-dimensional, por el lema 2.3 es totalmente separado (de nuevo, no se requiere la compacidad).
iv) implica *v*). Ya se probó que *iv*) es equivalente a *i*) luego, en particular, X es Hausdorff y, por lo tanto, es sobrio.
En un espacio Hausdorff compacto un subconjunto es compacto si y solo si es cerrado [12, teorema 17.5]. Luego en X los abiertos compactos son precisamente los abiertos cerrados. Los abiertos cerrados son cerrados para intersecciones finitas y como X es cero-dimensional los abiertos cerrados constituyen una base. De esta manera, X es coherente.
v) implica *iv*). Como X es coherente, en particular es compacto; como es Hausdorff, es T_0. Por fin, siendo X un espacio Hausdorff compacto, por el mismo argumento anterior el hecho de que los abiertos compactos constituyen una base implica que los abiertos cerrados son una base, es decir, X es cero-dimensional. □

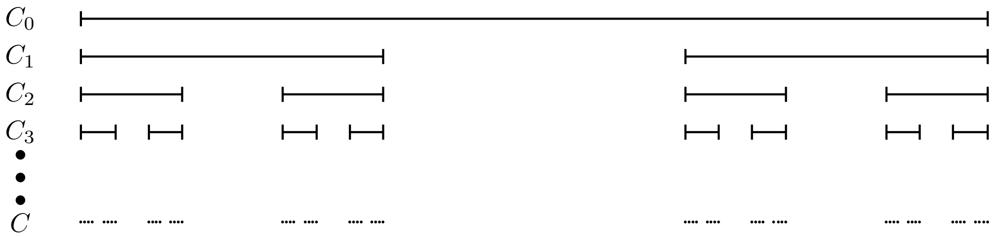
Definición 2.9. [8, página 70] *Un espacio de* Stone *es un espacio topológico que satisface las condiciones equivalentes del teorema 2.1.*

Ejemplo 2.1. Todo espacio finito discreto es un espacio de Stone. Porque todo espacio finito es compacto, y todo espacio discreto es Hausdorff y totalmente disconexo. Al revés, todo espacio de Stone finito es discreto. En efecto, un espacio de Stone es T_1 luego los conjuntos unitarios son cerrados. Al ser finito, todo subconjunto es unión finita de cerrados (los unitarios que contiene) y, por lo tanto, es cerrado. En consecuencia el espacio es discreto. En resumen, un espacio finito es un espacio de Stone si y solo si es discreto.

Ejemplo 2.2. El conjunto de Cantor es un espacio de Stone.
El conjunto de Cantor se puede obtener de la siguiente manera. Sea $C_0 = [0,1]$ el intervalo unidad en $\mathbb{R}$ con la topología usual. El conjunto $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ se obtiene del anterior eliminando el intervalo abierto $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ que corresponde al tercio central. Luego, el conjunto $C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ se obtiene del anterior eliminando los dos tercios centrales $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ y $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$.
De esta manera se construye una sucesión de conjuntos cerrados, cada uno contenido en el anterior:

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots \supseteq C_n \supseteq \cdots$$

El conjunto de Cantor es $C = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} C_n$.



Como espacio topológico, el conjunto de Cantor C es compacto porque es un subconjunto cerrado y acotado de los reales: en efecto, es cerrado porque es intersección de cerrados y es acotado porque $C \subseteq [0,1]$. Al ser un subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología usual, C es Hausdorff. Además las componentes conexas de C son los puntos, es decir, C es totalmente disconexo. En efecto, los segmentos que conforman el cerrado C_n tienen todos longitud $\frac{1}{3^n}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$, luego C no contiene intervalos. Así, dos puntos distintos de C siempre se pueden separar por puntos que no pertenecen a C.

El hecho siguiente se volverá significativo en la próxima sección.

Afirmación 2.11. *En un espacio Hausdorff compacto, sean $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de compactos y $\{B_j\}_{j\in J}$ una familia de abiertos tales que*

$$\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{j\in J} B_j.$$

Entonces existen finitos índices $i_1, i_2, \ldots, i_k \in I$, $j_1, j_2, \ldots, j_l \in J$ tales que

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \subseteq B_{j_1} \cup B_{j_2} \cup \cdots \cup B_{j_l}.$$

Demostración. Por hipótesis se tiene $\big(\bigcup\limits_{j\in J} B_j\big)^c \subseteq \big(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\big)^c = \bigcup\limits_{i\in I} {A_i}^c$. Como los B_j son abiertos, $\bigcup\limits_{j\in J} B_j$ es abierto luego $\big(\bigcup\limits_{j\in J} B_j\big)^c$ es cerrado, y como el espacio es compacto este subconjunto cerrado es compacto. Por otro lado, como los A_i son compactos y el espacio es Hausdorff, estos subconjuntos son cerrados y sus complementos ${A_i}^c$ son abiertos. De esta manera, $\{{A_i}^c\}_{i\in I}$ es un cubrimiento abierto del compacto $\big(\bigcup_{j\in J} B_j\big)^c$ y por lo tanto existen finitos índices $i_1, i_2, \dots, i_k$ tales que

$$\Big(\bigcup_{j\in J} B_j\Big)^c \subseteq {A_{i_1}}^c \cup {A_{i_2}}^c \cup \cdots \cup {A_{i_k}}^c.$$

Ahora ${A_{i_1}}^c \cup \cdots \cup {A_{i_k}}^c = (A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})^c$ luego la inclusión anterior equivale a $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \subseteq \bigcup_{j\in J} B_j$. Ya se observó que los A_i son cerrados luego la intersección finita $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ es un cerrado y, como el espacio es compacto, este subconjunto es compacto. De nuevo, la familia $\{B_j\}_{j\in J}$ es un cubrimiento abierto del compacto $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ y por lo tanto existen finitos índices $j_1, j_2, \dots, j_l$ tales que

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \subseteq B_{j_1} \cup B_{j_2} \cup \cdots \cup B_{j_l}.$$

□

2.1.6. Espacios de pre-Stone

Esta definición se inspira en lo que en el texto [2] también se denomina espacio de Stone pero que, como se mostrará, es una noción diferente a la anterior.

Definición 2.10. [2, página 75] *Un espacio de* pre-Stone *es un espacio topológico X que cumple:*

i) X es un espacio T_0.

ii) La familia de los abiertos compactos es cerrada para intersecciones finitas.

iii) Los abiertos compactos constituyen una base para la topología de X.

iv) Si $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{j\in J}$ son familias de abiertos compactos no vacíos tales que

$$\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{j\in J} B_j,$$

entonces existen finitos índices $i_1, \dots, i_k \in I$, $j_1, \dots, j_l \in J$ tales que

$$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \subseteq B_{j_1} \cup B_{j_2} \cup \cdots \cup B_{j_l}.$$

Nota 2.2. Al igual que en la definición de espacio coherente (definición 2.8) se considerará que todo espacio de pre-Stone es compacto porque la intersección de la familia vacía es todo el espacio. Por la misma razón, en el numeral (iv) el caso $I = \varnothing$ corresponde a la compacidad del espacio mientras el caso $J = \varnothing$ corresponde a una propiedad dual (a saber: toda familia de abiertos compactos no vacíos con la propiedad de intersecciones finitas tiene también intersección no vacía), ya que la unión de la familia vacía es el conjunto vacío.

Ejemplo 2.3. Un espacio topológico finito es un espacio de pre-Stone si y solo si es T_0. En efecto, en un espacio finito todos los abiertos son compactos luego las condiciones siguientes siempre se cumplen:

ii) Si A, B son abiertos compactos, $A \cap B$ es abierto finito y, por lo tanto, compacto. El espacio completo es compacto por ser finito.

iii) Los abiertos compactos son precisamente los abiertos, que constituyen una base.

iv) Si $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup\limits_{j \in J} B_j$, como hay solo finitos abiertos estas familias son ambas finitas y así $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \subseteq B_{j_1} \cup B_{j_2} \cup \cdots \cup B_{j_l}$.

Afirmación 2.12. *Todo espacio de Stone es un espacio de pre-Stone.*

Demostración.

i) Como un espacio de Stone es Hausdorff, en particular es T_0.

ii) Porque todo espacio de Stone es coherente.

iii) Por la misma razón anterior.

iv) Si $\{A_i\}_{i \in I \neq \varnothing}$, $\{B_j\}_{j \in J}$ son familias de abiertos compactos no vacíos con $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup\limits_{j \in J} B_j$, en particular se cumplen las condiciones de la afirmación 2.11. Como todo espacio de Stone es Hausdorff compacto, por la afirmación mencionada existen finitos subconjuntos tales que $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \subseteq B_{j_1} \cup B_{j_2} \cup \cdots \cup B_{j_l}$. □

El recíproco de este resultado no es cierto.

Ejemplo 2.4. Todo espacio finito que es T_0 pero no Hausdorff, es un espacio de pre-Stone que no es de Stone (ejemplo 2.1 y ejemplo 2.2). Como ejemplo particular se puede considerar el espacio de Sierpinski, $X = \{a, b\}$ con topología $\big\{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\big\}$.

Afirmación 2.13. *Un espacio de pre-Stone es un espacio de Stone si y solo si es Hausdorff.*

Demostración. Sea X un espacio de pre-Stone. Si X es un espacio de Stone, entonces es Hausdorff por definición. En la otra dirección, si X es Hausdorff entonces es sobrio (afirmación 2.2) y las condiciones (*ii*) y (*iii*) de la definición de pre-Stone garantizan que X es un espacio coherente. Al ser Hausdorff coherente, es un espacio de Stone. □

2.2. Topología para conjuntos ordenados

En la sección 1.2 se obtuvo una representación de cualquier conjunto ordenado P en el conjunto ordenado $\mathcal{P}(P)$ de sus subconjuntos. En realidad el recorrido de esta representación, que como conjunto ordenado es isomorfo a P, es la base de una topología sobre el mismo conjunto P.

Afirmación 2.14. *Sea P un conjunto ordenado. La familia*

$$\{x\downarrow \mid x \in P\}$$

es la base de abiertos de una topología T_0 sobre P.

Demostración. En primer lugar, es claro que $\bigcup_{x\in P} x\downarrow = P$. Pues $x\downarrow \subseteq P$ luego $\bigcup_{x\in P} x\downarrow \subseteq P$; en el otro sentido, si $y \in P$ como $y \in y\downarrow$ se tiene $y \in \bigcup_{x\in P} x\downarrow$.
En segundo lugar, sea $z \in x\downarrow \cap y\downarrow$ entonces $z \leq x$ y $z \leq y$. Si $a \in z\downarrow$, de $a \leq z$ se sigue $a \leq x$ y $a \leq y$, es decir, $a \in x\downarrow \cap y\downarrow$. Así $z \in z\downarrow \subseteq x\downarrow \cap y\downarrow$.
Por fin, si $x \neq y$ entonces $x \not\leq y$ o bien $y \not\leq x$. En el primer caso, $y\downarrow$ es un abierto con $y \in y\downarrow$, $x \notin y\downarrow$; en el otro caso $x \in x\downarrow$ mientras $y \notin x\downarrow$. Así que esta topología es T_0. □

Corolario 2.4. *Todo conjunto ordenado es isomorfo a la base de abiertos de alguna topología, que es T_0 y además se define sobre el mismo conjunto.*

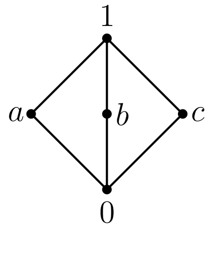
Nota 2.3. En general, la topología generada incluye más abiertos que los de la base porque, por ejemplo, en muchos casos $x\downarrow \cup y\downarrow \neq z\downarrow$ para cada z pero $x\downarrow \cup y\downarrow$ sí es abierto.

Ejemplo 2.5. En un conjunto ordenado total la topología generada se conoce con el nombre de colas a izquierda. En el caso particular de los números reales, $x\downarrow = (-\infty, x]$ y la topología generada también incluye los intervalos de la forma $(-\infty, a)$ porque $(-\infty, a) = \bigcup_{x<a} (-\infty, x]$.

En el caso de un semirretículo inferior S, el resultado de la afirmación 2.14 es el mismo. Solo la prueba es más sencilla, pues se tiene:

- $S = 1\downarrow$ es uno de los abiertos básicos.
- $x\downarrow \cap y\downarrow = (x \wedge y)\downarrow$ (afirmación 1.10).

Ejemplo 2.6. En el semirretículo S de la nota 1.6 se tiene:



Ahora $0\downarrow = \{0\}$, $a\downarrow = \{0, a\}$, $b\downarrow = \{0, b\}$, $c\downarrow = \{0, c\}$, $1\downarrow = S$. La topología generada es

$$\{\varnothing, \{0\}, \{0, a\}, \{0, b\}, \{0, c\}, \{0, a, b\}, \{0, a, c\}, \{0, b, c\}, S\}$$

que es la topología de los superconjuntos del subconjunto $\{0\}$.

2.3. Topología para retículos distributivos

Para la representación de los retículos distributivos, en la sección 1.4.4 se sustituyeron las "colas" $x\downarrow$ por ciertos conjuntos de homomorfismos en el retículo 2. Estos conjuntos también determinan una topología, pero para mayor claridad en su definición aquí se sustituyen los homomorfismos por sus núcleos, que son los ideales primos del retículo.

Sea A un retículo distributivo, entonces $\mathbb{P}$ denota el conjunto de todos sus ideales primos.

$$\mathbb{P} = \big\{ I \subseteq A \,\big|\, I \text{ es ideal primo } \big\}.$$

Dado $a \in A$, $P_a \subseteq \mathbb{P}$ es el conjunto de los ideales primos que no contienen al elemento a.

$$P_a = \big\{ I \text{ ideal primo} \,\big|\, a \notin I \big\}.$$

Nota 2.4. Teniendo en cuenta la nota 1.9, el conjunto $\mathbb{P}$ corresponde al conjunto X de los homomorfismos $A \longrightarrow 2$ y cada conjunto P_a corresponde al conjunto $F(a)$ definido allí. En consecuencia, las propiedades algebraicas probadas se traducen de la siguiente manera.

- Si $a \leq b$ entonces $P_a \subseteq P_b$.
- $P_{a\wedge b} = P_a \cap P_b$.
- $P_{a\vee b} = P_a \cup P_b$.
- $P_0 = \varnothing$.
- $P_1 = \mathbb{P}$.

Afirmación 2.15. *Sea A un retículo distributivo. La familia $\big\{P_a \,\big|\, a \in A\big\}$ es la base de abiertos de una topología T_0 sobre el conjunto $\mathbb{P}$ de los ideales primos.*

Demostración. En efecto, $\bigcup\limits_{a\in A} P_a = \mathbb{P}$ porque, de hecho, $P_1 = \mathbb{P}$. Por otro lado, dados P_a, P_b se tiene $P_a \cap P_b = P_{a\wedge b}$ luego para cada $I \in P_a \cap P_b$ existe $P_{a\wedge b}$ con $I \in P_{a\wedge b} \subseteq P_a \cap P_b$. Dados ideales primos distintos $P \neq Q$, existe algún elemento $a \in Q$ con $a \notin P$, o al revés. Entonces $P \in P_a$, $Q \notin P_a$ siendo P_a un abierto. Así que esta topología sobre $\mathbb{P}$ es T_0. □

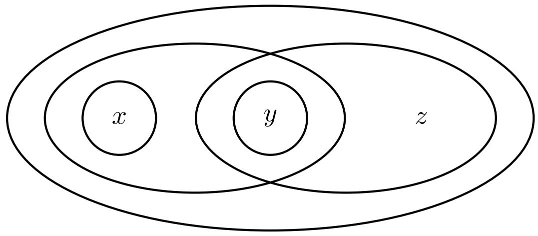
Ejemplo 2.7. En el retículo estudiado en los ejemplos 1.32 y 1.34, con esta notación se tiene

$$\mathbb{P} = \big\{a\downarrow, c\downarrow, d\downarrow\big\}$$

y además

$$\begin{aligned} P_0 &= \varnothing & \qquad P_a &= \{d\downarrow\} \\ P_b &= \{a\downarrow\} & \qquad P_c &= \{a\downarrow,\ d\downarrow\} \\ P_d &= \{a\downarrow,\ c\downarrow\} & \qquad P_1 &= \mathbb{P}. \end{aligned}$$

Luego, definiendo $x = d\downarrow$, $y = a\downarrow$, $z = c\downarrow$ el espacio topológico que resulta en este caso se puede representar así: $X = \{x, y, z\}$, $\tau = \big\{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z\}, X\big\}$.



Se nota que este es un espacio T_0 que no es Hausdorff.

Afirmación 2.16. *Los abiertos compactos del espacio* $\mathbb{P}$ *son precisamente los* P_a.

Demostración. Primero se prueba que cada abierto básico P_a es compacto. Puesto que la compacidad se puede caracterizar mediante cubrimientos con abiertos básicos, considérese que $P_a \subseteq \bigcup_{y\in Y} P_y$ para algún subconjunto Y. En el retículo distributivo A, sea I el ideal generado por Y y supóngase que $a \notin I$. Entonces I es disyunto del filtro $F = a\uparrow$ porque si $b \in I \cap a\uparrow$ entonces de $a \le b$ y $b \in I$ se sigue $a \in I$, lo cual es absurdo. En consecuencia por el teorema 1.7 existe un ideal primo P con $I \subseteq P$ y $F \cap P = \varnothing$. La segunda condición implica que $a \notin P$, luego $P \in P_a$; la primera condición implica que $Y \subseteq P$, luego $P \notin P_y$ para cada $y \in Y$, es decir, $P \notin \bigcup_{y\in Y} P_y$. Pero esto contradice la hipótesis $P_a \subseteq \bigcup_{y\in Y} P_y$, así que $a \in I$.
Por la caracterización del ideal generado dada en la afirmación 1.15 existen finitos elementos $y_1, y_2, \ldots, y_m \in Y$ tales que $a \le y_1 \vee y_2 \vee \cdots \vee y_m$. En consecuencia $P_a \subseteq P_{y_1\vee y_2\vee\cdots\vee y_m}$ y como $P_{y_1\vee y_2\vee\cdots\vee y_m} = P_{y_1} \cup P_{y_2} \cup \cdots \cup P_{y_m}$ resulta $P_a \subseteq P_{y_1} \cup P_{y_2} \cup \cdots \cup P_{y_m}$. Luego P_a es un abierto compacto.
Ahora sea U un abierto compacto del espacio $\mathbb{P}$. Para cada $J \in U$ existe un abierto básico $P_{a_J} \in \mathbb{P}$ tal que $J \in P_{a_J}$, $P_{a_J} \subseteq U$. Ahora se nota que $U = \bigcup_{J\in U} P_{a_J}$ y como los P_{a_J} son abiertos, este es un cubrimiento abierto de U. Siendo compacto, se tiene $U = P_{a_1} \cup P_{a_2} \cup \cdots \cup P_{a_n}$ para ciertos finitos a_i. Ahora $P_{a_1} \cup P_{a_2} \cup \cdots \cup P_{a_n} = P_{a_1\vee a_2\vee\cdots\vee a_n} = P_a$ con $a = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_n$. Así $U = P_a$ para cierto elemento a. □

Teorema 2.2. $\mathbb{P}$ *es un espacio de pre-Stone.*

Demostración.

i) En la prueba de la afirmación 2.15 se demostró que el espacio $\mathbb{P}$ es T_0.

ii) Si U, V son abiertos compactos entonces $U = P_a$, $V = P_b$ para ciertos a, b de donde $U \cap V = P_a \cap P_b = P_{a\wedge b}$ que es abierto compacto. Además el conjunto de todos los ideales primos es $\mathbb{P} = P_1$ que es abierto compacto.

iii) Los abiertos compactos son los conjuntos P_a, que se escogieron precisamente como base de la topología.

iv) Sean $\{P_x\}_{x\in X}$, $\{P_y\}_{y\in Y}$ familias de abiertos compactos no vacíos tales que

$$\bigcap_{x\in X} P_x \subseteq \bigcup_{y\in Y} P_y.$$

En el retículo distributivo A, sea I el ideal generado por Y y sea F el filtro generado por X.
Si $I \cap F = \varnothing$, por el teorema 1.7 existe un ideal primo P tal que $I \subseteq P$ y $P \cap F = \varnothing$. La condición $P \cap F = \varnothing$ implica que para cada $x \in X$ se tiene $x \notin P$ ya que $X \subseteq F$, así que $P \in P_x$ y en consecuencia $P \in \bigcap_{x \in X} P_x$. Por otro lado la condición $I \subseteq P$ implica que para cada $y \in Y$ se tiene $y \in P$ ya que $Y \subseteq I$, así que $P \notin P_y$ y en consecuencia $P \notin \bigcup_{y \in Y} P_y$. Pero estas dos conclusiones ($P \in \bigcap P_x, P \notin \bigcup P_y$) contradice la hipótesis $\bigcap P_x \subseteq \bigcup P_y$.
Por lo tanto $I \cap F \neq \varnothing$, sea $c \in I \cap F$. Como $c \in I$, por la afirmación 1.15 existen $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ tales que $c \leq y_1 \vee y_2 \vee \cdots \vee y_n$; como $c \in F$, por la afirmación 1.26 existen $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ tales que $c \geq x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_m$. En consecuencia $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_m \leq y_1 \vee y_2 \vee \cdots \vee y_n$ de donde $P_{x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_m} \subseteq P_{y_1 \vee y_2 \vee \cdots \vee y_n}$, es decir, $P_{x_1} \cap \cdots \cap P_{x_m} \subseteq P_{y_1} \cup \cdots \cup P_{y_n}$. □

De esta manera, a cada retículo distributivo se asocia un espacio de pre-Stone. Ahora se emprende el camino de regreso.

Afirmación 2.17. *Dado cualquier espacio de pre-Stone, los abiertos compactos constituyen un retículo distributivo.*

Demostración. Sea X un espacio de pre-Stone, entonces los abiertos compactos de X constituyen un subretículo del retículo $\mathcal{P}(X)$. En efecto:

- $\varnothing$, X son abiertos compactos.
- Si A, B son abiertos compactos entonces $A \cup B$ es abierto compacto pues en cualquier espacio la unión de finitos subconjuntos compactos es compacta.
- Si A, B son abiertos compactos entonces $A \cap B$ es abierto compacto por la condición (ii) de la definición 2.10.

Y todo subretículo de un retículo distributivo como $\mathcal{P}(X)$ también es distributivo. □

Dado un espacio de pre-Stone X, sea C el retículo distributivo de sus abiertos compactos (afirmación 2.17). Para cada elemento $x \in X$ se define un conjunto $h(x) \subseteq C$ como sigue.

$$h(x) = \{A \textit{ abierto compacto} \mid x \notin A\}$$

Afirmación 2.18. *Para cada $x \in X$, el conjunto $h(x)$ es un ideal primo del retículo distributivo C.*

Demostración. Como $x \notin \varnothing$ y $\varnothing$ es un abierto compacto, $\varnothing \in h(x)$. Dados $A, B \in h(x)$, puesto que en cualquier espacio la unión finita de subconjuntos compactos es compacta, se tiene que $A \cup B$ es un abierto compacto. Además de $x \notin A$, $x \notin B$ se sigue $x \notin A \cup B$ y así $A \cup B \in h(x)$. Por fin, si $A \in h(x)$ y B es un abierto compacto tal que $B \subseteq A$, como

$x \notin A$ también $x \notin B$ luego $B \in h(x)$. De esta manera, $h(x)$ es un ideal.
Como $x \in X$ se tiene $X \notin h(x)$. Por otro lado, sean A, B abiertos compactos tales que $A \cap B \in h(x)$. Entonces $x \notin A \cap B$ de donde $x \notin A$ o $x \notin B$, es decir, $A \in h(x)$ o $B \in h(x)$. Y así $h(x)$ es un ideal primo. □

De esta manera la función h se puede considerar de X en el espacio topológico $\mathbb{L}$ de los ideales primos del retículo distributivo C.

Afirmación 2.19. *La función h es inyectiva.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ puntos distintos. Por la condición (i) de la definición 2.10, X es un espacio T_0 y existe un abierto U con $x \notin U$, $y \in U$ (o al revés). Por la condición (iii) de la definición de espacio de pre-Stone, los abiertos compactos constituyen una base para la topología y existe un abierto compacto A con $y \in A$, $A \subseteq U$. Como $x \notin U$ también $x \notin A$ y así $A \in h(x)$, $A \notin h(y)$ de manera que $h(x) \neq h(y)$. Si existe un abierto V que contiene a x pero no a y, se procede de manera simétrica. □

Afirmación 2.20. *La función h es sobreyectiva.*

Demostración. Sea L un ideal primo de C y supóngase que se tiene la siguiente inclusión.

$$\bigcap \left\{ A \text{ abierto compacto} \,\middle|\, A \notin L \right\} \subseteq \bigcup \left\{ B \text{ abierto compacto no vacío} \,\middle|\, B \in L \right\}.$$

Como L es ideal, $\varnothing \in L$ luego todos los A de la primera familia son no vacíos; respecto a los B, por elección son no vacíos.
Por la condición (iv) de la definición 2.10 existen finitos índices $1, 2, \ldots, k$ y $1, 2, \ldots, l$ tales que

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \subseteq B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_l.$$

Como $B_i \in L$ para cada i y L es un ideal, $B_1 \cup \cdots \cup B_l \in L$ y por lo tanto $A_1 \cap \cdots \cap A_k \in L$. Más aún, siendo un ideal primo, esto implica $A_j \in L$ para algún j (definición 1.16). Pero esto contradice la elección de los abiertos compactos A.
Como la inclusión supuesta al principio no es cierta, existe algún elemento $x \in X$ tal que $x \in \bigcap \left\{ A \text{ abierto compacto} \,\middle|\, A \notin L \right\}$ y $x \notin \bigcup \left\{ B \text{ abierto compacto no vacío} \,\middle|\, B \in L \right\}$. De esta manera:

- Si A es abierto compacto y $A \notin L$ entonces $x \in A$;
- Si B es abierto compacto y $B \in L$ entonces $x \notin B$.

En consecuencia, para cualquier abierto compacto D de X se tiene:

$$x \notin D \quad \text{si y solo si} \quad D \in L.$$

Es decir, $D \in h(x)$ si y solo si $D \in L$. De manera que $L = h(x)$ y la función h es sobre. □

Afirmación 2.21. *Sea A un abierto compacto del espacio de pre-Stone X, y L_A el correspondiente abierto básico en el espacio $\mathbb{L}$ de los ideales primos del retículo C. En estas condiciones*

$$h^{-1}(L_A) = A \text{ y, de manera equivalente, } h(A) = L_A.$$

Demostración. Para un punto $y \in X$ se tiene $y \in h^{-1}(L_A)$ si y solo si $h(y) \in L_A$, si y solo si $A \notin h(y)$, si y solo si $y \in A$. Así que $h^{-1}(L_A) = A$. Como la función h es biyectiva, esto equivale a $L_A = h(A)$. □

Teorema 2.3. *La función h es un homeomorfismo de X en $\mathbb{L}$.*

Demostración. Para la continuidad de h se observa que para cada abierto básico L_A se tiene $h^{-1}(L_A) = A$, que es abierto en X. Para la continuidad de h^{-1} se nota que por la condición (*iii*) de la definición 2.10 los abiertos compactos constituyen una base, y para cada abierto básico A se tiene $(h^{-1})^{-1}(A) = h(A) = L_A$, que es abierto en $\mathbb{L}$. □

Teorema 2.4. *Existe una correspondencia biyectiva entre los retículos distributivos y los espacios topológicos de pre-Stone.*

Demostración. Primero, sea A un retículo distributivo, $\mathbb{P}$ el conjunto de los ideales primos de A con la topología inducida por los P_a. El retículo de abiertos compactos de $\mathbb{P}$ es, por la afirmación 2.16, el conjunto $\{P_a \mid a \in A\}$. En el teorema 1.8 se probó que A y $\{P_a \mid a \in A\}$ (que allí se expresó como $F(A) = \{F(a) \mid a \in A\}$) son retículos isomorfos.
Luego, sea X un espacio de pre-Stone, C el retículo distributivo de sus abiertos compactos y sea $\mathbb{L}$ el conjunto de los ideales primos del retículo C con la topología inducida por los L_A. En el teorema 2.3 se probó que X y $\mathbb{L}$ son espacios topológicos homeomorfos. □

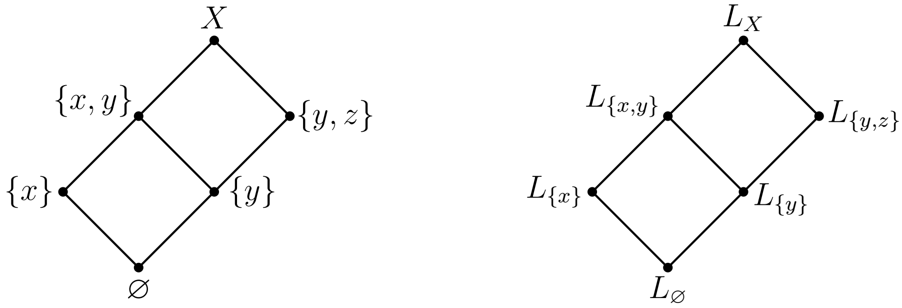
Ejemplo 2.8. Este resultado se puede ilustrar con el espacio topológico obtenido en el ejemplo 2.7, el conjunto $X = \{x, y, z\}$ con la topología $\tau = \big\{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{y, z\}, X\big\}$. Puesto que el espacio es finito, todos los abiertos son compactos y C es el mismo conjunto τ ordenado por la inclusión.
Como en el ejemplo 1.32, el conjunto de ideales primos de este retículo distributivo C es $\mathbb{L} = \big\{\{x\}\downarrow, \{x, y\}\downarrow, \{y, z\}\downarrow\big\}$. Ahora se tiene

$$\begin{aligned}
h_x &= h(x) = \big\{\varnothing, \{y\}, \{y, z\}\big\} = \{y, z\}\downarrow \\
h_y &= h(y) = \big\{\varnothing, \{x\}\big\} = \{x\}\downarrow \\
h_z &= h(z) = \big\{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\big\} = \{x, y\}\downarrow
\end{aligned}$$

de manera que $\mathbb{L} = \{h_x, h_y, h_z\}$ y además

$$\begin{aligned}
&L_\varnothing = \varnothing && L_{\{x\}} = \{h_x\} \\
&L_{\{y\}} = \{h_y\} && L_{\{x,y\}} = \{h_x, h_y\} \\
&L_{\{y,z\}} = \{h_y, h_z\} && L_X = \mathbb{L}
\end{aligned}$$

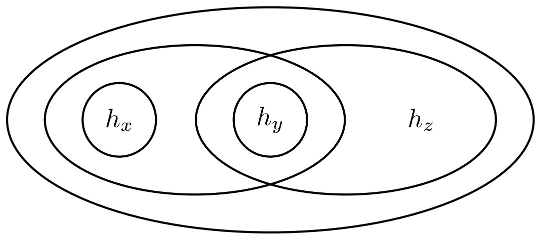
El diagrama siguiente muestra los retículos correspondientes.



Los conjuntos L_A constituyen la base de una topología sobre $\mathbb{L}$, topología que en este caso es

$$\tau_{\mathbb{L}} = \big\{\varnothing, \{h_x\}, \{h_y\}, \{h_x, h_y\}, \{h_y, h_z\}, \mathbb{L}\big\}.$$

y permite representar el espacio topológico como sigue.



Comparando con el diagrama del ejemplo 2.7 es claro el homeomorfismo $h : X \longrightarrow \mathbb{L} : t \mapsto h_t$.

2.4. Topología para álgebras booleanas

En esta sección se especializan los resultados anteriores al caso de las álgebras booleanas. Sin embargo, una parte de esta correspondencia hace parte de un hecho mucho más general.

Teorema 2.5. *En cualquier espacio topológico, los abiertos cerrados constituyen un álgebra booleana.*

Demostración. Sea X cualquier espacio topológico. $\varnothing$ y X son abiertos cerrados. Si A, B son abiertos cerrados entonces $A \cap B$ y $A \cup B$ son abiertos cerrados. Si A es abierto cerrado entonces su complemento A^c es cerrado abierto, es decir, abierto cerrado.
De esta manera la familia de abiertos cerrados es una subálgebra booleana de $\mathcal{P}(X)$, pues es cerrada para todas las operaciones. □

Ejemplo 2.9.

- En cualquier conjunto X con la topología discreta todos los subconjuntos son abiertos y también cerrados luego el álgebra de abiertos cerrados es $\mathcal{P}(X)$.

- En cualquier conjunto X con la topología grosera los únicos abiertos son $\varnothing$ y X, que también son cerrados. Luego en este caso el álgebra de abiertos cerrados es $\{\varnothing, X\}$.
- En $\mathbb{R}$ con la topología usual todo abierto es unión de intervalos abiertos disyuntos [12, ejemplo 2.7, página 18], luego si A es un abierto no vacío diferente de $\mathbb{R}$, su complemento A^c es unión de intervalos cerrados o está constituido por puntos separados por intervalos. Tal conjunto no es abierto en la topología usual. Luego en este espacio los únicos abiertos cerrados son $\varnothing$ y $\mathbb{R}$.
- Los números reales $\mathbb{R}$ con la topología generada por los intervalos semiabiertos de la forma $[a, b)$ se denomina "recta de Sorgenfrey". En este espacio cada abierto básico $[a, b)$ es abierto cerrado pues su complemento $[a, b)^c = (-\infty, a) \cup [b, \infty)$ es abierto. Luego en este caso el álgebra booleana de abiertos cerrados es infinita.

Afirmación 2.22. *Si X es un espacio de Stone entonces el retículo distributivo de sus abiertos compactos es un álgebra booleana.*

Demostración. Como el espacio X es Hausdorff compacto, los subconjuntos compactos son cerrados y los cerrados son compactos. En consecuencia, los abiertos compactos de X son los únicos abiertos cerrados de X. Y así, el retículo de los abiertos compactos es el retículo de los abiertos cerrados, que por el teorema 2.5 es un álgebra booleana. $\square$

Afirmación 2.23. *Si B es un álgebra booleana entonces el espacio topológico de sus ideales primos es un espacio de Stone.*

Demostración. Sean P, Q ideales primos distintos, sin pérdida de generalidad sea a tal que $a \notin P$, $a \in Q$. Por el teorema 1.9 se tiene $a' \notin Q$. Ahora $P \in P_a$, $Q \in P_{a'}$ y además $P_a \cap P_{a'} = P_{a \wedge a'} = P_0 = \varnothing$ (nota 2.4). Como P_a, $P_{a'}$ son abiertos, existen vecindades disyuntas de P y Q en el espacio de ideales primos.
Como el espacio es Hausdorff, por la afirmación 2.13 es un espacio de Stone. $\square$

Teorema 2.6. *Existe una correspondencia biyectiva entre las álgebras booleanas y los espacios topológicos de Stone.*

Demostración. Si B es un álgebra booleana, en particular es un retículo distributivo. Por el teorema 2.4 a B le corresponde un único espacio de pre-Stone y por la afirmación 2.23 en realidad es un espacio de Stone.
Al revés, si X es un espacio de Stone entonces en particular es un espacio de pre-Stone. Por el teorema 2.4 a X le corresponde un único retículo distributivo y por la afirmación 2.22 en realidad es un álgebra booleana.
Luego la correspondencia biyectiva del teorema 2.4 se restringe a una correspondencia biyectiva entre las álgebras booleanas y los espacios de Stone. $\square$

Capítulo 3

Representación categórica

Las correspondencias estudiadas en este trabajo se pueden expresar en el lenguaje de la teoría de categorías, dando lugar a funtores y transformaciones naturales que son las nociones fundamentales de esta teoría.

3.1. Preliminares

Una categoría es un universo de flechas o morfismos que se pueden componer. Esta noción se define de manera técnica como sigue.

Definición 3.1. *Una* categoría $\mathscr{C}$ *consiste en:*

1. *Una clase de* objetos*, denotados* $A, B, C, \ldots$
2. *Una clase de* morfismos*, denotados* $f, g, h, \ldots$ *Cada morfismo va de cierto objeto a otro, lo cual se denota* $f : A \longrightarrow B$ *o bien* $A \xrightarrow{f} B$*.*
3. *Una operación parcial entre los morfismos llamada* composición *que a cada par de morfismos* $A \xrightarrow{f} B$*,* $B \xrightarrow{g} C$ *asigna el morfismo* $A \xrightarrow{gf} C$*.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "gf"] & \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Esta composición cumple dos axiomas:

a) Asociativa: $h(gf) = (hg)f$ *para morfismos adecuados.*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "h(gf)=(hg)f"] \arrow[d, "f"'] \arrow[drr, "gf"] & & D \\
B \arrow[rr, "g"'] \arrow[urr, "hg"'] & & C \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

b) Elemento neutro: Para cada objeto A existe un morfismo idéntico $i_A : A \longrightarrow A$ *tal que $fi_A = f$ y también $i_A g = g$ para morfismos adecuados.*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g"'] & A \arrow[d, "i_A"] \arrow[dr, "f"] & \\
& A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

La "igualdad" de objetos en una categoría se expresa mediante la composición y el morfismo idéntico, como sigue.

Definición 3.2. *Un* isomorfismo *es un morfismo $f : A \longrightarrow B$ para el cual existe un morfismo $g : B \longrightarrow A$ tal que $gf = i_A$ y $fg = i_B$.*

Ejemplo 3.1.

- La categoría de los *conjuntos*, denotada **Con**. Los objetos son todos los conjuntos, los morfismos todas las funciones entre ellos, la composición es la composición usual de funciones y los isomorfismos son las funciones biyectivas.

- La categoría de los *grupos*, denotada **Grp**. Los objetos son todos los grupos, los morfismos todos los homomorfismos de grupos, la composición es la usual y los isomorfismos son los isomorfismos de grupos.

- La categoría de los *anillos conmutativos*, denotada **Ani**. Los objetos son todos los anillos conmutativos con unidad, los morfismos todos los homomorfismos de anillos que respetan la unidad, la composición es la usual y los isomorfismos son los isomorfismos de anillos.

- La categoría de los *espacios vectoriales* sobre $\mathbb{R}$, denotada $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$. Los objetos son todos los espacios vectoriales reales, los morfismos todas las transformaciones lineales y la composición es la usual.

- La categoría de los *espacios topológicos*, denotada **Top**. Los objetos son todos los espacios topológicos, los morfismos todas las funciones continuas, la composición es la usual y los isomorfismos son los homeomorfismos.

- La categoría de los *conjuntos ordenados*, denotada **Ord**. Los objetos son todos los conjuntos ordenados, los morfismos son todas las funciones que respetan el orden y la composición es la usual.

- La categoría de los *semirretículos inferiores*, denotada **Sri**. Los objetos son todos los semirretículos inferiores, los morfismos son los homomorfismos de semirretículos (definición 1.4) y la composición es la usual.

- La categoría de los *retículos*, denotada **Ret**. Los objetos son todos los retículos, los morfismos son los homomorfismos de retículos (definición 1.8), la composición es la usual y los isomorfismos son los homomorfismos biyectivos.

- La categoría de los *retículos distributivos*, denotada **Red**. Los objetos son todos los retículos distributivos, los morfismos son los homomorfismos de retículos y la composición es la usual.

- La categoría de los *álgebras booleanas*, denotada **Boo**. Los objetos son todas las álgebras booleanas, los morfismos son los homomorfismos de álgebras booleanas (definición 1.11) y la composición es la usual.

- Un conjunto ordenado $(X, \leq)$ es una categoría. Los objetos son los elementos de X; existe un único morfismo $a \longrightarrow b$ si y solo si $a \leq b$; la composición se tiene porque la relación es transitiva.

En esta teoría también se tiene la noción de "subálgebra".

Definición 3.3. *Sea $\mathscr{C}$ una categoría. Una categoría $\mathscr{S}$ es una* subcategoría *de $\mathscr{C}$ si cada objeto y cada morfismo de $\mathscr{S}$ lo es de $\mathscr{C}$ y además los morfismos idénticos de los objetos de $\mathscr{S}$ y la composición entre los morfismos de $\mathscr{S}$ son los mismos de la categoría $\mathscr{C}$.*

Ejemplo 3.2.

- La categoría $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ de los espacios vectoriales reales es una subcategoría de la categoría **Grp** de los grupos.

- Por la afirmación 1.2 la categoría **Sri** de los semirretículos inferiores es una subcategoría de la categoría **Ord** de los conjuntos ordenados.

- La categoría **Boo** de las álgebras booleanas es una subcategoría de la categoría **Red** de los retículos distributivos.

Los "homomorfismos" entre categorías se denominan funtores.

Definición 3.4. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías. Un* funtor *es una función $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ que a cada objeto A de $\mathscr{C}$ asigna un objeto $F(A)$ de $\mathscr{D}$ y a cada morfismo $A \xrightarrow{f} B$ de $\mathscr{C}$ asigna un morfismo $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$ de $\mathscr{D}$. Además se requiere que $F(gf) = F(g)F(f)$ para morfismos adecuados y que $F(i_A) = i_{F(A)}$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "gf"] & \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, "F(gf)"] & \\ F(B) \arrow[r, "F(g)"'] & F(C) \end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.3.

- El funtor de partes $P_* : \mathbf{Con} \longrightarrow \mathbf{Con}$. Para cada conjunto X, $P_*(X) = \mathcal{P}(X)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de X; para cada función $f : X \longrightarrow Y$, $P_*(f) : P_*(X) \longrightarrow P_*(Y)$ es la función imagen directa, $P_*(f)(S) = f(S)$ para cada subconjunto $S \subseteq X$.

- El funtor olvido $O : \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbf{Con}$. Para cada espacio vectorial $V = (V, +, \cdot, 0)$, $O(V) = V$ es el conjunto sin estructura; para cada transformación lineal $T : V \longrightarrow W$, $O(T) = T$ es la función T entre los conjuntos. En realidad este funtor olvido en **Con** se puede definir desde cualquiera de las categorías de "conjuntos con estructura" consideradas antes.

- En cualquier categoría $\mathscr{C}$ el funtor *idéntico* $I_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$ está definido como $I_{\mathscr{C}}(A) = A$, $I_{\mathscr{C}}(f) = f$.

Estos funtores a veces se denominan "covariantes" en contraste con los siguientes.

Definición 3.5. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías. Un* funtor contravariante *es una función $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ que a cada objeto A de $\mathscr{C}$ asigna un objeto $F(A)$ de $\mathscr{D}$ y a cada morfismo $A \xrightarrow{f} B$ de $\mathscr{C}$ asigna un morfismo $F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$ de $\mathscr{D}$. Además se requiere que $F(gf) = F(f)F(g)$ para morfismos adecuados y que $F(i_A) = i_{F(A)}$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "gf"] & \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) & \\ F(B) \arrow[u, "F(f)"] & F(C) \arrow[l, "F(g)"] \arrow[ul, "F(gf)"'] \end{tikzcd}$$

Así que un funtor contravariante invierte la composición.

Ejemplo 3.4. El funtor contravariante de partes $P^* : \mathbf{Con} \longrightarrow \mathbf{Con}$. Para cada conjunto X, $P^*(X) = \mathcal{P}(X)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de X; para cada función $f : X \longrightarrow Y$, $P^*(f) : P^*(Y) \longrightarrow P^*(X)$ es la función imagen recíproca, $P^*(f)(T) = f^{-1}(T)$ donde para cada subconjunto $T \subseteq Y$ es $f^{-1}(T) = \{x \in X \mid f(x) \in T\}$.

La comparación entre distintos funtores se logra mediante las transformaciones naturales.

Definición 3.6. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías y sean $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ funtores "paralelos" entre ellos. Una* transformación natural *de F en G, denotada $\tau : F \longrightarrow G$ consiste en un morfismo $\tau_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ en $\mathscr{D}$ para cada objeto A de $\mathscr{C}$, de tal manera que para cada morfismo $f : A \longrightarrow B$ en $\mathscr{C}$ el siguiente diagrama conmuta, esto es, $\tau_B F(f) = G(f)\tau_A$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ B & F(B) \arrow[r, "\tau_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.5. El determinante es una transformación natural. Fijado un entero positivo n, sea $F : \mathbf{Ani} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ el funtor que a cada anillo conmutativo A asigna el grupo lineal $F(A) = Gl_n(A)$ de todas las matrices invertibles $n \times n$ con la multiplicación y sea $G : \mathbf{Ani} \longrightarrow \mathbf{Grp}$ el funtor que a cada anillo conmutativo A asigna el grupo multiplicativo $G(A) = A^*$ de sus elementos invertibles. Para cualquier anillo conmutativo A sea $det_A : GL_n(A) \longrightarrow A^*$ la función determinante, este es un homomorfismo de grupos y además cumple las condiciones para una transformación natural $det : F \longrightarrow G$.

Definición 3.7. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías y sean $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ funtores "paralelos" entre ellos. Un* isomorfismo natural *es una transformación natural $\tau : F \longrightarrow G$ tal que para cada objeto A de $\mathscr{C}$ el morfismo τ_A es un isomorfismo.*

Con estas nociones se puede precisar cierta idea de "igualdad" entre categorías.

Definición 3.8. *Sean $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ categorías. Una* equivalencia *de categorías es un par de funtores $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$, $G : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{C}$ para los cuales existen isomorfismos naturales*

$$\varepsilon : I_{\mathscr{C}} \longrightarrow GF, \qquad \eta : I_{\mathscr{D}} \longrightarrow FG.$$

Si los funtores F, G son ambos covariantes, las categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son equivalentes*; si son ambos contravariantes, las categorías $\mathscr{C}$ y $\mathscr{D}$ son* dualmente equivalentes.

3.2. Funtores para conjuntos ordenados

Las primeras representaciones de conjuntos ordenados estudiadas en este trabajo pueden verse con facilidad como funtores.

Definición 3.9. *Si P es un conjunto ordenado entonces $F(P)$ denota el espacio topológico en el mismo conjunto P con la topología generada por los conjuntos $x \downarrow$ (afirmación 2.14).*

Afirmación 3.1. *Sean* $(P, \leq)$, $(Q, \leq)$ *conjuntos ordenados y* $f : P \longrightarrow Q$ *una función. La función* $f : (P, \leq) \longrightarrow (Q, \leq)$ *respeta el orden si y solo si es una función continua* $f : F(P) \longrightarrow F(Q)$.

Demostración. Sea $q\downarrow$ un abierto básico del espacio $F(Q)$, se debe probar que su imagen recíproca $f^{-1}(q\downarrow)$ es un abierto del espacio $F(P)$. Dado $b \in f^{-1}(q\downarrow)$, para el abierto básico $b\downarrow$ se tiene $b \in b\downarrow \subseteq f^{-1}(q\downarrow)$. En efecto, si $a \in b\downarrow$, esto es $a \leq b$, como f respeta el orden se sigue $f(a) \leq f(b)$. Ya que $b \in f^{-1}(q\downarrow)$ se tiene $f(b) \in q\downarrow$, es decir, $f(b) \leq q$. En consecuencia $f(a) \leq q$ y también $a \in f^{-1}(q\downarrow)$. De esta manera $f^{-1}(q\downarrow)$ es abierto y f es continua.
Sean $x, y \in P$ tales que $x \leq y$, se debe probar que $f(x) \leq f(y)$. Ahora $f(y) \in f(y)\downarrow$ luego $y \in f^{-1}\big(f(y)\downarrow\big)$. Puesto que $f(y)\downarrow$ es abierto y f es continua, $f^{-1}\big(f(y)\downarrow\big)$ es un abierto de $F(P)$ y existe algún abierto básico $z\downarrow$ con $y \in z\downarrow \subseteq f^{-1}\big(f(y)\downarrow\big)$. Ahora $y \in z\downarrow$ significa $y \leq z$ luego la hipótesis $x \leq y$ implica $x \leq z$, es decir, $x \in z\downarrow$. A continuación, de $z\downarrow \subseteq f^{-1}\big(f(y)\downarrow\big)$ se concluye $x \in f^{-1}\big(f(y)\downarrow\big)$, es decir, $f(x) \in f(y)\downarrow$, es decir, $f(x) \leq f(y)$. □

Afirmación 3.2. *F define un funtor* F : ***Ord*** $\longrightarrow$ ***Top***.

Demostración. A cada conjunto ordenado P se asigna el espacio topológico $F(P)$ y a cada función que respeta el orden $f : P \longrightarrow Q$ entre conjuntos ordenados se asigna la misma función $F(f) : F(P) \longrightarrow F(Q)$ que es continua por la afirmación 3.1, luego es un morfismo de la categoría **Top**.
Si $f : P \longrightarrow Q$, $g : Q \longrightarrow R$ son morfismos de **Ord**, esto es, funciones entre conjuntos ordenados que respetan el orden, entonces $F(gf) = F(g)F(f)$ porque, en realidad, $F(f)$ es la misma función f.
Por fin, para cada conjunto ordenado P la función idéntica $i_p : P \longrightarrow P$ satisface $F(i_p) = i_{F(P)}$ porque $F(i_p)$ es la misma función idéntica en P. □

Así que la construcción realizada en el capítulo 2 en verdad corresponde a un funtor en la categoría de los espacios topológicos.

Todo semirretículo inferior $(S, \wedge)$ es, en particular, un conjunto ordenado luego igual que antes se le asocia el espacio topológico $F(S)$.

Afirmación 3.3. *Sean* $(S, \wedge)$, $(T, \wedge)$ *semirretículos inferiores y* $f : S \longrightarrow T$ *una función. Si la función* $f : (S, \wedge) \longrightarrow (T, \wedge)$ *es un homomorfismo de semirretículos inferiores entonces es una función continua* $f : F(S) \longrightarrow F(T)$.

Demostración. Siendo un homomorfismo de semirretículos, f respeta el orden (afirmación 1.2) luego por la afirmación 3.1 es una función continua. □

Nota 3.1. El recíproco no vale en este caso, véase la nota 1.2.

Afirmación 3.4. *F define un funtor* F : ***Sri*** $\longrightarrow$ ***Top***.

Demostración. Esta es la restricción a la subcategoría **Sri** del funtor F : **Ord** $\longrightarrow$ **Top**. □

La representación de los retículos distributivos también corresponde a un funtor.

Definición 3.10. *Si A es un retículo distributivo entonces $T(A)$ denota el espacio topológico en el conjunto $\mathbb{P}$ de los ideales primos de A con la topología generada por los P_a (afirmación 2.15).*

Afirmación 3.5. *Sean A, B retículos distributivos y $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de retículos.*

i) Si I es un ideal de B entonces $f^{-1}(I)$ es un ideal de A.

ii) Si P es un ideal primo de B entonces $f^{-1}(P)$ es un ideal primo de A.

iii) Si P es un ideal primo de B y $a \in A$ entonces $f^{-1}(P) \in P_a$ si y solo si $P \in P_{f(a)}$.

Demostración.

i) Como $f(0) = 0 \in I$ se tiene $0 \in f^{-1}(I)$. Dados $a, b \in f^{-1}(I)$ entonces $f(a), f(b) \in I$ y como I es un ideal $f(a) \vee f(b) \in I$. Pero $f(a) \vee f(b) = f(a \vee b)$ luego $f(a \vee b) \in I$ y así $a \vee b \in f^{-1}(I)$. Por fin, si $a \in f^{-1}(I)$ y $c \leq a$ en A entonces $f(a) \in I$ y $f(c) \leq f(a)$. Siendo I un ideal esto implica $f(c) \in I$, es decir, $c \in f^{-1}(I)$.

ii) Si $1 \in f^{-1}(P)$ entonces $f(1) \in P$ pero $f(1) = 1$ luego $1 \in P$, lo cual es absurdo. Así que $1 \notin f^{-1}(P)$. Dados $a, b \in A$ tales que $a \wedge b \in f^{-1}(P)$ se tiene $f(a \wedge b) \in P$ pero $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ luego $f(a) \wedge f(b) \in P$. Siendo P un ideal primo esto implica $f(a) \in P$ o $f(b) \in P$, es decir, $a \in f^{-1}(P)$ o $b \in f^{-1}(P)$.

iii) $f^{-1}(P) \in P_a$ si y solo si $a \notin f^{-1}(P)$, si y solo si $f(a) \notin P$, si y solo si $P \in P_{f(a)}$. □

Definición 3.11. *Si $f : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de retículos distributivos entonces $T(f) : T(B) \longrightarrow T(A)$ denota la función imagen recíproca, esto es, $T(f)(P) = f^{-1}(P)$ para cada ideal primo P de B.*

Nota 3.2. Por (*ii*) de la afirmación 3.5 esta función está bien definida porque $f^{-1}(P)$ es un ideal primo de A, es decir, $f^{-1}(P) \in T(A)$.

Afirmación 3.6. *Si $f : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de retículos distributivos entonces $T(f) : T(B) \longrightarrow T(A)$ es una función continua.*

Demostración. Basta observar que la imagen recíproca de un abierto básico es abierta. Dado un abierto básico P_a en $T(A)$, para un ideal primo P de B se tiene $P \in (T(f))^{-1}(P_a)$ si y solo si $T(f)(P) \in P_a$, si y solo si $f^{-1}(P) \in P_a$. Por (*iii*) de la afirmación 3.5 esto se tiene si y solo si $P \in P_{f(a)}$. Es decir, $(T(f))^{-1}(P_a) = P_{f(a)}$ que es abierto (básico) en $T(B)$. □

Afirmación 3.7. *T define un funtor contravariante T : **Red** $\longrightarrow$ **Top**.*

Demostración. Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ son homomorfismos de retículos distributivos, para cada ideal primo Q de C se tiene $T(gf)(Q) = (gf)^{-1}(Q) = f^{-1}(g^{-1}(Q)) = T(f)T(g)(Q)$, luego $T(gf) = T(f)T(g)$. Por otro lado, para cada ideal primo P de B se tiene $T(i_B)(P) = i_B^{-1}(P) = P = i_{T(B)}(P)$, luego $T(i_B) = i_{T(B)}$. □

También se puede considerar un funtor muy natural en el sentido "contrario", de los espacios topológicos a las álgebras booleanas.

Definición 3.12. *Si X es un espacio topológico entonces $K(X)$ denota el álgebra booleana de los abiertos cerrados de X (teorema 2.5).*

Afirmación 3.8. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Si A es un abierto cerrado de Y entonces $f^{-1}(A)$ es un abierto cerrado de X.*

Demostración. $f^{-1}(A)$ es abierto por definición de continuidad. Como A es cerrado, A^c es abierto y $f^{-1}(A^c)$ es abierto, pero $f^{-1}(A^c) = \left[f^{-1}(A)\right]^c$ luego $f^{-1}(A)$ es cerrado. □

Definición 3.13. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua de espacios topológicos entonces $K(f) : K(Y) \longrightarrow K(X)$ denota la función imagen recíproca, esto es, $K(f)(A) = f^{-1}(A)$ para cada abierto cerrado A de Y.*

Afirmación 3.9. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua de espacios topológicos entonces $K(f) : K(Y) \longrightarrow K(X)$ es un homomorfismo de álgebras booleanas.*

Demostración. En efecto, $K(f)(\varnothing) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ y $K(f)(Y) = f^{-1}(Y) = X$. Por otro lado $K(f)(A \cup B) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = K(f)(A) \cup K(f)(B)$ y $K(f)(A \cap B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = K(f)(A) \cap K(f)(B)$. Además $K(f)(A^c) = f^{-1}(A^c) = \left[f^{-1}(A)\right]^c = \left[K(f)(A)\right]^c$. □

Afirmación 3.10. *K define un funtor contravariante K : **Top** $\longrightarrow$ **Boo**.*

Demostración. Esta prueba es igual que la de la afirmación 3.7. □

3.3. Equivalencia para retículos distributivos

Los funtores considerados en la sección anterior se pueden restringir de manera adecuada para que las correspondencias biyectivas obtenidas en el capítulo 2 se extiendan a equivalencias duales entre ciertas categorías.
Para los espacios de pre-Stone se debe considerar una clase especial de funciones.

Definición 3.14. *Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es* fuertemente continua *si para cada abierto compacto B de Y la imagen recíproca $f^{-1}(B)$ es abierto compacto de X.*

Afirmación 3.11.

i) *Todo homeomorfismo es una función fuertemente continua.*

ii) *La compuesta de funciones fuertemente continuas es fuertemente continua.*

iii) *Si los abiertos compactos del espacio Y constituyen una base para la topología entonces toda función fuertemente continua $f : X \longrightarrow Y$ es continua.*

La condición (*iii*) la satisfacen, por ejemplo, los espacios coherentes y los espacios de pre-Stone.

Demostración.

i) Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo y sea B un abierto compacto de Y. Como B es abierto y f continua, $f^{-1}(B)$ es abierto en X; como B es compacto y la función inversa f^{-1} es continua, $f^{-1}(B)$ es compacto en X.

ii) Esto se demuestra igual que la composición de la continuidad.

iii) Si A es cualquier abierto de Y se tiene $A = \bigcup_{i \in I} B_i$ para alguna familia $\{B_i\}$ de abiertos compactos. En consecuencia $f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ con cada $f^{-1}(B_i)$ abierto compacto. En particular $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$ es abierto luego f es continua. □

Con estos elementos se puede definir una categoría nueva.

Definición 3.15. *La categoría de los* espacios de pre-Stone*, denotada* ***pSt****, tiene como objetos todos los espacios topológicos de pre-Stone y como morfismos entre ellos todas las funciones fuertemente continuas, siendo la composición la usual entre funciones.*

Por (*i*) y (*ii*) de la afirmación 3.11, en efecto se trata de una categoría. Por (*iii*) además se trata de una subcategoría de la categoría **Top** de los espacios topológicos: todos los objetos de **pSt** lo son de **Top**, lo mismo sucede con los morfismos y la composición entre estos últimos es la misma. Más aún, los isomorfismos de **pSt** también son los homeomorfismos.

Afirmación 3.12. *Si $f : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de retículos distributivos entonces la función $T(f) : T(B) \longrightarrow T(A)$ (definición 3.11) es fuertemente continua.*

Demostración. Por la afirmación 2.16 un abierto compacto de $T(A)$ tiene la forma P_a para algún $a \in A$. En la prueba de la afirmación 3.6 se concluyó que $(T(f))^{-1}(P_a) = P_{f(a)}$, y de nuevo por la afirmación 2.16 este conjunto $P_{f(a)}$ es un abierto compacto de $T(B)$. Es decir, $T(f)$ es fuertemente continua. □

Dado que para cada retículo distributivo A el espacio $T(A)$ es un espacio de pre-Stone (teorema 2.2), esta afirmación 3.12 significa que en realidad el funtor T tiene su imagen en la subcategoría **pSt**, es decir, por restricción se tiene el funtor

$$T : \mathbf{Red} \longrightarrow \mathbf{pSt}.$$

Ahora se busca construir un funtor en el sentido contrario.

Definición 3.16. *Si X es un espacio de pre-Stone entonces $R(X)$ denota el retículo distributivo C de los abiertos compactos de X (afirmación 2.17).*

Definición 3.17. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función fuertemente continua entre espacios de pre-Stone entonces $R(f) : R(Y) \longrightarrow R(X)$ denota la función imagen recíproca, esto es, $R(f)(B) = f^{-1}(B)$ para cada abierto compacto B de Y.*

Afirmación 3.13. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función fuertemente continua entre espacios de pre-Stone entonces $R(f) : R(Y) \longrightarrow R(X)$ es un homomorfismo de retículos distributivos.*

Demostración. En efecto, $R(f)(\varnothing) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ y $R(f)(Y) = f^{-1}(Y) = X$. Por otro lado $R(f)(A \cup B) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = R(f)(A) \cup R(f)(B)$ y $R(f)(A \cap B) = f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = R(f)(A) \cap R(f)(B)$. □

Afirmación 3.14. *R define un funtor contravariante $R : \boldsymbol{pSt} \longrightarrow \boldsymbol{Red}$.*

Demostración. Esta prueba es igual que la de la afirmación 3.7. □

En resumen, ahora se tienen los dos funtores contravariantes

$$R : \mathbf{pSt} \longrightarrow \mathbf{Red}, \qquad\qquad T : \mathbf{Red} \longrightarrow \mathbf{pSt}$$

que dan lugar a los dos funtores compuestos (ya no contravariantes)

$$RT : \mathbf{Red} \longrightarrow \mathbf{Red}, \qquad\qquad TR : \mathbf{pSt} \longrightarrow \mathbf{pSt}.$$

Si A es un retículo distributivo, $RT(A)$ es el retículo distributivo de los abiertos compactos del espacio topológico $T(A)$. Por la afirmación 2.16, estos son precisamente los conjuntos $P_a = \{I \textit{ ideal primo de } A \mid a \notin I\}$ con $a \in A$.

Definición 3.18. *Si A es un retículo distributivo entonces $\pi_A : A \longrightarrow RT(A)$ es el homomorfismo de retículos definido como*

$$\pi_A(a) = P_a = \big\{I \textit{ ideal primo} \bigm| a \notin I\big\}$$

para cada $a \in A$.

Afirmación 3.15. *Para cada retículo distributivo A, $\pi_A : A \longrightarrow RT(A)$ es un isomorfismo de retículos distributivos.*

Demostración. En el teorema 1.8 se probó que π_A es un homomorfismo inyectivo de A en $\mathcal{P}(X)$. Pero su recorrido es precisamente $RT(A)$, luego también es sobreyectivo. □

Afirmación 3.16. *La correspondencia anterior define un isomorfismo natural $\pi : I \longrightarrow RT$ (aquí I es el funtor idéntico en la categoría* ***Red****).*

Demostración. Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de retículos distributivos. De la afirmación 3.5 se concluye que el morfismo $RT(f) : RT(A) \longrightarrow RT(B)$ está dado para cada P_a con $a \in A$ como $RT(f)(P_a) = P_{f(a)}$. Es decir, $RT(f)\pi_A(a) = RT(f)(P_a) = P_{f(a)} = \pi_B(f(a)) = \pi_B I(f)(a)$ y así $RT(f)\pi_A = \pi_B I(f)$, es decir, π es una transformación natural. Por la afirmación 3.15 cada π_A es un isomorfismo luego π es un isomorfismo natural. □

Definición 3.19. *Si X es un espacio de pre-Stone entonces $h_X : X \longrightarrow TR(X)$ es la función definida como*

$$h_X(x) = \big\{A \textit{ abierto compacto} \bigm| x \notin A\big\}$$

para cada $x \in X$.

Afirmación 3.17. *Cada función h_X es una función fuertemente continua.*

Demostración. Según el teorema 2.3, h_X es un homeomorfismo luego por la afirmación 3.11 es fuertemente continua. $\square$

Afirmación 3.18. *La correspondencia anterior define un isomorfismo natural $h : I \longrightarrow TR$ (aquí I es el funtor idéntico en la categoría **pSt**).*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función fuertemente continua entre espacios de pre-Stone y sea $x \in X$. Para el ideal primo $h_X(x)$ de $TR(X)$, dado un abierto compacto B de Y se tiene: $B \in TR(f)(h_X(x))$ si y solo si $f^{-1}(B) \in h_X(x)$, si y solo si $f^{-1}(B) \in \{A \text{ abierto compacto} \mid x \notin A\}$, si y solo si $x \notin f^{-1}(B)$, si y solo si $f(x) \notin B$. En consecuencia

$$\begin{aligned} TR(f)(h_X(x)) &= \{B \text{ abierto compacto} \mid f(x) \notin B\} \\ &= h_Y(f(x)) \end{aligned}$$

de donde $h_Y I(f) = h_Y f = TR(f)h_X$, con lo cual h es una transformación natural. Por el teorema 2.3 cada h_X es un homeomorfismo luego h es un isomorfismo natural. $\square$

Teorema 3.1. *Las categorías **Red** y **pSt** son dualmente equivalentes.*

Demostración. Para los funtores contravariantes R : **pSt** $\longrightarrow$ **Red** y T : **Red** $\longrightarrow$ **pSt** existen isomorfismos naturales $\pi : I \longrightarrow RT$ y $h : I \longrightarrow TR$. $\square$

3.4. Equivalencia para álgebras booleanas

Según el ejemplo 3.2, la categoría **Boo** es una subcategoría de **Red**. Por otro lado, por la afirmación 2.12 todo espacio topológico de Stone es un espacio de pre-Stone.

Afirmación 3.19. *Sean X, Y espacios topológicos de Stone. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y solo si es fuertemente continua.*

Demostración. Supóngase que f es continua y sea B un abierto compacto de Y. Como se observó en la prueba de la afirmación 2.22, en un espacio de Stone los abiertos compactos son precisamente los abiertos cerrados, luego B es abierto cerrado. Por la afirmación 3.8 $f^{-1}(B)$ es abierto cerrado, es decir, abierto compacto. De esta manera, f es fuertemente continua.
En el otro sentido, por la afirmación 3.11 toda función fuertemente continua entre espacios de (pre-)Stone es continua. $\square$

Definición 3.20. *La categoría de los* espacios de Stone*, denotada **Sto**, tiene como objetos todos los espacios topológicos de Stone y como morfismos entre ellos todas las funciones continuas, siendo la composición la usual entre funciones.*

Por la afirmación 3.19 esta categoría **Sto** es una subcategoría de la categoría **pSt** de los espacios de pre-Stone.
Ahora el funtor T : **Red** $\longrightarrow$ **Top** se puede restringir a la categoría **Boo**, y como la imagen

por este funtor de cada álgebra booleana es un espacio de Stone (afirmación 2.23) se obtiene el funtor $T : \mathbf{Boo} \longrightarrow \mathbf{Sto}$.
Por el otro lado, en la prueba de la afirmación 2.22 se observa que en un espacio de Stone el retículo de los abiertos compactos coincide con el de los abiertos cerrados. Esto significa que en la subcategoría **Sto** los funtores R y K coinciden, y de esta manera se obtiene el funtor $K : \mathbf{Sto} \longrightarrow \mathbf{Boo}$.
El par de funtores contravariantes

$$K : \mathbf{Sto} \longrightarrow \mathbf{Boo}, \qquad\qquad T : \mathbf{Boo} \longrightarrow \mathbf{Sto}$$

por composición da lugar al par de funtores

$$KT : \mathbf{Boo} \longrightarrow \mathbf{Boo}, \qquad\qquad TK : \mathbf{Sto} \longrightarrow \mathbf{Sto}.$$

Según la afirmación 3.15, para cada álgebra booleana la función $\pi_B : B \longrightarrow KT(B)$ es un isomorfismo de retículos distributivos; y por el teorema 1.10 en realidad se trata de un isomorfismo de álgebras booleanas. De esta manera el isomorfismo natural se restringe a la categoría **Boo**.
Por otro lado, según el teorema 2.3, para cada espacio de Stone la función $h_X : X \longrightarrow TK(X)$ es un homeomorfismo, así que este isomorfismo natural se restringe a la categoría **Sto**.

Teorema 3.2. *Las categorías **Boo** y **Sto** son dualmente equivalentes.*

Demostración. De nuevo, para los funtores $K : \mathbf{Sto} \longrightarrow \mathbf{Boo}$ y $T : \mathbf{Boo} \longrightarrow \mathbf{Sto}$ existen isomorfismos naturales $\pi : I \longrightarrow KT$ y $h : I \longrightarrow TK$. $\square$

Conclusiones

En el largo camino recorrido en este trabajo se pudieron establecer de manera completa los dos célebres teoremas de Stone: la representación de las álgebras booleanas y la representación de los retículos distributivos, entendidos aquí siempre con máximo y mínimo. En cada caso se logró decantar el enunciado preciso del resultado y desarrollar su demostración detallada. Además todo esto se realizó en tres niveles sucesivos: los conjuntos, los espacios topológicos y las categorías.

A partir de este estudio hay varias líneas posibles de profundización e investigación futura. Por un lado, están por considerar los casos de retículos distributivos sin máximo o sin mínimo. Otro tema de gran interés es establecer la conexión de estas representaciones con el espectro primo de los ideales conmutativos. Por fin, está abierto el problema de las posibles generalizaciones de la dualidad de Stone, bien sea a la llamada dualidad de Priestley o a contextos categóricos abstractos.

Al considerar en retrospectiva este documento se confirman de manera plena las palabras proféticas de Marshall Stone [10] en la introducción de su célebre artículo de 1936:

> *"Por lo tanto, es natural suponer que un estudio de las álgebras booleanas por los métodos del álgebra moderna resultará fértil en resultados importantes y útiles".*

Bibliografía

[1] Adámek, Jiří, Herrlich, Horst, and Strecker, George E., *Abstract and Concrete Categories: The Joy of Cats*. New York: John Wiley, 1990.

[2] Balbes, Raymond, and Dwinger, Philip, *Distributive Lattices*. Columbia (Missouri): University of Missouri Press, 1974.

[3] Burris, Stanley, and Sankappanavar, H.P., *A Course in Universal Algebra*. New York: Springer, 1981.

[4] Carrillo, Edinson, *Aplicaciones de las álgebras booleanas*. Trabajo de grado (Carrera de Matemáticas). Ibagué: Universidad del Tolima, 2016.

[5] Caviedes, Oscar F. y Lozano, Leidy G., *Generalizaciones de una definición iterativa de álgebra booleana*. Trabajo de grado (Carrera de Matemáticas). Ibagué: Universidad del Tolima, 2014.

[6] Díaz, Daniela, *Álgebras booleanas libres y gráficos Alfa*. Trabajo de grado (Carrera de Matemáticas). Ibagué: Universidad del Tolima, 2016.

[7] Givant, Steven, and Halmos, Paul, *Introduction to Boolean Algebras*. New York: Springer, 2009.

[8] Johnstone, Peter T., *Stone Spaces*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

[9] Mac Lane, Saunders, *Categories for the Working Mathematician*. New York: Springer-Verlag, 1971.

[10] Stone, Marshall H., "The Theory of Representations for Boolean Algebras". *Transactions of the American Mathematical Society* **40** 1 (1936) 37–111.

[11] Taboada, Jorge y Rodríguez, Danilo, *Una demostración de la equivalencia entre los gráficos Alfa y la lógica proposicional*. Trabajo de grado (Carrera de Matemáticas). Ibagué: Universidad del Tolima, 2010.

[12] Willard, Stephen, *General Topology*. Reading (Massachusetts): Addison-Wesley, 1970.

	PROCEDIMIENTO DE FORMACION DE USUARIOS	Página 1 de 3
Universidad del Tolima	AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL	Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Los suscritos:

Luisa Fernanda Niño Paez	con C.C N°	1110568387
Luisa Fernanda Madrigal Ducuara	con C.C N°	1110178519
	con C.C N°	
	con C.C N°	
	con C.C N°	

Manifiesto (an) la voluntad de:

Autorizar [X]

No Autorizar [ ] Motivo: Si no autoriza la publicación explicar el motivo.

La consulta en físico y la virtualización de **mi OBRA**, con el fin de incluirlo en el repositorio institucional de la Universidad del Tolima. Esta autorización se hace sin ánimo de lucro, con fines académicos y no implica una cesión de derechos patrimoniales de autor.

Manifestamos que se trata de una OBRA original y como de la autoría de LA OBRA y en relación a la misma, declara que la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, se encuentra, en todo caso, libre de todo tipo de responsabilidad, sea civil, administrativa o penal (incluido el reclamo por plagio).

Por su parte la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA se compromete a imponer las medidas necesarias que garanticen la conservación y custodia de la obra tanto en espacios físico como virtual, ajustándose para dicho fin a las normas fijadas en el Reglamento de Propiedad Intelectual de la Universidad, en la Ley 23 de 1982 y demás normas concordantes.

La publicación de:

Trabajo de grado	X	Artículo		Proyecto de investigación	
Libro		Parte de libro		Documento de conferencia	
Patente		Informe técnico			
Otro: (fotografía, mapa, radiografía, película, video, entre otros)					

Producto de la actividad académica/científica/cultural en la Universidad del Tolima, para que con fines académicos e investigativos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad del

Tolima. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al artículo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca Rafael Parga Cortes de la Universidad del Tolima.

De conformidad con lo establecido en la Ley 23 de 1982 en los artículos 30 "...***Derechos Morales. El autor tendrá sobre su obra un derecho perpetuo, inalienable e irrenunciable***" **y 37** "...***Es lícita la reproducción por cualquier medio, de una obra literaria o científica, ordenada u obtenida por el interesado en un solo ejemplar para su uso privado y sin fines de lucro***". **El artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993,** "***los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores***" **y en su artículo 61 de la Constitución Política de Colombia.**

- Identificación del documento:

Título completo: **REPRESENTACIONES DE ESTRUCTURAS ORDENADAS**

- Trabajo de grado presentado para optar al título de:

PROFESIONAL EN MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA

- Proyecto de Investigación correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado "Trabajo de Grado"): ______

- Informe Técnico correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado "Trabajo de Grado"): ______

- Artículo publicado en revista: ______

- Capítulo publicado en libro: ______

- Conferencia a la que se presentó: ______

Universidad del Tolima	**PROCEDIMIENTO DE FORMACIÓN DE USUARIOS** **AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL**	Página **3** de **3**
		Código: GB-P04-F03
		Versión: 03
		Fecha Aprobación: 15 de Febrero de 2017

Quienes a continuación autentican con su firma la autorización para la digitalización e inclusión en el repositorio digital de la Universidad del Tolima, el:

Día: **23** Mes: **FEBRERO** Año: **2018**

Autores: Firma

Nombre:	LUISA FERNANDA NIÑO PAEZ	Luisa Fernanda Niño P.	C.C.	1110568387
Nombre:	LUISA FERNANDA MADRIGAL DUCUARA		C.C.	1110178519
Nombre:			C.C.	
Nombre:			C.C.	

El autor y/o autores certifican que conocen las derivadas jurídicas que se generan en aplicación de los principios del derecho de autor.